DANIEL MIRANDA MACHADO

NÚMEROS E SEQUÊNCIAS

VERSÃO 0.24 - UFABC

Sumário

Prefácio

Essas notas foram elaboradas para o curso de Números Reais e Sequências da Universidade Federal do ABC (UFABC). Esta obra se propõe a ser um elo entre a matemática básica e os cursos mais avançados, e foi estruturada de forma a guiar o leitor de maneira gradual e detalhada, começando com os axiomas dos números reais, expandindo-se para as propriedades das sequências e séries numéricas, e culminando nas séries de potências. A ênfase recai sobre a construção rigorosa das demonstrações, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de formular e resolver problemas matemáticos.

Os números reais e as sequências desempenham um papel central na análise, formando a base sobre a qual se constroem muitos conceitos matemáticos mais complexos. Ao longo deste livro, exploraremos as propriedades dos números reais, suas características e a importância da completude no estudo das sequências. A completude dos números reais, que pode ser intuitivamente interpretada como a ausência de 'buracos' nos números reais, ou, de forma equivalente, que toda sequência de Cauchy converge para um número real, é um conceito fundamental que garante a consistência e a robustez da análise matemática. Compreender essas propriedades não apenas fundamenta a teoria, mas também fortalece a habilidade de raciocínio lógico e rigor matemático, que são indispensáveis para qualquer estudante de matemática.

Além de abordar os conceitos teóricos, este livro também tem como objetivo introduzir os alunos ao mundo da demonstração matemática. A capacidade de formular, entender e demonstrar teoremas é uma habilidade fundamental que futuros matemáticos devem cultivar à medida que avançam em seus estudos. O desenvolvimento dessa competência é essencial não apenas para a compreensão dos conceitos abordados, mas também para a formação de um futuro matemático capaz de contribuir para o campo com originalidade e rigor.

A estrutura do livro é organizada em capítulos que abordam os seguintes tópicos:

- **Números reais**: Propriedades algébricas, de ordem e de completude dos números reais, além de uma introdução à topologia da reta.

- **Sequências**: Conceitos de convergência, subsequências e critérios de convergência.
- **Construção dos números reais**: Construção dos reais via sequências de Cauchy e via cortes de Dedekind.
- **Séries numéricas**: Convergência de séries numéricas, incluindo convergência absoluta e condicional, além de critérios de convergência.
- **Séries de funções e de potência**: Convergência pontual e uniforme de séries de funções, séries de potência, raio de convergência e série de Taylor.

Ao longo do texto, propomos exercícios que vão desde a fixação dos conceitos até a resolução de problemas mais desafiadores, incentivando o pensamento crítico e a criatividade do leitor. Os exercícios são o elemento central das notas e a resolução de um bom números deles é essencial para consolidar o conhecimento e preparar o estudante para os desafios futuros. Defendemos a ideia de que o aprendizado se dá por meio da prática: papel e lápis são ferramentas indispensáveis nesse processo.

Versões

- Versão 0.11 - Primeira versão com todos os cinco primeiros capítulos. (Apesar do quinto ainda não ter sido disponibilizado).
- Versão 0.14 - Melhorias nas seções Propriedades do supremo e Limite superior e inferior. Reescrita da demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass. Foram adicionados ao longo do texto propriedades equivalentes ao axioma de completude e também novas figuras.
- Versão 0.15 - Foi escrita a seção sobre cortes de Dedekind. Melhorias no texto sobre sequências e sobre a construção dos reais via sequências de Cauchy.
- Versão 0.16 - Correções no texto do capítulo sobre construção dos reais.
- Versão 0.20 - Correções no texto do capítulo sobre series. Novas imagens adicionadas. Também foi adicionada uma seção sobre a irracionalidade de e.
- Versão 0.21 - Disponibilizado o capítulo sobre série de funções.
- Versão 0.23 - Pequenas correções ao longo de todo texto.
- Versão 0.24 - Pequenas correções ao longo de todo texto.

1 Números reais

Existem diversas maneiras de introduzir o sistema dos números reais. Uma abordagem comum começa com os números naturais $1, 2, 3, \ldots$ e os utiliza como base para a construção de um sistema mais amplo, com as propriedades desejadas. A ideia central deste método é tomar os naturais como conceito fundamental, definir alguns axiomas a partir deles e, em seguida, utilizá-los para construir o sistema dos números inteiros e finalmente os racionais, que são expressos como a razão de dois inteiros. Com os números racionais em mãos, é possível expandir para os números reais. O passo mais complexo nesse processo é a transição dos racionais para os reais.

Axiomatização dos números reais No final do século XIX, houve um esforço para formalizar rigorosamente a matemática. Parte desse esforço envolveu estabelecer os números reais como um "corpo ordenado completo", ou seja, um sistema numérico que segue certas regras (axiomas) que garantem a ordem e a continuidade, essenciais para o cálculo.

Dedekind (1872): Em seu trabalho "Stetigkeit und Irrationale Zahlen"(Continuidade e Números Irracionais), Dedekind formulou o que é conhecido como o "corte de Dedekind", uma forma de definir números reais a partir de racionais. Ele também discutiu a importância da continuidade no contexto dos números reais.

Hilbert (1900): Hilbert, em seu trabalho "Über den Zahlbegriff"(Sobre o Conceito de Número), deu a primeira versão explícita dos axiomas que descrevem um "corpo ordenado completo".

Apesar de os matemáticos da Grécia antiga já reconhecerem a necessidade de números irracionais em seus estudos de geometria, métodos formais para construí-los a partir dos racionais só foram desenvolvidos no século XIX. além disso, axiomas foram formulados para os números naturais, servindo como ponto de partida para a construção completa dos números reais.

Neste capítulo adotamos uma abordagem não construtiva, começando com os números reais já definidos como elementos de um conjunto $\mathbb{R}$, que satisfazem uma série de axiomas. As propriedades dos números reais são derivadas desses axiomas, e tudo o que se segue é baseado neles.

Explicitamente, o principal objetivo desse capítulo é caracterizar os reais como: único corpo ordenado completo[1]. Para compreendermos essa caracterização precisamos compreender o que é um corpo, uma ordem e o que queremos dizer com completude. Precisamos também provar que de fato existe um objeto satisfazendo esses axiomas e finalmente que ele é único.

[1] a menos de isomorfismo...

Se os números reais fossem definidos de forma construtiva, essas propriedades seriam teoremas a serem demonstrados. No Capítulo 3 faremos a construção dos reais a partir dos racionais.

Antes de tudo começaremos analisando o conceito fundamental de operação binária.

1.1 Operações binárias

A adição de números inteiros pode ser vista como uma função associando a cada par ordenado (a, b) de números inteiros o número inteiro $a+b$

$$a, b \xrightarrow{+} a+b.$$

A multiplicação de números inteiros tem a mesma descrição abstrata, enviando um par ordenado de números inteiros para um número inteiro. Essas operações compartilham características abstratas, incluindo associatividade, comutatividade e existência de elementos de identidade.

Esta seção discute algumas propriedades das operações binárias.

Operações e Estruturas algébricas Uma estrutura algébrica consiste em um conjunto não vazio a (denominado conjunto subjacente, ou domínio), uma coleção de operações em a (geralmente operações binárias) e um conjunto finito de identidades, conhecido como axiomas, que essas operações devem satisfazer. Algumas estruturas algébricas envolvem também em sua definição outra estrutura. Por exemplo na definição de espaços vetoriais está intrinsecamente envolvido um corpo.
No que segue apresentaremos as operações binárias e algumas identidades usuais: comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro e de inverso, etc.

1.1 Definição *Seja a um conjunto não vazio. Uma* ***operação binária*** *em a é uma função*

$$\mu : a \times a \to a.$$

De modo mais geral, dados a e B conjuntos não vazio também chamaremos de **operação binária** em a uma função

$$\mu : a \times B \to a.$$

Se a e b são elementos de a, geralmente escrevemos ab em vez de $\mu(a, b)$. Expressões como $a \cdot b$, $a+b$ ou $a * b$ são usadas para enfatizar o papel da operação, especialmente quando mais de uma operação binária estiver sendo considerada.

O par ordenado $(a, \cdot)$ significa um conjunto não vazio equipado com uma operação binária $\cdot$.

1.2 Exemplos

1. *As operações de adição, multiplicação e subtração são operações binárias em $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros.*

2. *A divisão não é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, pois, por exemplo, $1 \div 2$ e $1 \div 0$ não representam números inteiros.*

3. *Adição, multiplicação e exponenciação são operações binárias no conjunto $\mathbb{Z}^+$ de números números naturais.*

4. *Sejam X um conjunto arbitrário e X^X o conjunto de todas as funções $f : X \to X$. A composição da função, $\mu(g, f) = g \circ f$, é uma operação binária em X^X.*

5. *Seja X um conjunto arbitrário. O operador de interseção define uma operação binária em $a = \mathscr{P}(X)$, o conjunto das partes de X. Da mesma forma, o operador de união define uma operação binária em $\mathscr{P}(X)$.*

Quando a é um conjunto finito de n elementos, uma operação binária pode ser representada por uma **tabela de Cayley** , uma lista tabular $n \times n$ de todos os produtos, com $\mu(a,b) = ab$ sendo colocado na coluna do a e na linha do b.

1.3 Exemplo *$a = \{P, I\}$ um conjunto com dois elementos, que representam um inteiro genérico par P e inteiro genérico ímpar I. A tabela de Cayley*

$+$	P	I
P	P	I
I	I	P

expressa o fato que uma soma de dois inteiros pares ou dois inteiros ímpares é par, enquanto a soma de um número inteiro par e ímpar é ímpar.

1.4 Exemplo *Seja $a = \{a, b, c\}$ um conjunto com três elementos. As tabelas Cayley a seguir definem operações binárias em a:*

μ_1	a	b	c
a	a	c	b
b	b	a	c
c	c	b	a

μ_2	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

μ_3	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Temos, por exemplo, $\mu_1(b, a) = b$ (segunda linha, primeira coluna da primeira tabela), enquanto $\mu_1(a, b) = c, \mu_2(a, b) = b$ e $\mu_3(a, b) = a$ da primeira linha, segunda coluna das respectivas tabelas.

Propriedades algébricas de Operações Binárias

Associatividade Por definição, uma operação binaria envolve dois elementos. Porém, em muitas situações, desejamos combinar três ou mais elementos. Isso gera uma ambiguidade potencial: quando escrevemos um produto abc, esse termo pode significar:

$$(ab)c = \mu(\mu(a,\ b), c) \text{ ou } a(bc) = \mu(a, \mu(b, c)).$$

Em geral, essas expressões representam diferentes elementos de a. Para a operação binária μ_1 do Exemplo 1.4, temos

$$(ba)c = bc = c, \quad \text{e} \quad b(ac) = bb = a.$$

1.5 Definição *Uma operação binária μ em um conjunto a é dita **associativa** se $a(bc) = (ab)c$ para todos os a, b e c em a.*

1.6 Exemplos

1. *Adição e multiplicação são operações associativas no conjunto dos números inteiros, racionais, reais e complexos.*

associatividade A propriedade associativa é a propriedade de algumas operações binárias que nos permite reorganizar os parênteses em uma expressão sem alterar o resultado.
Sem a propriedade associativa por exemplo, um produto de quatro elementos pode ser escrito, sem alterar a ordem dos fatores, de cinco maneiras possíveis:

$$((ab)c)d$$
$$(ab)(cd)$$
$$(a(bc))d$$
$$a((bc)d)$$
$$a(b(cd))$$

Se a operação for associativa, todas essas fórmulas produzirão o mesmo resultado e os parênteses podem ser considerados desnecessários e "o"produto pode ser escrito de forma inequívoca como:

$$abcd.$$

2. *Subtração em $\mathbb{C}$ não é associativa: se $c \neq 0$, então*

$$(a-b)-c \neq a-(b-c)=(a-b)+c.$$

Da mesma forma, a divisão não é associativa no conjunto dos números complexos diferentes de zero.

3. *A potenciação em $\mathbb{R}$ não é associativa.*

4. *Seja $\mathcal{F}(X)$ as funções de X em X. Considere a operação de composição $f, g \mapsto f \circ g$. Essa operação é associativa.*

   Vamos mostrar que a composição de funções é associativa num contexto um pouco mais amplo. Sejam $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$. Então: $((f \circ g) \circ h)(x) = h((f \circ g)(x)) = h(g(f(x)))$, e $(f \circ (g \circ h))(x) = (g \circ h)(f(x)) = h(g(f(x)))$.

Identidade No conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, $0 + a = a$ e $1a = a$. O conceito de elemento neutro ou identidade generaliza esse fato.

1.7 Definição *Seja (a, μ) um conjunto equipado com uma operação binária. Um elemento e em a é um* ***elemento neutro*** *ou* ***identidade*** *para μ se $ea = ae = a$ para todos os a em a.*

Uma operação binária pode não possuir identidade. Porém, se possuir então essa será única: se e e e' são elementos neutros para μ, então $e = ee'$ (já que e' é uma identidade) e $ee' = e'$ (já que e é uma identidade), e assim $e = e'$.

1.8 Exemplo *Não há identidade para subtração. Em outras palavras, não existe um número inteiro e tal que $a - e = e - a = a$ para todo número inteiro a.*

Elementos inversos No conjunto dos números inteiros, o ato de adicionar a pode ser cancelado adicionando $-a$. O conceito de elemento inverso generaliza essa ideia.

1.9 Definição *Seja (a, μ) um conjunto equipado com uma operação binaria e assuma que existe uma identidade para μ. Se $a \in a$, um elemento b em a é dito um* ***inverso*** *de a (com relação a μ) se*

$$ab = ba = e.$$

Não faz sentido perguntar sobre a existência de elementos inversos, a menos que μ tenha uma identidade. Além disso, mesmo que μ tenha uma identidade, um elemento específico a em a pode ou não ter um inverso.

1.10 Proposição *Se μ for associativa e possuir uma identidade e, cada elemento a terá no máximo um inverso.*

Demonstração. Suponha que a possua dois inversos a' e a''. Então por um lado $(a'a)a'' = ea'' = a''$ e por outro $(a'a)a'' = a'(aa'') = a'e = a'$ e logo $a' = a''$. $\square$

Resumidamente, os inversos são únicos em relação a uma operação associativa. O inverso de a é normalmente indicado como a^{-1}. Porém, para uma operação binária comutativa, habitualmente designada $+$, o inverso de a é usualmente denotado por $-a$.

Bem, nosso objetivo ao definirmos e estudarmos operações algébricas é construirmos estruturas algébricas.

Uma **estrutura algébrica** consiste em um conjunto não vazio a, dito conjunto subjacente ou domínio, uma coleção de operações em a e um conjunto finito de identidades, conhecidas como axiomas, que essas operações devem satisfazer. A definição de algumas estruturas algébricas também envolvem outro conjunto auxiliar (como por exemplo os reais).

Um **homomorfismo** é um aplicação entre duas estruturas algébricas do mesmo tipo (como dois grupos, dois anéis ou dois espaços vetoriais) que preserva a estrutura. Ou seja. uma função $f : a \to B$ entre dois conjuntos a, B equipados com a mesma estrutura, de modo que, se $\cdot$ é uma operação da estrutura (que por simplificação, supomos ser uma operação binária), então

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

para $x, y \in a$. Dizemos nesse caso que f preserva a operação ou que f é compatível com a operação.

Ressaltamos que um homomorfismo deve também preservar as constantes. Em particular, quando um elemento identidade é exigido num tipo de estrutura, o elemento identidade da primeira estrutura deve ser mapeado para o elemento identidade correspondente da segunda estrutura.

1.2 *Axiomas de corpo*

Um corpo é um conjunto munido de duas operações: adição e multiplicação e tal que essas operações se comportam de maneira similar as operações correspondentes nos números racionais.

Não atribuímos significado especial aos símbolos +e além do contido nos axiomas.

1.11 Definição *Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ munido de duas funções $(x, y) \to x + y$ e $(x, y) \to x \cdot y$ de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ para $\mathbb{K}$ é dito um **corpo** se os nove axiomas a seguir forem satisfeitos:*

Axioma 1 ***Comutatividade da soma*** *$x + y = y + x$ para todos os $x, y \in \mathbb{K}$.*

Axioma 2 ***Associatividade da soma*** *$x + (y + z) = (x + y) + z$ para todos os $x, y, z \in \mathbb{K}$.*

Axioma 3 ***Existência do elemento neutro*** *Existe um elemento* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $x + 0 = x$ *para todos os* $x \in \mathbb{K}$.

Axioma 4 ***Existência do oposto*** *para todo* $x \in \mathbb{K}$, *existe um elemento* $y \in \mathbb{K}$, *de modo que* $x + (y) = 0$.

Axioma 5 ***Comutatividade do produto*** $xy = yx$ *para todos os* $x, y \in \mathbb{K}$.

Axioma 6 ***Associatividade do produto*** $x(yz) = (xy)z$ *para todos os* $x, y, z \in \mathbb{K}$

Axioma 7 ***Existência do elemento neutro multiplicativo*** *Existe um elemento* $1 \neq 0$ *em* $\mathbb{K}$ *tal que* $1x = x$ *para todos os* $x \in \mathbb{K}$.

Axioma 8 ***Existência do inverso*** *para todo* $x \neq 0$ *em* $\mathbb{K}$, *existe* $y \in \mathbb{K}$, *tal que* $xy = 1$.

Axioma 9 ***Distributividade*** $x(y + z) = xy + xz$ *para todos os* $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Estritamente falando, um corpo é um tripla ordenada $(\mathbb{K}, (x, y) \to x + y, (x, y) \to xy)$ satisfazendo os axiomas 1-9 acima. A operação binária $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por $(x, y) \to x + y$ é denominada **adição**, e a operação $(x, y) \to xy$ é denominada **multiplicação** . Ao se referir a algum corpo $(\mathbb{K}, x, y, \to x + y, (x, y) \to xy)$, as referências à adição e multiplicação são eliminadas da notação e a letra $\mathbb{K}$ é usada para denotar o conjunto e as duas operações binárias que satisfazem os axiomas 1-9. Embora esse procedimento seja um tanto ambíguo, ele não causa confusão em situações concretas.

Um corpo onde $1 = 0$ contém apenas um único elemento, pois nesse caso teríamos

$a = 1a = 0a = 0$ veja Prop. 1.18 item 4.

o que mostra que $0 = a$ para qualquer a.
E, naturalmente, não se deseja que essa estrutura, formada apenas por $\{0\}$, seja considerada um corpo.

1.12 Exemplo *Sejam* $\mathbb{Q}$ *o conjunto de números racionais,* $\mathbb{R}$, *o conjunto de números reais e* $\mathbb{C}$, *o conjunto de números complexos. Com a adição e multiplicação usual,* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *são todos corpos com* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

1.13 Exemplo *Seja* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. *Dados* $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *e* $c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, *definimos a soma e o produto, respectivamente, como:*

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \triangleq (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \tag{1.1}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \triangleq (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}. \tag{1.2}$$

Então $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *é um corpo.*

Os corpos dos Exemplos 1.12 e 1.13 são todos infinitos.

$\triangleq$

a expressão $p \triangleq q$ significa que p é definido como sendo q. definido como

1.14 Exemplo *Seja* $\mathbb{Z}$ *conjunto de números inteiros com a adição e a multiplicação usual. Seja* p *um primo positivo em* $\mathbb{Z}$ *e defina* $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$. *Então* $\mathbb{Z}_p$ *torna-se corpo (finito) se definimos a aprop:propcorposdição* $\oplus$ *e a multiplicação módulo* p.

