LISTA 4

Cohomologia, Homologia Celular e Dualidade

Exercícios

1 — Esse exercício mostra que alguns resultados e técnicas de homologia se generalizam para a cohomologia.

a) Calcule $H^i(\mathbb{S}^n;G)$ por indução em n de duas maneiras: usando a sequência exata longa de um par e usando a sequência de Mayer-Vietoris.

b) Mostre que se A é um subespaço fechado de X que é um retrato por deformação de alguma vizinhança, então a aplicação quociente $X \to X/A$ induz isomorfismos $H^n(X,A;G) \cong \tilde{H}^n(X/A;G)$ para todo n.

c) Mostre que se A é uma retração de X então $H^n(X;G) \cong H^n(A;G) \oplus H^n(X,A;G)$.

2 — Prove que o produto cup $\smile$ em $S^*(X;R)$ é bilinear, associativo e tem o ciclo ϵ como elemento identidade.

3 —

a) Mostre que os espaços $\mathbb{CP}^3$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ não são homotopicamente equivalentes.

b) Mostre que os espaços $\mathbb{CP}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \cdots \times \mathbb{S}^{2n}$ não são homotopicamente equivalentes para todo $n > 1$.

4 — Seja X o espaço obtido anexando duas 2-células a $\mathbb{S}^1$, uma através da aplicação $z \mapsto z^3$ e outra via $z \mapsto z^5$, onde z denota a coordenada complexa em $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Calcule os grupos de cohomologia $H^*(X;\mathbb{Z})$.

5 —

a) Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação de grau m. Seja $X = \mathbb{S}^n \cup_f e^{n+1}$ o espaço obtido de $\mathbb{S}^n$ anexando um $(n+1)$-célula via f. Calcule a homologia de X.

b) Seja G um grupo abeliano finitamente gerado e seja $n \geq 1$. Construa um CW-complexo X tal que $H_n(X) \cong G$ e $\tilde{H}_i(x) = 0$ para todos $i \neq n$. Dica: use o item anterior.

6 — Mostre que se uma variedade conexa M é o bordo de uma variedade compacta N, então a característica de Euler de M é par. Conclua que $\mathbb{RP}^{2n}$ e $\mathbb{CP}^{2n}$ não podem ser bordos.
Dica Cole duas cópias de N pelo bordo M.