

Topologia

DANIEL MIRANDA MACHADO

Texto: Daniel Miranda Machado.

Universidade Federal do ABC.

Composição em formato 17×24 cm.

Identidade editorial Noite Mineral: azul profundo, violeta mineral, azul ardósia, cobre/terracota, marfim frio e cinza névoa.

Licença e atribuições

© 2019 Daniel Miranda.

Licenciado sob a Creative Commons Attribution 4.0. Você não pode usar esse arquivo exceto em conformidade com a Licença. Você pode obter uma cópia da Licença em <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>.

A menos que exigido por lei aplicável ou acordado por escrito, o livro distribuído sob a Licença é distribuído “como está”, sem garantias ou condições de qualquer tipo, expressa ou implícita. Consulte a Licença para permissões específicas e limitações sob a Licença.



Sumário

Observações	ix
Notação	x
Introdução	xi
1 Espaços Métricos	1
1.1 Da distância à estrutura	1
1.2 Métricas e primeiros exemplos	2
1.2.1 Bolas e conjuntos abertos	5
1.2.2 A topologia determinada pela métrica	9
1.2.3 Quando distâncias diferentes geram os mesmos abertos . .	10
1.3 Continuidade	14
1.4 Sequências e Convergência	18
1.5 Vizinhanças	21
1.6 Produtos finitos de espaços métricos	24
2 Topologia	27
2.1 Definição	27
2.1.1 Exemplos	28
2.2 Comparando Topologias	35
2.3 Conjuntos Fechados	37
2.4 Topologia Gerada	41
2.5 Bases	44
2.5.1 Forma da Topologia Gerada	53
2.5.2 Topologia da Ordem	55
2.6 Fecho e Interior	56

2.7	Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto	62
2.8	Pontos de acumulação e conjuntos densos	68
2.9	Sequências	76
3	Funções Contínuas	78
3.1	Continuidade e imagens inversas	78
3.1.1	A leitura local	80
3.1.2	Composição	81
3.2	Homeomorfismos e Homeomorfismos Locais	82
3.2.1	Homeomorfismos locais	84
3.2.2	Aplicações abertas, fechadas e mergulhos	85
4	Construções de Espaços Topológicos	88
4.1	Subespaços	88
4.2	Topologias Inicial e Final	95
4.2.1	Topologia Inicial	95
4.2.2	Topologia Final	97
4.2.3	Sub-bases e continuidade	97
4.2.4	Propriedades Universais	98
4.2.5	Exemplos	100
4.3	Topologia Produto	101
4.3.1	Produto Finito	102
4.3.2	Produto Cartesiano Infinito	106
4.3.3	Produto Infinito	107
4.3.4	Topologia da Caixa	113
4.4	Espaços Quocientes	115
4.4.1	Relações de equivalência e a topologia quociente	116
4.4.2	A propriedade universal	116
4.4.3	Aplicações quocientes	117
4.4.4	Conjuntos saturados	119
4.4.5	Exemplos geométricos	120
4.5	Soma de Espaços Topológicos	124
5	Axiomas de Separação	127
5.1	Separando pontos	127
5.2	Comportamento sob construções	130
5.2.1	Subespaços	130
5.2.2	Produtos	131
5.2.3	Somas	131

5.2.4	Quocientes	132
5.2.5	Resumo	132
6	Enumerabilidade	135
6.1	Axiomas de Enumerabilidade	135
6.2	Sequências	141
6.3	Relações entre os Axiomas da Enumerabilidade	144
6.4	Comportamento Topológico	148
6.4.1	Subespaços	148
6.4.2	Quocientes	149
6.4.3	Produtos Finitos	150
6.4.4	Produtos Infinitos	151
6.4.5	Somas	153
6.4.6	Tabela de comportamento topológico	154
6.5	Variedades Topológicas	155
7	Compacidade	159
7.1	Definição e primeiros exemplos	160
7.2	Primeiras propriedades fundamentais	164
7.2.1	Compacidade na reta	165
7.2.2	Preservação e produtos finitos	166
7.3	Critérios de compacidade	167
7.4	Compacidade, separação e aplicações clássicas	170
7.5	Noções próximas da compacidade	173
7.6	Consequências métricas da compacidade	175
7.7	Produtos e o teorema de Tychonoff	177
7.7.1	Comportamento sob construções	177
7.7.2	Produto de compactos	177
7.8	Caracterizações em espaços métricos	182
7.9	Compacidade local	186
7.10	Comportamento da compacidade local	188
7.10.1	Subespaços localmente fechados	190
7.11	Compactificação de Alexandroff	192
8	Redes, filtros e ultrafiltros	199
8.1	Por que sequências não bastam	200
8.2	Redes	201
8.2.1	Conjuntos dirigidos	201
8.2.2	Fecho, continuidade e separação	203

8.3	Sub-redes e pontos de aderência	206
8.4	Filtros	208
8.4.1	Filtros e bases de filtros	208
8.4.2	Imagens e produtos	210
8.4.3	A equivalência entre redes e filtros	211
8.5	Ultrafiltros e redes universais	213
8.5.1	Ultrafiltros	213
8.5.2	Redes universais	216
8.6	Compacidade revisitada	217
8.7	Uma segunda prova do teorema de Tychonoff	220
9	Conexidade	224
9.1	Conjuntos conexos	224
9.2	Conexidade e continuidade	225
9.3	Intervalos e a reta	226
9.4	Uniões, fechos e componentes	227
9.4.1	Componentes conexas	228
9.5	Produtos, quocientes e somas	228
9.6	Conexidade por caminhos	230
9.7	Conexidade local	233
9.7.1	Comportamento topológico	234
10	Espaços Regulares e Normais	237
10.1	Espaços regulares	237
10.2	Espaços normais	239
10.3	O lema de Urysohn	242
10.3.1	O lema de Jones	243
10.4	O teorema de extensão de Tietze	244
10.5	Espaços completamente regulares	246
10.5.1	Funções como coordenadas	248
10.6	Comportamento topológico	249
10.7	Compactificação de Stone–Čech	250
11	Espaços Metrizáveis	254
11.1	Métricas compatíveis	254
11.2	O que uma métrica força	255
11.3	Produtos enumeráveis e o cubo de Hilbert	257
11.4	De uma base enumerável a coordenadas enumeráveis	259
11.5	O Teorema de Metrização de Urysohn	261

11.6	O cubo de Hilbert como espaço universal	263
11.7	Fronteiras da metrizabilidade	263
12	Espaços Métricos Completos	266
12.1	Sequências de Cauchy e completude	266
12.2	Completamento	268
12.3	O Teorema do Ponto Fixo de Banach	271
12.3.1	Uma aplicação a equações diferenciais	272
12.4	O teorema de interseção de Cantor	274
12.5	Categoria de Baire	275
13	Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento	280
13.1	Homotopia e caminhos	281
13.1.1	Concatenação e inversão	283
13.2	O grupo fundamental	285
13.2.1	Aplicações contínuas e invariância	287
13.2.2	Esferas de dimensão pelo menos dois	289
13.3	Espaços de recobrimento	290
13.3.1	Exemplos	292
13.4	Levantamento de caminhos	293
13.5	Levantamento de homotopias	295
13.6	Recobrimentos e o grupo fundamental	297
13.7	O grupo fundamental do círculo	299
13.7.1	Uma aplicação: o disco não retrai sobre o círculo	301
13.8	O grupo fundamental do espaço projetivo	301
13.9	Daqui em diante: topologia algébrica	303
13.10	Exercícios	303
	Índice de topologias	313

Observações

Essas notas correspondem aos apontamentos para o curso de Topologia ministrado em 2019. Essas notas foram escritas em tempo real e praticamente não revistas, podendo dessa forma apresentar erros ou seções incompletas.

Nós ficaríamos muito gratos se nos fossem enviadas sugestões de melhorias ou que nos fossem apontados erros porventura encontrados.

“Aos azuis, supressão de cinzas do mundo”

Notação

Notação	Significado
$\wedge$	ínfimo
$\vee$	supremo
$\mathcal{T}$	topologia
$d(x, y)$	distância
$B(x; \varepsilon)$	bola aberta
$B[x; \varepsilon]$	bola fechada
$\mathcal{T}_d$	topologia da métrica
$\mathcal{V}(x)$	vizinhança de x
$\mathcal{P}(X)$	partes de X
$\mathcal{B}$	base para a topologia
$\mathcal{T}(\mathcal{C})$	topologia gerada
$\overline{A}$	fecho de A
A°	interior de A
$\text{fr}(A) = \partial(A)$	fronteira de A
A'	conjunto derivado de A
$\{x_n\}_{n=1}^\infty \quad \{x_n\} \quad x_n$	sequência
$\mathcal{T}_{f_\lambda}$	topologia inicial ou topologia fraca
$\mathcal{T}^{f_\lambda}$	topologia final
$X/\sim$	quociente
$\mathcal{T}_\sim$	topologia quociente

Introdução

Há movimentos matemáticos que enriquecem um objeto com coordenadas, distâncias, operações ou medidas. A topologia começa no sentido contrário: pergunta quanto podemos esquecer sem perder proximidade, continuidade e forma.

No plano euclidiano medimos comprimentos e ângulos, mas muitos argumentos sobre continuidade não usam números, retas ou coordenadas. Usam apenas a maneira como pequenas regiões se dispõem em torno de cada ponto. Conservar essa informação e abandonar o restante nos leva da geometria métrica à topologia e permite reconhecer o mesmo argumento em espaços muito diferentes.

Esse processo exige cuidado. Quando retiramos hipóteses, conclusões familiares podem falhar: sequências talvez não descrevam toda a aproximação, e propriedades evidentes em $\mathbb{R}^n$ podem depender silenciosamente da métrica. Por isso, uma pergunta acompanhará todo o livro: *qual parte da estrutura está realmente sendo usada?* Ler uma demonstração topológica é, muitas vezes, localizar a resposta exata.

Começaremos pelos espaços métricos. Eles oferecem um terreno concreto, no qual bolas descrevem vizinhanças e a distância controla convergência e continuidade. Veremos métricas discretas, espaços de funções e outras geometrias nas quais a intuição euclidiana precisa ser ajustada. Esse será nosso laboratório: as ideias topológicas aparecerão antes de receber sua forma abstrata.

Em seguida, deixaremos de medir distâncias e passaremos a trabalhar diretamente com conjuntos abertos. Uma topologia sobre um conjunto determina quais regiões funcionam como vizinhanças e, com isso, decide o significado de interior, fecho, fronteira, convergência e continuidade. O mesmo conjunto pode carregar topologias muito diferentes; mudar a topologia é mudar quais aproximações são visíveis.

Depois de estabelecer essa linguagem, estudaremos as funções contínuas e os homeomorfismos, isto é, as transformações que preservam a estrutura topológica.

Construiremos ainda novos espaços por subespaços, produtos, quocientes e topologias geradas por aplicações. Mais que um catálogo, essas construções mostram como exemplos complexos nascem de operações elementares.

A parte seguinte do livro investiga diferentes formas de controle. Os axiomas de separação distinguem pontos e conjuntos por abertos; as propriedades de enumerabilidade procuram descrições manejáveis para topologias grandes; a compacidade converte informação global em controle finito; a conexidade impede decomposições em partes abertas separadas. Por fim, regularidade e normalidade articulam separação e continuidade. Boa parte do trabalho será entender o que cada condição acrescenta e quais implicações exigem hipóteses adicionais.

O texto foi escrito para um primeiro contato com topologia geral. Familiaridade com conjuntos, funções, sequências e demonstrações de um curso inicial de análise é suficiente; álgebra linear aparecerá apenas em exemplos ocasionais. A abstração não é um pré-requisito a ser trazido pronto. Ela é uma habilidade construída ao longo da leitura, na passagem constante entre definições e exemplos.

Ao encontrar uma definição, procure-a na reta, em um conjunto finito e nas topologias discreta e indiscreta. Ao ler um teorema, retire mentalmente uma hipótese e tente produzir um contraexemplo. Ao resolver um exercício, identifique o ponto em que cada hipótese entrou. Os contraexemplos não vivem à margem da teoria: eles revelam o contorno preciso dos conceitos.

O objetivo destas notas não é acumular uma coleção de termos terminados em “compacto”, “conexo” ou “normal”. É aprender a reconhecer a estrutura invisível que sustenta um argumento e a distinguir o que depende de uma régua daquilo que depende apenas de vizinhanças. A topologia começa quando a distância deixa de ser indispensável, mas a ideia de estar perto permanece.

Espaços Métricos

1.1 Da distância à estrutura

Em análise, a palavra “aproximar” muda de aparência conforme o objeto estudado. Para números reais ela é medida por $|x - y|$; para vetores, por uma norma; para funções, pode ser medida pelo maior erro pontual ou por um erro médio. Apesar das diferenças, muitos argumentos usam apenas três ideias: pontos distintos têm distância positiva, a ordem dos pontos não altera a distância e o trajeto direto não pode ser mais longo que um desvio por um ponto intermediário.

Foi essa regularidade que Fréchet isolou, em 1906, ao introduzir os espaços métricos. A abstração não elimina a geometria: ela identifica a parte da geometria necessária para discutir proximidade, abertura, continuidade e convergência sem recorrer a coordenadas.

O ponto de partida pode ser visto na definição usual de continuidade. Para $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, escrevemos

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

O papel das normas nessa expressão é apenas medir duas distâncias: uma no domínio e outra no contradomínio. Se X e Y admitirem funções distância d_X e d_Y , a mesma frase passa a ser

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Assim, antes de generalizar a continuidade, precisamos dizer exatamente o que será aceito como distância.

1.2 Métricas e primeiros exemplos

Definição 1.1 (Métrica) Seja X um conjunto. Uma métrica em X é uma função

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O par (X, d) é chamado **espaço métrico**. Quando a métrica já estiver clara, diremos apenas que X é um espaço métrico.

Os elementos de X serão chamados de *pontos*. Essa terminologia é útil mesmo quando X é um conjunto de funções, sequências ou outros objetos sem uma representação geométrica imediata. A desigualdade do último item é a **desigualdade triangular**; ela formaliza a ideia de que passar por um ponto intermediário não encurta o caminho direto.

Há situações em que a distância distingue observações, mas não necessariamente os objetos que as produzem. Isso leva a uma versão ligeiramente mais flexível.

Definição 1.2 (Pseudométrica) Uma pseudométrica em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa e simétrica, com

$$d(x, x) = 0 \quad \text{e} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

para todos $x, y, z \in X$. Nesse caso, (X, d) é um **espaço pseudométrico**.

Uma pseudométrica pode satisfazer $d(x, y) = 0$ para $x \neq y$. Essa é a única diferença entre as duas definições. Ao identificar pontos cuja distância é zero, obtém-se um espaço métrico; um exercício ao fim da seção tornará essa passagem precisa.

Exemplo 1.3 (A métrica discreta) Em qualquer conjunto X , ponha

$$d_{\text{disc}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

A desigualdade triangular é automática: quando o lado esquerdo vale 1, ao menos uma das duas parcelas do lado direito também vale 1. Essa métrica trata todos os pares de pontos distintos da mesma maneira; ela retém a noção de separação, mas descarta qualquer escala intermediária de proximidade.

Exemplo 1.4 (As métricas usuais em $\mathbb{R}^n$) Para $1 \leq p < \infty$, defina

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{1/p},$$

e, para $p = \infty$,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

São as métricas associadas às normas ℓ^p . Os casos $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$ correspondem, respectivamente, à soma dos desvios coordenados, à distância euclidiana e ao maior desvio coordenado. Para $1 < p < \infty$, a desigualdade triangular é a desigualdade de Minkowski.

No caso euclidiano ela também pode ser vista diretamente. Escrevendo $u = a - c$ e $v = c - b$ e usando Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} \|u + v\|_2^2 &= \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\|u\|_2\|v\|_2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2. \end{aligned}$$

Como os dois lados são não negativos, segue que $d_2(a, b) \leq d_2(a, c) + d_2(c, b)$.

Exemplo 1.5 (Subespaços) Se (X, d) é métrico e $S \subset X$, a restrição

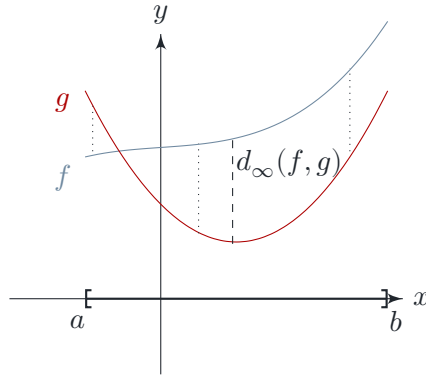
$$d_S : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_S(x, y) = d(x, y),$$

continua satisfazendo todos os axiomas. Chamamos (S, d_S) de **subespaço métrico** de X . Assim, a distância usual em um círculo, em $\mathbb{Q}$ ou em um intervalo pode ser entendida simplesmente como a distância herdada do espaço ambiente.

Exemplo 1.6 (Distâncias entre funções) Fixe $a < b$ e denote por $\mathcal{B}([a, b])$ o conjunto das funções limitadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. O maior erro entre duas funções define a métrica

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\},$$

chamada **métrica do supremo**. Aqui, cada função é um ponto do espaço; a distância registra a pior discrepância entre os dois gráficos.



Como funções contínuas em $[a, b]$ são limitadas, $C([a, b], \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathcal{B}([a, b])$. Nesse subespaço também podemos medir um erro médio: para $1 \leq p < \infty$,

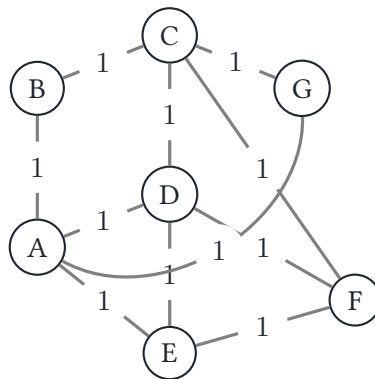
$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Essas métricas não medem a mesma coisa que d_∞ ; mais adiante veremos que essa diferença altera inclusive quais sequências de funções convergem.

Exemplo 1.7 (Distância combinatória) Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, defina $d_G(x, y)$ como o menor número de arestas em um caminho que liga x a y . A concatenação de um caminho mínimo de x a y com um caminho mínimo de y a z produz um percurso de x a z . Como a distância é o menor comprimento possível,

$$d_G(x, z) \leq d_G(x, y) + d_G(y, z).$$

As demais propriedades são imediatas. Essa é a **distância no grafo**.



Exemplo 1.8 (Uma geometria não arquimediana) Escolha um primo p . Para cada $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ existe um único inteiro r para o qual podemos escrever

$$q = p^r \frac{c}{d},$$

com $c, d \in \mathbb{Z}$ não divisíveis por p . Embora c/d não seja único, o expoente r é. Ponha

$$|q|_p = p^{-r}, \quad |0|_p = 0,$$

e defina

$$d_p(x, y) = |x - y|_p$$

em $\mathbb{Q}$. A desigualdade triangular decorre da estimativa mais forte

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Um exercício desenvolverá essa verificação. O resultado é uma geometria em que números são próximos quando sua diferença é divisível por uma potência alta de p .

Exemplo 1.9 (Duas pseudométricas) No conjunto $\mathcal{R}([a, b])$ das funções Riemann-integráveis, a expressão

$$d_2(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

é uma pseudométrica, mas não uma métrica. De fato, a função f dada por $f(a) = 1$ e $f(x) = 0$ para $x > a$ não é nula, embora

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0,$$

e, portanto, $d_2(f, 0) = 0$.

Outro exemplo aparece no conjunto $\mathcal{F}(X)$ de todas as funções $X \rightarrow \mathbb{R}$. Fixado $x_0 \in X$, a fórmula

$$d(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$$

compara somente o valor observado em x_0 . Duas funções que coincidam nesse ponto ficam a distância zero, ainda que sejam diferentes em todo o restante do domínio.

1.2.1 Bolas e conjuntos abertos

Definição 1.10 (Bolas) Sejam (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $r > 0$. A bola aberta e a bola fechada de centro x e raio r são, respectivamente,

$$B(x; r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}, \quad B[x; r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Os adjetivos “aberta” e “fechada” serão justificados em breve. Eles não significam que uma seja o complementar da outra: o complementar de $B(x; r)$ é formado pelos pontos a distância ao menos r de x .

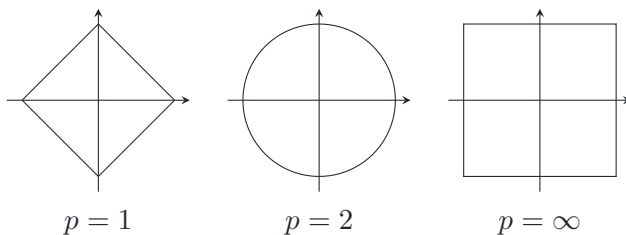


Figura 1.1: Bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ para as métricas ℓ^1 , ℓ^2 e ℓ^∞ .

Exemplo 1.11 (Bolas na métrica do supremo)

No espaço $\mathcal{B}([a, b])$, munido da métrica do supremo,

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\},$$

temos $g \in B[f; \varepsilon]$ exatamente quando

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Para a bola aberta há uma sutileza. A condição pontual

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in [a, b]$$

é necessária, mas não é suficiente para funções apenas limitadas: os valores podem permanecer abaixo de ε e ainda ter supremo ε . Em $[0, 1]$, por exemplo, tome $f = 0$, $\varepsilon = 1$ e

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Então $|g(x)| < 1$ para todo x , mas $d_\infty(f, g) = 1$.

Se f e g forem contínuas, $|f - g|$ atinge o máximo em $[a, b]$. Nesse caso,

$$g \in B(f; \varepsilon) \iff |f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

A Figura 1.2 ilustra a faixa uniforme em torno de f .

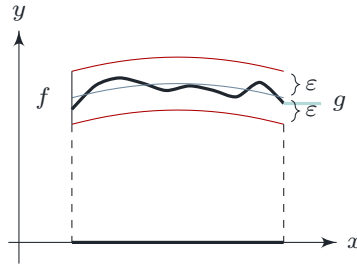


Figura 1.2: Bola aberta na métrica L^∞ no espaço das funções contínuas.

Proposição 1.12 Dois pontos distintos de um espaço métrico possuem bolas abertas disjuntas ao seu redor. Mais precisamente, se $x \neq y$, existe $r > 0$ tal que

$$B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset.$$

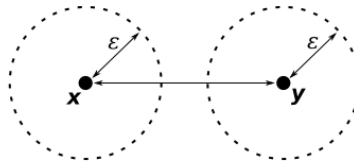


Figura 1.3: Dois pontos distintos x e y podem ser “separados” por bolas disjuntas.

Demonstração. Tome $r = d(x, y)/3$. Se algum ponto z pertencesse às duas bolas, então

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r < d(x, y),$$

uma contradição.

■

Esse argumento é a primeira indicação de que a métrica controla mais que valores numéricos: ela permite separar pontos por regiões. Em uma pseudométrica isso pode falhar, pois pontos distintos a distância zero pertencem exatamente às mesmas bolas.

Definição 1.13 (Conjuntos abertos e fechados) Seja (X, d) um espaço métrico. Um subconjunto $U \subset X$ é **aberto** quando cada um de seus pontos pode ser envolvido por uma bola inteiramente contida em U : para todo $a \in U$, existe $r > 0$ tal que

$$B(a; r) \subset U.$$

Um subconjunto $F \subset X$ é **fechado** quando $X \setminus F$ é aberto.

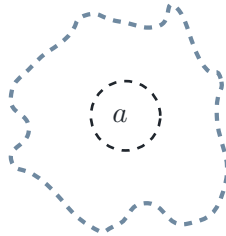


Figura 1.4: Em torno de cada ponto de um aberto cabe uma bola ainda contida nele.

Proposição 1.14

1. Toda bola aberta é aberta.
2. Toda bola fechada é fechada.

Demonstração.

1. Se $x \in B(a; r)$, ainda resta a margem $s = r - d(x, a) > 0$. Para $y \in B(x; s)$,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < s + d(x, a) = r.$$

Logo, $B(x; s) \subset B(a; r)$.

2. Se $x \notin B[a; r]$, ponha $s = d(x, a) - r > 0$. Para $y \in B(x; s)$, a desigualdade triangular escrita como $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ fornece

$$d(y, a) > d(x, a) - s = r.$$

Assim, $B(x; s)$ está contida no complementar de $B[a; r]$.



Definição 1.15 (Conjunto limitado) Um subconjunto A de (X, d) é limitado quando cabe em alguma bola: existem $a \in X$ e $r > 0$ tais que

$$A \subset B(a; r).$$

Uma função $f : Y \rightarrow X$ é limitada quando $f(Y)$ é limitado em X .

1.2.2 A topologia determinada pela métrica

Teorema 1.16 Os conjuntos abertos de um espaço métrico (X, d) satisfazem:

1. $\emptyset$ e X são abertos;
2. interseções finitas de abertos são abertas;
3. uniões arbitrárias de abertos são abertas.

Demonstração. Os dois conjuntos extremos são abertos diretamente pela definição: em $\emptyset$ não há ponto a verificar, e qualquer bola em X está contida em X .

Se $U_1, \dots, U_n$ são abertos e $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$, escolha $r_i > 0$ com $B(x; r_i) \subset U_i$. Então

$$B(x; \min\{r_1, \dots, r_n\}) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n.$$

Finalmente, se $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, então $x \in U_{i_0}$ para algum i_0 . Uma bola centrada em x e contida em U_{i_0} também está contida na união.

■

Proposição 1.17 Um subconjunto de X é aberto se, e somente se, pode ser escrito como união de bolas abertas.

Demonstração. Uma união de bolas abertas é aberta pela proposição anterior e pelo teorema. Na direção oposta, se U é aberto, escolha para cada $x \in U$ um raio $r_x > 0$ com $B(x; r_x) \subset U$. Então

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x; r_x).$$

■

Definição 1.18 (Topologia induzida) A família de todos os abertos de (X, d) é a topologia induzida por d ; ela será denotada por $\mathcal{T}_d$.

O Teorema 1.16 diz precisamente que $\mathcal{T}_d$ é uma topologia. No capítulo seguinte inverteremos o percurso: as três propriedades dos abertos serão tomadas como axiomas, mesmo quando nenhuma distância tiver sido escolhida.

1.2.3 Quando distâncias diferentes geram os mesmos abertos

Definição 1.19 (Métricas equivalentes) Duas métricas d_1 e d_2 no mesmo conjunto X são equivalentes quando

$$\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}.$$

Equivalência não significa igualdade das distâncias. Em $\mathbb{Z}$, por exemplo, a métrica usual e a métrica discreta induzem a mesma topologia. Para a primeira,

$$\{m\} = B_{|\cdot|}(m; 1/2),$$

e, na métrica discreta, $\{m\} = B_{\text{disc}}(m; 1/2)$. Logo, em ambas, todo subconjunto é aberto.

Definição 1.20 (Comparação de métricas) Dizemos que d_1 é mais fina que d_2 , e escrevemos $d_1 \geq d_2$, quando, para todo $a \in X$ e todo $r > 0$, existe $s > 0$ tal que

$$B_{d_1}(a; s) \subset B_{d_2}(a; r).$$

Equivalentemente, todo aberto para d_2 é aberto para d_1 , isto é, $\mathcal{T}_{d_2} \subset \mathcal{T}_{d_1}$. Portanto, as métricas são equivalentes exatamente quando

$$d_1 \geq d_2 \quad \text{e} \quad d_2 \geq d_1.$$

Exemplo 1.21 A métrica discreta é mais fina que qualquer métrica no mesmo conjunto: para $0 < s < 1$, a bola discreta $B_{\text{disc}}(a; s)$ é apenas $\{a\}$.

Proposição 1.22 Se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$d_2(x, y) \leq c d_1(x, y)$$

para todos $x, y \in X$, então d_1 é mais fina do que d_2 .

Demonstração. Dada a bola $B_{d_2}(a; r)$, a estimativa mostra que

$$B_{d_1}(a; r/c) \subset B_{d_2}(a; r).$$

Dizemos que d_1 e d_2 são Lipschitz-equivalentes quando existem $h, k > 0$ com

$$hd_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq kd_2(x, y)$$

para todos $x, y \in X$.

Corolário 1.23 Métricas Lipschitz-equivalentes induzem a mesma topologia.

Demonstração. Cada uma das duas estimativas fornece uma das comparações entre as métricas.

Exercícios

Ex. 1.1 — Fixe x em um espaço métrico (X, d) .

??Prove que $y \in B(x; r)$ se, e somente se, $x \in B(y; r)$.

??Se $0 < r \leq s$, mostre que $B(x; r) \subset B(x; s)$.

??A inclusão precisa ser estrita quando $r < s$? Decida a questão e exiba um contraexemplo quando a resposta for negativa.

Ex. 1.2 — Seja $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simétrica que satisfaz $q(x, x) = 0$ e a desigualdade triangular. Sem supor previamente que q seja não negativa, prove que

$$q(x, y) \geq 0 \quad (x, y \in X).$$

Ex. 1.3 — Uma função $q : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições

a.) $q(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

b.) $q(x, z) \leq q(z, y) + q(y, x)$ para todos $x, y, z \in X$.

??Mostre que essas duas condições caracterizam as métricas em X . Em particular, deduza delas a simetria, a não negatividade e a desigualdade triangular na forma usual.

??Verifique que, em $X = \mathbb{R}$, a função $q(x, y) = x - y$ satisfaz a primeira condição e viola a segunda, enquanto $q(x, y) = |x - y| + 1$ satisfaz a segunda e viola a primeira.

Ex. 1.4 — Seja $\mathcal{R}([a, b])$ o conjunto das funções Riemann-integráveis em um intervalo não degenerado $[a, b]$. Considere

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \quad f, g \in \mathcal{R}([a, b]).$$

??Determine qual axioma de métrica pode falhar e dê duas funções distintas a distância zero.

??Defina $f \sim g$ quando $d(f, g) = 0$. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência e que

$$\bar{d}([f], [g]) = d(f, g)$$

é uma métrica bem definida no conjunto quociente $\mathcal{R}([a, b])/\sim$.

Ex. 1.5 — A métrica p -ádica. Seja p primo. Para $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, denote por $v_p(q)$ o único inteiro r tal que $q = p^r c/d$, com $c, d \in \mathbb{Z}$ não divisíveis por p . Defina $v_p(0) = +\infty$ e

$$|q|_p = p^{-v_p(q)}, \quad |0|_p = 0.$$

??Prove que $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ e conclua que $|xy|_p = |x|_p |y|_p$.

??Mostre que

$$v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

e que há igualdade quando $v_p(x) \neq v_p(y)$. Traduza esse resultado para o valor absoluto p -ádico.

??Conclua que $d_p(x, y) = |x - y|_p$ é uma métrica em $\mathbb{Q}$.

??Explique por que a construção, escrita dessa forma, não pode usar um inteiro composto no lugar de p .

Ex. 1.6 — Seja $X \neq \emptyset$ e seja $\mathcal{B}(X)$ o espaço vetorial das funções limitadas $X \rightarrow \mathbb{R}$. Verifique que

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

é uma norma. Indique em qual passo a hipótese de limitação é usada.

Ex. 1.7 — Seja V um espaço vetorial real munido de uma norma $\|\cdot\|$.

Prove que

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V,$$

é uma métrica em V .

Verifique que essa métrica é invariante por translações e homogênea:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

Dê uma métrica em um espaço vetorial real que não possa provir de norma alguma e justifique sua escolha.

Mostre a recíproca: se uma métrica em V satisfaz as duas identidades acima, então

$$\|x\| = d(x, 0)$$

define uma norma cuja métrica induzida é a métrica original.

Ex. 1.8 — Seja V um espaço vetorial real.

Partindo de um produto interno em V , prove que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

é uma norma.

Deduz a identidade do paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Se X é um conjunto com pelo menos dois pontos, use duas funções de suportes disjuntos para mostrar que a norma do supremo em $\mathcal{B}(X)$ não provém de um produto interno.

Suponha que uma norma real satisfaça a identidade do paralelogramo. Mostre que ela provém do produto interno dado pela fórmula de polarização

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Aplice o critério às três normas de $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Para $n \geq 2$, quais são induzidas por um produto interno?

Ex. 1.9 — Sejam d_1 e d_2 métricas em X , com topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Compare as três afirmações:

- a.) existe $c > 0$ tal que $d_2(x, y) \leq cd_1(x, y)$ para todos $x, y \in X$;
- b.) para cada $x \in X$ e $r > 0$, alguma bola $B_{d_1}(x; s)$ está contida em $B_{d_2}(x; r)$;
- c.) $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

??Prove que (a) implica (b) e que (b) e (c) são equivalentes.

??Partindo da métrica usual $d_2(x, y) = |x - y|$ em $\mathbb{R}$, defina

$$d_1(x, y) = \frac{d_2(x, y)}{1 + d_2(x, y)}.$$

Mostre que d_1 é uma métrica equivalente a d_2 .

??Prove que não existe $c > 0$ para o qual $d_2 \leq cd_1$ em todo $\mathbb{R}$. Isso mostra que métricas equivalentes não precisam ser Lipschitz-equivalentes.

Ex. 1.10 — Em $\mathbb{R}^n$, denote por d_2 a métrica euclidiana e por d_∞ a métrica do supremo. Prove que

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y),$$

e conclua que elas determinam os mesmos conjuntos abertos.

Ex. 1.11 — Seja (X, d) um espaço métrico. Trunque as grandes distâncias definindo

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

??Prove que $\bar{d}$ é uma métrica. ??Mostre que d e $\bar{d}$ induzem a mesma topologia.

??Compare a noção de conjunto limitado nas duas métricas.

1.3 Continuidade

Uma função contínua não precisa conservar distâncias; precisa apenas controlar pequenas variações. O raio permitido no domínio pode depender do ponto e da precisão desejada no contradomínio.

Definição 1.24 (Continuidade em um ponto) Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua em** $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Definição 1.25 (Continuidade) A função $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** quando é contínua em cada ponto de X .

Em termos de bolas, a continuidade em a diz que a imagem de alguma bola em torno de a cabe em qualquer bola previamente escolhida em torno de $f(a)$. O próximo resultado elimina os raios da formulação e revela que a continuidade depende somente dos abertos.

Teorema 1.26 Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$.

1. f é contínua em a se, e somente se, para cada aberto $V \subset Y$ com $f(a) \in V$ existe um aberto $U \subset X$ tal que

$$a \in U \quad \text{e} \quad f(U) \subset V.$$

2. f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(V)$ é aberto em X para todo aberto $V \subset Y$.

Demonstração. Suponha primeiro que f seja contínua em a e que V seja aberto com $f(a) \in V$. Escolha $\varepsilon > 0$ de modo que

$$B(f(a); \varepsilon) \subset V.$$

Pela continuidade, existe $\delta > 0$ para o qual

$$f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset V.$$

Tome $U = B(a; \delta)$.

Na direção contrária, aplique a condição do item ao aberto $V = B(f(a); \varepsilon)$. O aberto correspondente U contém uma bola $B(a; \delta)$, e então

$$f(B(a; \delta)) \subset f(U) \subset B(f(a); \varepsilon).$$

Isso é a definição de continuidade em a e prova o primeiro item.

Agora suponha que f seja contínua em todos os pontos e fixe um aberto $V \subset Y$. Para cada $a \in f^{-1}(V)$, o primeiro item fornece um aberto U_a com

$$a \in U_a \subset f^{-1}(V).$$

Logo, $f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} U_a$ é aberto.

Reciprocamente, se imagens inversas de abertos são abertas, então, para cada $a \in X$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto $f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$ é aberto e contém a . Ele contém alguma bola $B(a; \delta)$, isto é,

$$f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon).$$

Portanto, f é contínua em todo ponto. ■

Observação 1.27 Se as métricas do domínio e do contradomínio forem substituídas por métricas equivalentes, o conjunto de funções contínuas não se altera. A continuidade é, nesse sentido, uma propriedade topológica e não uma propriedade da escala numérica escolhida para as distâncias.

Proposição 1.28 Sejam d_1 e d_2 métricas em X . Então d_1 é mais fina que d_2 se, e somente se, a identidade

$$\text{id} : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

é contínua.

Demonstração. A condição de continuidade da identidade em a é exatamente: para todo $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $B_{d_1}(a; s) \subset B_{d_2}(a; r)$. ■

Definição 1.29 (Aplicação Lipschitz) Uma função $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é Lipschitz quando existe $L \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad (x, y \in X).$$

Proposição 1.30 Toda aplicação Lipschitz é contínua.

Demonstração. Se $L > 0$, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/L$. Quando $L = 0$, a função é constante e a conclusão é imediata. ■

Exercícios

Ex. 1.12 — Verifique que a identidade de um espaço métrico é contínua. Em seguida, se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas, prove que $g \circ f$ é contínua. Faça a segunda parte tanto pela definição métrica quanto usando imagens inversas de abertos.

Ex. 1.13 — Prove diretamente, sem usar sequências, que toda função constante entre dois espaços métricos é contínua.

Ex. 1.14 — Se o domínio X possui a métrica discreta, mostre que toda função $f : X \rightarrow Y$ é contínua, qualquer que seja o espaço métrico Y . Aplique o resultado às duas identidades

$$\text{id} : (\mathbb{R}, d_{\text{disc}}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), \quad \text{id} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d_{\text{disc}}),$$

e determine em quais pontos cada uma é contínua.

Ex. 1.15 — No espaço $C([0, 1])$, compare a métrica integral

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

com a métrica do supremo. Em cada uma delas, decida se a avaliação

$$F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(f) = f(0),$$

é contínua.

Ex. 1.16 — Considere $\mathbb{Q}$ e $\{0, 1\}$ com as métricas herdadas de $\mathbb{R}$. Construa uma função contínua e sobrejetiva $f : \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\}$. Por que a mesma construção não fornece uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\{0, 1\}$?

Ex. 1.17 — No conjunto $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, considere

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_{j \geq 1} |x_j - y_j|, \quad d_w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x_j - y_j|.$$

Prove que a identidade

$$\text{id} : (X, d_\infty) \longrightarrow (X, d_w)$$

é Lipschitz, mas que a identidade na direção contrária não é contínua em $0 = (0, 0, \dots)$.

Ex. 1.18 — Mostre que a identidade de (X, d_w) em (X, d_∞) do Exercício 1.17 é descontínua em todos os pontos, e não apenas na origem.

Ex. 1.19 — Defina $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(q) = \begin{cases} 0, & q < \sqrt{2}, \\ 1, & q > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Mostre que f é contínua para as métricas usuais. Explique por que não há um terceiro caso na definição.

Ex. 1.20 — Considere a função de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove pela definição ε - δ que $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é contínua em ponto algum. Depois determine o que ocorre com as restrições de D a $\mathbb{Q}$ e a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.4 Sequências e Convergência

A métrica transforma a aproximação de pontos em uma sequência de números reais. Essa redução permite importar para X a linguagem de limites sem supor que seus pontos possam ser somados, ordenados ou descritos por coordenadas.

Definição 1.31 (Sequência) Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Denotaremos seu n -ésimo valor por x_n e a sequência inteira por

$$(x_n)_{n \geq 1} \quad \text{ou apenas} \quad (x_n).$$

Definição 1.32 (Convergência) Uma sequência (x_n) em (X, d) converge para $x \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Escrevemos $x_n \rightarrow x$ ou $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Em outras palavras, $x_n \rightarrow x$ exatamente quando a sequência real $d(x_n, x)$ converge para zero. A mesma condição pode ser lida apenas com bolas.

Proposição 1.33 Para uma sequência (x_n) em X e um ponto $x \in X$, são equivalentes:

1. $x_n \rightarrow x$;
2. cada bola aberta centrada em x contém todos os termos de (x_n) a partir de algum índice;
3. para todo $m \geq 1$, a bola $B(x; 1/m)$ contém todos os termos de (x_n) a partir de algum índice.

Demonstração. Os dois primeiros itens são equivalentes porque $x_n \in B(x; \varepsilon)$ significa $d(x_n, x) < \varepsilon$. O segundo implica o terceiro escolhendo os raios $1/m$. Para a recíproca, dado $\varepsilon > 0$, escolha m com $1/m < \varepsilon$ e use $B(x; 1/m) \subset B(x; \varepsilon)$. ■

Proposição 1.34 (Unicidade do limite) Toda sequência convergente em um espaço métrico possui um único limite.

Demonstração. Se $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice a partir do qual

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\varepsilon.$$

Como isso vale para todo ε , temos $d(x, y) = 0$ e, portanto, $x = y$. ■

Em espaços topológicos mais gerais, uma sequência pode ter mais de um limite.

A unicidade acima é uma consequência da separação por bolas estabelecida na Proposição 1.12.

Teorema 1.35 (Critério sequencial de continuidade) Uma função $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, toda sequência (x_n) que converge para a satisfaz $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Demonstração. Se f é contínua em a , dado $\varepsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ na definição de continuidade. Como $x_n \rightarrow a$, eventualmente $d_X(x_n, a) < \delta$, e então $d_Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$.

Para a recíproca, suponha que f não seja contínua em a . Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $n \geq 1$, podemos escolher $x_n \in B_X(a; 1/n)$ com

$$d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

Então $x_n \rightarrow a$, mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$, contradizendo a hipótese sequencial. ■

Exercícios

Ex. 1.21 — Escreva a negação formal de $x_n \rightarrow x$ e prove que ela equivale à existência de $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo N , algum $n \geq N$ satisfaz

$$d(x_n, x) \geq \varepsilon_0.$$

Use esse critério para mostrar que, na reta usual, as sequências $((-1)^n)$ e (n) não convergem.

Ex. 1.22 — Prove que toda subsequência de uma sequência convergente converge para o mesmo limite. Deduza que uma sequência que possui duas subsequências com limites distintos não pode convergir.

Ex. 1.23 — Caracterize completamente as sequências convergentes em um espaço munido da métrica discreta.

Ex. 1.24 — Em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, considere novamente

$$d_w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |x_j - y_j|.$$

Verifique que a série converge e que d_w é uma métrica.

Para uma sequência de pontos $x^{(n)} = (x_j^{(n)})_{j \geq 1}$, prove que

$$x^{(n)} \longrightarrow x \text{ em } d_w \iff x_j^{(n)} \longrightarrow x_j \text{ para cada } j.$$

Ex. 1.25 — Considere

$$X = \left\{ x = (x_j) \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} x_j < \infty \right\}$$

com a métrica

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|.$$

??Construa uma sequência em X que converge coordenada a coordenada para um ponto de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ que não pertence a X .

??Construa uma sequência em X que converge coordenada a coordenada para $0 \in X$, mas não converge para 0 na métrica d_1 .

??Compare os dois fenômenos com o Exercício 1.24. Qual papel é desempenhado pelos pesos 2^{-j} ?

Ex. 1.26 — Em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, seja

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_{j \geq 1} |x_j - y_j|.$$

Mostre que $x^{(n)} \rightarrow x$ nessa métrica se, e somente se, as coordenadas convergem *uniformemente em j* : para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$n \geq N \implies |x_j^{(n)} - x_j| < \varepsilon \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Ex. 1.27 — Dê um exemplo de uma sequência em $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ que converge em cada coordenada, mas não converge para a métrica do supremo. Identifique exatamente onde falta uniformidade.

1.5 Vizinhanças

A definição de continuidade não exige que trabalhemos sempre com bolas. O que importa é a presença de alguma região aberta em torno do ponto, mesmo que o conjunto considerado seja muito maior ou tenha forma irregular.

Definição 1.36 (Vizinhança) Seja (X, d) um espaço métrico e $x \in X$. Um conjunto $V \subset X$ é uma **vizinhança** de x quando contém alguma bola centrada em x :

$$B(x; r) \subset V \quad \text{para algum } r > 0.$$

A família das vizinhanças de x será denotada por $\mathcal{V}_x$.

Uma vizinhança não precisa ser aberta. Ela apenas precisa conter um aberto que contenha x . Essa distinção será útil quando a linguagem métrica for substituída pela linguagem puramente topológica.

Proposição 1.37 Para cada $x \in X$, a família $\mathcal{V}_x$ possui as seguintes propriedades:

1. se $A \in \mathcal{V}_x$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}_x$;
2. se $A, B \in \mathcal{V}_x$, então $A \cap B \in \mathcal{V}_x$;
3. para cada $A \in \mathcal{V}_x$ existe $B \subset A$, com $x \in B$, tal que B é vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. O primeiro item é imediato. Para o segundo, se $B(x; r) \subset A$ e $B(x; s) \subset B$, então

$$B(x; \min\{r, s\}) \subset A \cap B.$$

Para o terceiro, escolha uma bola aberta B centrada em x e contida em A . Como B é aberto, todo ponto de B possui uma bola ainda contida em B ; portanto, B é vizinhança de cada um de seus pontos. ■

Proposição 1.38 Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em a se, e somente se, para toda vizinhança V de $f(a)$, a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a .

Demonstração. Suponha que f seja contínua em a . Se V contém uma bola B centrada em $f(a)$, a definição de continuidade mostra que $f^{-1}(B)$ contém uma bola centrada em a . Como $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V)$, este último conjunto é uma vizinhança de a .

Na direção contrária, aplique a hipótese às bolas centradas em $f(a)$. Suas imagens inversas contêm bolas centradas em a , que é exatamente a condição ε - δ . ■

Definição 1.39 (Base de vizinhanças) Uma família $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_x$ é uma **base de vizinhanças** de x quando toda vizinhança $V \in \mathcal{V}_x$ contém algum $B \in \mathcal{B}$. Equivalentemente,

$$\mathcal{V}_x = \{V \subset X : B \subset V \text{ para algum } B \in \mathcal{B}\}.$$

Para cada x , as bolas $\{B(x; r) : r > 0\}$ formam uma base de vizinhanças. Já a família enumerável

$$\{B(x; 1/m) : m \geq 1\}$$

também forma uma base. É essa redução a raios $1/m$ que explica por que sequências descrevem tão bem a topologia dos espaços métricos.

Proposição 1.40 Se $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de x , então $x_n \rightarrow x$ se, e somente se, cada $B \in \mathcal{B}$ contém todos os termos da sequência a partir de algum índice.

Demonstração. Se $x_n \rightarrow x$, a propriedade vale para toda vizinhança de x , logo também para os elementos da base. Reciprocamente, dada uma vizinhança V de x , escolha $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset V$. Os termos eventualmente pertencem a B e, portanto, a V . ■

Proposição 1.41 Se $\mathcal{B}$ é uma base de vizinhanças de $f(a)$, então $f : X \rightarrow Y$ é contínua em a se, e somente se, $f^{-1}(B)$ é uma vizinhança de a para todo $B \in \mathcal{B}$.

Demonstração. A necessidade segue da Proposição 1.38. Para a suficiência, seja V uma vizinhança de $f(a)$ e escolha $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset V$. Por hipótese, $f^{-1}(B)$ é uma vizinhança de a ; como $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V)$, também $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a . Use agora a Proposição 1.38. ■

1.6 Produtos finitos de espaços métricos

Considere espaços métricos (M_i, d_i) , com $1 \leq i \leq n$, e escreva $M = M_1 \times \dots \times M_n$. Há três escolhas particularmente úteis para medir a distância entre $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$\begin{aligned} d_{\Sigma}(x, y) &= \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i), \\ d_{\max}(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i), \\ d_2(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Cada fórmula reúne as distâncias das coordenadas de uma maneira diferente. Como o número de fatores é finito, porém, as três conduzem à mesma noção de proximidade.

Proposição 1.42 As funções d_{Σ} , $d_{\max}$ e d_2 são métricas em M . Além disso, para quaisquer $x, y \in M$,

$$d_{\max}(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_{\Sigma}(x, y) \leq n d_{\max}(x, y).$$

Em particular, as três métricas são Lipschitz equivalentes.

Demonstração. A positividade, a simetria e a separação de pontos seguem das propriedades das métricas d_i . A desigualdade triangular de d_{Σ} resulta da soma das desigualdades coordenada a coordenada; para $d_{\max}$, usamos

$$d_i(x_i, y_i) \leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i) \leq d_{\max}(x, z) + d_{\max}(z, y)$$

e tomamos o máximo em i . Para d_2 , a desigualdade triangular em cada coordenada,

seguida da desigualdade de Minkowski em $\mathbb{R}^n$, fornece

$$d_2(x, y) \leq \left(\sum_{i=1}^n (d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i))^2 \right)^{1/2} \leq d_2(x, z) + d_2(z, y).$$

Resta comparar as fórmulas. Se $a_i = d_i(x_i, y_i)$, então

$$\max_i a_i \leq \left(\sum_i a_i^2 \right)^{1/2} \leq \sum_i a_i \leq n \max_i a_i,$$

o que prova as estimativas anunciadas. ■

Proposição 1.43 Uma sequência $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ converge para $x = (x_1, \dots, x_n)$ em qualquer uma das três métricas anteriores se, e somente se,

$$x_i^{(k)} \longrightarrow x_i \quad \text{em } (M_i, d_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Demonstração. É suficiente trabalhar com $d_{\max}$. Se $d_{\max}(x^{(k)}, x) \rightarrow 0$, então

$$d_i(x_i^{(k)}, x_i) \leq d_{\max}(x^{(k)}, x)$$

para cada i . Reciprocamente, dado $\varepsilon > 0$, a convergência da i -ésima coordenada fornece um índice N_i a partir do qual $d_i(x_i^{(k)}, x_i) < \varepsilon$. Para $k \geq \max\{N_1, \dots, N_n\}$, todas essas desigualdades valem ao mesmo tempo, e portanto $d_{\max}(x^{(k)}, x) < \varepsilon$. ■

Exercícios

Ex. 1.28 — Sejam $a_1, \dots, a_n$ números positivos. Mostre que

$$d_a(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i d_i(x_i, y_i)$$

é uma métrica em $M_1 \times \dots \times M_n$ e que ela é Lipschitz equivalente a $d_{\max}$.

Ex. 1.29 — Para $1 \leq i \leq n$, seja $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i$ a projeção na i -ésima coordenada.

??Mostre que π_i é Lipschitz quando o produto está munido de $d_{\max}$.

??Dado um espaço métrico Z , prove que uma função $f : Z \rightarrow M_1 \times \dots \times M_n$ é contínua se, e somente se, cada função coordenada $\pi_i \circ f$ é contínua.

Ex. 1.30 — Suponha $a < b$ e denote por $\mathcal{C}([a, b])$ o conjunto das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Considere

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \quad \text{e} \quad d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Verifique que d_{∞} e d_1 são métricas.

Mostre que a topologia de d_{∞} é estritamente mais fina que a topologia de d_1 .

Uma métrica fornece simultaneamente uma linguagem quantitativa e uma estrutura topológica: com ela medimos distâncias, mas também reconhecemos abertos, continuidade e convergência. As comparações feitas ao longo do capítulo mostram, contudo, que a parte topológica não registra todos os detalhes numéricos da distância. No capítulo seguinte, os conjuntos abertos passarão a ser o dado inicial, sem que seja preciso escolher antes uma métrica.

Topologia

No capítulo anterior, a métrica forneceu uma maneira concreta de falar em proximidade, convergência e continuidade. Agora queremos descobrir quanto dessa estrutura realmente depende de uma distância. A resposta conduz ao conceito de espaço topológico: em vez de medir distâncias, escolhemos diretamente quais subconjuntos serão considerados abertos.

Essa passagem para uma linguagem mais abstrata tomou forma entre o final do século XIX e o início do século XX, em trabalhos de Fréchet, Hausdorff, Kuratowski e Alexandroff, entre outros. Um marco foi o livro de Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, publicado em 1914.

Começaremos pela definição de espaço topológico e por uma coleção de exemplos. Em seguida, estudaremos como comparar topologias e como descrever a mesma estrutura por conjuntos fechados. Depois veremos como uma família de geradores, uma base ou uma sub-base pode codificar toda a topologia. Por fim, passaremos às descrições equivalentes por fecho, interior e vizinhanças, chegando às noções de acumulação, densidade e convergência.

2.1 Definição

O salto de abstração é pequeno, embora suas consequências sejam profundas. Pelo Teorema 1.26, vimos que a continuidade em espaços métricos pode ser formulada inteiramente em termos de conjuntos abertos. Além disso, o Teorema 1.16

mostra que os abertos de uma métrica satisfazem três propriedades simples. Tomaremos precisamente essas propriedades como axiomas.

Definição 2.1 (Espaço Topológico)

Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que uma família $\mathcal{T}_X \subset \mathcal{P}(X)$ define uma **topologia** no espaço X , ou que $(X, \mathcal{T}_X)$ é um **espaço topológico**, quando $\mathcal{T}_X$ satisfaz:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$.
2. A família $\mathcal{T}_X$ é fechada por interseção finita:

$$A, B \in \mathcal{T}_X \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_X.$$

3. A família $\mathcal{T}_X$ é fechada por união arbitrária:

$$A_\lambda \in \mathcal{T}_X (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}_X.$$

Os subconjuntos $A \subset X$ tais que $A \in \mathcal{T}_X$ são chamados **abertos** de $(X, \mathcal{T}_X)$. Quando a topologia estiver clara pelo contexto, diremos simplesmente que X é um espaço topológico.

Observação 2.2 (Sutilezas) Um espaço topológico é, portanto, um par $(X, \mathcal{T})$. Como ocorre com grupos ou espaços vetoriais, quando a estrutura estiver clara pelo contexto usaremos apenas o símbolo X .

Definição 2.3 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e seja $A \subset X$. Dizemos que A é **fechado** se $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

A topologia de um espaço métrico, definida em 1.18 é de fato, pela Proposição 1.16, uma topologia no sentido da Definição 2.1. Vejamos outros exemplos de topologia.

2.1.1 Exemplos

Exemplo 2.4 (Topologia da reta) No conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ a topologia usual é a topologia na qual um conjunto A é aberto se dado $a \in A$ existe ε_a tal que $(a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a) \subset A$.

Nessa topologia os abertos serão os conjuntos que podem ser escritos como união de intervalos.

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com essa topologia será denotado por $\mathbb{R}_{\hookrightarrow}$ ou simplesmente $\mathbb{R}$.



Figura 2.1: Abertos em $\mathbb{R}$ na topologia usual.

Exemplo 2.5 (Topologia associada a métrica) Dado um espaço métrico (X, d) , considere os abertos definidos em 1.13. Pela Proposição 1.16, esses conjuntos formam uma topologia, chamada **topologia induzida pela métrica** e denotada por $\mathcal{T}_d$.



Exemplo 2.6 (Topologias num conjunto com dois elementos) Topologias possíveis em $X = \{a, b\}$

1. $\{\emptyset, \{a, b\}\}$ (topologia trivial)
2. $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ (topologia de Sierpinski)
3. $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ (topologia de Sierpinski)
4. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ (topologia discreta)

A menos de permutar as letras, temos três topologias distintas com dois elementos.



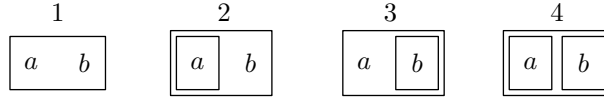


Figura 2.2: O conjunto de todas as topologias possíveis no conjunto $\{a, b\}$

Exemplo 2.7 A menos de permutar os elementos, as topologias possíveis em $X = \{a, b, c\}$ são

1. $\{\emptyset, X\}$ (topologia trivial)
2. $\{\emptyset, \{a\}, X\}$
3. $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$
4. $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, X\}$
5. $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$
6. $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$
7. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$
8. $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$
9. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ (topologia discreta)

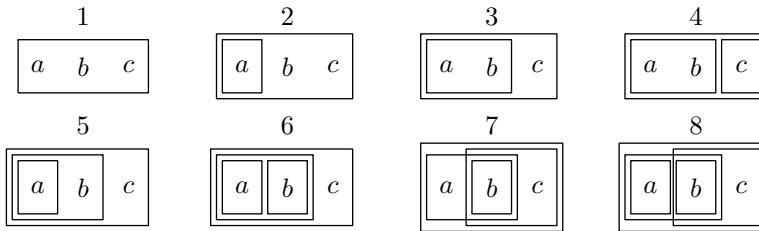


Figura 2.3: O conjunto de todas as topologias possíveis no conjunto $\{a, b, c\}$



Exemplo 2.8 (Topologia Discreta)

Dado um conjunto qualquer X , $(X, \mathcal{P}(X))$ é um espaço topológico. Esta topologia é induzida, por exemplo, pela métrica discreta mencionada no Exemplo 1.3.

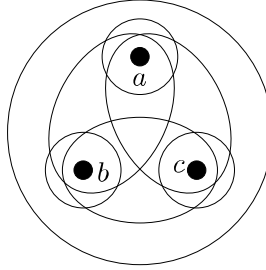


Figura 2.4: Ilustração da topologia discreta para um conjunto com três pontos.



Exercício. Prove que, em um conjunto finito X , toda topologia induzida por uma métrica é a topologia discreta.

Exemplo 2.9 (Topologia da Continuidade Inferior)

Considere os números reais $\mathbb{R}$ e a família

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Neste caso, $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço topológico. Essa topologia não é induzida por uma métrica: quaisquer dois abertos não vazios se intersectam, o que contradiz a Proposição 1.12 quando o espaço tem mais de um ponto. Esse espaço será denotado por $\mathbb{R}_{\leftarrow}$.

Do mesmo modo, existe a topologia da Continuidade Superior, dada por

$$\mathcal{T} = \{(-\infty, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Esse espaço será denotado por $\mathbb{R}_{\rightarrow}$.



Exemplo 2.10 (Topologia do Ponto) Fixado $a \in X$, a topologia do ponto é formada pelo vazio e por todos os subconjuntos de X que contêm a . Isto é,

$$\mathcal{T}_a = \{U \subset X \mid a \in U\} \cup \{\emptyset\} \quad (2.1)$$

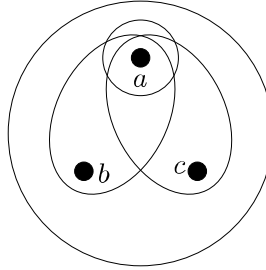


Figura 2.5: Ilustração da topologia do ponto para um conjunto com três pontos.



Exemplo 2.11 (Topologia Inicial)

Seja X um conjunto e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ um espaço topológico. Considere uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ qualquer. Então $(X, f^{-1}(\mathcal{T}_Y))$ é um espaço topológico. Essa topologia será estudada detalhadamente na seção 4.2



Exemplo 2.12 (Topologia Cofinita) A topologia cofinita pode ser definida em qualquer conjunto X : seus abertos são o vazio e os subconjuntos cujo complemento é finito. Equivalentemente, seus fechados são X e todos os subconjuntos finitos. Simbolicamente,

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \text{ ou } X \setminus A \text{ é finita}\}.$$



Exemplo 2.13 (Topologia Relativa) A topologia relativa ou induzida num subespaço S de um espaço topológico X é o conjunto das interseções de S com os abertos de X . Essa topologia será estudada detalhadamente na seção 4.1



Definição 2.14 (Axiomas de separação) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

- Um espaço X é Kolmogorov ou T_0 se para cada par de pontos existe um aberto de um dos dois pontos (sem especificar qual) que não contém o outro.
- Um espaço X é Fréchet ou T_1 se dados dois pontos x e y , existe um aberto $\mathcal{V}_x$ que não contém y e existe também um aberto $\mathcal{V}_y$ que não contém x .
- Finalmente, diz-se que X é Hausdorff ou T_2 se dados $x, y \in X$ existe um aberto $A \in \mathcal{V}_x$ de x e um aberto $B \in \mathcal{V}_y$ de y tais que $A \cap B = \emptyset$.

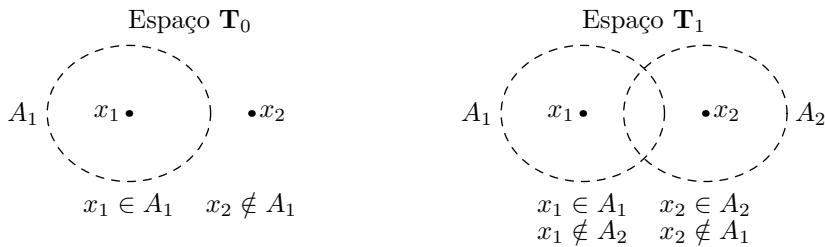


Figura 2.6: Espaços Topológicos T_0 e T_1

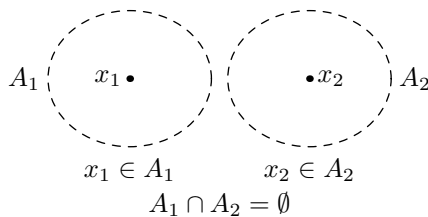


Figura 2.7: Espaços Topológicos T_2

A formulação topológica da continuidade é exatamente a sugerida pelo Teorema 1.26:

Definição 2.15 (Função Contínua) Seja $f : X \rightarrow Y$, sendo X e Y espaços topológicos. Diremos que f é **contínua** num ponto $a \in X$ se para todo aberto V de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$.

Diremos que f é **contínua** se for contínua em todos os pontos de X .

Definição 2.16 Diz-se que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é **metrizável** se existir alguma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mathcal{T} = \{\text{abertos de } (X, d)\}$.

Exemplo 2.17 (Topologia Trivial)

Dado um conjunto qualquer X , com a topologia trivial $(X, \{\emptyset, X\})$. Se o conjunto X tiver mais do que um elemento, a topologia trivial não é induzida por uma métrica, pois não satisfaz a Proposição 1.12.



Exercícios

Ex. 2.1 — Dado o intervalo $[-1, 1]$, considere τ a coleção de seus subconjuntos que ou não contêm $\{0\}$ ou contêm $(-1, 1)$. Mostre que τ é uma topologia sobre $[-1, 1]$.

Ex. 2.2 — Em cada um dos itens abaixo, mostre que τ é uma topologia sobre X :

?? $X = \{0, 1\}$

$\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$

?? X conjunto não-enumerável

$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é enumerável}\}$

?? $X = \mathbb{N}$

$\tau = \{\{m \in \mathbb{N} : m < n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$

?? $X = \mathbb{N}$

$\tau = \{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$

Ex. 2.3 — Seja X um conjunto infinito. Considere τ uma topologia sobre X para a qual todos os subconjuntos infinitos de X são abertos. Mostre que τ é a topologia discreta sobre X .

