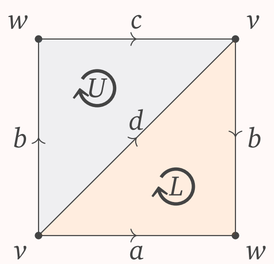
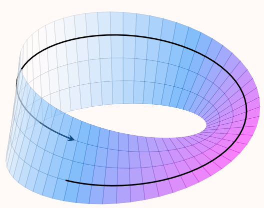
LISTA 2

HOMOLOGIA SIMPLICIAL

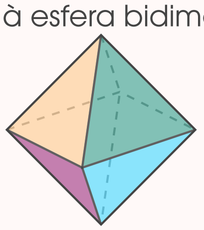
Exercícios

1 — Calcule os grupos de homologia $H_*^{\Delta}(\mathbb{M})$, $H_*^{\Delta}(\partial\mathbb{M})$ e $H_*^{\Delta}(\mathbb{M},\partial\mathbb{M})$, em que M é a faixa de Möbius e ∂M é sua fronteira.





2 — O diagrama abaixo mostra um octaedro X homeomorfo à esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$.



a) Construa uma estrutura de Δ-complexo em $\mathbb{S}^2$ usando oito 2-simplexos como mostrado, e calcule $H_1^{\Delta}(\mathbb{S}^2)$ usando essa estrutura simplicial.

b) Defina uma relação de equivalência $\sim$ em X que corresponda à identificação antipodal em $\mathbb{S}^2$.

c) Mostre que a estrutura de Δ-complexo definida no item a), com a escolha correta de orientação, define uma estrutura de Δ-complexo no quociente por $\sim$ em $\mathbb{RP}^2$.

d) Calcule $H_1^{\Delta}(\mathbb{RP}^2)$ usando o complexo de cadeias obtida no item 3.

3 —

a) Mostre que se K é um complexo simplicial e K_1 e K_2 são dois subcomplexos de K tais que $K = K_1 \cup K_2$. Então,

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2).$$

b) Sejam S_1 e S_2 superfícies e $S_1 \# S_2$ a soma conexa dessas superfícies (veja Definição 4.38) Calcule a característica de Euler-Poincaré para a superfície homeomorfa a $S_1 \# S_2$.

c) Mostre que a característica de Euler-Poincaré de uma superfície S de gênero g é

$$\chi(S) = \begin{cases} 2-2g\,, & \text{se } S \text{ é orientável} \\ 2-g\,, & \text{se } S \text{ não é orientável} \end{cases}$$

4 — O objetivo desse exercício é provar o **Teorema de Mayer-Vietoris**. Sejam K, L, M, N complexos simpliciais com $K = M \cup N$ e $L = M \cap N$. Dessa forma, temos as seguintes aplicações de inclusão:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & M \arrow[d, "k"] \\ N \arrow[r, "l"] & K \end{tikzcd}$$

a) Prove que

$$0 \longrightarrow C_n^{\Delta}(L;R) \xrightarrow{(i_n,j_n)} C_n^{\Delta}(M;R) \oplus C_n^{\Delta}(N;R) \xrightarrow{k_n - l_n} C_n^{\Delta}(K;R) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.

b Conclua que existe um homomorfismo natural $\partial_* : H_n^\Delta(K;R) \to H_{n-1}^\Delta(L;R)$ que fornece a seguinte sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow H_n^\Delta(L;R) \xrightarrow{(i,j)_*} H_n^\Delta(M;R) \oplus H_n^\Delta(N;R) \xrightarrow{k_*-l_*} H_n^\Delta(K;R)$$

$$\longrightarrow H_{n-1}^\Delta(L;R) \xrightarrow{(i,j)_*} H_{n-1}^\Delta(M;R) \oplus H_{n-1}^\Delta(N;R) \xrightarrow{k_*-l_*} H_{n-1}^\Delta(K;R)$$

$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0^\Delta(M;R) \oplus H_0^\Delta(N;R) \xrightarrow{k_*-l_*} H_0^\Delta(K;R)$$

$$\longrightarrow 0$$

5 — Sejam K_1 e K_2 dois complexos simpliciais que são triangularizações de superfícies fechadas e conexas M_1 e M_2. No que se segue, usaremos a notação da Definição 4.38.

a Mostre que $c \in C(K_i;\mathbb{Z}_2)$ definido como a soma de todos os 2-simplexos de K_i é um ciclo.

b Mostre que esse é o único ciclo de M. Esse ciclo é dito **ciclo fundamental** de M.

Dica: Para isso, seja $z = \sum \lambda_i t_i$ outro ciclo em $C(K_i;\mathbb{Z}_2)$ e seja t_i um dos 2-simplexos de z com $\lambda_i \neq 0$ e observe que dado qualquer outro simplexo t' existe um caminho de 2-simplexos entre eles.

c Mostre usando um argumento similar ao anterior que $H_2^\Delta(L_i;\mathbb{Z}_2) = 0$. Interprete esse fato.

d Observe que

$$H_0^\Delta(L_i;\mathbb{Z}_2) = H_0^\Delta(K_i;\mathbb{Z}_2)$$

e Usando a sequencia de Mayer-Vietoris conclua que $H_1^\Delta(L_i;\mathbb{Z}_2) = H_1^\Delta(K_i;\mathbb{Z}_2)$.

f Observe que

$$H_2^\Delta(M_1\#M_2;\mathbb{Z}_2) = H_0^\Delta(M_1\#M_2;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$$

g Conclua que

$$H_1^\Delta(M_1\#M_2;\mathbb{Z}_2) = H_1^\Delta(M_1;\mathbb{Z}_2) \oplus H_i^\Delta(M_2;\mathbb{Z}_2).$$

h Calcule os grupos de homologia simplicial sobre $\mathbb{Z}_2$ da superfície Σ_g de gênero g.

6 — Seja $s : |K| \to |L|$ uma aplicação simplicial, i.e., uma aplicação que envia vértices de K para vértices de L e que envia simplexos de K linearmente para simplexos de L. Defina os homomorfismos $s_q : C_q^\Delta(K) \to C_q^\Delta(L)$ como segue. Dado um simplexo $\sigma = [v_0,\ldots,v_q]$ de K, defina $s_q(\sigma)$ como o simplexo $\left[s(v_0),\ldots,s\left(v_q\right)\right]$ se os vértices $s(v_0),\ldots,s\left(v_q\right)$ forem todos distintos, e $s_q(\sigma) = 0$, caso contrário.

a Mostre que $\partial s_q = s_{q-1}\partial$ e, consequentemente, que a coleção $\left\{s_q\right\}$ é um homomorfismo de cadeia.

b Deduza que $\left\{s_q\right\}$ induz homomorfismos $s_* : H_q^\Delta(K) \to H_q^\Delta(L)$.