O leitor pode verificar facilmente que $(\mathbb{K}_p, +, \cdot)$ satisfaz os axiomas K1-K9. Portanto, $\mathbb{K}_p$ é um corpo finito de cardinalidade p.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Tabela 1.1: Tabelas de Cayley da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_5$

1.15 Exemplo *O conjunto das matrizes 2×2 com entradas em números reais, $M(2, \mathbb{R})$, com adição e multiplicação de matrizes não é um corpo porque a multiplicação não é comutativa, não há divisão e existem divisores de 0.*

1.16 Exemplo *O corpo $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais, pode ser descrito como $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, quando visto como conjunto. As operações neste corpo são definidas da seguinte forma: a soma de dois elementos $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e o produto $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy')$. O elemento neutro da adição é $(0, 0)$ e o neutro da multiplicação é $(1, 0)$.*

Podemos representar o número x pelo par $(x, 0)$, e usar a notação $i = (0, 1)$. Assim, qualquer elemento $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$ pode ser escrito como $z = x + iy$. Notamos que as operações descritas acima são exatamente as mesmas que definem os números complexos, onde $z = x + iy$ e a soma e o produto são feitos de maneira usual, lembrando que $i^2 = -1$. Portanto, o conjunto $\mathbb{Q}(i)$ é chamado de corpo dos números complexos racionais.

A verificação dos axiomas de corpo fica a cargo do leitor. Por exemplo, dado um elemento $z = (x, y) \neq 0$, seu inverso é $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

1.17 Exemplo *O corpo $\mathbb{Q}(t)$ consiste no conjunto das funções racionais $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios com coeficientes racionais, sendo $q(t)$ não identicamente nulo onde identificamos duas funções racionais $f(x) = p(x)/q(x)$ e $g(x) = r(x)/s(x)$ se, e somente se, $p(x)s(x) = q(x)r(x)$. As operações no corpo $\mathbb{Q}(t)$ são definidas de maneira natural. No **corpo das funções racionais**, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero) são definidas de maneira semelhante às operações com frações.*

- *Adição de funções racionais. Seja $r_1(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e $r_2(x) = \frac{h(x)}{k(x)}$, onde $f(x), g(x), h(x), k(x)$ são polinômios e $g(x), k(x) \neq 0$. A adição é dada por:*

$$r_1(x) + r_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{k(x)} = \frac{f(x)k(x) + h(x)g(x)}{g(x)k(x)}$$

- *Multiplicação de funções racionais. Seja $r_1(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e $r_2(x) = \frac{h(x)}{k(x)}$, a multiplicação é definida por:*

$$r_1(x) \cdot r_2(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{k(x)} = \frac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)}$$

Dos axiomas anteriores podemos deduzir todas as regras usuais da álgebra elementar. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas. Nestes teoremas os símbolos a, b, c, d representam números reais arbitrários.

1.18 **Proposição** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo.*

1. *$\mathbb{K}$ possui pelo menos dois elementos 0 e 1 e $0 \neq 1$.*
2. *O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.*
3. *O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.*
4. *Para todos os $a \in \mathbb{K}, a0 = 0a = 0$.*
5. *O oposto de um elemento é único.*
6. *O inverso de um elemento (não nulo) é único.*
7. *Para todos os $a, b \in \mathbb{K}$, se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Nesse caso dizemos que $\mathbb{K}$ não tem* ***divisores de zero*** *.*

Demonstração. Observamos que 2. e 3. são consequência da Proposição 1.10. apesar disso reprovaremos 2. Se 0 e $0'$ possuíssem ambos essa propriedade, então $0 + 0' = 0 + 0'$ e como $0 + 0' = 0$ e $0 + 0' = 0'$ logo $0 = 0'$.

Provaremos agora 4. Note que $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a$ logo $a + a0 = a$. Se b é um oposto de a então $b + (a + a0) = b + a$ e logo $b + (a + a0) = (b + a) + a0$ e como $b + a = 0$ temos que $a0 = 0$. A demonstração da outra identidade é análoga.

Provaremos 5. Dado $a \in \mathbb{K}$, sejam $a', a'' \in \mathbb{K}$ elementos tais que $a + a' = 0$ e $a + a'' = 0$. Então, usando oportunamente os axiomas acima, temos

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$$

Em outras palavras, provamos que existe um único elemento que cumpre o papel de oposto de a.

Provemos agora 7. Sejam dados $a, b \in \mathbb{K}$ quaisquer. Devemos mostrar que, se $ab = 0$, então ao menos um dos números a e b é igual a 0. Se $a = 0$, não temos nada a provar. Suponhamos então que $a \neq 0$. Então, existe a^{-1} tal que $a.a^{-1} = 1$. Assim, de $ab = 0$, multiplicando ambos os membros por a^{-1}, obtemos

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}.0$$

O lado direito, pela propriedade 4, é igual a 0. Em relação ao lado direito, temos:

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1.b = b$$

Logo, voltando a juntar os lados direito e esquerdo, temos que $b = 0$.□

1.19 Teorema (Cancelamento) *Se $a + b = a + c$, então $b = c$.*

Demonstração. Dado que $a + b = a + c$, pelo axioma **Axioma 4**, existe um número y tal que $y + a = 0$. Assim, podemos somar y em ambos os lados da equação, obtendo:

$$y + (a + b) = y + (a + c).$$

Utilizando a propriedade associativa da adição, temos:

$$(y + a) + b = (y + a) + c.$$

Como $y + a = 0$, isso nos dá:

$$0 + b = 0 + c.$$

Pelo axioma **Axioma 3**, sabemos que $0 + b = b$ e $0 + c = c$, portanto, concluímos que $b = c$. □

1.20 Teorema (Subtração) *Dados a e b existe um único x tal que $a + x = b$. Este número x representa-se por $b - a$.*

Demonstração. Dado a e b, escolhemos y tal que $a + y = 0$ (garantido pelo axioma **Axioma 4**), e definimos $x = y + b$. Assim, temos:

$$a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b.$$

Portanto, existe pelo menos um x tal que $a + x = b$.

Agora, pelo Teorema 1.19, se existissem dois valores x e x' tais que $a + x = b = a + x'$, então $x = x'$. Isso prova que tal x é único. □

1.21 Definição *O número $0 - a$ escreve-se simplesmente $-a$ e é o oposto de a.*

De agora em diante sempre escreveremos o oposto de a como $-a$

1.22 Proposição

1. $b - a = b + (-a)$.
2. $-(-a) = a$.
3. $a(b - c) = ab - ac$.

Demonstração. Demonstração de 1. Sejam $x = b - a$ e $y = b + (-a)$. Desejamos provar que $x = y$. Por definição de $b - a, x + a = b$ e

$$y + a = [b + (-a)] + a = b + [(-a) + a] = b + 0 = b.$$

Consequentemente $x + a = y + a$ e, pelo Teorema 1.19, $x = y$. Demonstração de 2. Temos $a + (-a) = 0$ por definição de $-a$. Mas esta igualdade implica que a é o oposto de $-a$, isto é, $a = -(-a)$ como se pretendia demonstrar. □

1.23 Teorema (Regra de simplificacão para a multiplicacão) *Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$.*

1.24 Teorema (Possibilidade da divisão) *Dados a e b com $a \neq 0$, existe um único x tal que $ax = b$. Este x representa-se por b/a ou $\frac{b}{a}$ e chama-se o quociente de b por a. Em particular $1/a$, que também se escreve a^{-1}, chama-se o inverso de a.*

1.25 Teorema

1. *Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.*
2. *Se $a \neq 0$, então $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.*
3. *Se $ab = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$.*
4. *$(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.*
5. *$(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$*
6. *$(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.*
7. *$(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$ se $b \neq 0, c \neq 0$, e $d \neq 0$.*

Exercícios

1.1 — Mostre que num corpo valem:

a) $-0 = 0$.
b) $1^{-1} = 1$.
c) Zero não admite reciproco.
d) Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.
e) Se $a \neq 0$, então $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.
f) $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.
g) $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$
h) $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
i) $-(a - b) = -a + b$.

j) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

1.2 — Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dados $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, definimos a soma e o produto, respectivamente, como:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \triangleq (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \triangleq (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\,.$$

Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo.

1.3 — Seja $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais, pode ser descrito como $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, quando visto como conjunto. As operações neste corpo são definidas da seguinte forma: a soma de dois elementos $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e o produto $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy')$. O elemento neutro da adição é $(0, 0)$ e o neutro da multiplicação é $(1, 0)$. Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ é um corpo.

1.3 Axiomas de ordem

A seguir, apresentaremos um conjunto de axiomas que estabelecem uma ordenação em um corpo. Essa ordenação possibilitará determinar se um número é maior ou menor que outro. As propriedades de ordem serão introduzidas por meio de axiomas que se baseiam em um novo conceito indefinido, chamado positividade. Com base nesse conceito, definiremos os termos "maior que"e "menor que"em função da positividade.

1.26 Definição *Um **corpo ordenado** é um corpo munido da escolha dum certo subconjunto não vazio $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$, chamado **conjunto dos números positivos** , que verifica os três axiomas de ordem a seguir:*

Axioma 10 ***Compatibilidade com a soma e o produto*** *Se x e y pertencem a $\mathbb{K}^+$ então $x + y$ e xy também pertencem.*

Axioma 11 ***Tricotomia*** *para todo $x \neq 0$, ou $x \in \mathbb{K}^+$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$, mas não ambos.*

Axioma 12 $0 \notin \mathbb{K}^+$.

1.27 Exemplo *O conjunto $\mathbb{Q}$ forma um corpo ordenado, onde o conjunto $\mathbb{Q}^+$ é constituído pelos números racionais da forma $\frac{p}{q}$, com $p \cdot q \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, isso significa que os inteiros p e q possuem o mesmo sinal.*

1.28 Exemplo *O corpo $\mathbb{Q}(t)$ pode ser ordenado, definindo uma fração $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ como positiva quando o coeficiente do termo de maior grau no polinômio $p(t)q(t)$ for positivo. O conjunto $\mathbb{Q}(t)^+$ das frações positivas, de acordo com esta definição, satisfaz as condições P1 e P2. De fato, para duas frações positivas $r = \frac{p}{q}$ e $r' = \frac{p'}{q'}$, os coeficientes dos termos de maior grau em pq e $p'q'$ são ambos positivos.*

Ao considerar a soma $r + r'$, o produto do numerador pelo denominador resulta no polinômio $pq(q')^2 + p'q'q^2$, cujo coeficiente do termo de maior grau também será positivo. Portanto, a soma de duas frações positivas é, de fato, positiva. As demais propriedades podem ser verificadas sem dificuldade.

1.29 Exemplo *O corpo $\mathbb{Z}_2$ não pode ser ordenado, pois $1 + 1 = 0$. Em um corpo ordenado, o elemento 1 deve ser positivo, e a soma de dois elementos positivos, como $1 + 1$, também deveria ser positiva. Da mesma forma, o corpo $\mathbb{Q}(i)$, dos números complexos racionais, não admite uma ordenação compatível com suas operações, pois o quadrado do elemento $i = (0, 1)$ é igual a -1. Em um corpo ordenado, nenhum quadrado pode ser negativo, e -1 é sempre considerado negativo.*

1.30 Definição *Os símbolos $\langle, \rangle, \leq$ e $\geq$, chamados respectivamente **menor que** , **maior que** , **menor ou igual que** e **maior ou igual que** , são definidos da* *seguinte maneira:*

$$x < y \text{ significa que } y - x \text{ é positivo;}$$
$$y > x \text{ significa que } x < y$$
$$x \leq y \text{ significa que ou } x < y \text{ ou } x = y$$
$$y \geq x \text{ significa que } x \leq y$$

Assim temos $x > 0$ se e só se x é positivo. Se $x < 0$, dizemos que x é negativo; se $x \geq 0$ dizemos que x é não negativo. Um par de desigualdades simultâneas tais como $x < y, y < z$ escreve-se frequentemente de forma mais abreviada $x < y < z$; interpretações semelhantes são dadas às desigualdades compostas $x \leq y < z, x < y \leq z, x \leq y \leq z$.

A partir dos axiomas de ordem podem deduzir-se todas as regras usuais do cálculo com desigualdades. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas.

1.31 Teorema

1. ***Propriedade tricotômica***. *Para a, b e c pertencentes a um corpo ordenado e arbitrários vale uma e apenas uma das três relações* $a < b, b < a$ *ou* $a = b$.

2. ***Propriedade transitiva***. *Se* $a < b$ *e* $b < c$ *então* $a < c$.

3. *Se* $a < b$ *então* $a + c < b + c$.

4. *Se* $a < b$ *e* $c > 0$ *então* $ac < bc$.

5. *Se* $a \neq 0$ *então* $a^2 > 0$.

6. $1 > 0$.

7. *Se* $a < b$ *e* $c < 0$ *então* $ac > bc$.

8. *Se* $a \langle b$ *então* $-a \rangle - b$. *Em particular, se* $a < 0$, *então* $-a > 0$.

9. *Se* $ab > 0$, *então a e b são ambos positivos, ou ambos negativos.*

10. *Se* $a < ceb < d$, *então* $a + b < c + d$.

Demonstração. **Demonstração de 1.** Seja $x = b - a$. Se $x = 0$, então $b - a = a - b = 0$, e, pelo **Axioma 12**, não pode ocorrer nem $a > b$ nem $b > a$. Se $x \neq 0$, o **Axioma 11** implica que ou $x > 0$ ou $x < 0$, mas não

ambos; portanto, ou $a < b$ ou $b < a$, mas não ambos. Logo, verifica-se exatamente uma das três relações: $a = b$, $a < b$, ou $b < a$.
Demonstração de 2. Se $a < b$ e $b < c$, então $b - a > 0$ e $c - b > 0$. Pelo **Axioma 10**, podemos somar essas desigualdades e obter $(b - a) + (c - b) > 0$, o que resulta em $c - a > 0$, ou seja, $a < c$.
Demonstração de 3. Seja $x = a + c$ e $y = b + c$. Então, $y - x = b - a$. Como $b - a > 0$, pois $b > a$, temos que $y - x > 0$, o que implica $x < y$.
Demonstração de 4. Se $a < b$, então $b - a > 0$. Se $c > 0$, pelo **Axioma 10**, podemos multiplicar c por $(b - a)$, obtendo $(b - a)c > 0$. Como $(b - a)c = bc - ac$, temos $bc - ac > 0$, o que significa que $ac < bc$, como desejado.
Demonstração de 5. Se $a > 0$, então $a \cdot a > 0$ pelo **Axioma 10**. Se $a < 0$, então $-a > 0$, e, portanto, $(-a) \cdot (-a) > 0$ pelo mesmo axioma. Em ambos os casos, obtemos $a^2 > 0$.
Demonstração de 6. Segue do item anterior tomando $a = 1$.

Poderíamos também ter assumido no lugar dos axiomas 10, 11 e 12 os seguintes axiomas de ordem total:

Axioma 10' Dados quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$, tem-se

(a) $a \leq a$ (reflexiva)

(b) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica)

(c) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva)

(d) Necessariamente, é $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ordem total)

Axioma 11' Compatibilidade com a soma

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{K}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

Axioma 12' Compatibilidade com a multiplicação

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{K}, a \leq b \text{ e } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$$

Exercícios

1.4 — Mostre que num corpo ordenado completo valem as seguintes afirmações:

a) Não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.

b) a soma de dois números negativos é um número negativo.

c) Se $a > 0$, então $1/a > 0$, se $a < 0$, então $1/a < 0$.

d) Se $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

e) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

f) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, e $a = c$, então $b = c$.

g) Para números reais a e b quaisquer tem-se $a^2 + b^2 \geq 0$. Se a e b não são ambos 0 , então $a^2 + b^2 > 0$.

h) Não existe nenhum número real a tal que $x \leq a$ para todo o real x.

i) Se x satisfaz $0 \leq x < h$ para todo o número real positivo h, então $x = 0$.

1.5 — Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ não é um corpo ordenado.

* **1.6 —** Prove que dado um corpo, então os dois conjuntos de axiomas de ordem axiomas 10,11 e 12 e axiomas 10′,11′ e 12′ são equivalentes.

1.4 Números naturais, inteiros e racionais

Nesta seção, introduziremos alguns subconjuntos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ que se destacam por possuírem propriedades especiais: o dos números naturais, o dos números inteiros e o dos números racionais.

Para introduzir os números naturais, começamos com o número 1, cuja existência é assegurada pelo **Axioma 3**. O número $1 + 1$ é representado por 2, o número $2 + 1$ por 3, e assim sucessivamente. Os números $1, 2, 3, \ldots$, obtidos por meio da adição repetida de 1, são todos positivos e são chamados de números naturais. Contudo, essa descrição dos números números naturais não é completamente rigorosa, pois não detalhamos o significado de expressões como "e assim sucessivamente"ou "adição repetida de 1". Embora essas expressões pareçam intuitivas, para um estudo rigoroso do sistema dos números reais, é necessário definir com maior precisão os números naturais. Existem várias formas de realizar essa definição. Um método conveniente é introduzir primeiro o conceito de conjunto indutivo.

1.32 **Definição (Conjunto Indutivo)** *Um subconjunto de um corpo ordenado é denominado **conjunto indutivo** se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *O número 1 pertence ao conjunto.*
2. *Se x pertence ao conjunto, então $x + 1$ também pertence ao conjunto.*

Por exemplo, $\mathbb{K}$ é um conjunto indutivo. Igualmente o é o conjunto $\mathbb{K}^+$. Podemos agora definir os números naturais como aqueles números que pertencem a todo o conjunto indutivo.

1.33 **Definição (Números naturais)** *Um número é dito **natural** se pertence a todo o conjunto indutivo.*

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais. Podemos afirmar que $\mathbb{N}$ é um conjunto indutivo, pois contém o número 1 e, se contém um número x, também contém $x + 1$. Como todos os elementos de $\mathbb{N}$ pertencem a qualquer conjunto indutivo, chamamos $\mathbb{N}$ de o menor conjunto indutivo. Essa característica de $\mathbb{N}$ fundamenta logicamente um tipo de raciocínio conhecido como demonstração por indução.

Os opostos dos números naturais são chamados de inteiros negativos. Os números naturais, juntamente com os inteiros negativos e o zero, formam o conjunto $\mathbb{Z}$, que é simplesmente denominado **conjunto dos números inteiros** .

1.34 **Teorema** *a soma, diferença ou produto de dois inteiros é um inteiro*

Por outro lado o quociente de dois inteiros não é necessariamente inteiro. Não faremos, todavia, tais demonstrações.

O quociente de inteiros a/b (com $n \neq 0$) define os **números racionais** . O conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, contém $\mathbb{Z}$ como subconjunto.

O leitor poderá comprovar que $\mathbb{Q}$ verifica todos os axiomas de corpo e de ordem. Por esta razão dizemos que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado. Os números reais que não pertencem a $\mathbb{Q}$ chamam-se **irracionais** .

Exercícios

1.7 — Mostre que $\mathbb{Q}$ é o menor corpo contido em $\mathbb{R}$. Ou seja, para todo corpo $K \subset \mathbb{R}$, tem-se $\mathbb{Q} \subset K$.

1.5 Indução matemática

A indução matemática é um método de prova que permite demonstrar que uma afirmação é verdadeira para todos os números naturais. O princípio da indução matemática funciona como um efeito dominó: se você provar que a primeira peça (o caso base n_0) cai, e que, se uma peça n cai, a próxima peça $n + 1$ também cai (hipótese de indução), então todas as peças (os casos) cairão, ou seja, a proposição será verdadeira para todos os $n \geq n_0$.

Estrutura da Prova por Indução Matemática A prova por indução consiste de dois passos principais:

1. **Caso Inicial** Demonstrar que a proposição é verdadeira para o valor inicial $n = n_0$ (geralmente $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

$$P(n_0) \text{ é verdadeira.}$$

2. **Passo Indutivo**: Suponha que a proposição seja verdadeira para $n = k$. Isso é chamado de **hipótese de indução** :

$$P(k) \text{ é verdadeira.}$$

Então, você deve provar que essa suposição implica que a proposição também é verdadeira para $n = k + 1$:

$$P(k) \implies P(k+1).$$

Se ambos os passos forem satisfeitos, podemos concluir que a proposição é verdadeira para todos os $n \geq n_0$.