Ex. 2.4 — Sejam (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$. Mostre que $B_d[a, r]$ e $\{x \in X : d(x, a) = r\}$ são fechados em (X, τ_d) .

Ex. 2.5 — Seja X um espaço topológico. Dizemos que $A \subseteq X$ é G_δ em X se existe

$\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de subconjuntos abertos de X tal que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Mostre que se X é metrizável então todo subconjunto fechado de X é G_δ .

2.2 Comparando Topologias

Duas topologias definidas no mesmo conjunto podem conter quantidades diferentes de abertos. Essa comparação por inclusão tem uma interpretação imediata em termos de continuidade: quanto mais fina é a topologia do domínio, mais fácil é uma função ser contínua; quanto mais fina é a topologia do contradomínio, mais difícil.

Definição 2.18

Se $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ são duas topologias no mesmo conjunto X e $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, então dizemos que $\mathcal{T}_2$ é **mais forte** ou **mais fina** que $\mathcal{T}_1$. Também dizemos que $\mathcal{T}_1$ é **mais fraca** que $\mathcal{T}_2$. Podemos também dizer que $\mathcal{T}_1$ é **menor** que $\mathcal{T}_2$, ou que $\mathcal{T}_2$ é **maior** que $\mathcal{T}_1$.

Exemplos 2.19

1. A topologia trivial $\{\emptyset, \{a, b\}\}$ é mais fraca que topologia de Sierpinski $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ que é mais fraca que a topologia discreta $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ em a, b .
2. A topologia de Sierpinski $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ não é comparável com a topologia de Sierpinski $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$.
3. A topologia trivial é a topologia mais fraca/menor em qualquer conjunto X .
4. A topologia discreta é a topologia mais fina/forte/maior em qualquer conjunto X .



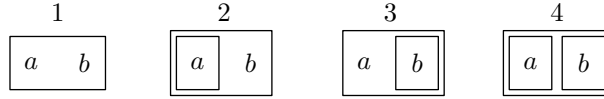


Figura 2.8: A topologia 1 é mais fraca que 2 que é mais fraca que 4. A topologia 1 é mais fraca que 3 que é mais fraca que 4. As topologias 2 e 3 não são comparáveis

Proposição 2.20

Seja X um conjunto qualquer, e $\mathcal{T}_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) uma família de topologias em X . Então $\mathcal{T}_X = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ é uma topologia em X .

Demonstração. Basta verificar que $\mathcal{T}_X$ satisfaz os axiomas listados na Definição 2.1. Por exemplo,

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{T}_X &\Rightarrow \forall \lambda \in \Lambda, A \cap B \in \mathcal{T}_\lambda \\ &\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}_X. \end{aligned}$$

■

A relação **mais forte** que define uma *ordem parcial* na família das topologias de um conjunto X :

$$\mathcal{T}(X) = \{\mathcal{T}_X \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T}_X \text{ é topologia}\},$$

Existe um elemento *máximo* dentre todas as topologias de X . É o conjunto das partes de X , $\mathcal{P}(X)$, que é a topologia mais forte que pode ser definida em X . Por outro lado, $\{\emptyset, X\}$ é a topologia mais fraca em $\mathcal{T}(X)$.

A Proposição 2.20 mostra que dada uma família de topologias $\mathcal{T}_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$), existe a *maior topologia que é menor que todas as $\mathcal{T}_\lambda$* . Essa topologia $\mathcal{T}_\delta$ é o *ínfimo* das $\mathcal{T}_\lambda$. Escrevemos

$$\mathcal{T}_\delta = \inf \{\mathcal{T}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Proposição 2.21 Seja X um conjunto munido de duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, então a aplicação identidade é contínua se, e somente se, $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Exercícios

Ex. 2.6 — Sejam X um conjunto infinito e $x_1, x_2 \in X$ distintos. Mostre que

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{A \subseteq X : x_1 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\} \\ \tau_2 &= \{A \subseteq X : x_2 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}\end{aligned}$$

são topologias incomparáveis sobre X (isto é, τ_1 e τ_2 são topologias sobre X , mas nem τ_1 é mais fina que τ_2 nem τ_2 é mais fina que τ_1).

Ex. 2.7 — Sejam X um conjunto não vazio e $\{\tau_i\}_{i \in I}$ uma coleção de topologias sobre X . Mostre que $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ é uma topologia em X , mas $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ não é necessariamente uma topologia em X .

Ex. 2.8 — Mostre que a topologia usual é mais fina do que a topologia de Zariski $\mathcal{Z}$.

Ex. 2.9 — Seja X um conjunto infinito. Seja τ a topologia cofinita sobre X . Mostre que τ é a menor (no sentido da inclusão) topologia T_1 sobre X — ou seja, mostre que (X, τ) é T_1 e que se σ é uma outra topologia sobre X tal que (X, σ) é T_1 , então $\tau \subseteq \sigma$.

Ex. 2.10 — Mostre que não existe uma topologia sobre X que é a menor topologia T_2 sobre X . [Sugestão: Fixe $x_1, x_2 \in X$ distintos e sejam τ_1 e τ_2 , respectivamente, as topologias apresentadas no Exercício 4 da Lista 2. Mostre que (X, τ_1) e (X, τ_2) são T_2 , mas que $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ não é T_2 .]

Ex. 2.11 — Sejam X um conjunto munido da topologia cofinita e $Y \subseteq X$. Sejam τ_c e τ_s , respectivamente, a topologia cofinita em Y e a topologia de subespaço em Y induzida pela topologia de X . Compare τ_c e τ_s com respeito à inclusão ($\subseteq$).

2.3 Conjuntos Fechados

Os conjuntos fechados fornecem uma descrição equivalente da topologia. Muitas propriedades são mais naturais nessa linguagem, sobretudo as que envolvem fecho e pontos de acumulação.

Deve-se notar que a noção de estar fechado não é exatamente o oposto de estar

aberto, uma vez que, como veremos mais adiante, existem conjuntos que não são nem abertos nem fechados, assim como conjuntos que são abertos e fechados ao mesmo tempo.

Definição 2.22 (Fechado) Um subconjunto F de um espaço topológico X é fechado se seu complemento $X \setminus F$ for aberto.

Geralmente, denotaremos os conjuntos fechados com as letras F ou H .

Exemplos 2.23

- a No conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ um intervalo fechado $[a, b]$ é fechado na topologia usual pois seu complementar é aberto
- b Na topologia de Sierpinski os abertos são $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, consequentemente os fechados são $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$
- c Na topologia discreta todo conjunto é aberto e consequentemente todo conjunto é fechado.



Exemplo 2.24 (Fechados em $\mathbb{R}^2$)

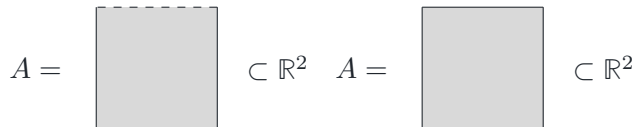


Figura 2.9: $|x| \leq a, |y| < b$ não é fechado, mas $|x| \leq a, |y| \leq b$ é fechado.



Figura 2.10: Abertos e fechados da topologia de Sierpinski

Proposição 2.25 (Propriedades de fechado) Dado um espaço topológico X então

1. O vazio e o espaço todo são fechados.
2. A interseção arbitrária de fechados é fechada.
3. A união finita de fechados é fechada.

Demonstração. Vamos caso por caso.

1. X é fechado porque $X \setminus X = \emptyset$ é aberto.

Além disso, $\emptyset$ é fechado porque $X \setminus \emptyset = X$ é aberto.

2. $\bigcap_{i \in I} F_i$ é fechado porque, aplicando as leis de De Morgan temos que

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} X \setminus F_i$$

é aberto por ser uma união arbitrária de abertos.

3. $\bigcup_{i=1}^n F_i$ é fechado, para isso tome o complementar e veja que ele é aberto porque é uma interseção finita de abertos.

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \bigcap_{i=1}^n X \setminus F_i$$

Com isso terminamos a demonstração. ■



Figura 2.11: A união finita de intervalos fechados é um fechado de $\mathbb{R}$ na topologia usual.

Observação 2.26 (Aberto e fechado ao mesmo tempo) O Lema 2.25 mostra imediatamente que $\emptyset$ e X são simultaneamente abertos e fechados. Um conjunto que é simultaneamente aberto e fechado é chamado **clopen**. Esses conjuntos terão papel central no estudo da conexidade.

Exemplo 2.27 Na topologia discreta todo conjunto é aberto, logo todo conjunto é fechado e assim todo conjunto é clopen.



Proposição 2.28 (Definindo a topologia por fechados) Dado um conjunto X e uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz

1. O vazio e o espaço todo estão em $\mathcal{F}$.
2. A interseção arbitrária de conjuntos em $\mathcal{F}$ está em $\mathcal{F}$.
3. A união finita de conjuntos em $\mathcal{F}$ está em $\mathcal{F}$.

Então a família $\mathcal{T} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma topologia cujos fechados são exatamente os elementos de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Como $X, \emptyset \in \mathcal{F}$, seus complementos $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{T}$. Se $U_i = X \setminus F_i \in \mathcal{T}$, então, pelas leis de De Morgan,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{T},$$

pois $\mathcal{F}$ é fechada por interseções arbitrárias. Analogamente, para $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$,

$$\bigcap_{j=1}^n (X \setminus F_j) = X \setminus \bigcup_{j=1}^n F_j \in \mathcal{T}.$$

Logo $\mathcal{T}$ é uma topologia. Pela própria definição, seus complementos de abertos, isto é, seus fechados, são exatamente os elementos de $\mathcal{F}$.



Exemplo 2.29 (Topologia de Zariski) Seja $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ o anel dos polinômios em n variáveis com coeficientes reais. Para cada conjunto de polinômios $I \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, defina

$$V(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : p(x) = 0 \text{ para todo } p \in I\}.$$

A família

$$\mathcal{F} = \{V(I) : I \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]\}$$

satisfaz as três condições da Proposição 2.28. De fato,

$$\emptyset = V(\{1\}), \quad \mathbb{R}^n = V(\{0\}).$$

Além disso, se I, J são famílias de polinômios e $IJ = \{fg : f \in I, g \in J\}$, então

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ),$$

pois um ponto anula todos os produtos fg se, e somente se, anula todos os polinômios de I ou todos os polinômios de J . Finalmente, para qualquer família $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$,

$$\bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) = V\left(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha\right).$$

Portanto os conjuntos $V(I)$ são os fechados de uma topologia em $\mathbb{R}^n$. Essa topologia é denominada **topologia de Zariski**; seus abertos são os complementos $\mathbb{R}^n \setminus V(I)$.



Exercícios

Ex. 2.12 — Supondo $n = 1$ no exemplo anterior, mostre que a topologia de Zariski em $\mathbb{R}$ coincide com a topologia cofinita.

Ex. 2.13 — Sejam X um conjunto não vazio e d uma métrica sobre X . Para $a \in X$ e $r > 0$ arbitrários, mostre que $\overline{B_d(a, r)} \subseteq B_d[a, r]$. Mostre, através de um exemplo, que a igualdade $\overline{B_d(a, r)} = B_d[a, r]$ não é necessariamente verdadeira.

2.4 Topologia Gerada

Há duas maneiras complementares de apresentar uma topologia. Podemos listar todos os seus abertos, o que é conceitualmente direto, ou podemos fornecer apenas uma coleção de subconjuntos a partir da qual os demais abertos serão reconstruídos.

Em espaços grandes, a segunda possibilidade é muito mais eficiente: a topologia completa pode conter uma quantidade enorme de conjuntos, enquanto uma família relativamente pequena já determina toda a estrutura.

A ideia é parecida com outras construções de fechamento em matemática. A partir de alguns conjuntos escolhidos, somos obrigados a acrescentar o vazio e o espaço todo, depois todas as uniões arbitrárias e todas as interseções finitas que os axiomas exigem. Não queremos acrescentar mais nada além do necessário. O resultado desse procedimento é a menor topologia compatível com os conjuntos inicialmente prescritos.

Essa perspectiva conduz naturalmente a três níveis de descrição. Uma família arbitrária pode servir como conjunto de geradores; fechando-a por interseções finitas obtemos uma família com comportamento de base; tomando uniões dos elementos dessa base recuperamos todos os abertos. Bases e sub-bases serão, portanto, duas formas econômicas de armazenar uma topologia.

Definição 2.30 (Topologia gerada) Seja X um conjunto e seja $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. A topologia gerada por $\mathcal{S}$, denotada por

$$\mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle,$$

é a interseção de todas as topologias sobre X que contêm $\mathcal{S}$. Equivalentemente, é a menor topologia sobre X na qual todos os elementos de $\mathcal{S}$ são abertos.

A definição faz sentido porque a família das topologias que contêm $\mathcal{S}$ nunca é vazia: a topologia discreta $\mathcal{P}(X)$ sempre pertence a ela. Além disso, a interseção de uma família de topologias é novamente uma topologia. Assim, a interseção usada na definição é precisamente o menor elemento, com respeito à inclusão, entre todas as topologias que tornam os elementos de $\mathcal{S}$ abertos.

É útil notar o caráter universal dessa construção. Para provar que um conjunto é aberto em $\mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle$, podemos produzi-lo usando as operações topológicas a partir dos geradores. Para provar que $\mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle$ está contida em alguma topologia $\mathcal{T}'$, não precisamos descrever todos os seus abertos: basta verificar que $\mathcal{T}'$ contém a família $\mathcal{S}$. Essa ideia será usada repetidamente.

Exemplo 2.31 Se $X = \{a, b\}$ e $\mathcal{S} = \{\{a\}\}$, então

$$\mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}.$$

De fato, qualquer topologia que contenha $\{a\}$ já precisa conter $\emptyset$ e X . Esses três

conjuntos, por sua vez, já formam uma topologia, de modo que nenhuma inclusão adicional é forçada. Esse exemplo simples mostra que a geração não significa necessariamente produzir uma família complicada: às vezes os próprios axiomas encerram o processo imediatamente.

Exemplo 2.32 (Intervalos sobrepostos) Em $X = [-1, 1]$, considere como geradores os intervalos relativos dos tipos $[-1, b)$ e $(a, 1]$, com $a < 0 < b$. Intersectando um conjunto de cada tipo obtemos

$$[-1, b) \cap (a, 1] = (a, b),$$

de modo que os intervalos abertos que atravessam o ponto 0 aparecem sem terem sido incluídos explicitamente na família inicial.

A partir dessas interseções, as uniões arbitrárias produzem todos os demais abertos da topologia gerada. Em particular, além de $\emptyset$ e X , surgem intervalos dos tipos

$$[-1, b), \quad (a, b), \quad (a, 1],$$

com $a < 0 < b$, e também uniões desses conjuntos. O exemplo é pequeno, mas expõe o mecanismo que aparecerá em construções muito maiores: os geradores fornecem as peças elementares e os axiomas determinam como elas podem ser combinadas.

A notação pode ser lida literalmente: gerar uma topologia é aplicar o menor fechamento possível pelas operações permitidas nos axiomas. A palavra “menor” é essencial. Se duas topologias tornam abertos todos os elementos de $\mathcal{S}$, a topologia gerada está contida em ambas; ela retém exatamente a informação topológica forçada por $\mathcal{S}$ e nada além disso.

Proposição 2.33 (Propriedades da topologia gerada) Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e seja $\mathcal{T}$ uma topologia sobre X . Então:

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle$;
2. se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$, então $\mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle \subseteq \mathcal{T}\langle\mathcal{D}\rangle$;
3. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ se, e somente se, $\mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle \subseteq \mathcal{T}$;
4. $\mathcal{T}\langle\mathcal{T}\rangle = \mathcal{T}$;
5. se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle$, então $\mathcal{T} = \mathcal{T}\langle\mathcal{S}\rangle$;

6. para uma família $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$,

$$\mathcal{T} \langle \mathcal{T} \langle \mathcal{S}_\lambda \rangle, \lambda \in \Lambda \rangle = \mathcal{T} \langle \mathcal{S}_\lambda, \lambda \in \Lambda \rangle.$$

Demonstração. O primeiro item faz parte da própria construção: a topologia gerada é escolhida entre as topologias que contêm $\mathcal{S}$.

Para o segundo, suponha $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$. A topologia $\mathcal{T} \langle \mathcal{D} \rangle$ contém $\mathcal{S}$; pela minimalidade de $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle$, segue que

$$\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle \subseteq \mathcal{T} \langle \mathcal{D} \rangle.$$

No terceiro item, se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, então $\mathcal{T}$ é uma das topologias consideradas na interseção que define $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle$; logo $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle \subseteq \mathcal{T}$. A recíproca decorre do primeiro item. O quarto item é o caso particular em que os geradores já formam uma topologia. O quinto é um princípio de sanduíche:

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle$$

implica, pelo terceiro item, $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle \subseteq \mathcal{T}$, e portanto igualdade.

Resta o último item. Ponha

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda.$$

Como cada $\mathcal{S}_\lambda$ está contida em $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle$, o terceiro item fornece

$$\mathcal{T} \langle \mathcal{S}_\lambda \rangle \subseteq \mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Consequentemente, a topologia gerada pela família formada por todas as $\mathcal{T} \langle \mathcal{S}_\lambda \rangle$ está contida em $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle$.

Para a inclusão oposta, cada gerador pertencente a alguma $\mathcal{S}_\lambda$ já pertence a $\mathcal{T} \langle \mathcal{S}_\lambda \rangle$. Assim, a topologia do lado esquerdo contém toda a união $\mathcal{S}$. Pela minimalidade da topologia gerada por $\mathcal{S}$, ela contém $\mathcal{T} \langle \mathcal{S} \rangle$. As duas inclusões provam a igualdade. ■

2.5 Bases

Geradores arbitrários ainda podem ser difíceis de manejar. Se a família inicial for apenas uma sub-base, por exemplo, precisamos lembrar que interseções finitas

dos geradores também participam da construção. Uma base elimina essa etapa: seus elementos já são peças locais suficientemente finas, e todo aberto pode ser recuperado apenas por união.

Essa diferença é mais do que terminológica. Em argumentos locais queremos quase sempre escolher, dentro de um aberto U que contém um ponto x , um aberto “básico” B ainda menor, com $x \in B \subseteq U$. Trabalhar com uma base torna essa passagem automática. Em espaços métricos, por exemplo, isso corresponde à familiar escolha de uma bola pequena contida no aberto.

Definição 2.34 (Base) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ é uma base de $\mathcal{T}$ quando, para todo $U \in \mathcal{T}$, existe uma subfamília $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B.$$

Adotamos a convenção de que a união da família vazia é $\emptyset$.

Exemplos 2.35

1. Os intervalos abertos (a, b) formam uma base da topologia usual de $\mathbb{R}$. De fato, cada aberto usual é união de intervalos abertos; localmente, dado $x \in U$, podemos escolher $a < x < b$ com $(a, b) \subseteq U$.
2. Em um espaço métrico, as bolas abertas formam uma base da topologia induzida pela métrica. Aqui a afirmação é praticamente a definição de aberto métrico: todo ponto de um aberto possui uma bola centrada nele e contida no aberto.
3. Em um espaço discreto, os singletons formam uma base. Como qualquer subconjunto é a união dos singletons de seus pontos, essa é a menor base possível em termos da informação local que precisa ser registrada.
4. Toda topologia é, trivialmente, uma base para si mesma; basta representar um aberto U como a união da família unitária $\{U\}$. A observação é correta, mas pouco útil: o interesse de uma base é justamente substituir a topologia inteira por uma coleção mais manejável.

A definição por uniões possui uma versão local, muito mais prática. Em vez de escrever explicitamente cada aberto como uma união, basta saber que todo ponto do aberto está contido em algum elemento básico que ainda cabe dentro dele. A proposição seguinte organiza as diferentes maneiras de reconhecer uma base.

Proposição 2.36 (Caracterizações de uma base) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. São equivalentes:

1. $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T}$;
2. as uniões de subfamílias de $\mathcal{B}$ formam exatamente $\mathcal{T}$;
3. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ e, para todo $x \in U \in \mathcal{T}$, existe $B \in \mathcal{B}$ com

$$x \in B \subseteq U.$$

Nessas condições,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B}).$$

Demonstração. A equivalência entre os dois primeiros itens é apenas uma mudança de linguagem: dizer que $\mathcal{B}$ é base significa exatamente dizer que os abertos de $\mathcal{T}$ são as uniões de subfamílias de $\mathcal{B}$.

Suponha o segundo item e tome $x \in U$, com $U \in \mathcal{T}$. Escrevendo

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B,$$

algum elemento $B \in \mathcal{B}_U$ contém x . Como todos os elementos dessa subfamília aparecem na união que forma U , temos $B \subseteq U$. Além disso, cada elemento de $\mathcal{B}$ é uma união de uma subfamília unitária de $\mathcal{B}$, logo pertence a $\mathcal{T}$. Isso fornece o terceiro item.

Agora suponha o terceiro item. Para cada $U \in \mathcal{T}$ e cada $x \in U$, escolha $B_x \in \mathcal{B}$ com $x \in B_x \subseteq U$. Então

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x,$$

de modo que todo aberto de $\mathcal{T}$ é união de elementos de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, toda união de elementos de $\mathcal{B}$ é aberta. Assim vale o segundo item.

Por fim, como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, temos $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}$. Pela caracterização por uniões, a topologia $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ contém todos os abertos de $\mathcal{T}$, pois contém $\mathcal{B}$ e é fechada por uniões arbitrárias. Portanto

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B}).$$

■

Teorema 2.37 (Critério para construir uma base) Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ cobre X e, para todo $x \in B_1 \cap B_2$, com $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2,$$

então $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Equivalentemente, pode-se exigir que cada interseção $B_1 \cap B_2$ seja uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ a família de todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$. O vazio pertence a $\mathcal{U}$ como união vazia, e $X \in \mathcal{U}$ pela hipótese de cobertura. A família é fechada por uniões arbitrárias por construção.

Se $U, V \in \mathcal{U}$ e $x \in U \cap V$, escolha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ com

$$x \in B_1 \subseteq U, \quad x \in B_2 \subseteq V.$$

Pela hipótese existe $B_3 \in \mathcal{B}$ com $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$. Logo

$$U \cap V = \bigcup \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq U \cap V\},$$

e portanto $U \cap V \in \mathcal{U}$. Assim, $\mathcal{U}$ é uma topologia.

Ela contém $\mathcal{B}$, e qualquer topologia que contenha $\mathcal{B}$ contém todas as suas uniões. Portanto $\mathcal{U} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$, e $\mathcal{B}$ é uma base da topologia que gera. A formulação equivalente segue porque uma interseção é união de elementos de $\mathcal{B}$ exatamente quando todo ponto da interseção admite um refinamento básico contido nela.

■

O critério é particularmente útil porque permite construir topologias sem antes listar todos os abertos. Em vez de tentar adivinhar a topologia completa, verificamos duas propriedades locais da família candidata: cobertura do espaço e possibilidade de refinar interseções. Depois disso, todos os abertos são obtidos por união. Essa estratégia será usada em vários exemplos a seguir.

Exemplos 2.38 (Famílias de bases na reta e no plano) Em $\mathbb{R}$, cada uma das famílias abaixo satisfaz o critério anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(a, b) : a < b\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{[a, b) : a < b\}, \\ \mathcal{B}_3 &= \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2, \\ \mathcal{B}_4 &= \{(a, b] : a < b\}, \\ \mathcal{B}_5 &= \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{B}_6 &= \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{B}_7 &= \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}, \\ \mathcal{B}_8 &= \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}, \\ \mathcal{B}_9 &= \{[a, b] : a \leq b\}. \end{aligned}$$

Essas famílias não geram todas a mesma topologia; justamente por isso são bons exemplos para comparar bases e topologias. A família $\mathcal{B}_1$ produz a topologia usual, e $\mathcal{B}_7$ produz a mesma topologia usando apenas extremos racionais. Já $\mathcal{B}_2$ fornece a topologia de Sorgenfrey. A família $\mathcal{B}_9$ contém todos os singletons, pois $[a, a] = \{a\}$, e portanto gera a topologia discreta. Assim, coleções visualmente semelhantes de intervalos podem codificar estruturas topológicas bastante diferentes.

Esse ponto merece atenção: uma base não é apenas uma família conveniente de conjuntos. Sua forma determina quais aproximações locais são permitidas. Alterar um colchete, restringir extremos aos racionais ou substituir intervalos por raios pode manter a topologia ou mudá-la completamente.

Em $\mathbb{R}^2$, exemplos úteis são:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{10} &= \{(a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}, \\ \mathcal{B}_{11} &= \{\text{discos abertos}\}, \\ \mathcal{B}_{12} &= \{\text{triângulos abertos}\}, \\ \mathcal{B}_{13} &= \{[a, b) \times [c, d) : a < b, c < d\}, \\ \mathcal{B}_{14} &= \{[a, b) \times (c, d) : a < b, c < d\}, \\ \mathcal{B}_{15} &= \{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{Q}, a < b, c < d\}.\end{aligned}$$

As famílias $\mathcal{B}_{10}$, $\mathcal{B}_{11}$, $\mathcal{B}_{12}$ e $\mathcal{B}_{15}$ geram a topologia usual do plano, embora usem formas geométricas distintas. A razão é local: em torno de cada ponto de qualquer uma dessas figuras podemos inserir uma figura suficientemente pequena de outro tipo. Já as bases que usam intervalos semiabertos nas coordenadas produzem topologias mais finas.

A reta de Sorgenfrey será nosso primeiro laboratório para observar um fenômeno importante: uma alteração pequena na forma dos elementos básicos pode conservar muita da aparência da topologia usual e, ao mesmo tempo, modificar propriedades globais que nela costumam coincidir.

Exemplo 2.39 (Reta de Sorgenfrey) A família

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$$

forma uma base de uma topologia em $\mathbb{R}$, chamada **topologia de Sorgenfrey** ou **topologia do limite inferior**.

Para verificar o critério de base, primeiro note que cada $x \in \mathbb{R}$ pertence, por exemplo, a $[x, x + 1)$. Além disso, se dois elementos básicos têm interseção não vazia, então

$$[a, b) \cap [a', b') = [\max\{a, a'\}, \min\{b, b'\}),$$

que novamente é um intervalo do mesmo tipo. Assim, nesse caso nem sequer é necessário decompor a interseção em vários elementos da base: a própria interseção, quando não vazia, já é básica.

A reta de Sorgenfrey será usada várias vezes adiante porque sua topologia é próxima da usual o bastante para preservar muita intuição, mas diferente o bastante para separar várias propriedades que coincidem em espaços métricos familiares.

Exemplo 2.40 (Propriedades da reta de Sorgenfrey) A reta de Sorgenfrey possui as seguintes propriedades:

1. sua topologia é estritamente mais fina que a topologia usual. Para ver a inclusão, dado um intervalo usual (a, b) , escreva

$$(a, b) = \bigcup_{x \in (a, b)} [x, b).$$

Logo todo intervalo aberto usual é aberto em Sorgenfrey, e o mesmo vale para toda união desses intervalos. A inclusão é própria porque $[a, b)$ pertence à base de Sorgenfrey e não é aberto na topologia usual;

2. os intervalos básicos $[a, b)$ são clopen. De fato,

$$\mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty).$$

O primeiro raio é usualmente aberto e, portanto, também é aberto em Sorgenfrey. Para o segundo,

$$[b, \infty) = \bigcup_{n \geq 1} [b, b + n),$$

de modo que o complementar inteiro é aberto;

3. $\mathbb{Q}$ é denso. Todo elemento básico $[a, b)$ contém o intervalo usual (a, b) , que contém um racional. Assim, todo aberto não vazio encontra $\mathbb{Q}$, e o espaço é separável;
4. para cada $a \in \mathbb{R}$, a família

$$\{[a, a + 1/n) : n \geq 1\}$$

é uma base enumerável de vizinhanças. Se $a \in [u, v)$, basta escolher n grande o bastante para que $a + 1/n < v$. Portanto a reta de Sorgenfrey é primeiro enumerável.

Essas quatro propriedades serão retomadas em capítulos posteriores. Em particular, veremos que algumas implicações familiares entre enumerabilidade, separabilidade e propriedades de produto deixam de valer nesse espaço.

O próximo exemplo muda o mecanismo. Em vez de alterar a topologia em toda a reta, o plano de Moore modifica apenas o comportamento junto à borda de um semiplano. Ele mostra como uma perturbação localizada da base pode produzir um espaço globalmente diferente sem mexer na topologia de uma grande região.

Exemplo 2.41 (Plano de Moore) Seja

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

Para pontos (p, q) com $q > 0$, use como vizinhanças básicas discos euclidianos suficientemente pequenos e contidos em M . Para um ponto $(p, 0)$ do eixo, use conjuntos da forma

$$\{(p, 0)\} \cup \{(x, y) : (x - p)^2 + (y - \varepsilon)^2 < \varepsilon^2\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Esses conjuntos formam uma base para uma topologia em M , chamada topologia do plano de Moore. Geometricamente, um ponto acima do eixo possui vizinhanças ordinárias, enquanto um ponto do eixo possui vizinhanças que tocam o eixo apenas nesse ponto e se abrem para o semiplano superior.

A condição de base pode ser verificada separando os casos. Duas vizinhanças de pontos interiores comportam-se como discos usuais. Se o ponto considerado está no eixo, diminuimos o raio do disco tangente até que ele caiba na interseção dada. Por fim, quando uma vizinhança interior encontra uma vizinhança tangente, qualquer ponto da interseção está acima do eixo e admite um disco euclidiano pequeno ainda contido nela.

Fora do eixo horizontal não aparece nenhuma diferença em relação à topologia de subespaço herdada de $\mathbb{R}^2$: em torno de um ponto com segunda coordenada positiva, os elementos básicos são exatamente discos suficientemente pequenos. A modificação topológica está concentrada na borda.

Proposição 2.42 Se $\mathcal{B}$ é uma base de uma topologia $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ é outra topologia no mesmo conjunto, então

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \iff \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}'.$$

Demonstração. Se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, então todo elemento de $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ pertence automaticamente a $\mathcal{T}'$.

Reciprocamente, suponha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}'$. Seja $U \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{T}$, existe uma subfamília $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B.$$

Cada $B \in \mathcal{B}_U$ é aberto em $\mathcal{T}'$ por hipótese; portanto a união U também é aberta em $\mathcal{T}'$. Logo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. ■

Definição 2.43 (Segundo Axioma de Enumerabilidade) Um espaço topológico é segundo enumerável quando possui uma base enumerável.

A definição pede uma única família enumerável capaz de descrever todos os abertos do espaço. Isso é muito mais forte do que exigir apenas bases locais enumeráveis em cada ponto. A diferença entre essas duas formas de enumerabilidade será estudada em um capítulo posterior; por enquanto, basta observar que a topologia usual de $\mathbb{R}$ é segundo enumerável porque os intervalos com extremos racionais formam uma base enumerável.

Exercícios

Ex. 2.14 — Sejam τ_1 e τ_2 topologias sobre um conjunto X e sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases para τ_1 e τ_2 , respectivamente. Mostre que são equivalentes: ??para quaisquer $x \in X$ e $B \in \mathcal{B}_2$ com $x \in B$, existe $C \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in C \subseteq B$; ?? $\tau_1 \supseteq \tau_2$.

Ex. 2.15 — Sejam X um conjunto infinito e $x_0 \in X$. Mostre que

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X, x \neq x_0\} \cup \{A \subseteq X : x_0 \in A, X \setminus A \text{ é finito}\}$$

é base para

$$\tau = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}.$$

Ex. 2.16 — Considere, em $\mathbb{N}$, as topologias

$$\tau_1 = \{\{m \in \mathbb{N} : m < n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\},$$

e

$$\tau_2 = \{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

??Mostre que, se $\mathcal{B}_1$ é uma base para τ_1 , então $\mathcal{B}_1 \supseteq \tau_1 \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. ??Encontre uma base $\mathcal{B}_2$ para τ_2 que esteja contida em qualquer base para τ_2 .

Ex. 2.17 — Considere a reta de Sorgenfrey. ??Quais intervalos da reta são abertos e fechados nessa topologia? ??Descreva os fechos de $\mathbb{Q}$, de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, de $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$ e de $\mathbb{Z}$.

Ex. 2.18 — Considere o plano de Moore definido acima. ??Prove que os conjuntos descritos formam uma base para uma topologia em M . ??Prove que a topologia em $M \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é a topologia usual de subespaço. ??Determine o fecho de $A = \mathbb{Q} \times \{1\}$ e de $B = \mathbb{Q} \times \{0\}$.

Como contraponto aos dois exemplos anteriores, a reta de Michael parte da topologia usual e torna os pontos irracionais isolados. O exercício mostra que duas modificações aparentemente pequenas da reta podem produzir topologias mais finas que a usual e, ainda assim, incomparáveis entre si.

Ex. 2.19 — Reta de Michael. Denote por τ a topologia usual de $\mathbb{R}$ e considere

$$\mathcal{B} = \tau \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

??Mostre que $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em $\mathbb{R}$. ??Mostre que as topologias da reta de Sorgenfrey e da reta de Michael são incomparáveis. ??Verifique que a topologia da reta de Michael é mais fina que a usual e conclua que ela é T_2 .

Ex. 2.20 — Seja X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X . ??Se Y é um espaço topológico e $f : Y \rightarrow X$, mostre que f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(B)$ é aberto em Y para todo $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$. ??Se Y é um espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$, mostre que f é aberta se, e somente se, $f(B)$ é aberto em Y para todo $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$.

2.5.1 Forma da Topologia Gerada

Uma família de geradores não precisa satisfazer a condição local exigida de uma base. O obstáculo é simples: se dois geradores se intersectam, a interseção pode não ser união de geradores da família original. Antes de tomar uniões arbitrárias, precisamos então acrescentar as interseções finitas que os axiomas topológicos forcem.

Esse é o papel de uma sub-base. Ela fornece as peças mais elementares; as interseções finitas dessas peças produzem uma base; por fim, as uniões dos elementos da base produzem a topologia. A cadeia conceitual é

sub-base $\longrightarrow$ interseções finitas $\longrightarrow$ base $\longrightarrow$ uniões arbitrárias $\longrightarrow$ topologia.

O próximo resultado torna essa descrição precisa.

Definição 2.44 (Sub-base) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma família $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma sub-base de $\mathcal{T}$ quando

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{C}),$$

isto é, quando $\mathcal{T}$ é a menor topologia em que todo elemento de $\mathcal{C}$ é aberto.

Definição 2.45 (Base induzida por uma família) Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, define

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcap_{A \in \mathcal{S}'} A : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, |\mathcal{S}'| < \infty \right\},$$

com a convenção de que a interseção da família vazia é X .

Teorema 2.46 (Topologia gerada por uma sub-base) Se $\mathcal{C}$ é uma sub-base de $(X, \mathcal{T})$, então $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ é uma base de $\mathcal{T}$. Em particular,

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Demonstração. Denote por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ a família das interseções finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Como toda topologia que contém $\mathcal{C}$ é fechada por interseções finitas, temos

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C}).$$

Considere agora

$$\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

O vazio pertence a $\mathcal{U}$ como união vazia, e X pertence a $\mathcal{B}$ por corresponder à interseção da família vazia. Logo $X \in \mathcal{U}$. A família $\mathcal{U}$ é fechada por uniões arbitrárias por construção.

Para interseções, escreva

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A, \quad V = \bigcup_{B \in \mathcal{D}} B,$$

com $\mathcal{A}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$. Então

$$U \cap V = \bigcup_{(A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{D}} (A \cap B).$$

Como A e B são interseções finitas de elementos de $\mathcal{C}$, também $A \cap B$ é uma interseção finita de elementos de $\mathcal{C}$; portanto $A \cap B \in \mathcal{B}$. Segue que $U \cap V \in \mathcal{U}$.

Assim, $\mathcal{U}$ é uma topologia. Ela contém $\mathcal{C}$, pois cada $C \in \mathcal{C}$ é uma interseção finita com um único fator. Pela minimalidade,

$$\mathcal{T}\langle\mathcal{C}\rangle \subseteq \mathcal{U}.$$

A inclusão oposta já foi observada, porque todos os elementos de $\mathcal{B}$ e suas uniões pertencem à topologia gerada. Portanto $\mathcal{U} = \mathcal{T}\langle\mathcal{C}\rangle$, e $\mathcal{B}$ é uma base dessa topologia. ■

Exercícios

Ex. 2.21 — Seja $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X que não cobre X , isto é,

$$X \neq \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S.$$

Na topologia gerada por $\mathcal{S}$, mostre que existe $x \in X$ cuja única vizinhança é o próprio X , isto é, $\mathcal{V}_x = \{X\}$.

2.5.2 Topologia da Ordem

A ordem de um conjunto pode fornecer sua própria noção de proximidade. Na reta real, por exemplo, os intervalos abertos são simultaneamente objetos de ordem e os blocos básicos da topologia usual. A mesma ideia funciona em qualquer conjunto totalmente ordenado, embora nas extremidades seja preciso tratar separadamente a existência de um primeiro ou de um último elemento.

Seja X um conjunto com uma ordem total $\leq$. Isto significa que a relação é reflexiva, antissimétrica, transitiva e total: quaisquer dois pontos podem ser comparados. Escrevemos $x < y$ quando $x \leq y$ e $x \neq y$.

Para $a < b$, definimos como de costume

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}, \quad (a, b] = \{x : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}, \quad [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}.$$

Definição 2.47 (Topologia da ordem) Suponha que X tenha mais de um elemento. Considere a família formada por:

1. todos os intervalos (a, b) ;
2. os intervalos $[a_0, b)$ quando X possui um menor elemento a_0 ;
3. os intervalos $(a, b_0]$ quando X possui um maior elemento b_0 .

Essa família é uma base; a topologia correspondente é a **topologia da ordem**.

Vejamos por que essa família é realmente uma base. Primeiro, ela cobre X . Se x não é uma extremidade do espaço ordenado, existem elementos $a < x < b$ e então $x \in (a, b)$. Se x é o menor elemento, usamos um intervalo $[x, b)$; se é o maior, usamos $(a, x]$. Nos casos em que um ponto possui apenas sucessor ou predecessor imediato, os intervalos permitidos adaptam-se do mesmo modo.

A segunda condição é local. Se x pertence à interseção de dois elementos básicos, escolhemos novos extremos dentro dos extremos que aparecem nas duas vizinhanças. Quando x não é extremo de X , isso fornece um intervalo aberto (c, d) com

$$x \in (c, d) \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Se x coincide com o menor ou com o maior elemento, usamos respectivamente um intervalo dos tipos $[a_0, d)$ ou $(c, b_0]$. Portanto a condição de refinamento de interseções é satisfeita.

Exemplo 2.48 A ordem usual de $\mathbb{R}$ induz exatamente a topologia usual. Como a reta não possui primeiro nem último elemento, a base da topologia da ordem é formada apenas pelos intervalos (a, b) , que já conhecemos como uma base da topologia euclidiana. Esse exemplo explica a escolha da definição: ela generaliza literalmente a construção familiar da reta.

Exemplo 2.49 (Ordem lexicográfica) Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, defina

$$(x, y) < (x', y')$$

quando $x < x'$, ou quando $x = x'$ e $y < y'$. Com essa ordem, percorremos primeiro a segunda coordenada mantendo a primeira fixa; somente depois passamos para a próxima fibra vertical.

A topologia da ordem lexicográfica é gerada pelos intervalos abertos para essa ordem. Se os dois extremos possuem a mesma primeira coordenada, um intervalo lexicográfico pode ficar inteiramente contido em uma única reta vertical. Se as

primeiras coordenadas dos extremos são diferentes, o intervalo contém uma cauda da primeira fibra, todas as fibras intermediárias e uma parte da fibra final.

Esse comportamento é muito diferente daquele da topologia produto usual de $\mathbb{R}^2$, cujos abertos básicos são retângulos. O exemplo mostra que o mesmo conjunto subjacente pode carregar topologias bastante distintas, dependendo da estrutura usada para construir suas vizinhanças.

Exercícios

Ex. 2.22 — Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos disjuntos. Defina em $X \cup Y$

$$\mathcal{T}_{X \cup Y} = \{U \cup V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}.$$

Mostre que essa é uma topologia e que

$$\mathcal{T}_X = \{X \cap W : W \in \mathcal{T}_{X \cup Y}\}, \quad \mathcal{T}_Y = \{Y \cap W : W \in \mathcal{T}_{X \cup Y}\}.$$

Observe ainda que $\mathcal{T}_{X \cup Y} = \mathcal{T} \langle \mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y \rangle$.

2.6 Fecho e Interior

Definição 2.50 Seja X um espaço topológico, e seja $A \subset X$. Definimos o **fecho** de A como o conjunto

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F \text{ é fechado e } F \supset A\}.$$

É imediato da definição que $\overline{A}$ é o menor subconjunto fechado de X que contém A . Os pontos de $\overline{A}$ são chamados **pontos aderentes** a A .

A aplicação $A \rightarrow \overline{A}$ é denominada **aplicação fecho**.

Exemplo 2.51 Considere a topologia $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ em $X = \{a, b, c, d, e\}$ onde os subconjuntos fechados de X são $\{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}\}$. Assim,

$$\overline{\{b\}} = \{b, e\}, \overline{\{a, c\}} = X, \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$$



Proposição 2.52 Seja X um espaço topológico. Então a aplicação fecho possui as seguintes propriedades:

- a $A \subset \overline{A}$.
- b $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- c $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- d $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- e A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$.

Demonstração.

- a é óbvio.
- b Por a $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. E como $\overline{A}$ é um fechado contendo $\overline{A}$, segue que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$.
- c Como $\emptyset$ é um fechado contendo $\emptyset$, segue que $\overline{\emptyset} \subset \emptyset$.
- d Começamos observando que $A \subset B$ implica $\overline{A} \subset \overline{B}$.
Como $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$, segue que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Logo $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por outro lado $\overline{A \cup B}$ é um fechado contendo $A \cup B$.
Logo $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
- e A demonstração é direta.



Exemplo 2.53 (Quadrados abertos) Se consideramos os conjuntos

$$A := (0, 1) \times (0, 1) \qquad B := (1, 2) \times (0, 1)$$

em $\mathbb{R}^2$ com a topologia usual, é fácil demonstrar que $\overline{A \cap B} = \emptyset$ enquanto que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \times [0, 1]$.



Podemos especificar uma topologia definindo uma aplicação fecho com as propriedades da proposição anterior.

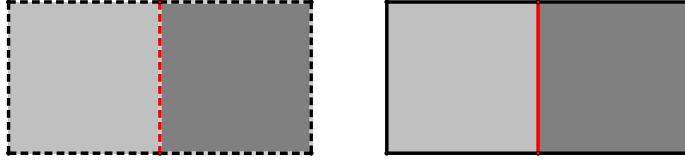


Figura 2.12: Na figura da esquerda vemos que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ enquanto que na direita vemos que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \times [0, 1]$

Proposição 2.54 Seja X um conjunto, e seja $A \in \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

- a $A \subset \overline{A}$.
- b $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- c $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- d $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Seja $\mathcal{F} = \{A \subset X : A = \overline{A}\}$. Então $\mathcal{F}$ é a família de fechados de uma topologia $\mathcal{T}$ em X . $\overline{A}$ é o fecho de A para todo $A \subset X$.

Demonstração. É imediato que $X \in \mathcal{F}$. E assim segue de c que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Pela Proposição 2.52 item d temos que a união de dois subconjuntos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.

Antes de demonstrar que qualquer interseção de subconjuntos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$, provemos que $A \subset B$ implica $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Novamente pela Proposição 2.52 item d temos que :

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow \overline{B} = \overline{A} \cup \overline{(B \setminus A)} \Rightarrow \overline{B} \supset \overline{A}.$$

Agora sejam $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$. Então $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_i$, e portanto

$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \overline{A_i} = A_i$ para todo $i \in I$. Logo $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} A_i$, e segue que $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Assim $\mathcal{F}$ é a família de fechados para uma topologia $\mathcal{T}$ em X . Finalmente demonstraremos que $\overline{A}$ é o fecho de A com relação a $\mathcal{T}$. Começamos observando que

$$\overline{A} \subset \overline{F} = F \text{ para todo } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \supset A,$$

e portanto

$$\overline{A} \subset \bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset A\}.$$

Por outro lado segue da Proposição 2.52 item (b) que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ e $\overline{A} \supset A$. Consequentemente

$$\bigcap \{F \in \mathcal{F} : F \supset A\} \subset \overline{A}.$$

E assim podemos concluir que $\overline{A}$ é o fecho de A . ■

Definição 2.55 Seja X um espaço topológico, e seja $A \subset X$. Chamaremos de interior de A o conjunto

$$A^\circ = \bigcup \{U \subset X : U \text{ é aberto e } U \subset A\}.$$

Claramente A° é o maior subconjunto aberto de X que está contido em A . Às vezes escreveremos $\overset{\circ}{A}$ em lugar de A° .

Proposição 2.56 Seja X um espaço topológico, e seja $A \subset X$. Então

$$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ \quad \text{e} \quad X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}.$$

Demonstração. Por definição,

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ é fechado e } F \supseteq A\}.$$

Logo, pelas leis de De Morgan,

$$\begin{aligned} X \setminus \overline{A} &= \bigcup \{X \setminus F : F \text{ é fechado e } F \supseteq A\} \\ &= \bigcup \{U : U \text{ é aberto e } U \subseteq X \setminus A\} \\ &= (X \setminus A)^\circ. \end{aligned}$$

A segunda identidade é a primeira aplicada a $X \setminus A$.

Proposição 2.57

Seja X um espaço topológico. Então a aplicação interior tem as seguintes propriedades:

- a $A^\circ \subset A$.
- b $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
- c $X^\circ = X$.
- d $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- e A é aberto se, e somente se, $A = A^\circ$.

Demonstração. Cada item é dual ao item correspondente da Proposição 2.52, por complementação e pela Proposição 2.56. Por exemplo,

$$(A \cap B)^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = A^\circ \cap B^\circ.$$

Os demais itens seguem do mesmo modo; alternativamente, decorrem diretamente do fato de A° ser o maior aberto contido em A .

Proposição 2.58 Seja X um conjunto, e seja $A \in \mathcal{P}(X) \rightarrow A^\circ \in \mathcal{P}(X)$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

- a $A^\circ \subset A$.
- b $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
- c $X^\circ = X$.
- d $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Seja $\mathcal{T} = \{A \subset X : A = A^\circ\}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topologia em X . E A° é o interior de A para todo $A \subset X$.

Demonstração. Pelos axiomas dados, $X \in \mathcal{T}$. A monotonicidade do operador interior segue das propriedades: se $A \subseteq B$, então $A = A \cap B$ e

$$A^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$$

portanto $A^\circ \subseteq B^\circ$. Se $U, V \in \mathcal{T}$, então

$$(U \cap V)^\circ = U^\circ \cap V^\circ = U \cap V,$$

logo $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Se $(U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ e $U = \bigcup_i U_i$, então, para cada i , $U_i = U_i^\circ \subseteq U^\circ$ pela monotonicidade. Assim $U \subseteq U^\circ$. Como sempre $U^\circ \subseteq U$, obtemos $U = U^\circ$, isto é, $U \in \mathcal{T}$. Além disso, $\emptyset^\circ \subseteq \emptyset$, logo $\emptyset \in \mathcal{T}$. Portanto $\mathcal{T}$ é uma topologia.

Finalmente, A° pertence a $\mathcal{T}$ pela idempotência e está contido em A . Se $U \in \mathcal{T}$ e $U \subseteq A$, a monotonicidade fornece $U = U^\circ \subseteq A^\circ$. Logo A° é exatamente o maior aberto contido em A . ■

Exercícios

Ex. 2.23 — Para cada um dos espaços topológicos apresentados nos Exercícios 2.2 e 2.6, determine o interior e o fecho de um subconjunto arbitrário A de X .

Ex. 2.24 — Sejam τ_1 e τ_2 topologias sobre um conjunto X tais que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ e seja $A \subseteq X$. Mostre que $\text{Int}_{\tau_1}(A) \subseteq \text{Int}_{\tau_2}(A)$ e $\overline{A}^{\tau_1} \supseteq \overline{A}^{\tau_2}$.

Ex. 2.25 — Sejam X um espaço topológico, $U \subseteq X$ e A um aberto de X . Mostre que se $A \cap \bar{U} \neq \emptyset$ então $A \cap U \neq \emptyset$.

2.7 Vizinhanças e Base de Vizinhanças de um Ponto

Assim como em espaços métricos, a topologia permite falar em vizinhanças sem mencionar distâncias. Para cada ponto x , a família de suas vizinhanças registra toda a informação local relevante.

Definição 2.59

Seja $(X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico. Dado $x \in X$, uma **vizinhança aberta** de x é um aberto $A \in \mathcal{T}_X$ que contém o ponto x . Uma **vizinhança** de x é qualquer conjunto que contenha uma vizinhança aberta de x . Denotamos por $\mathcal{V}_x$ a família de todas as vizinhanças de x .

Pela definição acima temos que:

$$A \in \mathcal{V}_x, \text{ se, e somente se, } x \in A^\circ$$

Em um espaço topológico qualquer, as vizinhanças de um ponto possuem as mesmas propriedades para o caso de espaços métricos que as descritas na Proposição 1.37.

Proposição 2.60

Seja X um espaço topológico, e $x \in X$ um ponto de X . Então valem as seguintes afirmações sobre a família $\mathcal{V}_x$ de todas as vizinhanças de x :

1. $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{V}_x$.
2. A interseção de duas vizinhanças de x também é uma vizinhança de x .
Ou seja, se $A, B \in \mathcal{V}_x$, então $A \cap B \in \mathcal{V}_x$.
3. Se $A \in \mathcal{V}_x$ então existe $B \subset A$ tal que $x \in B$, e B é vizinhança de todos os seus pontos.
4. Se $A \in \mathcal{V}_x$ e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{V}_x$.

Demonstração.

- a) Se $A \in \mathcal{V}_x$, então $x \in A^\circ \subset A$.
- b) Se $A, B \in \mathcal{V}_x$, então $x \in A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$. Logo $A \cap B \in \mathcal{V}_x$.
- c) Dado $A \in \mathcal{V}_x$, seja $C = A^\circ$. Se $y \in C$, então C é uma vizinhança aberta de y contida em A , e portanto $A \in \mathcal{V}_y$.
- d) Se $A \in \mathcal{V}_x$ e $A \subset B \subset X$, então $x \in A^\circ \subset B^\circ$. Logo $B \in \mathcal{V}_x$.

■

Proposição 2.61

Seja X um espaço topológico. Um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, for vizinhança de todos os seus pontos.

Demonstração. Um conjunto aberto é vizinhança de todos os seus pontos. Reciprocamente, suponha que $A \subset X$ seja vizinhança de todos os seus pontos. Vamos mostrar que A é aberto.

Por hipótese, para todo $a \in A$ existe um aberto U_a tal que $a \in U_a \subset A$. Logo,

$$A = \bigcup_{a \in A} U_a.$$

E como A é uma união de abertos U_a , temos que A é aberto. ■

Definição 2.62

- Seja $(X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico e $x \in X$. Uma família de vizinhanças de x , $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}_x$, é chamada de **base de vizinhanças** ou **base local** de x quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}_x$ existir $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$.
- Se todos os conjuntos de $\mathcal{B}$ forem abertos, ou seja, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_X$, então diremos que $\mathcal{B}$ é uma **base de vizinhanças abertas** de x .

Reciprocamente temos que podemos recuperar a topologia definindo um “conjunto de vizinhanças”.

Proposição 2.63 Seja X um conjunto não vazio. Para todo $x \in X$ seja $\mathcal{V}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- a $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{V}_x$.
- b Se $U, V \in \mathcal{V}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{V}_x$.
- c Dado $U \in \mathcal{V}_x$, existe $V \in \mathcal{V}_x$, $V \subset U$, tal que $U \in \mathcal{V}_y$ para todo $y \in V$.
- d Se $U \in \mathcal{V}_x$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{V}_x$.

Seja

$\mathcal{T} = \{U \subset X : U \in \mathcal{V}_x \text{ para todo } x \in U\}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topologia em X , e $\mathcal{V}_x$ é o sistema de vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Primeiro demonstraremos que $\mathcal{T}$ é uma topologia em X .

É imediato que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Para demonstrar que $X \in \mathcal{T}$, seja $x \in X$, e seja $U \in \mathcal{V}_x$. Como $U \subset X$, segue da Proposição 2.63 item d que $X \in \mathcal{V}_x$. Logo $X \in \mathcal{T}$.

Sejam $U_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in I$, e seja $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Então $x \in U_i$ para algum $i \in I$.

Como $U_i \in \mathcal{T}$, temos que $U_i \in \mathcal{V}_x$. Como $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, pela Proposição 2.63 item d temos que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}_x$. E assim $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Sejam $U, V \in \mathcal{T}$, e seja $x \in U \cap V$. Então $U, V \in \mathcal{V}_x$, e segue da Proposição 2.63 item b que $U \cap V \in \mathcal{V}_x$. Logo $U \cap V \in \mathcal{T}$.

A seguir demonstraremos que toda vizinhança de x pertence a $\mathcal{V}_x$. Seja U uma vizinhança de x . Então $x \in U^\circ$. Como $U^\circ \in \mathcal{T}$, segue que $U^\circ \in \mathcal{V}_x$. Como $U^\circ \subset U$, pela Proposição 2.63 item d podemos concluir que $U \in \mathcal{V}_x$.

Finalmente demonstraremos que todo $U \in \mathcal{V}_x$ é uma vizinhança de x . Seja $U \in \mathcal{V}_x$, e seja $V = \{y \in U : U \in \mathcal{V}_y\}$. Segue da Proposição 2.63 item a que $x \in U$, e como $U \in \mathcal{V}_x$, temos que $x \in V$.

A seguir veremos que $V \in \mathcal{T}$. Dado $y \in V$, temos que $U \in \mathcal{V}_y$. Pela Proposição 2.63 item c temos que existe $W \in \mathcal{V}_y$, $W \subset U$, tal que $U \in \mathcal{V}_z$ para todo $z \in W$. Segue então da Proposição 2.63 item a que $W \subset V$. Segue do item d dessa proposição que $V \in \mathcal{V}_y$. Logo $V \in \mathcal{T}$.

Como $x \in V$ e $V \in \mathcal{T}$, podemos concluir que $x \in U^\circ$. Logo U é uma vizinhança de x .

■

Exemplos 2.64

a Seja X um espaço topológico, seja $x \in X$, e seja $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{V}_x : U \text{ é aberto}\}$. Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x .

b Seja X um espaço métrico, seja $x \in X$, e seja

$$\mathcal{B}_x = \{B(x; r) : r > 0\}.$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x .

c Seja X um espaço métrico, seja $x \in X$, e seja

$$\mathcal{B}_x = \{B[x; r] : r > 0\}.$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x .

◁

Proposição 2.65 Seja X um espaço topológico não vazio, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , para todo $x \in X$. Então:

- a $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{B}_x$.
- b Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.
- c Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para todo $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subset U$.
- d Um conjunto $U \subset X$ é aberto se, e somente se, para todo $x \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.

Demonstração. O primeiro item segue porque todo elemento de $\mathcal{B}_x$ é uma vizinhança de x . Para o segundo, se $U, V \in \mathcal{B}_x$, então $U \cap V$ é uma vizinhança de x pela Proposição 2.60; como $\mathcal{B}_x$ é base local, existe $W \in \mathcal{B}_x$ com $W \subseteq U \cap V$.

Para o terceiro, tome $U \in \mathcal{B}_x$. Pela Proposição 2.60, existe uma vizinhança $O \subseteq U$ de x que é vizinhança de todos os seus pontos. Escolha $V \in \mathcal{B}_x$ com $V \subseteq O$. Para cada $y \in V$, como U é uma vizinhança de y , a base $\mathcal{B}_y$ contém algum $W \subseteq U$.

Finalmente, se U é aberto e $x \in U$, então U é uma vizinhança de x e contém algum elemento de $\mathcal{B}_x$. Reciprocamente, se para cada $x \in U$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ com $V_x \subseteq U$, então U é vizinhança de cada um de seus pontos e, pela Proposição 2.61, é aberto. ■

Reciprocamente temos:

Proposição 2.66 Seja X um conjunto não vazio. Para todo $x \in X$ seja $\mathcal{B}_x$ uma família não vazia de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

- a $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{B}_x$.
- b Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.
- c Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$, $V \subset U$, tal que para todo $y \in V$ existe $W \in \mathcal{B}_y$ tal que $W \subset U$.

Seja $\mathcal{T} = \{U \subset X : \text{para todo } x \in U \text{ existe } V \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } V \subset U\}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Para todo $x \in X$ seja

$$\mathcal{V}_x = \{U \subset X : U \supset V \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

É claro que as famílias $\mathcal{V}_x$ verificam as propriedades a, b, c e d da Proposição 2.63, e que

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : U \in \mathcal{V}_x \text{ para todo } x \in U\}.$$

Pela Proposição 2.63 $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $\mathcal{V}_x$ é o sistema de vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ para todo $x \in X$. Segue que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em $(X, \mathcal{T})$ para todo $x \in X$. ■

A proposição seguinte caracteriza abertos, fechados, fecho de um conjunto e interior de um conjunto em termos de bases de vizinhanças.

Proposição 2.67 Seja X um espaço topológico não vazio, seja $A \subset X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , para todo $x \in X$. Então:

- a A é aberto se, e somente se, para todo $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset A$.
- b A é fechado se, e somente se, para todo $x \notin A$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$.
- c $\overline{A} = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } V \in \mathcal{B}_x\}$.
- d $A^\circ = \{x \in X : V \subset A \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}$.

Demonstração.

- a É exatamente o quarto item da Proposição 2.65.
- b O conjunto A é fechado se, e somente se, $X \setminus A$ é aberto. Aplicando o item anterior a $X \setminus A$, obtemos a equivalência desejada.
- c Se $x \notin \overline{A}$, então, aplicando b ao fechado $\overline{A}$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap \overline{A} = \emptyset$; em particular, $V \cap A = \emptyset$.

Reciprocamente, suponha que exista $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Como V é uma vizinhança de x , temos $x \in V^\circ$. Além disso, $A \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus V^\circ$. O último conjunto é fechado; logo

$$\overline{A} \subseteq X \setminus V^\circ,$$

e portanto $x \notin \overline{A}$.

d Pela Proposição 2.56, $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$. Se B denota o conjunto da direita em d, então usando c segue que

$$\begin{aligned} x \notin A^\circ &\Leftrightarrow x \in \overline{(X \setminus A)} \Leftrightarrow V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ para todo } V \in \mathcal{B}_x \\ &\Leftrightarrow V \not\subseteq A \text{ para todo } V \in \mathcal{B}_x \Leftrightarrow x \notin B. \end{aligned}$$

■

Definição 2.68 (Primeiro Axioma de Enumerabilidade) Seja X um espaço topológico. Diremos que X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade se todo $x \in X$ admite uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ que é enumerável. Nesse caso também dizemos que o espaço é primeiro enumerável.

Todo espaço métrico satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

2.8 Pontos de acumulação e conjuntos densos

Pontos de acumulação descrevem onde um conjunto se adensa localmente. A noção será especialmente útil no estudo de sequências; ao final da seção, ela nos levará naturalmente aos conjuntos densos.

Definição 2.69 (ponto de acumulação) Dado um conjunto A num espaço topológico X , diz-se que um ponto $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de A se para qualquer vizinhança U_x de x temos que

$$(U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Vamos apresentar algumas terminologias para o conjunto de pontos de acumulação.

Definição 2.70 (Conjunto derivado) O conjunto de pontos de acumulação de um conjunto A é denominado **conjunto derivado**. Normalmente, denotaremos o conjunto derivado de A por A' .

Observação 2.71 (Vizinhanças perfuradas) Quando consideramos uma vizinhança U_x de um ponto $x \in X$, às vezes (especialmente quando falamos de pontos de acumulação), é útil retirar o próprio ponto da vizinhança. O conjunto $U_x \setminus \{x\}$ é geralmente denominado de **vizinhança perfurada** de x .

Exemplo 2.72 A família $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ define uma topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$. Considere o subconjunto $A = \{a, b, c\}$ de X . Observe que $b \in X$ é um ponto de acumulação de A , pois os conjuntos abertos contendo b são $\{b, c, d, e\}$ e X , e cada um contém um ponto de A diferente de b , ou seja, c . Por outro lado, o ponto $a \in X$ não é um ponto de acumulação de A , pois o conjunto aberto $\{a\}$, que contém a , não contém um ponto de A diferente de a . Similarmente, os pontos d e e são pontos de acumulação de A e o ponto c não é um ponto de acumulação de A . Assim, $A' = \{b, d, e\}$ é o conjunto derivado de A .



Exemplo 2.73 Conjunto derivado de $(0, 1)$ na topologia usual e na topologia de limite inferior.

Na topologia usual de $\mathbb{R}$, temos $(0, 1)' = [0, 1]$.

Na topologia de limite inferior de $\mathbb{R}$, precisamos considerar os abertos da base que contém x , isto é, $x \in [a, b)$. Se $x \in [a, b)$, então $[x, b) \subset [a, b)$; portanto basta considerar vizinhanças básicas da forma $[x, b)$.

Se $0 \leq x < 1$, então $((0, 1) \setminus \{x\}) \cap [x, b)$ contém pontos de $(x, \min\{1, b\})$ e, portanto, é não vazio. Portanto, x é um ponto de acumulação. Se $x < 0$, então $x \in [x, 0)$ que não contém nenhum ponto em $(0, 1)$. Similarmente, se $x \geq 1$, então $x \in [x, x + 1)$ que não contém nenhum ponto em $(0, 1)$. Em ambos os casos, a condição na definição de ponto de acumulação não é satisfeita, de modo que x não é um ponto de acumulação. Logo, obtemos que $(0, 1)' = [0, 1]$.



Uma propriedade interessante dos conjuntos derivados é apresentada no seguinte lema.

Proposição 2.74 (Decomposição do Fecho)

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Demonstração. A demonstração é imediata, demonstraremos a contenção dupla.

