LISTA 1

HOMOLOGIA SIMPLICIAL

Exercícios

1 — Calcule os grupos de homologia $H_i(X)$, com $i = 0, 1, 2$, para os seguintes espaços X:

a o tetraedro representado na Figura 1;

b o tetraedro sólido;

c o grafo obtido pelas arestas do tetraedro na Figura 2.

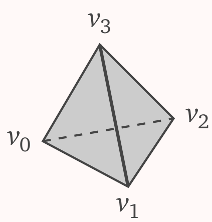

Figura 1: Tetraedro

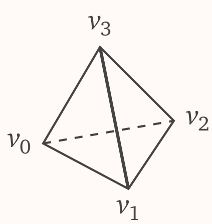

Figura 2: Grafo das arestas do tetraedro

2 — Todo conjunto pré-ordenado, ou seja, todo par $(X, \leq)$ com X um conjunto não vazio e $\leq$ uma relação transitiva e reflexiva em X, dá origem a categoria $\mathbf{Ord}$ cujos objetos são os elementos de X e, para qualquer par de elementos x e y, os morfismos $\mathrm{Hom}(x, y)$ são definidos da seguinte forma: se $x \leq y$, $\mathrm{Hom}(x, y)$ possui um único elemento (x, y); caso contrário, $\mathrm{Hom}(x, y)$ é vazio. A composição é dada por $(y, z) \circ (x, y) \overset{\text{def}}{=} (x, z)$.

a Verifique detalhadamente que $\mathbf{Ord}$ é uma categoria.

b Mostre que a categoria oposta é a categoria dada por $(X, \geq)$.

3 — Dado um homomorfismo $f : M \to N$ de R-módulos, mostre que existe uma sequência exata da forma:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0 \ .$$

4 — Considere o seguinte diagrama comutativo de módulos:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "n"] & D \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "q"] \\
A' \arrow[r, "r"'] & B' \arrow[r, "s"'] & C' \arrow[r, "t"'] & D' \arrow[r, "u"'] & E'
\end{tikzcd}$$

Prove que se as linhas são exatas, m e p são isomorfismos, l é um epimorfismo e q é um monomorfismo, então n também é um isomorfismo.

5 — Seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeias (A, d_A), (B, d_B) e (C, d_C). Mostre que se (A, d_A) e (C, d_C) são acíclicos, então (B, d_B) também é acíclico.

6 — Sejam R um anel associativo com unidade, M um R-módulo à esquerda e considere os funtores $F = \mathrm{Hom}_R(M, -)$ e $G = \mathrm{Hom}_R(-, M)$. Suponha que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta cindida de R-módulos.

a Prove que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{Ff} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{Fg} \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata cindida.

b Prove que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,M) \xrightarrow{Gg} \mathrm{Hom}_R(B,M) \xrightarrow{Gf} \mathrm{Hom}_R(A,M) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata cindida.

7 — (Lema 3×3**)** Seja

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"] & N' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & N'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo de R-módulos com colunas exatas.

a Mostre que se as duas primeiras linhas são exatas, então a terceira linha é exata.

b Mostre que se as duas últimas linhas são exatas, então a primeira linha é exata.

c Mostre que se a primeira e a terceira linhas são exatas e $g \circ f = 0$, então a segunda linha é exata.