1.35 **Exemplo** *. Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n+1)/2$. Em símbolos:*

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Comecemos com verificar a condição PIF 1. Para isso, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1, enquanto o termo à direita é

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$P(k) : 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}$$

assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

A justificativa lógica deste método de demonstração é dada pelo seguinte teorema sobre números inteiros:

1.36 **Teorema (Princípio da indução matemática)** *Seja S um conjunto de números naturais que possui as seguintes propriedades:*

1. *O número 1 pertence ao conjunto S.*
2. *Se o número k pertence a S, então $k + 1$ também pertence a S.*

Logo, todo natural pertence ao conjunto S.

Demonstração. as propriedades 1 e 2 mostram que S é um conjunto indutivo. No entanto, os números naturais são definidos como os números que pertencem a todo conjunto indutivo Portanto, S contém todos os números naturais. □

Ao demonstrarmos que uma afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$ por indução matemática, estamos aplicando o Teorema 1.36 ao conjunto S de todos os inteiros para os quais a afirmação é verdadeira. Se desejamos provar que $a(n)$ é verdadeira apenas para $n \geq n_1$, aplicamos o Teorema 1.36 ao conjunto dos números n para os quais $a(n + n_1 - 1)$ é verdadeira.

1.37 **Exemplo** *Mostrar por indução a propriedade $P(n) : 2^n \geq 1 + n$.*

Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, é satisfeita condição 1 do PIF. Para provar a condição 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$2^k \geq 1 + k$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ é válida, i.e. que $2^{k+1} \geq 1 + (k+1)$. Temos

$$2^{k+1} = 2.2^k \geq 2.(1+k) \quad (\text{ usamos a hipótese indutiva})$$

$$= 2 + 2k \geq 2 + k = 1 + (k+1)$$

a condição PIF 2, portanto, também é válida. Logo, pelo PIF, a propriedade P vale para todo número natural.

1.38 **Exemplo (Desigualdade de Bernoulli)** *Em todo corpo ordenado $\mathbb{K}$, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale a desigualdade $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Esta desigualdade é demonstrada por indução em n.*

Para $n = 1$, a desigualdade é evidente, já que $(1+x)^1 = 1 + x$.

Supondo a validade para um n, ou seja, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, deduzimos para $n+1$ que:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

Expandindo

$$(1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$

assim, temos:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

Ao multiplicarmos ambos os membros da desigualdade $(1+x)^n \geq 1 + nx$ por $1 + x$ foi necessário supor que $x \geq -1$.

Quando $n \geq 1$ (com $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$), pelo mesmo argumento, obtemos a desigualdade estrita $(1+x)^n > 1 + nx$, desde que $x \neq 0$.

O **máximo** de um conjunto $X \subset \mathbb{K}$ é o maior elemento presente no conjunto X.

Formalmente,

1.39 **Definição** *Dizemos que um número $m \in X$ é o **máximo** de X se $m \geq x$ para todo $x \in X$.*

O máximo, quando existe, é único. Denotamos o máximo de X por $\max X$.

1.40 **Teorema** *Todo conjunto finito não vazio possui um máximo.*

Demonstração. Seja X um conjunto finito não vazio e $|X| = n$, ou seja, X possui n elementos.

Passo 1: Caso inicial $n = 1$

Se X tem apenas um elemento, ou seja, $|X| = 1$, o único elemento de X será o máximo, pois não há outros elementos com os quais compará-lo. Nesse caso, o único elemento é o maior de todos. Logo, X possui um máximo.

Passo 2: Passo indutivo

Suponha que para qualquer conjunto finito X com $n = k$ elementos, X possui um máximo. Ou seja, para todo conjunto com k elementos, existe um $m \in X$ tal que $m \geq x$, para todo $x \in X$.

Agora, considere um conjunto Y com $k + 1$ elementos. Escolha um elemento $y_1 \in Y$ e defina $Y' = Y \setminus \{y_1\}$. O conjunto Y' tem k elementos, e pela hipótese de indução, sabemos que Y' possui um máximo, digamos $m \in Y'$.

Agora, compararemos m com y_1:

- Se $y_1 \leq m$, então m é o máximo de Y.
- Se $y_1 > m$, então y_1 será o máximo de Y. □

Portanto, o conjunto Y com $k + 1$ elementos também possui um máximo.

1.41 **Teorema (Príncipio da Boa Ordem)** *Todo conjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.*

Demonstração. Vamos provar a contrapositiva, ou seja, que se uma coleção de números naturais não tem elemento mínimo, então ela deve ser vazia.

Seja T uma coleção não vazia de números naturais. Considere S, os números naturais que não estão em T, ou seja $S = \mathbb{N} \setminus T$. Como T não é vazia, S não é todo o conjunto $\mathbb{N}$. Vamos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$.

Caso inicial: $n = 1$: Se $1 \in T$, então ele é o menor. Logo, $1 \notin T$, ou seja, $1 \in S$.

Passo indutivo: Suponha que $n \in S$. Se algum dos números menores que n estivesse em T, então um deles seria o menor (já que há apenas um número finito de tais números e provamos que todo conjunto finito tem um elemento mínimo). Assim, nenhum dos números $1, \ldots, n$ está em T. Se $n+1 \notin T$, então $n+1$ seria o menor. Portanto, $n+1 \notin T$, ou seja, $n+1 \in S$. Isso completa o passo indutivo.

Portanto, mostramos que todo número natural está em S, o que significa que T deve ser vazio. Isso estabelece a contrapositiva do teorema. □

1.6 Funções definidas recursivamente

A indução matemática também é usada na definição **recursiva** de funções definidas nos naturais. Nesse procedimento, damos um valor inicial para a função f em $n = 1$ e, em seguida, assumimos que f foi definida para todos os inteiros $k = 1, \ldots, n$, e o valor de f em $n+1$ é dado em termos dos valores de f em k, $k \leq n$. Essa abordagem recursiva é frequentemente aplicada em diversos contextos matemáticos, e as funções definidas nos naturais recebem o nome de sequências.

1.42 **Definição** *Uma **sequência real** a é uma função dos números naturais nos reais*

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

A imagem do natural n pela sequência s será denotado por s_n , i.e, $s_n := s(n)$.

Começaremos apresentando alguns exemplos de sequências especificadas dessa forma.

Uma sequência pode ser definida através das seguintes regras:

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ e } a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

Para ilustrar como que as regras acima especificam uma sequência vamos calcular os primeiros termos dessa sequência. Como o primeiro termo já nos é fornecido nas regras acima, calculemos o segundo termo dessa sequência. Para esse fim é suficiente notarmos que: $a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$. Para calcularmos o terceiro termo, notemos que $a_3 = \sqrt{2a_2}$ e assim $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, de modo geral o termo a_n terá a forma:

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 \cdots \sqrt{2\sqrt{2}}}}_{n \text{ raízes}}.$$

Observe que a definição da sequência anterior, consta de duas partes, a primeira define o primeiro termo e a segunda que define o termo a_n em função do termo a_{n-1}. Essa é a estrutura geral de uma definição

n	a_n
1	1.41421
2	1.68179
3	1.83401
4	1.91521
5	1.95714

Tabela 1.2: Valores da Sequência definida por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$.

recursiva: definimos alguns casos iniciais, e definimos então os seguintes como função destes. Claramente, esse procedimento se assemelha a estrutura da demonstração por indução.

A Tabela 1.2 o contém o valor aproximado dos primeiros termos dessa sequência.

Sequência de Fibonacci

Outra sequência que pode ser definida recursivamente é a sequência de Fibonacci, definida pelas regras recursivas:

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Claramente, os primeiros termos dessa sequência são:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots)$$

A sequência anterior foi descrita primeiramente pelo matemático italiano Fibonacci (1175-1250), como solução ao seguinte problema sobre o crescimento de uma população de coelhos:

> "Um homem tem um casal de coelhos. Desejamos saber quantos casais de coelhos podem ser gerados deste par, se a cada mês um casal fértil gera um novo casal e cada casal novo se torna fértil quando completa dois meses de vida."

A sequência de Fibonacci (f_n) descreve o número de casais de coelhos após n meses se eles se multiplicarem como descrito.

Fatorial

Uma sequência de grande importância na combinatória em particular, e na matemática em geral é a função fatorial definida (informalmente?) como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Partiremos da observação que $1! = 1$ e que em geral $n! = n(n-1)!$ para a definição da função fatorial.

1.43 Definição *Definimos a função fatorial $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sendo a função que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $f(1) = 1$
2. $f(n) = n \cdot f(n-1)$ *para todo n maior que 1.*

Somatório

Vamos examinar outro exemplo. Na seção de indução encontramos somas como:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Observe que na soma acima o termo típico a ser somado é da forma k^2 e estamos somando esses termos de 1 até n. Um modo sucinto e muito útil de escrever essa soma é utilizando a notação de somatório:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

A expressão anterior deve ser lida como "soma de k^2 com k variando de 1 até n.

E de modo mais geral a soma dos números reais $a_1, \cdots a_n$ pode ser escrita usando a notação de somatório como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

Claramente, não é necessário que a soma comece do 1. Assim por exemplo, podemos escrever:

$$\sum_{s=0}^{4} (2s+1) = 1+3+5+7+9$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^j = 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$$

De modo análogo ao fatorial, podemos definir o somatório como

$$\overset{\substack{\text{índice superior} \\ \downarrow}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{índice inferior}}}{\sum_{i=1}^{n}}} a_i \longleftarrow \text{termo}$$

Figura 1.1: A notação $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa a soma dos termos a_i para i variando de 1 até n.

1.44 **Definição** *Dado a_k uma sequência de números reais. Definimos o somatório de a_k de 1 até n como sendo a função $\sum_{k=1}^{n} a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ *para todo n maior que 1.*

Principio da Recursão

As construções anteriores são justificadas pelo Teorema da Recursão, que nos assegura a existência de funções definidas recursivamente.

Principio da Recursão

Seja A um conjunto não vazio e $g : \mathbb{N} \times A \to A$ Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \to A$ satisfazendo:

1. $f(1) = a$, com $a \in A$
2. $f(n) = g(n, f(n-1))$ para todo n em $\mathbb{N}$

Demonstração. Provaremos primeiro a existência, ou seja, demonstraremos que a função $f(n)$ está bem definida pelas regras recursiva. A demonstração desse fato será feita por indução sobre n. Começamos observando que $f(1)$ está bem definida, pois $f(1) = a$. Suponha, agora que $f(n)$ está bem definida, então temos que $f(n+1) = g(n, f(n))$ está bem definida. E assim existe uma função com essa propriedade.

Provaremos a unicidade também por indução sobre n. Para isso sejam f e f' duas funções satisfazendo as hipóteses do teorema, provaremos que para todo $n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = f'(n)$. Por hipótese $f(1) = a =$

$f'(1)$. Agora por hipótese indutiva suponha que $f(n-1) = f'(n-1)$, então $f(n) = g(n, f(n-1)) = g(n, f'(n-1)) = f'(n)$ e desta forma temos a unicidade da função.

Vamos usar o princípio da recursão para provar a existência da função fatorial. Nesse caso tomamos o conjunto A como sendo os naturais e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g(a,b) = a \cdot b$ e definimos $f(1) = 1$ e como $f(n) = g(n, f(n-1)) = nf(n-1)$ teremos que $f(n)$ é a função fatorial.

Exercícios

1.8 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_n + b_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n + \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (ca_n) = c \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_n$ (propriedade telescópica)

1.9 — Prove por indução a seguinte generalização da desigualdade triangular

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_n \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_n|$$

1.10 — Definimos o produtório de a_k de 1 até n como sendo a função $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\prod\limits_{k=1}^{1} a_k = a_1$.
2. $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_n \cdot \prod\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ para todo n maior que 1.

Prove por indução as seguintes propriedades do produtório

a) $\prod\limits_{k=1}^{n} (a_n \cdot b_n) = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_n \right) \cdot \left(\prod\limits_{k=1}^{n} b_n \right)$

b) $\prod\limits_{k=1}^{n} (ca_n) = c^n \prod\limits_{k=1}^{n} a_n$

c) $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0}$

Exercícios

1.11 — Prove que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.12 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.13 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.14 — Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

1.15 — Prove que $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, quando $r \neq 1$.

1.16 — Prove a seguinte fórmula para a soma de uma progressão geométrica

$$\sum_{k=1}^{n} px^{n-1} = \frac{p - px^n}{1 - x}$$

1.7 *Axioma de completude*

Os treze axiomas apresentados abrangem todas as propriedades dos números reais que são estudadas na álgebra elementar. Entretanto, existe um décimo terceiro axioma, de importância crucial para o Cálculo, que normalmente não é abordado nos cursos básicos de álgebra. Quando passamos ao Cálculo, precisamos de um conceito mais avançado, que é "uma espécie de continuidade dos números reais". Esse conceito envolve a completude dos números reais, o que significa intuitivamente que não existem "lacunas"entre os números reais. Este axioma, ou suas propriedades equivalentes, é indispensável para fundamentar a teoria dos números irracionais.

Os números irracionais aparecem na álgebra elementar quando buscamos resolver certas equações quadráticas. Um exemplo é a determinação de um número real x tal que $x^2 = 2$. A partir dos treze axiomas mencionados, não podemos provar a existência de tal x em $\mathbb{R}$, pois esses axiomas também são satisfeitos em $\mathbb{Q}$, onde não há nenhum número racional cujo quadrado seja 2.

Discussão prévia a respeito da necessidade do axioma de Completude . O conteúdo desta seção é objeto de vasta literatura. Evidentemente, está fora de nossos propósitos tratar este tema com o mesmo grau de profundidade, longe disso. Entretanto, parece válido delinear algumas questões motivadoras do próximo (e último) axioma que introduziremos para poder finalmente caracterizar univocamente os números reais.

Até agora, como observamos acima, os doze axiomas introduzidos não dão conta de diferenciar o conjunto dos números racionais daquele dos números reais. Mais do que isso, porém, há o fato de que um corpo ordenado não constitui um instrumento adequado às necessidades do cálculo diferencial e integral (ou, de modo mais apropriado, à análise). O que falta, dito de modo ainda impreciso, é a propriedade da *continuidade*.

Para apreciar ao menos em parte o significado disso, comecemos por ver a ausência dessa propriedade em $\mathbb{Q}$. Provemos, como exemplo, a seguinte proposição:

1.45 **Proposição** *Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.*

Demonstração. Para demonstrar isso, seguiremos a "redução ao absurdo": negando a tese, chegamos a uma contradição, o que nos permite concluir que a tese deve ser de fato verdadeira. Tomemos então um número racional q tal que $q^2 = 2$ (note que estamos negando a tese de que tal número não existe). Como q é um número racional, devem existir número inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$, primos entre si[2], tais que

$$q = \frac{n}{m}$$

Como $q^2 = 2$, tem-se que $n^2 = 2m^2$. Como o membro à direita é par, assim deve ser n^2. Logo, n é par ($\because$ um número inteiro e seu quadrado têm a mesma paridade). Podemos então escrever $n = 2k$ para um certo inteiro k, obtendo

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Mas isso significa que $m^2 = 2k^2$ é par, e portanto m também é par. Logo, o número 2 é um divisor comum de n e m, contradizendo o fato de que tais números são primos entre si. Resumindo: a hipótese de existência de um número racional q cujo quadrado é igual a 2 leva a uma contradição. Disso, concluímos que tal racional não existe, provando assim a proposição. □

[2] Dois inteiros são primos entre si quando não possuem nenhum divisor comum, à exceção do número 1. Um número racional sempre pode ser expresso como razão de dois inteiros primos entre si.

A proposição acima é um exemplo de como os axiomas axioma 1, ..., axioma 12 não dão conta sequer de permitir uma operação algébrica tão simples quanto a extração de raiz quadrada. O axioma de Completude virá fornecer a resposta adequada a essa questão da continuidade, fazendo com que o conjunto dos números reais "preencha as lacunas deixadas pelos racionais".

Supremo e ínfimo

Apesar de ser possível enunciar o axioma de Completude com o que já temos à disposição, nos parece mais efetivo, sob o ponto de vista didático, apresentar alguns conceitos preliminares intimamente ligados a tal axioma.

No que se segue, seja $a \subset \mathbb{K}$ um subconjunto *não vazio*. Dizemos que a é **limitado superiormente** , se existe um número real x tal que

$$a \leq x \qquad \forall\, a \in a$$

Caso exista tal número x, este é chamado de **majorante** ou **cota superior** do conjunto a. Note que no caso em que a possua alguma cota superior, possuirá infinitas cotas superiores.

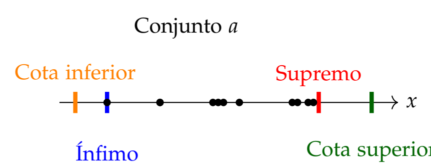
De modo similar, dizemos que a é **limitado inferiormente** se existir algum número real y tal que

$$y \leq a \qquad \forall\, a \in a$$

Tal número y, caso exista, é chamado de **minorante** ou **cota inferior** . Caso a possua algum minorante, possuirá infinitos minorantes.

1.46 **Exemplos** . *Tome os conjuntos* $a = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x \leq 3\}$.

1. *O conjunto a possui minorantes (qualquer número não positivo é um minorante de a), mas não possui cotas, i.e. a é um conjunto limitado inferiormente, mas não superiormente.*
2. *O conjunto B não possui nem minorantes nem cotas (não é limitado).*
3. *Já o conjunto C é limitado inferiormente e superiormente (qualquer número menor ou igual a 1 é um minorante, qualquer número maior ou igual a 3 é um cota)*



1.47 **Definição** *Um número* $s \in \mathbb{K}$ *é chamado de* ***supremo*** *de* a *se valem as seguintes condições:*

S1 $a \leq s \qquad \forall\, a \in a$

S2 *Se* x *é uma cota superior de* a*, então* $s \leq x$

Em outras palavras, um modo simples de colocar a definição acima é: o supremo de um conjunto a é o menor das cotas superiores de a.

De modo totalmente similar, definimos o conceito de ínfimo.

1.48 **Definição** *Um número* $r \in \mathbb{K}$ *é chamado de* ***ínfimo*** *de* a *se valem as seguintes condições:*

I1 $r \leq a \qquad \forall\, a \in a$

I2 *Se y é uma cota inferior de a, então $y \leq r$*

Em outras palavras, o ínfimo de um conjunto a é o maior das cotas inferiores de a.

1.49 **Teorema** *Tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto, casos existam, são únicos.*

Demonstração. Sejam B e C dois supremos para um conjunto S. A propriedade **S2** implica que $C \geq B$, uma vez que B é supremo; analogamente, $B \geq C$ já que C é supremo. Logo temos $B = C$. □

O teorema anterior justifica a seguinte notação: $\sup a$ para o supremo de a e $\inf a$ para o ínfimo de a.
Nos exemplos acima, temos: $\inf a = 0$, $\inf C = 1$ e $\sup C = 3$ (note que a não possui supremo e B não possui nem ínfimo nem supremo). Assim, há casos em que o supremo (ou o ínfimo) pode não existir. O axioma de Completude diz que isso só poderá ocorrer com conjuntos ilimitados.

1.50 **Exemplo** *Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo. Da mesma forma, se X tiver um elemento mínimo, ele será o seu ínfimo. Reciprocamente, se o supremo de X pertence a X, ele será o maior elemento de X; e se o ínfimo de X pertence a X, ele será o menor elemento. Em particular, qualquer subconjunto finito $X \subset K$ possui ínfimo e supremo. Um exemplo adicional: se $X = (-\infty, b]$ e $Y = [a, +\infty)$, então $\inf Y = a$ e $\sup X = b$.*

1.51 **Exemplo** *Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $I = (a, b)$. Temos $\inf I = a$ e $\sup I = b$. De fato, a é claramente uma cota inferior de I. Agora, provemos que nenhum $c \in \mathbb{K}$, com $a < c$, pode ser uma cota inferior de I. Isso é evidente se $c \geq b$. Por outro lado, se $a < c < b$, então $x = \frac{a+c}{2}$ é um elemento de I com $a < x < c$, o que demonstra que c não é uma cota inferior de I. Assim, $a = \inf I$. De maneira análoga, pode-se mostrar que $b = \sup I$. Vale ressaltar que nesse exemplo temos que $\sup I \notin I$ e $\inf I \notin I$.*

Axioma de Completude:

Axioma 13 Todo subconjunto de $\mathbb{K}$, não vazio e limitado superiormente, possui supremo.