1. Vamos ver que todos os pontos $\overline{A} \setminus A$ estão em A' . Com efeito, dado um $x \notin A$ e aderente a A , temos que para todas as vizinhanças U_x de x

$$U_x \cap A \neq \emptyset$$

Como $x \notin A$, temos $(U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, cumprindo a definição do ponto de acumulação.

2. Está claro que $A \subset \overline{A}$, então resta apenas verificar que $A' \subset \overline{A}$. Se $x \in A'$, toda vizinhança de x contém um ponto de A diferente de x e, em particular, intersecta A . Pela Proposição 2.67, temos $x \in \overline{A}$.

■

Vamos parar por um segundo para refletir sobre as implicações desse resultado.

Observação 2.75 (Acumulação e Fechado) Um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Esta é uma consequência direta da proposição 2.67 e do lema 2.74.

Deve-se notar que, claramente, essa decomposição, em geral, não é uma partição, como mostra o exemplo simples a seguir.

Exemplo 2.76 (disco) Se considerarmos o disco D em $\mathbb{R}^2$ com a topologia usual, é fácil mostrar que seus pontos de acumulação coincidem com seu fecho, e assim

$$\overline{D} \setminus D \subsetneq D' \tag{2.2}$$

Em geral, temos apenas que $\overline{A} \setminus A \subset A'$.

◁

Definição 2.77 (Pontos isolados) Denominamos pontos isolados de um conjunto A , todos os pontos de A que não são pontos de acumulação. Ou seja, os pontos $x \in A$ que possuem uma vizinhança que satisfaz

$$U_x \cap A = \{x\}$$

Exemplo 2.78 (Topologia não discreta em um conjunto enumerável infinito) Considere, em $\mathbb{N}$, a família

$$\mathcal{T}_\Omega = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\Omega_y : y \in \mathbb{N}\}, \quad \Omega_y = \{i \in \mathbb{N} : i = 0 \text{ ou } i > y\}.$$

Essa família é uma topologia. Todo aberto não vazio contém 0, de modo que o espaço não é T_1 : por exemplo, não existe aberto que contenha 1 e exclua 0. Por outro lado, ele é T_0 , pois, dados $m < n$ com $m > 0$, o aberto Ω_m contém n e não contém m , e Ω_n contém 0 e não contém n .

Nenhum ponto é isolado. Com efeito, todo aberto não vazio contém 0 e, para cada y , o conjunto Ω_y contém infinitos naturais.

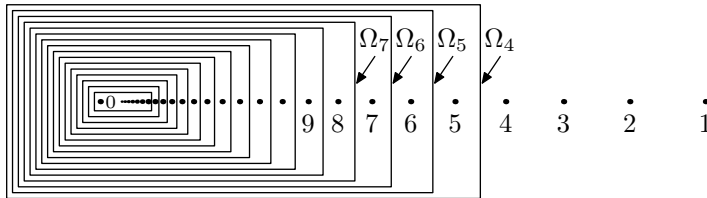


Figura 2.13: Uma topologia T_0 , não T_1 e não discreta em um conjunto enumerável infinito.

Passemos agora à noção de densidade.

Definição 2.79 (conjunto denso) Dizemos que um conjunto A é denso em um espaço topológico X se o fecho de A for todo o espaço X . Ou seja, se

$$\overline{A} = X$$

A definição pelo fecho é conceitualmente simples, mas nem sempre é a forma mais prática de verificar densidade. A caracterização seguinte será usada com frequência.

Proposição 2.80 (Caracterização da densidade) As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é denso.
2. Todo aberto U não vazio contém algum ponto de A .

Demonstração. Suponha primeiro que A seja denso e seja U um aberto não vazio. Escolha $x \in U$. Como $x \in \overline{A}$ e U é uma vizinhança de x , temos $U \cap A \neq \emptyset$.

Reciprocamente, suponha que todo aberto não vazio intercepte A . Seja $x \in X$ e seja V uma vizinhança de x . Existe um aberto U tal que $x \in U \subset V$. Por hipótese, $U \cap A \neq \emptyset$, e portanto também $V \cap A \neq \emptyset$. Logo $x \in \overline{A}$. Como x é arbitrário, $\overline{A} = X$. ■

É natural perguntar quando um espaço possui um subconjunto denso enumerável. Essa propriedade é importante o bastante para receber um nome próprio.

Definição 2.81 (espaço topológico separável) Diz-se que um espaço topológico X é separável se tiver um subconjunto enumerável denso.

Exemplo 2.82 (Espaços Separáveis) O primeiro exemplo é familiar; o segundo mostra que separabilidade pode surgir por razões bem diferentes da geometria euclidiana.

1. $\mathbb{Q}^n$ é um conjunto denso e enumerável em $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual. A numerabilidade de $\mathbb{Q}^n$ é uma consequência da numerabilidade de $\mathbb{Q}$ (o produto de conjuntos enumeráveis é enumerável). Além disso, a densidade pode ser facilmente testada.
2. Dado qualquer conjunto X equipado com a topologia de um ponto $a \in X$, o espaço topológico $(X, \mathcal{T}_a)$ é separável (note que $\{a\}$ é denso e finito).



Para finalizar esta seção, apresentamos o conceito de fronteira de um conjunto.

Definição 2.83 (Fronteira de um conjunto) Definimos a fronteira de um conjunto como os pontos aderentes ao conjunto que não são internos. Colocado de outra maneira

$$\text{fr}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ \quad (2.3)$$

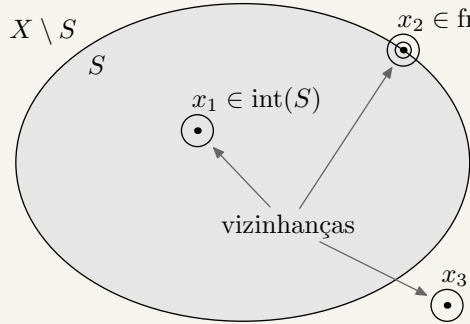


Figura 2.14: Interior, Exterior e Fronteira

É interessante ver que, como parece intuitivo, um conjunto e seu complemento compartilham uma fronteira.

Proposição 2.84 (Fronteira e Complementação)

$$\text{fr}(X \setminus A) = \text{fr}(A)$$

Demonstração. Usando as identidades de dualidade entre fecho e interior,

$$\begin{aligned} \text{fr}(X \setminus A) &= \overline{X \setminus A} \setminus (X \setminus A)^\circ \\ &= (X \setminus A^\circ) \setminus (X \setminus \overline{A}) \\ &= \overline{A} \setminus A^\circ = \text{fr}(A). \end{aligned}$$

■

A fronteira de um conjunto também pode ser descrita como a interseção das aderências do conjunto e de seu complementar.

Proposição 2.85 (Fronteira e Aderência)

$$\text{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

Demonstração. Nós sabemos que

$$\overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ)$$

Assim, basta que $\overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ$, o que é evidente pela definição de diferença. ■

O interior, o exterior e a fronteira dependem da topologia

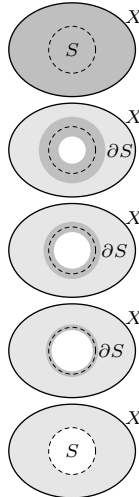


Figura 2.15: A influência da força da topologia na espessura da fronteira.

Exercícios

Ex. 2.26 — Considere, sobre um conjunto não-enumerável X , a topologia co-enumerável. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? Justifique.

?? $D \subseteq X$ é denso em X se, e somente se, D é não-enumerável.

?? Todos os abertos não vazios de X são densos em X .

?? Se $D \subseteq X$ é denso em X , então D é aberto em X .

Ex. 2.27 — Sejam X um espaço topológico e $D_1, D_2 \subseteq X$ densos em X . Pode-se afirmar que $D_1 \cap D_2$ é denso em X ? E se D_1 , além de denso, for aberto em X ?

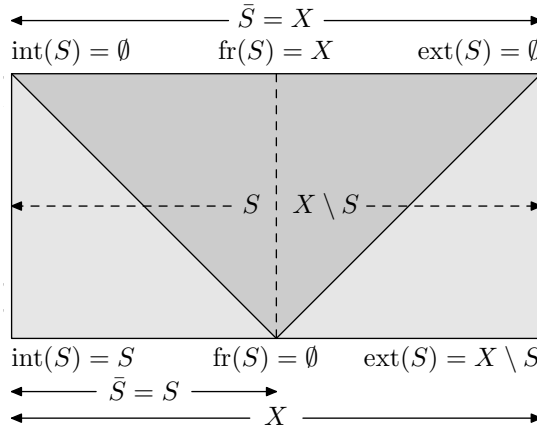


Figura 2.16: Interior, limite e exterior de conjuntos incluindo as topologias extremas discreta e trivial.

Ex. 2.28 — Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que x é ponto isolado de X se, e somente se, $\{x\}$ é aberto em X .

Ex. 2.29 — Sejam X um espaço topológico e A contido em X . Mostre que $A^\circ = \emptyset$ se, e somente se, A^c é denso em X .

Ex. 2.30 — Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que $x \in X$ é *ponto de fronteira* de A se toda vizinhança V de x em X satisfaz $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos de fronteira de A é denominado a *fronteira* de A em X e é denotado por $\text{fr}(A)$. Mostre que:

$$\text{fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

$$A^\circ = A \setminus \text{fr}(A)$$

$$\overline{A} = A \cup \text{fr}(A)$$

$$A \text{ é aberto em } X \text{ se, e somente se, } \text{fr}(A) = \overline{A} \setminus A$$

$$A \text{ é fechado em } X \text{ se, e somente se, } \text{fr}(A) = A \setminus (A^\circ)$$

Ex. 2.31 — Sejam X um espaço topológico, $A, B \subseteq X$ e $A \neq \emptyset$. Complete com $\subseteq$,

$\supseteq$ ou, se for o caso, $=$:

$$\begin{array}{ll}
 (A \cup B)^\circ & \text{---} A^\circ \cup B^\circ \\
 \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^\circ & \text{---} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \\
 (A \cap B)^\circ & \text{---} A^\circ \cap B^\circ \\
 \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)^\circ & \text{---} \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \\
 \overline{A \cup B} & \text{---} \overline{A \cup B} \\
 \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} & \text{---} \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} \\
 \overline{A \cap B} & \text{---} \overline{A \cap B} \\
 \overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} & \text{---} \overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A}
 \end{array}$$

Ex. 2.32 – Sejam X um espaço topológico e $U \subseteq X$. Mostre que: $\overline{U^c}^c = (U^c)^\circ$
 $\overline{(U^\circ)^c} = \overline{U^c}$ U é denso em X se, e somente se, U^c possui interior vazio.

2.9 Sequências

Recordemos primeiro o conceito de sequência.

Definição 2.86 (Sequência) Uma sequência em um espaço X é uma aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Escrevemos usualmente $(x_n)_{n \geq 1}$, onde $x_n = f(n)$ é o n -ésimo termo da sequência.

A noção central associada a sequências é a convergência.

Definição 2.87

Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico e $x_n \in X$ uma sequência de pontos de X . Dizemos que x_n converge para $x \in X$ na topologia $\mathcal{T}_X$, quando para toda vizinhança $V \in \mathcal{V}_x$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in V$. Denotamos tal fato por $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_X} x$, ou simplesmente $x_n \rightarrow x$.

Observação 2.88 Como no caso métrico, para verificar se uma sequência $x_n \in X$ converge para $x \in X$, basta verificar a condição da Definição 2.87 para uma base de vizinhanças de x .

Exemplo 2.89 Seja X um conjunto com pelo menos dois elementos, dotado da topologia indiscreta. Seja (x_n) uma sequência em X e $x \in X$. Então x_n converge para x .



Exemplo 2.90 Uma sequência é eventualmente constante se existirem $x \in X$ e N tais que $n \geq N \Rightarrow x_n = x$. Dizemos que x é o valor eventual da sequência (note que esse valor eventual é único). Em qualquer espaço topológico, uma sequência eventualmente constante converge para o seu valor eventual. No entanto, tal sequência pode ter outros limites também, como no exemplo acima.



2.9.1 Em um espaço topológico discreto X , uma sequência x_n converge para x se, e somente se, x_n é eventualmente constante e x é seu valor eventual.

Exercícios

Ex. 2.33 — Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Mostre que A é um subespaço fechado e discreto de X se, e somente se, $A' = \emptyset$.

A perda da unicidade de limites já mostra que, fora do contexto métrico, sequências podem se comportar de maneira muito diferente. Mais adiante veremos uma limitação ainda mais profunda: em espaços topológicos gerais, sequências podem não detectar todo o fecho de um conjunto. O primeiro axioma de enumerabilidade, estudado no Capítulo de enumerabilidade, explica por que essa dificuldade desaparece em muitos espaços familiares; redes e filtros fornecerão depois a linguagem adequada para o caso geral.

Com isso completamos a passagem da estrutura métrica para a estrutura topológica. A partir de agora, abertos, fechados, bases, fechos e vizinhanças serão a linguagem comum para formular continuidade, separação, compacidade e conexidade sem recorrer a uma distância.

Funções Contínuas

No capítulo anterior, os abertos passaram a ser o dado fundamental de um espaço topológico. A continuidade é a noção que respeita essa estrutura: uma aplicação é contínua quando abertos do contradomínio, ao serem puxados de volta, continuam abertos no domínio. Essa formulação global será nosso ponto de partida. A descrição local por vizinhanças aparecerá depois como uma maneira equivalente de ler o mesmo fenômeno ponto a ponto.

3.1 Continuidade e imagens inversas

A identidade

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} U_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(U_{\lambda}), \quad f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$$

explica por que a imagem inversa é o operador natural na definição: ela preserva exatamente as operações que aparecem nos axiomas de uma topologia.

Definição 3.1 Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$. Dizemos que f é contínua quando a imagem inversa de todo aberto de Y é aberta em X :

$$V \in \mathcal{T}_Y \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X.$$

Também diremos que f é contínua em $a \in X$ quando, para cada aberto $V \subseteq Y$ que contém $f(a)$, existe um aberto $U \subseteq X$ com

$$a \in U \quad \text{e} \quad f(U) \subseteq V.$$

Mais adiante verificaremos que a continuidade global equivale à continuidade em todos os pontos.

Notação 3.2 Denotaremos por $C(X, Y)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em Y . Quando $Y = \mathbb{R}$, escreveremos simplesmente $C(X)$.

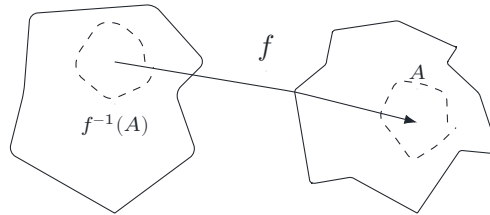


Figura 3.1: Continuidade: abertos do contradomínio têm imagens inversas abertas.

A caracterização por fechados é a forma dual da mesma condição, obtida por complementação.

Proposição 3.3 Para uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos, são equivalentes:

- a f é contínua;
- b $f^{-1}(A)$ é aberto em X para todo aberto A de Y ;
- c $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo fechado F de Y .

Demonstração. Os dois primeiros itens são a definição. Para comparar abertos e fechados, use

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Assim, preservar abertos por imagem inversa é equivalente a preservar fechados. ■

Observação 3.4 (Importância das topologias) A continuidade depende das topologias escolhidas. Se refinamos a topologia do domínio, há mais candidatos a abertos para as imagens inversas; se engrossamos a topologia do contradomínio, há menos abertos a testar. Em ambos os movimentos a continuidade se torna, em geral, mais fácil de satisfazer.

Observação 3.5 (Casos extremos)

1. Se o domínio X é discreto, toda aplicação $X \rightarrow Y$ é contínua.
2. Se o contradomínio Y possui a topologia trivial, toda aplicação $X \rightarrow Y$ é contínua.

Observação 3.6 (Aplicações constantes e identidade)

1. Toda aplicação constante é contínua: a imagem inversa de um aberto é X ou $\emptyset$.
2. A identidade

$$\text{id}: (X, \mathcal{T}_{\text{discreta}}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$$

é contínua e bijetiva. Se X tem mais de um ponto, sua inversa não é contínua.

3.1.1 A leitura local

A condição pontual da Definição 3.1 é a versão local da condição por imagens inversas. Se f é contínua e V é aberto com $f(a) \in V$, podemos tomar $U = f^{-1}(V)$. No sentido inverso, suponha f contínua em cada ponto e fixe um aberto $V \subseteq Y$. Para cada $a \in f^{-1}(V)$, escolha um aberto U_a com

$$a \in U_a \subseteq f^{-1}(V).$$

Então

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} U_a$$

é aberto. Portanto, f é contínua se, e somente se, é contínua em cada ponto.

Bases locais permitem reduzir ainda mais o teste.

Proposição 3.7 Seja $f: X \rightarrow Y$, e sejam $\mathcal{B}_a$ e $\mathcal{B}_{f(a)}$ bases de vizinhanças de a e $f(a)$, respectivamente. São equivalentes:

- a f é contínua em a ;
- b para cada $V \in \mathcal{V}(f(a))$, existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tal que $f(U) \subseteq V$;
- c para cada $V \in \mathcal{B}_{f(a)}$, existe $U \in \mathcal{B}_a$ tal que $f(U) \subseteq V$.

Demonstração. Se f é contínua em a e V é uma vizinhança de $f(a)$, escolha um aberto V_0 com $f(a) \in V_0 \subseteq V$ e depois um aberto U_0 com $a \in U_0$ e $f(U_0) \subseteq V_0$. Isso prova a $\Rightarrow$ b.

Para passar de b a c, refine a vizinhança do domínio por um elemento de $\mathcal{B}_a$.

Finalmente, suponha c. Dado um aberto $V \ni f(a)$, escolha $V_0 \in \mathcal{B}_{f(a)}$ com $V_0 \subseteq V$, e depois $U_0 \in \mathcal{B}_a$ com $f(U_0) \subseteq V_0$. Como U_0 é uma vizinhança, contém um aberto $U \ni a$; então $f(U) \subseteq V$. ■

3.1.2 Composição

A estabilidade por composição pode ser vista tanto globalmente quanto localmente.

Proposição 3.8 Se $f: X \rightarrow Y$ é contínua em a e $g: Y \rightarrow Z$ é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a .

Demonstração. Dada uma vizinhança W de $g(f(a))$, escolha uma vizinhança V de $f(a)$ com $g(V) \subseteq W$ e, em seguida, uma vizinhança U de a com $f(U) \subseteq V$. Então

$$(g \circ f)(U) \subseteq W.$$

■

Proposição 3.9 Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.

Demonstração. Para todo aberto $W \subseteq Z$,

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)),$$

e as duas imagens inversas sucessivas são abertas.

■

3.2 Homeomorfismos e Homeomorfismos Locais

Continuidade sozinha permite colapsar pontos e regiões. Para expressar que dois espaços possuem a mesma estrutura topológica, precisamos de uma transformação reversível cuja ida e volta respeitem os abertos.

Definição 3.10 (Homeomorfismo) Um homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ é uma bijeção tal que f e f^{-1} são contínuas. Quando existe tal aplicação, dizemos que X e Y são homeomorfos.

Observação 3.11 (Continuidade da inversa) Uma bijeção contínua não precisa ser um homeomorfismo. A continuidade da inversa é o que garante que a correspondência preserve a topologia nas duas direções.

Exemplo 3.12 (Homeomorfismos)

1. A identidade

$$\text{id}: (X, \mathcal{T}_{\text{discreta}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$$

é contínua e bijetiva, mas não é um homeomorfismo quando X tem mais de um ponto.

2. Considere a lemniscata $L \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por

$$\varphi(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right).$$

A reta real não é homeomorfa a L . Ainda não dispomos das ferramentas formais para provar isso, mas a geometria antecipa a conexidade: ao remover o ponto $O = (0, 0)$, pequenas vizinhanças de O em L exibem quatro ramos, enquanto pequenas vizinhanças de um ponto da reta exibem apenas dois.

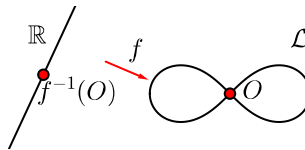


Figura 3.2: A lemniscata antecipa um argumento local que será formalizado por conexidade.

3. Considere dois subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, cada um formado por três segmentos que se encontram apenas num mesmo extremo. Emparelhe os três segmentos de X com os de Y e use interpolação linear em cada par.

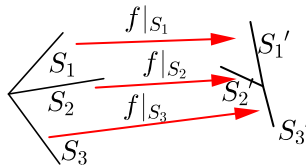


Figura 3.3: Homeomorfismo construído segmento a segmento.

A parametrização do segmento com extremos a, b é

$$\begin{aligned} f_{ab}: \quad [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (1-t)a + tb. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ela é um homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre $[a, b]$. Portanto um homeomorfismo de $[c, d]$ em $[a, b]$ é $f_{ab} \circ f_{cd}^{-1}$. Como as definições coincidem no extremo comum, o lema da colagem permite unir as três aplicações parciais; o mesmo vale para a inversa.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f_{ab}} & [a, b] \\ f_{cd} \downarrow & \nearrow f_{ab} \circ f_{cd}^{-1} & \\ [c, d] & & \end{array}$$



3.2.1 Homeomorfismos locais

Definição 3.13 (Homeomorfismo local) Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo local em x_0 se existe um aberto $U \ni x_0$ tal que $f(U)$ é aberto em Y e

$$f|_U : U \longrightarrow f(U)$$

é um homeomorfismo. Se isso vale para todo $x_0 \in X$, dizemos que f é um homeomorfismo local.

Todo homeomorfismo é um homeomorfismo local. A noção permite comparar espaços em pequena escala mesmo quando globalmente são muito diferentes.

Exemplo 3.14 (Esfera e plano) A esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

é localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Se $p = (x_0, y_0, z_0)$ tem $z_0 \neq 0$, tome uma vizinhança U de p contida no hemisfério determinado pelo sinal de z_0 . A projeção

$$\pi_{xy} : U \rightarrow \pi_{xy}(U), \quad (x, y, z) \mapsto (x, y),$$

é um homeomorfismo, com inversa

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{z_0}{|z_0|} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right).$$

Se $x_0 \neq 0$, pode-se usar a projeção no plano yz ; os demais casos são análogos, escolhendo uma coordenada não nula.



3.2.2 Aplicações abertas, fechadas e mergulhos

Definição 3.15 (Aplicações abertas, fechadas e mergulhos) Sejam X e Y espaços topológicos.

- ☐ a Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um **homeomorfismo** se é bijetiva e f, f^{-1} são contínuas.
- ☐ b f é **aberta** se leva abertos de X em abertos de Y .
- ☐ c f é **fechada** se leva fechados de X em fechados de Y .
- ☐ d f é um **mergulho** se é um homeomorfismo de X sobre o subespaço $f(X) \subset Y$.

Proposição 3.16 Se $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção, são equivalentes:

- ☐ a f é um homeomorfismo;
- ☐ b f é contínua e aberta;
- ☐ c f é contínua e fechada.

Demonstração. Se f é um homeomorfismo e $U \subseteq X$ é aberto, então

$$f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$$

é aberto; o mesmo argumento com complementos mostra que f é fechada.

Reciprocamente, suponha f contínua e aberta. Para todo aberto $U \subseteq X$, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ é aberto, logo f^{-1} é contínua. Se f é contínua e fechada, aplicamos o mesmo argumento aos fechados. ■

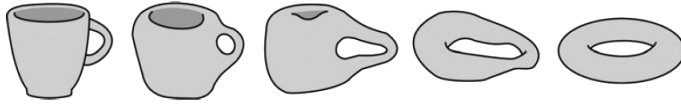
Exemplos 3.17

1. Uma aplicação aberta que não é contínua: tome $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, $Y = (\{a, b\}, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$ e

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \geq 0, \\ b, & x < 0. \end{cases}$$

Toda imagem de aberto é aberta em Y , mas $f^{-1}(\{a\}) = [0, \infty)$ não é aberto. Como Y é discreto, f também é fechada.

2. Uma aplicação que não é aberta nem fechada: se A tem ao menos dois elementos, considere a identidade de $(A, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$ em $(A, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$.
3. Uma aplicação aberta que não é fechada: tome $X = (\{a, b\}, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$, $Y = (\{a, b\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\})$ e a aplicação constante com valor a .
4. Uma aplicação fechada que não é aberta: tome $X = (\{a, b\}, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$, $Y = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ e defina $f(a) = 0$, $f(b) = 1$.
5. A identidade de um espaço topológico em si mesmo é aberta e fechada.



Exercícios

Ex. 3.1 — Seja (X, d) um espaço métrico.

??Mostre que, para todo subconjunto não vazio $A \subseteq X$, a função

$$\begin{aligned} d(\cdot, A): X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

é contínua.

??Sejam $A, B \subseteq X$ fechados, não vazios e disjuntos. Mostre que a função $f: X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

é contínua.

Ex. 3.2 — Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$.

??Seja $\mathcal{U}$ uma família de abertos de X tal que $X = \bigcup \mathcal{U}$. Mostre que, se $f|_U$ é contínua para todo $U \in \mathcal{U}$, então f é contínua.

??Sejam A e B fechados em X , com $X = A \cup B$. Mostre que, se $f|_A$ e $f|_B$ são contínuas, então f é contínua.

??Conclua que, se $\mathcal{F}$ é uma família finita de subconjuntos fechados de X , $X = \bigcup \mathcal{F}$, e $f|_F$ é contínua para todo $F \in \mathcal{F}$, então f é contínua.

??Dê um contraexemplo mostrando que a hipótese de finitude não pode ser omitida no item anterior.

??Dê um contraexemplo mostrando que a hipótese de os conjuntos serem fechados não pode ser omitida no item (b).

Ex. 3.3 — Considere $\{0, 1\}$ com a topologia trivial e a aplicação $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que f é sobrejetora, contínua e aberta. Portanto, a imagem de um espaço metrizável por uma aplicação contínua e aberta não precisa sequer ser T_0 . O que acontece se substituirmos “aberta” por “fechada”?

Ex. 3.4 — Mostre que toda bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

??Mostre que quaisquer dois intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$ com mais de um ponto são homeomorfos.

??Dê um contraexemplo mostrando que a palavra “limitados” não pode ser omitida no item anterior.

Construções de Espaços Topológicos

Até aqui, a topologia foi apresentada como uma estrutura já dada. Neste capítulo passaremos a construí-la a partir de espaços conhecidos. Há quatro operações fundamentais: restringir um espaço a um subconjunto, combinar espaços por produtos, colar pontos por quocientes e manter componentes separadas por somas. Por trás dessas construções existe uma mesma pergunta: qual topologia torna certas aplicações contínuas sem impor informação desnecessária?

A linguagem de topologias inicial e final tornará essa ideia precisa. Antes dela, começamos pelo caso mais concreto, o de um subconjunto visto com a estrutura herdada do espaço ambiente.

4.1 Subespaços

O espaço $(S, \mathcal{T}_S)$ é chamado subespaço de X . Também usaremos a expressão **topologia induzida**; seus elementos são os **abertos relativos** de S .

A palavra “relativo” é importante. Um conjunto pode ser aberto em S sem ser aberto no espaço ambiente: o que importa é que ele seja o recorte, por S , de algum aberto de X . Essa distinção será usada repetidamente ao comparar propriedades do subespaço com propriedades do espaço ambiente.

Exemplos 4.2

- a $\mathbb{Z}$, com a topologia induzida por $\mathbb{R}$, é um espaço topológico discreto.
- b Identificando $\mathbb{R}$ com o eixo horizontal $\mathbb{R} \times \{0\}$, obtemos um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
- c Se $S = [0, 1]$ recebe a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$, então o próprio S é aberto e fechado em S . Visto como subconjunto de $\mathbb{R}$, porém, $[0, 1]$ é fechado e não é aberto.
- d Os números racionais $\mathbb{Q}$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}$, não formam um espaço discreto: por exemplo, $\{0\}$ não é aberto em $\mathbb{Q}$. Se $a < b$ são racionais, então $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ é aberto em $\mathbb{Q}$ e $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ é fechado. Se $a < b$ são irracionais, $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ é simultaneamente aberto e fechado em $\mathbb{Q}$.
- e Considere a topologia $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ em $X = \{a, b, c, d, e\}$ e o subconjunto $S = \{a, d, e\}$ de X . Temos $X \cap S = S$, $\{a\} \cap S = \{a\}$, $\{a, c, d\} \cap S = \{a, d\}$, $\emptyset \cap S = \emptyset$, $\{c, d\} \cap S = \{d\}$, $\{b, c, d, e\} \cap S = \{d, e\}$. Portanto, topologia induzida no subespaço S é $\mathcal{T}_S = \{S, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$.



Proposição 4.3 Seja S um subespaço de X . Então:

- a U é aberto em S se, e somente se, existe um aberto $U' \subset X$ tal que $U = S \cap U'$.
- b F é fechado em S se, e somente se, existe um fechado $F_1 \subset X$ tal que $F = S \cap F_1$.
- c Se $A \subset S$, então
$$\overline{A}^S = S \cap \overline{A}^X.$$
- d Se $x \in S$, um conjunto $U \subset S$ é vizinhança de x em S se, e somente

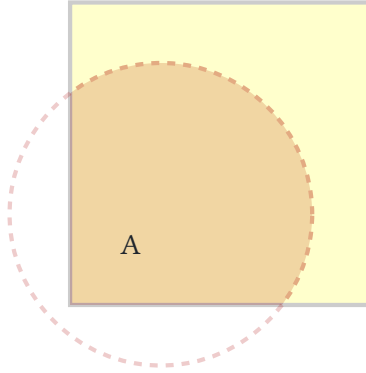


Figura 4.1: O conjunto A é um aberto na topologia do subespaço no retângulo em $\mathbb{R}^2$

se, existe uma vizinhança U' de x em X tal que $U = S \cap U'$.

Demonstração. O primeiro item é a definição da topologia de subespaço.

Para o segundo, tome complementos dentro de S . Se F é fechado em S , então $S \setminus F = S \cap U'$ para algum aberto U' de X ; logo

$$F = S \cap (X \setminus U'),$$

e $X \setminus U'$ é fechado em X . A recíproca segue pelo mesmo cálculo.

Para o fecho, use a caracterização por vizinhanças. Um ponto $x \in S$ pertence a $\overline{A}^S$ exatamente quando toda vizinhança de x em S encontra A . Pelo item seguinte — ou diretamente pela definição de aberto relativo — essas vizinhanças são os recortes por S das vizinhanças de x em X . Como $A \subset S$, isso equivale a dizer que toda vizinhança de x em X encontra A , isto é, $x \in \overline{A}^X$. Portanto

$$\overline{A}^S = S \cap \overline{A}^X.$$

Resta justificar a afirmação sobre vizinhanças. Se U' é vizinhança de x em X , escolha um aberto V' com $x \in V' \subset U'$. Então $S \cap V'$ é aberto em S e

$$x \in S \cap V' \subset S \cap U',$$

de modo que $S \cap U'$ é vizinhança de x em S .

Reciprocamente, seja U vizinhança de x em S . Existe um aberto relativo $V = S \cap V'$ com $x \in V \subset U$, onde V' é aberto em X . Defina

$$U' = V' \cup (U \setminus V).$$

Então $x \in V' \subset U'$, portanto U' é vizinhança de x em X , e $S \cap U' = U$. ■

Observação 4.4 (Propriedades hereditárias) Uma propriedade topológica é **hereditária** quando passa do espaço para todos os seus subespaços. Se essa passagem é garantida apenas para subespaços fechados, dizemos que a propriedade é **fracamente hereditária**.

Observação 4.5 (Primeiro e segundo enumeráveis são hereditários) Todo subespaço de um espaço primeiro enumerável é primeiro enumerável; todo subespaço de um espaço segundo enumerável é segundo enumerável.

Proposição 4.6 Sejam X e Y espaços topológicos, e seja S um subespaço de X . Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a restrição $f|_S : S \rightarrow Y$ é contínua.

Demonstração. Para um aberto $V \subset Y$,

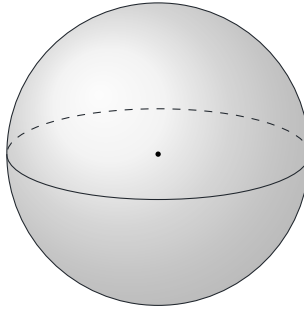
$$(f|_S)^{-1}(V) = S \cap f^{-1}(V).$$

A continuidade de f torna $f^{-1}(V)$ aberto em X ; seu recorte por S é aberto na topologia de subespaço. Logo $f|_S$ é contínua. ■

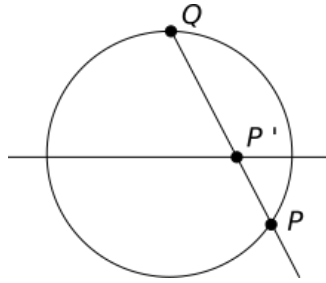
Exemplo 4.7 (Esfera unitária) Dado $n \in \mathbb{N}$, a n -esfera de raio 1 é definida como o subespaço do espaço euclidiano $(n + 1)$ dimensional dos pontos que estão à distância 1 de um ponto central. Assim,

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

A 0-esfera é um par de pontos, a 1-esfera é um círculo e a 2-esfera é a esfera usual.



A topologia de subespaço também permite tratar a esfera sem criar uma estrutura nova. Um primeiro fato geométrico importante é que a esfera, depois de retirado um ponto, pode ser descrita por coordenadas euclidianas. Para isso usamos a projeção estereográfica. Se Q é um ponto de $\mathbb{S}^n$ e H o hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ definido pela equação $x_{n+1} = 0$, então a projeção estereográfica de um ponto $P \in \mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ é o ponto P' da interseção da reta QP com H .



Em coordenadas cartesianas, se $P = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $P' = (X_1, \dots, X_n, 0)$, a projeção a partir do polo norte $Q = (0, \dots, 0, 1)$ é dada por

$$X_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definindo

$$E^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2$$

sua inversa é dada por

$$x_{n+1} = \frac{E^2 - 1}{E^2 + 1} \quad \text{e} \quad x_i = \frac{2X_i}{E^2 + 1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

As fórmulas acima mostram diretamente que a projeção estereográfica e sua inversa são contínuas: seus denominadores não se anulam nos respectivos domínios. Portanto, $\mathbb{S}^n \setminus \{Q\}$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.



Proposição 4.8 (Lema da colagem) Sejam X e Y espaços topológicos. Suponha $X = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são ambos abertos ou ambos fechados. Se as restrições

$$f|_{S_1}: S_1 \rightarrow Y, \quad f|_{S_2}: S_2 \rightarrow Y$$

são contínuas, então $f: X \rightarrow Y$ é contínua.

Demonstração. No caso aberto, dado $V \subset Y$ aberto, cada conjunto $(f|_{S_i})^{-1}(V)$ é aberto em S_i e, como S_i é aberto em X , é também aberto em X . Como

$$f^{-1}(V) = (f|_{S_1})^{-1}(V) \cup (f|_{S_2})^{-1}(V),$$

a imagem inversa de todo aberto é aberta.

Se S_1 e S_2 são fechados, usamos a caracterização da continuidade por fechados. Para $F \subset Y$ fechado, cada $(f|_{S_i})^{-1}(F)$ é fechado em S_i e, portanto, em X . Sua união finita é $f^{-1}(F)$, que é fechada. Assim f é contínua nos dois casos. ■

Proposição 4.9 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$.

1. Com a topologia de subespaço, a inclusão $i: A \rightarrow X$ é contínua.
2. Se $\mathcal{T}'$ é qualquer topologia em A para a qual $i: A \rightarrow X$ é contínua, então $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}'$.

Em particular, a topologia de subespaço é a menor topologia em A que torna a inclusão contínua.

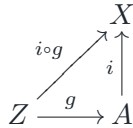
Demonstração. Para $U \in \mathcal{T}$,

$$i^{-1}(U) = A \cap U \in \mathcal{T}_A,$$

logo a inclusão é contínua. Se $\mathcal{T}'$ também torna i contínua, então cada $A \cap U = i^{-1}(U)$, com $U \in \mathcal{T}$, pertence a $\mathcal{T}'$. Como esses conjuntos são exatamente os abertos de $\mathcal{T}_A$, segue que $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}'$. ■

Proposição 4.10 (Propriedade universal do subespaço) Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Z, \mathcal{T}_Z)$ espaços topológicos, $A \subseteq X$ com a topologia de subespaço e $i : A \hookrightarrow X$ a inclusão. Para uma aplicação $g : Z \rightarrow A$,

$$g \text{ é contínua} \iff i \circ g \text{ é contínua.}$$



Demonstração. Uma direção é a estabilidade da continuidade por composição. Para a recíproca, suponha $i \circ g$ contínua e tome um aberto relativo $U \subset A$. Escreva $U = A \cap V = i^{-1}(V)$ com V aberto em X . Então

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(i^{-1}(V)) = (i \circ g)^{-1}(V),$$

que é aberto em Z . Portanto g é contínua. ■

Exercícios

Ex. 4.1 — Sejam X um espaço topológico, S um subespaço de X e $A \subseteq S$. Mostre que $\text{Int}_S(A) \supseteq S \cap \text{Int}_X(A)$.

Ex. 4.2 — Considere $X = \mathbb{R}^2$ munido da topologia usual e $S = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Mostre que $\text{Int}_S(A) = S$ e que $\text{Int}_X(A) = \emptyset$.

Ex. 4.3 — Seja X um espaço topológico. Mostre que se Y é um subespaço de X e $Z \subseteq Y$, então a topologia sobre Z induzida pela topologia de Y coincide com a topologia sobre Z induzida pela topologia de X .

Ex. 4.4 — Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ subespaço de X e U um subconjunto de Y .

??Mostre que o fecho de U em $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é a interseção de Y com o fecho de U em $(X, \mathcal{T})$.

??Mostre que $U \subset Y$ é denso em Y se e só se $\bar{U} = \bar{Y}$ em X .

Ex. 4.5 — Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ subespaço de X e U um subconjunto de Y . ??Mostre que um ponto $y \in Y$ é ponto de acumulação de U em $(Y, \mathcal{T}_Y)$ se, e somente se, y é ponto de acumulação de U em $(X, \mathcal{T})$. ??A propriedade análoga para pontos interiores é verdadeira? Justifique.

4.2 Topologias Inicial e Final

O caso dos subespaços já sugere uma regra mais geral: muitas topologias são determinadas não por uma lista direta de abertos, mas pela exigência de continuidade de certas aplicações. Se as setas saem do conjunto que queremos topologizar, procuramos a estrutura mínima que as torne contínuas. Se as setas chegam a esse conjunto, procuramos a estrutura máxima compatível com a continuidade.

Essas duas construções recebem os nomes de topologia inicial e topologia final. A primeira organizará os produtos; a segunda, os quocientes e as somas.

4.2.1 Topologia Inicial

Começemos com uma única aplicação

$$f : X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y),$$

onde X é apenas um conjunto. Para que f seja contínua, toda imagem inversa $f^{-1}(U)$, com $U \in \mathcal{T}_Y$, deve ser aberta em X . Isso sugere usar exatamente essas imagens inversas.

Proposição 4.11 A família

$$f^{-1}(\mathcal{T}_Y) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_Y\}$$

é uma topologia em X . Além disso, é a menor topologia em X que torna f contínua.

Demonstração. Temos $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$. Como imagens inversas comutam com uniões arbitrárias e interseções finitas,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(U_{\alpha}), \quad f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$$

a família $f^{-1}(\mathcal{T}_Y)$ é uma topologia. Se $\mathcal{T}$ é qualquer topologia em X para a qual f é contínua, então $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ para todo $U \in \mathcal{T}_Y$. Portanto $f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}$. ■

Para uma família de aplicações, reúnem-se todas as imagens inversas e toma-se a topologia que elas geram.

Definição 4.12 (Topologia inicial) Seja

$$f_\lambda : X \longrightarrow (Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda), \quad \lambda \in \Lambda,$$

uma família de aplicações. A **topologia inicial** induzida pela família $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é a topologia gerada pela sub-base

$$\mathcal{S} = \{f_\lambda^{-1}(U) : \lambda \in \Lambda, U \in \mathcal{T}_\lambda\}.$$

Equivalentemente, é a menor topologia em X que torna todas as aplicações f_λ contínuas. Também é chamada **topologia fraca**.

Uma aplicação injetiva fornece um caso particularmente importante. Se $f : Y \rightarrow X$ é injetiva e Y recebe a topologia inicial induzida por f , então f identifica Y com o subespaço $f(Y) \subseteq X$.

Definição 4.13 (Mergulho) Uma aplicação $f : Y \rightarrow X$ entre espaços topológicos é um **mergulho** se f é um homeomorfismo de Y sobre o subespaço $f(Y)$ de X .

Proposição 4.14 (Caracterização dos mergulhos) Se $f : Y \rightarrow X$ é injetiva, então f é um mergulho se, e somente se, a topologia de Y é a topologia inicial induzida por f .

Demonstração. Como $f : Y \rightarrow f(Y)$ é uma bijeção, dizer que a topologia de Y é induzida por f significa precisamente que

$$U \subseteq Y \text{ é aberto} \iff U = f^{-1}(V) \text{ para algum aberto } V \subseteq f(Y).$$

Isso equivale a dizer que $f : Y \rightarrow f(Y)$ e sua inversa são contínuas. ■

4.2.2 Topologia Final

Agora invertamos as setas. Seja

$$f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow Y,$$

onde Y ainda é apenas um conjunto. Queremos a topologia mais forte em Y para a qual f seja contínua. Um subconjunto $U \subseteq Y$ pode ser declarado aberto exatamente quando sua imagem inversa já é aberta em X .

Definição 4.15 (Topologia final) Dada uma família

$$f_\lambda : (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) \longrightarrow Y, \quad \lambda \in \Lambda,$$

a topologia final induzida por (f_λ) é

$$\mathcal{T}_{\text{final}} = \{U \subseteq Y : f_\lambda^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\lambda \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Ela é a maior topologia em Y que torna todas as aplicações f_λ contínuas.

Proposição 4.16 Para uma única aplicação $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$, a topologia final é

$$\mathcal{T}^f = \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}.$$

Demonstração. A família indicada contém $\emptyset$ e Y . As propriedades de imagem inversa mostram que ela é fechada por uniões arbitrárias e interseções finitas. Logo é uma topologia. Qualquer topologia em Y que torne f contínua só pode conter conjuntos U cuja imagem inversa seja aberta; portanto está contida nessa família. ■

Quando f não é sobrejetiva, a topologia final torna $Y \setminus f(X)$ discreto e separa esse conjunto de $f(X)$. Nos exemplos mais importantes, especialmente nos quocientes, trabalharemos com aplicações sobrejetivas.

4.2.3 Sub-bases e continuidade

A construção inicial também fornece um critério útil para verificar continuidade quando a topologia do contradomínio é dada por geradores.

Proposição 4.17 Se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ e $f : X \rightarrow Y$, então

$$\mathcal{T}\langle f^{-1}(\mathcal{C}) \rangle = f^{-1}(\mathcal{T}\langle \mathcal{C} \rangle).$$

Demonstração. A imagem inversa comuta com uniões arbitrárias e interseções finitas. Portanto, aplicar f^{-1} às uniões de interseções finitas que geram $\mathcal{T}\langle \mathcal{C} \rangle$ produz exatamente a topologia gerada por $f^{-1}(\mathcal{C})$. ■

Proposição 4.18 Se a topologia de Y é gerada por uma sub-base $\mathcal{C}$, então uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se,

$$f^{-1}(C) \text{ é aberto em } X \quad \text{para todo } C \in \mathcal{C}.$$

Demonstração. Se f é contínua, as imagens inversas dos elementos de $\mathcal{C}$ são abertas. Reciprocamente, se isso vale para todos os elementos de $\mathcal{C}$, a proposição anterior mostra que as imagens inversas de todos os abertos de Y pertencem à topologia gerada por essas imagens inversas; portanto são abertas em X . ■

4.2.4 Propriedades Universais

A força das topologias inicial e final aparece nas propriedades universais: elas permitem testar continuidade sem voltar continuamente às definições de aberto.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & B \\ \downarrow b & & \downarrow c \\ C & \xrightarrow{d} & D \end{array} \quad (4.1)$$

Dizemos que o diagrama 4.1 comuta quando $c \circ a = d \circ b$.

Proposição 4.19 (Propriedade universal da topologia inicial) Se X recebe a topologia inicial induzida por $f : X \rightarrow Y$, então, para toda aplicação $g : Z \rightarrow X$,

$$g \text{ é contínua} \iff f \circ g \text{ é contínua.}$$

Além disso, a topologia inicial é a única topologia em X com essa propriedade e para a qual f é contínua.

Demonstração. Se g é contínua, a continuidade de $f \circ g$ segue pela composição. Reciprocamente, todo aberto da topologia inicial tem a forma $f^{-1}(U)$, com U aberto em Y , e

$$g^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g)^{-1}(U).$$

Logo a continuidade de $f \circ g$ implica a de g . A unicidade segue aplicando essa equivalência à identidade entre duas possíveis topologias em X . ■

Proposição 4.20 (Propriedade universal da topologia inicial: família)

Se X recebe a topologia inicial induzida por uma família $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$, então, para toda aplicação $g : Z \rightarrow X$,

$$g \text{ é contínua} \iff f_\lambda \circ g \text{ é contínua para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Demonstração. É a Proposição 4.18 aplicada à sub-base $\{f_\lambda^{-1}(U)\}$. De fato,

$$g^{-1}(f_\lambda^{-1}(U)) = (f_\lambda \circ g)^{-1}(U).$$

Proposição 4.21 (Propriedade universal da topologia final) Se Y recebe a topologia final induzida por uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, então, para toda aplicação $g : Y \rightarrow Z$,

$$g \text{ é contínua} \iff g \circ f \text{ é contínua.}$$

A topologia final é a única topologia em Y com essa propriedade e para a qual f é contínua.

Demonstração. Uma direção segue pela composição. Para a outra, se V é aberto em Z e $g \circ f$ é contínua, então

$$f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$$

é aberto em X . Pela definição da topologia final, $g^{-1}(V)$ é aberto em Y . A unicidade segue novamente aplicando a propriedade à identidade. ■

4.2.5 Exemplos

Exemplo 4.22 Seja (X, d) um espaço métrico. Para cada $x \in X$, considere

$$f_x : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_x(y) = d(x, y).$$

A topologia métrica é exatamente a topologia inicial induzida pela família $(f_x)_{x \in X}$. Com efeito, cada f_x é contínua na topologia métrica, enquanto

$$B(x, r) = f_x^{-1}((-\infty, r))$$

mostra que as bolas abertas pertencem à topologia inicial. ◁

Exemplo 4.23 Considere o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ das funções limitadas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para cada ponto x do domínio há uma aplicação de avaliação

$$F_x : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_x(f) = f(x).$$

A topologia inicial produzida por toda a família $(F_x)_{x \in \mathbb{R}}$ é justamente aquela em que convergir significa convergir em cada ponto do domínio. Na Seção 4.3 veremos essa mesma estrutura como um caso de topologia produto. ◁

Exemplo 4.24 Considere

$$f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad f(t) = e^{2\pi it}.$$

A topologia inicial em $\mathbb{R}$ induzida pela topologia usual de S^1 é mais fraca que a topologia usual de $\mathbb{R}$: seus abertos são invariantes por translações inteiras. A topologia final induzida por essa mesma aplicação, por outro lado, será um dos exemplos centrais da seção de espaços quocientes.



Exercícios

Ex. 4.6 — Seja $f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda$ uma família de aplicações. Mostre diretamente que a topologia gerada por todos os conjuntos $f_\lambda^{-1}(U)$, com U aberto em Y_λ , é a menor topologia que torna todas as f_λ contínuas.

Ex. 4.7 — Considere um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e o espaço de Sierpiński S . Seja F a família de todas as aplicações contínuas $f : X \rightarrow S$. Mostre que a topologia inicial em X induzida por F coincide com $\mathcal{T}$.

* **Ex. 4.8** — Se $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$ que possui exatamente as mesmas funções contínuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a topologia usual, mostre que $\mathcal{T}$ é a topologia usual.

Ex. 4.9 — Seja X um conjunto e $\{f_\alpha : X \rightarrow A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma família de funções. Se $\mathcal{T}$ é a topologia inicial gerada por essa família e $Y \subseteq X$, mostre que a topologia de subespaço em Y é a topologia inicial gerada pelas restrições $f_\alpha|_Y$.

Ex. 4.10 — Descreva a topologia inicial em $\mathbb{R}$ gerada por cada uma das famílias abaixo, supondo os contradomínios com a topologia usual. ??A família das funções constantes. ??A aplicação identidade. ??O conjunto de todas as funções contínuas para a topologia usual. ??[difficulty=1] O conjunto das funções reais limitadas e contínuas para a topologia usual.

4.3 Topologia Produto

Produtos aparecem quando vários espaços precisam ser observados simultaneamente. A escolha topológica natural deve permitir recuperar continuamente cada coordenada e, ao mesmo tempo, não impor relações artificiais entre elas. Essa exigência determina a topologia produto: ela é a estrutura inicial associada às projeções. No caso de dois fatores, os retângulos abertos fornecem a descrição concreta dessa construção.

4.3.1 Produto Finito

Definição 4.25 (Topologia do Produto de dois Espaços) Sejam $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. No conjunto $X \times Y$, a **topologia produto** é a topologia gerada pelos retângulos

$$U \times V, \quad U \in \mathcal{T}_X, \quad V \in \mathcal{T}_Y.$$

O conjunto cartesiano equipado com essa topologia é o **espaço produto**. Quando não houver ambiguidade, também escreveremos $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ para designá-la.

Exemplo 4.26 Dado $X = \{a, b\}$ com a topologia de Sierpinski $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Então a topologia produto possui exatamente os seguintes abertos:

$$\emptyset, \quad \{(a, a)\}, \quad \{a\} \times X, \quad X \times \{a\}, \quad (\{a\} \times X) \cup (X \times \{a\}), \quad X \times X.$$

Essa topologia está representada na figura 4.2.

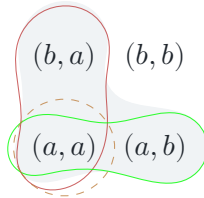


Figura 4.2: Topologia produto de dois espaços de Sierpiński.

Definimos as projeções canônicas em X e Y como:

$$\begin{aligned} \pi_X : X \times Y &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_Y : X \times Y &\rightarrow Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

As projeções não são apenas aplicações auxiliares: elas caracterizam a topologia produto. A próxima proposição reúne as descrições equivalentes que serão usadas adiante.

Exemplo 4.27 (Cilindro) Considere o círculo unitário S^1 e o intervalo $I = [0, 1]$. Então o produto $S^1 \times [0, 1]$ é o cilindro.

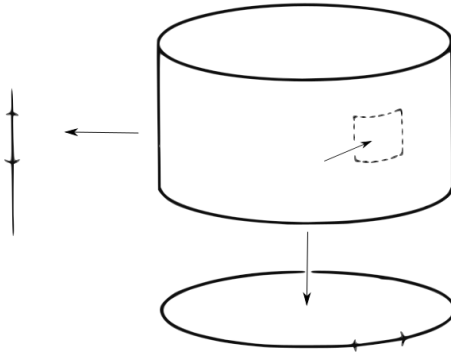


Figura 4.3: O cilindro é o produto de $S^1 \times [0, 1]$

Proposição 4.28

Sejam X e Y espaços topológicos e seja τ uma topologia qualquer em $X \times Y$. Então as condições abaixo são equivalentes.

1. τ coincide com a topologia produto.
2. Os conjuntos da forma $A \times B$, com $A \in \mathcal{T}_X$ e $B \in \mathcal{T}_Y$, formam uma base de τ .
3. Os conjuntos da forma $A \times Y$ e $X \times B$, com $A \in \mathcal{T}_X$ e $B \in \mathcal{T}_Y$, formam uma sub-base de τ .
4. τ é a topologia inicial determinada por π_X e π_Y ; isto é, a menor topologia em $X \times Y$ que torna as duas projeções contínuas.
5. Para qualquer espaço topológico Z e qualquer função $f : Z \rightarrow X \times Y$, a continuidade de f equivale à continuidade simultânea de suas duas funções coordenadas $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$.

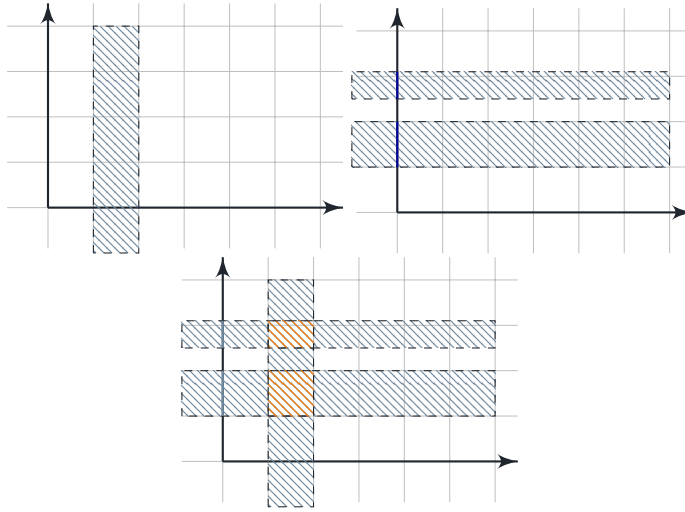


Figura 4.4: Dois abertos da sub-base da topologia produto em azul e em laranja um aberto da base que não é da sub-base.

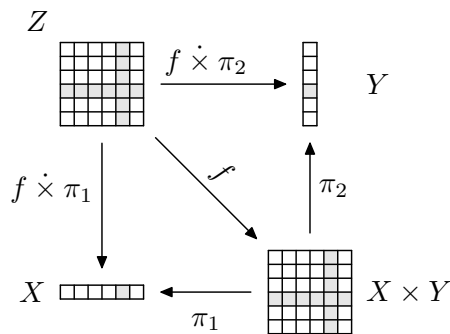


Figura 4.5: Uma aplicação com valores em $X \times Y$ é contínua exatamente quando suas duas componentes coordenadas são contínuas.

Demonstração.

1. $\Leftrightarrow$ 2. $\Leftrightarrow$ 3.

Interseções finitas dos cilindros sub-básicos são retângulos, pois

$$(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V.$$

Reciprocamente, todo retângulo básico aparece dessa forma.

3. $\Leftrightarrow$ 4.

A continuidade de π_X força a abertura de todos os conjuntos $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$, e a continuidade de π_Y força a abertura de $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$. Assim, qualquer topologia que torne as projeções contínuas contém a sub-base do item anterior. A topologia por ela gerada já torna as projeções contínuas e, portanto, é a menor com essa propriedade.

4. $\Leftrightarrow$ 5.

É um caso particular da Proposição 4.20. ■

Observação 4.29 Uma aplicação $f : Z \rightarrow X \times Y$ é determinada pelas funções coordenadas

$$f_X = \pi_X \circ f, \quad f_Y = \pi_Y \circ f.$$

A propriedade universal diz que f é contínua exatamente quando f_X e f_Y são contínuas.

Observação 4.30 (Continuidade separada não basta) A propriedade universal anterior vale para aplicações *com valores* em um produto. Ela não afirma que uma função $f : X \times Y \rightarrow Z$ seja contínua quando suas duas seções são contínuas. De fato, considere

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

As seções pelos eixos são identicamente nulas e, portanto, contínuas. Entretanto, $f(1/n, 1/n) = 1/2$ para todo n , enquanto $(1/n, 1/n) \rightarrow (0, 0)$. Logo f não é contínua na origem. O ponto é que variar uma coordenada de cada vez não controla aproximações simultâneas no produto.

Observação 4.31 Para a topologia produto de dois espaços,

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \iff x_n \longrightarrow x \text{ e } y_n \longrightarrow y. \quad (4.2)$$

A equivalência decorre da descrição das vizinhanças básicas $U \times V$. Em espaços topológicos gerais, porém, seqüências convergentes não determinam necessariamente toda a topologia.

Nada no argumento depende de haver exatamente duas coordenadas. Para um número finito de fatores, a mesma construção é obtida impondo simultaneamente a continuidade de todas as projeções coordenadas.

Definição 4.32

Dada uma família finita de espaços topológicos $(X_1, \mathcal{T}_{X_1}), \dots, (X_n, \mathcal{T}_{X_n})$, a **topologia produto** em $X_1 \times \dots \times X_n$ é a menor topologia que torna contínuas as projeções coordenadas

$$\begin{aligned} \pi_j : X_1 \times \dots \times X_n &\rightarrow X_j, \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

são contínuas. O **espaço produto** $(X_1, \mathcal{T}_{X_1}) \times \dots \times (X_n, \mathcal{T}_{X_n})$, é o conjunto $X_1 \times \dots \times X_n$, dotado da topologia produto.

Os retângulos $U_1 \times \dots \times U_n$, com U_i aberto em X_i , formam uma base. Equivalentemente, uma aplicação com valores no produto finito é contínua se, e somente se, cada uma de suas coordenadas é contínua; é a mesma propriedade universal usada no caso de dois fatores.

4.3.2 Produto Cartesiano Infinito

Antes de definir a topologia, fixemos a notação para produtos com um conjunto arbitrário de índices.

Definição 4.33 Se Λ é um conjunto e X um conjunto, uma família $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de X é simplesmente uma função $x : \Lambda \rightarrow X$; escrevemos $x_\lambda = x(\lambda)$. O conjunto de todas essas famílias é denotado por X^Λ .

Definição 4.34 Dada uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, seu **produto cartesiano** é

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} : x_\lambda \in A_\lambda \text{ para todo } \lambda \in \Lambda\}.$$

Equivalentemente, seus elementos são as funções

$$x : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

tais que $x(\lambda) \in A_\lambda$ para todo λ .

Se todos os fatores são iguais a um mesmo conjunto Y , escrevemos simplesmente Y^Λ . Assim,

$$Y^\mathbb{N} = \prod_{n \in \mathbb{N}} Y$$

é o conjunto das seqüências em Y , enquanto $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ é o conjunto de todas as funções reais de variável real. Essa identificação entre funções e pontos de um produto será usada várias vezes.

4.3.3 Produto Infinito

Se cada X_λ já é um espaço topológico, queremos topologizar o produto sem exigir simultaneamente condições em infinitas coordenadas. A escolha canônica é novamente inicial.

Definição 4.35 (Topologia produto) Dada uma família de espaços topológicos $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, a **topologia produto** em

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

é a topologia inicial induzida pelas projeções

$$\pi_\gamma : X \longrightarrow X_\gamma, \quad \pi_\gamma((x_\lambda)_\lambda) = x_\gamma.$$

Equivalentemente, é a menor topologia em X que torna todas as projeções contínuas.

Proposição 4.36 Os conjuntos

$$S(\lambda, U) = \pi_\lambda^{-1}(U), \quad \lambda \in \Lambda, \quad U \in \mathcal{T}_\lambda,$$

formam uma sub-base da topologia produto.

Isso é apenas a descrição da topologia inicial pelas imagens inversas dos abertos dos fatores. Interseções finitas desses cilindros fornecem uma base.

Proposição 4.37 Uma base da topologia produto é formada pelos conjuntos

$$B = \bigcap_{j=1}^n \pi_{\lambda_j}^{-1}(U_j),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são índices distintos e $U_j \in \mathcal{T}_{\lambda_j}$. Em outras palavras, um aberto básico restringe apenas um número finito de coordenadas.

Exemplo 4.38 Em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\mathbb{R} \times (a, b) \times \mathbb{R} \times (c, d) \times \mathbb{R} \times \dots$$

é um aberto básico: apenas duas coordenadas foram restringidas. Essa é a diferença essencial entre a topologia produto e a topologia da caixa, que veremos adiante.



Proposição 4.39 Se Y é um espaço topológico e

$$f : Y \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda,$$

então

$$f \text{ é contínua} \iff \pi_\lambda \circ f \text{ é contínua para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Demonstração. É exatamente a propriedade universal da topologia inicial, Proposição 4.20. ■

Proposição 4.40 Cada projeção canônica

$$\pi_\gamma : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\gamma$$

é uma aplicação aberta.

Demonstração. É suficiente verificar a imagem de um aberto básico

$$B = \bigcap_{j=1}^n \pi_{\lambda_j}^{-1}(U_j).$$

Se $B = \emptyset$, não há nada a provar. Se $B \neq \emptyset$ e $\gamma = \lambda_j$ para algum j , então $\pi_\gamma(B) = U_j$; se γ não está entre os índices restringidos, $\pi_\gamma(B) = X_\gamma$. Em qualquer caso a imagem é aberta. Como todo aberto é união de abertos básicos, π_γ é aberta. ■

Proposição 4.41 Suponha que a topologia de X seja a topologia inicial induzida por uma família

$$f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Se $S \subseteq X$ recebe a topologia de subespaço, então a topologia de S é a topologia inicial induzida pelas restrições

$$f_\lambda|_S : S \rightarrow X_\lambda.$$

Demonstração. Uma base da topologia inicial de X é formada por interseções finitas

$$\bigcap_{j=1}^n f_{\lambda_j}^{-1}(U_j).$$

Intersectando esses conjuntos com S obtemos

$$S \cap \bigcap_{j=1}^n f_{\lambda_j}^{-1}(U_j) = \bigcap_{j=1}^n (f_{\lambda_j}|_S)^{-1}(U_j),$$

que é precisamente a base da topologia inicial em S induzida pelas restrições. ■

Definição 4.42 Uma família $(f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ separa pontos de X quando, dados $x \neq y$, existe λ tal que $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$.

A família (f_λ) determina uma única aplicação

$$\varepsilon : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \varepsilon(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda},$$

chamada aplicação de avaliação.

Proposição 4.43 A aplicação ε é um mergulho se, e somente se:

- a) a família (f_λ) separa os pontos de X ;
- b) a topologia de X é a topologia inicial induzida pela família (f_λ) .

Demonstração. Se ε é um mergulho, então é injetiva, logo os $f_\lambda = \pi_\lambda \circ \varepsilon$ separam pontos. Além disso, a topologia de $\varepsilon(X)$ é a topologia inicial induzida pelas restrições das projeções, pela Proposição 4.41; transportando-a pelo homeomorfismo $\varepsilon : X \rightarrow \varepsilon(X)$, obtemos precisamente a topologia inicial induzida pelos f_λ .

