LISTA 3

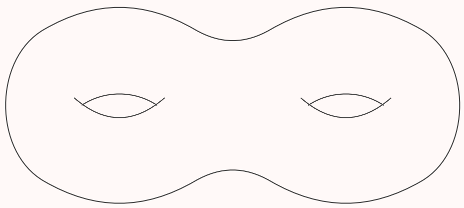
HOMOLOGIA SINGULAR E APLICAÇÕES

Exercícios

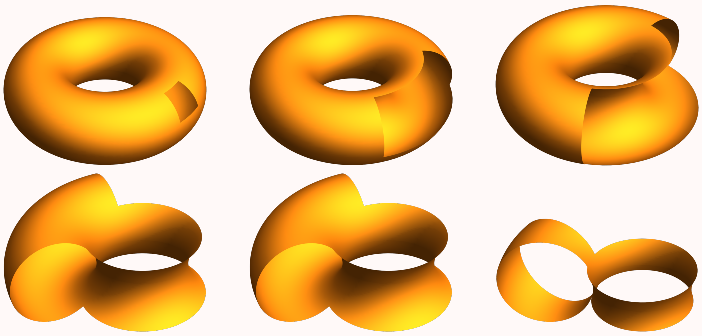
1 — Mostre que a homologia singular é aditiva, ou seja, existe um isomorfismo natural

$$H_p(X;R) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_p(X_\alpha;R).$$

2 — Use a sequência de Mayer-Vietoris para obter informações sobre a homologia da superfície de gênero dois, apresentada na figura abaixo.



Dica: Os subespaços U e V devem ser homeomorfos ao espaço obtido do toro deletando um pequeno disco fechado.



3 — Mostre que se A é uma retração de X, então a aplicação $H_n(A) \to H_n(X)$ induzida pela inclusão $A \subset X$ é injetora.

4 — Seja ΣX a suspensão de X.

a Prove que a projeção $[0,1] \times X \to [0,1]$ define uma aplicação contínua $h : \Sigma X \to [0,1]$.

b Calcule a homologia de ΣX aplicando Mayer-Vietoris aos conjuntos abertos $h^{-1}(0,1]$ e $h^{-1}[0,1)$.

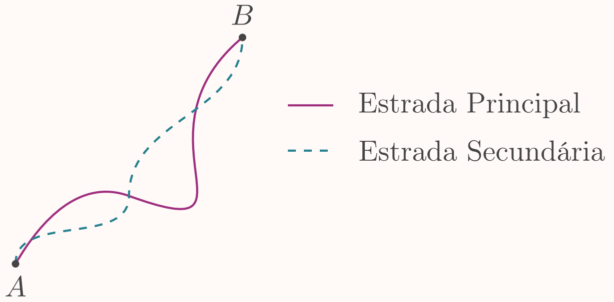
c Mostre que $H_{k+1}(\Sigma X) \cong H_k(X)$, $k \geq 1$.

d Mostre que $H_0(X) \cong H_1(\Sigma X) \oplus \mathbb{Z}$.

e Mostre que $H_0(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}$.

5 — Considere a seguinte história adaptada de ARNOLD, 1992.

> "Em certo país há duas cidades e dois caminhos que as unem: a estrada principal e a estrada secundária. Em A moram dois amantes, Carlos e Denise, que devem viajar para B: C pela estrada principal, e D pela secundária. Tão grande é a força de seu amor que se a qualquer instante eles estiverem separados por dez quilômetros ou mais, certamente morrerão. Além de um casal de namorados, nossa história contém um par de inimigos jurados, Everton e Franscisco. Como nosso história começa, E está em A, F está em B, e eles devem trocar de lugar, E viajando de A para B através da estrada principal enquanto F viaja de B para A através do estrada secundária. Tão grande é a força de seu ódio que se a qualquer instante eles estão separados por dez quilômetros ou menos, certamente morrerão. Prove que a tragédia é inevitável. Pelo menos duas pessoas vão acabar mortas"

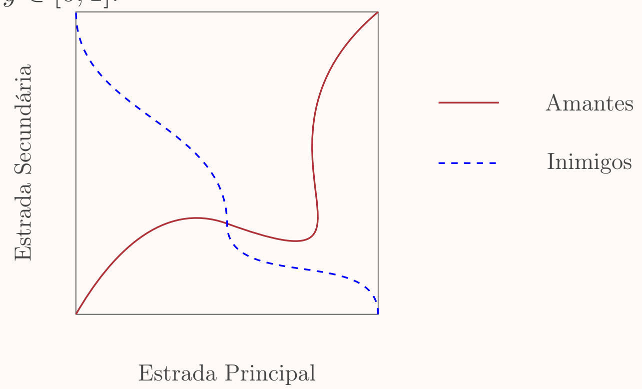


Para modelar o problema, no primeiro passo, parametrizaremos o problema no quadrado unitário $S = [0,1] \times [0,1]$. Um ponto $(x, y) \in S$ descreve a localização de um par de caracteres (ou C e D, ou E e F) ao longo das estradas principal e secundária, respectivamente. Assim, por exemplo, o ponto (0, 0) representa o fato de "ambos os caracteres estão em A", $(1, 1)$ representa "ambos os caracteres estão em B" (0,3, 0,7) representa que "o primeiro caractere percorreu 30 por cento do caminho ao longo da estrada principal de A a B e o segundo personagem está a 70 por cento do caminho ao longo da estrada secundária", e assim por diante. As viagens de um par de personagens pelas estradas principal e secundária são agora codificado no movimento do único ponto (x, y) em S.

Assim temos que o caminho que descreve o movimento do par (C, D) deve começar em $(0, 0)$ e terminar em $(1, 1)$. E o caminho que descreve o movimento de (E, E) deve começar em $(0, 1)$ e terminar em $(1, 0)$. Então (e esta é a parte topológica que teremos que demonstrar), "obviamente", os dois caminhos devem se intersectar.

O importante é o que acontece em um ponto de intersecção (x_0, y_0). Ele representa um par de pontos - um na estrada principal, um na estrada secundária - que são ocupados (em momentos diferentes) tanto por C e D quanto por E e F. Se esse par de pontos estiver a 10 quilômetros ou mais de distância, significa a desgraça para M e D; 10 quilômetros ou menos, cortinas para E e F. De qualquer maneira, a tragédia é inevitável, assim como diz o problema.

Colocando o problema rigorosamente, queremos provar o seguinte teorema:
Teorema Sejam $f, g\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ aplicações contínuas, tal que $f(0) = (0,0)$, $f(1) = (1,1)$ e $g(0) = (0,1)$, $g(1) = (1,0)$. Então $f(x) = g(y)$ para algum $x, y \in [0,1]$.



- **a** Use o Teorema da Curva de Jordan para provar esse fato. (Dica: complete um dos caminhos de modo a ser uma curva fechada.)
- **b** Use o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para provar esse fato. (Dica: Considere $F : I \times I \to I \times I$ apropriada.)

6 — Seja ΣX a suspensão de X e $\Sigma f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ a aplicação induzida por $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $n > 0$. Usando os resultados do Exercício 4, mostre que

- **a** $\deg f = \deg \Sigma f$;
- **b** para $m \in \mathbb{Z}$, existe uma aplicação $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grau m.

7 — Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação contínua com $\deg f = 0$. Mostre que devem existir pontos $x, y \in \mathbb{S}^n$ com $f(x) = x$ e $f(y) = -y$.