Apesar de não fazer menção ao ínfimo, o axioma de Completude é equivalente à seguinte propriedade:

Axioma 13′ Todo subconjunto de $\mathbb{K}$, não vazio e limitado inferiormente, possui ínfimo.

Um corpo que satisfaz os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** é e dito um **corpo ordenado completo** .

Dessa forma, podemos agora dizer que os axiomas **Axioma 1**, ..., **Axioma 13** caracterizam o conjunto dos números reais[3].

[3] Na verdade, caberia aprofundar tal "caracterização", o que será feito no Capítulo 3

1.52 **Definição** *Um corpo ordenado completo será denominado **corpo dos números reais** ou simplesmente números reais e denotado por* $\mathbb{R}$.

Posteriormente, demonstraremos tanto a existência quanto a unicidade de tal corpo.

Exercício. Prove a propriedade axioma 13″. [Sugestão: dado um conjunto a limitado inferiormente, considere o conjunto $B = \{-a \mid a \in a\}$ e mostre que: i) B é limitado superiormente; ii) $\inf a = -\sup B$]

1.53 **Exemplo** *Seja S o conjunto de todos os números da forma $(1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Todo os números do conjunto são maiores ou iguais a 1 e assim o conjunto é limitado inferiormente e portanto possui ínfimo. Com um pequeno esforço pode provar-se que 2 é o menor elemento de S, de modo que $\inf S = \min S = 2$.

*O conjunto S é também limitado superiormente embora este fato não seja tão fácil de provar. Demonstraremos tal fato na seção 2.3 Uma vez conhecido que S é limitado superiormente, o **Axioma 13** assegura-nos que existe um número que é o supremo de S. Neste caso não é fácil determinar o valor de $\sup S$ a partir de definição do conjunto S. No capitulo seguinte aprenderemos que o sup S é um número irracional, denominado número de Euler e.*

1.8 Propriedade arquimediana

Nesta secção apresentaremos algumas propriedades importantes do sistema dos números reais, as quais são consequência do axioma do supremo. Em especial. A Propriedade arquimediana que é um princípio fundamental em análise e que intuitivamente, nos diz que não existem números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos dentro dos reais.

1.54 **Teorema** *O conjunto $\mathbb{N}$ dos números números naturais não é limitado superiormente.*

Demonstração. Suponhamos $\mathbb{N}$ limitado superiormente. Vamos provar que essa hipótese leva a uma contradição. Sabemos que $\mathbb{N}$ é não vazio, e pelo **Axioma 13**, $\mathbb{N}$ possui um supremo, digamos b. Agora, observe que o número $b - 1$, por ser menor que b, não pode ser o limite superior de $\mathbb{N}$. Portanto, deve existir algum número natural n tal que $n > b - 1$. Para esse n, temos $n + 1 > b$.

Como $n+1$ pertence a $\mathbb{N}$, isso contradiz o fato de que b é um limite superior de $\mathbb{N}$, o que encerra a demonstração. $\square$

Como corolário do Teorema 1.54 temos:

1.55 Teorema *Para qualquer real x existe um natural n tal que $n > x$.*

Demonstração. Caso contrário, existiria um número x que serviria como limite superior de $\mathbb{N}$, o que contradiz diretamente o Teorema 1.54. Isso demonstra a impossibilidade da suposição inicial. $\square$

1.56 Teorema (Propriedade arquimediana) *Se $x > 0$ e se y é um número real arbitrário, existe um natural n tal que $nx > y$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 1.55 com x substituído por y/x. $\square$

1.57 Definição *Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ possui a propriedade arquimediana se, para quaisquer elementos positivos x e y em $\mathbb{K}$, existe um número natural n tal que $nx > y$.*

O Teorema 1.56 garante que os números reais possuem a propriedade arquimediana. Geometricamente, isso significa que qualquer segmento de reta, não importa o quão longo, pode ser completamente coberto por um número finito de segmentos menores, de tamanho fixo. Em outras palavras, uma régua pequena, utilizada repetidamente, é capaz de medir qualquer distância, por maior que seja.

Dizemos que um corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ é **arquimediano** se, para todo $x, y \in \mathbb{K}$ com $x > 0$ e $y > 0$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}} > y.$$

1.58 Teorema *Se três números reais a, x e y verificam as desigualdades*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \tag{1.3}$$

para todo o inteiro $n \geq 1$, então $x = a$.

Demonstração. Se $x > a$, o teorema 1.56 garante-nos que existe um inteiro e positivo n para o qual $n(x-a) > y$, contradizendo 1.3. Logo, não podendo ser $x > a$, teremos $x = a$.

Mais adiante, provaremos que existe apenas um corpo ordenado completo, que denominaremos corpo dos números reais, no sentido de que qualquer dois corpos ordenados completos são isomorfos entre si. [4]

[4] Isso significa que, embora possam ser apresentados de maneiras diferentes ou com diferentes representações de seus elementos, existe uma correspondência estrutural exata entre eles que preserva tanto as operações de soma e multiplicação quanto a ordem dos elementos.

Exercícios

1.17 — Prove que, num corpo ordenado $\mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

a. $\mathbb{K}$ é um corpo arquimediano;

b. $\mathbb{Z}$ é ilimitado superior e inferiormente;

c. $\mathbb{Q}$ é ilimitado superior e inferiormente.

1.18 — Prove que um corpo $\mathbb{K}$ é arquimediano se e somente se zero é o ínfimo em $\mathbb{K}$ do conjunto $\{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.

Existência da raiz quadrada

Pela apresentação que demos ao axioma de Completude, ficou claro que tal axioma não seria satisfeito pelo conjunto $\mathbb{Q}$. Mostremos que de fato isso ocorre. Considere o seguinte conjunto:

$$a = \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 < 2\}$$

Note que $a \neq \varnothing$ (por exemplo, $0 \in a$) e é um conjunto limitado superiormente (por exemplo, 3 é uma cota superior de a). Se o **Axioma 13** fosse válido em $\mathbb{Q}$, deveria existir $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p = \sup a$. Se provarmos que para tal p, deve valer $p^2 = 2$, poderemos concluir que p não pode ser racional (em função da Proposição 1.45). Consequentemente, teremos concluído que não existe o supremo de a em $\mathbb{Q}$.

Mostraremos, na verdade, uma propriedade mais geral, da qual poderemos concluir a afirmação acima. Referimo-nos à *existência da raiz quadrada de um número real positivo*:

1.59 **Proposição** *Seja $b \in \mathbb{R}$ um número positivo. Então existe um único número real positivo a tal que $a^2 = b$. O número a é chamado de* raiz quadrada *de b e é denotado por $\sqrt{b}$.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$a = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}$$

O conjunto a é não vazio, uma vez que $0 \in a$. Além disso, tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 1$ e $y > b$, resulta $y^2 > y > b$, logo a possui cota superior[5]. Pelo axioma de Completude, existe $a = \sup a$. É evidente que $a > 0$. Queremos mostrar que $a^2 = b$. A ideia, para tanto, é mostrar que não pode ocorrer nem $a^2 < b$, nem $a^2 > b$, só restando a possibilidade que nos interessa. Para descartar cada uma dessas duas desigualdades, verificaremos que: (i) supor que $a^2 < b$ contradiz o

[5] Por quê?

fato de a ser uma cota superior (condição **S1** do supremo); (ii) supor que $a^2 > b$ contradiz o fato de a ser o menor das cotas superiores (condição **S2** do supremo). Pois bem, se fosse $a^2 < b$, poderíamos tomar um número natural $n > 1$ tal que[6]

$$n > \frac{2a+1}{b-a^2}.$$

Tal n existe pelo Teorema 1.55, donde obtemos

$$\frac{2a+1}{n} < b - a^2$$

assim, tomando o número $c = a + 1/n$, seguiria:

$$c^2 = (a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} <$$
$$< a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} < a^2 + b - a^2 = b$$

Isso significa que $c \in a$ e $a < c$, contrariando a condição **S1** do supremo. Portanto, está descartada a possibilidade de ser $a^2 < b$. Suponhamos agora que valha $a^2 > b$. De modo semelhante ao que foi feito acima, poderíamos tomar $c = a - 1/n$, onde n é um inteiro tal que

$$n > \frac{2a}{a^2 - b}$$

Da desigualdade acima, segue que

$$\frac{2an-1}{n^2} < \frac{2an}{n^2} = \frac{2a}{n} < a^2 - b$$

donde obtemos

$$c^2 = (a - \frac{1}{n})^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = a^2 + \frac{1-2an}{n^2} > a^2 + b - a^2 = b$$

Desse modo, c seria uma cota superior de a com $c < a$, contrariando a condição **S2** do supremo. Descartamos, assim, também a possibilidade de ser $a^2 > b$, podendo concluir, portanto, que $a^2 = b$. Por fim, para provarmos a unicidade da raiz quadrada, basta observar que se um número positivo $m \in \mathbb{R}$ é tal que $m^2 = b$, então m tem que ser o supremo de a. Pela unicidade do supremo, deve ser $m = a$. □

Voltando à questão formulada antes da Proposição 1.59, é imediato agora verificar que se $p \in \mathbb{Q}$ é tal que $p = \sup a$, então $p^2 = 2$. Logo, pelo que já foi dito anteriormente, concluímos que o conjunto dos racionais não satisfaz o axioma de Completude.

[6] Para compreender a escolha desse valor de n, recordamos que assumimos $a^2 < b$. Assim, definimos $c = a + \frac{1}{n}$, que é maior que a, mas que ainda satisfaz $c^2 < b$, o que nos levará a uma contradição. Vejamos como escolher o n:

$$c^2 = (a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} <$$
$$< a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n}$$

logo se escolhermos n tal que $\frac{2a+1}{n} < b - a^2$ então temos que $c^2 < a^2 + b - a^2 = b$.

1.9 *Propriedades do supremo e do ínfimo*

1.60 Teorema *Seja ε um número positivo dado e seja a um conjunto de números reais.*

1. *Se a possui supremo, então para algum x de a temos que*
$$x > \sup a - \varepsilon$$
2. *Se a possui ínfimo, então para algum x de a temos que*
$$x < \inf a + \varepsilon$$

Demonstração. Demonstração do item 1. Se $x \leq \sup a - \varepsilon$ para todo $x \in S$, então $\sup a - \varepsilon$ seria um limite superior de a menor que o seu supremo. Logo temos que $x > \sup a - \varepsilon$ para, pelo menos, um $x \in a$, o que demonstra 1. A demonstração do item 2 é semelhante. □

1.61 Teorema (Propriedade aditiva) *Dados dois subconjuntos não vazios a e B de $\mathbb{R}$, seja $a + B$ o conjunto*
$$a + B = \{a + b \mid a \in a, b \in B\}$$

1. *Se a e B possuem supremo, então $a + B$ tem supremo e*
$$\sup(a + B) = \sup a + \sup B$$
2. *Se a e B possuem ínfimo, então $a + B$ possui ínfimo e*
$$\inf(a + B) = \inf a + \inf B$$

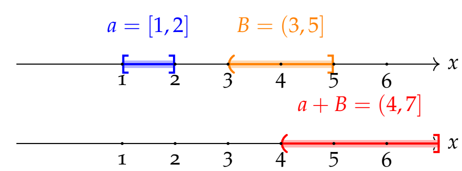


Figura 1.2: Ilustração da soma de dois conjuntos

Demonstração. Suponhamos que a e B possuem supremo. Se $c \in C = a + B$, então $c = a + b$ com $a \in a$ e $b \in B$. Portanto $c \leq \sup a + \sup B$ e deste modo $\sup a + \sup B$ é um limite superior de C. Isto prova que C possui supremo e que
$$\sup C \leq \sup a + \sup B$$

Seja agora n um inteiro e positivo qualquer. Segundo o teorema 1.60 (com $h = 1/n$) existe um a em a e um b em B, tais que
$$a > \sup a - \frac{1}{n}, \quad b > \sup B - \frac{1}{n}$$

Somando estas desigualdades obtemos $a + b > \sup a + \sup B - \frac{2}{n}$, ou $\sup a + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n}$, uma vez que $a + b \leq \sup C$. Consequentemente temos que
$$\sup C \leq \sup a + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$
para todo o inteiro $n \geq 1$. Pelo Teorema 1.58 temos que $\sup C = \sup a + \sup B$, o que prova 1; a demonstração de 2 é análoga. □

1.62 Teorema *Dados dois subconjuntos não vazios, a e B de $\mathbb{R}$ tais que*

$$a \leq b \text{ para todo } a \text{ em } a \text{ e } b \text{ em } B,$$

então a possui supremo e B possui ínfimo e verifica-se

$$\sup a \leq \inf B$$

Demonstração. Cada b de B é um limite superior para a. Portanto a possui supremo que satisfaz à desigualdade $\sup a \leq b$ para todo o b de B. Disso resulta que $\sup a$ é um limite inferior para B, e assim B possui um ínfimo que não pode ser'menor que $\sup a$. Por outras palavras, temos $\sup a \leq \inf B$, como queríamos provar. □

1.63 Proposição (Propriedades do Supremo e Ínfimo) *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos não-vazios e limitados dos números reais.*

1. *Temos que* $\inf(-X) = -\sup(X)$.
2. *Se $Y \subseteq X$, então* $\sup(Y) \leq \sup(X)$ *e* $\inf(Y) \geq \inf(X)$.
3. *O conjunto $X \cap Y$ também é limitado. Se $X \cap Y \neq \varnothing$, temos as desigualdades* $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup(X), \sup(Y))$ *e* $\inf(X \cap Y) \geq \max(\inf(X), \inf(Y))$.
4. *O conjunto $X \cup Y$ também é limitado, com* $\sup(X \cup Y) = \max(\sup(X), \sup(Y))$ *e* $\inf(X \cup Y) = \min(\inf(X), \inf(Y))$.
5. *Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante real, então:*

$$\sup(\lambda X) = \lambda \sup(X) \quad e \quad \inf(\lambda X) = \lambda \inf(X) \quad se\ \lambda > 0,$$

$$\sup(\lambda X) = \lambda \inf(X) \quad e \quad \inf(\lambda X) = \lambda \sup(X) \quad se\ \lambda < 0.$$

6. *O conjunto $X + Y$ também é limitado, com* $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$ *e* $\inf(X + Y) = \inf(X) + \inf(Y)$.
7. *Se todos os elementos de X e Y são não-negativos, então o conjunto XY também é limitado, com* $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ *e* $\inf(XY) = \inf(X)\inf(Y)$.
8. *Se todos os elementos de X são positivos, definimos o conjunto recíproco* $\frac{1}{X} = \left\{\frac{1}{x} : x \in X\right\}$. *Se* $\inf(X) > 0$, *então o conjunto $\frac{1}{X}$ é limitado, com* $\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)}$ *e* $\inf\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\sup(X)}$.

Demonstração. Prova das afirmações 2, 3 e 8. As demais ficam como exercício para o leitor.

2. Seja $\sup(X) = a$. Para todo $x \in X$, temos $x \leq a$. Assim, para qualquer $y \in Y \subseteq X$, devemos também ter $y \leq a$. Portanto, a é uma cota superior para o conjunto Y e, assim, $\sup(Y) \leq a = \sup(X)$. Um argumento similar pode ser usado para mostrar que $\inf(Y) \geq \inf(X)$.

3. Como X e Y são limitados, existem constantes $M, N > 0$ tais que cada elemento $x \in X$ satisfaz $x \leq M$ e cada $y \in Y$ satisfaz $y \leq N$. Assim, cada elemento de $X \cap Y$ é limitado superiormente tanto por M quanto por N.

   Assumindo que $X \cap Y \neq \varnothing$, pela completude dos reais, o supremo de $X \cap Y$ existe. Note que $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$. Usando a primeira afirmação, temos $\sup(X \cap Y) \leq \sup(X)$ e $\sup(X \cap Y) \leq \sup(Y)$, o que implica $\sup(X \cap Y) \leq \min(\sup(X), \sup(Y))$. A outra desigualdade para o ínfimo pode ser provada de forma semelhante.

8. Se $\inf(X) > 0$, então $x \geq \inf(X) > 0$ para todo $x \in X$. Portanto, temos que $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf(X)}$ para cada $x \in X$. Isso significa que o conjunto $\frac{1}{X} = \left\{\frac{1}{x} : x \in X\right\}$ é limitado superiormente, e seu supremo existe e é positivo.

   Agora, vamos mostrar que $\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)}$. Claramente, para qualquer $y \in \frac{1}{X}$, temos $\frac{1}{y} \in X$, o que implica que $\frac{1}{y} \geq \inf(X)$. Portanto, devemos ter $\frac{1}{\inf(X)} \geq y$ para todo $y \in \frac{1}{X}$, o que indica que $\frac{1}{\inf(X)}$ é uma cota superior para o conjunto $\frac{1}{X}$. Assim, concluímos que $\sup\left(\frac{1}{X}\right) \leq \frac{1}{\inf(X)}$.

   Para a desigualdade inversa, note que $\sup\left(\frac{1}{X}\right)$ é uma cota superior para o conjunto $\frac{1}{X}$. Então, para qualquer $x \in X$, temos $\frac{1}{x} \in \frac{1}{X}$ e, portanto, $\frac{1}{x} \leq \sup\left(\frac{1}{X}\right)$. Isso implica que $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{X}\right)} \leq x$ para qualquer $x \in X$. Assim, $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{X}\right)}$ é uma cota inferior para o conjunto X, o que significa que $\frac{1}{\sup\left(\frac{1}{X}\right)} \leq \inf(X)$.

   Pela álgebra, concluímos que $\frac{1}{\inf(X)} \leq \sup\left(\frac{1}{X}\right)$. Portanto, $\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf(X)}$. A outra igualdade pode ser provada de forma semelhante. □

Exercícios

1.19 — Seja $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$. Prove que $\inf X = 0$.

1.20 —

a) Se x e y são números reais quaisquer com $x < y$, prove que existe pelo menos um número real z tal que $x < z < y$.

b) Se x é um número real arbitrário, prove que existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.

c) Se $x > 0$, prove que existe um inteiro positivo n tal que $1/n < x$.

d) Se x é um número real arbitrário, prove que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $n \le x < n+1$. Este n é chamado a parte inteira de x e representa-se por $[x]$.

1.21 — Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado superiormente, e c um número real. Tem-se $c \le \sup X$ se, o somente se, para cada $\varepsilon > 0$ real dado pode-so achar $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < X$. Enuncie e demonstre um resultado análogo com ínfimo em vez de supremo.

1.22 — Seja $I = [0,1)$. Prove que $\sup I = 1$.

1.23 — Sejam $a \subset B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $\inf B \le \inf a \le \sup a \le \sup B$.

1.24 — Dado $a \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente, seja $-a = \{-x; x \in a\}$. Prove que $-a$ é limitado superiormente e que $\sup(-a) = -\inf a$.

1.25 — Seja $a \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $c \cdot a = \{c \cdot x; x \in a\}$. Prove que $c \cdot a$ é limitado e que $\sup(c \cdot a) = c \cdot \sup a, \quad \inf(c \cdot a) = c \cdot \inf a$. Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

1.26 — Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita lLimitada quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

a) Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to R$ é uma função limitada $f + g : X \to R$.

b) Mostre que $(f+g)(X) \subset f(X) + g(X)$

c) Conclua que $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g$ e que $\inf(f+g) \ge \inf f + \inf g$.

d) Considerando as funções $f, g : [-1,+1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que se pode ter $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$.

1.27 — Sejam a e B conjuntos de números reais positivos. Definimos

$$a \cdot B = \{x \cdot y; x \in a \text{ e } y \in B\}.$$

Prove que se a e B forem limitados então $a \cdot B$ é limitado, sendo $\sup(a \cdot B) = \sup a \quad \sup B$ e $\inf(a \cdot B) = \inf a \cdot \inf B$.