Reciprocamente, se os f_λ separam pontos, ε é injetiva. Pela propriedade universal do produto, ε é contínua. Para provar que $\varepsilon : X \rightarrow \varepsilon(X)$ é um homeomorfismo, é suficiente verificar que uma base de X é levada em abertos de $\varepsilon(X)$. Se

$$U = \bigcap_{j=1}^n f_{\lambda_j}^{-1}(U_j),$$

então, usando a injetividade de ε ,

$$\varepsilon(U) = \varepsilon(X) \cap \bigcap_{j=1}^n \pi_{\lambda_j}^{-1}(U_j),$$

que é aberto no subespaço $\varepsilon(X)$. ■

Exemplo 4.44 (Representação decimal) Seja $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ com a topologia discreta. Um ponto de $A^{\mathbb{N}}$ é uma sequência de algarismos $(a_0, a_1, \dots)$, e podemos associar a ela o número

$$f((a_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 10^{-n-1} \in [0, 1].$$

A aplicação não é injetiva, pois algumas expansões decimais têm duas representações, como $0,1000\dots = 0,0999\dots$.

Na topologia produto, (a^m) converge para a exatamente quando cada coordenada estabiliza: para todo J , existe M tal que, se $m \geq M$, então os primeiros J algarismos de a^m coincidem com os de a . Disso segue diretamente que f é contínua. Substituindo A por $\{0, 1\}$ obtemos a versão binária da mesma construção.



Exemplo 4.45 (Espaço de funções) Se X é um conjunto e Y um espaço topológico, identificamos o conjunto das funções $X \rightarrow Y$ com

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y_x,$$

onde cada Y_x é uma cópia de Y . Um aberto básico em torno de $f \in Y^X$ impõe condições apenas em um número finito de pontos $x_1, \dots, x_n$:

$$\bigcap_{j=1}^n \pi_{x_j}^{-1}(U_j), \quad f(x_j) \in U_j.$$

Fora dessas coordenadas, a função pode assumir valores arbitrários. Essa é a geometria da topologia da convergência pontual.



Proposição 4.46 (Convergência pontual) Uma sequência (f_n) em Y^X , com a topologia produto, converge para f se, e somente se,

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

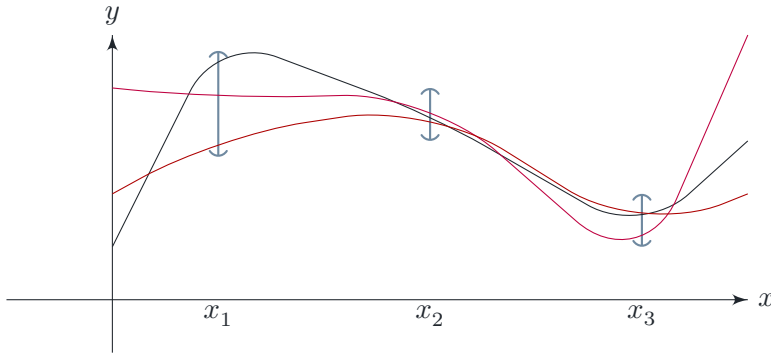


Figura 4.6: Um aberto básico da topologia produto no espaço das funções $X \rightarrow Y$.

Demonstração. Se $f_n \rightarrow f$ no produto, a continuidade de cada projeção π_x dá $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Reciprocamente, seja

$$V = \bigcap_{j=1}^k \pi_{x_j}^{-1}(U_j)$$

uma vizinhança básica de f . Para cada uma das finitas coordenadas x_j , a convergência $f_n(x_j) \rightarrow f(x_j)$ fornece um índice a partir do qual $f_n(x_j) \in U_j$. Tomando o máximo desses índices, obtemos $f_n \in V$ para todo n suficientemente grande. ■

Exemplo 4.47 Em $X = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, considere as métricas

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_{n \geq 0} |x_n - y_n| \quad \text{e} \quad d_w(x, y) = \sup_{n \geq 0} \frac{|x_n - y_n|}{n + 1}.$$

A métrica d_w induz a topologia produto. De fato, para um raio $\varepsilon > 0$, a condição

$$d_w(x, a) < \varepsilon$$

impõe $|x_n - a_n| < (n + 1)\varepsilon$; como $|x_n - a_n| \leq 1$, apenas um número finito de coordenadas produz restrições não triviais. Reciprocamente, dado um aberto básico que restringe apenas finitas coordenadas, escolhemos ε suficientemente pequeno para que uma bola de d_w esteja contida nele.

Já d_{∞} induz uma topologia estritamente mais fina. Uma bola de raio $\varepsilon < 1$ exige simultaneamente

$$|x_n - a_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } n,$$

e portanto restringe infinitas coordenadas. Ela não é, em geral, aberta na topologia produto: qualquer vizinhança básica de a deixa alguma coordenada livre, permitindo alterar essa coordenada por uma quantidade maior que ε .



4.3.4 Topologia da Caixa

A topologia da caixa é a alternativa em que permitimos restrições em todas as coordenadas ao mesmo tempo.

Definição 4.48 (Topologia da caixa) Dada uma família de espaços topológicos $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, a **topologia da caixa** em $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é a topologia cuja base é formada pelos conjuntos

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \text{ para todo } \lambda.$$

A topologia produto está contida na topologia da caixa. Para produtos finitos elas coincidem; em produtos infinitos, a inclusão pode ser estrita.

Exemplo 4.49 Considere

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad f(x) = (x, x, x, \dots).$$

Na topologia da caixa,

$$B = \prod_{n \geq 1} (-2^{-n}, 2^{-n})$$

é aberto, mas $f^{-1}(B) = \{0\}$. Logo f não é contínua para a topologia da caixa, embora cada coordenada $\pi_n \circ f$ seja contínua. Portanto, a topologia da caixa não possui a propriedade universal que caracteriza a topologia produto.



Proposição 4.50 (Convergência de sequências na topologia da caixa) Suponha que Y seja T_1 . Uma sequência (f_n) em Y^X , com a topologia da caixa, converge para f se, e somente se, existe um conjunto finito $F \subseteq X$ e um índice N tais que

$$f_n(x) = f(x) \quad \text{para todo } n \geq N \text{ e todo } x \notin F,$$

e, para cada $x \in F$, temos $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Demonstração. Suponha primeiro que existam F e N com a propriedade indicada. Uma vizinhança em caixa de f impõe uma condição em cada coordenada; fora de F a igualdade já vale para $n \geq N$, e nas coordenadas de F tomamos o máximo dos finitíssimos índices de convergência necessários.

Para a necessidade, suponha que não existam tais F e N . Então podemos escolher índices crescentes n_k e coordenadas distintas x_k tais que $f_{n_k}(x_k) \neq f(x_k)$. Como Y é T_1 , o conjunto

$$U_{x_k} = Y \setminus \{f_{n_k}(x_k)\}$$

é uma vizinhança aberta de $f(x_k)$. Tomando $U_x = Y$ nas demais coordenadas, obtemos uma vizinhança em caixa $\prod_{x \in X} U_x$ de f que não contém nenhum dos termos f_{n_k} , contradizendo $f_n \rightarrow f$. ■

Exercícios

Ex. 4.11 — Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos e escolha um subconjunto de índices $\Gamma \subseteq \Lambda$. Escreva

$$X_\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \quad \text{e} \quad X_\Gamma = \prod_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda.$$

Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} \Pi_\Gamma : \quad X_\Lambda &\rightarrow X_\Gamma \\ (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\mapsto (x_\lambda)_{\lambda \in \Gamma} \end{aligned}$$

é contínua e aberta.

Ex. 4.12 — Mantenha a notação do Exercício 4.11 e seja $\tilde{\Gamma}$ uma partição do conjunto de índices Λ . Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} f : \quad X_\Lambda &\rightarrow \prod_{\Gamma \in \tilde{\Gamma}} X_\Gamma \\ x &\mapsto (\Pi_\Gamma(x))_{\Gamma \in \tilde{\Gamma}} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

4.4 Espaços Quocientes

Quocientes são a maneira topológica de *colar pontos*. O modelo mais simples é o intervalo $[0, 1]$: se identificarmos as duas extremidades, obtemos um círculo. A relação de equivalência registra quais pontos devem ser identificados; a topologia quociente determina quais conjuntos permanecem abertos depois da colagem.

4.4.1 Relações de equivalência e a topologia quociente

Notação. Dada uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto X , denotamos por $X/\sim$ o conjunto das classes de equivalência e por

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim, \quad \pi(x) = [x],$$

a *projeção canônica*.

Se X já possui uma topologia, queremos que a projeção π seja contínua. A escolha canônica é usar no conjunto de classes a topologia final de π .

Definição 4.51 (Topologia quociente) Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X , a **topologia quociente** em $X/\sim$ é

$$\mathcal{T}_\sim = \{U \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

O espaço $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ é chamado **espaço quociente**.

A definição deve ser lida de trás para a frente: um conjunto de classes é aberto exatamente quando, antes da colagem, todos os seus representantes formam um aberto de X .

Exemplo 4.52 (O círculo a partir de um intervalo) Em $I = [0, 1]$, considere a relação que identifica apenas as extremidades:

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } \{x, y\} = \{0, 1\}.$$

O quociente $I/\sim$ é o espaço obtido ao colar 0 e 1. Veremos abaixo que ele é homeomorfo a S^1 .



4.4.2 A propriedade universal

O principal motivo para usar a topologia quociente é que ela transforma funções definidas em classes de equivalência em funções contínuas sem que seja necessário recomençar a análise do zero.

Proposição 4.53 (Propriedade universal do quociente) Se $\pi : X \rightarrow X/\sim$ é a projeção canônica e $f : X \rightarrow Z$ é uma função constante em cada classe de equivalência, então existe uma única função

$$\bar{f} : X/\sim \longrightarrow Z$$

tal que

$$f = \bar{f} \circ \pi.$$

Ela é dada por

$$\bar{f}([x]) = f(x).$$

Se $X/\sim$ recebe a topologia quociente, então

$$\bar{f} \text{ é contínua} \iff f \text{ é contínua.}$$

Demonstração. A hipótese de que f é constante nas classes garante que a fórmula $\bar{f}([x]) = f(x)$ não depende do representante escolhido. Como π é sobrejetiva, essa fatoração é única. Por fim,

$$f = \bar{f} \circ \pi,$$

e a equivalência de continuidade é exatamente a propriedade universal da topologia final, Proposição 4.21.



Não se deve escrever uma expressão do tipo $f \circ \pi^{-1}$: em geral, a projeção π não é injetiva e π^{-1} não é uma função. A aplicação $\bar{f}$ é definida diretamente nas classes pela fórmula acima.

4.4.3 Aplicações quocientes

Definição 4.54 (Aplicação quociente) Uma aplicação sobrejetiva $q : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é uma **aplicação quociente** quando

$$U \subseteq Y \text{ é aberto} \iff q^{-1}(U) \text{ é aberto em } X.$$

Equivalentemente, a topologia de Y é a topologia final induzida por q .

Toda projeção canônica $\pi : X \rightarrow X/\sim$ é, por definição, uma aplicação quociente.

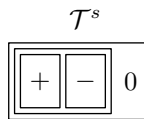
Exemplo 4.55 (A aplicação sinal) Seja $S = \{+, -, 0\}$ e considere

$$s : \mathbb{R} \rightarrow S, \quad s(x) = \begin{cases} +, & x > 0, \\ -, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

A topologia final induzida por s é

$$\{\emptyset, S, \{+\}, \{-\}, \{+, -\}\}.$$

Com essa topologia, s é uma aplicação quociente.



Toda aplicação sobrejetiva determina uma relação de equivalência por suas fibras.

Proposição 4.56 (Quociente pelas fibras) Se $q : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, defina

$$x \sim_q y \iff q(x) = q(y).$$

Então a aplicação

$$\bar{q} : X/\sim_q \longrightarrow Y, \quad \bar{q}([x]) = q(x),$$

é uma bijeção. Além disso, q é uma aplicação quociente se, e somente se, $\bar{q}$ é um homeomorfismo quando $X/\sim_q$ recebe a topologia quociente.

Demonstração. A definição de $\sim_q$ garante que $\bar{q}$ é bem definida e injetiva; a sobrejetividade de q garante a sobrejetividade de $\bar{q}$. Como

$$q = \bar{q} \circ \pi,$$

a propriedade universal mostra que $\bar{q}$ é contínua quando q é contínua. Para a inversa, um conjunto $U \subseteq Y$ é aberto se, e somente se, $q^{-1}(U)$ é aberto em X exatamente quando $\pi^{-1}(\bar{q}^{-1}(U))$ é aberto; isso equivale a $\bar{q}^{-1}(U)$ ser aberto no quociente. Portanto, se q é quociente, $\bar{q}$ é um homeomorfismo. Reciprocamente, se $\bar{q}$ é um homeomorfismo, a mesma equivalência de abertos mostra que q é uma aplicação quociente. ■

Proposição 4.57 (Critérios suficientes) Se $q : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva, então cada uma das condições abaixo é suficiente para que q seja quociente:

1. q é aberta;
2. q é fechada.

Demonstração. Suponha primeiro que q seja aberta e que $q^{-1}(U)$ seja aberto em X . Pela sobrejetividade,

$$U = q(q^{-1}(U)),$$

logo U é aberto em Y . O argumento para aplicações fechadas é o mesmo, usando complementos. ■

4.4.4 Conjuntos saturados

Definição 4.58 (Conjunto saturado) Um subconjunto $A \subseteq X$ é saturado quando é união de classes de equivalência. Equivalentemente,

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = A.$$

Proposição 4.59 (Caracterização por abertos saturados) Os abertos de $X/\sim$ são exatamente as imagens, pela projeção canônica, dos abertos saturados de X :

$$\mathcal{T}_{\sim} = \{\pi(W) : W \in \mathcal{T} \text{ e } W \text{ é saturado}\}.$$

Demonstração. Se U é aberto no quociente, então $\pi^{-1}(U)$ é aberto e saturado, e a sobrejetividade de π dá

$$\pi(\pi^{-1}(U)) = U.$$

Reciprocamente, se W é aberto e saturado,

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = W$$

é aberto; logo $\pi(W)$ é aberto no quociente. ■

O mesmo argumento, usando complementos, mostra que os fechados do quociente são precisamente as imagens dos fechados saturados.

4.4.5 Exemplos geométricos

Exemplo 4.60 (O círculo) Considere

$$q : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad q(t) = e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Temos

$$s \sim t \iff s - t \in \mathbb{Z}.$$

A aplicação q é um homeomorfismo local e, em particular, uma aplicação aberta; como é sobrejetiva, é quociente. Portanto

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1.$$

A mesma geometria pode ser descrita usando apenas o intervalo $[0, 1]$. A aplicação

$$q_0 : [0, 1] \rightarrow S^1, \quad q_0(t) = e^{2\pi it},$$

identifica somente 0 e 1. Ela também é quociente: longe do ponto $(1, 0)$ isso segue da descrição local acima; em $(1, 0)$, a abertura de $q_0^{-1}(U)$ contém simultaneamente um intervalo relativo junto de 0 e outro junto de 1, que juntos projetam em um arco aberto em torno de $(1, 0)$. Assim

$$[0, 1]/(0 \sim 1) \cong S^1.$$

Esse é o modelo básico de uma colagem topológica: colar as extremidades de um intervalo produz um círculo.



Exemplo 4.61 (O toro) O toro bidimensional pode ser visto como

$$T^2 = S^1 \times S^1.$$

Considere

$$q : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad q(x, y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y).$$

A relação de equivalência associada é

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z} \text{ e } y - y' \in \mathbb{Z}.$$

Como q é aberta e sobrejetiva,

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2.$$

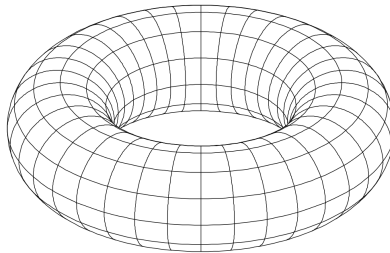


Figura 4.7: Ilustração de um toro.

O quadrado $[0, 1]^2$ fornece um modelo particularmente útil. Identificamos os lados opostos com a mesma orientação:

$$(0, y) \sim (1, y), \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

O quociente resultante é homeomorfo a T^2 . O quadrado é, neste exemplo, um *polígono fundamental*: uma região simples cuja borda registra as colagens necessárias. Não precisamos de uma definição geral de “domínio fundamental” aqui; o conceito será usado apenas nesses modelos geométricos, onde a escolha é explícita.

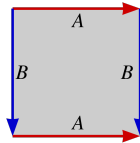


Figura 4.8: Polígono fundamental do toro: lados opostos são identificados segundo as setas.



Exemplo 4.62 (Outros quocientes geométricos)

1. A esfera S^2 pode ser obtida a partir do disco fechado D^2 identificando todos os pontos da borda em um único ponto. Também pode ser construída colando dois discos ao longo de suas bordas.

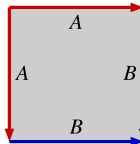


Figura 4.9: Um esquema de identificação que produz a esfera.

2. O plano projetivo real $\mathbb{RP}^2$ pode ser obtido do disco identificando cada ponto da borda com o ponto antipodal. Equivalentemente, pode ser descrito como o quociente de S^2 pela relação $x \sim -x$.
3. A mesma linguagem de polígonos com lados identificados produz a banda de Möbius e a garrafa de Klein. Esses exemplos mostram por que quocientes são uma ferramenta geométrica tão poderosa: espaços aparentemente diferentes

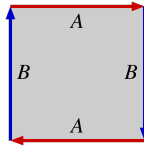


Figura 4.10: Polígono fundamental do plano projetivo real.

podem ser construídos a partir de regiões muito simples, desde que se registre corretamente como suas bordas são coladas.



Exercícios

Ex. 4.13 — O quociente de Kolmogorov de um espaço topológico é definido como o quociente pela relação de indistinguibilidade topológica. Mostre que o quociente de Kolmogorov de qualquer espaço é T_0 e que todo espaço T_0 é naturalmente identificado com seu próprio quociente de Kolmogorov.

Ex. 4.14 — Verifique diretamente que a família $\mathcal{T}_\sim$ da definição de topologia quociente é uma topologia em $X/\sim$.

Ex. 4.15 — Seja $q : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente e $g : Y \rightarrow Z$. Prove que g é contínua se, e somente se, $g \circ q$ é contínua.

Ex. 4.16 — Quais são os quocientes de um espaço discreto? E de um espaço com topologia trivial?

Ex. 4.17 — Descreva uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$ cujo quociente seja homeomorfo a um círculo.

Ex. 4.18 — Sejam $X = [0, 1]$ e

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in (0, 1).$$

Mostre que $X/\sim$ não é T_1 .

Ex. 4.19 — Sejam $X = \mathbb{R}$ e

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que $X/\sim$ não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Ex. 4.20 — Seja $q : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetiva. Mostre que $C \subseteq Y$ é fechado na topologia quociente se, e somente se, $q^{-1}(C)$ é fechado em X . Se Y já possui uma topologia e q leva fechados em fechados, compare essa topologia com a topologia quociente. Mostre que, se q é contínua, sobrejetiva e fechada, então é uma aplicação quociente. Dê um exemplo de aplicação quociente que não seja fechada.

Ex. 4.21 — Mostre diretamente que o quociente do quadrado $[0, 1]^2$ pelas identificações

$$(0, y) \sim (1, y), \quad (x, 0) \sim (x, 1)$$

é homeomorfo a $S^1 \times S^1$.

4.5 Soma de Espaços Topológicos

A última construção do capítulo é a soma, ou união disjunta, de espaços topológicos. A imagem mental mais útil é a de colocar cada espaço em uma “prateleira” diferente: mesmo que dois espaços compartilhem elementos como conjuntos, suas cópias na soma permanecem distintas.

Exemplo 4.63 Se $A_1 = \{1, 2, 3\}$ e $A_2 = \{3, 4, 5\}$, substituímos cada elemento por um par que registra sua origem:

$$\{1\} \times A_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}, \quad \{2\} \times A_2 = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

Essas duas cópias são disjuntas, embora A_1 e A_2 não fossem.

Definição 4.64 (União disjunta) Dada uma família de conjuntos $(X_i)_{i \in I}$, sua **união disjunta** é

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times X_i).$$

Para cada i , definimos a inclusão canônica

$$j_i : X_i \longrightarrow \bigsqcup_{k \in I} X_k, \quad j_i(x) = (i, x). \quad (4.3)$$

Se cada X_i possui uma topologia $\mathcal{T}_i$, a topologia natural na soma é a topologia final induzida pelas inclusões j_i .

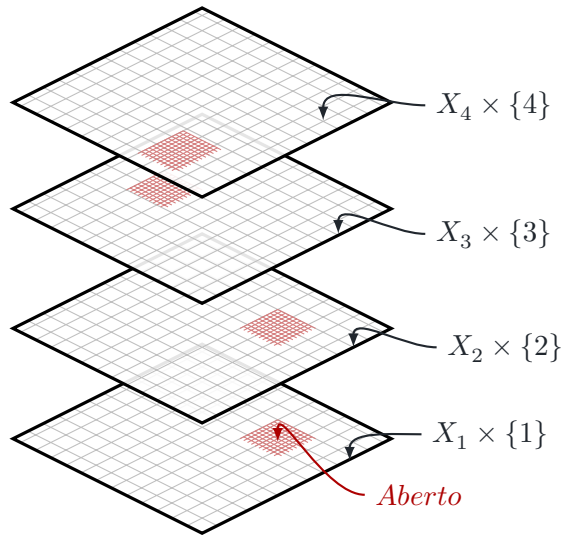


Figura 4.11: Soma de Espaços Topológicos

Definição 4.65 (Topologia da soma) A topologia da soma em $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ é caracterizada por

$$U \text{ aberto} \iff j_i^{-1}(U) \text{ é aberto em } X_i \text{ para todo } i \in I.$$

Equivalentemente, uma base é formada pelos conjuntos

$$\{i\} \times U, \quad U \in \mathcal{T}_i.$$

Proposição 4.66 (Propriedade universal da soma) Para todo espaço topológico Z , uma aplicação

$$g : \bigsqcup_{i \in I} X_i \longrightarrow Z$$

é contínua se, e somente se, cada restrição

$$g \circ j_i : X_i \longrightarrow Z$$

é contínua.

Demonstração. É exatamente a propriedade universal da topologia final aplicada à família das inclusões $(j_i)_{i \in I}$.



Observação 4.67 (Propriedades da soma) Para cada $i \in I$, a cópia $\{i\} \times X_i$ é simultaneamente aberta e fechada na soma. Além disso:

1. $A \subseteq \bigsqcup_i X_i$ é aberto se, e somente se, $A \cap (\{i\} \times X_i)$ é aberto em $\{i\} \times X_i$ para todo i ;
2. a mesma caracterização vale para conjuntos fechados;
3. cada inclusão j_i é um mergulho aberto e fechado.

Exercícios

Ex. 4.22 — Prove que as inclusões definidas em 4.3 são mergulhos abertos e fechados.

Ex. 4.23 — Mostre diretamente que a topologia da soma é a maior topologia que torna todas as inclusões j_i contínuas.

Axiomas de Separação

Até aqui, a topologia nos permitiu falar de continuidade, subespaços, produtos e quocientes sem pedir que pontos distintos fossem realmente distinguíveis pelos abertos. Sem uma hipótese adicional, porém, podem ocorrer fenômenos ausentes em espaços métricos: dois pontos diferentes podem ter exatamente as mesmas vizinhanças, sequências podem convergir para vários limites e conjuntos unitários podem nem sequer ser fechados.

Os *axiomas de separação* medem precisamente quanto poder temos para separar pontos por abertos. A hierarquia começa com uma exigência mínima — distinguir dois pontos — e culmina, neste capítulo, na condição de Hausdorff, que permite colocá-los em vizinhanças disjuntas. Nos capítulos seguintes, a mesma ideia será aplicada a pontos e fechados e, depois, a pares de fechados, levando às noções de regularidade e normalidade.

5.1 Separando pontos

2. X é Fréchet, ou T_1 , se, dados $x \neq y$, existe um aberto U com $x \in U$ e $y \notin U$, e existe um aberto V com $y \in V$ e $x \notin V$.
3. X é Hausdorff, ou T_2 , se, dados $x \neq y$, existem abertos disjuntos U, V tais que $x \in U$ e $y \in V$.

As condições formam uma cadeia:

$$T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Cada passo acrescenta uma forma mais forte de distinguir pontos. Em um espaço T_0 , sabemos ao menos que dois pontos não têm exatamente a mesma informação topológica. Em um espaço T_1 , cada ponto pode ser excluído por uma vizinhança do outro. Em um espaço Hausdorff, os dois pontos podem ser isolados um do outro simultaneamente.

Exemplo 5.2

1. Um espaço indiscreto com pelo menos dois pontos não é T_0 .
2. O espaço de Sierpiński é T_0 , mas não é T_1 .
3. Todo espaço discreto é Hausdorff.
4. Todo espaço métrico é Hausdorff: se $x \neq y$, tome $r < d(x, y)/2$; então $B(x, r)$ e $B(y, r)$ são disjuntas.
5. Um conjunto infinito com a topologia cofinita é T_1 , mas não é Hausdorff. De fato, pontos são fechados, mas dois abertos não vazios sempre se intersectam.
6. A topologia de Zariski em $\mathbb{R}^n$ é T_1 e, para $n \geq 1$, não é Hausdorff.

A condição T_0 admite uma descrição particularmente elegante por fechos de pontos.

Proposição 5.3 Um espaço X é T_0 se, e somente se,

$$x \neq y \implies \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}.$$

Demonstração. Suponha primeiro que X seja T_0 e sejam $x \neq y$. Sem perda de generalidade, existe um aberto U com $x \in U$ e $y \notin U$. Então $x \notin \overline{\{y\}}$, pois U é uma vizinhança de x que não encontra $\{y\}$. Como $x \in \overline{\{x\}}$, os dois fechos são distintos.

Reciprocamente, se X não é T_0 , existem $x \neq y$ tais que todo aberto que contém um deles contém também o outro. Assim, $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Pela monotonicidade do fecho,

$$\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}} \quad \text{e} \quad \overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}},$$

logo os fechos coincidem.

■

Para T_1 , há uma caracterização especialmente simples.

Proposição 5.4 Para um espaço topológico X , são equivalentes:

1. X é T_1 ;
2. todo conjunto unitário $\{x\}$ é fechado;
3. todo subconjunto $A \subset X$ é interseção dos abertos que o contêm.

Demonstração. Se X é T_1 e $x \in X$, então, para cada $y \neq x$, existe um aberto U_y que contém y e não contém x . Logo

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$$

é aberto, e $\{x\}$ é fechado.

Se pontos são fechados, então

$$A = \bigcap_{x \notin A} (X \setminus \{x\}),$$

uma interseção de abertos que contém A .

Finalmente, aplicando o terceiro item a $A = \{x\}$, para cada $y \neq x$ algum aberto da interseção contém x e exclui y . Trocando os papéis de x e y obtemos a condição T_1 .

■

A condição Hausdorff está ligada a resultados de unicidade. O primeiro exemplo é o limite de uma sequência.

Proposição 5.5 Em um espaço Hausdorff, uma sequência converge para no máximo um ponto.

Demonstração. Suponha $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$, com $x \neq y$. Escolha vizinhanças abertas disjuntas $U \ni x$ e $V \ni y$. A partir de certo índice, $x_n \in U$; a partir de outro, $x_n \in V$. Para índices suficientemente grandes teríamos então $x_n \in U \cap V = \emptyset$, absurdo. ■

O mesmo princípio vale para funções: em contradomínios Hausdorff, uma função contínua fica determinada por seus valores num conjunto denso.

Proposição 5.6 Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas, com Y Hausdorff. Se existe um conjunto denso $D \subset X$ tal que $f|_D = g|_D$, então $f = g$ em todo X .

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f(x) \neq g(x)$ para algum $x \in X$. Escolha abertos disjuntos $U \ni f(x)$ e $V \ni g(x)$. O conjunto

$$W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$$

é aberto, contém x e, portanto, encontra D . Se $d \in W \cap D$, então $f(d) \in U$ e $g(d) \in V$, mas $f(d) = g(d)$, contradizendo $U \cap V = \emptyset$. ■

5.2 Comportamento sob construções

Os axiomas de separação são propriedades topológicas e, portanto, são preservados por homeomorfismos. Resta examinar seu comportamento sob as construções básicas do capítulo anterior.

5.2.1 Subespaços

Proposição 5.7 Todo subespaço de um espaço T_i é T_i , para $i = 0, 1, 2$.

Demonstração. Se $S \subset X$ e dois pontos de S são separados em X pelos abertos exigidos pelo axioma correspondente, as interseções desses abertos com S continuam abertas em S e preservam as mesmas relações de incidência e disjunção. ■

5.2.2 Produtos

Proposição 5.8 Se $(X_j)_{j \in J}$ é uma família não vazia de espaços T_i , então

$$\prod_{j \in J} X_j$$

é T_i , para $i = 0, 1, 2$.

Demonstração. Se $x \neq y$ no produto, existe uma coordenada j_0 tal que $x_{j_0} \neq y_{j_0}$. Para T_0 ou T_1 , use nessa coordenada os abertos que distinguem os pontos e tome suas imagens inversas pela projeção π_{j_0} .

No caso Hausdorff, escolha abertos disjuntos $U, V \subset X_{j_0}$ com $x_{j_0} \in U$ e $y_{j_0} \in V$. Então

$$\pi_{j_0}^{-1}(U) \text{ e } \pi_{j_0}^{-1}(V)$$

são abertos disjuntos do produto contendo, respectivamente, x e y . ■

A prova anterior mostra um princípio simples da topologia produto: para separar dois pontos, é suficiente usar uma coordenada em que eles diferem. Não é necessário restringir todas as coordenadas.

5.2.3 Somas

Proposição 5.9 Uma soma arbitrária de espaços T_i é T_i , para $i = 0, 1, 2$.

Demonstração. Dois pontos que pertencem ao mesmo somando são separados dentro dele e, como a inclusão do somando é um mergulho aberto, os mesmos abertos funcionam na soma. Se pertencem a somandos distintos, os próprios somandos são abertos disjuntos.

■

5.2.4 Quocientes

Aqui a situação muda. Colar pontos pode destruir informação de separação.

Exemplo 5.10 (Um quociente que deixa de ser Hausdorff) Considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual e colapse todos os racionais a um único ponto. No quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, qualquer aberto não vazio contém o ponto $[\mathbb{Q}]$: se um aberto do quociente não o contivesse, sua imagem inversa seria um aberto não vazio de $\mathbb{R}$ disjunto de $\mathbb{Q}$, o que é impossível pela densidade dos racionais. Assim, o quociente não é T_1 e, em particular, não é Hausdorff.

Mesmo T_0 pode se perder.

Exemplo 5.11 (Um quociente que deixa de ser T_0) Considere $X = \{0, 1, 2\}$ com a topologia

$$\{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, X\}.$$

Esse espaço é T_0 . Identifique então $0 \sim 2$ e deixe 1 sozinho. Os únicos abertos saturados de X são $\emptyset$ e X ; portanto o quociente tem dois pontos e topologia indiscreta. Logo não é T_0 .

Consequentemente, sem hipóteses adicionais, quocientes não preservam nenhum dos três axiomas de separação considerados aqui.

5.2.5 Resumo

	Subespaços	Quocientes	Produtos	Somas
T_0	Sim	Não	Sim	Sim
T_1	Sim	Não	Sim	Sim
T_2	Sim	Não	Sim	Sim

Uma caracterização de Hausdorff reúne separação e produto em uma única frase: X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal

$$\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

é fechada em $X \times X$. A demonstração é proposta como exercício.

Exercícios

Ex. 5.1 — Prove que X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta_X \subset X \times X$ é fechada.

Ex. 5.2 — Prove que X é T_1 se, e somente se, para todo $A \subset X$, A é a interseção de todos os abertos que o contêm.

Ex. 5.3 — Seja X um espaço T_1 e x um ponto de acumulação de $A \subset X$. Mostre que toda vizinhança de x contém infinitos pontos de A .

Ex. 5.4 — Sejam $\tau \subset \sigma$ topologias no mesmo conjunto X . Para $i \in \{0, 1, 2\}$, determine quais das seguintes implicações são verdadeiras:

$$1. (X, \tau) \text{ é } T_i \Rightarrow (X, \sigma) \text{ é } T_i;$$

$$2. (X, \sigma) \text{ é } T_i \Rightarrow (X, \tau) \text{ é } T_i.$$

Ex. 5.5 — Seja

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R} : \forall x \in U \setminus \mathbb{Q} \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset U\}.$$

Determine, para $i = 0, 1, 2$, se $(\mathbb{R}, \tau)$ é T_i .

Ex. 5.6 — Mostre que, se toda sequência em X possui no máximo um limite, então X é T_1 . Mostre ainda que, se X é primeiro-enumerável, essa condição implica que X é Hausdorff.

Ex. 5.7 — Seja X um espaço T_1 . Mostre que, na topologia da caixa em $X^{\mathbb{N}}$, toda sequência convergente é eventualmente constante.

Ex. 5.8 — Considere $[0, 1]$ e a relação

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in (0, 1).$$

Mostre que o quociente não é T_1 .

Ex. 5.9 — Prove diretamente que produtos e somas arbitrárias de espaços T_0 são T_0 .

Ex. 5.10 — Prove diretamente que produtos e somas arbitrárias de espaços T_1 são T_1 .

A cadeia $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ sintetiza a hierarquia: avançar de T_0 para T_2 significa exigir progressivamente mais capacidade de separação. O capítulo seguinte troca o

tipo de controle: em vez de perguntar se há abertos suficientes para separar pontos, pergunta se uma família *enumerável* de abertos já consegue descrever a topologia.

Enumerabilidade

Os axiomas de separação medem quão bem os abertos distinguem pontos e conjuntos. A questão deste capítulo é de natureza diferente: *quanta informação é necessária para descrever a topologia?* Em muitos espaços importantes, uma família enumerável de abertos — globalmente, ou em torno de cada ponto — já é suficiente para controlar boa parte da teoria.

A diferença entre essas duas formas de controle é essencial. O primeiro axioma de enumerabilidade é local: cada ponto possui uma lista enumerável de vizinhanças que serve como teste para todas as outras. O segundo é global: uma única base enumerável descreve todos os abertos do espaço. Entre essas duas ideias aparecem naturalmente a separabilidade e a propriedade de Lindelöf. A seção final mostra por que essas hipóteses entram de maneira natural na própria definição de variedade topológica.

6.1 Axiomas de Enumerabilidade

Primeiro e segundo axiomas

Definição 6.1 Dizemos que um espaço topológico X é **segundo-enumerável** quando possui uma base enumerável. Dizemos que X é **primeiro-enumerável** quando cada ponto $x \in X$ possui uma base enumerável de vizinhanças.

O segundo axioma fornece uma descrição enumerável da topologia inteira; o primeiro fornece apenas uma descrição enumerável da topologia vista a partir de cada ponto. Essa distinção explica por que o segundo axioma é, em geral, muito mais forte.

Exemplo 6.2 (Espaços métricos) Todo espaço métrico é primeiro-enumerável. De fato, para cada $x \in X$,

$$B(x, 1) \supset B\left(x, \frac{1}{2}\right) \supset B\left(x, \frac{1}{3}\right) \supset \dots$$

forma uma base enumerável de vizinhanças de x .

Esse é o motivo pelo qual, em espaços métricos, tantas propriedades locais podem ser testadas por sequências. A seção sobre sequências mostra que o mesmo mecanismo vale em todo espaço primeiro-enumerável.

Exemplo 6.3 Se X é finito, qualquer topologia em X é finita. Portanto, X é ao mesmo tempo primeiro e segundo enumerável.

Exemplo 6.4 Um espaço discreto é sempre primeiro-enumerável: para cada $x \in X$, a família $\{\{x\}\}$ é uma base local. Ele é segundo-enumerável exatamente quando X é enumerável.

Exemplo 6.5 O espaço $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual é segundo-enumerável. Os retângulos

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n), \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q},$$

formam uma base enumerável.

Exemplo 6.6 (A topologia da caixa) A topologia da caixa em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ não é primeiro-enumerável. Seja $0 = (0, 0, \dots)$ e suponha, por absurdo, que $A_1, A_2, \dots$ seja uma base enumerável de vizinhanças de 0 . Para cada n , escolha um aberto básico em caixa

$$C_n = \prod_{k \geq 1} U_{n,k} \quad \text{com} \quad 0 \in C_n \subset A_n.$$

Podemos escolher $0 < \varepsilon_n < 1/4$ de modo que $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \subset U_{n,n}$. Considere então

$$V = \prod_{n \geq 1} \left(-\frac{\varepsilon_n}{2}, \frac{\varepsilon_n}{2}\right).$$

Esse conjunto é uma vizinhança de 0 na topologia da caixa. Entretanto, para cada n existe um ponto de C_n cuja n -ésima coordenada pertence a $(\varepsilon_n/2, \varepsilon_n)$ e cujas demais coordenadas são nulas. Portanto $A_n \not\subset V$ para todo n , contradizendo que (A_n) fosse uma base local.

Em particular, a topologia da caixa em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ também não é segundo-enumerável.

A segunda enumerabilidade é formulada em termos de bases, mas pode igualmente ser descrita por sub-bases. Para famílias infinitas, a passagem de uma sub-base à base de interseções finitas não aumenta a cardinalidade.

Proposição 6.7 Se a topologia de X possui infinitos abertos, então existe uma base de cardinalidade κ se, e somente se, existe uma sub-base de cardinalidade κ . Em particular, X possui base enumerável se, e somente se, possui sub-base enumerável.

Demonstração. Toda base é uma sub-base. Reciprocamente, seja $\mathcal{S}$ uma sub-base. Como a topologia possui infinitos abertos, $\mathcal{S}$ é infinita. A família formada por X e pelas interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base. Para cada $n \geq 1$, a família das interseções de n elementos de $\mathcal{S}$ tem cardinalidade no máximo $|\mathcal{S}|^n = |\mathcal{S}|$, e uma união enumerável dessas famílias ainda tem cardinalidade $|\mathcal{S}|$. Logo a base obtida tem a mesma cardinalidade da sub-base. ■

Uma base local enumerável pode sempre ser reorganizada de forma decrescente; essa forma será usada repetidamente.

Proposição 6.8 Se $x \in X$ possui uma base enumerável de vizinhanças, então existe uma base local $B_1, B_2, \dots$ tal que

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$$

Se a base original é finita, podemos tomar uma base local formada por um único conjunto.

Demonstração. Se $B'_1, B'_2, \dots$ enumera uma base local infinita, faça

$$B_n = \bigcap_{j=1}^n B'_j.$$

Cada B_n é uma vizinhança de x , a sequência é decrescente e, se V é uma vizinhança qualquer de x , algum B'_m está contido em V ; então $B_m \subset B'_m \subset V$. No caso finito, a interseção de todos os elementos da base é ainda uma vizinhança de x e, sozinha, forma uma base local. ■

Separabilidade, c.c.c. e Lindelöf

A separabilidade já apareceu no estudo de conjuntos densos. Aqui ela é colocada ao lado dos axiomas de enumerabilidade e da propriedade de Lindelöf, formando uma rede de implicações que reaparecerá ao longo do livro.

Definição 6.9 (Espaço separável) Um espaço topológico X é **separável** quando possui um subconjunto enumerável denso.

Exemplo 6.10 A reta de Sorgenfrey é separável: $\mathbb{Q}$ é enumerável e intercepta todo aberto básico $[a, b)$ não vazio.

Exemplo 6.11 O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é separável, pois $\mathbb{Q}^n$ é enumerável e denso.

Exemplo 6.12 (Um espaço métrico não separável) Considere em $\mathbb{R}^2$ a métrica

$$d_*(p, q) = \begin{cases} \|p\| + \|q\|, & \|p\| \neq \|q\|, \\ \|p - q\|, & \|p\| = \|q\|. \end{cases}$$

Se $p \neq 0$ e $0 < \delta < \|p\|$, então $B_{d_*}(p, \delta)$ está contida no círculo de raio $\|p\|$ centrado na origem. Um conjunto denso precisa, portanto, interceptar cada um dos não enumeravelmente muitos círculos centrados na origem. Logo $(\mathbb{R}^2, d_*)$ não é separável.

Proposição 6.13 Todo espaço segundo-enumerável é separável.

Demonstração. Se $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ é uma base enumerável, descarte o elemento vazio e escolha $x_n \in B_n$. O conjunto $D = \{x_n : n \geq 1\}$ é enumerável. Se U é aberto não vazio, algum elemento da base B_n satisfaz $\emptyset \neq B_n \subset U$, e então $x_n \in D \cap U$. Portanto D é denso. ■

Em espaços métricos, a recíproca também vale.

Proposição 6.14 Um espaço métrico é separável se, e somente se, é segundo-enumerável.

Demonstração. Uma das implicações é a proposição anterior. Para a outra, seja $D \subset X$ um conjunto denso enumerável. A família

$$\mathcal{B} = \{B(a, r) : a \in D, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$$

é enumerável. Se U é aberto e $x \in U$, escolha $\varepsilon > 0$ com $B(x, \varepsilon) \subset U$. Pela densidade, escolha $a \in D$ com $d(a, x) < \varepsilon/3$ e depois um racional r tal que

$$d(a, x) < r < \varepsilon - d(a, x).$$

Então $x \in B(a, r) \subset U$. Logo $\mathcal{B}$ é uma base. ■

Definição 6.15 (Condição de cadeia enumerável) Dizemos que X satisfaz a **condição de cadeia enumerável**, ou *c.c.c.*, quando toda família de abertos não vazios dois a dois disjuntos é enumerável.

Proposição 6.16 Todo espaço separável satisfaz a c.c.c.

Demonstração. Seja D um subconjunto denso enumerável e $\mathcal{U}$ uma família de abertos não vazios dois a dois disjuntos. Para cada $U \in \mathcal{U}$, escolha $x_U \in D \cap U$. Como os elementos de $\mathcal{U}$ são disjuntos, a aplicação $U \mapsto x_U$ é injetiva. Portanto $\mathcal{U}$ é enumerável. ■

Definição 6.17 (Lindelöf) Um espaço topológico X é **Lindelöf** quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura enumerável.

Definição 6.18 (Hereditariamente Lindelöf) Diremos que X é **hereditariamente Lindelöf** — também chamado, em algumas referências, fortemente Lindelöf — quando todo subespaço de X é Lindelöf.

A diferença para compacidade, que estudaremos no próximo capítulo, é apenas uma palavra e uma mudança decisiva: em um compacto extraímos uma subcobertura *finita*; em um espaço Lindelöf, exigimos apenas que ela seja enumerável.

Exemplo 6.19 (Lindelöf não implica separável) Seja X um conjunto não enumerável e escolha $p \notin X$. Em $Y = X \cup \{p\}$ declare todos os pontos de X isolados e tome como vizinhanças abertas de p os conjuntos $\{p\} \cup W$ para os quais $X \setminus W$ é enumerável. Toda cobertura aberta contém um elemento que cobre p e deixa de fora, no máximo, enumeravelmente muitos pontos; escolhendo um aberto para cada um deles obtemos uma subcobertura enumerável. Portanto Y é Lindelöf.

Por outro lado, nenhum subconjunto enumerável é denso, pois cada ponto de X é isolado. Assim, Y não é separável. O subespaço X é discreto não enumerável, logo esse exemplo também mostra que a propriedade de Lindelöf não é hereditária.

Exercícios

Ex. 6.1 — Mostre que, se (X, τ) é separável, então $\{x \in X : \{x\} \in \tau\}$ é enumerável.

Ex. 6.2 — Seja X um conjunto não vazio com a topologia cofinita τ . Caracterize, em termos de $|X|$, quando (X, τ) é: ??primeiro-enumerável; ??segundo-enumerável; ??separável.

Ex. 6.3 — Repita o exercício anterior para a topologia coenumerável

$$\tau' = \{X \setminus E : E \subset X, |E| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ex. 6.4 — Sejam X separável e $Y \subset X$. Mostre que Y é separável em cada um dos casos seguintes: ?? X é metrizável; ?? Y é aberto em X ; ?? X é segundo-enumerável e Y é denso em X .

Ex. 6.5 — Dados X infinito e $x_0 \in X$, considere a base

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \neq x_0\} \cup \{A \subset X : x_0 \in A, X \setminus A \text{ é finito}\}.$$

Determine quais das propriedades deste capítulo o espaço resultante satisfaz.

Ex. 6.6 — Quais axiomas de enumerabilidade a reta de Michael satisfaz?

Ex. 6.7 — Sejam $\tau \subset \sigma$ duas topologias sobre o mesmo conjunto X . Investigue, para o primeiro e o segundo axiomas de enumerabilidade, em quais direções a propriedade é preservada ao passar de τ para σ .

Ex. 6.8 — Seja X segundo-enumerável e $\mathcal{B}$ uma base qualquer de X . Mostre que existe uma subfamília enumerável $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ que ainda é base de X .

6.2 Sequências

O primeiro axioma de enumerabilidade ganha seu significado nesta seção. Em um espaço topológico arbitrário, sequências podem não enxergar todo o fecho, nem toda a continuidade. Quando cada ponto possui uma base local enumerável, esse problema desaparece.

Proposição 6.20 Se X é primeiro-enumerável, $A \subset X$ e $x \in X$, então

$$x \in \overline{A} \iff \text{existe uma sequência } (a_n) \subset A \text{ com } a_n \rightarrow x.$$

Demonstração. Se $a_n \rightarrow x$, toda vizinhança de x contém algum termo da sequência; logo $x \in \overline{A}$.

Reciprocamente, suponha $x \in \overline{A}$. Escolha uma base local decrescente $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ em x . Como cada V_n intercepta A , escolha $a_n \in A \cap V_n$. Se V é uma vizinhança de x , algum V_N está contido em V ; para $n \geq N$ temos $a_n \in V_n \subset V_N \subset V$. Portanto $a_n \rightarrow x$.

■

Proposição 6.21 Seja $f : X \rightarrow Y$ e suponha X primeiro-enumerável. Então são equivalentes:

1. f é contínua;
2. para toda sequência $x_n \rightarrow x$ em X , temos $f(x_n) \rightarrow f(x)$ em Y .

Demonstração. Se f é contínua e V é uma vizinhança de $f(x)$, então existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$. Como $x_n \rightarrow x$, eventualmente $x_n \in U$, e portanto eventualmente $f(x_n) \in V$.

Para a recíproca, suponha que f não seja contínua. Existe um aberto $V \subset Y$ e um ponto

$$x \in f^{-1}(V) \setminus \text{int } f^{-1}(V).$$

Escolha uma base local decrescente $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ em x . Como x não é interior a $f^{-1}(V)$, cada B_n contém um ponto $x_n \notin f^{-1}(V)$. Então $x_n \rightarrow x$, mas $f(x_n) \notin V$ para todo n , enquanto $f(x) \in V$. Logo $f(x_n)$ não converge para $f(x)$.

■

A hipótese de primeiro enumerável não é decorativa: sem ela, continuidade sequencial e continuidade podem ser noções diferentes.

Proposição 6.22 Se X é primeiro-enumerável e toda sequência em X possui no máximo um limite, então X é Hausdorff.

Demonstração. Suponha que X não seja Hausdorff. Existem pontos distintos $x, y \in X$ tais que toda vizinhança de x encontra toda vizinhança de y . Escolha bases locais decrescentes (U_n) em x e (V_n) em y . Para cada n , escolha $z_n \in U_n \cap V_n$. Então $z_n \rightarrow x$ e $z_n \rightarrow y$, contradizendo a unicidade do limite. ■

Para seqüências, chamaremos x de *ponto de aderência sequencial* de (x_n) quando, para toda vizinhança V de x e todo N , existe $n \geq N$ com $x_n \in V$.

Proposição 6.23 Se X é primeiro-enumerável, então x é ponto de aderência sequencial de (x_n) se, e somente se, alguma subsequência de (x_n) converge para x .

Demonstração. Se uma subsequência converge para x , então toda vizinhança de x contém termos dessa subsequência com índices arbitrariamente grandes. Reciprocamente, escolha uma base local decrescente $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ em x . Indutivamente, escolha $n_k > n_{k-1}$ com $x_{n_k} \in B_k$. Então $x_{n_k} \rightarrow x$. ■

O resultado seguinte resume o papel do primeiro axioma em uma única frase: em torno de um ponto primeiro-enumerável, as seqüências determinam exatamente as vizinhanças.

Proposição 6.24 Se $x \in X$ possui base local enumerável e $V \subset X$, então

V é vizinhança de $x \iff$ toda seqüência $x_n \rightarrow x$ está eventualmente em V .

Demonstração. A implicação direta é a definição de convergência. Para a recíproca, suponha que V não seja vizinhança de x . Escolha uma base local decrescente (B_n) em x . Como nenhum B_n está contido em V , podemos escolher $x_n \in B_n \setminus V$. Então $x_n \rightarrow x$, mas nenhum termo pertence a V . ■

Exercícios

Ex. 6.9 — Decida se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique: ??toda seqüência em um espaço com a topologia trivial converge para todo ponto; ??nenhuma seqüência em um espaço discreto converge.

Ex. 6.10 — Descreva as seqüências convergentes em $\mathbb{Z}$ com a topologia cofinita.

Ex. 6.11 — Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre diretamente que $x_n \rightarrow x$ na topologia métrica se, e somente se, $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

Ex. 6.12 — Sejam X, Y espaços topológicos. Mostre que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ em $X \times Y$ se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$.

Ex. 6.13 — Seja X não enumerável, $x_0 \in X$, e considere a topologia gerada pela base

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \neq x_0\} \cup \{A \subset X : x_0 \in A, X \setminus A \text{ é enumerável}\}.$$

Se Y é T_1 e primeiro-enumerável, prove que $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se,

$$\{x \in X : f(x) \neq f(x_0)\}$$

é enumerável.

Ex. 6.14 — Mostre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a topologia da caixa não satisfaz o primeiro nem o segundo axioma de enumerabilidade.

6.3 Relações entre os Axiomas da Enumerabilidade

As propriedades estudadas até aqui não são versões diferentes da mesma ideia. Elas medem aspectos distintos do espaço e, fora de classes especiais, nenhuma delas deve ser confundida com outra. O quadro básico é

$$\begin{aligned} \text{segundo-enumerável} &\implies \text{primeiro-enumerável}, \\ \text{segundo-enumerável} &\implies \text{separável}, \\ \text{segundo-enumerável} &\implies \text{Lindelöf}. \end{aligned}$$

Em espaços métricos há uma coincidência adicional importante:

$$\text{separável} \iff \text{segundo-enumerável} \iff \text{Lindelöf}.$$

Todo espaço métrico é, independentemente dessas condições, primeiro-enumerável.

Teorema 6.25 (Segundo enumerável implica Lindelöf) Todo espaço segundo-enumerável é Lindelöf. Mais ainda: todo espaço segundo-enumerável é hereditariamente Lindelöf.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ uma base e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Para cada B_n que esteja contido em algum elemento de $\mathcal{U}$, escolha um $U_n \in \mathcal{U}$ com $B_n \subset U_n$. A família (U_n) é enumerável.

Ela cobre X : dado $x \in X$, escolha $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$ e depois um elemento da base B_n com $x \in B_n \subset U$. Pela construção, algum U_n foi escolhido contendo B_n , logo contém x .

Por fim, todo subespaço de um espaço segundo-enumerável é segundo-enumerável; aplicando o argumento anterior a cada subespaço, obtemos a afirmação hereditária. ■

Observação 6.26 (Primeiro enumerável não implica segundo enumerável) Um conjunto não enumerável com a topologia discreta é primeiro-enumerável, mas não pode ser segundo-enumerável: qualquer base precisa conter cada singleton.

Exemplo 6.27 (A reta de Sorgenfrey não é segundo-enumerável) Se $\mathcal{B}$ fosse uma base enumerável da reta de Sorgenfrey, para cada $x \in \mathbb{R}$ escolheríamos $B_x \in \mathcal{B}$ com

$$x \in B_x \subset [x, x+1).$$

Como B_x é aberto em Sorgenfrey e contém x , ele contém algum intervalo $[x, x+\varepsilon)$. Em particular, x é o mínimo de B_x . Assim $x \mapsto B_x$ é injetiva, o que obrigaria $\mathcal{B}$ a ser não enumerável.

Observação 6.28 (Separável não implica segundo enumerável) A reta de Sorgenfrey é separável pelo Exemplo 6.10, mas não é segundo-enumerável pelo exemplo anterior.

Observação 6.29 A reta usual $\mathbb{R}$ é segundo-enumerável e, portanto, hereditariamente Lindelöf.

A reta de Sorgenfrey fornece um exemplo mais sutil: ela é Lindelöf, embora não seja segundo-enumerável.

Teorema 6.30 (A reta de Sorgenfrey é Lindelöf) A reta de Sorgenfrey é Lindelöf.

Demonstração. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta da reta de Sorgenfrey. Para cada $x \in \mathbb{R}$, escolha $U_x \in \mathcal{U}$ e $b_x > x$ tais que

$$[x, b_x) \subset U_x.$$

Considere, agora na topologia usual de $\mathbb{R}$, o aberto

$$G = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x, b_x).$$

Como a reta usual é Lindelöf, existem $x_1, x_2, \dots$ tais que

$$G = \bigcup_{n \geq 1} (x_n, b_{x_n}).$$

Resta cobrir $E = \mathbb{R} \setminus G$. Mostremos que E é enumerável. Para cada $x \in E$, escolha um racional $q_x \in (x, b_x)$. Se $x < y$ pertencem a E , então $y \notin (x, b_x)$; portanto $b_x \leq y$ e

$$q_x < b_x \leq y < q_y.$$

Logo $x \mapsto q_x$ é injetiva em $\mathbb{Q}$, e E é enumerável.

A família formada pelos U_{x_n} e por um elemento de $\mathcal{U}$ contendo cada ponto de E é uma subcobertura enumerável de $\mathbb{R}$.

■

Proposição 6.31 Se X é não enumerável e possui a topologia cofinita, então X não é primeiro-enumerável.

Demonstração. Fixe $a \in X$ e suponha que $V_1, V_2, \dots$ seja uma base local em a , com cada V_n aberto. Como $X \setminus V_n$ é finito,

$$X \setminus \bigcap_{n \geq 1} V_n = \bigcup_{n \geq 1} (X \setminus V_n)$$

é enumerável. Como X é não enumerável, existe $b \neq a$ em $\bigcap_n V_n$. O aberto $X \setminus \{b\}$ é uma vizinhança de a , mas nenhum V_n está contido nele, contradição. ■

Esse mesmo exemplo mostra que Lindelöf e separável não implicam primeiro enumerável: a topologia cofinita em um conjunto não enumerável é compacta, logo Lindelöf, e qualquer subconjunto infinito enumerável é denso.

No caso métrico, as implicações ausentes reaparecem.

Proposição 6.32 Se (M, d) é separável, então é segundo-enumerável.

Demonstração. É a Proposição 6.14. ■

Proposição 6.33 Se (M, d) é Lindelöf, então é segundo-enumerável.

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, a família $\{B(x, 1/n) : x \in M\}$ cobre M . Escolha uma subcobertura enumerável $\mathcal{B}_n$ e faça

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n.$$

A família $\mathcal{B}$ é enumerável. Se U é aberto e $x \in U$, escolha $\varepsilon > 0$ com $B(x, \varepsilon) \subset U$ e n com $2/n < \varepsilon$. Alguma bola $B(a, 1/n) \in \mathcal{B}_n$ contém x ; para $y \in B(a, 1/n)$,

$$d(y, x) < \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

logo $x \in B(a, 1/n) \subset U$. Portanto $\mathcal{B}$ é uma base. ■

6.4 Comportamento Topológico

As propriedades anteriores também diferem quanto ao comportamento sob as construções do Capítulo 4. Algumas passam a subespaços, outras são melhor preservadas por imagens contínuas, e produtos infinitos exigem hipóteses adicionais.

6.4.1 Subespaços

Proposição 6.34 Primeiro e segundo enumerabilidade são propriedades hereditárias.

Demonstração. Se $Y \subset X$ e (B_n) é uma base local de $x \in Y$ em X , então $(B_n \cap Y)$ é uma base local em Y . Se $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de X , então $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é uma base enumerável de Y . ■

Separabilidade não é hereditária em geral. Se X é não enumerável e recebe a topologia do ponto a , então $\{a\}$ é denso, mas o subespaço $X \setminus \{a\}$ é discreto não enumerável.

Para subespaços abertos, porém, a separabilidade é preservada.

Proposição 6.35 (Separabilidade em abertos) Se X é separável e $Y \subset X$ é aberto, então Y é separável.

Demonstração. Se D é denso e enumerável em X , então $D \cap Y$ é enumerável. Todo aberto não vazio de Y é também aberto em X , pois Y é aberto; logo intercepta D e, portanto, $D \cap Y$. Assim $D \cap Y$ é denso em Y . ■

A propriedade de Lindelöf também não é hereditária: no exemplo do ponto especial da Seção 6.1, o espaço total é Lindelöf e o subespaço discreto não enumerável não é. Para subespaços fechados, porém, a situação é boa.

Proposição 6.36 (Lindelöf e fechados) Todo subespaço fechado de um espaço Lindelöf é Lindelöf.

Demonstração. Seja $Y \subset X$ fechado e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de Y . Para cada α , escreva $U_\alpha = Y \cap V_\alpha$ com V_α aberto em X . Então

$$\{V_\alpha\} \cup \{X \setminus Y\}$$

é uma cobertura aberta de X . Escolha uma subcobertura enumerável. Retirando $X \setminus Y$, se necessário, os correspondentes U_α formam uma subcobertura enumerável de Y . ■

6.4.2 Quocientes

Primeiro e segundo enumerabilidade podem ser destruídos por uma colagem. O exemplo seguinte isola o mecanismo: identificar uma família discreta infinita de pontos pode produzir um único ponto cuja estrutura local não admite uma base enumerável.

Exemplo 6.37 (Uma flor com infinitas pétalas) Em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, identifique todos os inteiros entre si e nenhum outro par de pontos. Denote o quociente por Y e por p a classe de $\mathbb{Z}$. Embora $\mathbb{R}$ seja segundo-enumerável, Y não é primeiro-enumerável.

Suponha que $U_1, U_2, \dots$ seja uma base local aberta em p . Os conjuntos $W_n = q^{-1}(U_n)$ são abertos saturados contendo todos os inteiros. Para cada $n \geq 1$, escolha $0 < \varepsilon_n < 1/4$ tal que

$$(n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n) \subset W_n.$$

Defina $\delta_n = \varepsilon_n/2$ para $n \geq 1$ e, para os inteiros não positivos, tome $\delta_n = 1/8$. O conjunto

$$W = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - \delta_k, k + \delta_k)$$

é aberto, saturado e contém $\mathbb{Z}$; logo $V = q(W)$ é uma vizinhança aberta de p .

Se (U_n) fosse base, algum U_n estaria contido em V . Mas o ponto $t_n = n + 3\varepsilon_n/4$ pertence a $W_n = q^{-1}(U_n)$ e não pertence a W . Portanto $U_n \not\subset V$ para todo n , contradição.

Separabilidade e Lindelöf, ao contrário, são preservadas por imagens contínuas. Por isso passam automaticamente a quocientes.

Proposição 6.38 (Imagem contínua de separável) Se X é separável e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então $f(X)$ é separável.

Demonstração. Se $D \subset X$ é denso e enumerável, então $f(D)$ é enumerável. Pela continuidade,

$$f(X) = f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)},$$

onde o fecho é tomado em $f(X)$. Portanto $f(D)$ é denso em $f(X)$. ■

Proposição 6.39 (Imagem contínua de Lindelöf) Se X é Lindelöf e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então $f(X)$ é Lindelöf.

Demonstração. Se $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de $f(X)$, então $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ é uma cobertura aberta de X . Escolha uma subcobertura enumerável. Os correspondentes U_α cobrem $f(X)$. ■

6.4.3 Produtos Finitos

Produtos finitos preservam primeiro e segundo enumerabilidade. O mesmo vale para separabilidade.

Proposição 6.40 (Produtos e separabilidade) Se $X_1, \dots, X_r$ são separáveis, então $X_1 \times \dots \times X_r$ é separável.

Demonstração. Escolha densos enumeráveis $D_i \subset X_i$. O produto $D_1 \times \dots \times D_r$ é enumerável e intercepta todo aberto básico não vazio do produto; logo é denso. ■

A propriedade de Lindelöf é diferente: mesmo o produto de dois espaços Lindelöf pode deixar de ser Lindelöf.

Exemplo 6.41 (O plano de Sorgenfrey) A reta de Sorgenfrey é Lindelöf, mas seu quadrado não é. Considere a antidiagonal

$$D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Ela é fechada no plano de Sorgenfrey: se $(a, b) \notin D$, então $a + b \neq 0$, e um retângulo básico suficientemente pequeno $[a, a + \varepsilon) \times [b, b + \varepsilon)$ permanece de um mesmo lado da equação $x + y = 0$.

Além disso, D é discreta. Para $(x, -x) \in D$,

$$[x, x + \varepsilon) \times [-x, -x + \varepsilon)$$

intercepta D apenas em $(x, -x)$. Portanto D é um subespaço fechado, discreto e não enumerável. Se o plano de Sorgenfrey fosse Lindelöf, D seria Lindelöf por ser fechado; mas um espaço discreto não enumerável não é Lindelöf.

6.4.4 Produtos Infinitos

Em produtos infinitos, a topologia produto restringe apenas finitas coordenadas de cada vez. Essa finitude local é suficiente para preservar vários fenômenos, mas o número de fatores passa a importar.

Proposição 6.42 Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços T_1 não triviais. Então

$$\prod_{i \in I} X_i$$

é primeiro-enumerável se, e somente se, cada X_i é primeiro-enumerável e I é enumerável.

Demonstração. Suponha primeiro que o produto X seja primeiro-enumerável. Fixando pontos em todos os fatores exceto um, cada X_i é homeomorfo a um subespaço de X ; logo é primeiro-enumerável.

Fixe $a = (a_i) \in X$ e uma base local enumerável (U_n) em a . Refinando cada U_n por um aberto básico, podemos supor

$$V_n = \bigcap_{j \in J_n} \pi_j^{-1}(V_{n,j}) \subset U_n,$$

com J_n finito. Se $J = \bigcup_n J_n$ não fosse todo I , escolha $k \in I \setminus J$ e $b_k \neq a_k$. Como X_k é T_1 , existe um aberto W_k com $a_k \in W_k$ e $b_k \notin W_k$. A vizinhança $\pi_k^{-1}(W_k)$ de a não contém nenhum V_n : para cada n , mantenha as coordenadas de a exceto a k -ésima e substitua esta por b_k . O ponto obtido pertence a V_n e não pertence a $\pi_k^{-1}(W_k)$, uma contradição. Portanto $I = J$ é enumerável.

Reciprocamente, suponha $I = \mathbb{N}$ e cada X_n primeiro-enumerável. Para cada n ,

escolha uma base local enumerável $(B_{n,m})_{m \geq 1}$ em a_n . As interseções

$$\bigcap_{n=1}^N \pi_n^{-1}(B_{n,m_n}), \quad N, m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N},$$

formam uma base local enumerável em a . ■

Proposição 6.43 Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços T_1 não triviais. O produto $\prod_{i \in I} X_i$ é segundo-enumerável se, e somente se, cada X_i é segundo-enumerável e I é enumerável.

Demonstração. Se o produto é segundo-enumerável, é primeiro-enumerável; pela proposição anterior, I é enumerável. Cada fator é homeomorfo a um subespaço do produto, portanto é segundo-enumerável.

Reciprocamente, para I enumerável e bases enumeráveis $\mathcal{B}_i$ nos fatores, os cilindros básicos que restringem apenas finitas coordenadas usando elementos das $\mathcal{B}_i$ formam uma base enumerável do produto. ■

Para separabilidade, o quadro é diferente. Um produto pode ter não enumeravelmente muitos fatores e ainda assim possuir um subconjunto denso enumerável; o limite natural é a cardinalidade do contínuo.

Proposição 6.44 (Hewitt–Marczewski–Pondiczery) Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de espaços Hausdorff não triviais. Então

$$\prod_{i \in I} X_i$$

é separável se, e somente se, cada X_i é separável e $|I| \leq |\mathbb{R}|$.

Demonstração. Suponha o produto X separável e seja $D \subset X$ denso e enumerável. Cada fator $X_i = \pi_i(X)$ é separável por ser imagem contínua de X .

Para cada i , escolha abertos não vazios disjuntos $U_i, V_i \subset X_i$. Defina

$$D_i = D \cap \pi_i^{-1}(U_i).$$

Se $i \neq j$, o aberto básico $\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(V_j)$ é não vazio e, pela densidade, contém algum $d \in D$. Esse ponto pertence a D_i e não a D_j . Logo $i \mapsto D_i$ é uma injeção de I em $\mathcal{P}(D)$, e

$$|I| \leq 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|.$$

Reciprocamente, suponha que cada X_i seja separável e $|I| \leq |\mathbb{R}|$. Identifique I com um subconjunto de $\mathbb{R}$ e escolha, para cada i ,

$$D_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots\}$$

denso em X_i .

Considere todos os dados finitos formados por intervalos abertos $J_1, \dots, J_m$ de extremos racionais, dois a dois disjuntos, e números $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. A cada dado associe $y = (y_i) \in X$ por

$$y_i = \begin{cases} x_{i,n_k}, & i \in J_k, \\ x_{i,1}, & i \notin J_1 \cup \dots \cup J_m. \end{cases}$$

Há apenas enumeravelmente muitos desses pontos; denote o conjunto deles por D .

Se

$$U = \bigcap_{k=1}^m \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$$

é um aberto básico não vazio, escolha n_k com $x_{i_k, n_k} \in U_k$. Como os pontos $i_1, \dots, i_m$ são distintos, existem intervalos de extremos racionais J_k dois a dois disjuntos contendo i_k . O ponto de D associado a esses dados pertence a U . Logo D é denso e o produto é separável. ■

6.4.5 Somas

Para somas, a situação pode ser descrita completamente. A primeira enumerabilidade é puramente local e não impõe restrição sobre o número de componentes. As outras três propriedades percebem quantas “prateleiras” existem.

Proposição 6.45 (Enumerabilidade em somas) Se $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, com todos os X_i não vazios, então:

1. X é primeiro-enumerável se, e somente se, cada X_i é primeiro-enumerável;
2. X é segundo-enumerável se, e somente se, cada X_i é segundo-enumerável e I é enumerável;
3. X é separável se, e somente se, cada X_i é separável e I é enumerável;
4. X é Lindelöf se, e somente se, cada X_i é Lindelöf e I é enumerável.

Demonstração. Cada X_i aparece na soma como um subespaço aberto e fechado homeomorfo ao fator original. As condições necessárias sobre os fatores seguem dessas inclusões.

Para o primeiro item, uma base local em um ponto da soma é simplesmente a imagem de uma base local no único fator que contém esse ponto.

Para os demais itens, se I é enumerável, a união das bases ou dos subconjuntos densos escolhidos em cada fator continua enumerável; no caso Lindelöf, reúnem-se as subcoberturas enumeráveis obtidas em cada componente. Reciprocamente, uma base enumerável, um subconjunto denso enumerável ou uma subcobertura enumerável da cobertura $\{X_i : i \in I\}$ só pode encontrar enumeravelmente muitos componentes; como todos são não vazios e abertos, isso força I a ser enumerável. ■

Proposição 6.46 (Lindelöf e somas) Em particular, toda soma enumerável de espaços Lindelöf é Lindelöf.

6.4.6 Tabela de comportamento topológico

Para produtos finitos e somas finitas, o quadro pode ser resumido da seguinte forma. As restrições para produtos e somas infinitos foram descritas nas duas subseções anteriores.

O símbolo * indica preservação por imagem contínua. A tabela não diz que separabilidade ou Lindelöf sejam hereditárias apenas nesses casos; diz apenas que abertos, respectivamente fechados, fornecem as hipóteses gerais simples que estabelecemos acima.

	Subespaço	Quociente	Produto finito	Soma finita
Primeiro enumerável	Sim	Não	Sim	Sim
Segundo enumerável	Sim	Não	Sim	Sim
Separável	Abertos	Sim*	Sim	Sim
Lindelöf	Fechados	Sim*	Não	Sim

Tabela 6.1: Comportamento das principais propriedades de enumerabilidade.

Exercícios

Ex. 6.15 — Mostre diretamente que um subespaço aberto de um espaço separável é separável.

Ex. 6.16 — Mostre que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^2$, é separável.

Ex. 6.17 — Prove novamente, sem usar a proposição do texto, que todo espaço separável satisfaz a c.c.c.

Ex. 6.18 — Considere $X = \mathbb{R}$ e a relação

$$x \sim y \iff x = y \text{ ou } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Mostre diretamente que $X/\sim$ não satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Ex. 6.19 — Dê um exemplo de dois espaços Lindelöf cujo produto não é Lindelöf e explique exatamente onde a demonstração usual para produtos compactos deixa de funcionar.

Ex. 6.20 — Prove a caracterização do segundo axioma de enumerabilidade para produtos enumeráveis apresentada na Proposição 6.43 construindo explicitamente uma base.

6.5 Variedades Topológicas

As noções desenvolvidas até aqui permitem formular de maneira limpa uma das classes centrais da topologia. Uma variedade é um espaço que, quando observado localmente, se parece com $\mathbb{R}^n$. A condição é geométrica e local; as hipóteses de Hausdorff e segundo enumerável entram para impedir que a colagem global dessas regiões se torne excessivamente patológica.

Definição 6.47 (Carta local) Seja M um espaço topológico. Uma **carta local de dimensão n** é um par (U, φ) em que $U \subset M$ é aberto e

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$. As coordenadas de $\varphi(p)$ são chamadas coordenadas locais de p nessa carta.

Definição 6.48 (Variedade topológica) Um espaço topológico M é uma **variedade topológica de dimensão n** quando:

1. todo ponto de M pertence ao domínio de uma carta local n -dimensional;
2. M é Hausdorff;
3. M é segundo-enumerável.

As três condições têm papéis diferentes. A primeira afirma que a geometria local é euclidiana; Hausdorff garante uma separação mínima entre pontos; o segundo axioma de enumerabilidade controla o tamanho global do espaço. Sem a última hipótese, por exemplo, uma união disjunta não enumerável de cópias de $\mathbb{R}^n$ seria Hausdorff e localmente euclidiana, mas não seria uma variedade na convenção adotada aqui.

Exemplo 6.49

1. $\mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão n .
2. Todo espaço discreto enumerável é uma variedade de dimensão 0.
3. Um espaço discreto não enumerável é Hausdorff e localmente euclidiano de dimensão 0, mas não é segundo-enumerável; portanto não é uma variedade segundo a definição acima.
4. O círculo S^1 é uma variedade de dimensão 1.
5. O toro e a garrafa de Klein são variedades de dimensão 2.
6. A esfera S^n é uma variedade de dimensão n ; a projeção estereográfica fornece cartas explícitas.

Definição 6.50 (Atlas topológico) Um atlas topológico de dimensão n em M é uma família de cartas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ cujos domínios cobrem M :

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a aplicação

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

é um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$ e recebe o nome de **mudança de coordenadas**.

Proposição 6.51 (Propriedade de cociclo) As mudanças de coordenadas de um atlas satisfazem, sempre que as composições estão definidas,

$$\varphi_{ii} = \text{id}, \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}, \quad \varphi_{ik} \circ \varphi_{kj} = \varphi_{ij}.$$

Demonstração. As identidades são consequência direta das definições. Por exemplo,

$$(\varphi_i \circ \varphi_k^{-1}) \circ (\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}.$$

■

O segundo axioma de enumerabilidade tem aqui uma consequência concreta: não é preciso trabalhar com uma coleção incontrolavelmente grande de cartas.

Proposição 6.52 (Atlas enumerável) Toda variedade topológica admite um atlas enumerável.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ uma base enumerável de M . Para cada B_n que esteja contido no domínio de alguma carta, escolha uma dessas cartas (U_n, φ_n) e restrinja-a a B_n :

$$\varphi_n|_{B_n} : B_n \longrightarrow \varphi_n(B_n).$$

Essa restrição ainda é uma carta, pois B_n é aberto em U_n .

Esses domínios cobrem M . De fato, dado $p \in M$, escolha uma carta (U, φ) contendo p e depois um elemento da base B_n com $p \in B_n \subset U$. Portanto as cartas escolhidas formam um atlas enumerável.

■

A pergunta inicial — quando uma topologia admite uma descrição enumerável — reaparece aqui numa forma geométrica: a segunda enumerabilidade garante a existência de um atlas enumerável. No próximo capítulo, a noção de “pequenez” deixa de ser cardinal e passa a ser formulada por coberturas, levando à compacidade.

Exercícios

Ex. 6.21 — Mostre que uma união disjunta não enumerável de cópias de $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff e localmente euclidiana, mas não é segundo-enumerável.

Ex. 6.22 — Mostre diretamente que todo espaço discreto enumerável é uma variedade topológica de dimensão 0.

Ex. 6.23 — Seja (U, φ) uma carta de uma variedade M e $V \subset U$ um aberto. Mostre que $(V, \varphi|_V)$ também é uma carta.

Compacidade

No cálculo, os intervalos fechados e limitados aparecem repetidamente como domínios nos quais fenômenos globais podem ser controlados por informação local: funções contínuas atingem máximo e mínimo, sequências possuem subsequências convergentes e a continuidade passa a ser uniforme. Em $\mathbb{R}^n$, o teorema de Heine–Borel resume esse comportamento dizendo que os compactos são exatamente os conjuntos fechados e limitados.

Há, porém, um detalhe importante. A palavra “limitado” depende de uma distância, e um espaço topológico geral não vem equipado com uma métrica. Se quisermos uma noção que faça sentido puramente em termos de abertos e que seja preservada por homeomorfismos, precisamos procurar outra formulação.

A ideia correta é uma espécie de *finitude topológica*: um espaço é compacto quando toda tentativa de cobri-lo por abertos contém, escondida nela, uma cobertura finita. A definição é simples; suas consequências, não. Ela recupera os teoremas familiares da análise, mas também sobrevive em espaços nos quais não há distância, coordenadas ou sequer uma noção razoável de sequência capaz de detectar toda a topologia.

O capítulo seguirá esse movimento em duas direções. Primeiro, partiremos da reta para descobrir quais propriedades da compacidade são genuinamente topológicas. Depois veremos como a teoria se especializa novamente em espaços métricos, onde sequências, completude e limitação total voltam a entrar em cena. O teorema de Tychonoff, a compacidade local e a compactificação de Alexandroff completarão esse percurso.

7.1 Definição e primeiros exemplos

Começemos pela linguagem de coberturas.

Definição 7.1 (Cobertura) Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Uma *cobertura aberta* de A é uma família $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Uma *subcobertura* de $\mathcal{U}$ é uma subfamília $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que ainda cobre A .

Quando não houver risco de ambiguidade, diremos apenas *cobertura*. Se os conjuntos da família não forem necessariamente abertos, isso será dito explicitamente.

Exemplo 7.2 Na reta real com a topologia usual, as famílias

$$\mathcal{U}_1 = \{(n-2, n) : n \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{U}_2 = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

são coberturas abertas de $\mathbb{R}$. Já

$$\mathcal{U}_3 = \{[n, \infty) : n \in \mathbb{Z}\}$$

cobre $\mathbb{R}$, mas não é uma cobertura por abertos.

Exemplo 7.3 As famílias

$$\mathcal{U}_4 = \{(x-0.1, x+0.1) : 0 \leq x \leq 1\}$$

e

$$\mathcal{U}_5 = \{(x-0.1, x+0.1) : x \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}\}$$

cobrem $[0, 1]$, e $\mathcal{U}_5$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{U}_4$.

Por outro lado, se $a_n \downarrow 0$, a família

$$\mathcal{U}_6 = \{(a_n, 1] : n \in \mathbb{N}\}$$

cobre $(0, 1]$ na topologia relativa, mas nenhuma subfamília finita o faz.

Exemplo 7.4 Para qualquer conjunto X , a família de conjuntos unitários

$$\{\{x\} : x \in X\}$$

é uma cobertura de X . Ela é aberta se, e somente se, X estiver munido da topologia discreta.

Exemplo 7.5 Se (X, d) é um espaço métrico e $\varepsilon > 0$, então

$$\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

é uma cobertura aberta de X .

Para um ponto fixo x_0 , a família $\{B(x_0, r) : r > 0\}$ também cobre X : para cada $y \in X$, basta escolher $r > d(x_0, y)$. A diferença é que, nessa cobertura, o centro permanece fixo e os raios variam.

Exemplo 7.6 Em $\mathbb{R}^2$, fixe $\varepsilon > 0$ e considere

$$\mathcal{U} = \{B((m, n), \varepsilon) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Essa família cobre o plano se, e somente se, $\varepsilon > \sqrt{2}/2$. De fato, o ponto mais distante dos vértices de uma célula unitária é o centro dessa célula, cuja distância a qualquer vértice é $\sqrt{2}/2$.

Exemplo 7.7 A cobertura $\mathcal{U}_4$ possui a subcobertura finita $\mathcal{U}_5$. Isso ilustra o mecanismo da definição, mas não basta para provar que $[0, 1]$ é compacto: para isso, é preciso mostrar que *toda* cobertura aberta de $[0, 1]$ admite uma subcobertura finita. Essa diferença entre “uma cobertura” e “todas as coberturas” será usada repetidamente.

Exemplo 7.8 A cobertura $\mathcal{U}_6$ de $(0, 1]$ não possui subcobertura finita. Em contraste, fixado $0 < \varepsilon \leq 1$, ao acrescentarmos um aberto da topologia relativa de $(0, 1]$ que cubra de uma só vez uma faixa próxima de 0, por exemplo

$$\mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_6 \cup \{(0, \varepsilon)\},$$

uma subcobertura finita pode ser extraída: basta escolher n com $a_n < \varepsilon$ e usar $(0, \varepsilon)$ juntamente com $(a_n, 1]$.

Chegamos à definição central do capítulo.

Definição 7.9 (Compacidade) Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $K \subset X$ é **compacto** quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.

Dizemos que X é um **espaço compacto** quando X , como subconjunto de si mesmo, é compacto.

A definição é intrínseca: $K \subset X$ é compacto se, e somente se, K é compacto com a topologia induzida.

Exemplo 7.10 (O intervalo $(0, 1)$) Considere

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 1 \right) : n \geq 2 \right\}.$$

Essa família cobre $(0, 1)$, mas nenhuma subfamília finita o cobre. Portanto, $(0, 1)$ não é compacto.

Exemplo 7.11 O subespaço

$$K = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

é compacto. De fato, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de K e escolha $U_0 \in \mathcal{U}$ com $0 \in U_0$. Como $1/n \rightarrow 0$, todos os termos $1/n$, exceto talvez uma quantidade finita, pertencem a U_0 . Basta então escolher, para cada um dos pontos restantes, um elemento da cobertura que o contenha.

Exemplo 7.12 (Os reais) A reta $\mathbb{R}$ não é compacta. Por exemplo,

$$\mathcal{U} = \{(k-1, k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$$

é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ sem subcobertura finita.

Exemplo 7.13 (Conjunto finito) Todo espaço topológico finito é compacto. Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathcal{U}$ cobre X , escolha, para cada x_i , um aberto $U_i \in \mathcal{U}$ que contenha x_i . Então $U_1, \dots, U_n$ formam uma subcobertura finita.

Note que a cobertura original pode muito bem ser infinita; o que a finitude de X garante é a existência de uma subcobertura finita.

Exemplo 7.14 (Topologia discreta) Em um espaço discreto, os compactos são exatamente os subconjuntos finitos. Com efeito, se A é infinito, a cobertura

$$\{\{x\} : x \in A\}$$

não possui subcobertura finita.

Exemplo 7.15 (Topologia indiscreta) Se X tem a topologia $\{\emptyset, X\}$, então todo subconjunto de X é compacto. Mais geralmente, se a topologia de X é finita, qualquer cobertura aberta contém apenas finitos abertos distintos e, portanto, admite subcobertura finita.

Exemplo 7.16 (Conjunto ilimitado) Se (X, d) é um espaço métrico ilimitado, então X não é compacto. Fixe $a \in X$. A família

$$\{B(a, n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

cobre X , mas nenhuma subfamília finita o faz. Consequentemente, todo compacto de um espaço métrico é limitado.

Exemplo 7.17 (Intervalo fechado e limitado) O intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é compacto.

Se $a = b$, o resultado é imediato. Suponha $a < b$ e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $[a, b]$. Defina

$$S = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ pode ser coberto por finitos elementos de } \mathcal{U}\}.$$

O conjunto S é não vazio: escolha $U \in \mathcal{U}$ contendo a ; como U é aberto na topologia relativa, existe $\delta > 0$ tal que

$$[a, a + \delta) \cap [a, b] \subset U.$$

Diminuindo δ se necessário, podemos supor $a + \delta \leq b$.

Seja $c = \sup S$. Escolha $U_c \in \mathcal{U}$ com $c \in U_c$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b] \subset U_c.$$

Pela definição de supremo, existe $s \in S$ com $c - \varepsilon/2 < s \leq c$. Uma subcobertura finita de $[a, s]$, juntamente com U_c , cobre

$$[a, \min\{b, c + \varepsilon/2\}].$$

Se $c < b$, isso produz um ponto de S estritamente maior que c , contradição. Logo $c = b$; e, com essa mesma escolha de s e U_c , o intervalo coberto acima é precisamente $[a, b]$. Portanto $[a, b]$ admite uma subcobertura finita.

A definição por coberturas admite uma forma dual extremamente útil.

Observação 7.18 (Definição alternativa) Uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos tem a propriedade da interseção finita quando toda subfamília finita $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ satisfaz

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_0} F \neq \emptyset.$$

Pelas leis de De Morgan, dizer que toda cobertura aberta de X possui sub-

cobertura finita é equivalente a dizer que toda família de fechados com a propriedade da interseção finita possui interseção total não vazia.

Proposição 7.19 Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda família $\mathcal{F}$ de fechados com a propriedade da interseção finita satisfaz

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

Se X possui base enumerável, essas condições são ainda equivalentes à seguinte: toda sequência decrescente

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots$$

de fechados não vazios tem interseção não vazia.

Demonstração. A primeira equivalência é exatamente a dualidade por complementação descrita acima. Se X é compacto, toda sequência decrescente de fechados não vazios tem a propriedade da interseção finita e, portanto, interseção total não vazia.

Para a recíproca adicional, suponha agora que X tenha base enumerável e que toda sequência decrescente de fechados não vazios tenha interseção não vazia. Se X não fosse compacto, haveria uma cobertura aberta sem subcobertura finita. Refinando-a por uma base enumerável, obteríamos uma cobertura enumerável $U_1, U_2, \dots$ sem subcobertura finita. Então

$$F_n = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$$

seria uma sequência decrescente de fechados não vazios com interseção vazia, contradição. ■

7.2 Primeiras propriedades fundamentais

A definição por coberturas começa a ganhar força quando percebemos que ela permite transportar para espaços abstratos parte do comportamento conhecido dos intervalos fechados. Começemos por uma propriedade elementar, mas decisiva: dentro de um compacto, passar a um subespaço fechado não destrói a compacidade.

Proposição 7.20 Se $K \subset X$ é compacto e $F \subset K$ é fechado em K , então F é compacto.

Demonstração. Trabalhem no subespaço K . Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de F na topologia de K , então

$$\mathcal{U} \cup \{K \setminus F\}$$

é uma cobertura aberta de K , pois F é fechado em K . Pela compacidade de K , existe uma subcobertura finita. Retirando $K \setminus F$, se ele tiver sido escolhido, obtemos uma subcobertura finita de F . ■

7.2.1 Compacidade na reta

O exemplo do intervalo $[a, b]$ mostrou que a definição abstrata recupera um dos objetos compactos fundamentais da análise. Na reta, podemos ir além e caracterizar completamente os subconjuntos compactos.

Lema 7.21 Todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ é fechado.

Demonstração. Se $K = \emptyset$, não há nada a provar. Suponha $K \neq \emptyset$ e seja $x \notin K$. Para cada $k \in K$, como $\mathbb{R}$ é Hausdorff, existem abertos disjuntos $U_k \ni k$ e $V_k \ni x$. A família $\{U_k : k \in K\}$ cobre K ; pela compacidade, existem $k_1, \dots, k_n$ tais que

$$K \subset U_{k_1} \cup \dots \cup U_{k_n}.$$

Então

$$V = V_{k_1} \cap \dots \cap V_{k_n}$$

é uma vizinhança aberta de x disjunta de K . Logo $\mathbb{R} \setminus K$ é aberto e K é fechado. ■

Proposição 7.22 Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Demonstração. Se K é compacto, então é limitado, como já vimos para compactos métricos, e fechado pelo lema anterior. Reciprocamente, se K é fechado e limitado, existe $M > 0$ tal que $K \subset [-M, M]$. O intervalo $[-M, M]$ é compacto e K é fechado nele; portanto, K é compacto. ■

Assim, na reta real, recuperamos exatamente a imagem familiar do cálculo:

$$K \subset \mathbb{R} \text{ é compacto} \iff K \text{ é fechado e limitado.}$$

A partir daqui, porém, convém abandonar a palavra “limitado”: ela pertence à geometria métrica, não à topologia geral. O que sobrevive sem qualquer métrica são as propriedades que veremos a seguir.

7.2.2 Preservação e produtos finitos

A propriedade que mais utilizaremos é a invariância da compacidade por imagens contínuas. Ela explica, de uma só vez, por que a compacidade é preservada por homeomorfismos e por que quocientes de espaços compactos continuam compactos.

Proposição 7.23 (Imagem de Compacto) Se $K \subset X$ é compacto e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então $f(K)$ é compacto.

Demonstração. Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de $f(K)$, então

$$\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

é uma cobertura aberta de K . Escolha $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ cujas imagens inversas cubram K . Então $U_1, \dots, U_n$ cobrem $f(K)$. ■

Exemplo 7.24 Se $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ é compacto e todos os fatores são não vazios, então cada X_λ é compacto, pois a projeção canônica

$$\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$$

é contínua e sobrejetiva. Mais adiante provaremos a recíproca para produtos arbitrários.

Proposição 7.25 Se $X_1, \dots, X_n$ são espaços compactos, então o produto finito

$$X_1 \times \dots \times X_n$$

é compacto na topologia produto.

Demonstração. Basta tratar $X \times Y$. Se algum dos fatores é vazio, o produto é vazio e o resultado é imediato. Suponha então $X, Y \neq \emptyset$ e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$. Refinando cada elemento de $\mathcal{U}$ por abertos básicos, obtemos uma cobertura $\mathcal{V}$ formada por retângulos $A \times B$, cada um contido em algum elemento de $\mathcal{U}$. Se $\mathcal{V}$ possuir uma subcobertura finita, escolhendo para cada um desses retângulos um elemento de $\mathcal{U}$ que o contenha obtemos uma subcobertura finita da cobertura original. Assim, podemos trabalhar com $\mathcal{V}$ e, para simplificar a notação, chamá-la novamente de $\mathcal{U}$.

Fixe $x \in X$. O subespaço $\{x\} \times Y$ é homeomorfo a Y e, portanto, compacto. Logo é coberto por finitos retângulos

$$A_1 \times B_1, \dots, A_m \times B_m \in \mathcal{U}.$$

Descartando eventuais retângulos que não intersectem $\{x\} \times Y$, podemos supor que $x \in A_i$ para todo i . O aberto

$$A_x = A_1 \cap \dots \cap A_m$$

contém x , e os mesmos retângulos cobrem $A_x \times Y$. A família $\{A_x : x \in X\}$ cobre X ; pela compacidade de X , finitos $A_{x_1}, \dots, A_{x_r}$ bastam. Reunindo as correspondentes famílias finitas de retângulos, obtemos uma subcobertura finita de $X \times Y$. ■

7.3 Critérios de compacidade

A definição quantifica sobre *todas* as coberturas abertas, o que à primeira vista parece pouco prático. Felizmente, bases e sub-bases permitem reduzir drasticamente o que precisa ser verificado.

Proposição 7.26 Se $\mathcal{B}$ é uma base de X , então X é compacto se, e somente se, toda cobertura de X formada por elementos de $\mathcal{B}$ possui subcobertura finita.

Demonstração. A necessidade é imediata. Para a suficiência, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Para cada $U \in \mathcal{U}$, escreva U como união de elementos da base e reúna todos esses elementos numa família $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. Por hipótese, $\mathcal{V}$ possui uma subcobertura finita $B_1, \dots, B_n$. Para cada B_i , escolha $U_i \in \mathcal{U}$ com $B_i \subset U_i$. Então $U_1, \dots, U_n$ cobrem X . ■

O resultado seguinte vai um passo além: basta testar coberturas por elementos de uma sub-base.

Teorema 7.27 (Teorema da Sub-Base de Alexander) Se $\mathcal{S}$ é uma sub-base para a topologia de X , então X é compacto se, e somente se, toda cobertura de X formada por elementos de $\mathcal{S}$ possui subcobertura finita.

Demonstração. Só precisamos provar a suficiência. Suponha que toda cobertura de X por elementos de $\mathcal{S}$ tenha subcobertura finita, mas que X não seja compacto.

Considere o conjunto $\mathfrak{C}$ das coberturas abertas de X que não possuem subcobertura finita, ordenado por inclusão. Se $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ é uma cadeia em $\mathfrak{C}$, então $\bigcup_i \mathcal{C}_i$ ainda não possui subcobertura finita: uma subcobertura finita estaria contida em algum elemento da cadeia. Pelo lema de Zorn, existe uma cobertura maximal $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$.

A família $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ não cobre X , pois, por hipótese, teria uma subcobertura finita. Escolha

$$x \in X \setminus \bigcup (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}).$$

Como $\mathcal{M}$ cobre X , existe $U \in \mathcal{M}$ com $x \in U$. Como $\mathcal{S}$ é sub-base, existem $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tais que

$$x \in S_1 \cap \dots \cap S_n \subset U.$$

Nenhum S_i pertence a $\mathcal{M}$. Pela maximalidade de $\mathcal{M}$, cada família $\mathcal{M} \cup \{S_i\}$ possui uma subcobertura finita. Assim, para cada i , existem finitos elementos de $\mathcal{M}$ cuja união, junto com S_i , cobre X .

Reunindo todos esses finitos elementos de $\mathcal{M}$, obtemos uma família finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ tal que

$$X \setminus \bigcup \mathcal{F} \subset S_1 \cap \dots \cap S_n \subset U.$$

Logo $\mathcal{F} \cup \{U\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{M}$, contradição. ■

Sobre o uso de escolha. A demonstração anterior usa o lema de Zorn. Portanto, a passagem de coberturas por uma sub-base para coberturas arbitrárias já introduz explicitamente um princípio de escolha. Isso reaparecerá no teorema de Tychonoff. Não discutiremos aqui a força lógica exata dessas formas de escolha; para estas notas, o ponto importante é apenas tornar visível onde elas entram na argumentação.

Exemplo 7.28 Para um conjunto linearmente ordenado não vazio X com a topologia da ordem, vale o critério clássico: X é compacto se, e somente se, possui primeiro e último elementos e satisfaz a propriedade do supremo, isto é, todo subconjunto não vazio limitado superiormente possui supremo em X .

Na presença de primeiro e último elementos, a condição equivalente para ínfimos vem automaticamente. A hipótese sobre os extremos é essencial: a reta real possui a propriedade do supremo para subconjuntos limitados, mas não é compacta porque não possui primeiro nem último elemento.

Uma demonstração pode ser obtida aplicando o teorema de Alexander à sub-base formada pelos raios da topologia da ordem; deixamos os detalhes como exercício.

Proposição 7.29 Se X possui base enumerável, então X é compacto se, e somente se, para toda sequência crescente de abertos

$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

existe N tal que $U_N = X$.

Demonstração. Se X é compacto, uma subfamília finita da cobertura $\{U_n\}$ basta; como a sequência é crescente, o maior índice dessa subfamília já cobre X .

Reciprocamente, se X não é compacto e $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ é uma base enumerável, refine uma cobertura sem subcobertura finita por elementos da base e enumere os elementos necessários como $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$. Fazendo

$$U_k = B_{n_1} \cup \cdots \cup B_{n_k},$$

obtemos uma sequência crescente cuja união é X , mas nenhum U_k é todo X . ■

7.4 Compacidade, separação e aplicações clássicas

A compacidade não precisa de uma métrica. Ainda assim, uma parte importante da intuição de Heine–Borel sobrevive quando acrescentamos uma hipótese de separação: em espaços Hausdorff, compactos se comportam como subconjuntos fechados. Essa interação produz resultados de rigidez muito úteis. Em seguida, voltaremos a consequências que valem para compactos em geral e recuperam teoremas clássicos da análise.

Proposição 7.30 Se X é Hausdorff, todo subconjunto compacto de X é fechado. Em particular, se X é compacto e Hausdorff, um subconjunto $K \subset X$ é compacto se, e somente se, é fechado.

Demonstração. Se $K = \emptyset$, a afirmação é imediata. Suponha $K \neq \emptyset$, seja $a \notin K$ e, para cada $k \in K$, escolha abertos disjuntos $U_k \ni k$ e $V_k \ni a$. Pela compacidade, finitos $U_{k_1}, \dots, U_{k_n}$ cobrem K . Então

$$V = V_{k_1} \cap \dots \cap V_{k_n}$$

é uma vizinhança de a disjunta de K . Logo $X \setminus K$ é aberto.

A segunda afirmação combina esse fato com a Proposição 7.20. ■

Proposição 7.31 (Aplicações Fechadas) Se X é compacto, Y é Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então f é uma aplicação fechada.

Demonstração. Se $F \subset X$ é fechado, então F é compacto. A imagem $f(F)$ é compacta e, como Y é Hausdorff, é fechada. ■

Proposição 7.32 Se X é compacto, Y é Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção contínua, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. Pela proposição anterior, f é fechada. Como é bijetiva, isso equivale à continuidade de f^{-1} . ■

Exemplo 7.33 Seja X compacto Hausdorff, Y um espaço topológico qualquer e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Seu gráfico é

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Então

$$f \text{ é contínua} \iff \text{Gr}(f) \text{ é compacto.}$$

Se f é contínua, a aplicação $x \mapsto (x, f(x))$ é contínua, e o gráfico é imagem contínua do compacto X .

Reciprocamente, suponha $\text{Gr}(f)$ compacto. A restrição da primeira projeção

$$\pi_X|_{\text{Gr}(f)} : \text{Gr}(f) \longrightarrow X$$

é uma bijeção contínua com domínio compacto e contradomínio Hausdorff. Portanto é um homeomorfismo. Como

$$f = \pi_Y \circ \left(\pi_X|_{\text{Gr}(f)} \right)^{-1},$$

segue que f é contínua.

Proposição 7.34 (Compacidade e separação) Se X é Hausdorff, $K \subset X$ é compacto e $a \notin K$, então existem abertos disjuntos $U, V \subset X$ tais que

$$a \in U, \quad K \subset V.$$

Demonstração. Se $K = \emptyset$, basta tomar qualquer aberto $U \ni a$ e $V = \emptyset$. Suponha $K \neq \emptyset$. Para cada $y \in K$, escolha abertos disjuntos $U_y \ni a$ e $V_y \ni y$. A família $\{V_y : y \in K\}$ cobre K . Escolha uma subcobertura $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ e faça

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}, \quad V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Então $a \in U$, $K \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. ■

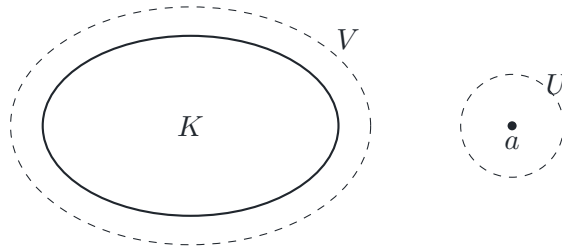


Figura 7.1: Um compacto e um ponto exterior podem ser separados em um espaço Hausdorff.

Proposição 7.35 (Espaços compactos e normalidade) Se X é Hausdorff e $F, H \subset X$ são compactos disjuntos, então existem abertos disjuntos U, V tais que $F \subset U$ e $H \subset V$. Em particular, todo espaço compacto Hausdorff é normal.

Demonstração. Se $F = \emptyset$ ou $H = \emptyset$, a conclusão é imediata. Suponha ambos não vazios. Para cada $x \in F$, a proposição anterior separa o ponto x do compacto H : existem abertos disjuntos $U_x \ni x$ e $V_x \supset H$. Pela compacidade de F , escolha $x_1, \dots, x_n$ de modo que $F \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Então

$$U = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}, \quad V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$$

são os abertos desejados.

Se, além disso, X é compacto Hausdorff e F, H são fechados disjuntos, então ambos são compactos. Aplicando o resultado anterior, obtemos a normalidade de X . ■

A partir daqui, duas consequências clássicas da análise tornam-se quase inevitáveis. A primeira usa apenas que imagens contínuas de compactos continuam compactas; a segunda mostra que a compacidade também controla subconjuntos infinitos.

Teorema 7.36 (Weierstrass) Se X é compacto e não vazio e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f atinge máximo e mínimo.

Demonstração. A imagem $f(X)$ é compacta em $\mathbb{R}$ e, portanto, fechada e limitada. Logo $\sup f(X)$ e $\inf f(X)$ existem. Ambos pertencem ao fecho de $f(X)$; como $f(X)$ é fechada, pertencem ao próprio $f(X)$. ■

Teorema 7.37 (Bolzano–Weierstrass) Se X é compacto e $A \subset X$ é infinito, então A possui um ponto de acumulação em X .

Demonstração. Se A não tivesse ponto de acumulação, cada $x \in X$ possuiria uma vizinhança aberta U_x que encontraria A em no máximo um ponto. A cobertura $\{U_x : x \in X\}$ teria uma subcobertura finita $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$, e então

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n (A \cap U_{x_i})$$

seria finito, contradição. ■

7.5 Noções próximas da compacidade

A definição por coberturas finitas não é a única maneira natural de tentar formalizar a ideia de “pequenez” topológica. Algumas variantes enfraquecem o tipo de cobertura que consideramos; outras substituem coberturas por sequências; outras ainda pedem que o espaço seja construído a partir de compactos.

Observação 7.38 Fora da classe dos espaços métricos, essas propriedades não são simplesmente definições alternativas da mesma noção. Em particular, compacidade e propriedades formuladas apenas com sequências podem se separar. Esse é um dos primeiros lugares em que sequências mostram que, embora sejam muito eficientes em espaços métricos, não detectam toda a topologia de um espaço arbitrário.

Definição 7.39 (Variantes do Conceito de Compacidade) Um espaço topológico X é dito:

1. **sequencialmente compacto** se toda sequência em X possui uma subsequência convergente;
2. **σ -compacto** se é união enumerável de subespaços compactos;
3. **enumeravelmente compacto** se toda cobertura aberta enumerável possui subcobertura finita;
4. **Lindelöf** se toda cobertura aberta possui uma subcobertura enumerável.

Observação 7.40 (Relações entre variantes de Compacidade) As implicações básicas podem ser resumidas por

$$\begin{aligned} \text{compacto} &\implies \text{enumeravelmente compacto}, \\ \text{compacto} &\implies \sigma\text{-compacto} \implies \text{Lindelöf}, \\ \text{sequencialmente compacto} &\implies \text{enumeravelmente compacto}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\text{enumeravelmente compacto} + \text{Lindelöf} \implies \text{compacto}.$$

As duas primeiras linhas são imediatas: uma cobertura arbitrária de um compacto já possui subcobertura finita, e um compacto é, trivialmente, união enumerável de compactos; por sua vez, uma união enumerável de compactos é Lindelöf, cobrindo cada compacto por finitos elementos da cobertura e tomando a união dessas escolhas. Além disso, se um espaço é simultaneamente Lindelöf e enumeravelmente compacto, toda cobertura aberta admite primeiro uma subcobertura enumerável e depois uma subcobertura finita. A implicação menos imediata é a terceira. Se X tivesse uma cobertura enumerável $U_1, U_2, \dots$ sem subcobertura finita, poderíamos substituir essa cobertura pela sequência crescente

$$V_n = U_1 \cup \dots \cup U_n$$

e escolher $x_n \notin V_n$. Nenhuma subsequência de (x_n) poderia convergir: se $x_{n_k} \rightarrow x$ e $x \in V_m$, então, como V_m é aberto, eventualmente $x_{n_k} \in V_m \subset V_{n_k}$, contradizendo a escolha de x_{n_k} .

Nenhuma dessas setas deve ser lida como equivalência em espaços topológicos arbitrários. Por exemplo,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$$

é σ -compacto e Lindelöf, mas não é enumeravelmente compacto. Também existem espaços compactos que não são sequencialmente compactos e espaços sequencialmente compactos que não são compactos.

Em espaços métricos, a situação melhora drasticamente: compacidade e compacidade sequencial coincidem, como provaremos na Seção 7.8.

Em espaços topológicos gerais, redes e filtros fornecem caracterizações de compacidade que recuperam o papel desempenhado por sequências em espaços métricos. Não desenvolveremos essa teoria aqui; basta guardar a razão conceitual: sequências são indexadas apenas por $\mathbb{N}$ e, em topologias muito grandes, isso pode ser informação insuficiente para registrar toda a convergência relevante.

7.6 Consequências métricas da compacidade

Antes de voltar à topologia geral, registremos duas consequências que exigem uma métrica. Elas são familiares da análise e mostram como a compacidade converte informações locais — raios que dependem do ponto — em um controle uniforme sobre todo o espaço.

Para um subconjunto não vazio A de um espaço métrico, escrevemos

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, \infty],$$

permitindo o valor $+\infty$ quando A é ilimitado. Adotamos ainda $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

Proposição 7.41 (Lema do número de Lebesgue) Se (X, d) é um espaço métrico compacto e $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X , então existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto $A \subset X$ com

$$\text{diam}(A) < \delta$$

está contido em algum elemento de $\mathcal{U}$. Em particular, para todo $x \in X$, a bola $B(x, \delta/3)$ está contida em algum elemento da cobertura.

Demonstração. Se $X = \emptyset$, qualquer $\delta > 0$ serve. Suponha, portanto, $X \neq \emptyset$.

Para cada $x \in X$, escolha $U_x \in \mathcal{U}$ com $x \in U_x$ e $r_x > 0$ tal que

$$B(x, 2r_x) \subset U_x.$$

As bolas $B(x, r_x)$ cobrem X . Pela compacidade, existem $x_1, \dots, x_n$ tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i}).$$

Faça

$$\delta = \min_{1 \leq i \leq n} r_{x_i} > 0.$$

Se $A = \emptyset$, não há nada a provar. Suponha $A \neq \emptyset$, escolha $a \in A$ e um índice i com $a \in B(x_i, r_{x_i})$. Para todo $y \in A$,

$$d(y, x_i) \leq d(y, a) + d(a, x_i) < \delta + r_{x_i} \leq 2r_{x_i},$$

portanto $A \subset B(x_i, 2r_{x_i}) \subset U_{x_i}$. ■

Definição 7.42 (Continuidade Uniforme) Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é **uniformemente contínua** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

para quaisquer $x, x' \in X$.

A diferença em relação à continuidade pontual é decisiva: o mesmo δ deve funcionar simultaneamente para todos os pontos do domínio.

Proposição 7.43 (Heine–Cantor) Se (X, d_X) é compacto, (Y, d_Y) é métrico e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então f é uniformemente contínua.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$, pela continuidade, escolha $r_x > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < r_x \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2.$$

A família $\{B(x, r_x/2) : x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X . Pelo lema do número de Lebesgue, existe $\delta > 0$ tal que qualquer conjunto de diâmetro menor que δ está contido em uma dessas bolas.

Se $d_X(z, z') < \delta$, o conjunto $\{z, z'\}$ está contido em $B(x, r_x/2)$ para algum x . Assim,

$$d_Y(f(z), f(z')) \leq d_Y(f(z), f(x)) + d_Y(f(x), f(z')) < \varepsilon.$$

■

7.7 Produtos e o teorema de Tychonoff

Voltemos agora à topologia geral. A definição por coberturas torna a compacidade particularmente estável sob as construções básicas: subespaços fechados, quocientes e somas finitas se comportam como esperaríamos. O caso realmente profundo é o produto.

7.7.1 Comportamento sob construções

- subespaços fechados de compactos são compactos;
- imagens contínuas — em particular, quocientes — de compactos são compactas;
- somas finitas de compactos são compactas;
- produtos arbitrários de compactos são compactos na topologia produto.

	Subespaço	Quociente	Produto	Soma finita
Compacidade	fechados	sim	sim	sim

Tabela 7.1: Comportamento da compacidade nas construções básicas.

7.7.2 Produto de compactos

O resultado para produtos arbitrários é um dos teoremas centrais da topologia geral.

Teorema 7.44 (de Tychonoff) Se $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de espaços topológicos não vazios, então

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

é compacto na topologia produto se, e somente se, cada X_λ é compacto.

Demonstração. A necessidade já foi observada: cada fator é imagem contínua do produto por uma projeção canônica. A parte substancial é mostrar a recíproca.

Para a recíproca, suponha cada X_λ compacto. Uma sub-base da topologia produto é formada pelos conjuntos

$$\pi_\lambda^{-1}(U), \quad U \subset X_\lambda \text{ aberto.}$$

Pelo Teorema da Sub-Base de Alexander, basta provar que toda cobertura por abertos desse tipo possui subcobertura finita.

Suponha, por contradição, que $\mathcal{U}$ seja uma cobertura sub-básica sem subcobertura finita. Considere a família de complementos

$$\mathcal{C} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Cada membro de $\mathcal{C}$ é um cilindro fechado da forma $\pi_\lambda^{-1}(F)$, e a inexistência de subcobertura finita significa exatamente que $\mathcal{C}$ tem a propriedade da interseção finita.

Para cada λ , seja $\mathcal{F}_\lambda$ a família dos fechados $F \subset X_\lambda$ para os quais $\pi_\lambda^{-1}(F) \in \mathcal{C}$. Essa família tem a propriedade da interseção finita: uma interseção finita vazia em X_λ produziria uma interseção finita vazia dos cilindros correspondentes em X , contrariando a propriedade da interseção finita de $\mathcal{C}$. Pela compacidade de X_λ ,

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_\lambda} F \neq \emptyset.$$

Se $\mathcal{F}_\lambda$ for vazia, entendemos sua interseção como o próprio X_λ , que é não vazio por hipótese. Escolha x_λ nessa interseção. Então o ponto $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ pertence a todo cilindro de $\mathcal{C}$, isto é,

$$x \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Isso contradiz o fato de $\mathcal{U}$ cobrir o produto. ■

Nota sobre escolha. Na prova acima há dois sinais explícitos de princípios de escolha: o lema de Zorn usado no teorema de Alexander e a escolha simultânea dos pontos x_λ . Assim, no quadro usual de ZFC, o argumento não é puramente “construtivo”. A força lógica exata de diferentes versões do teorema de Tychonoff é um tema próprio de teoria dos conjuntos; aqui nos interessa apenas reconhecer que essa dependência existe e não está escondida.

Corolário 7.45 Para todo conjunto de índices Λ , o cubo

$$[0, 1]^\Lambda$$

é compacto na topologia produto.

Exemplo 7.46 (Representação binária) O espaço $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é compacto. A aplicação que associa a uma sequência (a_n) o número

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

é sobrejetiva sobre $[0, 1]$ e é contínua na topologia produto. De fato, se duas sequências coincidem nas primeiras N coordenadas, as imagens diferem por no máximo 2^{-N} . Assim, $[0, 1]$ aparece novamente como imagem contínua de um compacto.

Exemplo 7.47 (Convergência ponto a ponto) Fixe $M > 0$ e um conjunto S . O conjunto de todas as funções

$$f : S \longrightarrow [-M, M]$$

pode ser identificado com $[-M, M]^S$. A topologia produto é exatamente a topologia da convergência ponto a ponto. Pelo teorema de Tychonoff, esse espaço de funções é compacto.

Observação 7.48 (Teorema de Heine–Borel) O teorema de Heine–Borel em $\mathbb{R}^n$ segue rapidamente dos resultados anteriores. Aqui não precisamos da força completa de Tychonoff: o resultado para produtos finitos já é suficiente.

Primeiro,

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

é compacto por ser produto finito de intervalos compactos.

Agora seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Se K é compacto, então é fechado, pois $\mathbb{R}^n$ é Hausdorff, e é limitado, pois todo compacto métrico é limitado. Reciprocamente, se K é fechado e limitado, existe $R > 0$ tal que

$$K \subset [-R, R]^n.$$

O cubo $[-R, R]^n$ é compacto e K é fechado nele; portanto, K é compacto.

A progressão é importante: o intervalo compacto da reta fornece os blocos básicos; os produtos finitos produzem os retângulos compactos de $\mathbb{R}^n$; e Tychonoff mostra que o mesmo mecanismo continua funcionando para famílias arbitrárias de fatores. É a mesma ideia de finitude topológica operando em escalas muito diferentes.

Exercícios

Ex. 7.1 — Seja X um espaço topológico e (x_n) uma sequência convergente para $x \in X$. Prove que

$$\{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é compacto.

Ex. 7.2 — Seja X um conjunto. ??Mostre que, na topologia cofinita, todo subconjunto de X é compacto. ??Na topologia coenumerável de um conjunto não enumerável, determine quais subconjuntos são compactos.

Ex. 7.3 — Se X é compacto, $U \subset X$ é aberto e $\mathcal{F}$ é uma família de fechados com

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset U,$$

mostre que existe uma subfamília finita $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tal que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_0} F \subset U.$$

Ex. 7.4 — Considere $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ com a topologia box. Mostre que esse espaço não é compacto.

Ex. 7.5 — Se $K_1, K_2 \subset X$ são compactos: ??prove que $K_1 \cup K_2$ é compacto; ??prove que, se X é Hausdorff, então $K_1 \cap K_2$ é compacto; ??dê um exemplo mostrando que a hipótese Hausdorff no item anterior não pode simplesmente ser omitida.

Ex. 7.6 — Seja X um conjunto e sejam τ_1, τ_2 topologias compactas Hausdorff sobre X . Mostre que, se $\tau_1 \subset \tau_2$, então $\tau_1 = \tau_2$. Conclua que duas topologias compactas Hausdorff distintas sobre o mesmo conjunto são incomparáveis.

Ex. 7.7 — Considere o subespaço $\Sigma \subset \{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ formado pelos pontos com suporte enumerável. Mostre que Σ é denso em $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ e não é compacto. Mostre que toda sequência em Σ está contida em um subproduto com apenas um conjunto enumerável de coordenadas não triviais. Conclua que Σ é sequencialmente compacto e, portanto, enumeravelmente compacto.

Ex. 7.8 — Mostre que todo subespaço fechado de um espaço sequencialmente compacto é sequencialmente compacto.

Ex. 7.9 — Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e sobrejetiva e X é sequencialmente compacto, prove que Y é sequencialmente compacto.

Ex. 7.10 — Seja $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de espaços sequencialmente compactos. Prove, por um argumento diagonal, que $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ é sequencialmente compacto na topologia produto.

Ex. 7.11 — Mostre que $[0, 1]^{[0, 1]}$ é compacto, mas não é sequencialmente compacto. Para a segunda afirmação, use que $[0, 1]$ tem a mesma cardinalidade que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: indexe coordenadas por subconjuntos $A \subset \mathbb{N}$ e considere a sequência $x_n(A) = 1$ se $n \in A$ e $x_n(A) = 0$ caso contrário. Dada qualquer subsequência, escolha uma coordenada A na qual seus valores alternem.

Ex. 7.12 — Prove que um espaço T_1 é enumeravelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito enumerável possui ponto de acumulação.

Ex. 7.13 — Seja (X, d) compacto e $f : X \rightarrow X$ uma isometria. Mostre primeiro que f é necessariamente sobrejetiva e conclua que f é um homeomorfismo.

7.8 Caracterizações em espaços métricos

Já vimos duas consequências métricas da compacidade. Agora podemos explicar por que, em espaços métricos, a teoria é ainda mais rígida: sequências voltam a enxergar toda a topologia. Nessa classe, a definição por coberturas, a existência de subsequências convergentes e a combinação “completude + limitação total” descrevem exatamente o mesmo fenômeno.

Definição 7.49 (Sequência de Cauchy e Completude) Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (X, d) . Dizemos que (x_n) é de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

O espaço X é **completo** quando toda sequência de Cauchy converge para um ponto de X .

Toda sequência convergente é de Cauchy, em qualquer espaço métrico. A completude afirma que vale também a recíproca: em um espaço completo, uma sequência converge se, e somente se, é de Cauchy.

Exemplos 7.50

1. $\mathbb{R}$ é completo com a métrica usual.
2. $(0, 1]$ não é completo com a métrica usual; por exemplo, $1/n$ é de Cauchy, mas não converge em $(0, 1]$.
3. $\mathbb{N}$, com a métrica induzida de $\mathbb{R}$, é completo.
4. $\mathbb{Q}$, com a métrica usual, não é completo.

Completude não é uma propriedade topológica: duas métricas que induzem a mesma topologia podem ter comportamentos diferentes em relação a sequências de Cauchy.

Exemplo 7.51 O espaço $(0, 1]$ é homeomorfo a $[1, \infty)$ pela aplicação $x \mapsto 1/x$. Transportando a métrica usual de $[1, \infty)$ para $(0, 1]$, obtemos

$$d_*(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

A métrica d_* induz a mesma topologia que a métrica usual em $(0, 1]$, mas $(0, 1], d_*$ é completo, enquanto $(0, 1]$ com a métrica euclidiana não é.

Lema 7.52 Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em (X, d) e possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para x , então $x_n \rightarrow x$.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Como (x_n) é de Cauchy, existe N tal que

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon/2.$$

Escolha k com $n_k \geq N$ e $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$. Para $n \geq N$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon.$$

■

Definição 7.53 (Limitação Total) Um espaço métrico (X, d) é **totalmente limitado** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito $F \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon).$$

O conjunto F pode ser vazio quando $X = \emptyset$.

Limitação total é mais forte que limitação. Ela exige que, em qualquer escala, o espaço inteiro possa ser coberto usando apenas finitos centros. É justamente esse caráter finito que a aproxima da compacidade.

Lema 7.54 Um espaço métrico é totalmente limitado se, e somente se, toda sequência possui uma subsequência de Cauchy.

Demonstração. Suponha X totalmente limitado e seja (x_n) uma sequência. Cubra X por finitas bolas de raio 2^{-1} ; uma delas contém infinitos termos da sequência. Dentro desses termos, cubra novamente X por finitas bolas de raio 2^{-2} e escolha uma que contenha infinitos termos. Prosseguindo, obtemos conjuntos infinitos de índices

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

tais que os pontos x_n com $n \in I_k$ pertencem a uma mesma bola de raio 2^{-k} . Escolha $n_k \in I_k$ com $n_1 < n_2 < \dots$. Se $p, q \geq k$, então $n_p, n_q \in I_k$, e portanto

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) < 2^{1-k}.$$

Logo (x_{n_k}) é de Cauchy.

Reciprocamente, se X não é totalmente limitado, existe $\varepsilon > 0$ tal que nenhuma união finita de bolas de raio ε cobre X . Escolha indutivamente

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \varepsilon).$$

Então $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ para $j \neq k$, e nenhuma subsequência pode ser de Cauchy. ■

Lema 7.55 Todo espaço métrico totalmente limitado possui base enumerável.

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, escolha um conjunto finito $S_n \subset X$ tal que

$$X = \bigcup_{s \in S_n} B(s, 1/n).$$

Então $S = \bigcup_n S_n$ é enumerável e denso. De fato, se U é aberto e $a \in U$, escolha $r > 0$ com $B(a, r) \subset U$ e n tão grande que $1/n < r$. Algum $s \in S_n$ satisfaz $d(a, s) < 1/n < r$, logo $s \in U$.

Um espaço métrico separável possui base enumerável: basta tomar bolas de raios racionais centradas em um conjunto denso enumerável. ■

Lema 7.56 Se X possui base enumerável, são equivalentes:

1. X não é compacto;
2. existe uma cobertura aberta enumerável de X sem subcobertura finita;
3. existe uma sequência de abertos

$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots, \quad U_n \neq X, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Demonstração. As implicações $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ são imediatas. Para $(1) \Rightarrow (2)$, refine uma cobertura sem subcobertura finita por elementos de uma base enumerável; a subfamília de elementos da base obtida é enumerável e ainda não possui subcobertura finita. Enumerando-a como $B_1, B_2, \dots$ e definindo

$$U_n = B_1 \cup \dots \cup B_n,$$

obtemos (3). ■

Proposição 7.57 Para um espaço métrico (X, d) , são equivalentes:

1. X é compacto;
2. toda sequência em X possui uma subsequência convergente;
3. X é completo e totalmente limitado.

Demonstração. $(3) \Rightarrow (2)$. Pela limitação total, toda sequência possui uma subsequência de Cauchy; pela completude, essa subsequência converge.

$(2) \Rightarrow (3)$. Se X não fosse completo, existiria uma sequência de Cauchy não convergente. Pelo Lema 7.52, ela não poderia possuir subsequência convergente. Se X não fosse totalmente limitado, o Lema 7.54 forneceria uma sequência sem subsequência de Cauchy, logo sem subsequência convergente.

$(1) \Rightarrow (2)$. Seja (x_n) uma sequência e defina

$$F_N = \overline{\{x_n : n \geq N\}}.$$

Os conjuntos F_N são fechados, não vazios e decrescentes. Pela compacidade,

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N \neq \emptyset.$$

Escolha x nessa interseção e ponha $n_0 = 0$. Para cada $k \geq 1$, como $x \in F_{n_{k-1}+1}$, podemos escolher $n_k > n_{k-1}$ com

$$x_{n_k} \in B(x, 1/k).$$

Então $x_{n_k} \rightarrow x$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Pelo que já provamos, (2) implica limitação total; pelo lema anterior, X possui base enumerável. Se X não fosse compacto, existiriam abertos

$U_1 \subset U_2 \subset \dots$, todos próprios, cuja união é X . Escolha $x_n \notin U_n$. Se alguma subsequência x_{n_k} convergisse para x , escolheríamos N com $x \in U_N$. Como U_N é aberto, eventualmente $x_{n_k} \in U_N$; mas, para $n_k \geq N$, temos $U_N \subset U_{n_k}$ e $x_{n_k} \notin U_{n_k}$, contradição. ■

Essa equivalência esclarece a diferença entre o caso métrico e o caso geral. Em um espaço métrico compacto, toda sequência contém informação suficiente para detectar compacidade; fora dessa classe, isso pode falhar. Também fica claro por que completude sozinha não basta e por que limitação simples é fraca demais: é a *limitação total*, em todas as escalas, que fornece o ingrediente finito adequado.

Exercícios

Ex. 7.14 — Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é totalmente limitado se, e somente se, é limitado.

Ex. 7.15 — Mostre diretamente que todo espaço métrico totalmente limitado é separável.

Ex. 7.16 — Prove a versão do lema do número de Lebesgue que afirma: se (M, d) é compacto e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta, então existe $r > 0$ tal que, para cada $x \in M$, alguma bola $B(x, r)$ está contida em um U_α .

Ex. 7.17 — Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Considere a métrica discreta d_1 e a métrica d_2 induzida de $\mathbb{R}$. Mostre que (X, d_1) é completo e que (X, d_2) não é completo.

Ex. 7.18 — Seja

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots$$

uma sequência de fechados não vazios em um espaço métrico completo e suponha que

$$\text{diam}(F_n) \rightarrow 0.$$

Prove que $\bigcap_n F_n$ consiste em exatamente um ponto. Mostre também, por meio de um exemplo, como a conclusão pode falhar em um espaço incompleto.

7.9 Compacidade local

Até aqui, a compacidade foi uma propriedade global: uma única cobertura deve controlar o espaço inteiro. Muitos espaços importantes, porém, não são compactos

e ainda assim se comportam como compactos quando observados suficientemente perto de cada ponto. Essa é a ideia de compacidade local.

Definição 7.58 (Compacidade local) Um espaço topológico X é **localmente compacto** quando todo ponto $x \in X$ possui uma base de vizinhanças compactas. Isto é, para toda vizinhança W de x , existe uma vizinhança compacta K de x tal que

$$K \subset W.$$

Há duas convenções frequentes na literatura: alguns autores chamam um espaço de localmente compacto quando cada ponto possui ao menos uma vizinhança compacta. A definição adotada aqui, por bases de vizinhanças compactas, é ligeiramente mais forte em espaços gerais. Em espaços Hausdorff, as duas convenções coincidem, como veremos na Proposição 7.60.

Exemplo 7.59

1. $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto. Para cada x , as bolas fechadas

$$\overline{B}(x, 1/k), \quad k \geq 1,$$

formam uma base de vizinhanças compactas de x , pelo teorema de Heine–Borel.

Assim, compacidade local é estritamente mais fraca que compacidade: para $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto, mas não compacto.

2. $\mathbb{Q}$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}$, não é localmente compacto. Suponha que K fosse uma vizinhança compacta de 0 em $\mathbb{Q}$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset K.$$

Escolha um irracional $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e uma sequência de racionais $q_n \rightarrow \theta$ contida nesse intervalo. Como K é compacto e métrico, alguma subsequência q_{n_k} converge em K para um ponto $q \in \mathbb{Q}$. Vista em $\mathbb{R}$, a mesma subsequência converge para θ ; pela unicidade do limite em $\mathbb{R}$, $q = \theta$, contradição.

Em espaços Hausdorff, basta encontrar uma única vizinhança compacta de cada ponto; a base compacta vem de graça.

Proposição 7.60 (Compacidade Local e Hausdorff) Se X é Hausdorff e $x \in X$ possui uma vizinhança compacta, então x possui uma base de vizinhanças compactas.

Demonstração. Seja K uma vizinhança compacta de x , e escolha um aberto O com $x \in O \subset K$. Tome uma vizinhança aberta arbitrária W de x . O conjunto

$$C = K \setminus W$$

é compacto e não contém x . Pela Proposição 7.34, existem abertos disjuntos $V \ni x$ e $G \supset C$. Substituindo V por $V \cap O$, podemos supor $V \subset K$.

Como G é aberto e $V \cap G = \emptyset$, também $\overline{V} \cap G = \emptyset$. Além disso, K é fechado, pois X é Hausdorff, logo $\overline{V} \subset K$. Como $C \subset G$, segue que

$$\overline{V} \subset K \setminus C \subset W.$$

Assim, $\overline{V}$ é uma vizinhança compacta de x contida em W . ■

7.10 Comportamento da compacidade local

Uma propriedade local deve, idealmente, sobreviver às construções que preservam a estrutura próxima de cada ponto. A compacidade local se comporta bem em várias situações usuais:

- somas — inclusive arbitrárias — de espaços localmente compactos são localmente compactas;
- produtos finitos de espaços localmente compactos são localmente compactos;
- se $q : X \rightarrow Y$ é uma identificação aberta e X é localmente compacto, então Y é localmente compacto;
- subespaços localmente fechados de espaços localmente compactos são localmente compactos.

As três primeiras afirmações seguem diretamente da definição. Numa soma, cada ponto pertence a um somando aberto e fechado, de modo que uma vizinhança compacta no somando continua sendo uma vizinhança compacta na soma. Num produto finito, produtos de vizinhanças compactas formam vizinhanças compactas, pela compacidade de produtos finitos.

Para o quociente, seja $q : X \rightarrow Y$ uma identificação aberta e fixe $y \in Y$. Escolha $x \in q^{-1}(y)$. Dada uma vizinhança W de y , escolha um aberto O com $y \in O \subset W$ e uma vizinhança compacta K de x contida em $q^{-1}(O)$. Se V é aberto com $x \in V \subset K$, então $q(V)$ é aberto, contém y e está contido no compacto $q(K) \subset O \subset W$. Logo $q(K)$ é uma vizinhança compacta de y .