1.10 Valor absoluto de um número real

É comum identificar o módulo de um número real como sendo um "número sem sinal". Essa caracterização, além de ser imprecisa, é também pouco útil em problemas que envolvem direta ou indiretamente o conceito de módulo. De modo mais apropriado, temos a seguinte definição:

1.64 **Definição** *O **valor absoluto** de um número real x, também chamado de **módulo** de x, é denotado por $|x|$ e dado por*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Uma primeira leitura da definição acima corrobora a interpretação ingênua do módulo como sendo um "número sem sinal". Afinal, tem-se, por exemplo: $|2| = 2$ e $|-2| = -(-2) = 2$. Enquanto lidamos com quantidades conhecidas, como no exemplo anterior, não há problema nenhum em adotar essa visão ingênua. Mas quando há quantidades incógnitas ou variáveis envolvidas, essa concepção é insuficiente e pode até levar a cometer deslizes do tipo "o módulo de x e $-x$ é sempre x".

Uma leitura mais adequada da definição acima leva a ter em mente que ela abre, em geral, dois casos a serem analisados, dependendo do sinal da quantidade encerrada dentro do módulo. Vejamos como se dá essa leitura através de alguns exemplos.

1.65 **Proposição** *Sejam x e y números reais quaisquer, então:*

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = \sqrt{x^2}$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|-x| = |x|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|xy| = |x|\,|y|$

1.66 **Teorema** *Se $a \geq 0$, então*

1. *$|x| \leq a$ se e somente se $-a \leq x \leq a$;*
2. *$|x| \geq a$ se e somente se $x \leq -a$ ou $x \geq a$.*

Demonstração. Precisamos provar duas afirmações: primeiro, que a desigualdade $|x| \leq a$ implica a dupla desigualdade $-a \leq x \leq a$; em segundo lugar, que $-a \leq x \leq a$ implica $|x| \leq a$.

$\Longrightarrow$ Suponhamos que $|x| \leq a$. Então, a partir disso, temos que $-a \leq -|x|$. Como x pode ser escrito como $x = |x|$ ou $x = -|x|$, podemos considerar ambos os casos. Assim, temos $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$. Isso demonstra a primeira afirmação.

$\Longleftarrow$ agora, suponhamos que $-a \leq x \leq a$. Se $x \geq 0$, então $|x| = x \leq a$. Por outro lado, se $x \leq 0$, temos $|x| = -x \leq a$. Em ambos os casos, obtemos $|x| \leq a$. Isso completa a demonstração. □

1.67 Teorema *Para x e y números reais arbitrários tem-se*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Nota: Esta propriedade é conhecida como desigualdade triangular, porque quando é generalizada a vetores significa que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é igual ou menor do que a soma dos outros dois.

Demonstração. Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

e pelo Teorema 1.66, concluímos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Se fizermos $x = a - c$ e $y = c - b$, então $x + y = a - b$ e a desigualdade triangular segue:

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c|.$$

Por indução matemática, podemos generalizar a desigualdade triangular do modo seguinte:

1.68 Teorema *Para os números reais arbitrários $a_1, a_2 \ldots, a_k$, tem-se*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Demonstração. Para $n = 1$ a desigualdade é trivial e para $n = 2$ é a desigualdade triangular. Suponhamos, então, que é verdadeira para n números reais. Para $n + 1$ números reais $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ temos

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

Portanto o teorema é verdadeiro para $n + 1$ números reais se for verdadeiro para n; logo, pelo principio de indução, é verdadeiro para todo natural n. □

1.69 Teorema $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.70 **Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Se $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são números reais arbitrários, tem-se*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \tag{1.4}$$

O sinal de igualdade verifica-se se e só se existe um número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo valor de $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração. Temos $\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$ para todo o real x, porque uma soma de quadrados nunca pode ser negativa. A desigualdade anterior pode escrever-se

$$ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \tag{1.5}$$

onde

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Desejamos demonstrar que $B^2 \leq aC$. Se $a = 0$, cada $a_k = 0$ e deste modo $B = 0$ e o resultado é trivial. Se $a \neq 0$, podemos escrever

$$ax^2 + 2Bx + C = a\left(x + \frac{B}{a}\right)^2 + \frac{aC - B^2}{a}$$

O segundo membro é mínimo quando $x = -B/a$. Fazendo $x = -B/a$ em 1.5 obtemos $B^2 \leq aC$ o que demonstra o resultado. O leitor deve confirmar que a igualdade é válida se, e somente se, existir um x tal que $a_k x + b_k = 0$ para todo k. □

Exercícios

1.28 — Demonstre as seguintes propriedades do módulo;

a) $|-x| = |x|$
b) $|x - y| = |y - x|$
c) $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$
d) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$
e) $\left|x^2\right| = x^2$
f) Se $c \geq 0$ então $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$
g) $-|x| \leq x \leq |x|$
h) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)
i) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.29 — Discuta se vale ou não a seguinte desigualdade (para um número real arbitrário x):

$$-x \leq |x| \leq x$$

1.30 — (Não existência de Infinitesimais) Mostre que se $|x - a| < \varepsilon$ para todo ε então $x = a$.

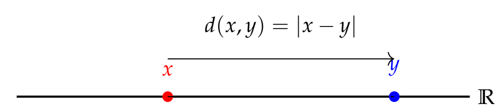
1.11 *Introdução à topologia da reta*

O objetivo desta seção é o de introduzir uma linguagem e uma notação que serão úteis, mais adiante, no estudo das sequências e funções reais de uma variável real. Em boa parte, trata-se de linguagem e notação conhecidas, como é o caso dos intervalos abertos e fechados. A expressão "topologia da reta", de certo modo, refere-se a propriedades dos números reais (ou das funções reais) que se expressam nessa linguagem e que permitem definir noções de abertos, fechados, vizinhança, continuidade, limites e outros conceitos fundamentais em análise. [7].

[7] a Topologia, na verdade, é uma área ampla da Matemática que se ocupa, dentre outras coisas, do estudo das funções contínuas. Tais funções, e consequentemente seu estudo, se dão em contextos bem mais gerais do que aquele das funções reais de uma variável real, que é o que nos interessa aqui. Por tal motivo, não aprofundaremos o significado da expressão "topologia da reta". Na verdade, poderíamos mesmo ter omitido tal referência à Topologia, mas por que fazê-lo se, de fato, é disso que esta seção trata?

Começamos por dois conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: *distância* e *intervalo*
A **distância** entre dois números reais x e y é dada por

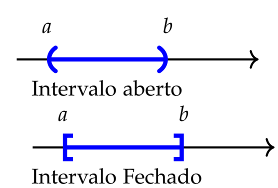
$$d(x, y) := |x - y|$$



Note que, vista na reta real, a noção de distância corresponde ao comprimento do segmento de reta cujos extremos são os pontos com abscissas x e y.

Dados dois números reais $a < b$, um **intervalo** de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



A **medida** de um intervalo de extremos a e b é a distância entre esses extremos, i.e. $|a - b|$. Note que um intervalo de extremos a e b corresponde, na reta real, ao segmento cujos extremos têm abscissas a e b. A medida desse intervalo é a medida (comprimento) do segmento correspondente.

Sobre notação. Em alguns textos, a notação para intervalos abertos (ou semi-abertos) usa o colchete invertido. Por exemplo, $]a, b[$ denota o que, aqui, denotamos por (a, b). Não adotaremos essa notação do colchete invertido, mas somente aquela do parênteses, explicitada acima.

Uma notação semelhante àquela de intervalo é usada para denotar semi-retas, lançando mão também dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, tem-se

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Note que não faz sentido usar o colchete no extremo infinito, uma vez que nem $-\infty$ nem $+\infty$ são números reais. Por simplicidade, às vezes usaremos o termo "intervalo" também para semi-retas como as acima.

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $\varepsilon > 0$, o **intervalo centrado em a com raio** ε, ou também **vizinhança** de a de raio ε, é o intervalo

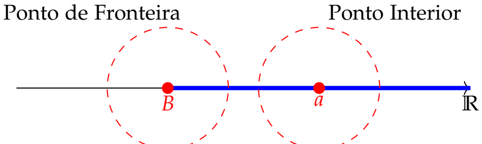
$$V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Nesse caso, dizemos que a é o centro desse intervalo. Observe que vale a seguinte propriedade (prove-a por exercício):

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon$$

Isso significa, em particular, que os números desse intervalo são aqueles que distam de a menos do que ε. Dito de outra forma, um intervalo do tipo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pode ser interpretado como o conjunto dos números que "aproximam" o número a, com um "erro" menor do que ε. O número ε é chamado de raio da vizinhança $V_\varepsilon(a)$.

Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}$, intuitivamente um ponto x em $\mathbb{R}$ pode ser considerado como estando "dentro"de S, na "fronteira"de S, ou "fora"de S. Dizer que x está "fora"de S é o mesmo que dizer que x está "dentro"do complementar de S, ou seja, dentro $\mathbb{R} \backslash S$. Usando vizinhanças, podemos tornar as ideias intuitivas de "dentro"e "fronteira"precisas.



1.71 Definição *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

- *Um ponto x em $\mathbb{R}$ é um **ponto interior** de S se existir uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq S$.*
- *Se para toda vizinhança V de x, temos que $V \cap S \neq \varnothing$ e $V \cap (\mathbb{R} \backslash S) \neq \varnothing$, então x é chamado de **ponto de fronteira** de S.*

O conjunto de todos os pontos interiores de S é denotado por $\operatorname{int} S$, e o conjunto de todos os pontos de fronteira de S é denotado por $\operatorname{fr} S$.

1.72 Proposição *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então*

- $\operatorname{fr} S = \operatorname{fr}(S^c)$.

- *Para todo ponto $x \in \mathbb{R}$ temos que x pertence a um e somente um dos seguintes conjuntos:* $\operatorname{int} S$*,* $\operatorname{fr} S$ *ou* $\operatorname{int}(S^c)$*.*

A demonstração será deixada como exercício ao leitor.
De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em *conjunto aberto* e *conjunto fechado*. Seja $a \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer de números reais. Dizemos que a é **aberto** se vale a seguinte propriedade: todo ponto $x \in a$ é centro de um intervalo contido em a. Dito de modo menos preciso (mas talvez mais significativo): para todo número pertencente ao conjunto a, variações suficientemente pequenas dele continuam dentro do conjunto a.

1.73 **Definição** *Dizemos que o conjunto a é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in a$ temos que $x \in \operatorname{int} a$. Ou equivalentemente, a é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in a$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset a$*

Por outro lado, um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é **fechado** se o seu complementar (relativamente ao conjunto $\mathbb{R}$) é aberto, i.e.

1.74 **Definição** *Dizemos que o conjunto B é fechado $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \backslash B$ é aberto.*

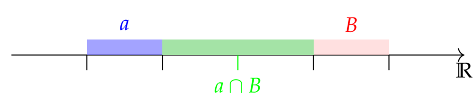
Se nenhum dos pontos de S for um ponto de fronteira de S, então todos os pontos em S devem ser pontos interiores de S. Por outro lado, se S contiver sua fronteira, então como $\operatorname{fr} S = \operatorname{fr}(\mathbb{R}\backslash S)$, o conjunto $\mathbb{R}\backslash S$ não deve conter nenhum de seus pontos de fronteira. As implicações inversas também se aplicam, então obtemos as seguintes caracterizações úteis:

1.75 **Teorema** *Seja $S \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Se $\operatorname{fr} S \subseteq S$, então S é fechado.*
2. *Se $\operatorname{fr} S \subseteq \mathbb{R}\backslash S$, então S é aberto.*

1.76 **Teorema**

1. *a união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*
2. *a interseção de qualquer coleção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*



Conjuntos a e B abertos

Interseção $a \cap B$ é aberta

Demonstração.
Demonstração de 1. Seja uma coleção arbitrária de conjuntos abertos e seja $S = \bigcup\{a : a \in \}$. Se $x \in S$, então $x \in a$ para algum $a \in$. Como a é aberto existe uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq a$. Mas como $a \subseteq S$, temos que $V \subseteq S$ e, portanto, x é um ponto interior de S. Logo, S é aberto.
Demonstração de 2. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ uma coleção finita de conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^{n} a_i$. Se $T = \varnothing$, já terminamos, pois $\varnothing$ é aberto. Se $T \neq \varnothing$, seja $x \in T$. Então $x \in a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como

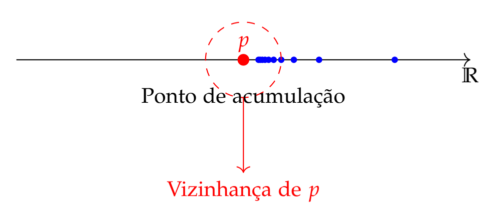
cada conjunto a_i é aberto, existem vizinhanças $V_i(x;\varepsilon_i)$ de x tais que $V_i(x;\varepsilon_i) \subseteq a_i$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Então $V_\varepsilon(a) \subseteq a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, logo $V_\varepsilon(a) \subseteq T$. Assim, x é um ponto interior de T, e T é aberto.

1.77 Exemplos

1. *Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.*
2. *Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x - a|$, resulta que $(x - r, x + r)$ está contido na semi-reta considerada.*
3. *Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado. De fato, seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que é aberto (pois é união de dois conjuntos abertos).*
4. *Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a]$ ou $[a, +\infty)$ é fechado, pois seus complementares são semi-retas abertas.*
5. *O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.*
6. *O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ é aberto pois temos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty}(m, m + 1)$.*
7. *O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado pois seu complementar é aberto.*
8. *Um intervalo do tipo $[a, b)$ não é nem aberto, nem fechado. De fato, nenhum intervalo centrado em a está contido em $[a, b)$ (descartando que este seja aberto) e nenhum intervalo centrado em b está contido no complementar de $[a, b)$ (descartando que $[a, b)$ seja fechado).*
9. *De modo análogo, um intervalo do tipo $(a, b]$ não é nem aberto, nem fechado.*

Os dois últimos exemplos mostram que os conceitos de "aberto" e "fechado" não são conceitos opostos. Isto é, se um dos atributos não vale para um dado conjunto, não se pode concluir que o outro atributo deve ser válido para esse conjunto.

Observação. Sob o ponto de vista formal, convém atribuir ao conjunto vazio a propriedade de ser um conjunto aberto (na verdade, o conjunto vazio satisfaz a condição de ser aberto, acima definida, por vacuidade). Isso significa, também, que o seu complementar é fechado. Mas o complementar de $\varnothing$ é $\mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{R}$ é aberto e também fechado. E sendo $\mathbb{R}$ aberto, temos que seu complementar é fechado, i.e. o conjunto vazio $\varnothing$ também é aberto e fechado. Esses são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados.



1.78 Teorema *Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja S° a união de todos os conjuntos abertos contidos em S. Então:*

1. *S° é um conjunto aberto.*
2. *S° é o maior conjunto aberto contido em S. Ou seja, mostre que $S^\circ \subseteq S$, e se U é qualquer conjunto aberto contido em S, então $U \subseteq S^\circ$.*
3. *$S^\circ = \operatorname{int} S$.*

Demonstração.

1. S° **é um conjunto aberto:**

Por definição, S° é a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em S. A união de conjuntos abertos é sempre um conjunto aberto. Portanto, S° é um conjunto aberto.

2. S° **é o maior conjunto aberto contido em** S**:**

Primeiro, vamos provar que $S^\circ \subseteq S$. Como S° é definido como a união de todos os conjuntos abertos que estão contidos em S, cada um desses conjuntos abertos é um subconjunto de S. Portanto, a união desses conjuntos também será um subconjunto de S. Assim, temos que $S^\circ \subseteq S$.

Agora, vamos mostrar que se U é um conjunto aberto contido em S, então $U \subseteq S^\circ$: Como S° é a união de todos os conjuntos abertos contidos em S, U é um dos conjuntos abertos que formam essa união. Logo, $U \subseteq S^\circ$. assim, S° é o maior conjunto aberto contido em S, no sentido de que qualquer conjunto aberto contido em S também está contido em S°.

3. $S^\circ = \operatorname{int}(S)$**, onde** $\operatorname{int}(S)$ **é o conjunto de todos os pontos interiores de** S:

Seja $Y = S^\circ$ a união de todos os subconjuntos abertos de a. assim, $Y \subseteq a$ e Y é um conjunto aberto (pois a união arbitrária de conjuntos abertos é aberta). Logo, se $y \in Y$, então $y \in \operatorname{int}(a)$, uma vez que podemos usar Y como um conjunto aberto contendo y.

Para a recíproca, suponha que $x \in \operatorname{int}(a)$. Então, existe um conjunto aberto $U_x \subseteq a$ que contém x. Esse conjunto U_x está incluído na união que define Y. Portanto, $U_x \subseteq Y$, o que implica que $x \in Y$.

1.79 Definição (Ponto de acumulação) *Seja $a \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que x_0 é um **ponto de acumulação** de a se, para todo $\delta > 0$, existe pelo menos um ponto $x \in a$, $x \neq x_0$, tal que $|x - x_0| < \delta$. Em outras palavras, x_0 é um ponto de acumulação de a se qualquer vizinhança de x_0 contém infinitos pontos de a distintos de x_0.*

O conjunto de todos os pontos de acumulação de a é denotado por a'. Se $x \in a$ e $x \notin a'$, então x é chamado de ponto isolado de a. [8]

[8] Um conjunto é dito **discreto** se todos os seus pontos são isolados, ou seja, ao redor de cada ponto do conjunto existe uma vizinhança que não contém nenhum outro ponto do conjunto.

Essa definição garante que x_0 está "próximo"de outros pontos de a, e é fundamental para definir corretamente limites e continuidade de funções em certos pontos.

Um ponto x_0 que é ponto de acumulação de a também é chamado de ponto limite de a.

Note que um ponto de acumulação de a pode ser, mas não precisa ser, um membro de a.

(a) Se a é o intervalo $(0, 1]$, então $a' = [0, 1]$.

(b) Se $a = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, então $a' = \{0\}$.

(c) Se $a = \mathbb{N}$, então $a' = \varnothing$. Assim, $\mathbb{N}$ consiste inteiramente de pontos isolados.

(d) Se a é um conjunto finito, então $a' = \varnothing$.

1.80 Definição *Dado $a \subseteq \mathbb{R}$ o* ***fecho*** *de a, denotado por $\operatorname{cl} a$, é definido por*

$$\operatorname{cl} a = a \cup a'$$

onde a' é o conjunto de todos os pontos de acumulação de a.

1.81 Proposição *Seja a um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então*

a. a é fechado se e somente se a contém todos os seus pontos de acumulação.

b. $\operatorname{cl} a$ é um conjunto fechado,

c. a é fechado se e somente se $a = \operatorname{cl} a$,

d. $\operatorname{cl} a = a \cup \operatorname{fr} a$.

Demonstração.

1.

($\Rightarrow$) Se a é fechado, então a contém todos os seus pontos de acumulação:

Por definição, um conjunto a é fechado se o seu complemento $\mathbb{R} \setminus a$ é aberto. Suponha que x seja um ponto de acumulação de a. Isso significa que qualquer vizinhança de x contém pelo menos um ponto de a diferente de x. Se $x \notin a$, então $x \in \mathbb{R} \setminus a$. Como $\mathbb{R} \setminus a$ é aberto, existe uma vizinhança de x totalmente contida em $\mathbb{R} \setminus a$. No entanto, isso contradiz o fato de que x é um ponto de acumulação de a, porque essa vizinhança não pode conter nenhum ponto de a. Portanto, x deve estar em a, e assim a contém todos os seus pontos de acumulação.

($\Leftarrow$) Se a contém todos os seus pontos de acumulação, então a é fechado:

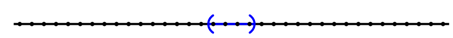
Suponha que a contém todos os seus pontos de acumulação. Precisamos provar que $\mathbb{R} \setminus a$ é um conjunto aberto para concluir que a é fechado. Considere um ponto $y \in \mathbb{R} \setminus a$. Se $y \notin a$, então y não pode ser um ponto de acumulação de a (caso contrário, y estaria em a porque assumimos que a contém todos os seus pontos de acumulação). Portanto, existe uma vizinhança de y que não contém nenhum ponto de a. Isso implica que essa vizinhança está totalmente contida em $\mathbb{R} \setminus a$, mostrando que $\mathbb{R} \setminus a$ é um conjunto aberto. Como $\mathbb{R} \setminus a$ é aberto, concluímos que a é fechado.