A quarta afirmação será demonstrada em detalhe na subseção seguinte. No caso de quocientes, a abertura da identificação não é um detalhe técnico: sem ela, a compacidade local pode se perder.

Exemplo 7.61 (Identificação fechada) Considere em $\mathbb{R}$ a relação de equivalência que identifica todos os inteiros entre si e não faz nenhuma outra identificação. Denote o quociente por $Y = \mathbb{R}/\sim$ e por p o ponto correspondente a $\mathbb{Z}$. Geometricamente, obtemos uma “rosa” com infinitas pétalas.

A projeção quociente $q : \mathbb{R} \rightarrow Y$ é fechada. De fato, se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, sua saturação $q^{-1}(q(F))$ é F quando $F \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, e é $F \cup \mathbb{Z}$ caso contrário; em ambos os casos é fechada. Pela definição da topologia quociente, isso implica que $q(F)$ é fechado em Y .

Entretanto, Y não é localmente compacto em p . Suponha que K fosse uma vizinhança compacta de p , e escolha um aberto U com $p \in U \subset K$. O aberto saturado $q^{-1}(U)$ contém todos os inteiros. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, escolha

$$t_n \in q^{-1}(U) \cap (n - 1/4, n + 1/4), \quad t_n \neq n.$$

Os intervalos $(n - 1/4, n + 1/4)$ são dois a dois disjuntos, de modo que os pontos escolhidos ficam uniformemente separados entre células distintas.

O conjunto

$$A = \{q(t_n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset K$$

é infinito e não possui ponto de acumulação. De fato, se $y \neq p$, escolha um representante $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ de y . Como os pontos t_n pertencem a intervalos dois a dois separados, podemos escolher um intervalo aberto J em torno de s , disjunto de $\mathbb{Z}$, que encontre no máximo um dos t_n . Como J não contém inteiros, ele é saturado para a relação de equivalência; portanto $q(J)$ é uma vizinhança aberta de y que encontra A em no máximo um ponto.

Para o ponto p , escolha, para cada $n \in \mathbb{Z}$, um número

$$0 < \rho_n < |t_n - n|$$

e ponha

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - \rho_n, n + \rho_n).$$

O conjunto W é aberto, saturado, contém todos os inteiros e não contém nenhum t_n . Portanto $q(W)$ é uma vizinhança aberta de p disjunta de A . Assim A não possui ponto de acumulação, contradizendo Bolzano–Weierstrass para o compacto K .

	Subespaço	Quociente	Produto finito	Soma
Compacidade local	localmente fechados	identificações abertas	sim	sim

Tabela 7.2: Comportamento da compacidade local.

7.10.1 Subespaços localmente fechados

Definição 7.62 (Localmente Fechado) Um subespaço $Y \subset X$ é **localmente fechado** quando é aberto em seu fecho $\overline{Y}$. Equivalentemente, existe um aberto $G \subset X$ tal que

$$Y = G \cap \overline{Y}.$$

Proposição 7.63 (Fechado e compacidade local) Se X é localmente compacto e $F \subset X$ é fechado, então F é localmente compacto.

Demonstração. Fixe $x \in F$ e seja W uma vizinhança de x em F . Existe um aberto $O \subset X$ tal que

$$x \in F \cap O \subset W.$$

Pela compacidade local de X , escolha uma vizinhança compacta K de x em X contida em O . Então $F \cap K$ é uma vizinhança de x em F , está contida em W e é compacta por ser fechada no compacto K .



Proposição 7.64 (Aberto e compacidade local) Se X é localmente compacto e $G \subset X$ é aberto, então G é localmente compacto.

Demonstração. Fixe $x \in G$ e seja W uma vizinhança de x em G . Escolha um aberto $O \subset X$ tal que

$$x \in O \cap G \subset W.$$

Como G é aberto, $O \cap G$ é uma vizinhança de x em X . Pela compacidade local de X , existe uma vizinhança compacta K de x com

$$K \subset O \cap G.$$

Vista como subconjunto de G , a mesma K continua compacta e está contida em W . Logo G é localmente compacto. ■

Observação 7.65 (Interseções mistas) Se X é localmente compacto, $G \subset X$ é aberto e $F \subset X$ é fechado, então $G \cap F$ é localmente compacto: primeiro passe ao aberto G , depois ao fechado $G \cap F$ dentro de G .

Proposição 7.66 Um subconjunto $Y \subset X$ é localmente fechado se, e somente se, pode ser escrito como

$$Y = G \cap F,$$

com G aberto e F fechado em X .

Demonstração. Se Y é localmente fechado, por definição existe aberto G tal que $Y = G \cap \bar{Y}$, e $\bar{Y}$ é fechado.

Reciprocamente, se $Y = G \cap F$ com G aberto e F fechado, então $\bar{Y} \subset F$, e portanto

$$Y \subset G \cap \bar{Y} \subset G \cap F = Y.$$

Logo $Y = G \cap \bar{Y}$, isto é, Y é aberto em seu fecho. ■

Proposição 7.67 (Caracterização da herança) Se X é Hausdorff e $Y \subset X$ é localmente compacto, então Y é localmente fechado em X .

Demonstração. Fixe $y \in Y$. Como Y é localmente compacto, existe uma vizinhança compacta $K \subset Y$ de y . Escolha um aberto $W \subset X$ tal que

$$y \in W \cap Y \subset K.$$

O compacto K , visto como subconjunto de X , é fechado porque X é Hausdorff.

Afirmamos que

$$W \cap \bar{Y} \subset \overline{W \cap Y} \subset K.$$

A segunda inclusão é imediata, pois K é fechado e contém $W \cap Y$. Para a primeira, se $z \in W \cap \bar{Y}$, toda vizinhança V de z encontra Y ; como W também é vizinhança de z , $V \cap W$ encontra Y , isto é, V encontra $W \cap Y$. Logo $z \in \overline{W \cap Y}$.

Portanto $W \cap \bar{Y}$ é uma vizinhança de y em $\bar{Y}$ contida em Y . Como isso vale para todo $y \in Y$, o conjunto Y é aberto em $\bar{Y}$. ■

7.11 Compactificação de Alexandroff

Chegamos agora ao fechamento natural do capítulo. A compacidade local diz que um espaço pode possuir controle compacto em torno de cada ponto sem ser compacto globalmente. A compactificação pergunta se é possível completar esse quadro colocando o espaço, sem deformá-lo, dentro de um espaço compacto maior.

A construção de Alexandroff mostra que, para espaços Hausdorff localmente compactos, um único ponto basta. A construção realiza de forma particularmente concreta a ideia que guiou o capítulo: transformar comportamento “no infinito” em informação topológica controlável.

Definição 7.68 (Compactificação) Uma compactificação de um espaço X é um espaço compacto Y que contém uma cópia homeomorfa e densa de X .

A exigência de densidade impede que a compactificação ganhe regiões superfúas: todo aberto do espaço maior deve continuar sentindo a presença de X .

Exemplo 7.69 (Fecho dentro de um compacto) Suponha que X esteja mergulhado em um compacto K . Seu fecho $\bar{X}^K$ é compacto e contém X densamente. Portanto,

ao estudar compactificações dentro de um compacto dado, podemos sempre substituir K pelo fecho de X .

A construção mais econômica possível acrescenta apenas um ponto.

Definição 7.70 (Compactificação de Alexandroff) Seja X um espaço Hausdorff, localmente compacto e não compacto. Escolha um ponto $\infty \notin X$ e defina

$$X^* = X \cup \{\infty\}.$$

A topologia de Alexandroff em X^* é formada por:

1. todos os abertos de X ;
2. os conjuntos que contêm ∞ e são da forma

$$\{\infty\} \cup (X \setminus K),$$

onde $K \subset X$ é compacto.

Observação 7.71 Como X é Hausdorff, todo compacto $K \subset X$ é fechado. Assim, se $U \subset X^*$ é aberto e contém ∞ , então

$$U \cap X = X \setminus K$$

é aberto em X .

Proposição 7.72 A família descrita na definição anterior é uma topologia em X^* .

Demonstração. O vazio é aberto por pertencer à topologia de X , e X^* é aberto porque seu complemento é o compacto vazio.

Para uniões arbitrárias, se nenhum dos abertos contém ∞ , nada há a provar. Suponha então que algum U_{i_0} contenha ∞ . Para os índices i com $\infty \in U_i$, escreva

$$X^* \setminus U_i = K_i,$$

com K_i compacto em X . Os demais U_j são abertos de X . Assim,

$$X^* \setminus \bigcup_i U_i = \left(\bigcap_{\infty \in U_i} K_i \right) \cap \left(\bigcap_{\infty \notin U_j} (X \setminus U_j) \right).$$

Esse conjunto é fechado em X e está contido no compacto K_{i_0} . Portanto é compacto, e a união $\bigcup_i U_i$ é aberta em X^* .

Para interseções finitas, há três casos. A interseção de dois abertos de X é aberta em X . Se $U = X^* \setminus K$ contém ∞ e $V \subset X$ é aberto, então

$$U \cap V = V \setminus K$$

é aberto em X . Finalmente,

$$(X^* \setminus K_1) \cap (X^* \setminus K_2) = X^* \setminus (K_1 \cup K_2),$$

e $K_1 \cup K_2$ é compacto. ■

Proposição 7.73 (Consistência) O espaço X^* é uma compactificação de X .

Demonstração. A topologia relativa de X em X^* é exatamente a topologia original, logo a inclusão $X \hookrightarrow X^*$ é um mergulho.

Para provar que X^* é compacto, seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta. Algum $U_\infty \in \mathcal{U}$ contém ∞ . Seu complemento

$$K = X^* \setminus U_\infty$$

é compacto em X . Os demais elementos da cobertura cobrem K ; além disso, a interseção de cada um deles com X é aberta em X , pela observação anterior. Portanto essas interseções formam uma cobertura aberta de K em X , da qual podemos extrair uma subcobertura finita. Juntando os correspondentes elementos de $\mathcal{U}$ a U_∞ , obtemos uma subcobertura finita de X^* .

Por fim, X é denso em X^* . Todo aberto não vazio contido em X obviamente encontra X . Se U contém ∞ e não encontrasse X , teríamos $U = \{\infty\}$ e, portanto, $X = X^* \setminus U$ seria compacto, contrariando a hipótese. ■

Proposição 7.74 (Alexandroff e Hausdorff) O espaço X^* é Hausdorff.

Demonstração. Dois pontos de X podem ser separados porque X é Hausdorff. Resta separar $x \in X$ de ∞ . Pela compacidade local e pela Proposição 7.60, escolha uma vizinhança compacta K de x e um aberto V tal que

$$x \in V \subset K.$$

Então V e $X^* \setminus K$ são abertos disjuntos contendo, respectivamente, x e ∞ . ■

Observação 7.75 (Compactificações degeneradas) A hipótese de que X não seja compacto evita uma degeneração. Se X já fosse compacto, o conjunto $\{\infty\} = X^* \setminus X$ seria aberto. Nesse caso, X não seria denso em X^* , e a construção deixaria de ser uma compactificação no sentido adotado aqui.

Definição 7.76 (Compactificação por um ponto) Seja X Hausdorff, localmente compacto e não compacto. Uma compactificação por um ponto de X é uma compactificação Hausdorff Y com a seguinte propriedade: existem um mergulho $f : X \rightarrow Y$ e um ponto $\omega \notin f(X)$ tais que

$$Y = f(X) \cup \{\omega\}.$$

Proposição 7.77 (Caracterização das compactificações por um ponto) Nas condições acima, a densidade pode ser omitida da definição. Basta exigir que Y seja compacto Hausdorff, que $f : X \rightarrow f(X)$ seja um homeomorfismo e que

$$Y = f(X) \cup \{\omega\}.$$

A densidade de $f(X)$ segue automaticamente.

Demonstração. Se $f(X)$ não fosse denso, o único ponto possível fora de seu fecho seria ω , e então $\{\omega\}$ seria aberto. Logo $f(X)$ seria fechado em Y , portanto compacto. Como f é um homeomorfismo, X seria compacto, contradição. ■

Teorema 7.78 (Unicidade) Toda compactificação por um ponto de um espaço Hausdorff, localmente compacto e não compacto é homeomorfa à compactificação de Alexandroff.

Demonstração. Se $Y = f(X) \cup \{\omega\}$ é uma compactificação por um ponto, defina

$$h : Y \longrightarrow X^*, \quad h(\omega) = \infty, \quad h(f(x)) = x.$$

A aplicação h é bijetiva. Como Y é compacto e X^* é Hausdorff, basta provar que h é contínua.

Se $U \subset X^*$ é aberto e não contém ∞ , então

$$h^{-1}(U) = f(U),$$

que é aberto em $f(X)$; como $f(X) = Y \setminus \{\omega\}$ é aberto em Y (o singleton $\{\omega\}$ é fechado em um espaço Hausdorff), $f(U)$ é aberto em Y .

Se $\infty \in U$, escreva $U = X^* \setminus K$ com $K \subset X$ compacto. Então

$$h^{-1}(U) = Y \setminus f(K).$$

O conjunto $f(K)$ é compacto e, como Y é Hausdorff, é fechado. Logo $h^{-1}(U)$ é aberto. ■

Proposição 7.79 Um espaço X é Hausdorff e localmente compacto se, e somente se, é homeomorfo a um subespaço aberto de algum espaço compacto Hausdorff.

Demonstração. Se X é compacto, tome o próprio X . Se X não é compacto, sua compactificação de Alexandroff X^* é compacta Hausdorff e X é aberto em X^* .

Reciprocamente, suponha X aberto em um compacto Hausdorff K . O espaço K é localmente compacto: ele próprio é uma vizinhança compacta de cada ponto, e a Proposição 7.60 fornece uma base de vizinhanças compactas. Pela Proposição 7.64, o aberto X é localmente compacto. A propriedade Hausdorff é hereditária para subespaços.

■

Exemplo 7.80 (Compactificações)

1. A projeção estereográfica mostra que

$$\mathbb{R}^* \cong S^1, \quad (\mathbb{R}^n)^* \cong S^n.$$

2. Como $(0, 1) \cong \mathbb{R}$, temos

$$(0, 1)^* \cong S^1.$$

Em particular, $(0, 1)^*$ não é homeomorfo a $[0, 1]$.

3. Temos

$$(0, 1]^* \cong [0, 1] \quad \text{e} \quad [0, 1)^* \cong [0, 1].$$

Embora $(0, 1]$ e $[0, 1)$ sejam homeomorfos entre si por reflexão, o ponto importante é que a compactificação acrescenta exatamente o extremo ausente.

4. Se

$$X = [0, 1/2) \cup (1/2, 1],$$

então os dois “lados” do ponto removido são ligados pelo único ponto acrescentado na compactificação, e X^* é homeomorfo a $[0, 1]$.

Exercícios

Ex. 7.19 — Mostre explicitamente que $(0, 1]^*$ e $[0, 1)^*$ são homeomorfos a $[0, 1]$.

Ex. 7.20 — Calcule a compactificação de Alexandroff do espaço discreto $\mathbb{N}$. Mostre que ela é homeomorfa ao subespaço

$$\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Ex. 7.21 — Seja X Hausdorff e $K \subset X$ um compacto não vazio. Mostre que o quociente X/K , obtido colapsando K a um ponto, é Hausdorff. Suponha agora que X seja compacto e que K tenha interior vazio. Mostre que X/K é uma compactificação por um ponto de $X \setminus K$.

Ex. 7.22 — Mostre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com a topologia produto, não é localmente compacto. Mais geralmente, prove o seguinte critério: se $\{X_i\}_{i \in I}$ é uma família de espaços Hausdorff não vazios, então $\prod_{i \in I} X_i$ é localmente compacto se, e somente se, cada X_i é localmente compacto e todos, exceto finitos deles, são compactos.

O fio condutor do capítulo pode ser resumido em uma ideia: compacidade transforma informação espalhada por uma cobertura em informação finita. Na reta, essa ideia recupera Heine–Borel e os teoremas clássicos da análise. Em espaços Hausdorff, ela produz rigidez; em espaços métricos, reaparece como controle de seqüências e de escalas; em produtos arbitrários, sobrevive graças ao teorema de Tychonoff.

A compacidade local e a compactificação de Alexandroff completam o percurso. Começamos perguntando como reconhecer, sem usar distância, o comportamento especial de um intervalo fechado. Terminamos vendo que certos espaços não compactos podem adquirir essa mesma rigidez global com a adição de um único ponto.

Redes, filtros e ultrafiltros

Em espaços métricos, sequências parecem enxergar tudo. Elas reconhecem pontos do fecho, detectam continuidade e, nos compactos, sempre possuem subsequências convergentes. Essa eficiência pode sugerir que a topologia seja apenas uma teoria abstrata de sequências. Em espaços topológicos gerais, porém, a sugestão é falsa: uma sequência percorre somente uma cadeia enumerável de estágios, ao passo que uma vizinhança pode impor simultaneamente informações organizadas por um conjunto muito maior e sem ordem linear natural.

Há duas maneiras clássicas de corrigir essa insuficiência. Uma *rede* substitui o conjunto de índices $\mathbb{N}$ por um conjunto dirigido, capaz de acompanhar todas as exigências locais relevantes. Um *filtro* abandona os pontos individuais e registra diretamente os conjuntos nos quais o processo está, em algum sentido, “eventualmente”. As duas linguagens são equivalentes, mas iluminam aspectos diferentes: redes preservam a intuição dinâmica das sequências; filtros tornam argumentos de compacidade e de produto especialmente transparentes.

O percurso deste capítulo vai dessas duas linguagens à sua forma maximal, os ultrafiltros. Ao final, retornaremos à compacidade e obteremos uma segunda demonstração do teorema de Tychonoff. A primeira prova, no Capítulo 7, usa o teorema da sub-base de Alexander; a nova prova mostrará Tychonoff como uma consequência natural da convergência coordenada de ultrafiltros.

8.1 Por que sequências não bastam

Antes de ampliar a noção de sequência, vejamos concretamente o que ela deixa de detectar.

Proposição 8.1 (Um fecho invisível às sequências) Seja I um conjunto não enumerável e considere

$$X = \{0, 1\}^I$$

com a topologia produto, sendo $\{0, 1\}$ discreto. Denote por p o ponto constantemente igual a 1 e seja

$$A = \{x \in X : \{i \in I : x(i) = 1\} \text{ é finito}\}.$$

Então $p \in \overline{A}$, mas nenhuma sequência de pontos de A converge para p .

Demonstração. Uma vizinhança básica de p exige que apenas um número finito de coordenadas, digamos as coordenadas de um conjunto $F \subseteq I$, sejam iguais a 1. O ponto x_F definido por

$$x_F(i) = \begin{cases} 1, & i \in F, \\ 0, & i \notin F, \end{cases}$$

pertence a A e à vizinhança dada. Portanto, toda vizinhança de p encontra A , e assim $p \in \overline{A}$.

Por outro lado, seja (x_n) uma sequência em A . O conjunto

$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{i \in I : x_n(i) = 1\}$$

é enumerável, pois é reunião enumerável de conjuntos finitos. Como I não é enumerável, existe $i_0 \in I \setminus J$. Logo $x_n(i_0) = 0$ para todo n , e a sequência não pode convergir para p , cuja coordenada i_0 vale 1. ■

O problema não é a escolha de uma sequência ruim: *nenhuma* sequência em A alcança topologicamente o ponto p . Para aproximá-lo, precisamos percorrer os subconjuntos finitos de I sem tentar colocá-los artificialmente em uma lista. É exatamente isso que uma rede fará.

8.2 Redes

8.2.1 Conjuntos dirigidos

Definição 8.2 (Conjunto dirigido) Um conjunto dirigido é um conjunto não vazio D munido de uma relação $\preceq$ tal que:

1. $d \preceq d$ para todo $d \in D$;
2. se $d \preceq e$ e $e \preceq f$, então $d \preceq f$;
3. para quaisquer $d, e \in D$, existe $f \in D$ tal que $d \preceq f$ e $e \preceq f$.

Não exigimos antissimetria: dois índices diferentes podem satisfazer $d \preceq e$ e $e \preceq d$.

O símbolo $d \preceq e$ deve ser lido como “ e ocorre depois de d ”. A terceira condição afirma que duas exigências finitas podem ser atendidas em um mesmo estágio posterior. Por indução, o mesmo vale para qualquer família finita de índices.

Exemplos 8.3 (Conjuntos dirigidos)

1. Todo conjunto não vazio totalmente ordenado é dirigido: entre dois elementos, o maior deles é um majorante comum. Em particular, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$, com a ordem usual, são dirigidos.

2. O conjunto

$$\text{Fin}(I) = \{F \subseteq I : F \text{ é finito}\},$$

ordenado por inclusão, é dirigido: $F \cup G$ sucede simultaneamente a F e a G .

3. Se x pertence a um espaço topológico X , a família $\mathcal{N}(x)$ de todas as vizinhanças de x torna-se dirigida pela inclusão reversa:

$$U \preceq V \iff V \subseteq U.$$

Passar a um índice posterior significa, portanto, passar a uma vizinhança menor.

4. Para descrever $t \rightarrow 0^+$, podemos usar $(0, \infty)$ com a relação

$$s \preceq t \iff t \leq s.$$

Nessa direção, os índices posteriores estão mais próximos de zero.

5. Se D e E são dirigidos, então $D \times E$ é dirigido pela ordem coordenada.



Definição 8.4 (Rede) Seja X um conjunto. Uma rede em X é uma função

$$x: D \longrightarrow X,$$

em que D é um conjunto dirigido. Escrevemos x_d em lugar de $x(d)$ e denotamos a rede por $(x_d)_{d \in D}$.

Toda sequência é uma rede, mas o conjunto de índices de uma rede pode ser não enumerável e apenas parcialmente ordenado. Essa flexibilidade permite que os índices registrem informação, e não apenas passagem de tempo.

Definição 8.5 (Eventualmente e frequentemente) Seja $(x_d)_{d \in D}$ uma rede em X e seja $A \subseteq X$.

1. A rede está **eventualmente** em A se existe $d_0 \in D$ tal que $x_d \in A$ sempre que $d \succeq d_0$.
2. A rede está **frequentemente** em A se, para todo $d_0 \in D$, existe $d \succeq d_0$ tal que $x_d \in A$.

As duas noções são complementares: (x_d) não está eventualmente em A se, e somente se, está frequentemente em $X \setminus A$.

Definição 8.6 (Convergência de redes) Uma rede $(x_d)_{d \in D}$ em um espaço topológico X converge para $x \in X$ se está eventualmente em toda vizinhança de x . Escrevemos

$$x_d \longrightarrow x.$$

Um ponto x é um **ponto de aderência** da rede se ela está frequentemente em toda vizinhança de x .

Todo limite é um ponto de aderência, mas a recíproca não vale em geral. Para sequências em espaços primeiro enumeráveis, essa distinção reproduz a diferença familiar entre limite da sequência e limite de uma subsequência. Sem hipóteses de enumerabilidade, o instrumento adequado será uma sub-rede.

Exemplo 8.7 (Rede procurada) Retomemos a Proposição 8.1. Para cada $F \in \text{Fin}(I)$, seja x_F a função indicadora de F . A rede $(x_F)_{F \in \text{Fin}(I)}$, dirigida pela inclusão, converge para o ponto p constantemente igual a 1.

De fato, uma vizinhança básica de p fixa o valor 1 em um conjunto finito F_0 de coordenadas. Se $F \supseteq F_0$, então x_F pertence a essa vizinhança. A rede percorre exatamente a informação finita que uma vizinhança do produto consegue observar.



8.2.2 Fecho, continuidade e separação

As redes restauram, em espaços gerais, as caracterizações familiares por sequências.

Teorema 8.8 (Caracterização do fecho por redes) Sejam $A \subseteq X$ e $x \in X$. Então

$$x \in \overline{A} \iff \text{existe uma rede em } A \text{ que converge para } x.$$

Demonstração. Se uma rede em A converge para x , toda vizinhança de x contém algum termo da rede; logo encontra A , e $x \in \overline{A}$.

Reciprocamente, suponha $x \in \overline{A}$. Considere

$$D = \{(U, a) : U \in \mathcal{N}(x), a \in U \cap A\}$$

e ordene D declarando

$$(U, a) \preceq (V, b) \iff V \subseteq U.$$

O conjunto D é dirigido: dados (U, a) e (V, b) , a vizinhança $U \cap V$ encontra A , e qualquer $c \in A \cap U \cap V$ produz um majorante $(U \cap V, c)$. A rede $y_{(U, a)} = a$ está contida em A . Se W é uma vizinhança de x , escolha $a \in A \cap W$; todos os termos posteriores a (W, a) pertencem a W . Portanto, $y_{(U, a)} \rightarrow x$.



Em espaços primeiro enumeráveis, a rede do teorema pode ser substituída por uma sequência. O resultado seguinte explica por que sequências funcionam tão bem em espaços métricos.

Corolário 8.9 Se x possui uma base enumerável de vizinhanças e $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência em A que converge para x .

Demonstração. Se $(U_n)_{n \geq 1}$ é uma base local enumerável, substitua-a por

$$V_n = U_1 \cap \dots \cap U_n.$$

Então (V_n) continua sendo uma base local e $V_{n+1} \subseteq V_n$. Escolha $a_n \in A \cap V_n$. Toda vizinhança de x contém algum V_N e, para $n \geq N$, temos $a_n \in V_n \subseteq V_N$. Logo $a_n \rightarrow x$. ■

Teorema 8.10 (Continuidade por redes) Para uma função $f: X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos, são equivalentes:

1. f é contínua;
2. para toda rede (x_d) em X e todo $x \in X$,

$$x_d \rightarrow x \implies f(x_d) \rightarrow f(x).$$

Demonstração. Suponha f contínua e $x_d \rightarrow x$. Se V é uma vizinhança de $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x . Eventualmente $x_d \in f^{-1}(V)$ e, portanto, eventualmente $f(x_d) \in V$.

Para a recíproca, suponha que f não seja contínua em algum ponto x . Existe uma vizinhança V de $f(x)$ tal que, para toda $U \in \mathcal{N}(x)$, há um ponto $a \in U$ com $f(a) \notin V$. Considere

$$D = \{(U, a) : U \in \mathcal{N}(x), a \in U, f(a) \notin V\},$$

ordenado pela inclusão reversa das primeiras coordenadas. Esse conjunto é dirigido: dados (U, a) e (W, b) , existe $c \in U \cap W$ tal que $f(c) \notin V$, e $(U \cap W, c)$ sucede aos dois índices. A rede $x_{(U, a)} = a$ converge para x , mas nenhum de seus termos é levado a V . Assim, $f(x_{(U, a)})$ não converge para $f(x)$. ■

Teorema 8.11 (Separação de Hausdorff por redes) Um espaço topológico X é Hausdorff se, e somente se, toda rede em X possui no máximo um limite.

Demonstração. Suponha X Hausdorff e que uma rede (x_d) converja para pontos distintos x e y . Escolha vizinhanças disjuntas U de x e V de y . A rede está eventualmente em U e eventualmente em V ; como o conjunto de índices é dirigido, ela está eventualmente em $U \cap V = \emptyset$, uma contradição.

Reciprocamente, suponha que X não seja Hausdorff. Existem pontos distintos $x, y \in X$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$ para todas as vizinhanças U de x e V de y . Seja

$$D = \{(U, V, z) : U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y), z \in U \cap V\},$$

com

$$(U, V, z) \preceq (U', V', z') \iff U' \subseteq U \text{ e } V' \subseteq V.$$

Esse conjunto é dirigido. De fato, dados (U, V, z) e (U', V', z') , os conjuntos $U \cap U'$ e $V \cap V'$ são vizinhanças de x e y , respectivamente. Logo existe

$$w \in (U \cap U') \cap (V \cap V'),$$

e $(U \cap U', V \cap V', w)$ é um majorante comum. Além disso, depois de um índice cuja primeira coordenada é $U_0 \in \mathcal{N}(x)$, todos os termos pertencem a U_0 ; o mesmo vale para as segundas coordenadas e as vizinhanças de y . Logo a rede $z_{(U, V, z)} = z$ converge simultaneamente para x e para y . ■

Proposição 8.12 (Convergência no produto) Seja $X = \prod_{i \in I} X_i$ com a topologia produto. Uma rede (x_d) em X converge para x se, e somente se,

$$\pi_i(x_d) \longrightarrow \pi_i(x) \quad \text{para todo } i \in I.$$

Demonstração. Se $x_d \rightarrow x$, a convergência de cada rede coordenada segue da continuidade de π_i .

Suponha agora que todas as redes coordenadas convergem. Toda vizinhança de x contém uma vizinhança básica da forma

$$W = \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(U_i),$$

em que $F \subseteq I$ é finito e U_i é uma vizinhança de $\pi_i(x)$. Para cada $i \in F$, existe d_i a partir do qual $\pi_i(x_d) \in U_i$. Se F é não vazio, escolha um índice d_0 posterior a todos os d_i ; se F é vazio, qualquer índice serve. Então $x_d \in W$ para todo $d \succeq d_0$. Logo $x_d \rightarrow x$. ■

O papel da topologia produto é decisivo: uma vizinhança básica impõe apenas finitas condições coordenadas, precisamente o número de condições que a direção do conjunto de índices consegue reunir em um estágio comum.

8.3 Sub-redes e pontos de aderência

Uma subsequência é obtida escolhendo índices cada vez maiores. Para redes, a mesma ideia exige duas condições: os novos índices devem respeitar a direção e devem alcançar estágios arbitrariamente tardios da rede original.

Definição 8.13 (Sub-rede) Seja $(x_d)_{d \in D}$ uma rede. Uma sub-rede de (x_d) é uma rede da forma $(x_{\varphi(e)})_{e \in E}$, em que E é dirigido e

$$\varphi: E \longrightarrow D$$

é crescente e cofinal, isto é:

1. $e_1 \preceq e_2$ implica $\varphi(e_1) \preceq \varphi(e_2)$;
2. para todo $d \in D$, existe $e \in E$ tal que $d \preceq \varphi(e)$.

Como φ é crescente, a segunda condição equivale a afirmar que, para todo $d \in D$, existe $e_0 \in E$ tal que $d \preceq \varphi(e)$ sempre que $e \succeq e_0$.

Quando $D = E = \mathbb{N}$, toda função estritamente crescente $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ produz a subsequência usual. A definição permite, contudo, que uma sub-rede repita termos ou use um conjunto de índices inteiramente diferente.

Proposição 8.14 Toda sub-rede de uma rede convergente converge para o mesmo limite.

Demonstração. Suponha $x_d \rightarrow x$ e seja $(x_{\varphi(e)})_{e \in E}$ uma sub-rede. Dada uma vizinhança U de x , escolha d_0 tal que $x_d \in U$ para $d \succeq d_0$. Pela cofinalidade, existe e_0 com $\varphi(e_0) \succeq d_0$. Se $e \succeq e_0$, o crescimento de φ fornece $\varphi(e) \succeq \varphi(e_0) \succeq d_0$, e portanto $x_{\varphi(e)} \in U$. ■

Teorema 8.15 (Aderência e sub-redes) Um ponto x é ponto de aderência de uma rede $(x_d)_{d \in D}$ se, e somente se, alguma sub-rede de (x_d) converge para x .

Demonstração. Suponha que $(x_{\varphi(e)})_{e \in E}$ seja uma sub-rede convergente para x . Dados uma vizinhança U de x e um índice $d_0 \in D$, escolha $e_0 \in E$ com $\varphi(e_0) \succeq d_0$ e escolha $e_1 \in E$ a partir do qual $x_{\varphi(e)} \in U$. Um índice e posterior a e_0 e e_1 satisfaz

$$\varphi(e) \succeq d_0 \quad \text{e} \quad x_{\varphi(e)} \in U.$$

Logo a rede original está frequentemente em U .

Reciprocamente, suponha que x seja ponto de aderência de (x_d) . Defina

$$E = \{(d, U) : d \in D, U \in \mathcal{N}(x), x_d \in U\}$$

e ordene E por

$$(d, U) \preceq (e, V) \iff d \preceq e \text{ e } V \subseteq U.$$

Esse conjunto é dirigido. De fato, dados (d, U) e (e, V) , escolha $c \succeq d, e$. Como x é ponto de aderência, existe $f \succeq c$ com $x_f \in U \cap V$; então $(f, U \cap V)$ sucede aos dois índices dados.

A função $\varphi: E \rightarrow D$, $\varphi(d, U) = d$, é crescente e cofinal; para a cofinalidade, basta observar que $(d, X) \in E$ para todo $d \in D$. A rede $(x_{\varphi(d, U)})$ converge para x : dada $W \in \mathcal{N}(x)$, escolha d_0 com $x_{d_0} \in W$. Todo índice posterior a (d_0, W) possui segunda coordenada contida em W , e seu termo pertence a essa segunda coordenada. ■

Esse teorema mostra que a noção correta de sub-rede não é um detalhe técnico: ela transforma aderência em convergência, exatamente como subsequências fazem nos espaços métricos.

8.4 Filtros

Redes descrevem aproximação por meio de termos. Filtros registram somente os conjuntos que contêm todos os termos suficientemente tardios. Ao descartar a ordem específica dos índices, retêm exatamente a informação relevante para a convergência.

8.4.1 Filtros e bases de filtros

Definição 8.16 (Filtro) Seja X um conjunto. Um filtro em X é uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$;
2. se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;
3. se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq X$, então $B \in \mathcal{F}$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ devem ser imaginados como conjuntos “grandes”. A interseção de duas condições grandes ainda é grande, e qualquer conjunto que contenha um conjunto grande também é grande. A exclusão de $\emptyset$ evita que todas as partes de X pertençam ao filtro.

Definição 8.17 (Base de filtro) Uma família não vazia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base de filtro se:

1. todo $B \in \mathcal{B}$ é não vazio;
2. para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ com $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

O filtro gerado por $\mathcal{B}$ é

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \{A \subseteq X : B \subseteq A \text{ para algum } B \in \mathcal{B}\}.$$

As duas condições garantem que $\langle \mathcal{B} \rangle$ é realmente um filtro. Como $\mathcal{B}$ é não vazia, o conjunto X pertence ao filtro gerado; a primeira condição exclui o conjunto vazio. A segunda fornece, dentro da interseção de dois elementos do filtro gerado, um novo elemento de $\mathcal{B}$. A estabilidade sob passagem a conjuntos maiores decorre da própria definição.

Exemplos 8.18 (Filtros fundamentais)

1. Se $C \subseteq X$ é não vazio, então

$$\mathcal{F}_C = \{A \subseteq X : C \subseteq A\}$$

é o filtro principal gerado por C . Quando $C = \{x\}$, escrevemos $\mathcal{F}_x$.

2. Se X é infinito, a família dos subconjuntos com complemento finito é o filtro de Fréchet em X .
3. Para x em um espaço topológico X , a família $\mathcal{N}(x)$ de todas as vizinhanças de x é um filtro, chamado **filtro de vizinhanças de x** . Toda base local em x é uma base para esse filtro.
4. Se $(x_d)_{d \in D}$ é uma rede, os conjuntos

$$T_{d_0} = \{x_d : d \succeq d_0\}, \quad d_0 \in D,$$

formam uma base de filtro. Seus elementos são as caudas da rede.



Definição 8.19 (Convergência e aderência de filtros) Seja X um espaço topológico. Um filtro $\mathcal{F}$ em X converge para x , e escrevemos $\mathcal{F} \rightarrow x$, quando

$$\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}.$$

O ponto x é um ponto de aderência de $\mathcal{F}$ quando

$$U \cap A \neq \emptyset \quad \text{para todos } U \in \mathcal{N}(x) \text{ e } A \in \mathcal{F}.$$

Equivalentemente,

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}.$$

Um filtro convergente para x tem x como ponto de aderência, pois $U, A \in \mathcal{F}$ implica $U \cap A \in \mathcal{F}$ e, portanto, $U \cap A \neq \emptyset$. A recíproca pode falhar: aderência afirma apenas que os elementos do filtro passam arbitrariamente perto de x , não que todas as vizinhanças de x já pertençam ao filtro.

Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, dizemos que $\mathcal{G}$ é mais fino que $\mathcal{F}$, ou que $\mathcal{G}$ refina $\mathcal{F}$. Um refinamento declara como grandes ao menos todos os conjuntos que já pertenciam ao filtro original.

Proposição 8.20 (Refinamento convergente) Um ponto x é ponto de aderência de um filtro $\mathcal{F}$ se, e somente se, existe um filtro $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ que converge para x .

Demonstração. Se $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ converge para x , então $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{G}$. Para $U \in \mathcal{N}(x)$ e $A \in \mathcal{F}$, temos $U, A \in \mathcal{G}$, logo $U \cap A \neq \emptyset$. Assim, x é aderente a $\mathcal{F}$.

Reciprocamente, suponha x aderente a $\mathcal{F}$. A família

$$\mathcal{B} = \{U \cap A : U \in \mathcal{N}(x), A \in \mathcal{F}\}$$

é uma base de filtro. De fato, seus elementos são não vazios pela aderência de x , e a interseção de $U_1 \cap A_1$ com $U_2 \cap A_2$ é o elemento da mesma forma obtido com $U_1 \cap U_2$ e $A_1 \cap A_2$. Além disso, tomando $U = X$ ou $A = X$, vemos que o filtro gerado contém $\mathcal{F}$ e $\mathcal{N}(x)$; portanto, converge para x . ■

8.4.2 Imagens e produtos

Definição 8.21 (Filtro imagem) Se $f: X \rightarrow Y$ e $\mathcal{F}$ é um filtro em X , o filtro imagem de $\mathcal{F}$ por f é

$$f_*\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}.$$

As propriedades de filtro seguem das identidades $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, juntamente com a preservação de inclusões por imagens inversas. A definição, além de não exigir que f seja sobrejetiva, interage diretamente com a continuidade.

Proposição 8.22 (Continuidade por filtros) Uma função $f: X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e todo filtro $\mathcal{F}$ em X ,

$$\mathcal{F} \rightarrow x \implies f_*\mathcal{F} \rightarrow f(x).$$

Demonstração. Se f é contínua e V é uma vizinhança de $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x . De $\mathcal{F} \rightarrow x$ segue $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, isto é, $V \in f_*\mathcal{F}$.

Reciprocamente, aplique a hipótese ao filtro $\mathcal{N}(x)$. Para toda vizinhança V de $f(x)$, a convergência de $f_*\mathcal{N}(x)$ implica $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$. Logo f é contínua em x . ■

Proposição 8.23 (Convergência de filtros no produto) Seja $X = \prod_{i \in I} X_i$ com a topologia produto. Um filtro $\mathcal{F}$ em X converge para x se, e somente se,

$$(\pi_i)_*\mathcal{F} \longrightarrow \pi_i(x) \quad \text{para todo } i \in I.$$

Demonstração. A necessidade segue da continuidade das projeções. Para a recíproca, considere uma vizinhança básica

$$W = \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(U_i)$$

de x , com F finito. Como $U_i \in (\pi_i)_*\mathcal{F}$, temos $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$ para todo $i \in F$. A estabilidade por interseções finitas fornece $W \in \mathcal{F}$. Toda vizinhança de x contém uma vizinhança básica desse tipo e, pela terceira propriedade dos filtros, também pertence a $\mathcal{F}$. ■

8.4.3 A equivalência entre redes e filtros

Toda rede determina um filtro sem perda da informação assintótica.

Definição 8.24 (Filtro de eventualidade) O filtro de eventualidade de uma rede $(x_d)_{d \in D}$ é

$$\mathcal{F}_{(x_d)} = \{A \subseteq X : (x_d) \text{ está eventualmente em } A\}.$$

Equivalentemente, é o filtro gerado pelas caudas T_{d_0} .

As caudas formam uma base de filtro: duas delas contêm uma terceira, iniciada depois dos dois índices correspondentes. Portanto, a família acima é de fato um filtro.

Proposição 8.25 Para uma rede (x_d) em X e um ponto $x \in X$:

1. $x_d \rightarrow x$ se, e somente se, $\mathcal{F}_{(x_d)} \rightarrow x$;
2. x é ponto de aderência de (x_d) se, e somente se, é ponto de aderência de $\mathcal{F}_{(x_d)}$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, $\mathcal{F}_{(x_d)} \rightarrow x$ significa que toda vizinhança de x contém uma cauda da rede, isto é, que (x_d) está eventualmente em cada uma dessas vizinhanças. Essa é precisamente a definição de $x_d \rightarrow x$.

Para a segunda, suponha que a rede esteja frequentemente em toda vizinhança U de x . Se $A \in \mathcal{F}_{(x_d)}$, existe d_0 a partir do qual $x_d \in A$. Escolhendo $d \succeq d_0$ com $x_d \in U$, obtemos $x_d \in U \cap A$. Logo x é aderente ao filtro.

Reciprocamente, cada cauda T_{d_0} pertence ao filtro de eventualidade. Se x é aderente a esse filtro, então $U \cap T_{d_0} \neq \emptyset$ para toda vizinhança U e todo d_0 . Isso significa precisamente que a rede está frequentemente em U .

■

A passagem inversa também é possível, e pode ser feita de modo que o filtro de eventualidade obtido seja exatamente o filtro inicial.

Proposição 8.26 (Rede associada a um filtro) Se $\mathcal{F}$ é um filtro em X , existe uma rede (x_d) em X tal que

$$\mathcal{F}_{(x_d)} = \mathcal{F}.$$

Demonstração. Considere

$$D_{\mathcal{F}} = \{(A, a) : A \in \mathcal{F}, a \in A\}$$

com a relação

$$(A, a) \preceq (B, b) \iff B \subseteq A.$$

O conjunto é dirigido: se (A, a) e (B, b) são dados, escolha $c \in A \cap B$; então $(A \cap B, c)$ sucede aos dois. Defina $x_{(A, a)} = a$.

Se $C \in \mathcal{F}$, escolha $c \in C$. Todo termo posterior a (C, c) pertence a C , de modo que $C \in \mathcal{F}_{(x_d)}$.

Por outro lado, suponha que a rede esteja eventualmente em C . Existe (A, a) tal que todo termo posterior a esse índice pertence a C . Se houvesse $b \in A \setminus C$, o

índice (A, b) seria posterior a (A, a) , mas seu termo seria $b \notin C$. Logo $A \subseteq C$ e, como $A \in \mathcal{F}$, concluímos $C \in \mathcal{F}$. ■

Assim, redes e filtros não fornecem teorias concorrentes: para as questões de convergência e aderência tratadas aqui, toda a informação de uma linguagem pode ser transportada para a outra. A escolha entre elas é uma escolha de ponto de vista.

8.5 Ultrafiltros e redes universais

8.5.1 Ultrafiltros

Definição 8.27 (Ultrafiltro) Um ultrafiltro em X é um filtro maximal para a inclusão: se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é um filtro em X , então $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

O ultrafiltro $\mathcal{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ é chamado **ultrafiltro principal** em x . Um ultrafiltro que não é principal é chamado **livre**.

A maximalidade tem uma caracterização muito mais operacional. Um ultrafiltro decide toda pergunta binária sobre subconjuntos de X .

Teorema 8.28 (Dichotomia dos ultrafiltros) Um filtro $\mathcal{U}$ em X é ultrafiltro se, e somente se, para todo $A \subseteq X$,

$$A \in \mathcal{U} \quad \text{ou} \quad X \setminus A \in \mathcal{U}.$$

As duas alternativas nunca ocorrem simultaneamente.

Demonstração. Suponha primeiro que $\mathcal{U}$ seja maximal e que $A \notin \mathcal{U}$. A família $\mathcal{U} \cup \{A\}$ não pode ter a propriedade da interseção finita; caso contrário, geraria um filtro próprio contendo estritamente $\mathcal{U}$. Logo existe $F \in \mathcal{U}$ tal que $F \cap A = \emptyset$. Como $F \subseteq X \setminus A$, segue que $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Reciprocamente, suponha que a dicotomia valha e que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, com $\mathcal{F}$ um filtro. Se $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{U}$, então $X \setminus A \in \mathcal{U}$ e, portanto, $A, X \setminus A \in \mathcal{F}$. Isso obrigaria $\emptyset \in \mathcal{F}$, uma contradição. Logo não existe tal A e $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Por fim, A e $X \setminus A$ não podem pertencer simultaneamente a um filtro, pois sua interseção é vazia. ■

Corolário 8.29 Se $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ é uma partição finita e $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em X , então exatamente um dos conjuntos A_j pertence a $\mathcal{U}$.

Demonstração. Ao menos um pertence: caso contrário, todos os complementos $X \setminus A_j$ pertenceriam a $\mathcal{U}$, e a interseção desses complementos seria vazia. Dois membros distintos da partição não podem ambos pertencer ao filtro, pois são disjuntos. ■

O resultado de existência que torna ultrafiltros úteis é uma aplicação direta do lema de Zorn.

Teorema 8.30 (Lema do ultrafiltro) Todo filtro em um conjunto X está contido em algum ultrafiltro em X .

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ a família dos filtros em X que contêm um filtro dado $\mathcal{F}$, ordenada pela inclusão. A família é não vazia, pois contém $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ é uma cadeia não vazia, então

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{C}} \mathcal{H}$$

é um filtro. De fato, dois de seus elementos pertencem a dois filtros da cadeia; um desses filtros contém o outro e, portanto, contém a interseção dos dois elementos. Além disso, $X \in \mathcal{G}$ e $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Se $A \in \mathcal{G}$ e $A \subseteq B \subseteq X$, algum $\mathcal{H} \in \mathcal{C}$ contém A ; como $\mathcal{H}$ é filtro, também contém B . Logo $B \in \mathcal{G}$. Assim, $\mathcal{G}$ é uma cota superior de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{P}$.

A cadeia vazia também possui cota superior, por exemplo o próprio filtro $\mathcal{F}$. Portanto, toda cadeia de $\mathcal{P}$ possui cota superior em $\mathcal{P}$.

Pelo lema de Zorn, $\mathcal{P}$ possui um elemento maximal. Esse elemento é um ultrafiltro que contém $\mathcal{F}$. ■

Observação 8.31 (Onde entra a escolha) O lema do ultrafiltro é um princípio de escolha: ele não é demonstrável, em geral, apenas a partir dos axiomas de Zermelo–Fraenkel, embora seja mais fraco que o axioma da escolha completo. No quadro usual de ZFC, o argumento acima é legítimo. Voltaremos a esse ponto na prova de Tychonoff, para que a dependência lógica não fique escondida.

Exemplo 8.32 (Ultrafiltros livres) Se X é infinito, o filtro de Fréchet está contido em algum ultrafiltro $\mathcal{U}$. Esse ultrafiltro não pode ser principal. De fato, se fosse principal em x , conteria $\{x\}$; mas o filtro de Fréchet, também contido em $\mathcal{U}$, contém $X \setminus \{x\}$. Isso é impossível em um filtro.

Portanto, uma vez admitido o lema do ultrafiltro, todo conjunto infinito admite ultrafiltros livres.



Proposição 8.33 (Imagem de ultrafiltro) Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em X e $f: X \rightarrow Y$, então $f_*\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em Y .

Demonstração. Para $B \subseteq Y$, a dicotomia aplicada a $f^{-1}(B)$ fornece

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{U} \quad \text{ou} \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{U}.$$

Logo $B \in f_*\mathcal{U}$ ou $Y \setminus B \in f_*\mathcal{U}$. Pelo Teorema 8.28, $f_*\mathcal{U}$ é ultrafiltro.



Proposição 8.34 (Aderência e convergência) Para um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em um espaço topológico X e um ponto $x \in X$, são equivalentes:

1. $\mathcal{U} \rightarrow x$;
2. x é ponto de aderência de $\mathcal{U}$.

Demonstração. Já sabemos que convergência implica aderência para qualquer filtro. Suponha, reciprocamente, que x seja aderente a $\mathcal{U}$. Se alguma vizinhança V de x não pertencesse a $\mathcal{U}$, a dicotomia daria $X \setminus V \in \mathcal{U}$. Mas então

$$V \cap (X \setminus V) = \emptyset,$$

contrariando a aderência de x . Portanto, $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{U}$, isto é, $\mathcal{U} \rightarrow x$. ■

8.5.2 Redes universais

O correspondente de um ultrafiltro na linguagem das redes é uma rede que também decide todos os subconjuntos.

Definição 8.35 (Rede universal) Uma rede $(x_d)_{d \in D}$ em X é uma **rede universal**, ou uma **ultrarede**, se, para todo $A \subseteq X$, ela está eventualmente em A ou eventualmente em $X \setminus A$.

Proposição 8.36 Uma rede é universal se, e somente se, seu filtro de eventualidade é um ultrafiltro.

Demonstração. Pela definição do filtro de eventualidade,

$$A \in \mathcal{F}_{(x_d)} \iff (x_d) \text{ está eventualmente em } A.$$

Assim, a condição de rede universal coincide exatamente com a dicotomia do Teorema 8.28. ■

O lema do ultrafiltro possui uma versão dinâmica.

Teorema 8.37 (Existência de sub-rede universal) Toda rede possui uma sub-rede universal.

Demonstração. Seja $(x_d)_{d \in D}$ uma rede. No próprio conjunto D , considere o filtro das caudas, gerado pelos conjuntos

$$\uparrow d_0 = \{d \in D : d \succeq d_0\}.$$

Pelo lema do ultrafiltro, esse filtro está contido em um ultrafiltro $\mathcal{V}$ sobre D .

Defina

$$E = \{(d, A) : A \in \mathcal{V}, d \in A\}$$

e ordene E por

$$(d, A) \preceq (e, B) \iff d \preceq e \text{ e } B \subseteq A.$$

O conjunto E é dirigido. Com efeito, dados (d, A) e (e, B) , escolha $c \succeq d, e$. O conjunto

$$C = A \cap B \cap (\uparrow c)$$

pertence a $\mathcal{V}$ e é não vazio. Se $f \in C$, então (f, C) sucede aos dois índices dados.

A função $\varphi: E \rightarrow D$, dada por $\varphi(d, A) = d$, é crescente. É também cofinal, pois $\uparrow d_0 \in \mathcal{V}$ e $(d_0, \uparrow d_0) \in E$ para todo $d_0 \in D$. Logo $(x_{\varphi(e)})_{e \in E}$ é uma sub-rede de (x_d) .

Para provar que ela é universal, fixe $C \subseteq X$ e ponha

$$H = \{d \in D : x_d \in C\}.$$

Como $\mathcal{V}$ é ultrafiltro, $H \in \mathcal{V}$ ou $D \setminus H \in \mathcal{V}$. No primeiro caso, escolha $d \in H$. Depois do índice (d, H) , a primeira coordenada de todo índice posterior pertence a H ; logo a sub-rede está eventualmente em C . No segundo caso, o mesmo argumento, aplicado a $D \setminus H$, mostra que ela está eventualmente em $X \setminus C$.

■

8.6 Compacidade revisitada

No Capítulo 7, a compacidade foi definida por coberturas abertas e relacionada à propriedade da interseção finita. Redes e ultrafiltros condensam essas duas formulações em critérios de convergência.

Teorema 8.38 (Caracterizações da compacidade) Para um espaço topológico X , são equivalentes:

1. X é compacto;
2. toda rede em X possui um ponto de aderência;
3. toda rede em X possui uma sub-rede convergente;
4. todo ultrafiltro em X converge;
5. toda rede universal em X converge.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Se $(x_d)_{d \in D}$ é uma rede, denote sua cauda a partir de d por

$$T_d = \{x_e : e \succeq d\}.$$

A família de fechados $(\overline{T_d})_{d \in D}$ tem a propriedade da interseção finita: dada uma família finita de caudas, uma cauda iniciada depois de todos os índices está contida na interseção delas. Pela compacidade, existe

$$x \in \bigcap_{d \in D} \overline{T_d}.$$

Toda vizinhança de x encontra toda cauda, logo x é ponto de aderência da rede.

(2) $\Rightarrow$ (1). Se $X = \emptyset$, a conclusão é imediata. Suponha $X \neq \emptyset$. Seja $\mathcal{C}$ uma família de fechados com a propriedade da interseção finita. Podemos supor $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Considere o conjunto dirigido

$$D = \{(\mathcal{E}, x) : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \text{ é finita e } x \in \bigcap_{C \in \mathcal{E}} C\},$$

com a relação

$$(\mathcal{E}, x) \preceq (\mathcal{H}, y) \iff \mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}.$$

Esse conjunto é dirigido: a união de duas primeiras coordenadas é finita e, pela propriedade da interseção finita, a interseção dos fechados nela registrados contém um ponto. A rede $x_{(\mathcal{E}, x)} = x$ possui, por hipótese, um ponto de aderência p .

Fixe $C_0 \in \mathcal{C}$. A partir de qualquer índice cuja primeira coordenada contenha C_0 , todos os termos pertencem a C_0 . Como p é ponto de aderência, toda vizinhança de p encontra C_0 . Portanto $p \in \overline{C_0} = C_0$. Isso vale para todo $C_0 \in \mathcal{C}$, e assim $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Pela caracterização por fechados, X é compacto.

A equivalência entre (2) e (3) é exatamente o Teorema 8.15.

(1) $\Rightarrow$ (4). Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro, a família

$$\{\bar{A} : A \in \mathcal{U}\}$$

tem a propriedade da interseção finita: para $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U}$, o conjunto $A_1 \cap \dots \cap A_n$ pertence ao filtro, é não vazio e está contido em $\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n$. Pela compacidade, há um ponto $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \bar{A}$. Logo x é aderente a $\mathcal{U}$ e, pela Proposição 8.34, $\mathcal{U} \rightarrow x$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Se $X = \emptyset$, não há o que provar. Suponha $X \neq \emptyset$. Se $\mathcal{C}$ é uma família de fechados com a propriedade da interseção finita, a família

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{C \in \mathcal{E}} C : \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \text{ é finita} \right\},$$

na qual a interseção da família vazia é X , forma uma base de filtro. Pelo lema do ultrafiltro, o filtro gerado por essa base está contido em um ultrafiltro $\mathcal{U}$. Por hipótese, $\mathcal{U} \rightarrow x$ para algum $x \in X$. Se $C \in \mathcal{C}$, então $C \in \mathcal{U}$. Toda vizinhança de x também pertence a $\mathcal{U}$ e, por isso, encontra C . Assim, $x \in \bar{C} = C$. Concluimos que $x \in \bigcap \mathcal{C}$ e que X é compacto.

(4) $\Rightarrow$ (5). O filtro de eventualidade de uma rede universal é ultrafiltro, pela Proposição 8.36. Se esse filtro converge, a própria rede converge, pela Proposição 8.25.

(5) $\Rightarrow$ (4). Dado um ultrafiltro $\mathcal{U}$, tome a rede associada a ele na Proposição 8.26. Seu filtro de eventualidade é $\mathcal{U}$, logo a rede é universal. Por hipótese, ela converge; portanto, $\mathcal{U}$ converge. ■

Corolário 8.39 Se X é compacto e Hausdorff, todo ultrafiltro em X converge para exatamente um ponto.

Demonstração. A existência do limite segue da compacidade. A unicidade segue da propriedade de Hausdorff, aplicada à rede associada ao ultrafiltro. ■

O contraste com sequências agora é nítido. Em espaços métricos, compacidade é equivalente à existência de subsequências convergentes. Em espaços gerais, a formulação correta exige sub-redes — ou, de forma ainda mais econômica, ultrafiltros convergentes.

8.7 Uma segunda prova do teorema de Tychonoff

A prova do Capítulo 7 parte de uma cobertura por abertos sub-básicos. A demonstração a seguir começa com um ultrafiltro no produto e o observa coordenada por coordenada.

Teorema 8.40 (Tychonoff: prova por ultrafiltros) Se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família de espaços compactos, então

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

é compacto na topologia produto.

Demonstração. Se algum fator é vazio, então X é vazio e, portanto, compacto. Suponha que todos os fatores sejam não vazios.

Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro em X . Para cada $i \in I$, considere o ultrafiltro imagem

$$\mathcal{U}_i = (\pi_i)_* \mathcal{U} = \{A \subseteq X_i : \pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}.$$

Ele é de fato um ultrafiltro pela Proposição 8.33. Como X_i é compacto, o Teorema 8.38 fornece um ponto $x_i \in X_i$ tal que

$$\mathcal{U}_i \longrightarrow x_i.$$

Escolha simultaneamente um desses limites em cada coordenada e escreva $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Pela Proposição 8.23, das convergências $(\pi_i)_* \mathcal{U} \rightarrow x_i$ para todo i segue

$$\mathcal{U} \longrightarrow x$$

na topologia produto.

Portanto, todo ultrafiltro em X converge. Novamente pelo Teorema 8.38, o espaço X é compacto. ■

Podemos ver diretamente o coração da prova. Se

$$W = \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(V_i)$$

é uma vizinhança básica de x , então $V_i \in \mathcal{U}_i$ para cada $i \in F$. Logo $\pi_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{U}$ e, como F é finito, $W \in \mathcal{U}$. A topologia produto pede apenas decisões coordenadas em número finito; o ultrafiltro consegue reuni-las.

Observação 8.41 (Escolha e as duas provas) A demonstração usa o lema do ultrafiltro e, quando os fatores não são Hausdorff, escolhe simultaneamente um limite para cada ultrafiltro coordenado. Embora o lema do ultrafiltro seja mais fraco que o axioma da escolha completo, essa seleção simultânea constitui uma aplicação adicional de escolha. Para fatores compactos Hausdorff, os limites coordenados são únicos e essa escolha adicional desaparece.

No quadro usual de ZFC, todas essas escolhas estão disponíveis. A prova anterior, via sub-base de Alexander, também recorre a princípios de escolha. As duas demonstrações não eliminam essa dependência; apenas a organizam de modos conceitualmente diferentes.

Na primeira prova de Tychonoff, a informação finita aparece em cilindros sub-básicos e em interseções finitas de fechados. Nesta segunda, ela aparece na estrutura de um filtro e na forma das vizinhanças básicas do produto. São duas faces do mesmo mecanismo: compacidade permite transformar consistência finita em existência global.

Começamos o capítulo com um ponto do fecho que nenhuma sequência conseguia alcançar. Para encontrá-lo, substituímos o relógio linear de $\mathbb{N}$ por índices adaptados às vizinhanças. Terminamos mostrando que a mesma mudança de linguagem controla produtos arbitrários de compactos. Redes e ultrafiltros não são, portanto, um adendo técnico à teoria: eles revelam a forma geral da convergência topológica.

Exercícios

Ex. 8.1 — Mostre que, em um conjunto dirigido, toda família finita de índices possui um majorante comum.

Ex. 8.2 — Seja D um conjunto dirigido cuja relação não seja antissimétrica. Defina $d \sim e$ quando $d \preceq e$ e $e \preceq d$. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência e que a relação induzida em $D/\sim$ é uma ordem parcial dirigida.

Ex. 8.3 — Para cada $F \in \text{Fin}(\mathbb{N})$, seja $x_F \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definido por

$$x_F(k) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & k \in F, \\ 0, & k \notin F. \end{cases}$$

Ordene $\text{Fin}(\mathbb{N})$ por inclusão. Determine o limite de (x_F) na topologia produto e mostre que a mesma rede não converge para esse limite na topologia da caixa.

Ex. 8.4 — Prove diretamente, usando redes, que: o fecho de um conjunto é fe-

chado; ??uma função $f: X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$; ??a composição de funções contínuas preserva limites de redes.

Ex. 8.5 — Mostre que a composição de duas funções crescentes e cofinais entre conjuntos dirigidos é crescente e cofinal. Conclua que uma sub-rede de uma sub-rede é uma sub-rede da rede original.

Ex. 8.6 — Considere $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ??Mostre que a sequência x_n , dada por $x_n(k) = 1$ se $k = n$ e $x_n(k) = 0$ caso contrário, converge coordenadamente para zero. ??Conclua que $x_n \rightarrow 0$ na topologia produto. ??Mostre que a mesma sequência não converge para zero na topologia da caixa. Explique por que a Proposição 8.12 não contradiz esse fato.

Ex. 8.7 — Seja $(x_d)_{d \in D}$ uma rede convergente e suponha que D possua um subconjunto cofinal enumerável. Construa uma sequência crescente e cofinal (d_n) em D e conclua que (x_{d_n}) é uma sub-rede sequencial convergente. Mostre que a primeira enumerabilidade do espaço, por si só, não garante esse resultado: em um espaço com um único ponto, considere uma rede constante indexada por $\text{Fin}(I)$, com I não enumerável.

Ex. 8.8 — Verifique que a família dos conjuntos coenumeráveis de um conjunto não enumerável é um filtro. Compare-a com o filtro de Fréchet.

Ex. 8.9 — Seja $\mathcal{B}$ uma família não vazia de subconjuntos de X . Mostre que $\mathcal{B}$ é base de filtro se, e somente se, seus elementos são não vazios e toda interseção finita de elementos de $\mathcal{B}$ contém algum elemento de $\mathcal{B}$.

Ex. 8.10 — Seja $f: X \rightarrow Y$ e seja $\mathcal{F}$ um filtro em X . Mostre que $(g \circ f)_* \mathcal{F} = g_*(f_* \mathcal{F})$ para toda função $g: Y \rightarrow Z$.

Ex. 8.11 — Prove que um ultrafiltro $\mathcal{U}$ é principal se, e somente se, contém algum conjunto finito. Conclua que todo ultrafiltro em um conjunto finito é principal.

Ex. 8.12 — Seja X infinito. Use o lema do ultrafiltro para provar que existe um ultrafiltro em X que contém todos os subconjuntos cofinitos de X e não contém nenhum subconjunto finito.

Ex. 8.13 — Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro e sejam $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ tais que $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{U}$. Prove que $A_j \in \mathcal{U}$ para algum j .

Ex. 8.14 — Mostre que uma rede universal que possui um ponto de aderência converge para esse ponto. Deduza novamente a implicação “compacto $\Rightarrow$ toda rede

universal converge”.

Ex. 8.15 — Prove que um espaço X é compacto e Hausdorff se, e somente se, todo ultrafiltro em X converge para exatamente um ponto.

Ex. 8.16 — Seja K compacto, Y Hausdorff e $f: K \rightarrow Y$ contínua. Use ultrafiltros para provar que f é uma aplicação fechada.

Ex. 8.17 — Refaça a prova do teorema de Tychonoff trabalhando apenas com redes universais: tome uma rede universal no produto, projete-a em cada coordenada e use a Proposição 8.12.

Ex. 8.18 — Considere uma família $(X_i)_{i \in I}$ de espaços compactos Hausdorff. Explique por que, na prova do Teorema 8.40, cada ultrafiltro coordenado possui um único limite. Discuta qual escolha ainda foi usada para obter o ultrafiltro inicial no argumento de caracterização da compacidade.

Conexidade

Conexidade é uma propriedade global: ela pergunta se um espaço pode ser decomposto em duas partes abertas que não se encontram. A formulação é simples, mas tem alcance grande. Ela detecta cortes, controla imagens contínuas e fornece invariantes elementares capazes de distinguir espaços que localmente podem parecer semelhantes.

Começaremos por três maneiras equivalentes de reconhecer uma separação: por abertos disjuntos, por conjuntos simultaneamente abertos e fechados e por aplicações para um espaço discreto de dois pontos. Só depois aplicaremos essa linguagem à reta. Em seguida estudaremos componentes, produtos e quocientes, e então passaremos à conexidade por caminhos e às versões locais dessas noções.

9.1 Conjuntos conexos

Definição 9.1 (Conexidade) Um espaço topológico X é **conexo** quando não existem abertos não vazios $U, V \subset X$ tais que

$$X = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Se tais abertos existem, dizemos que X é **desconexo**. Um subconjunto $A \subset X$ é conexo quando é conexo com a topologia de subespaço.

Um par (U, V) como acima é chamado, às vezes, de uma *separação* de X . A definição admite uma forma equivalente que será usada repetidamente.

Proposição 9.2 (Caracterizações da conexidade) Para um espaço topológico X , são equivalentes:

1. X é conexo;
2. os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de X são $\emptyset$ e X ;
3. toda aplicação contínua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, onde $\{0, 1\}$ tem a topologia discreta, é constante.

Demonstração. Se $X = U \cup V$ é uma separação, então $U = X \setminus V$ é simultaneamente aberto e fechado e não é trivial. Reciprocamente, se A é aberto e fechado, não vazio e distinto de X , então

$$X = A \cup (X \setminus A)$$

é uma separação.

Para a terceira condição, se A é um clopen não trivial, sua função indicadora $1_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e não constante. Reciprocamente, se $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e não constante, os conjuntos $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(1)$ formam uma separação de X .

■

Exemplo 9.3 Um espaço discreto com pelo menos dois pontos é desconexo. O espaço de Sierpiński, por outro lado, é conexo: nenhum de seus subconjuntos unitários é ao mesmo tempo aberto e fechado.

9.2 Conexidade e continuidade

A força da noção de conexidade aparece quando aplicamos funções contínuas. Uma função contínua pode dobrar, comprimir e identificar pontos, mas não pode partir uma peça conexa em duas peças separadas.

Teorema 9.4 (Imagem contínua de conexo) Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $A \subset X$ é conexo, então $f(A)$ é conexo.

Demonstração. Restringindo f , basta tratar o caso em que $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva e X é conexo. Se Y tivesse um clopen não trivial C , então $f^{-1}(C)$ seria um clopen não trivial de X , contradição. ■

9.3 Intervalos e a reta

Na reta, conexidade coincide exatamente com a propriedade de não deixar lacunas entre pontos do conjunto. Esse fato transforma a definição abstrata numa caracterização completamente familiar.

Teorema 9.5 Todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é conexo.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $I = U \cup V$ seja uma separação. Escolha $a \in U$ e $b \in V$; trocando os nomes se necessário, suponha $a < b$. Considere

$$S = U \cap [a, b]$$

e seja $c = \sup S$. Como I é um intervalo, $c \in I$, logo $c \in U$ ou $c \in V$.

Se $c \in U$, a abertura relativa de U fornece pontos de U imediatamente à direita de c , contradizendo que c seja uma cota superior de S . Se $c \in V$, a abertura relativa de V fornece uma vizinhança de c em I contida em V . Pela definição de supremo, porém, há pontos de $S \subset U$ arbitrariamente próximos de c pela esquerda, novamente uma contradição. ■

Proposição 9.6 Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, é um intervalo.

Demonstração. Já provamos uma direção. Para a outra, suponha que A não seja um intervalo. Então existem $a, b \in A$ e $c \notin A$ com $a < c < b$. Os conjuntos

$$A \cap (-\infty, c) \quad \text{e} \quad A \cap (c, \infty)$$

são abertos relativos, disjuntos, não vazios e cobrem A . Logo A é desconexo. ■

Exemplo 9.7 Nenhum subconjunto de $\mathbb{Q}$ com mais de um ponto é conexo. De fato, dados $a < b$ no subconjunto, escolha um irracional c entre eles e repita a separação

anterior. Em particular, $\mathbb{Q}$ é **totalmente desconexo**: suas componentes conexas são pontos.

Combinando a conexidade dos intervalos com a preservação por imagens contínuas, obtemos o teorema do valor intermediário.

Corolário 9.8 (Teorema do Valor Intermediário) Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo. Em particular, se $a < b$ e y está entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = y$.

9.4 Uniões, fechos e componentes

A definição de conexidade é global, mas há duas maneiras robustas de produzir novos conjuntos conexos a partir de outros: unir peças que compartilham um ponto e tomar fechos. Esses dois mecanismos também levam naturalmente à noção de componente.

Teorema 9.9 (União de conexos com ponto comum) Se $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de subconjuntos conexos de X e

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset,$$

então $\bigcup_{\lambda} C_\lambda$ é conexo.

Demonstração. Tome $p \in \bigcap_{\lambda} C_\lambda$ e suponha que $C = \bigcup_{\lambda} C_\lambda$ admita uma separação $C = U \cup V$. O ponto comum pertence a uma das partes; suponha $p \in U$. Para cada λ ,

$$C_\lambda = (C_\lambda \cap U) \cup (C_\lambda \cap V).$$

Esses dois conjuntos são abertos relativos em C_λ e são disjuntos. Como $p \in C_\lambda \cap U$, a conexidade de C_λ força $C_\lambda \cap V = \emptyset$. Isso vale para todo λ , logo $V = \emptyset$, contradição. ■

O argumento mostra que o essencial não é a forma dos conjuntos, mas a existência de uma peça comum que impeça a união de se separar. Há variantes em que basta organizar a família por interseções sucessivas; usaremos aqui apenas a forma acima.

Proposição 9.10 Se $C \subset X$ é conexo e

$$C \subset D \subset \overline{C},$$

então D é conexo. Em particular, $\overline{C}$ é conexo.

Demonstração. Suponha que $D = U \cup V$ seja uma separação. Como C é conexo, ele está inteiramente contido em um dos dois conjuntos, digamos $C \subset U$. Como V é aberto em D e não encontra C , também não pode encontrar $\overline{C} \cap D$. Mas $D \subset \overline{C}$, logo $V = \emptyset$, contradição. ■

9.4.1 Componentes conexas

Definição 9.11 (Componente conexa) A componente conexa de $x \in X$ é a união de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x .

A proposição anterior mostra que essa união é conexa, pois todos os conjuntos que a formam contêm x . Assim, a componente de x é o maior subconjunto conexo de X que contém esse ponto.

Proposição 9.12 As componentes conexas de X formam uma partição de X . Além disso, toda componente conexa é fechada.

Demonstração. Se as componentes C_x e C_y se intersectam, então $C_x \cup C_y$ é conexo. Pela maximalidade, $C_x = C_y$. Logo componentes distintas são disjuntas e, como cada ponto pertence à sua componente, elas particionam X .

Por outro lado, $\overline{C_x}$ é conexo e contém x . Pela maximalidade de C_x , temos $\overline{C_x} = C_x$, logo C_x é fechada. ■

Componentes não precisam ser abertas. Em $\mathbb{Q}$, por exemplo, elas são singletons, que não são abertos na topologia usual relativa.

9.5 Produtos, quocientes e somas

Proposição 9.13 Uma imagem contínua de um espaço conexo é conexa. Em particular, todo quociente de um espaço conexo é conexo.

Essa já é uma consequência do teorema anterior. Para produtos, a situação é ainda melhor: não há restrição sobre o número de fatores.

Teorema 9.14 (Produtos de conexos) Se $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família não vazia de espaços não vazios, então

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

é conexo se, e somente se, cada X_λ é conexo.

Demonstração. Se o produto é conexo, cada fator é conexo por ser imagem contínua do produto por uma projeção.

Reciprocamente, suponha todos os fatores conexos e fixe $a = (a_\lambda)$ no produto. Para cada subconjunto finito $F \subset \Lambda$, seja X_F o conjunto dos pontos que podem diferir de a apenas nas coordenadas de F . Então X_F é homeomorfo ao produto finito $\prod_{\lambda \in F} X_\lambda$, logo é conexo. Todos os X_F contêm a , portanto

$$D = \bigcup_{F \subset \Lambda, F \text{ finito}} X_F$$

é conexo.

O conjunto D é denso no produto: um aberto básico restringe apenas finitíssimas coordenadas, e podemos escolher nelas um ponto adequado, mantendo as demais coordenadas iguais às de a . Como o fecho de um conexo é conexo, $\overline{D} = \prod X_\lambda$ é conexo. ■

As somas têm o comportamento oposto.

Proposição 9.15 Uma soma disjunta de espaços não vazios é conexa se, e somente se, há apenas um somando e esse somando é conexo.

Demonstração. Cada somando é aberto e fechado na soma. Assim, se há pelo menos dois somandos não vazios, qualquer um deles é um clopen não trivial. ■

	Subespaços	Quocientes	Produtos	Somas
Conexo	Não	Sim	Sim	Não

9.6 Conexidade por caminhos

Conexidade proíbe uma separação por abertos. Conexidade por caminhos exige algo mais concreto: que possamos viajar continuamente entre quaisquer dois pontos.

Definição 9.16 (Caminho) Um caminho em X é uma aplicação contínua

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X.$$

Se $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, dizemos que γ liga x a y .

Definição 9.17 (Conexidade por caminhos) Um espaço X é **conexo por caminhos** se, dados $x, y \in X$, existe um caminho que liga x a y .

Dois caminhos podem ser colados quando o final do primeiro coincide com o início do segundo.

Proposição 9.18 (Concatenação) Se γ liga x a y e η liga y a z , então

$$(\gamma * \eta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \eta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um caminho de x a z .

Demonstração. As duas fórmulas são contínuas em seus intervalos de definição e coincidem em $t = 1/2$, onde ambas assumem o valor y . O lema da colagem garante a continuidade da concatenação. ■

A existência de caminhos define uma relação de equivalência: dois pontos são equivalentes quando podem ser ligados por um caminho. Suas classes são as **componentes conexas por caminhos**.

Exemplo 9.19 O espaço $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos: o segmento

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty$$

liga x a y .

Exemplo 9.20 Se $n \geq 2$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ é enumerável, então $\mathbb{R}^n \setminus E$ é conexo por caminhos. Dados $x, y \notin E$, escolha z fora da união das retas que passam por x e algum ponto de E , das retas que passam por y e algum ponto de E , e da reta que passa por x e y . Essa é uma união enumerável de retas e não cobre $\mathbb{R}^n$. Os segmentos $[x, z]$ e $[z, y]$ evitam E ; sua concatenação fornece o caminho desejado.

Proposição 9.21 Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Demonstração. Fixe $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$, escolha um caminho γ_x de x_0 a x . A imagem $\gamma_x([0, 1])$ é conexa, pois é imagem contínua do intervalo. Todas essas imagens contêm x_0 e sua união é X . Pelo lema do ponto comum, X é conexo. ■

A recíproca falha. O exemplo clássico é pequeno na definição e rico no que ensina.

Exemplo 9.22 (A curva seno do topólogo) Considere

$$S = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2.$$

A primeira parte é a imagem contínua de $(0, \infty)$ e, portanto, é conexa. O conjunto S é exatamente seu fecho, logo também é conexo.

Entretanto, S não é conexo por caminhos. Suponha que $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ ligue um ponto do segmento vertical a um ponto da curva. Seja

$$t_0 = \max\{t : u(t) = 0\}.$$

Para $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0 , temos $u(t) > 0$, enquanto $u(t) \rightarrow 0$ quando $t \downarrow t_0$. Pela propriedade do valor intermediário de u , em intervalos arbitrariamente pequenos à direita de t_0 a função u assume valores x para os quais $\sin(1/x) = 1$ e também valores para os quais $\sin(1/x) = -1$. Assim existem sequências $s_n, t_n \downarrow t_0$ com

$$v(s_n) = 1, \quad v(t_n) = -1.$$

A continuidade de v em t_0 exigiria simultaneamente $v(t_0) = 1$ e $v(t_0) = -1$, absurdo.

Nesse exemplo há uma única componente conexa, mas duas componentes conexas por caminhos: a curva oscilante e o segmento vertical. A componente dada pela curva não é fechada. Isso mostra uma diferença importante: componentes conexas são sempre fechadas; componentes por caminhos, não.

Exemplo 9.23 (Espaço pente) Seja $K = \{1/n : n \geq 1\}$ e considere

$$P_2 = ((0, 1] \times \{0\}) \cup (K \times [0, 1]), \quad P_1 = \{0\} \times (0, 1],$$

com $P = P_1 \cup P_2$. O conjunto P_2 é conexo e $P_2 \subset P \subset \overline{P_2}$, logo P é conexo. Por outro lado, um ponto de P_1 não pode ser ligado por caminho a um ponto de P_2 : qualquer tentativa de alcançar a base teria de atravessar o ponto ausente $(0, 0)$. Portanto P não é conexo por caminhos.

O lema do ponto comum continua válido com “conexo” substituído por “conexo por caminhos”.

Proposição 9.24 Se $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de subconjuntos conexos por caminhos e $\bigcap_\lambda C_\lambda \neq \emptyset$, então $\bigcup_\lambda C_\lambda$ é conexo por caminhos.

Demonstração. Escolha p na interseção. Dados x, y na união, existem índices λ e μ com $x \in C_\lambda$ e $y \in C_\mu$. Dentro de C_λ há um caminho de x a p , e dentro de C_μ há um caminho de p a y . A concatenação desses caminhos permanece na união e liga x a y .



Proposição 9.25 Um produto arbitrário de espaços não vazios é conexo por caminhos se, e somente se, cada fator é conexo por caminhos.

Demonstração. Uma direção segue das projeções. Para a outra, dados $x = (x_\lambda)$ e $y = (y_\lambda)$, escolha para cada λ um caminho $\gamma_\lambda : [0, 1] \rightarrow X_\lambda$ de x_λ a y_λ . A aplicação

$$\gamma(t) = (\gamma_\lambda(t))_{\lambda \in \Lambda}$$

é contínua pela propriedade universal da topologia produto e liga x a y . ■

9.7 Conexidade local

Conexidade global não controla automaticamente a forma das vizinhanças. Para descrever espaços que permanecem “em uma peça” quando ampliamos a região em torno de cada ponto, precisamos de uma condição local.

Definição 9.26 (Conexidade local) Um espaço X é **localmente conexo** se todo ponto possui uma base de vizinhanças abertas e conexas. É **localmente conexo por caminhos** se todo ponto possui uma base de vizinhanças abertas e conexas por caminhos.

Todo espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo. A recíproca não é verdadeira em geral.

A caracterização seguinte transforma uma definição local numa afirmação sobre componentes.

Proposição 9.27 Um espaço X é localmente conexo se, e somente se, toda componente conexa de todo aberto $U \subset X$ é aberta em X .

Demonstração. Suponha X localmente conexo e seja C uma componente de um aberto U . Para $x \in C$, escolha uma vizinhança aberta conexa V com $x \in V \subset U$. Como V encontra C , a maximalidade da componente implica $V \subset C$. Logo C é aberta.

Reciprocamente, dado $x \in U$ aberto, tome a componente C de U que contém x . Por hipótese, C é aberta; sendo conexa e contida em U , ela fornece a vizinhança básica desejada. ■

A mesma caracterização vale para conexidade local por caminhos.

Proposição 9.28 Um espaço X é localmente conexo por caminhos se, e somente se, as componentes conexas por caminhos de todo aberto são abertas.

Corolário 9.29 Se X é localmente conexo por caminhos, então todo aberto conexo de X é conexo por caminhos. Em particular, se X é conexo e localmente conexo por caminhos, então X é conexo por caminhos.

Demonstração. As componentes por caminhos de um aberto são abertas. Se o aberto é conexo, ele não pode ser união de duas ou mais componentes abertas disjuntas; portanto há uma única componente por caminhos. ■

9.7.1 Comportamento topológico

Subespaços arbitrários não preservam conexidade local. Por exemplo, $\{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ não é localmente conexo em 0, embora $\mathbb{R}$ seja. Subespaços abertos, porém, preservam tanto conexidade local quanto conexidade local por caminhos.

A conexidade local também é preservada por quocientes.

Proposição 9.30 Se $q : X \rightarrow Y$ é uma aplicação quociente e X é localmente conexo, então Y é localmente conexo. O mesmo vale para conexidade local por caminhos.

Demonstração. Seja $U \subset Y$ aberto. Então $q^{-1}(U)$ é aberto em X . Suponha primeiro X localmente conexo e seja C uma componente conexa de U . Cada componente de $q^{-1}(U)$ é aberta. A imagem de uma dessas componentes por q é conexa e, portanto, está contida em uma componente de U . Assim $q^{-1}(C)$ é união de componentes de $q^{-1}(U)$, logo é aberto. Como q é quociente, C é aberto. Pela caracterização anterior, Y é localmente conexo.

O mesmo argumento, substituindo componentes conexas por componentes conexas por caminhos, prova a segunda afirmação. ■

Produtos finitos preservam conexidade local e conexidade local por caminhos. Para produtos infinitos, essa conclusão pode falhar.

Exemplo 9.31 Cada espaço discreto $\{0, 1\}$ é localmente conexo e localmente conexo por caminhos. Entretanto,

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

com a topologia produto não é localmente conexo: todo aberto básico deixa infinitas coordenadas livres e, por isso, é desconexo. Esse é o espaço de Cantor.

Somas arbitrárias preservam as duas propriedades locais, pois cada somando é um subespaço aberto e fechado.

	Subespaços	Quocientes	Produtos	Somas
Localmente conexo	abertos	Sim	finitos	Sim
Localmente conexo por caminhos	abertos	Sim	finitos	Sim

Exercícios

Ex. 9.1 — Sejam $\tau_1 \subset \tau_2$ topologias no mesmo conjunto X . Determine quais implicações entre conexidade de (X, τ_1) e de (X, τ_2) são válidas.

Ex. 9.2 — Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos de X tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todos i, j . Mostre que $\bigcup_i A_i$ é conexo.

Ex. 9.3 — Se $C \subset X$ é conexo e encontra tanto A quanto $X \setminus A$, mostre que C encontra a fronteira de A .

Ex. 9.4 — Mostre que um conjunto infinito com a topologia cofinita é conexo.

Ex. 9.5 — Mostre que toda função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, com $\mathbb{N}$ discreto, é constante.

Ex. 9.6 — Se $A \subset X$ é aberto, fechado, conexo e não vazio, mostre que A é uma componente conexa de X .

Ex. 9.7 — Use pontos de corte para mostrar que $(0, 1)$ e $(0, 1]$ não são homeomorfos.

Ex. 9.8 — Mostre que nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a S^1 .

Ex. 9.9 — Para $n > 1$, mostre que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ não são homeomorfos. Sugestão: remova um ponto e compare a conexidade do que resta.

Ex. 9.10 — Se $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é contínua, mostre que f possui um ponto fixo.

Ex. 9.11 — Se $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, mostre que existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Ex. 9.12 — Prove que a imagem contínua e sobrejetiva de um espaço conexo por caminhos é conexa por caminhos.

Ex. 9.13 — Mostre que o fecho de um conjunto conexo por caminhos pode deixar de ser conexo por caminhos.

Ex. 9.14 — Prove que $\prod_i X_i$ é conexo por caminhos se, e somente se, cada X_i é conexo por caminhos.

Ex. 9.15 — Seja $n > 1$ e $A \subset \mathbb{R}^n$ enumerável. Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus A$ é conexo por caminhos.

Ex. 9.16 — Mostre que um conjunto infinito enumerável com a topologia cofinita é conexo, mas não é conexo por caminhos.

O capítulo separou três níveis de informação. A conexidade impede decomposições globais por abertos; a conexidade por caminhos exige uma ligação contínua explícita entre pontos; e as versões locais pedem que esse comportamento já apareça em vizinhanças arbitrariamente pequenas. A diferença entre esses níveis — visível na curva seno do topólogo e no espaço pente — será importante quando passarmos a espaços com estrutura geométrica mais rica e, depois, à topologia algébrica.

Espaços Regulares e Normais

Os axiomas T_0 , T_1 e T_2 dizem quanto os abertos conseguem distinguir *pontos*. As próximas condições aumentam a escala: em vez de separar dois pontos, perguntam se um ponto pode ser separado de um fechado e, depois, se dois fechados disjuntos podem ser separados entre si.

Essa mudança de escala tem uma consequência decisiva. Regularidade e normalidade não servem apenas para produzir vizinhanças disjuntas: elas permitem construir *funções contínuas* que realizam a separação. O lema de Urysohn e o teorema de extensão de Tietze são as duas manifestações centrais dessa ideia. No final do capítulo, ela nos levará aos espaços de Tychonoff e à compactificação de Stone–Čech.

10.1 Espaços regulares

$$F \subset U, \quad x \in V.$$

Dizemos que X é T_3 quando é regular e T_1 .

A condição T_1 não faz parte da definição de regularidade adotada aqui. Essa convenção separa duas ideias distintas: regularidade controla a separação entre pontos e fechados; T_1 garante que os próprios pontos sejam fechados.

Exemplo 10.2

1. Todo espaço discreto é T_3 .
2. Todo espaço métrico é T_3 .
3. Um espaço indiscreto é regular, mas, se possui mais de um ponto, não é T_1 e portanto não é T_3 .
4. O espaço de Sierpiński não é regular.

A forma mais prática de usar regularidade é “encolher” uma vizinhança sem deixar seu fecho escapar.

Proposição 10.3 (Caracterizações da regularidade) Para um espaço topológico X , são equivalentes:

1. X é regular;
2. se $x \in U$ e U é aberto, existe um aberto V tal que

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U;$$

3. todo ponto possui uma base de vizinhanças fechadas.

Demonstração. Suponha X regular e tome $x \in U$ aberto. O conjunto $F = X \setminus U$ é fechado e não contém x . Escolha abertos disjuntos $V \ni x$ e $W \supset F$. Como $V \cap W = \emptyset$, temos

$$x \in V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U.$$

Isso prova a segunda condição. Ela implica a terceira, pois os fechamentos $\overline{V}$ assim obtidos são vizinhanças fechadas que refinam qualquer vizinhança aberta de x .

Reciprocamente, seja F fechado e $x \notin F$. Pela terceira condição, existe uma vizinhança fechada K de x contida em $X \setminus F$. Escolha um aberto V com $x \in V \subset K$. Então V e $X \setminus K$ são abertos disjuntos, contendo respectivamente x e F .



Proposição 10.4 Todo subespaço de um espaço regular é regular. Consequentemente, todo subespaço de um espaço T_3 é T_3 .

Demonstração. Se $S \subset X$, A é fechado em S e $x \in S \setminus A$, escreva $A = S \cap F$ com F fechado em X . Como $x \notin F$, a regularidade de X fornece abertos disjuntos U, V com $F \subset U$ e $x \in V$. As interseções $U \cap S$ e $V \cap S$ são abertos disjuntos em S , contendo respectivamente A e x . ■

Proposição 10.5 Um produto arbitrário de espaços regulares é regular. Portanto, um produto arbitrário de espaços T_3 é T_3 .

Demonstração. Seja $X = \prod_{i \in I} X_i$, suponha cada X_i regular e tome um aberto U que contém $x = (x_i)$. Escolha um aberto básico

$$x \in B = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) \subset U,$$

com J finito. Para cada $j \in J$, pela regularidade de X_j , escolha um aberto V_j com

$$x_j \in V_j \subset \overline{V_j} \subset U_j.$$

Então

$$V = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(V_j)$$

é aberto, contém x e satisfaz $\overline{V} \subset B \subset U$. Pela caracterização anterior, o produto é regular. ■

10.2 Espaços normais

Regularidade separa um ponto de um fechado. Normalidade pede a mesma possibilidade para dois fechados.

Definição 10.6 (Normalidade) Um espaço topológico X é **normal** se, dados fechados disjuntos $A, B \subset X$, existem abertos disjuntos U, V tais que

$$A \subset U, \quad B \subset V.$$

Dizemos que X é T_4 quando é normal e T_1 .

Exemplo 10.7 Todo espaço métrico é normal. Se A e B são fechados disjuntos, as funções $x \mapsto d(x, A)$ e $x \mapsto d(x, B)$ são contínuas, e os conjuntos

$$U = \{x : d(x, A) < d(x, B)\}, \quad V = \{x : d(x, B) < d(x, A)\}$$

são abertos disjuntos contendo, respectivamente, A e B . Assim todo espaço métrico é T_4 .

Exemplo 10.8 Todo espaço compacto Hausdorff é normal. De fato, o capítulo de compacidade mostrou que um ponto e um compacto disjunto podem ser separados por abertos; uma segunda aplicação da compacidade separa então dois compactos disjuntos. Como, em um compacto Hausdorff, os fechados são compactos, obtemos normalidade.

A normalidade também possui uma forma de encolhimento.

Proposição 10.9 (Caracterização da normalidade) Um espaço X é normal se, e somente se, sempre que $F \subset U$, com F fechado e U aberto, existe um aberto V tal que

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Demonstração. Se X é normal, separe os fechados F e $X \setminus U$ por abertos disjuntos V e W . Então

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U.$$

Reciprocamente, dados fechados disjuntos F, G , aplique a hipótese a $F \subset X \setminus G$. Obtenha um aberto V com $F \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus G$. Então V e $X \setminus \overline{V}$ são abertos disjuntos contendo F e G . ■

Exemplo 10.10 (A reta de Sorgenfrey) A reta de Sorgenfrey é normal. Se A e B são fechados disjuntos, para cada $a \in A$ escolha $a' > a$ de modo que $[a, a') \cap B = \emptyset$,

e para cada $b \in B$ escolha $b' > b$ com $[b, b') \cap A = \emptyset$. Então

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, a'), \quad V = \bigcup_{b \in B} [b, b')$$

são abertos contendo A e B . Se $a < b$, a condição $[a, a') \cap B = \emptyset$ força $a' \leq b$; se $b < a$, analogamente $b' \leq a$. Logo os intervalos usados na construção de U e V são sempre disjuntos, e $U \cap V = \emptyset$.

Normalidade não é hereditária para subespaços arbitrários, mas é para subespaços fechados.

Proposição 10.11 Todo subespaço fechado de um espaço normal é normal. Em particular, todo subespaço fechado de um espaço T_4 é T_4 .

Demonstração. Se S é fechado em X e A, B são fechados disjuntos em S , então A e B também são fechados em X . Separe-os em X por abertos disjuntos e intersecte esses abertos com S . ■

A normalidade também desce por certas aplicações.

Proposição 10.12 Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, fechada e sobrejetiva e X é normal, então Y é normal.

Demonstração. Sejam $A, B \subset Y$ fechados disjuntos. Os conjuntos $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são fechados disjuntos em X . Escolha abertos disjuntos U, V que os contenham. Defina

$$U' = Y \setminus f(X \setminus U), \quad V' = Y \setminus f(X \setminus V).$$

Como f é fechada, U' e V' são abertos. Além disso, $A \subset U'$ e $B \subset V'$. Finalmente, $f^{-1}(U') \subset U$ e $f^{-1}(V') \subset V$, de modo que $U' \cap V' = \emptyset$ pela sobrejetividade de f . ■

A propriedade de Lindelöf fornece um critério útil para promover regularidade a normalidade.

Teorema 10.13 (Regular + Lindelöf implica normal) Todo espaço regular e Lindelöf é normal.

Demonstração. Sejam A, B fechados disjuntos. Pela regularidade, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a tal que

$$a \in U_a, \quad \overline{U_a} \cap B = \emptyset.$$

Como A é fechado em um espaço Lindelöf, é Lindelöf. Escolha uma subcobertura enumerável $U_1, U_2, \dots$ de A . Do mesmo modo, escolha abertos $V_1, V_2, \dots$ cobrindo B com $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$.

Defina

$$U = \bigcup_{n \geq 1} \left(U_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{V_k} \right),$$

$$V = \bigcup_{n \geq 1} \left(V_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \overline{U_k} \right).$$

Cada termo das uniões é aberto. Como os fechos $\overline{V_k}$ não encontram A , temos $A \subset U$; analogamente, $B \subset V$.

Se um ponto pertencesse simultaneamente ao termo de índice n da primeira união e ao termo de índice m da segunda, então, se $n \leq m$, o segundo termo o excluiria por pertencer a $\overline{U_n}$; se $m < n$, o primeiro o excluiria por pertencer a $\overline{V_m}$. Portanto $U \cap V = \emptyset$.

■

10.3 O lema de Urysohn

O lema de Urysohn reforça a separação por abertos: em um espaço normal, dois fechados disjuntos podem ser distinguidos por uma função contínua com valores em $[0, 1]$ que assume os valores 0 e 1 sobre eles.

Teorema 10.14 (Lema de Urysohn) Um espaço topológico X é normal se, e somente se, para quaisquer fechados disjuntos $A, B \subset X$ existe uma função contínua

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

tal que $f|_A = 0$ e $f|_B = 1$.

Demonstração. Suponha primeiro X normal. Seja D o conjunto dos números diádicos de $[0, 1]$. Construiremos abertos $(U_r)_{r \in D}$ tais que

$$A \subset U_0, \quad \overline{U_r} \subset U_s \quad (r < s), \quad U_1 = X \setminus B.$$

Pela caracterização da normalidade, escolha primeiro U_0 com

$$A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset X \setminus B = U_1.$$

Tendo construído os abertos nos diádicos de denominador 2^n , insira entre cada par consecutivo $r < s$ um aberto $U_{(r+s)/2}$ satisfazendo

$$\overline{U_r} \subset U_{(r+s)/2} \subset \overline{U_{(r+s)/2}} \subset U_s.$$

Isso é possível novamente pela normalidade.

Defina

$$f(x) = \inf(\{r \in D : x \in U_r\} \cup \{1\}).$$

Como $A \subset U_0$, temos $f = 0$ em A . Como B não encontra nenhum U_r com $r \leq 1$, temos $f = 1$ em B .

Resta verificar a continuidade. Para $a \in (0, 1]$,

$$\{x : f(x) < a\} = \bigcup_{r < a} U_r,$$

que é aberto. Para $b \in [0, 1)$,

$$\{x : f(x) > b\} = \bigcup_{r > b} (X \setminus \overline{U_r}),$$

que também é aberto. Esses conjuntos formam uma sub-base da topologia de $[0, 1]$, logo f é contínua.

Reciprocamente, se tal função existe para todo par de fechados disjuntos, tome

$$U = f^{-1}([0, 1/3)), \quad V = f^{-1}((2/3, 1]).$$

São abertos disjuntos contendo A e B . Portanto X é normal. ■

O lema de Urysohn transforma separação topológica em uma coordenada real. Essa ideia aparecerá novamente na completa regularidade e na compactificação de Stone–Čech.

10.3.1 O lema de Jones

Uma consequência do lema de Urysohn fornece um obstáculo à normalidade.

Proposição 10.15 (Lema de Jones) Se X é separável e normal e $D \subset X$ é fechado e discreto, então

$$2^{|D|} \leq 2^{\aleph_0}.$$

Em particular, $|D| < 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Para cada $E \subset D$, os conjuntos E e $D \setminus E$ são fechados e disjuntos em X . Pelo lema de Urysohn, existe $f_E : X \rightarrow [0, 1]$ com $f_E(E) = \{0\}$ e $f_E(D \setminus E) = \{1\}$. Assim, $E \mapsto f_E$ é injetiva e

$$2^{|D|} \leq |C(X, \mathbb{R})|.$$

Se $S \subset X$ é denso e enumerável, uma função contínua real é determinada por sua restrição a S , pois $\mathbb{R}$ é Hausdorff. Logo

$$|C(X, \mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

A primeira desigualdade segue. Se $|D| \geq 2^{\aleph_0}$, então, pelo teorema de Cantor, $2^{|D|} > 2^{\aleph_0}$, contradição. ■

Exemplo 10.16 (O plano de Sorgenfrey não é normal) O plano de Sorgenfrey $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ é separável: $\mathbb{Q}^2$ é denso. A antidiagonal

$$D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

é fechada e discreta na topologia produto de Sorgenfrey, e possui cardinalidade do contínuo. Pelo lema de Jones, o plano de Sorgenfrey não pode ser normal.

Assim, mesmo o produto de dois espaços normais pode deixar de ser normal.

10.4 O teorema de extensão de Tietze

Urysohn prescreve dois valores, 0 e 1, em dois fechados. O teorema de Tietze substitui esses dois valores por uma função contínua arbitrária definida em um fechado e mostra que ela pode ser estendida ao espaço todo.

A prova parte do seguinte lema de aproximação.

Lema 10.17 (Aproximação) Se X é normal, $A \subset X$ é fechado e $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua com $|h| \leq M$, então existe uma função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|g| \leq \frac{M}{3}$$

e

$$|h - g| \leq \frac{2M}{3} \quad \text{em } A.$$

Demonstração. Os conjuntos

$$A_- = \{x \in A : h(x) \leq -M/3\}, \quad A_+ = \{x \in A : h(x) \geq M/3\}$$

são fechados em X e disjuntos. Pelo lema de Urysohn, existe $u : X \rightarrow [0, 1]$ com $u = 0$ em A_- e $u = 1$ em A_+ . Faça

$$g = \frac{M}{3}(2u - 1).$$

Então $|g| \leq M/3$. Em A_- e A_+ , a escolha de g reduz o erro para no máximo $2M/3$; no conjunto restante, $|h| < M/3$ e $|g| \leq M/3$, de modo que a mesma estimativa vale. ■

Teorema 10.18 (Teorema de Extensão de Tietze) Se X é normal, $A \subset X$ é fechado e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe uma função contínua $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_A = f$.

Se $f(A) \subset [-M, M]$, a extensão pode ser escolhida com $F(X) \subset [-M, M]$.

Demonstração. Suponha primeiro $|f| \leq 1$. Aplique o lema anterior a f e obtenha g_0 com $\|g_0\|_\infty \leq 1/3$ e

$$|f - g_0| \leq 2/3 \quad \text{em } A.$$

Aplique o lema novamente ao resíduo $f - g_0|_A$, depois ao novo resíduo, e assim por diante. Obtemos funções contínuas $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

e

$$\left| f - \sum_{k=0}^n g_k \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{em } A.$$

A série $\sum g_n$ converge uniformemente em X . Portanto

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$$

é contínua. Em A , o erro tende a zero, logo $F|_A = f$. Além disso,

$$|F| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

Escalando, obtemos o resultado para funções com imagem em $[-M, M]$.

Para uma função real arbitrária, escolha um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ e aplique a parte anterior a $\varphi \circ f$. Obtenha $H : X \rightarrow [-1, 1]$ estendendo $\varphi \circ f$. O fechado

$$C = \{x : |H(x)| = 1\}$$

é disjunto de A . Pelo lema de Urysohn, existe $u : X \rightarrow [0, 1]$ com $u = 1$ em A e $u = 0$ em C . Então $G = uH$ satisfaz $|G| < 1$ em todo X e $G|_A = \varphi \circ f$. Assim

$$F = \varphi^{-1} \circ G$$

é a extensão desejada. ■

O teorema de Tietze e o lema de Urysohn são, de fato, duas faces da normalidade. Se toda função contínua definida num fechado e com valores em $[0, 1]$ puder ser estendida, aplique essa propriedade à função definida em $A \cup B$ que vale 0 em um fechado A e 1 no outro fechado B . A extensão recupera o lema de Urysohn e, portanto, a normalidade.

10.5 Espaços completamente regulares

Normalidade separa dois fechados por uma função. Para muitas construções, principalmente produtos e compactificações, é suficiente pedir a separação de um ponto e um fechado.

Definição 10.19 (Completa regularidade) Um espaço X é **completamente regular** se, para todo fechado $F \subset X$ e todo $x \notin F$, existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = 1, \quad f|_F = 0.$$

Um espaço é de **Tychonoff**, ou $T_{3\frac{1}{2}}$, se é completamente regular e T_1 .

Proposição 10.20 Todo espaço T_4 é de Tychonoff.

Demonstração. Se X é T_4 , então é T_1 e normal. Dado um fechado F e um ponto $x \notin F$, o singleton $\{x\}$ é fechado. O lema de Urysohn aplicado a F e $\{x\}$ fornece uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ com $f|_F = 0$ e $f(x) = 1$. Logo X é completamente regular e T_1 . ■

Proposição 10.21 Todo espaço completamente regular é regular. Portanto todo espaço de Tychonoff é T_3 .

Demonstração. Se F é fechado e $x \notin F$, escolha $f : X \rightarrow [0, 1]$ com $f(F) = 0$ e $f(x) = 1$. Os abertos

$$f^{-1}([0, 1/3)) \quad \text{e} \quad f^{-1}((2/3, 1])$$

separam F e x . ■

Proposição 10.22 Subespaços de espaços completamente regulares são completamente regulares. Em particular, subespaços de espaços de Tychonoff são de Tychonoff.

Demonstração. Se $S \subset X$, F é fechado em S e $x \in S \setminus F$, escreva $F = S \cap H$ com H fechado em X e $x \notin H$. Uma função que separa x de H em X , restrita a S , separa x de F . ■

Proposição 10.23 Um produto arbitrário de espaços completamente regulares é completamente regular. Consequentemente, um produto arbitrário de espaços de Tychonoff é de Tychonoff.

Demonstração. Seja $X = \prod_i X_i$, seja $A \subset X$ fechado e $x \notin A$. Escolha um aberto básico

$$x \in W = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) \subset X \setminus A,$$

com J finito. Para cada $j \in J$, escolha uma função contínua $g_j : X_j \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$g_j(x_j) = 1, \quad g_j(X_j \setminus U_j) = 0.$$

Então

$$g = \prod_{j \in J} (g_j \circ \pi_j)$$

é contínua, vale 1 em x e vale 0 em A , pois todo ponto de A deixa de pertencer a W em pelo menos uma das coordenadas de J . ■

Corolário 10.24 Todo espaço localmente compacto Hausdorff é de Tychonoff.

Demonstração. Pelo capítulo de compacidade, um espaço localmente compacto Hausdorff é homeomorfo a um subespaço aberto de um compacto Hausdorff. Compactos Hausdorff são T_4 , portanto de Tychonoff, e a propriedade de Tychonoff é hereditária. ■

10.5.1 Funções como coordenadas

A completa regularidade pode ser lida de outra maneira: existem funções contínuas reais suficientes para reconstruir a topologia. Em um espaço de Tychonoff, para cada aberto U e cada $x \in U$ existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que

$$f(x) = 1, \quad f(X \setminus U) = \{0\}.$$

Assim, os conjuntos da forma $f^{-1}((1/2, 1])$ refinam todos os abertos do espaço.

Teorema 10.25 (Teorema de imersão de Tychonoff) Seja

$$\mathcal{C} = C(X, [0, 1])$$

a família de todas as funções contínuas de X em $[0, 1]$. Um espaço X é de Tychonoff se, e somente se, a aplicação de avaliação

$$e_X : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{C}}, \quad e_X(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{C}},$$

é um mergulho.

Demonstração. Se X é de Tychonoff, as funções de $\mathcal{C}$ separam pontos: se $x \neq y$, o conjunto $\{y\}$ é fechado e existe $f \in \mathcal{C}$ com $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$. Logo e_X é injetiva. A propriedade universal do produto mostra que e_X é contínua.

Além disso, se U é aberto e $x \in U$, a completa regularidade fornece $f \in \mathcal{C}$ com $f(x) = 1$ e $f(X \setminus U) = 0$. Então

$$x \in f^{-1}((1/2, 1]) \subset U.$$

Portanto a topologia de X é exatamente a topologia inicial gerada pelas coordenadas de e_X . Isso diz que e_X é um homeomorfismo de X sobre sua imagem.

Reciprocamente, $[0, 1]^{\mathcal{C}}$ é de Tychonoff e a propriedade de Tychonoff é hereditária para subespaços. Logo qualquer espaço homeomorfo a um subespaço desse cubo é de Tychonoff. ■

10.6 Comportamento topológico

As propriedades estudadas neste capítulo têm comportamentos diferentes sob as construções básicas.

	Subespaços	Quocientes	Produtos	Somas
Regular	Sim	Não em geral	Sim	Sim
Tychonoff	Sim	Não em geral	Sim	Sim
Normal	fechados	Não em geral	Não em geral	Sim

Para normalidade, há duas ressalvas. Imagens contínuas, fechadas e sobrejetivas preservam normalidade, como vimos. Produtos, por outro lado, podem falhar já para dois fatores, como mostra o plano de Sorgenfrey.

10.7 Compactificação de Stone–Čech

A compactificação de Alexandroff acrescenta um único ponto e é guiada pelo comportamento no infinito. Stone–Čech segue uma filosofia diferente: a construção é determinada pelas funções contínuas que devem sobreviver à compactificação. Sua propriedade universal exige a extensão de todas as aplicações contínuas em compactos Hausdorff.

Se X é de Tychonoff, seja novamente

$$\mathcal{C} = C(X, [0, 1])$$

e considere o mergulho de avaliação

$$e_X : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{C}}.$$

Definição 10.26 (Compactificação de Stone–Čech) Para um espaço de Tychonoff X , definimos

$$\beta X = \overline{e_X(X)} \subset [0, 1]^{\mathcal{C}}.$$

Identificando X com $e_X(X)$, chamamos βX de **compactificação de Stone–Čech** de X .

Pelo teorema de Tychonoff, o cubo $[0, 1]^{\mathcal{C}}$ é compacto Hausdorff. Logo βX , sendo fechado nesse cubo, também é compacto Hausdorff. Por definição, X é denso em βX .

O resultado central é a propriedade universal.

Teorema 10.27 (Propriedade universal de Stone–Čech) Se X é de Tychonoff, K é compacto Hausdorff e $f : X \rightarrow K$ é contínua, então existe uma única função contínua

$$\tilde{f} : \beta X \rightarrow K$$

tal que

$$\tilde{f}|_X = f.$$

Demonstração. Como K é compacto Hausdorff, é de Tychonoff. Seja

$$\mathcal{D} = C(K, [0, 1])$$

e considere o mergulho

$$e_K : K \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{D}}.$$

Para cada $g \in \mathcal{D}$, a composição $g \circ f$ pertence a $C(X, [0, 1]) = \mathcal{C}$. Portanto ela é uma das coordenadas usadas na definição de βX e se estende naturalmente a uma função contínua

$$\widehat{g \circ f} : \beta X \rightarrow [0, 1]$$

pela projeção correspondente do cubo.

Reunindo essas coordenadas, obtemos uma aplicação contínua

$$F : \beta X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{D}}, \quad F(z) = (\widehat{g \circ f}(z))_{g \in \mathcal{D}}.$$

Em X , temos

$$F|_X = e_K \circ f.$$

Como K é compacto e o cubo é Hausdorff, $e_K(K)$ é fechado. Assim,

$$F(\beta X) \subset \overline{F(X)} = \overline{e_K(f(X))} \subset e_K(K).$$

Podemos então definir

$$\tilde{f} = e_K^{-1} \circ F.$$

Ela é contínua e estende f .

A unicidade segue da densidade de X em βX : duas aplicações contínuas de βX em um espaço Hausdorff que coincidem em um conjunto denso coincidem em todo o espaço. ■

Corolário 10.28 Toda função contínua limitada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a βX .

Demonstração. A imagem de f está contida em algum intervalo compacto $[-M, M]$. Aplique a propriedade universal com $K = [-M, M]$. ■

A propriedade universal caracteriza βX a menos de homeomorfismo: se outra compactificação de X possui a mesma propriedade de extensão para compactos Hausdorff, as extensões das identidades produzem homeomorfismos inversos entre as duas compactificações.

Exercícios

Ex. 10.1 — Prove diretamente que todo espaço métrico é T_4 .

Ex. 10.2 — Mostre que o espaço de Sierpiński é normal, mas não é regular nem Hausdorff.

Ex. 10.3 — Seja X normal. Dados fechados disjuntos $A, B \subset X$, prove que existem abertos U, V tais que

$$A \subset U, \quad B \subset V, \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Ex. 10.4 — Mostre que o limite uniforme de funções contínuas reais é contínuo.

Ex. 10.5 — Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, mostre que $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são contínuas.

Ex. 10.6 — Mostre que a versão do lema de Urysohn com valores constantes $\alpha \neq \beta$ é equivalente à versão com valores 0 e 1.

Ex. 10.7 — Sejam $\tau \subset \sigma$ topologias no mesmo conjunto. Investigue se regularidade e normalidade passam de (X, τ) para (X, σ) ou na direção contrária.

Ex. 10.8 — Se $\prod_i X_i$ é normal, mostre que cada fator X_i é normal.

Ex. 10.9 — O espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a topologia produto é normal? Justifique.

Ex. 10.10 — Dê uma prova direta do lema de Urysohn para espaços métricos usando

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Ex. 10.11 — Mostre diretamente que o teorema de Tietze implica o lema de Urysohn.

Ex. 10.12 — Prove que todo espaço regular e segundo-enumerável é normal.

Ex. 10.13 — Mostre que o produto de dois espaços Lindelöf pode não ser Lindelöf, usando a reta de Sorgenfrey.

Ex. 10.14 — Mostre que todo compacto Hausdorff é de Tychonoff de duas maneiras: primeiro via T_4 e Urysohn; depois via a compactificação de Alexandroff aplicada a um subespaço aberto adequado.

Ex. 10.15 — Dizemos que X é perfeitamente normal se é normal e todo fechado é G_δ . Prove que isso equivale a dizer que todo aberto é união enumerável de fechados cujos interiores o recobrem. Compare essa condição com metrizabilidade.

O capítulo começa com a separação entre um ponto e um fechado e termina com uma construção universal. A ligação entre os dois extremos é dada pelas funções contínuas: quanto mais delas estão disponíveis, melhor a topologia pode ser codificada por coordenadas. A completa regularidade é precisamente a condição que permite mergulhar o espaço em um cubo; a compactificação de Stone–Čech completa essa perspectiva ao fechar a imagem nesse cubo e preservar a informação contínua detectável por compactos Hausdorff.

Espaços Metrizáveis

Nos primeiros capítulos, uma métrica apareceu como uma maneira de produzir uma topologia. Neste capítulo fazemos a pergunta inversa: dada uma topologia, quando ela pode ser descrita por alguma distância?

A resposta central será o Teorema de Metrização de Urysohn. Sob hipóteses de separação e enumerabilidade, funções contínuas a valores em $[0, 1]$ fornecem coordenadas suficientes para colocar o espaço dentro de um único espaço métrico, o cubo de Hilbert.

O percurso será

regularidade + segunda enumerabilidade $\implies$ normalidade $\implies$ coordenadas contínuas enumeráveis

Cada uma dessas setas já apareceu, em alguma forma, nos capítulos anteriores. O objetivo aqui é reuni-las numa única demonstração.

11.1 Métricas compatíveis

Definição 11.1 (Espaço metrizável) Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é *metrizável* quando existe uma métrica d em X tal que a topologia induzida por d coincide com τ . Nesse caso, dizemos que d é *compatível* com a topologia de X .

Uma topologia metrizável quase nunca determina uma única métrica. Mesmo quando uma métrica já está disponível, é útil substituí-la por outra com propriedades mais convenientes sem alterar os abertos.

Proposição 11.2 (Truncamento de uma métrica) Se d é uma métrica em X , então

$$\bar{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

também é uma métrica, é limitada por 1 e induz a mesma topologia que d .

Demonstração. As propriedades de simetria, positividade e separação de pontos são imediatas. Para a desigualdade triangular basta observar que, para $a, b \geq 0$,

$$\min\{1, a + b\} \leq \min\{1, a\} + \min\{1, b\}.$$

Logo

$$\bar{d}(x, z) \leq \min\{1, d(x, y) + d(y, z)\} \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

Se $0 < r < 1$, então

$$B_{\bar{d}}(x, r) = B_d(x, r).$$

Portanto as duas métricas possuem as mesmas vizinhanças suficientemente pequenas em cada ponto e, conseqüentemente, induzem a mesma topologia. ■

11.2 O que uma métrica força

A metrizabilidade impõe fortes restrições de separação e de comportamento local. Todo espaço métrico é Hausdorff, regular, normal e primeiro enumerável. Esses resultados já foram demonstrados nos capítulos anteriores. Para a metrização de Urysohn, porém, a relação entre separabilidade, segunda enumerabilidade e a propriedade de Lindelöf será especialmente importante.

Teorema 11.3 (Enumerabilidade em espaços métricos) Se X é um espaço métrico, são equivalentes:

1. X é separável;
2. X é segundo enumerável;

3. X é Lindelöf.

Demonstração. Suponha primeiro que X seja separável e seja $D \subset X$ um conjunto enumerável e denso. A família

$$\mathcal{B} = \{B(q, r) : q \in D, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

é enumerável. Mostremos que ela é uma base. Se $x \in U$ e U é aberto, escolha $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Pela densidade de D , existe $q \in D$ com $d(x, q) < \varepsilon/3$. Escolhendo $r \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$d(x, q) < r < \frac{2\varepsilon}{3},$$

temos

$$x \in B(q, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset U.$$

Logo X é segundo enumerável.

Agora suponha que $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ seja uma base enumerável e seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de X . Considere os elementos B_n da base que estão contidos em algum membro de $\mathcal{U}$. Para cada um deles escolha um aberto $U_n \in \mathcal{U}$ com $B_n \subset U_n$. A família dos U_n escolhidos é enumerável e ainda cobre X , pois todo ponto pertence a algum elemento básico contido em um membro da cobertura. Assim X é Lindelöf.

Finalmente, suponha X Lindelöf. Para cada $n \geq 1$, a família

$$\{B(x, 1/n) : x \in X\}$$

é uma cobertura aberta. Escolha uma subcobertura enumerável e denote por D_n o conjunto de seus centros. Então

$$D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$$

é enumerável. Dado um aberto não vazio U , escolha $x \in U$ e $\varepsilon > 0$ com $B(x, \varepsilon) \subset U$. Tome n com $2/n < \varepsilon$. Como as bolas de raio $1/n$ centradas em D_n cobrem X , existe $q \in D_n$ tal que $x \in B(q, 1/n)$. Então $d(x, q) < 1/n < \varepsilon$, e portanto $q \in U$. Logo D é denso. ■

O teorema deve ser lido com cuidado: fora da classe dos espaços métricos, as três propriedades deixam de ser equivalentes. Essa diferença será uma das fontes de contraexemplos no final do capítulo.

11.3 Produtos enumeráveis e o cubo de Hilbert

A prova de Urysohn produzirá uma sequência de funções contínuas

$$f_1, f_2, \dots : X \longrightarrow [0, 1].$$

Para tratá-las como coordenadas, precisamos saber que um produto enumerável de espaços métricos continua sendo metrizável.

Teorema 11.4 (Produto enumerável de espaços metrizáveis) Se (X_n, d_n) é um espaço métrico para cada $n \geq 1$, então a topologia produto em

$$X = \prod_{n \geq 1} X_n$$

é metrizável.

Demonstração. Pela Proposição 11.2, podemos substituir cada d_n por

$$\rho_n(x, y) = \min\{1, d_n(x, y)\}.$$

Defina, para $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$,

$$D(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(x_n, y_n).$$

A série converge, pois cada termo é no máximo 2^{-n} . A positividade, a simetria e a separação de pontos são imediatas, e a desigualdade triangular segue termo a termo. Portanto D é uma métrica.

Resta comparar as topologias. Para cada k ,

$$\rho_k(x_k, y_k) \leq 2^k D(x, y),$$

logo a projeção $\pi_k : (X, D) \rightarrow X_k$ é contínua. Como a topologia produto é a menor topologia que torna todas as projeções contínuas, ela está contida na topologia induzida por D .

Reciprocamente, fixe $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Escolha N tal que

$$\sum_{n > N} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $1 \leq n \leq N$, escolha $\delta_n > 0$ tal que $2^{-n}\delta_n < \varepsilon/(2N)$ e $\delta_n \leq 1$. O conjunto

$$V = \prod_{n \geq 1} V_n, \quad V_n = \begin{cases} B_{\rho_n}(x_n, \delta_n), & n \leq N, \\ X_n, & n > N, \end{cases}$$

é uma vizinhança básica de x na topologia produto. Se $y \in V$, então

$$D(x, y) < \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{2N} + \sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon.$$

Assim $V \subset B_D(x, \varepsilon)$, e as duas topologias coincidem. ■

Definição 11.5 (Cubo de Hilbert) O espaço

$$\mathcal{H} = [0, 1]^{\mathbb{N}},$$

munido da topologia produto, é chamado *cubo de Hilbert*.

Pelo teorema anterior, uma métrica compatível com $\mathcal{H}$ é

$$d_{\mathcal{H}}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|.$$

Proposição 11.6 O cubo de Hilbert é separável e segundo enumerável.

Demonstração. Considere o conjunto D das seqüências (q_n) tais que $q_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ para todo n e $q_n = 0$ a partir de algum índice. Esse conjunto é enumerável. Toda vizinhança básica no produto restringe apenas um número finito de coordenadas; escolhendo valores racionais nessas coordenadas obtemos um elemento de D dentro da vizinhança. Logo D é denso.

Como $\mathcal{H}$ é métrico, o Teorema 11.3 implica que $\mathcal{H}$ é segundo enumerável. ■

11.4 De uma base enumerável a coordenadas enumeráveis

No capítulo anterior vimos que espaços de Tychonoff possuem funções contínuas reais suficientes para separar pontos de fechados e, por meio da aplicação de avaliação, podem ser mergulhados em um cubo $[0, 1]^I$. Para obter uma métrica, o ponto decisivo é reduzir o conjunto de coordenadas a uma família enumerável.

Seja X um espaço regular, T_1 e segundo enumerável, e fixe uma base

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}.$$

Considere o conjunto de pares

$$\mathcal{P} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \overline{B_i} \subset B_j\}.$$

Ele é enumerável.

Lema 11.7 (Pares que refinam qualquer vizinhança) Para todo aberto $U \subset X$ e todo $x \in U$, existem índices i, j tais que

$$x \in B_i \subset \overline{B_i} \subset B_j \subset U.$$

Demonstração. Escolha primeiro $B_j \in \mathcal{B}$ com

$$x \in B_j \subset U.$$

Pela regularidade, existe um aberto V tal que

$$x \in V \subset \overline{V} \subset B_j.$$

Escolha então $B_i \in \mathcal{B}$ com $x \in B_i \subset V$. Assim

$$x \in B_i \subset \overline{B_i} \subset \overline{V} \subset B_j \subset U.$$

■

Como X é segundo enumerável, é Lindelöf. Pelo resultado do capítulo anterior, um espaço regular e Lindelöf é normal. Podemos, portanto, aplicar o Lema de Urysohn.

Para cada $(i, j) \in \mathcal{P}$, escolha uma função contínua

$$f_{ij} : X \longrightarrow [0, 1]$$

tal que

$$f_{ij} = 1 \quad \text{em } \overline{B_i}, \quad f_{ij} = 0 \quad \text{em } X \setminus B_j.$$

Proposição 11.8 (Uma família enumerável de coordenadas) A família $\{f_{ij} : (i, j) \in \mathcal{P}\}$ é enumerável e possui a seguinte propriedade: se U é aberto e $x \in U$, existe uma função f da família tal que

$$x \in f^{-1}((1/2, 1]) \subset U.$$

Em particular, essas funções separam pontos.

Demonstração. A enumerabilidade decorre de $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}^2$. Dados $x \in U$, escolha i, j pelo Lema 11.7. Como $x \in B_i$, temos $f_{ij}(x) = 1$. Além disso,

$$f_{ij}^{-1}((1/2, 1]) \subset B_j \subset U,$$

pois f_{ij} vale zero fora de B_j .

Se $x \neq y$, aplique a propriedade ao aberto $U = X \setminus \{y\}$, que contém x porque X é T_1 . Obtemos uma função f com $f(x) > 1/2$ e $f(y) = 0$. Logo a família separa pontos. ■

Enumere essa família como $f_1, f_2, \dots$ e defina

$$F : X \longrightarrow \mathcal{H}, \quad F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Proposição 11.9 (Mergulho no cubo de Hilbert) A aplicação F é um mergulho topológico de X no cubo de Hilbert.

Demonstração. Cada coordenada de F é contínua; pela propriedade universal da topologia produto, F é contínua. A Proposição 11.8 mostra que as coordenadas separam pontos, portanto F é injetiva.

Resta verificar que a topologia de X coincide com a topologia induzida por F . Se U é aberto e $x \in U$, escolha f_n tal que

$$x \in f_n^{-1}((1/2, 1]) \subset U.$$

O conjunto

$$W_n = \{z \in \mathcal{H} : z_n > 1/2\}$$

é aberto em $\mathcal{H}$ e

$$x \in F^{-1}(W_n) \subset U.$$

Logo todo aberto de X é aberto para a topologia inicial determinada por F . A inclusão oposta segue da continuidade de F . Assim F é um homeomorfismo de X sobre o subespaço $F(X) \subset \mathcal{H}$.

■

11.5 O Teorema de Metrização de Urysohn

Toda a preparação anterior converge para o resultado central.

Teorema 11.10 (Teorema de Metrização de Urysohn) Para um espaço topológico T_1 , são equivalentes:

1. X é metrizável e separável;
2. X é regular e segundo enumerável;
3. X é homeomorfo a um subespaço do cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Suponha primeiro que X seja metrizável e separável. Espaços métricos são regulares e T_1 ; pelo Teorema 11.3, a separabilidade implica a segunda enumerabilidade. Logo (1) implica (2).

A implicação (2) $\Rightarrow$ (3) é precisamente a Proposição 11.9.

Finalmente, suponha (3). O cubo de Hilbert é metrizável; portanto todo seu subespaço é metrizável, pela restrição da métrica. Além disso, o cubo de Hilbert é segundo enumerável pela Proposição 11.6, e essa propriedade é hereditária para subespaços. Assim X é métrico e segundo enumerável. Novamente pelo Teorema 11.3, X é separável. Logo (3) implica (1).

■

Corolário 11.11 (Forma usual do teorema de Urysohn) Todo espaço regular, T_1 e segundo enumerável é metrizável.

Demonstração. Pelo Teorema 11.10, tal espaço é homeomorfo a um subespaço do cubo de Hilbert, que é métrico.

■

A prova fornece mais do que a existência de alguma métrica.

Corolário 11.12 (Uma métrica construída pelas coordenadas) Sob as hipóteses do Corolário 11.11, escolha as funções $f_1, f_2, \dots$ da Proposição 11.8. Então

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

é uma métrica compatível com a topologia de X .

Demonstração. Essa é exatamente a métrica do cubo de Hilbert restrita a $F(X)$ e transportada para X pelo mergulho F .

■

11.6 O cubo de Hilbert como espaço universal

O teorema anterior admite uma leitura geométrica particularmente útil:

espaços métricos separáveis = subespaços de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, a menos de homeomorfismo.

Assim, dentro da classe separável, não precisamos procurar um espaço ambiente novo para cada exemplo. O mesmo cubo contém, como subespaços, todos eles.

Corolário 11.13 Todo espaço compacto, Hausdorff e segundo enumerável é homeomorfo a um subespaço compacto, portanto fechado, do cubo de Hilbert.

Demonstração. Espaços compactos Hausdorff são regulares. O Teorema de Urysohn fornece um mergulho em $\mathcal{H}$. A imagem é compacta e, como $\mathcal{H}$ é Hausdorff, é fechada. ■

A segunda enumerabilidade é justamente o mecanismo que reduz o número de coordenadas. Sem ela, o teorema de imersão de Tychonoff ainda pode fornecer um mergulho em $[0, 1]^I$, mas o conjunto de índices I pode ser não enumerável; nesse caso, o produto deixa de se comportar como um espaço métrico.

11.7 Fronteiras da metrizabilidade

Os exemplos seguintes mostram o papel preciso das hipóteses. Eles são mais informativos quando lidos como testes do teorema, e não como uma lista de patologias.

Exemplo 11.14 (Um espaço metrizável que não é segundo enumerável) Se X é um conjunto não enumerável com a topologia discreta, então

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica compatível. Entretanto, qualquer base da topologia discreta deve conter todos os singletons $\{x\}$; portanto nenhuma base pode ser enumerável.

Isso não contradiz Urysohn. O teorema caracteriza os espaços *metrizáveis e separáveis*, e não todos os espaços metrizáveis.

Exemplo 11.15 (A reta de Sorgenfrey) Na reta de Sorgenfrey, os intervalos $[a, b)$ formam uma base. O espaço é separável: $\mathbb{Q}$ é denso, pois todo intervalo básico não vazio contém um racional.

Por outro lado, a reta de Sorgenfrey não é segundo enumerável. Se $\mathcal{B}$ fosse uma base enumerável, para cada $x \in \mathbb{R}$ poderíamos escolher $B_x \in \mathcal{B}$ com

$$x \in B_x \subset [x, x + 1).$$

Então x é o menor elemento de B_x , de modo que $x \mapsto B_x$ é injetiva. Isso é impossível porque $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Se a reta de Sorgenfrey fosse metrizável, sua separabilidade implicaria, pelo Teorema 11.3, a segunda enumerabilidade. Portanto ela não é metrizável.

Proposição 11.16 (Um produto com coordenadas demais) Se I é não enumerável, então $[0, 1]^I$, com a topologia produto, não é primeiro enumerável. Em particular, não é metrizável.