Densidade dos Racionais e Irracionais Os números reais que não são racionais, ou seja, os elementos do conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, são chamados de números irracionais. Já demonstramos a existência de alguns deles: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3}$, entre outros.

Mostraremos a seguir que os números irracionais estão dispersos por toda parte entre os números reais. Em sequência, provaremos que há mais números irracionais do que racionais. Para explicitar o que queremos dizer com "dispersos por toda parte", começaremos com uma definição.

1.82 **Definição** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém pelo menos um ponto de X.*

Conjunto denso na reta real



Em outras palavras, um conjunto X de números reais é denso em $\mathbb{R}$ se, para quaisquer $a < b$ em $\mathbb{R}$, é possível encontrar um $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Por exemplo, seja $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, o conjunto dos números reais que não são inteiros. Este conjunto é denso em $\mathbb{R}$ porque, para qualquer intervalo (a, b), existem infinitos números reais, enquanto há no máximo um número finito de inteiros n tal que $a < n < b$. Assim, qualquer intervalo (a, b) contém elementos de X (ou seja, números reais não inteiros).

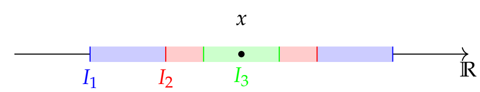
1.83 **Teorema** *Os conjuntos $\mathbb{Q}$ dos números racionais e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Demonstraremos a existência de um número racional e um número irracional nesse intervalo.

Existência de um número racional. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. A existência de tal p é garantida pela propriedade arquimediana dos reais. Os múltiplos inteiros de $\frac{1}{p}$ particionam a reta real em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Como a extensão de um desses intervalos é menor que o comprimento de (a, b), pelo menos um deles estará contido em (a, b). Formalmente, seja $a = \{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m}{p} \geq b\}$. O conjunto a é não vazio e limitado inferiormente, logo possui um menor elemento m_0. Note que $\frac{m_0}{p} \geq b$, mas $\frac{m_0 - 1}{p} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0 - 1}{p} < b$. De fato, se $a \geq \frac{m_0 - 1}{p}$, então $a \geq \frac{m_01}{p} - \frac{1}{p}$ de onde temos que $a \geq b - \frac{1}{p}$ e finalmente $b - a \leq \frac{1}{p}$, contradizendo a escolha de p. Logo, $\frac{m_0 - 1}{p}$ é um número racional em (a, b).

Existência de um número irracional. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Analogamente ao caso anterior, os múltiplos inteiros não nulos de $\frac{\sqrt{2}}{p}$ particionam a reta em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Consequentemente, pelo menos um desses intervalos estará contido em (a, b). Formalizando, seja $B = \{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid \frac{m\sqrt{2}}{p} \geq b\}$. O conjunto B é não vazio e limitado inferiormente, logo possui um menor elemento m_0. Note que $\frac{m_0\sqrt{2}}{p} \geq b$, mas $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p} < b$. Um argumento análogo ao caso anterior mostra que $\frac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}$ é um número irracional em (a, b).

A partir desse teorema, podemos dizer que os números irracionais estão realmente dispersos em todo o conjunto $\mathbb{R}$.



Interseção: $I_1 \cap I_2 \cap I_3$

Princípio dos Intervalos Encaixantes

1.84 **Teorema (Princípio dos Intervalos Encaixantes)** *Seja $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$. A interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia, ou seja, existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, temos $I_n = [a, b]$, onde $a = \sup a_n$ e $b = \inf b_n$.*

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que implica que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Assim, podemos escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Denotemos por a o conjunto dos a_n e por B o conjunto dos b_n. Ambos são limitados: a_1 é uma cota inferior e cada b_n é uma cota superior de a. De maneira semelhante, B também é limitado. Sejam $a = \sup a$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é uma cota superior de a, temos $a \leq b_n$ para todo n. Assim, a é uma cota inferior de B, e, portanto, $a \leq b$. Consequentemente, podemos escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq a \leq b \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluímos que $[a, b] \subset I_n$ para cada n, (podendo ser $a = b$). Logo, $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Além disso, nenhum $x < a$ pode pertencer a todos os intervalos I_n. De fato, sendo $a = \sup a$, existe algum $a_n \in a$ tal que $x < a_n$, ou seja, $x \notin I_n$. Da mesma forma, se $y > b$, então $y > b_m$ para algum m, de onde $y \notin I_m$. Concluímos, portanto, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$.□

Usaremos o Teorema 1.84 para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável.

1.85 **Teorema** *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado com $a < b$, e seja x_0 um número real qualquer. Existe um intervalo fechado e limitado $J = [c, d]$, com $c < d$, tal que $x_0 \notin J$ e $J \subset I$. Essa afirmação pode ser facilmente verificada.

Usaremos essa propriedade repetidamente para demonstrar que, dado um subconjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, podemos sempre encontrar um número real $x \notin X$.

Inicialmente, seja I_1 um intervalo fechado e não degenerado tal que $x_1 \notin I_1$. Em seguida, escolhemos I_2, um intervalo do mesmo tipo, com $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$. Continuamos esse processo indutivamente. Suponhamos que tenhamos obtido $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$, todos intervalos fechados e não degenerados, com $x_i \notin I_i$ para $1 \leq i \leq n$. Podemos então construir $I_{n+1} \subset I_n$ de modo que $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

Assim, obtemos uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$. De acordo com o Teorema 1.84, existe pelo menos um número real x que pertence a todos os intervalos I_n. Como $x_i \notin I_i$ para todo i, concluímos que x não é igual a nenhum dos x_n. Portanto, nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais. □

1.86 Corolário *Todo intervalo não degenerado de números reais é não enumerável.*

Demonstração. De fato, consideremos a função $f : (0, 1) \to (a, b)$ definida por $f(x) = (b - a)x + a$, que é uma bijeção entre o intervalo aberto $(0, 1)$ e um intervalo aberto arbitrário (a, b). Se conseguirmos provar que $(0, 1)$ não é enumerável, podemos concluir que nenhum intervalo não degenerado pode ser enumerável.

Suponhamos, por absurdo, que $(0, 1)$ fosse enumerável. Nesse caso, o intervalo $(0, 1]$ também seria enumerável, o que implicaria que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o intervalo $(n, n + 1)$ também seria enumerável (pois a função $x \mapsto x + n$ estabelece uma bijeção de $(0, 1)$ sobre $(n, n + 1)$). Contudo, isso implicaria que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$ seria enumerável, sendo uma união enumerável de conjuntos enumeráveis, o que é uma contradição. □

1.87 Corolário *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

Demonstração. De fato, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também fosse enumerável, então $\mathbb{R}$ seria enumerável, pois seria a união de dois conjuntos enumeráveis. No entanto, isso contraria o que provamos no Teorema 1.85. □

Exercícios

1.31 — Um conjunto $a \subset \mathbb{R}$ é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.

1.32 — Dado um número natural $p > 1$, prove que os números racionais da forma $\frac{m}{p^n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ constituem um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

1.33 — Se $b > 0$, mostre que existem infinitos números racionais entre a e b.

1.34 — Prove ou forneça um contraexemplo: Se um conjunto S possui um máximo e um mínimo, então S é um conjunto fechado.

1.35 — Seja a um subconjunto não vazio e aberto de $\mathbb{R}$ e seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Prove que $a \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

1.36 — Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Prove o seguinte:

a) $\operatorname{int} S$ é um conjunto aberto.

b) $\operatorname{int}(\operatorname{int} S) = \operatorname{int} S$.

c) $\operatorname{int}(S \cap T) = (\operatorname{int} S) \cap (\operatorname{int} T)$.

d) $(\operatorname{int} S) \cup (\operatorname{int} T) \subseteq \operatorname{int}(S \cup T)$.

e) Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

1.37 — [Corte de Dedekind] Um par ordenado (A, B) onde A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que a não possui elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $x < y$ é dito corte de Dedekind [9]

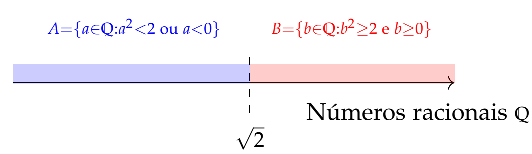
a) Prove que, num corte de Dedekind (A, B), vale $\sup A = \inf B$.

b) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind. Prove que existe uma bijeção $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

[9] Um exemplo típico de corte de Dedekind dos números racionais $\mathbb{Q}$ é dado pela partição (A, B) com

$$A = \left\{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \text{ ou } a < 0\right\},$$
$$B = \left\{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geq 2 \text{ e } b \geq 0\right\}.$$

Como veremos posteriormente este corte representa o número irracional $\sqrt{2}$ na construção do corpo dos reais de Dedekind.



1.38 — Se a é aberto e B é fechado, prove que $a \backslash B$ é aberto e $B \backslash a$ é fechado.

1.39 — Prove a proposição 1.81

1.40 — Prove o seguinte:

a) Um ponto de acumulação de um conjunto S é um ponto interior de S ou um ponto de fronteira de S.

b) Um ponto de fronteira de um conjunto S é um ponto de acumulação de S ou um ponto isolado de S.

1.41 — Prove que se x é um ponto isolado de um conjunto S, então

$x \in \operatorname{fr} S$.

1.42 — Prove: $(\operatorname{cl} S) \backslash (\operatorname{int} S) = \operatorname{fr} S$.

1.43 — Seja S um conjunto infinito e limitado e seja $x = \sup S$. Prove: Se $x \notin S$, então $x \in S'$.

1.44 — Prove: Se x é um ponto de acumulação do conjunto S, então todo entorno de x contém infinitos pontos de S.

1.45 —

a) Prove: $\operatorname{fr} S = (\operatorname{cl} S) \cap [\operatorname{cl}(\mathbb{R} \backslash S)]$.
b) Prove: $\operatorname{fr} S$ é um conjunto fechado.
c) Prove: S' é um conjunto fechado.

1.46 — Suponha que S seja um conjunto não vazio e limitado, e seja $m = \sup S$. Prove ou forneça um contraexemplo: m é um ponto de fronteira de S.

1.47 — Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Prove o seguinte:

a) $\operatorname{cl}(\operatorname{cl} S) = \operatorname{cl} S$.
b) $\operatorname{cl}(S \cup T) = (\operatorname{cl} S) \cup (\operatorname{cl} T)$.
c) $\operatorname{cl}(S \cap T) \subseteq (\operatorname{cl} S) \cap (\operatorname{cl} T)$.
d) Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

1.48 — Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja $\overline{S}$ a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm S.

a) Prove que $\overline{S}$ é um conjunto fechado.
b) Prove que $\overline{S}$ é o menor conjunto fechado que contém S. Ou seja, mostre que $S \subseteq \overline{S}$, e se C é qualquer conjunto fechado que contém S, então $\overline{S} \subseteq C$.
c) Prove que $\overline{S} = \operatorname{cl} S$.
d) Se S é limitado, prove que $\overline{S}$ é limitado.

1.49 — Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja $\overline{S}$ a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm S.

a) Prove que $\overline{S}$ é um conjunto fechado.
b) Prove que $\overline{S}$ é o menor conjunto fechado que contém S. Ou seja, mostre que $S \subseteq \overline{S}$, e se C é qualquer conjunto fechado que

contém S, então $\overline{S} \subseteq C$.

c) Prove que $\overline{S} = \operatorname{cl} S$.

d) Se S é limitado, prove que $\overline{S}$ é limitado.

1.50 — Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja S° a união de todos os conjuntos abertos contidos em S.

a) Prove que S° é um conjunto aberto.

b) Prove que S° é o maior conjunto aberto contido em S. Ou seja, mostre que $S^\circ \subseteq S$, e se U é qualquer conjunto aberto contido em S, então $U \subseteq S^\circ$.

c) Prove que $S^\circ = \operatorname{int} S$.

1.51 — Dê exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados (ilimitados) cuja interseção seja vazia e de uma sequência decrescente de intervalos (abertos) limitados cuja interseção seja vazia.

1.12 *Potenciação de números reais*

A potenciação ou exponenciação envolve duas quantidades, a base a e o expoente m. Se $m \in \mathbb{N}$, então [10]

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ vezes}}.$$

[10] Para sermos rigorosos, podemos definir a potenciação com expoente natural de forma recursiva..

Como m é um número natural, essa operação pode ser definida para qualquer $a \in \mathbb{R}$ realizando as operações de multiplicação um número finito de vezes. A exponenciação para inteiros negativos m também pode ser definida como

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}},$$

o que sabemos calcular, pois $-m \in \mathbb{N}$.

1.88 Proposição (Lei dos Enpoentes) *Seja $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $n, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Então:*

1. $a^{n+m} = a^n a^m$.
2. $a^{nm} = (a^n)^m$.
3. *Se $n < m$, então*

$$\begin{cases} a^n < a^m & \text{se } a > 1, \\ a^n > a^m & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Para completar a definição para expoente zero, queremos garantir que a lei dos expoentes permaneça consistente. Observamos que para qualquer $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos

$$1 = a^{-m}a^m = a^{-m+m} = a^0.$$

Então definimos $a^0 = 1$ para qualquer $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, para ser consistente com as identidades acima. No entanto, o valor de 0^0 permanece indefinido.

Potência com expoente racional Para definir a potência com expoente racional, definamos antes a operação $a^{\frac{1}{n}}$ quando $n \in \mathbb{N}^*$. Isto é feito dizendo que $a^{\frac{1}{n}}$ é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual ao número a, i.e.

$$b = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b > 0 \text{ e } b^n = a$$

A definição acima parece boa, mas esconde uma questão: fixados a e n, será que existe tal número real b? a resposta a essa questão é similar ao caso da existência da raiz quadrada de um número real positivo. De fato, tal número b existe e é definido por

$$b = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n \leq a\}$$

De modo análogo ao que foi feito no caso da raiz quadrada de um número real positivo, pode-se provar que tal número real satisfaz as condições desejadas (i.e. $b > 0$ e $b^n = a$).

Observação. A potência $a^{\frac{1}{n}}$ também é denotada por $\sqrt[n]{a}$ e chamada de *raiz n-ésima* de a.

Se $q \in \mathbb{Q}$, podemos escrever

$$q = \frac{m}{n}$$

com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos, então

$$a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$$

Note que cada uma das operações acima (primeiro a potência por $1/n$, seguida pela potência por m) já foram definidas anteriormente. O problema que poderia aparecer aqui tem a ver com a falta de unicidade da representação do número racional q como sendo uma razão de números inteiros. De fato, a fração m/n é somente uma das infinitas representações possíveis de q. Como garantir que, se tomarmos qualquer outra, o resultado da operação de potência não se altera? Felizmente, é possível provar que a potência a^q acima definida é, de fato, independente da particular razão m/n que tomarmos para representar o número racional q (tal prova será, porém, omitida).

1.89 Proposição *Seja $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{Q}$.*

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $a^{xy} = (a^x)^y$.
3. *Se $x < y$, então*
$$\begin{cases} a^x < a^y & \text{se } a > 1, \\ a^x > a^y & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$
4. *Se $x < 0 < y$, então*
$$\begin{cases} a^x < a^0 = 1 < a^y & \text{se } a > 1, \\ a^x > a^0 = 1 > a^y & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$
5. $a^x b^x = (ab)^x$.
6. *Se $0 < a < b$, então*
$$\begin{cases} a^x < b^x & \text{se } x > 0, \\ a^x > b^x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Muitas dessas provas dependem do fato de que são verdadeiras para expoentes inteiros na Proposição 1.88.

1. Suponha que $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$ com $q, s > 0$. Usando a definição para expoente racional e a Proposição 1.88, temos:
$$a^{x+y} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = \left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{ps+rq}$$
$$= \left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{ps}\left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{rq} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{rq}{qs}} \qquad = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}}$$
$$= a^x a^y$$

2. Suponha que $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$ com $q, s > 0$. Primeiro, vamos mostrar que $a^{\frac{1}{qs}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}$. Definimos $b = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}$. Então, b é o único número positivo tal que $b^s = a^{\frac{1}{q}}$. Definindo $c = b^s = a^{\frac{1}{q}}$, então c é o único número positivo tal que $c^q = a$. Isso significa que $a = c^q = (b^s)^q = b^{qs}$, de modo que b é o único número positivo tal que $b^{qs} = a$.

   Por outro lado, claramente $\left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{qs} = a$. Assim, pela unicidade, devemos ter $a^{\frac{1}{qs}} = b = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}$. Para o caso geral, usando o fato acima, a definição de expoentes racionais e a lei dos expoentes, temos:

$$a^{xy} = a^{\frac{pr}{qs}} = \left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{pr} = \left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}\right)^{pr} = \left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{pr}\right)^{\frac{1}{s}}$$
$$= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}\right)^{r}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$$
$$= (a^x)^y \qquad \square$$

Potência com expoente real Finalmente, seja $x \in \mathbb{R}$.

- Se $a \geq 1$, então

$$a^x := \sup\{a^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}$$

- Se $0 < a < 1$, então

$$a^x := \inf\{a^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}$$

Com as definições acima, estendemos a operação de potência ao conjunto dos números reais. Tal operação, além disso, satisfazem as seguintes propriedades. Dados quaisquer $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$, tem-se:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(a\,b)^x = a^x b^x$
4. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

As demonstrações de tais propriedades são intrincadas e serão deixadas como exercício ao leitor.

Exercícios

1.52 — Prove para x e y racionais as seguintes propriedades:

a) $a^{x+y} = a^x a^y$

b) $(a^x)^y = a^{xy}$

c) $(a\,b)^x = a^x b^x$

d) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

*** **1.53 —** Utilizando o Exercício anterior, prove as propriedades acima para x e y reais.

1.13 Representação decimal dos números reais

É comum dizer-se que os números reais são os números que podem ser escritos em forma decimal. Mas o que significa isso, realmente? Quando trabalhamos com números inteiros, usamos a notação posicional em base 10, o que significa que cada posição corresponde a uma dada potência de 10: a unidade é a potência 10^0, a dezena é a potência 10^1, a centena é 10^2 e assim por diante. Por exemplo,

$$14302 = 1.10^4 + 4.10^3 + 3.10^2 + 0.10^1 + 2.10^0$$

Já para representar números não inteiros, precisamos lançar mão das "casas decimais", i.e. de algarismos à direita da vírgula. Mas aqui também a notação posicional se relaciona com as potências de 10, com a única diferença de que as casas à direita da vírgula referem-se a potência *negativas* de 10. Por exemplo,

$$23,496 = 2.10^1 + 3.10^0 + 4.10^{-1} + 9.10^{-2} + 6.10^{-3}$$

Enquanto lidamos com números que possuem um número finito de casas decimais (não nulas), a expressão acima não causa nenhuma estranheza. Entretanto, para interpretarmos uma representação decimal com um número infinito de casas decimais não nulas, nos deparamos com um soma infinita de (múltiplos) de potências de 10. Qual o significado de tal soma?

Para uma resposta adequada, precisaremos do conceito de *série numérica*, o que só será visto na seção dedicada às Sequências. Mas podemos desde já tentar dar uma interpretação aceitável por ora.

Vamos explicar como é possível definir analiticamente os desenvolvimentos decimais utilizando o axioma do supremo.