Demonstração. Fixe $x \in [0, 1]^I$ e suponha que $U_1, U_2, \dots$ seja uma base local enumerável em x . Para cada n , escolha uma vizinhança básica V_n tal que

$$x \in V_n \subset U_n.$$

Cada V_n restringe apenas um conjunto finito $F_n \subset I$ de coordenadas. Logo

$$F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$$

é enumerável. Escolha $i \in I \setminus F$.

Tome um aberto próprio $O \subset [0, 1]$ que contenha x_i e considere

$$W = \pi_i^{-1}(O).$$

Como (U_n) é uma base local, existe n com $U_n \subset W$, e portanto $V_n \subset W$. Mas $i \notin F_n$, de modo que V_n não impõe restrição alguma à coordenada i . Podemos alterar apenas essa coordenada para um valor fora de O e obter um ponto de V_n que não pertence a W , contradição.

Espaços métricos são primeiro enumeráveis, logo $[0, 1]^I$ não é metrizável. ■

O contraste com o cubo de Hilbert é exato: produtos enumeráveis de espaços metrizáveis admitem uma única métrica que combina todas as coordenadas; num produto não enumerável, nenhuma sequência de escalas consegue controlar todas elas localmente.

Observação 11.17 (Critérios mais gerais) Existem teoremas de metrização mais gerais, entre eles os critérios de Nagata–Smirnov e de Bing. Suas demonstrações exigem uma teoria de famílias localmente finitas e discretas que não será desenvolvida aqui. Por isso não os incluímos como teoremas sem prova: o papel deste capítulo é levar até o fim, com todas as etapas visíveis, o critério de Urysohn.

Exercícios

1. Mostre diretamente que todo subespaço de um espaço metrizável é metrizável.
2. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

é uma métrica limitada compatível com a mesma topologia.

3. Em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, escreva explicitamente uma métrica que induza a topologia produto.
4. Mostre diretamente, sem usar o Teorema 11.3, que o cubo de Hilbert possui uma base enumerável.
5. Seja X compacto, Hausdorff e segundo enumerável. Mostre que existe uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ que separa pontos e que a aplicação $x \mapsto (f_n(x))_{n \geq 1}$ identifica X com um subconjunto fechado do cubo de Hilbert.
6. Mostre que um quociente de um espaço metrizável pode deixar de ser Hausdorff e conclua que a metrizabilidade não é preservada por quocientes arbitrários. Você pode reutilizar um dos exemplos do capítulo sobre axiomas de separação.
7. Generalize a Proposição 11.16: suponha que $(X_i)_{i \in I}$ seja uma família de espaços e que, para não enumeravelmente muitos índices, X_i possua pelo menos dois pontos e um desses pontos admita uma vizinhança própria. Mostre que o produto não é primeiro enumerável em pontos adequados.
8. Prove que todo espaço compacto, Hausdorff e com base enumerável é metrizável.

Espaços Métricos Completos

Metrizabilidade e completude respondem a perguntas diferentes. A primeira é topológica: pergunta se os abertos podem ser descritos por alguma métrica. A segunda depende da métrica escolhida: pergunta se sequências que deveriam convergir, segundo a própria geometria da distância, realmente encontram um limite no espaço.

Essa distinção é essencial. O intervalo $(0, 1)$ com a métrica usual não é completo, embora seja homeomorfo a $\mathbb{R}$ e, portanto, admita uma métrica compatível completa. Depois de estudar completamentos, veremos duas consequências centrais da completude: o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema de Baire.

12.1 Sequências de Cauchy e completude

Definição 12.1 (Sequência de Cauchy) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) é de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definição 12.2 (Espaço completo) Um espaço métrico (X, d) é *completo* quando toda sequência de Cauchy em X converge para um ponto de X .

Toda sequência convergente é de Cauchy. A recíproca caracteriza precisamente a completude.

Proposição 12.3 Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é limitada.

Demonstração. Se (x_n) é de Cauchy, existe N tal que

$$m, n \geq N \implies d(x_m, x_n) < 1.$$

Em particular, para $n \geq N$ temos $d(x_n, x_N) < 1$. Os termos anteriores a x_N são finitos em número. Logo toda a sequência está contida em alguma bola centrada em x_N . ■

Proposição 12.4 Se A é um subespaço de um espaço métrico (X, d) , então:

1. se X é completo e A é fechado, então A é completo;
2. se A é completo, então A é fechado em X .

Demonstração. Se (a_n) é de Cauchy em A , então também é de Cauchy em X . Pela completude de X , existe $x \in X$ com $a_n \rightarrow x$. Como A é fechado, $x \in A$.

Reciprocamente, suponha A completo e seja $x \in \bar{A}$. Para cada $n \geq 1$, escolha $a_n \in A$ com $d(a_n, x) < 1/n$. Então $a_n \rightarrow x$ em X , logo (a_n) é de Cauchy em A . Pela completude de A , existe $a \in A$ com $a_n \rightarrow a$. A unicidade do limite em espaços métricos dá $x = a \in A$. ■

Definição 12.5 (Completamente metrizável) Um espaço topológico é *completamente metrizável* quando admite alguma métrica compatível que seja completa.

Exemplo 12.6 O intervalo $(0, 1)$ com a métrica usual não é completo. Entretanto, a aplicação

$$h : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \log \frac{x}{1-x},$$

é um homeomorfismo. A métrica

$$\rho(x, y) = |h(x) - h(y)|$$

é compatível com a topologia usual de $(0, 1)$ e é completa, pois h é uma isometria de $((0, 1), \rho)$ sobre $\mathbb{R}$.

Esse exemplo mostra por que completude não é uma propriedade topológica de uma métrica específica. A noção topológica adequada é a existência de *alguma* métrica compatível completa.

12.2 Completamento

Definição 12.7 (Completamento) Um *completamento* de um espaço métrico (X, d) é um espaço métrico completo $(\widehat{X}, \widehat{d})$ juntamente com uma isometria

$$\iota : X \longrightarrow \widehat{X}$$

cujas imagem é densa.

A construção é análoga à passagem dos racionais aos reais: pontos ausentes são representados por sequências de Cauchy.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em X . Para $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$, defina

$$(x_n) \sim (y_n) \iff d(x_n, y_n) \longrightarrow 0.$$

É imediato verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Lema 12.8 Se (x_n) e (y_n) são seqüências de Cauchy em X , então a seqüência real $d(x_n, y_n)$ converge.

Demonstração. Pela desigualdade triangular,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

O lado direito tende a zero quando $m, n \rightarrow \infty$. Logo $(d(x_n, y_n))$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$, que é completo. ■

Defina

$$\widehat{X} = \mathcal{C} / \sim$$

e, para classes $\xi = [(x_n)]$ e $\eta = [(y_n)]$,

$$\widehat{d}(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Proposição 12.9 A função $\widehat{d}$ está bem definida e é uma métrica em $\widehat{X}$.

Demonstração. O Lema 12.8 garante a existência do limite. Se $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$, então

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0,$$

logo o valor do limite não depende dos representantes.

As propriedades de simetria e desigualdade triangular passam ao limite. Além disso,

$$\widehat{d}([(x_n)], [(y_n)]) = 0$$

se, e somente se, $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, isto é, se, e somente se, as duas seqüências representam a mesma classe. ■

Para $x \in X$, seja $\iota(x)$ a classe da seqüência constante $(x, x, \dots)$.

Teorema 12.10 (Existência do completamento) Todo espaço métrico possui um completamento.

Demonstração. A aplicação $\iota : X \rightarrow \widehat{X}$ é isométrica, pois

$$\widehat{d}(\iota(x), \iota(y)) = d(x, y).$$

Mostremos primeiro que $\iota(X)$ é densa. Seja $\xi = [(x_n)] \in \widehat{X}$. Para cada N ,

$$\widehat{d}(\iota(x_N), \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_N, x_n).$$

Como (x_n) é de Cauchy, esse valor tende a zero quando $N \rightarrow \infty$.

Resta provar que $\widehat{X}$ é completo. Seja (ξ_m) uma sequência de Cauchy em $\widehat{X}$. Pela densidade de $\iota(X)$, escolha $x_m \in X$ de modo que

$$\widehat{d}(\iota(x_m), \xi_m) < 2^{-m}.$$

Então (x_m) é de Cauchy em X , pois

$$d(x_m, x_n) \leq 2^{-m} + \widehat{d}(\xi_m, \xi_n) + 2^{-n}.$$

Seja $\xi = [(x_m)] \in \widehat{X}$. Como

$$\widehat{d}(\iota(x_m), \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n),$$

o lado direito tende a zero quando $m \rightarrow \infty$. Portanto

$$\widehat{d}(\xi_m, \xi) \leq \widehat{d}(\xi_m, \iota(x_m)) + \widehat{d}(\iota(x_m), \xi) \rightarrow 0.$$

Logo $\widehat{X}$ é completo. ■

Teorema 12.11 (Unicidade do completamento) Se (Y, ι) e (Z, j) são dois completamentos de X , existe uma única isometria sobrejetiva

$$T : Y \rightarrow Z$$

tal que $T \circ \iota = j$.

Demonstração. Dado $y \in Y$, escolha uma sequência (x_n) em X tal que $\iota(x_n) \rightarrow y$. Como ι é isométrica, (x_n) é de Cauchy em X ; portanto $(j(x_n))$ é de Cauchy em Z e possui limite. Defina

$$T(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} j(x_n).$$

Se outra sequência (x'_n) satisfaz $\iota(x'_n) \rightarrow y$, então $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$, e daí $d_Z(j(x_n), j(x'_n)) \rightarrow 0$. Logo T está bem definida.

Passando ao limite nas igualdades

$$d_Z(j(x_n), j(u_n)) = d_Y(\iota(x_n), \iota(u_n)),$$

vemos que T preserva distâncias. Em particular, é injetiva. Sua imagem é completa e, portanto, fechada em Z pela Proposição 12.4; ela contém o conjunto denso $j(X)$, logo é todo Z . A condição $T \circ \iota = j$ determina T num conjunto denso e, por continuidade, garante a unicidade. ■

12.3 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Uma contração não apenas possui ponto fixo: a prova fornece um processo iterativo para encontrá-lo.

Definição 12.12 (Contração) Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ num espaço métrico é uma *contração* se existe $q \in [0, 1)$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq q d(x, y)$$

para todos $x, y \in X$.

Teorema 12.13 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Se (X, d) é completo e $T : X \rightarrow X$ é uma contração, então T possui um único ponto fixo p . Para qualquer $x_0 \in X$, a sequência iterativa

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

converge para p . Além disso,

$$d(x_n, p) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0).$$

Demonstração. Pela propriedade de contração,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0).$$

Se $m > n$, a desigualdade triangular fornece

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Logo (x_n) é de Cauchy. Pela completude, existe $p \in X$ com $x_n \rightarrow p$. Como uma contração é Lipschitz, é contínua, e portanto

$$T(p) = T(\lim x_n) = \lim T(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

Se p e r são pontos fixos,

$$d(p, r) = d(Tp, Tr) \leq q d(p, r),$$

o que, como $q < 1$, implica $d(p, r) = 0$. Assim o ponto fixo é único.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ na estimativa anterior obtemos

$$d(x_n, p) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

■

Exemplo 12.14 (A equação $x = \cos x$) Considere $T(x) = \cos x$ em $[0, 1]$. Temos $T([0, 1]) \subset [0, 1]$ e

$$|T'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1 < 1.$$

Pelo teorema do valor médio, T é uma contração. Portanto existe um único $p \in [0, 1]$ tal que $p = \cos p$, e as iterações

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

convergem para esse ponto a partir de qualquer $x_0 \in [0, 1]$.

12.3.1 Uma aplicação a equações diferenciais

O mesmo mecanismo transforma uma equação diferencial em uma equação de ponto fixo.

Proposição 12.15 Se K é compacto e Y é um espaço métrico completo, então $C(K, Y)$, munido da métrica do supremo

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{t \in K} d(f(t), g(t)),$$

é completo.

Demonstração. Se (f_n) é de Cauchy para d_{∞} , então, para cada $t \in K$, a sequência $(f_n(t))$ é de Cauchy em Y e possui um limite $f(t)$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha N tal que

$$m, n \geq N \implies d_{\infty}(f_m, f_n) < \varepsilon.$$

Fixando $n \geq N$ e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$d(f_n(t), f(t)) \leq \varepsilon$$

uniformemente em t . Logo $f_n \rightarrow f$ uniformemente. O limite uniforme de funções contínuas é contínuo, de modo que $f \in C(K, Y)$ e $d_{\infty}(f_n, f) \rightarrow 0$. ■

Teorema 12.16 (Existência e unicidade local para EDOs) Considere o problema

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0,$$

onde F é contínua no retângulo

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

e satisfaz, para alguma constante L ,

$$|F(t, u) - F(t, v)| \leq L|u - v|$$

em R . Então existe $h > 0$ para o qual o problema possui uma única solução em $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Demonstração. Como R é compacto e F é contínua, existe

$$M = \max_{(t,y) \in R} |F(t,y)|.$$

Escolha $h > 0$ com

$$h \leq a, \quad hM \leq b, \quad hL < 1.$$

No espaço completo

$$C([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R})$$

considere o subconjunto fechado

$$\mathcal{X} = \{\varphi : \|\varphi - y_0\|_\infty \leq b\}.$$

Defina

$$(T\varphi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s)) ds.$$

A escolha de h garante que $T(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Além disso,

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq hL \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Logo T é uma contração. Pelo Teorema 12.13, existe uma única $\varphi \in \mathcal{X}$ tal que $T\varphi = \varphi$. Pela regra fundamental do cálculo, essa identidade integral é equivalente ao problema diferencial.

■

A prova revela o conteúdo algorítmico do resultado: as iterações

$$\varphi_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s)) ds$$

são as aproximações sucessivas de Picard e convergem para a solução.

12.4 O teorema de interseção de Cantor

A completude também pode ser reconhecida por conjuntos fechados encaixados.

Definição 12.17 (Diâmetro) Se A é um subconjunto não vazio de um espaço métrico, definimos

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$

admitindo o valor $+\infty$.

Teorema 12.18 (Teorema de Interseção de Cantor) Se (X, d) é completo e

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$$

é uma sequência de fechados não vazios tal que

$$\text{diam}(F_n) \longrightarrow 0,$$

então

$$\bigcap_{n \geq 1} F_n$$

consiste em exatamente um ponto.

Demonstração. Escolha $x_n \in F_n$. Se $m \geq n$, então $x_m, x_n \in F_n$, logo

$$d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(F_n).$$

Portanto (x_n) é de Cauchy e converge, pela completude, para algum $x \in X$.

Para cada n , todos os termos x_m com $m \geq n$ pertencem a F_n . Como F_n é fechado, $x \in F_n$. Logo x pertence à interseção.

Se x, y pertencem à interseção, então, para todo n ,

$$d(x, y) \leq \text{diam}(F_n).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $d(x, y) = 0$, portanto $x = y$.

■

12.5 Categoria de Baire

O Teorema de Baire afirma que um espaço métrico completo não pode ser construído pela superposição enumerável de conjuntos “topologicamente pequenos”.

Definição 12.19 (Conjunto denso em lugar nenhum) Um subconjunto $A \subset X$ é *denso em lugar nenhum* quando

$$\text{int}(\overline{A}) = \emptyset.$$

Definição 12.20 (Conjunto magro) Um subconjunto $M \subset X$ é *magro* ou *de primeira categoria* quando pode ser escrito como união enumerável de conjuntos densos em lugar nenhum.

Definição 12.21 (Espaço de Baire) Um espaço topológico X é um *espaço de Baire* quando toda interseção enumerável de abertos densos é densa em X .

Teorema 12.22 (Teorema de Categoria de Baire) Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Demonstração. Sejam $G_1, G_2, \dots$ abertos densos em X e seja U um aberto não vazio. Mostraremos que

$$U \cap \bigcap_{n \geq 1} G_n \neq \emptyset.$$

Como G_1 é denso, $U \cap G_1$ é aberto não vazio. Escolha uma bola fechada

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset U \cap G_1$$

com $0 < r_1 < 1$. Suponha escolhida $\overline{B}(x_n, r_n)$. Como G_{n+1} é denso,

$$B(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$$

é aberto não vazio. Escolha

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$$

com $0 < r_{n+1} < 2^{-(n+1)}$.

Temos, assim, uma sequência encaixada de bolas fechadas

$$\overline{B}(x_1, r_1) \supset \overline{B}(x_2, r_2) \supset \dots$$

cujos diâmetros tendem a zero. Pelo Teorema 12.18, existe um único ponto x na interseção. Como a primeira bola está contida em U e a n -ésima bola está contida em G_n , segue que

$$x \in U \cap \bigcap_{n \geq 1} G_n.$$

Como U era um aberto não vazio arbitrário, a interseção é densa. ■

Corolário 12.23 Um espaço métrico completo não vazio não é magro em si mesmo.

Demonstração. Se

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

com cada A_n denso em lugar nenhum, então

$$G_n = X \setminus \overline{A_n}$$

é aberto e denso. Pelo Teorema de Baire, $\bigcap_n G_n$ é denso e, em particular, não vazio. Mas

$$\bigcap_{n \geq 1} G_n = X \setminus \bigcup_{n \geq 1} \overline{A_n} \subset X \setminus \bigcup_{n \geq 1} A_n = \emptyset,$$

contradição. ■

Corolário 12.24 O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração. Se

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots\},$$

então

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} \{x_n\}.$$

Cada singleton é fechado e tem interior vazio, logo é denso em lugar nenhum. Isso contradiz o Corolário 12.23, pois $\mathbb{R}$ com a métrica usual é completo. ■

Observação 12.25 A força do Teorema de Baire não está apenas nessa aplicação elementar. Em análise funcional, ele é o mecanismo por trás de resultados como os teoremas da aplicação aberta, do gráfico fechado e da limitação uniforme. Aqui, porém, sua função é mais básica: mostrar que completude possui consequências topológicas globais que não aparecem na definição por sequências de Cauchy.

Exercícios

1. Mostre que $\mathbb{Q}$, com a métrica usual, não é completo e identifique seu completamento.
2. Mostre que $\mathbb{R}^n$, com qualquer uma das métricas usuais d_1, d_2, d_∞ , é completo.
3. Seja (X, d) completo e seja $A \subset X$ fechado. Dê uma segunda prova de que A é completo usando o Teorema de Interseção de Cantor.
4. Mostre que o produto de uma família finita de espaços métricos completos, munido da métrica do máximo, é completo.
5. Mostre que o produto enumerável de espaços métricos completos, munido da métrica

$$D(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \min\{1, d_n(x_n, y_n)\},$$

é completo.

6. Seja $T : X \rightarrow X$ uma contração de razão $q < 1$ em um espaço completo. Mostre que

$$d(x_n, p) \leq \frac{q}{1 - q} d(x_n, x_{n-1})$$

para as iterações de Banach.

7. Use o Teorema de Banach para provar que a equação

$$x = e^{-x}$$

possui uma única solução em $[0, 1]$.

8. No Teorema 12.16, explique exatamente onde entram a completude do espaço de funções e a condição de Lipschitz.

9. Prove a recíproca do Teorema de Interseção de Cantor: se toda sequência decrescente de fechados não vazios com diâmetros tendendo a zero possui interseção não vazia, então o espaço métrico é completo.
10. Mostre que todo aberto de um espaço métrico completo é um espaço de Baire com a topologia relativa.
11. Mostre que $\mathbb{Q}$ é magro em si mesmo. Isso entra em conflito com o fato de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$? Explique.

Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento

Até aqui, os invariantes estudados foram formulados diretamente em linguagem topológica: abertos, fechados, compacidade, conexidade e separação. Neste capítulo aparece, pela primeira vez, uma ideia de natureza algébrica: associar a um espaço um grupo construído a partir de laços.

O grupo fundamental mede quando um laço pode ser deformado em outro sem mover o ponto de partida. Os espaços de recobrimento entram logo em seguida porque fornecem uma maneira especialmente eficiente de estudar essas deformações: laços no espaço de base podem ser levantados a caminhos em um espaço mais simples. No caso decisivo,

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad p(t) = e^{2\pi it},$$

um laço no círculo se transforma em um caminho na reta, e o ponto onde esse caminho termina registra o número de voltas do laço.

O arco do capítulo será, portanto,

homotopia de caminhos $\longrightarrow \pi_1 \longrightarrow$ recobrimentos $\longrightarrow$ levantamentos $\longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Terminaremos com o cálculo do grupo fundamental do espaço projetivo real. A partir daí começa, propriamente, a topologia algébrica.

13.1 Homotopia e caminhos

Denotaremos por

$$I = [0, 1]$$

o intervalo unitário.

Definição 13.1 (Homotopia) Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas. Uma **homotopia** de f em g é uma aplicação contínua

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x)$$

para todo $x \in X$.

Nesse caso escrevemos

$$f \simeq g.$$

Para cada $s \in I$, a aplicação

$$H_s(x) = H(x, s)$$

é contínua. Assim, uma homotopia pode ser vista como uma deformação contínua da aplicação f na aplicação g . A palavra “contínua” é essencial: não basta ter uma coleção arbitrária de aplicações H_s .

Proposição 13.2 A relação de homotopia entre aplicações $X \rightarrow Y$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. A reflexividade é dada por

$$H(x, s) = f(x).$$

Se H é uma homotopia de f em g , então

$$\widetilde{H}(x, s) = H(x, 1 - s)$$

é uma homotopia de g em f .

Para a transitividade, sejam H uma homotopia de f em g e K uma homotopia de g em h . Defina

$$L(x, s) = \begin{cases} H(x, 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ K(x, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

As duas expressões coincidem em $s = 1/2$, onde ambas valem $g(x)$. O lema da colagem garante a continuidade de L .

■

Definição 13.3 (Nul-homotopia e espaços contráteis) Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é nul-homotópica se é homotópica a uma aplicação constante.

Um espaço X é contrátil se a identidade

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

é nul-homotópica.

Exemplo 13.4 Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é estrelado em relação a $a \in X$, então

$$H(x, s) = (1 - s)x + sa$$

é uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $x \mapsto a$. Portanto todo conjunto estrelado — em particular, todo conjunto convexo — é contrátil.

◁

Para o grupo fundamental, precisamos de uma forma mais rígida de homotopia.

Definição 13.5 (Homotopia relativa) Se $A \subset X$ e $f, g : X \rightarrow Y$, uma homotopia H entre f e g é relativa a A se

$$H(a, s) = f(a) = g(a)$$

para todo $a \in A$ e todo $s \in I$.

Definição 13.6 (Homotopia com extremos fixos) Dois caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ com os mesmos extremos são **homotópicos com extremos fixos** se são homotópicos relativamente ao conjunto $\{0, 1\}$.

Escreveremos

$$\alpha \simeq_{\text{ef}} \beta.$$

13.1.1 Concatenação e inversão

Se α é um caminho de x a y , seu caminho inverso é

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1 - t),$$

que vai de y a x .

Se α vai de x a y e β vai de y a z , a **concatenação** é

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A concatenação não é literalmente associativa como operação sobre caminhos parametrizados. As duas expressões

$$(\alpha * \beta) * \gamma \quad \text{e} \quad \alpha * (\beta * \gamma)$$

percorrem os mesmos trechos, mas com velocidades diferentes. A associatividade aparecerá depois de passarmos a classes de homotopia.

Lema 13.7 (Reparametrização) Se $\alpha : I \rightarrow X$ é um caminho e $\varphi : I \rightarrow I$ é contínua, com

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1,$$

então

$$\alpha \circ \varphi \simeq_{\text{ef}} \alpha.$$

Demonstração. Defina

$$H(t, s) = \alpha((1 - s)t + s\varphi(t)).$$

O argumento de α permanece em I , e os extremos $t = 0$ e $t = 1$ ficam fixos durante toda a deformação. ■

Proposição 13.8 Se as concatenações abaixo estiverem definidas, então:

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq_{\text{ef}} \alpha * (\beta * \gamma),$$

$$c_x * \alpha \simeq_{\text{ef}} \alpha, \quad \alpha * c_y \simeq_{\text{ef}} \alpha,$$

e

$$\alpha * \bar{\alpha} \simeq_{\text{ef}} c_x, \quad \bar{\alpha} * \alpha \simeq_{\text{ef}} c_y,$$

onde c_x denota o caminho constante em x .

Demonstração. Para a associatividade, considere o caminho δ que percorre α , β e γ , nessa ordem, reservando um terço do intervalo para cada trecho. Tanto $(\alpha * \beta) * \gamma$ quanto $\alpha * (\beta * \gamma)$ são reparametrizações de δ que preservam 0 e 1. O Lema 13.7 mostra que ambos são homotópicos a δ com extremos fixos.

As identidades envolvendo c_x e c_y seguem do mesmo lema: concatenar um caminho constante apenas introduz um intervalo de espera no início ou no fim.

Para a identidade com o inverso, suponha que α vá de x a y . A homotopia

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t(1 - s)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(2(1 - t)(1 - s)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

começa em $\alpha * \bar{\alpha}$ e termina no caminho constante c_x . As duas expressões coincidem em $t = 1/2$, e os extremos permanecem em x durante toda a homotopia. A outra identidade é obtida aplicando o mesmo argumento a $\bar{\alpha}$. ■

Proposição 13.9 (Compatibilidade com homotopia) Se

$$\alpha \simeq_{\text{ef}} \alpha', \quad \beta \simeq_{\text{ef}} \beta',$$

e as concatenações estão definidas, então

$$\alpha * \beta \simeq_{\text{ef}} \alpha' * \beta'.$$

Demonstração. Se H e K são as duas homotopias, defina

$$L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

As duas partes coincidem em $t = 1/2$, e o lema da colagem conclui a prova. ■

13.2 O grupo fundamental

Fixe um ponto $x_0 \in X$.

Definição 13.10 (Laço) Um laço baseado em x_0 é um caminho

$$\alpha : I \rightarrow X$$

tal que

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

Denotaremos por $[\alpha]$ a classe de homotopia com extremos fixos de um laço.

Definição 13.11 (Grupo fundamental) O grupo fundamental de X baseado em x_0 é

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha \text{ é um laço baseado em } x_0\},$$

com produto

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Teorema 13.12 A operação anterior está bem definida e torna $\pi_1(X, x_0)$ um grupo. O elemento neutro é $[c_{x_0}]$ e

$$[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}].$$

Demonstração. A boa definição segue da Proposição 13.9. A associatividade, a unidade e a existência de inversos seguem, respectivamente, das três identidades da Proposição 13.8. ■

É importante notar o que aconteceu: a concatenação não forma um grupo no nível dos caminhos. As identidades algébricas só aparecem depois de esquecermos a parametrização precisa e passarmos às classes de homotopia.

Definição 13.13 (Simplesmente conexo) Um espaço X é simplesmente conexo se é conexo por caminhos e

$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$$

para algum ponto base x_0 .

Em um espaço conexo por caminhos, o ponto base não altera a classe de isomorfismo do grupo.

Proposição 13.14 (Mudança de ponto base) Se λ é um caminho de x_0 a x_1 , então

$$\Phi_\lambda : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1),$$

definida por

$$\Phi_\lambda([\alpha]) = [\bar{\lambda} * \alpha * \lambda],$$

é um isomorfismo.

Demonstração. A aplicação está bem definida e é um homomorfismo pelas propriedades da concatenação. Sua inversa é $\Phi_{\bar{\lambda}}$, pois os trechos $\lambda * \bar{\lambda}$ e $\bar{\lambda} * \lambda$ são homotópicos a caminhos constantes. ■

Por isso escrevemos frequentemente $\pi_1(X)$ quando X é conexo por caminhos e o ponto base não é relevante.

13.2.1 Aplicações contínuas e invariância

Uma aplicação contínua entre espaços pontuados induz um homomorfismo entre seus grupos fundamentais.

Teorema 13.15 Se

$$f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

é contínua e $f(x_0) = y_0$, então

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha],$$

é um homomorfismo.

Além disso,

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

e

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Demonstração. Se $\alpha \simeq_{\text{ef}} \beta$, então uma homotopia entre eles pode ser composta com f , produzindo uma homotopia com extremos fixos entre $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$. Assim f_* está bem definida.

Também

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta),$$

o que prova que f_* é um homomorfismo. As demais identidades seguem diretamente da definição. ■

Corolário 13.16 (Invariância por homeomorfismo) Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo e $x_0 \in X$, então

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

é um isomorfismo.

Demonstração. De fato,

$$(f^{-1})_* \circ f_* = (\text{id}_X)_*$$

e

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (\text{id}_Y)_*.$$

■

Corolário 13.17 Todo espaço contrátil é simplesmente conexo.

Demonstração. Se

$$H : X \times I \rightarrow X$$

contrai X ao ponto a , então o caminho

$$s \mapsto H(x, s)$$

liga cada $x \in X$ a a . Logo X é conexo por caminhos.

Fixe $x_0 \in X$ e escreva

$$\lambda(s) = H(x_0, s),$$

um caminho de x_0 a a . Se α é um laço baseado em x_0 , considere

$$K(t, s) = H(\alpha(t), s).$$

A borda desse quadrado é, a menos de reparametrização, o laço

$$\bar{\lambda} * \alpha * \lambda$$

baseado em a . Como o próprio quadrado fornece um preenchimento dessa borda, esse laço é nul-homotópico. Portanto

$$\Phi_\lambda([\alpha]) = 1.$$

Como Φ_λ é um isomorfismo pela Proposição 13.14, segue que $[\alpha] = 1$.

■

Proposição 13.18 (Grupo fundamental de um produto) Para espaços pontuados (X, x_0) e (Y, y_0) ,

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Demonstração. As projeções $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ induzem

$$\Psi([\gamma]) = ([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]).$$

Na direção oposta, defina

$$\Theta([\alpha], [\beta]) = [t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))].$$

Homotopias nas duas coordenadas produzem uma homotopia no produto, de modo que Θ está bem definida. As duas aplicações preservam concatenação e são inversas uma da outra. ■

13.2.2 Esferas de dimensão pelo menos dois

O círculo será o primeiro exemplo com grupo fundamental não trivial. Antes disso, registramos que as esferas de dimensão maior não possuem essa obstrução.

Teorema 13.19 Para todo $n \geq 2$,

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0.$$

Demonstração. Veja $\mathbb{S}^n$ como a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ com o produto interno euclidiano. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ um laço. Como α é uniformemente contínua, podemos escolher uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$$

tão fina que, para cada j , a imagem de $[t_{j-1}, t_j]$ esteja contida no hemisfério aberto

$$H_j = \{u \in \mathbb{S}^n : \langle u, \alpha(t_{j-1}) \rangle > 0\}.$$

Em cada subintervalo, ligue $\alpha(t_{j-1})$ a $\alpha(t_j)$ pelo arco

$$\beta(t) = \frac{(1-r)\alpha(t_{j-1}) + r\alpha(t_j)}{\|(1-r)\alpha(t_{j-1}) + r\alpha(t_j)\|}, \quad r = \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}.$$

O denominador não se anula porque os extremos pertencem ao mesmo hemisfério aberto. Os arcos se colam e formam um laço β .

Além disso, para cada $t \in [t_{j-1}, t_j]$, os pontos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ pertencem ao mesmo hemisfério H_j e, portanto, não são antipodais. Assim

$$K(t, s) = \frac{(1-s)\alpha(t) + s\beta(t)}{\|(1-s)\alpha(t) + s\beta(t)\|}$$

está bem definida em cada subintervalo. Essas fórmulas concordam nos pontos t_j e fornecem uma homotopia com extremos fixos entre α e β .

A imagem de β está contida em uma união finita de grandes círculos. Cada um deles é a interseção de $\mathbb{S}^n$ com um subespaço linear próprio de $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma união finita de subespaços lineares próprios não cobre $\mathbb{R}^{n+1}$; logo existe

$$a \in \mathbb{S}^n \setminus \beta(I).$$

A projeção estereográfica identifica

$$\mathbb{S}^n \setminus \{a\} \cong \mathbb{R}^n.$$

Nesse espaço, β é nul-homotópico pela interpolação linear. Como $\alpha \simeq_{\text{ef}} \beta$, o laço α também é nul-homotópico. ■

13.3 Espaços de recobrimento

A definição seguinte abstrai exatamente o comportamento da aplicação

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Definição 13.20 (Aplicação de recobrimento) Uma aplicação contínua e sobrejetiva

$$p : \tilde{X} \longrightarrow X$$

é uma aplicação de recobrimento se, para todo $x \in X$, existe um aberto $U \ni x$ tal que

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda,$$

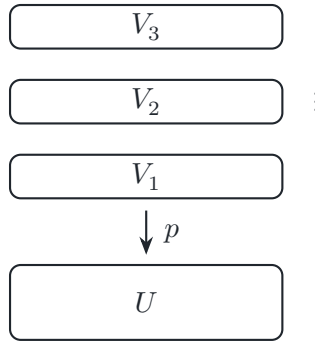
onde cada V_λ é aberto em $\widetilde{X}$ e

$$p|_{V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow U$$

é um homeomorfismo.

Nesse caso, $\widetilde{X}$ é um espaço de recobrimento de X .

O aberto U é dito **distinguido**, e os conjuntos V_λ são as **folhas** do recobrimento sobre U .



A definição diz que, localmente no espaço de base, o recobrimento é apenas uma coleção disjunta de cópias do mesmo aberto.

Proposição 13.21 Toda aplicação de recobrimento é um homeomorfismo local e uma aplicação aberta.

Demonstração. Dado $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, escolha um aberto distinguido U contendo $p(\tilde{x})$ e a folha V que contém $\tilde{x}$. Então

$$p|_V : V \rightarrow U$$

é um homeomorfismo. Logo p é um homeomorfismo local.

Se $A \subset \widetilde{X}$ é aberto e $\tilde{x} \in A$, então

$$p(A \cap V)$$

é uma vizinhança aberta de $p(\tilde{x})$ contida em $p(A)$. Portanto $p(A)$ é aberto.



Definição 13.22 (Fibra) Se $x \in X$, o conjunto

$$p^{-1}(x)$$

é a fibra sobre x .

Proposição 13.23 Cada fibra é um subespaço discreto de $\widetilde{X}$. Além disso, a função

$$x \mapsto |p^{-1}(x)|$$

é localmente constante. Se X é conexo, todas as fibras têm a mesma cardinalidade.

Demonstração. Se $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e V é uma folha sobre um aberto distinguido $U \ni x$, então

$$V \cap p^{-1}(x) = \{\tilde{x}\},$$

pois $p|_V$ é injetiva. Logo a fibra é discreta.

Sobre um mesmo aberto distinguido U , cada ponto possui exatamente um ponto da fibra em cada folha. Portanto a cardinalidade da fibra é constante em U . ■

13.3.1 Exemplos

Exemplo 13.24 (A reta sobre o círculo) A aplicação

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad p(t) = e^{2\pi it},$$

é um recobrimento de infinitas folhas.

Todo ponto do círculo possui um arco aberto pequeno o bastante para admitir uma determinação contínua do argumento. A imagem inversa desse arco é uma união disjunta de intervalos, e cada intervalo se projeta homeomorficamente sobre o arco. ◁

Exemplo 13.25 (Recobrimentos finitos do círculo) Para $m \geq 1$,

$$p_m : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad p_m(z) = z^m,$$

é um recobrimento de m folhas.



Exemplo 13.26 (Espaço projetivo real) A aplicação quociente

$$q : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad q(x) = [x],$$

identifica pontos antipodais. Ela é um recobrimento de duas folhas.



Nem todo homeomorfismo local é um recobrimento.

Exemplo 13.27 A aplicação

$$p : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad p(t) = e^{2\pi it},$$

é um homeomorfismo local, mas não é um recobrimento. Perto de $1 \in \mathbb{S}^1$, as componentes de $p^{-1}(U)$ próximas de 0 e de 2 não se projetam sobre todo o arco U .



13.4 Levantamento de caminhos

Definição 13.28 (Levantamento) Se

$$p : \widetilde{X} \rightarrow X$$

é contínua e $f : Y \rightarrow X$ é contínua, um **levantamento** de f através de p é uma aplicação contínua

$$\tilde{f} : Y \rightarrow \widetilde{X}$$

tal que

$$p \circ \tilde{f} = f.$$

Para caminhos, aplicações de recobrimento garantem existência e unicidade depois de escolhido o ponto inicial.

Teorema 13.29 (Levantamento de caminhos) Seja

$$p : \widetilde{X} \rightarrow X$$

uma aplicação de recobrimento, seja $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho e escolha

$$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\alpha(0)).$$

Então existe um único caminho

$$\tilde{\alpha} : I \rightarrow \widetilde{X}$$

tal que

$$p \circ \tilde{\alpha} = \alpha \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0.$$

Demonstração. As imagens inversas, por α , dos abertos distinguidos formam uma cobertura aberta de I . Pelo lema do número de Lebesgue para coberturas abertas de um intervalo compacto, existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$$

tão fina que, para cada j ,

$$\alpha([t_{j-1}, t_j])$$

está contido em algum aberto distinguido U_j .

No primeiro intervalo, escolha a folha V_1 que contém $\tilde{x}_0$ e defina

$$\tilde{\alpha}(t) = (p|_{V_1})^{-1}(\alpha(t)).$$

Indutivamente, ao chegar a t_{j-1} , existe uma única folha V_j sobre U_j que contém $\tilde{\alpha}(t_{j-1})$, e usamos a mesma fórmula com V_j . O lema da colagem fornece um caminho contínuo em todo o intervalo.

Para a unicidade, sejam $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\alpha}_2$ dois levantamentos com o mesmo ponto inicial. O conjunto

$$A = \{t \in I : \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)\}$$

é não vazio. Se $t \in A$, escolha uma vizinhança distinguida U de $\alpha(t)$ e a folha V que contém o valor comum dos dois levantamentos. Para s suficientemente próximo de t , ambos permanecem em V e são dados por

$$(p|_V)^{-1}(\alpha(s)).$$

Logo A é aberto.

Se $t \notin A$, os dois valores pertencem a folhas distintas sobre alguma vizinhança distinguida de $\alpha(t)$. Pela continuidade dos levantamentos, eles permanecem nessas folhas distintas para s próximo de t . Portanto $I \setminus A$ também é aberto. Como I é conexo,

$$A = I.$$

■

A prova mostra mais do que existência: uma vez escolhido o ponto inicial, o levantamento é forçado.

Corolário 13.30 (Unicidade de levantamentos) Se Y é conexo e

$$\tilde{f}, \tilde{g} : Y \rightarrow \tilde{X}$$

são levantamentos da mesma aplicação $f : Y \rightarrow X$, então a igualdade

$$\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$$

em algum ponto $y_0 \in Y$ implica

$$\tilde{f} = \tilde{g}.$$

Demonstração. Seja

$$A = \{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\}.$$

Em torno de um ponto de A , os dois levantamentos caem na mesma folha de uma vizinhança distinguida de $f(y)$ e são dados pela mesma inversa local de p ; logo A é aberto. Em torno de um ponto fora de A , os dois valores pertencem a folhas distintas e continuam separados em uma vizinhança; portanto $Y \setminus A$ também é aberto. Como Y é conexo e A é não vazio, $A = Y$.

■

13.5 Levantamento de homotopias

Para que o ponto final de um levantamento dependa apenas da classe de homotopia do caminho, precisamos levantar famílias contínuas de caminhos.

Teorema 13.31 (Levantamento de homotopias) Se

$$p : \widetilde{X} \rightarrow X$$

é um recobrimento,

$$H : Y \times I \rightarrow X$$

é uma homotopia e

$$\tilde{f} : Y \rightarrow \widetilde{X}$$

é um levantamento de

$$H_0(y) = H(y, 0),$$

então existe uma única homotopia

$$\widetilde{H} : Y \times I \rightarrow \widetilde{X}$$

tal que

$$p \circ \widetilde{H} = H \quad \text{e} \quad \widetilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y).$$

Demonstração. Para cada $y \in Y$, levante o caminho

$$t \mapsto H(y, t)$$

a partir de $\tilde{f}(y)$. Isso define uma única candidata $\widetilde{H}(y, t)$.

Resta verificar a continuidade conjunta. Fixe $y_0 \in Y$. A imagem compacta

$$H(\{y_0\} \times I)$$

pode ser percorrida em finitos trechos, cada um contido em um aberto distinguido. Assim, para alguma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1,$$

há abertos distinguidos U_j tais que

$$H(\{y_0\} \times [t_{j-1}, t_j]) \subset U_j.$$

Pela continuidade de H e pela compacidade de cada intervalo fechado, podemos escolher uma vizinhança N de y_0 tal que

$$H(N \times [t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$$

para todo j . Encolhendo N se necessário, a continuidade de $\tilde{f}$ garante ainda que $\tilde{f}(N)$ esteja na mesma folha de $p^{-1}(U_1)$ que contém $\tilde{f}(y_0)$.

No primeiro trecho, portanto,

$$\tilde{H}(y, t) = (p|_{V_1})^{-1}(H(y, t))$$

para uma folha fixa V_1 . No extremo t_1 , a imagem de N cai continuamente em uma única folha sobre U_2 depois de um novo encolhimento de N . Repetindo o argumento finitas vezes, obtemos, em cada faixa $N \times [t_{j-1}, t_j]$, uma expressão contínua dada pela inversa de uma folha fixa. As expressões coincidem nos extremos pela unicidade do levantamento e, pelo lema da colagem, $\tilde{H}$ é contínua em $N \times I$.

Como y_0 foi arbitrário, a continuidade vale em todo $Y \times I$.

A unicidade segue, para cada y , da unicidade do levantamento do caminho $t \mapsto H(y, t)$. ■

Corolário 13.32 Se $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ são homotópicos com extremos fixos e seus levantamentos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ começam no mesmo ponto, então terminam no mesmo ponto:

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1).$$

Demonstração. Levante uma homotopia com extremos fixos entre α e β . As bordas verticais da homotopia levantada permanecem em fibras. Como fibras são discretas e I é conexo, essas bordas são constantes. ■

Esse corolário é a ponte essencial entre recobrimentos e o grupo fundamental.

13.6 Recobrimentos e o grupo fundamental

Fixe um recobrimento pontuado

$$p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0).$$

Teorema 13.33 O homomorfismo induzido

$$p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

é injetivo.

Demonstração. Suponha

$$p_*([\tilde{\alpha}]) = 1.$$

Então o laço $p \circ \tilde{\alpha}$ é homotópico, com extremos fixos, ao laço constante em x_0 .
 Levante essa homotopia começando em $\tilde{\alpha}$.

A borda esquerda da homotopia levantada projeta no caminho constante em x_0 e começa em $\tilde{x}_0$; pela unicidade, ela permanece constantemente em $\tilde{x}_0$. Assim, no instante final, obtemos um levantamento do laço constante começando em $\tilde{x}_0$. Pela unicidade, esse levantamento é o próprio laço constante. As duas bordas verticais permanecem fixas, de modo que a homotopia levantada é uma homotopia com extremos fixos. Logo $\tilde{\alpha}$ é nul-homotópico e

$$[\tilde{\alpha}] = 1.$$

■

Corolário 13.34 (Quando um laço levanta a um laço) Se α é um laço baseado em x_0 e $\tilde{\alpha}$ é seu levantamento com

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0,$$

então

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$$

se, e somente se,

$$[\alpha] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Demonstração. Se $\tilde{\alpha}$ é um laço, então

$$[\alpha] = p_*([\tilde{\alpha}]).$$

Reciprocamente, suponha

$$[\alpha] = p_*([\tilde{\beta}])$$

para algum laço $\tilde{\beta}$ baseado em $\tilde{x}_0$. Os caminhos α e $p \circ \tilde{\beta}$ são homotópicos com extremos fixos. Seus levantamentos a partir de $\tilde{x}_0$ terminam no mesmo ponto pelo Corolário 13.32. Como $\tilde{\beta}$ é fechado, $\tilde{\alpha}$ também é. ■

13.7 O grupo fundamental do círculo

Voltamos agora ao recobrimento

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad p(t) = e^{2\pi it}.$$

Escolha $1 \in \mathbb{S}^1$ como ponto base. Se α é um laço baseado em 1, seja $\tilde{\alpha}$ seu levantamento começando em 0. Como

$$\alpha(1) = 1,$$

temos

$$\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}.$$

Definição 13.35 (Número de voltas) Definimos

$$w([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1).$$

Proposição 13.36 A aplicação

$$w : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$$

está bem definida e é um homomorfismo.

Demonstração. Se α e β são homotópicos com extremos fixos, seus levantamentos começando em 0 terminam no mesmo ponto pelo Corolário 13.32. Logo w depende apenas da classe $[\alpha]$.

Se

$$w([\alpha]) = m, \quad w([\beta]) = n,$$

o levantamento de β que começa em m é

$$t \mapsto m + \tilde{\beta}(t).$$

Portanto o levantamento de $\alpha * \beta$ começando em 0 termina em $m + n$. Assim

$$w([\alpha][\beta]) = w([\alpha]) + w([\beta]).$$

■

Teorema 13.37 (Grupo fundamental do círculo) A aplicação

$$w : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

é um isomorfismo. Portanto

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, considere

$$\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}.$$

Seu levantamento começando em 0 é

$$\tilde{\alpha}_n(t) = nt,$$

logo

$$w([\alpha_n]) = n.$$

Portanto w é sobrejetiva.

Se

$$w([\alpha]) = 0,$$

o levantamento $\tilde{\alpha}$ começa e termina em 0. Como $\mathbb{R}$ é convexo, a homotopia linear

$$H(t, s) = (1 - s)\tilde{\alpha}(t)$$

contrai $\tilde{\alpha}$ ao laço constante e mantém os dois extremos em 0. Compondo com p , obtemos uma nul-homotopia de α com extremos fixos. Assim

$$[\alpha] = 1,$$

e w é injetiva. ■

O grupo fundamental do círculo é, portanto, a álgebra do número de voltas. A operação de concatenação corresponde exatamente à soma de inteiros.

13.7.1 Uma aplicação: o disco não retrai sobre o círculo

Teorema 13.38 (Teorema da não retração) Não existe retração contínua

$$r : D^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

da inclusão

$$i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow D^2.$$

Demonstração. Se existisse uma retração, teríamos

$$r \circ i = \text{id}_{\mathbb{S}^1}.$$

Aplicando o grupo fundamental,

$$r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)}.$$

Mas

$$\pi_1(D^2) = 0,$$

pois o disco é contrátil. Logo i_* é o homomorfismo nulo, e $r_* \circ i_*$ também seria nulo. Isso contradiz

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

■

Esse é o primeiro exemplo em que um invariante algébrico fornece uma obstrução concreta à existência de uma aplicação contínua.

13.8 O grupo fundamental do espaço projetivo

O mesmo mecanismo calcula imediatamente o grupo fundamental do espaço projetivo real.

Teorema 13.39 Para $n \geq 2$,

$$\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Demonstração. Considere o recobrimento de duas folhas

$$q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad q(x) = [x].$$

Fixe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ e use $[x_0]$ como ponto base em $\mathbb{P}^n$.

Se α é um laço em $\mathbb{P}^n$ baseado em $[x_0]$, seu levantamento $\tilde{\alpha}$ começando em x_0 termina necessariamente em um dos dois pontos da fibra:

$$\tilde{\alpha}(1) \in \{x_0, -x_0\}.$$

Pelo levantamento de homotopias, esse ponto final depende apenas da classe $[\alpha]$.

Defina

$$\varepsilon([\alpha]) = \begin{cases} 0, & \tilde{\alpha}(1) = x_0, \\ 1, & \tilde{\alpha}(1) = -x_0. \end{cases}$$

A aplicação está bem definida pelo levantamento de homotopias.

Ela é um homomorfismo. Se $\tilde{\beta}$ é o levantamento de β que começa em x_0 , então o levantamento de β que começa em $-x_0$ é $-\tilde{\beta}$, pois a transformação antipodal comuta com q . Assim, ao levantar $\alpha * \beta$, o segundo trecho preserva ou troca a folha exatamente como o levantamento de β a partir de x_0 . Consequentemente,

$$\varepsilon([\alpha][\beta]) = \varepsilon([\alpha]) + \varepsilon([\beta]) \pmod{2}.$$

Ele é sobrejetivo: escolha um caminho em $\mathbb{S}^n$ de x_0 até $-x_0$; sua projeção é um laço cujo levantamento termina em $-x_0$.

Resta mostrar que o núcleo é trivial. Se o levantamento de α termina em x_0 , então ele é um laço em $\mathbb{S}^n$. Como $n \geq 2$,

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$$

pelo Teorema 13.19. Logo $\tilde{\alpha}$ é nul-homotópico, e sua projeção α também é. Portanto ε é injetiva.



13.9 Daqui em diante: topologia algébrica

A teoria de recobrimentos prossegue em várias direções. Sob hipóteses locais naturais, pode-se construir um recobrimento universal e classificar os recobrimentos conexos por subgrupos do grupo fundamental. Transformações de deck, ações sobre fibras e o teorema de Seifert–van Kampen pertencem à continuação natural da teoria.

Para os objetivos deste livro, porém, o arco essencial está completo:

$$\text{laços} \longrightarrow \pi_1 \longrightarrow \text{levantamentos} \longrightarrow \text{obstruções topológicas}.$$

O grupo fundamental não determina toda a topologia do espaço:

$$\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$$

e $\mathbb{S}^2$ não é contrátil. Ainda assim, ele já distingue o círculo de um ponto, impede uma retração do disco sobre sua fronteira e separa a esfera do espaço projetivo. A partir daqui, essas ideias deixam de ser um complemento de topologia geral e passam a constituir o objeto central da topologia algébrica.

13.10 Exercícios

Exercícios

Ex. 13.1 — Verifique diretamente que homotopia relativa a um subconjunto é uma relação de equivalência.

Ex. 13.2 — Complete os detalhes da Proposição 13.8, escrevendo homotopias explícitas para

$$c_x * \alpha \simeq_{\text{ef}} \alpha$$

e

$$\alpha * c_y \simeq_{\text{ef}} \alpha.$$

Ex. 13.3 — Mostre que

$$\overline{\alpha * \beta} \simeq_{\text{ef}} \overline{\beta} * \overline{\alpha}.$$

Ex. 13.4 — Prove que a mudança de ponto base da Proposição 13.14 é um homomorfismo.

Ex. 13.5 — Use a Proposição 13.18 para mostrar que todo produto finito de espaços simplesmente conexos é simplesmente conexo.

Ex. 13.6 — Complete os detalhes da prova de que

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0, \quad n \geq 2,$$

justificando a aproximação do laço por uma cadeia finita de arcos geodésicos.

Ex. 13.7 — Verifique que

$$p_m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad p_m(z) = z^m,$$

é um recobrimento de m folhas.

Ex. 13.8 — Mostre diretamente que a fibra de uma aplicação de recobrimento é discreta.

Ex. 13.9 — Analise por que

$$(0, 2) \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t},$$

é um homeomorfismo local mas não um recobrimento.

Ex. 13.10 — Complete os detalhes da prova da unicidade do levantamento de caminhos, mostrando que o conjunto de coincidência e seu complemento são abertos.

Ex. 13.11 — Seja

$$\alpha(t) = e^{2\pi i(at+b)}.$$

Determine explicitamente seu levantamento para $\mathbb{R}$ depois de escolhido o ponto inicial.

Ex. 13.12 — Mostre que o número de voltas satisfaz

$$w([\bar{\alpha}]) = -w([\alpha]).$$

Ex. 13.13 — Para

$$f_m : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad f_m(z) = z^m,$$

determine o homomorfismo

$$(f_m)_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$$

sob a identificação

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ex. 13.14 — Use

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

e a Proposição 13.18 para mostrar que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Ex. 13.15 — Use o Teorema 13.38 para provar o teorema do ponto fixo de Brouwer no disco: toda aplicação contínua

$$f : D^2 \rightarrow D^2$$

possui um ponto fixo.

Ex. 13.16 — No recobrimento antipodal

$$q : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n,$$

descreva explicitamente a classe não trivial de

$$\pi_1(\mathbb{P}^n), \quad n \geq 2.$$

Ex. 13.17 — Mostre que o cilindro

$$\mathbb{S}^1 \times I$$

tem o mesmo grupo fundamental do círculo.

Ex. 13.18 — Mostre que o anel

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$$

é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times I$ e conclua que

$$\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}.$$

Ex. 13.19 — Explique por que o grupo fundamental não pode distinguir $\mathbb{S}^2$ de um ponto, embora esses espaços não sejam homeomorfos.

O capítulo começou com a pergunta mais simples possível sobre um laço: quando ele pode ser deformado até desaparecer? A resposta produziu um grupo. Em seguida, um recobrimento transformou laços em caminhos com pontos finais controlados, e o grupo abstrato tornou-se uma quantidade concreta: o número de voltas.

Essa passagem de deformação para álgebra é pequena o bastante para caber em um capítulo, mas poderosa o bastante para abrir uma teoria inteira.

Referências

- 1 MUNKRES, James. **Topology**. [S. l.]: Pearson Education, 2014.
- 2 WILLARD, Stephen. **General topology**. [S. l.]: Courier Corporation, 2004.
- 3 ENGELKING, Ryszard. **General topology**, Sigma series in pure mathematics, vol. 6. [S. l.]: Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- 4 SUTHERLAND, Wilson A. **Introduction to metric and topological spaces**. [S. l.]: Oxford University Press, 2009.
- 5 REISEL, Robert B. **Elementary theory of metric spaces: a course in constructing mathematical proofs**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 6 SCOTT, Brian M. A “more topological” proof of the Tietze-Urysohn theorem. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 85, n. 3, p. 192–193, 1978.
- 7 HODEL, R. Cardinal functions I, **Handbook of set-theoretic topology**. North Holland, Amsterdam, p. 1–61, 1984.
- 8 KURATOWSKI, Kazimierz. **Topology**. [S. l.]: Elsevier, 2014. v. 1.
- 9 WALDMANN, Stefan. **Topology: an introduction**. [S. l.]: Springer, 2014.
- 10 AULL, Charles E; LOWEN, Robert. **Handbook of the history of general topology**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 3.

- 11 BOURBAKI, Nicolas. **Elements of mathematics: General topology**. [S. l.]: Springer, 1995.
- 12 DIXMIER, Jacques. **General topology**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- 13 STEEN, Lynn Arthur; SEEBACH, J Arthur; STEEN, Lynn A. **Counterexamples in topology**. [S. l.]: Springer, 1978. v. 18.
- 14 BREDON, Glen E. **Topology and geometry**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 139.
- 15 KELLEY, John L. **General topology**. [S. l.]: Courier Dover Publications, 2017.
- 16 ARMSTRONG, Mark Anthony. **Basic topology**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- 17 JAMES, Ioan Mackenzie. **General topology and homotopy theory**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- 18 JOSHI, Kapil D. **Introduction to general topology**. [S. l.]: New Age International, 1983.
- 19 BALLMANN, Werner. **Introduction to Geometry and Topology**. 1st ed. [S. l.]: Springer Basel; Birkhäuser, 2018. (Compact Textbooks in Mathematics).
- 20 LIMA, Elon Lages. **Topologia dos espaços métricos**. [S. l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, 1958.
- 21 LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. [S. l.]: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.
- 22 KHAMSI, Mohamed A; KIRK, William A. **An introduction to metric spaces and fixed point theory**. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 53.
- 23 VIRO, O Ya *et al.* **Elementary topology**. [S. l.]: American Mathematical Soc., 2008.
- 24 WICK, DICK; GUILFORD, L AUTOR SPENCER. **Elementary topology**. [S. l.]: John Wiley & Sons Inc, 1955.

- 25 MENDELSON, Bert. **Introduction to topology**. [S. l.]: Springer, 1962.
- 26 KALAJDZIEVSKI, Sasho. **An illustrated introduction to topology and homotopy**. [S. l.]: Chapman e Hall/CRC, 2015.
- 27 CROOM, Fred H. **Principles of topology**. [S. l.]: Courier Dover Publications, 2016.
- 28 YAN, Min. **Introduction to topology**. [S. l.]: Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.
- 29 SAKAI, Katsuro. **Geometric aspects of general topology**. [S. l.]: Springer, 2013.

Índice Remissivo

- σ -compacto, 172
- aberta, 84
- aberto, 8
- abertos, 28
- abertos relativos, 88
- aplicação
 - de recobrimento, 288
 - fecho, 57
 - interior, 60
- aplicação de avaliação, 109
- aplicação quociente, 116
- atlas topológico de dimensão n , 155
- base, 45
- base de vizinhanças, 23, 63
- base de vizinhanças abertas, 63
- base local, 63
- bola
 - fechada, 6
- bola aberta, 6
- caminho, 228
- carta local de dimensão n , 154
- Cauchy, 180
- clopen, 40
- cobertura aberta, 158
- compactificação, 190
- compactificação de Stone–Čech, 248
- compactificação por um ponto, 193
- compacto, 159
- completamente regular, 245
- completo, 180
- componente conexa, 226
- componentes conexas por caminhos,
229
- concatenação
 - de caminhos, 281
- condição de cadeia enumerável, 137
- conexo, 222
- conexo por caminhos, 228
- conjunto derivado, 68
- conjunto dirigido, 199
- Continuidade Superior, 31
- contrátil, 280
- contínua, 15, 34, 77
- contínua em $a \in X$, 78
- converge, 19, 75
- de Tychonoff, 245
- denso, 70
- desconexo, 222
- desigualdade triangular, 2
- distância no grafo, 4

- enumeravelmente compacto, 172
- equivalentes, 10
- esfera, 90
- espaço
 - de recobrimento, 289
- espaço compacto, 159
- espaço métrico, 2
- espaço produto, 101, 105
- espaço pseudométrico, 2
- espaço quociente, 114
- espaço topológico, 28
- eventualmente, 200
- fechada, 84
- fechado, 8, 28, 38
- fecho , 56
- fibra, 290
- filtro, 206
 - base, 206
 - convergência, 207
 - de eventualidade, 209
 - de Fréchet, 207
 - de vizinhanças, 207
 - imagem, 208
 - ponto de aderência, 207
 - principal, 207
 - refinamento, 207
- folha de recobrimento, 289
- fracamente hereditária, 90
- Fréchet, 33
- frequentemente, 200
- Fréchet, 126
- função
 - contínua, 15
 - contínua num ponto, 34
- grupo fundamental, 283
- Hausdorff, 33, 126
- hereditariamente Lindelöf, 138
- hereditária, 90
- homeomorfismo, 81, 84
- homeomorfismo local em x_0 , 83
- homeomorfos, 81
- homotopia, 279
 - com extremos fixos, 281
 - relativa, 280
- identidade do paralelogramo, 13
- interior, 59
- Kolmogorov, 33, 126
- laço baseado em x_0 , 283
- levantamento, 291
- limitado, 9
- Lindelöf, 138, 172
- Lipschitz, 11, 16
- Lipschitz-equivalentes, 11
- localmente compacto, 185
- localmente conexo, 231
- localmente conexo por caminhos,
 - 231
- localmente fechado, 188
- maior, 35
- mais fina, 10, 35
- mais forte, 35
- mais fraca, 35
- menor, 35
- mergulho, 84, 95
- metrizável, 34
- mudança de coordenadas, 155
- métrica, 2
 - mais fina, 10
- métrica do supremo, 3
- normal, 238
- nul-homotópica, 280
- ponto de acumulação, 67

- pontos aderentes, 56
- pontos isolados, 70
- primeiro axioma de
 - enumerabilidade, 67
- primeiro-enumerável, 134
- produto cartesiano, 106
- projeção canônica, 114
- projeções canônicas em X e Y , 101
- propriedade da interseção finita, 161
- pseudométrica, 2
- rede, 200
 - convergência, 200
 - ponto de aderência, 200
 - universal, 214
- regular, 236
- saturado, 118
- segundo enumerável, 51
- segundo-enumerável, 134
- separa pontos, 109
- separável, 71, 136
- sequencialmente compacto, 172
- seqüência, 18, 75
 - converge, 75
 - convergente, 19
- simplesmente conexo, 284
- sub-base, 53
- sub-rede, 204
- subcobertura, 158
- subespaço, 88
- subespaço métrico, 3
- T_0 , 33
- T_1 , 33
- T_2 , 33
- topologia, 28
 - associada a métrica, 29
 - caixa, 112
 - cofinita, 32
 - da continuidade inferior, 31
 - da continuidade superior, 31
 - da soma, 123
 - discreta, 29, 31
 - do ponto, 32
 - dois elementos, 29
 - esfera, 90
 - final, 96
 - fraca, 95
 - induzida, 88
 - inicial, 32
 - métrica, 29
 - produto, 101
 - quociente, 114
 - relativa, 33
 - Sierpinski, 29
 - toro, 119
 - trivial, 29
 - três elementos, 30
 - usual da reta, 29
 - Zariski, 41
- topologia cofinita, 32
- topologia da caixa, 112
- topologia da convergência pontual, 110
- topologia da ordem, 55
- topologia da soma, 123
- topologia de Sorgenfrey, 48
- topologia de subespaço, 88
- topologia de Zariski, 41
- topologia do ponto, 32
- topologia final, 96
- topologia fraca, 95
- topologia gerada por $\mathcal{S}$, 42
- topologia induzida, 88
- topologia induzida por d , 10
- topologia inicial, 95
- topologia produto, 101, 105, 106
- topologia quociente, 114

totalmente desconexo, 225

totalmente limitado, 181

ultrafiltro, 211

livre, 211

principal, 211

ultrarede, 214

uniformemente contínua, 174

união disjunta, 122

variedade topológica de dimensão n ,
154

vizinhança, 61

distinguida, 289

vizinhança aberta, 61

vizinhança de x , 22

vizinhança perfurada, 68

Índice de topologias

associada a métrica, 29

caixa, 112

cofinita, 32

da continuidade inferior, 31

da continuidade superior, 31

da soma, 123

discreta, 29, 31

do ponto, 32

dois elementos, 29

esfera, 90

final, 96

fraca, 95

induzida, 88

inicial, 32

métrica, 29

produto, 101

quociente, 114

relativa, 33

Sierpinski, 29

toro, 119

trivial, 29

três elementos, 30

usual da reta, 29

Zariski, 41