Seja x um número real positivo dado e a_0 o maior inteiro menor ou igual a x. Escolhido a_0, determinamos a_1 como o maior inteiro tal que:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x$$

Em geral, dados $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, seja a_n o maior inteiro tal que:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x \tag{1.6}$$

Seja S o conjunto de todos os números da forma:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \tag{1.7}$$

obtidos assim para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Então, S é não vazio e limitado superiormente, e é fácil verificar que o supremo coincide com x. Os inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ assim obtidos podem ser usados para definir uma representação decimal de x:

$$x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$$

onde o dígito a_n na enésima posição é o maior inteiro que satisfaz 1.6. Por exemplo, se $x = \frac{1}{8}$, encontramos $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ e $a_n = 0$ para $n \geq 4$. Portanto, podemos descrever:

$$\frac{1}{8} = 0,125000\ldots$$

Se na definição 1.6 trocarmos o sinal $\leq$ por $<$, obtemos uma definição ligeiramente diferente da representação decimal. O supremo de todos os números da forma 1.7 será igualmente x, embora os inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ não sejam necessariamente os mesmos que satisfazem 1.6. Por exemplo, se essa segunda definição for aplicada a $x = \frac{1}{8}$, encontramos $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ e $a_n = 9$ para $n \geq 4$. Isso leva à representação decimal infinita:

$$\frac{1}{8} = 0,124999\ldots$$

O fato de um número real ter duas representações decimais diferentes reflete o fato de que dois conjuntos distintos de números reais podem ter o mesmo supremo.
Nesse sentido, pode-se ler a representação decimal como um "processo de aproximação" de número real r. Como veremos no momento oportuno, essa interpretação não está longe daquela formalmente mais correta.

Outra dificuldade que se encontra quando lidamos com representação decimal de um número real está relacionada com a seguinte questão: os números

$$1 \qquad \text{e} \qquad 0,999999999999....$$

são diferentes?

Por um lado, não há dúvidas quanto ao fato de que as representações decimais acima são diferentes. Mas isso pode levar o leitor incauto a afirmar que os números que tais expressões representam também são diferentes. Será que são mesmo? Usando mais uma vez uma linguagem informal (deixando a resposta formal para quando tratarmos das séries numéricas), podemos comparar o número 1 com os números

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad 0,9999 \quad \ldots$$

Esses últimos, no sentido que vimos acima, representam aproximações cada vez melhores do número $0,999.....$ Assim, se observarmos as diferenças entre 1 e esses valores truncados de $0,999...$, podemos chegar à resposta correta da questão acima. Pois bem, tais diferenças são

$$0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001 \quad \ldots$$

Conforme nos aproximamos do valor real de 0,999..., a diferença com o número 1 vai se aproximando de zero. Assim, somos obrigados a concluir que tais representações decimais, apesar de diferentes, referem-se, na verdade, ao mesmo número real (i.e. o número 1)[11].

[11] Uma outra maneira de perceber isso, um tanto ingênua mas funcional, é a seguinte: se tais números fossem diferentes, seria possível encontrarmos um outro número real que estivesse entre eles. Você consegue escrever na forma decimal tal número?

Os reais não são enumeráveis Antes de terminarmos a seção apresentaremos outra demonstração que os reais são não enumeráveis. De fato, mostraremos uma afirmação mais forte, a saber: o conjunto $I = (0,1)$ é não enumerável. [12]

[12] **Diagonal de Cantor**
O argumento que utilizaremoa é conhecido como o argumento da diagonal de Cantor. Ele consiste em construir um novo número que não pertence à lista inicial, alterando os elementos da "diagonal"da matriz de dígitos. Neste caso, selecionamos cada dígito b_j de forma que seja diferente do dígito $a_{j,j}$, que está na posição diagonal.

Suponha, para fins de contradição, que I seja enumerável. Assim, podemos listar todos esses números mapeando-os bijetivamente para os números naturais. Vamos listar todos esses números $I = (r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots)$ por sua expressão decimal infinita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
r_1 &\sim 0.{\color{red}a_{1,1}}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\ldots \\
r_2 &\sim 0.A_{2,1}{\color{red}a_{2,2}}a_{2,3}a_{2,4}\ldots \\
r_3 &\sim 0.A_{3,1}a_{3,2}{\color{red}a_{3,3}}a_{3,4}\ldots \\
r_4 &\sim 0.A_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}{\color{red}a_{4,4}}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

onde cada $a_{i,j} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Nessa representação, toda representação decimal finita é completada com uma sequência de 0s, e evitamos 9s recorrentes para garantir que cada número em I seja representado apenas uma vez na lista. Como assumimos que os números em I são enumeráveis, essa lista é completa.

No entanto, afirmamos que essa lista não representa todos os números em I. Fazemos isso construindo um novo número $r \in I$ com representação decimal $r \sim 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ que não está na lista acima, observando os dígitos destacados em vermelho.

Como $a_{1,1}$ é um dos inteiros entre 0 e 9, podemos selecionar outro número $b_1 \in \{1,2,\ldots,8\}$ que seja diferente de $a_{1,1}$. Assim, $r \neq r_1$ imediatamente. Em seguida, selecionamos b_2 do conjunto $\{1,2,\ldots,8\}$, distinto de $a_{2,2}$, para que $r \neq r_2$.

Repetimos essa construção para cada $j \in \mathbb{N}$, escolhendo b_j do conjunto $\{1,2,\ldots,8\}$ distinto de $a_{j,j}$, de forma que $r \neq r_j$. Assim, construímos um novo número r representado por $r \sim 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$, que é diferente de todos os r_j e, portanto, não está na lista acima. Assim, a lista acima é incompleta, o que é uma contradição. Logo, nossa suposição de que I é enumerável é falsa e, portanto, o intervalo I é não enumerável.

O *argumento da diagonal de Cantor* é um exemplo clássico de prova por contradição foi introduzido por Georg Cantor no final do século XIX como parte de seus estudos sobre a teoria dos conjuntos e a natureza dos números reais. Antes do trabalho de Cantor, acreditava-se que todos os infinitos eram, de certa forma, do mesmo "tamanho". No entanto, Cantor demonstrou que a cardinalidade do conjunto dos números reais é é maior do que a dos números naturais, mesmo que ambos sejam infinitos. Essa descoberta foi revolucionária, pois introduziu a ideia de diferentes "tamanhos"de infinito e deu origem à teoria moderna dos conjuntos. O argumento da diagonal tem importância fundamental na matemática, especialmente em áreas como análise real, teoria da computabilidade e lógica matemática, onde ajuda a distinguir entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

2
Sequências

Um dos conceitos basilares da Análise Matemática é a noção de limite, e entre os diversos tipos de limites, os das sequências de números reais são os mais simples. Por isso, começaremos por eles. Praticamente todos os conceitos e resultados fundamentais da Análise referem-se, direta ou indiretamente, a limites, o que reforça o papel central que essa ideia desempenha.

Neste capítulo, vamos explorar os limites de sequências de números reais. No capítulo seguinte, abordaremos um tipo especial de sequência: as séries (ou "somas infinitas").

Limites de funções, serão tratados brevemente na seção 2.11 e em cursos posteriores.

Intuitivamente, podemos visualizar uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ como uma série de pontos sobre a reta numérica. O limite de uma sequência é um ponto ao qual os termos x_n se aproximam e permanecem próximos, desde que o índice n seja suficientemente grande.

2.1 Conceitos básicos

Uma **sequência real** a é uma função dos números naturais nos reais

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

A imagem do natural n pela sequência s será denotado por s_n , i.e, $s_n := s(n)$. A ordem dos números naturais nos leva a dizer que s_1 é o primeiro termo da sequência, que s_2 é o segundo termo da sequência e em geral que s_n é o n-ésimo termo da sequência. Em geral, denotaremos a sequência $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por (s_n) ou ainda por $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Em diversas situações consideraremos funções cujo domínio não seja o conjunto dos naturais, mas sim um subconjunto dos inteiros da forma $\{n : \mathbb{Z} : n \geq k\}$ para algum k. Essas funções também serão ditas sequências e para essas sequências usaremos a notação $(s_n)_{n=k}^{\infty}$, indicando o ponto a partir do qual a sequência está definida.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "s"] & 1 \arrow[d, "s"] & 2 \arrow[d, "s"] & 3 \arrow[d, "s"] & 4 \arrow[d, "s"] & \cdots & n \arrow[d, "s"] \\
\mathbb{R} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_n
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1: A sequência (s_n) associa a cada natural n um real s_n.

Uma sequência, sendo uma função pode ser especificada através de uma regra ou fórmula para o seu n-ésimo.

2.1 Exemplos

1. *Considere a sequência (s_n) definida por $s_n = 1 + (-1)^n$. Os primeiros termos da sequência são:*

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 2 \qquad a_3 = 0 \qquad a_4 = 2 \qquad a_5 = 0$$

Essa sequência também pode ser representada como:

$$(0, 2, 0, 2, 0, \ldots)$$

Formalmente, essa sequência pode ser representada como a função:

$$s(n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ 2, & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

No entanto, muitas vezes é mais útil visualizar a sequência como uma lista $(0, 2, 0, 2, \ldots)$. Observe que os termos de uma sequência não precisam ser distintos. O conjunto de valores assumidos pela sequência, também chamado de sua imagem, é $\{0, 2\}$. Portanto, embora uma sequência sempre tenha infinitos termos, o conjunto de valores que ela atinge pode ser finito.

2. *Os primeiros termos da sequência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ são:*

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_3 = \frac{1}{3} \qquad a_4 = \frac{1}{4} \qquad a_5 = \frac{1}{5}$$

Essa sequência também pode ser representada como:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$

3. *Os primeiros termos da sequência de termo geral $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$ são:*

$$c_1 = \frac{1!}{1^1} = 1 \qquad c_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} \qquad c_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

4. *Seja (d_n) a sequência especificada pela regra $d_n = (-1)^n$. Os primeiros termos dessa sequência são:*

$$d_1 = (-1)^1 = -1 \qquad d_2 = (-1)^2 = 1 \qquad d_3 = (-1)^3 = -1$$

e de modo geral $d_{2n} = 1$ e $d_{2n+1} = -1$. E assim podemos representar essa sequência por:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

Como uma sequência é uma função dos naturais nos reais, um ponto da função é um par ordenado (n, s_n) com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \in \mathbb{R}$ e desse modo uma sequência real pode ser vista como um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Outra forma de representar uma sequência graficamente, é representar sobre a reta real as imagens da sequência, rotuladas pelo termo que representam.

Assim a sequência do exemplo anterior $a_n = \frac{n}{n+1}$, pode ser também representada graficamente como nas Figuras 2.10 e 2.3

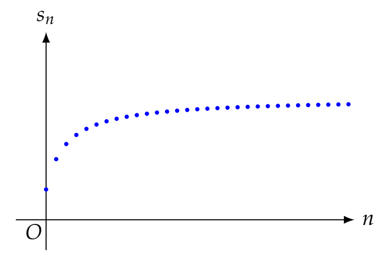


Figura 2.2: Gráfico da sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

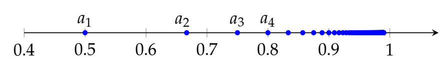


Figura 2.3: Gráfico de $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

2.2 Exemplo *Gráfico da sequência $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$*

O gráfico da sequência $c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pode ser construído observando que para valores pares de n os pontos $\left(n, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ pertencem ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e para valores impares de n os pontos $\left(n, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ pertencem ao gráfico da função $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Assim o gráfico dessa sequência pode ser representado como na Figura 2.4.

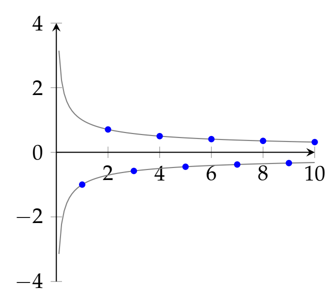


Figura 2.4: Gráfico de $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

2.2 *Convergência e limite de sequências*

O conceito formal de limite, cuja introdução na matemática se atribui ao matemático francês Cauchy, é um dos conceitos centrais da matemática moderna. Pode-se dizer, sem exageros que esse conceito e seus desenvolvimentos, mudaram de forma profunda o conhecimento e a natureza da matemática.

Originalmente, esse conceito foi introduzido para formalizar o conceito de derivada, porém se percebeu que sua importância e aplicação é muito mais ampla e diversa que "apenas" o desenvolvimento lógico do cálculo diferencial e integral.

A ideia intuitiva do limite, porém precede os trabalhos de Cauchy e pode ser remontada aos gregos e, em especial, aparece subentendida em alguns trabalhos de Arquimedes. Esse conceito transparece ainda esporadicamente em diversos trabalhos de matemáticos anteriores a Cauchy, como Newton e Euler. O passo de transformar uma visão intuitiva em uma definição matemática do conceito foi longo e tortuoso e a definição que apresentamos é fruto desse longo desenvolvimento histórico.

2.3 **Definição (Definição de Limite)** *Dado* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma sequência, dizemos que* (a_n) *converge para o número real L, denotado por* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *ou ainda* $a_n \to a$, *se dado* $\varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > M$ *então* $|a_n - L| < \varepsilon$.

Uma sequência que converge para algum valor é dita **convergente**, e caso contrário dizemos que a sequência é **divergente** .

Podemos reescrever a definição de limite na linguagem de vizinhanças como:

2.4 **Definição** ***Definição de Limite, Versão topológica***

Dado $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *uma sequência, dizemos que* (a_n) *converge para o número real L se para toda ε-vizinhança* $V_\varepsilon(a)$, *existe um ponto M a partir do qual todos os termos da sequência estão em* $V_\varepsilon(a)$

Ou seja, para toda ε-vizinhança do ponto L exceto um número finito de elementos da sequência todos os outros estão nessa vizinhança.

Vamos provar alguns limites elementares utilizando a definição

2.5 **Exemplo** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Demonstração. Neste caso, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um ponto M a partir do qual

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

(Onde a "partir do qual", deve se entender para todo $n > M$).

Vamos provar que existe esse ponto usando a propriedade Arquimediana dos reais. A propriedade Arquimediana nos diz que existe um número natural M tal que

$$M > \frac{1}{\varepsilon}$$

ou seja, tal que

$$\frac{1}{M} < \varepsilon$$

Agora se $n > M$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \varepsilon$. O que implica que:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \varepsilon$$

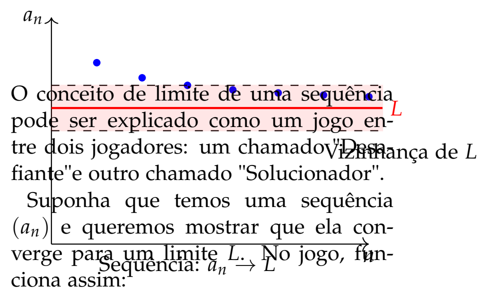


Figura 2.5: Convergência de uma sequência.

O conceito de limite de uma sequência pode ser explicado como um jogo entre dois jogadores: um chamado "Desafiante"e outro chamado "Solucionador".

Suponha que temos uma sequência (a_n) e queremos mostrar que ela converge para um limite L. No jogo, funciona assim:

Desafiante escolhe um número $\varepsilon > 0$: Esse número ε representa o quão próximo queremos que os termos da sequência estejam de L. Quanto menor o valor de ε, mais próximo queremos que os termos a_n estejam de L.

Solucionador deve encontrar um número natural N tal que, para todos os índices $n \geq N$, a distância $|a_n - L|$ seja menor que ε. Ou seja, precisamos garantir que todos os termos da sequência a partir de um certo ponto fiquem dentro de um intervalo de raio ε ao redor de L.

Se o Solucionador consegue encontrar um N para qualquer ε que o Desafiante escolher, então dizemos que a sequência (a_n) converge para L. Formalmente, escrevemos isso como: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um N tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Esse jogo de ε e N ajuda a ilustrar a ideia de que, não importa o quão pequeno seja o intervalo ao redor de L (especificado pelo Desafiante via ε), sempre podemos encontrar um ponto na sequência (especificado pela Resposta via N) a partir do qual **todos** os termos seguintes da sequência permanecem dentro desse intervalo.

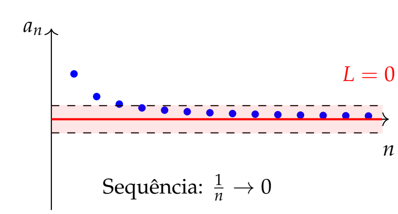


Figura 2.6: Convergência da sequência $\frac{1}{n}$.

E assim provamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Observe que demonstramos que para todo $n > M$ (onde esse M nos foi dado indiretamente pela propriedade Arquimediana dos reais) temos que a sequência $(a_n) = \frac{1}{n}$ está toda contida na ε-vizinhança de 0, pois $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. □

2.6 **Exemplo** *Seja b_n a sequência constante igual a b, i.e, $b_n = b$, então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.*

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um M tal que se $n > M$ então

$$|b_n - b| < \varepsilon.$$

Mas veja que para $M = 0$, já é válida a desigualdade, pois $|b_n - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$.

A demonstração acima é (tão) trivial porque a sequência constante igual a b sempre está na ε-vizinhança de b, para todo $\varepsilon > 0$. □

2.7 **Exemplo** *Se $c_n = \dfrac{n}{n+1}$ então $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.*

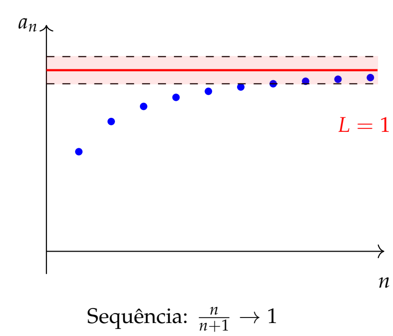


Figura 2.7: Convergência da sequência $\frac{n}{n+1}$.

Demonstração. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe um M tal que se $n > M$ então

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon..$$

Vamos começar simplificando a última desigualdade:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Veja que reduzimos o problema à encontrar um ponto M a partir do qual $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Mas isso, como já sabemos, pode ser feito através da propriedade Arquimediana.

Pela propriedade Arquimediana existe M tal que

$$M > \frac{1}{\varepsilon}$$

ou seja, tal que

$$\frac{1}{M} < \varepsilon$$

Agora se $n > M$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \varepsilon$. O que implica que:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Intuitivamente, a sequência $i_n = (-1)^n$ não converge pois fica oscilando entre os valores 1 e -1 e desta forma não se aproxima de nenhum valor conforme n cresce. Abaixo apresentamos a prova desse fato.

2.8 **Exemplo** *A sequência $i_n = (-1)^n$ não converge.*

Suponha que a sequência convergisse, digamos a i. Então deveria existir um ponto M tal que se $n > M$ então

$$|i_n - i| < \frac{1}{2}$$

Mas, para n maior que M e par isso implicaria que

$$|1 - i| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1/2 < 1 - i < 1/2 \Rightarrow i > \frac{1}{2}.$$

E para n maior que M e ímpar isso implicaria que

$$|-1 - i| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1/2 < -1 - i < 1/2 \Rightarrow i < \frac{1}{2}.$$

O que é absurdo. Logo a sequência não converge

2.9 **Proposição** *O limite de uma sequência se existir é único.*

Demonstração. Suponha a_1 e a_2 tais que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a_2.$$

A definição de $a_n \to a_1$ nos diz que dado $\varepsilon > 0$ existe um ponto N_1, tal que $n > N_1$ então:

$$|a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

Por outro lado como $a_n \to a_2$, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe um ponto N_2, tal que $n > N_2$ então:

$$|a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2}$$

Agora se escolhemos $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos que ambas as desigualdades 2.1 e 2.2 são válidas para $n > N$ e assim podemos estimar $|a_1 - a_2|$:

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &= |a_1 - a_n + a_n - a_2| \text{ (somando e subtraindo } a_n) \\ &< |a_1 - a_n| + |a_2 - a_n| < \varepsilon \text{ (pela desigualdade triangular)} \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e assim pelo exercício 1.30 $a_1 = a_2$[1]. □

[1] Somar e subtrair o mesmo termo e a desigualdade triangular são ferramentas fortes e uteis que todo matemático deve carregar em seus bolsos.

Exercícios

2.1 — Prove a partir da definição que $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

2.2 — Seja $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n < \cdots$ uma sequência de números naturais. Prove (por indução) que $j_n \geq n$ para todo $n \geq 1$.

2.3 —
a) Mostre que se a_n converge para a, então $|a_n|$ converge para $|a|$ (use que $||x| - |y|| \leq |x - y|$).
b) É verdade que se $|a_n|$ converge, então a_n converge? Prove ou forneça um contraexemplo.

2.4 — Suponha que a_n converge para a. Prove que para qualquer $\varepsilon > 0$, a_n está em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todos os n, exceto possivelmente para um número finito.

2.5 — Seja a_n uma sequência de números reais que converge para L. Defina $b_n = a_{n+k_0}$. Mostre que b_n também converge para L.

2.6 — Seja a_n uma sequência de números reais, e L um número real. Defina $b_n = |a_n - L|$. Mostre que a_n converge para L se, e somente se, b_n converge para 0.

2.7 — Considere uma sequência a_n que assume valores nos naturais.
a) Dê um exemplo de tal sequência.
b) Mostre que a_n converge se, e somente se, ela é estacionária, ou seja, se, e somente se, existe um natural N tal que, se $n \geq N$, então $a_n = a_N$.

2.8 — Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Prove que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

2.3 *Sequências limitadas*

Para algumas sequências o conjunto imagem $\mathrm{Im}(a_n) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado superiormente ou inferiormente, classificaremos as sequências em relação as propriedades de limitação da sua imagem como:

2.10 Definição

- *Uma sequência (a_n) é dita **limitada superiormente** se o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente como subconjunto dos números reais, i.e, se existir M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- *Uma sequência (a_n) é dita **limitada inferiormente** se o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado inferiormente como subconjunto dos números reais, i.e, se existir M tal que $a_n \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- *Uma sequência (a_n) é dita **limitada** se o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado superiormente e inferiormente. Ou de modo equivalente se existir M tal que $|a_n| \leq M$ para $n \in \mathbb{N}$.*

- *Uma sequência que não é limitada é dita **ilimitada***

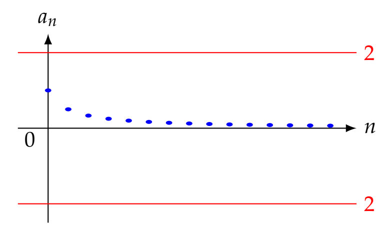


Figura 2.8: A sequência $\frac{1}{n+1}$ é limitada.

2.11 **Exemplo** *A sequência $(a_n) = \frac{1}{n+1}$ é limitada pois $\left|\frac{1}{n+1}\right| < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Vamos provar que $\left|\frac{1}{n+1}\right| < 2$ resolvendo essa desigualdade

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < 2n + 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < n$$

O conjunto solução da desigualdade anterior é $\mathbb{N}$, ou seja, mostramos que para todo n:

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| < 2$$

e deste modo a sequência é limitada.

2.12 **Exemplos**

1. *Do mesmo modo que o exemplo anterior pode-se mostrar que a sequência $a_n = -\frac{1}{n^2}$ é limitada superiormente pelo 0, e limitada inferiormente por 1, sendo assim limitada.*

2. *A sequência $(b_n) = n$ como veremos abaixo não é limitada superiormente, mas é limitada inferiormente. Uma cota inferior nesse caso é 0.*

Como observamos no exemplo anterior sequência $a_n = n$ é não limitada, ou seja,o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente. Esse fato de extrema importância é conhecido como propriedade Arquimediana dos números reais.

Um modo fácil de mostrar que uma sequência é limitada e compará-la com outra que já conhecemos. O seguinte teorema nos fornece um modo de realizar essa comparação.

2.13 **Teorema** *Sejam $(a_n), (b_n)$ duas sequências satisfazendo $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$. Então:*

- *se a sequência a_n é limitada inferiormente, a sequência b_n também é limitada inferiormente.*

- *se a sequência b_n é limitada superiormente, a sequência a_n também é limitada superiormente.*

2.14 Exemplos

1. *A sequência $a_n = \frac{1}{2^n}$ é limitada superiormente pois $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência também é limitada inferiormente pois $\frac{1}{2^n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *A sequência $b_n = \frac{1}{n!}$ é limitada superiormente pois $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
3. *A sequência $c_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ é uma sequência limitada pois $-\frac{1}{n} < \frac{(-1)^n}{n^3} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

2.15 Proposição *Se a sequência (a_n) converge então (a_n) é limitada.*

Demonstração. Como a_n converge, digamos ao ponto a, existe M tal que se $n > M$ então:

$$|a_n - a| < 1,$$

(veja que na definição de limite escolhemos $\varepsilon = 1$) o que implica que

$$|a_n| < |a| + 1$$

Veja que mostramos que a partir do ponto M a sequência é limitada por $|a| + 1$. Sobrou apenas um número finito de termos $\{a_1, \ldots a_M\}$ que não são necessariamente limitados por $|a| + 1$. Mas como esse conjunto é finito ele é limitado por $C = \max\{|a_1|, \ldots, |a_M|\}$.

Agora se tomarmos $D = \max\{|a| + 1, C\}$ teremos que todos os termos da sequência satisfazem $|a_n| < D$. Vejamos porque:

Se $n < M$ então

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_M|\} \leq D$$

Se $n > M$ então

$$|a_n| < |a| + 1 < D.$$

Como consequência da proposição anterior temos que as seguintes sequências não convergem, pois não são limitadas.

2.16 Exemplos

1. *A sequência $(n!)_{n=1}^{\infty}$ diverge. Ela não é limitada superiormente pois para todo n, $n! > n$.*
2. *A sequência $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ diverge Essa sequência não é limitada superiormente pois para todo n, $2^n > n$.*
3. *A sequência $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ diverge. Essa sequência não é limitada pois*

$$\frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{n+n} > \frac{n}{2}.$$

Exercícios

2.9 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n^2 + n$
b) $a_n = n^2 - 7n$
c) $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$
d) $a_n = \frac{n!}{2^n}$
e) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$
f) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$
g) $a_n = 2^n$
h) $n/n!$
i) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$.

2.10 — Prove que as seguintes sequências divergem:

a) $n - 10000$
b) $n^2 - 2$
c) $n!$
d) n^3
e) $(-1)^n n$
f) $a_1 = 1$ $a_n = n!a_{n-1}$
g) $\sqrt{n}$ (Dica: eleve ao quadrado)
h) $\text{sen}(n)$ (Difícil)
i) $\frac{1}{\text{sen}(n)}$ (Difícil)

2.11 — Suponha que a_n converge para L e é limitado inferiormente por m. Mostre que $L \geq m$.

2.4 *Sequências crescentes e decrescentes*

De modo análogo às funções reais, as sequências podem ser classificadas em relação ao seu crescimento e/ou decrescimento, ou seja, o estudo do (de)crescimento dos termos da sequência em relação a sua posição na sequência. Assim, dada uma sequência (a_n) dizemos que:

- (a_n) é **crescente** se, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n < a_m$.
- (a_n) é **não-decrescente** para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n \leq a_m$.
- (a_n) é **decrescente** para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n > a_m$.

- (a_n) é **não-crescente** para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, resulta $a_n \geq a_m$.

Em qualquer um dos casos acima, dizemos que a função é **monótona**[2]. Em particular, quando a função é crescente ou decrescente, dizemos que é **estritamente monótona**.

[2] É também usual na literatura o termo *monotônica*.

As definições anteriores são as análogas diretas das definições reais. No caso de sequência elas admitem as seguintes simplificações úteis:

2.17 Definição

- *(a_n) é **crescente** se, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n < a_{n+1}$.*
- *(a_n) é **não-decrescente** se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n \leq a_{n+1}$.*
- *(a_n) é **decrescente** se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n > a_{n+1}$).*
- *(a_n) é **não-crescente** se para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $a_n \geq a_{n+1}$.*

2.18 Exemplo *A sequência $(a_n) = \dfrac{1}{n+1}$ é decrescente pois para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}.$$

Vamos provar que a sequência é decrescente resolvendo a desigualdade na variável n que segue:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Essa desigualdade é equivalente à $n + 1 > n$, que é equivalente à $1 > 0$. O conjunto solução da última desigualdade é $\mathbb{N}$, ou seja para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

e assim a sequência é decrescente.

2.19 Exemplo *A sequência $\dfrac{n}{n^2+1}$ é não-crescente.*

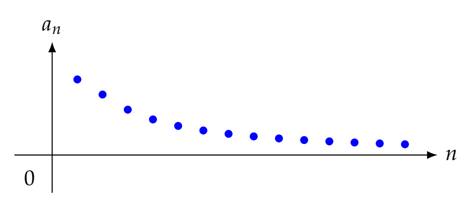


Figura 2.9: A sequência $\dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

Demonstraremos esse fato resolvendo a desigualdade:

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

A desigualdade anterior claramente é equivalente à :

$$(n+1)(n^2+1) < n((n+1)^2+1)$$

$$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\Leftrightarrow 1 < n^2 + n$$

Agora claramente se $n \geq 1$ então $n^2 + n > 1$, ou seja, o conjunto solução é os naturais e a sequência é decrescente.

(Se o leitor julgar necessário, ele pode provar que $n^2 + n > 1$, para todo $n \geq 1$ através de uma indução sobre n.)

2.20 **Teorema (Convergência Monótona)** *Toda sequência monótona e limitada converge.*

Demonstração. Vamos primeiro provar o resultado supondo (a_n) crescente e limitada. Como o conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, pela propriedade de completude dos reais, esse conjunto possui supremo, que denotaremos por L. Provaremos que L é o limite da sequência (a_n). Como L é supremo, claramente $a_n \leq L$ para todo n.

Agora seja $\varepsilon > 0$, então $L - \varepsilon$ não pode ser cota superior de A, pois isso implicaria que L não é supremo. E assim existe um termo a_N tal que $a_N > L - \varepsilon$. Como a sequência é crescente isso implica que para todo $n > N$

$$a_n > L - \varepsilon$$

E assim

$$L - \varepsilon < a_n \leq L \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L \leq 0 < \varepsilon$$

E logo a sequência converge a L.

Se a sequência (a_n) é decrescente, a demonstração é análoga tomando L o ínfimo de A e será deixada como exercício

Exercícios

2.12 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

2.13 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma dessas duas. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n + 7$

b) $a_n = n^2 + n$

c) $a_n = n^2 - 7n$

d) $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$

e) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

f) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

g) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

h) $a_n = 2^n$

i) $a_n = \dfrac{2n - 6}{3n + 4}$

j) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+3}$

k) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

2.14 — Suponha que a_n seja uma sequência crescente, b_n seja uma sequência decrescente, e que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$.

a) Mostre que a_n e b_n convergem.

b) Se, além das hipóteses anteriores, temos que $b_n - a_n$ converge para 0, prove que a_n e b_n convergem para o mesmo limite.

2.15 — Suponha que $a_n < b_n$ para todos os naturais n. Suponha que a_n e b_n convergem para a e b, respectivamente. É verdade que $a < b$? Prove ou forneça um contraexemplo.

2.5 O número e

2.21 Proposição *A sequência $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente.*

Demonstração. Vamos demonstrar que essa sequência é estritamente crescente, mostrando que o quociente de dois termos consecutivos é maior que 1. Dividindo dois termos consecutivos da sequência temos:

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Para mostrar que $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ é maior que 1, vamos usar a seguinte desigualdade: $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo x (vide exercício **??**). Usando essa estimativa temos que:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2}.$$

E assim por 2.3 temos

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

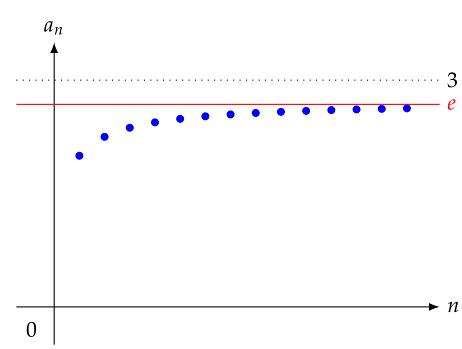


Figura 2.10: Gráfico de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Essa sequência é crescente e limitada por 3.

$$\begin{aligned} &= 1+\frac{1}{n^3} \\ &> 1 \end{aligned}$$

Logo a sequência é crescente. □

2.22 Proposição *A sequência* $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *é limitada superiormente.*

Demonstração. Primeiro, usando a expansão binomial temos:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n\cdot n}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n\cdot n\cdot n}+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots n}{n\cdot n\cdots n} \\ &= 1+1+\tfrac{1}{2!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)+\tfrac{1}{3!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)+\tfrac{1}{n!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Utilizando que $0 < \left(1-\dfrac{m}{n}\right) < 1$ sempre que $m < n$, podemos majorar a soma anterior, obtendo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

Agora, como $k! \geq 2^{k-1}$ para $k \geq 2$, temos:

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Finalmente, como a expressão em parenteses é a soma de progressão geométrica de termo inicial 1 e razão $\frac{1}{2}$, temos que

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2$$

para todo n e assim:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1+2 = 3$$

Por outro lado, como essa sequência é crescente todos os seus termos são maiores que o primeiro termo $e_1 = 2$, ou seja :

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 < 3$$

e logo a sequência é limitada. □

Como já mostramos, a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é monótona crescente e limitada. Logo pelo teorema 2.20 ela converge. O limite dessa sequência é chamado **número de Euler** ou simplesmente "e" e é denotado por e. Pelas estimativas que obtivemos no exemplo 2.22, sabemos que esse número está entre 2 e 3. Com um pouco mais de esforço pode-se provar que os primeiros dígitos do número e são $2,71828183$, ou seja $e \approx 2,71828183$), e que e é irracional.

De posse do número e podemos definir a função exponencial de base e que neste caso será denominada apenas por **exponencial** . .

Como valem as desigualdades $2 < e < 3$, temos as seguintes desigualdades entre funções: se $x > 0$ então $2^x < e^x < 3^x$ e se $x < 0$ então $3^x < e^x < 2^x$ e assim podemos representar o gráfico da função exponencial como:

O logaritmo de base e é denominado **função logaritmo natural** ou simplesmente **logaritmo** . A. A função logaritmo é a função $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida pela regra

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

O gráfico da função logaritmo natural está representado abaixo:

Exercícios

2.16 — .

a) Mostre que $e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que $e^x \geq 1 + x$.

c) Usando que $e^x \geq 1 + x$ e que $e^{-x} \geq 1 - x$ mostre que $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

2.6 *Limites infinitos*

Algumas sequencias, apesar de não convergirem possuem um comportamento inteligível conforme o valor de n cresce: a sequência torna-se maior que qualquer número real C para valores suficientemente grandes de n. Para essas sequências diremos que o limite é infinito e usaremos a notação

$$a_n \to \infty \text{ ou } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Se uma sequência se torna menor que qualquer número real C, para valores suficientemente grandes de n, diremos que o limite da sequência é menos infinito e denotaremos tal fato por:

$$b_n \to \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$

Limites Infinitos

Dado uma sequência $(a_n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dizemos que o limite da sequências (a_n) é **mais infinito**, fato que denotaremos por

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, se para todo $C \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n > M$ então $a_n > C$.

Dado uma sequência $(a_n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, dizemos que o limite da sequências (a_n) é **menos infinito**, fato que denotaremos por $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, se para todo $C \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n > M$ então $a_n < C$.

É importante observar que ∞ é somente uma notação para o fato da sequência se tornar maior que qualquer número natural para termos suficientemente grandes. Dessa forma **não podemos** realizar operações algébricas com o símbolo de infinito. Em outras palavras as expressões $\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. não fazem sentido.

Comecemos mostrando através da definição que a sequência $a_n = n$ possui limite infinito.

2.23 **Exemplo** $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

Queremos provar que dado $C > 0$ existe M tal que se $n > M$ então:

$$n > C$$

Como a sequência n não é limitada superiormente, pelo menos um de seus termos, digamos a_M é maior que C. Agora se $n > M$ então $n > M > C$, como queríamos.

Pode-se mostrar de modo análogo que $\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Um modo simples de mostrar que o limite de uma sequência é ∞ é mostrando que a partir de um certo ponto ela é maior que uma sequência cujo limite já sabemos ser ∞. De modo análogo se uma sequência a partir de um certo ponto é menor que uma sequência cujo limite é menos infinito então o limite dessa sequência é menos infinito.

2.24 **Teorema (de Comparação de Sequências)** *Sejam a_n e b_n duas sequências reais satisfazendo $a_n \le b_n$ para todo n.*

1. *Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ então $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.*
2. *Se $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

2.25 **Exemplos** *Como corolário do teorema anterior, temos os seguintes limites, que são facilmente obtidos através de comparação com uma das sequências $a_n = n$ e $b_n = -n$.*

1. $\lim_{n\to\infty} n^n = \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} n! = \infty$
3. $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$
4. *Dado $k \in \mathbb{N}^*$ então $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$.*

5. *Dado $k \in \mathbb{N}^*$ ímpar então* $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^k = -\infty$

6. *Dado $k \in \mathbb{N}^*$ par então* $\lim\limits_{n\to\infty} (-n)^k = \infty$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} e^n = \infty$

2.26 Proposição *Se a_n é uma sequência não-decrescente e não limitada superiormente, então $a_n \to \infty$.*

Demonstração. Seja $C \in \mathbb{R}$, como a_n não é limitada superiormente existe a_N tal que $a_N > C$. Como a sequência a_n é não-decrescente, se $n > N$ então $a_n \geq a_N > C$ e assim $a_n \to \infty$. □

De modo análogo, pode-se provar que se a_n é não-crescente e não limitada inferiormente então seu limite é $-\infty$.

2.27 Exemplo $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty$

A sequência $\ln(n)$ é monótona crescente, logo temos duas possibilidades ou ela é limitada superiormente e nesse caso converge ou ela é ilimitada superiormente e neste caso seu limite é ∞.

Suponha que $\ln n$ fosse limitada superiormente. ou seja existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\ln n < C$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Neste caso teríamos que $n = e^{\ln n} < e^C$, e a sequência n seria limitada superiormente. Absurdo. E assim temos que a sequência $\ln n$ é ilimitada e seu limite é ∞

2.28 Proposição *Seja (a_n) uma sequência real.*

1. *Se $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \to \infty$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \to 0$.*
2. *Se $a_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \to -\infty$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \to 0$.*

Demonstração. Demonstraremos apenas a primeira afirmação.

$(\Rightarrow)$ Dado $\varepsilon > 0$, nosso objetivo é encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Como $a_n \to \infty$, pelo uso da definição de sequências divergindo para o infinito, para $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $n \geq N$. Em outras palavras, para todo $n \geq N$, temos $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$. Assim, encontramos tal N.

$(\Leftarrow)$ Como a_n é positivo, $\frac{1}{a_n}$ também é positivo para todo n. Dado $K > 0$ queremos mostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > K$ para todo $n \geq N$. Como $\frac{1}{a_n} \to 0$ e $a_n > 0$, utilizando $\varepsilon = \frac{1}{K} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K}$ para todo $n \geq N$. Em outras palavras, para todo $n \geq N$, temos $a_n > K$. Assim, encontramos o N desejado.
□

2.29 Exemplo *Queremos encontrar o limite* $\lim_{n\to\infty} n^{1/n}$.

Observe que, como $n \geq 1$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *devemos ter* $n^{1/n} \geq 1$, *caso contrário,* $n^{1/n} < 1^n = 1$, *o que é absurdo! Assim, podemos escrever* $n^{1/n} = 1 + a_n$ *para alguma sequência de números não negativos* (a_n). *Isso implica que* $n = (1+a_n)^n$ *e, pelo desenvolvimento binomial para* $n \geq 2$, *temos:*

$$n = (1+a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

e logo

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Usando a Proposição 2.28 e o Teorema do Confronto, ao tomar o limite quando $n \to \infty$, *obtemos* $a_n \to 0$. *Portanto, tomando o limite quando* $n \to \infty$ *dos dois lados de* $n^{1/n} = 1 + a_n$, *e logo temos que* $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Exercícios

2.17 — Dê um exemplo de uma sequência não limitada que não diverge para $+\infty$ ou para $-\infty$.

2.18 —

a) Dê um exemplo de uma sequência convergente (s_n) de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}/s_n) = 1$.

b) Dê um exemplo de uma sequência convergente (t_n) de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1}/t_n) = 1$.

2.7 *Propriedades do limite de sequências*

Vamos nessa seção apresentar algumas propriedades dos limites que serão muito úteis nos cálculos dos mesmos.

2.30 Teorema (Propriedades Algébricas do Limite) *Seja c um número real e* (a_n) *e* (b_n) *duas sequências convergentes, tais que* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *e* $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. *Então:*

L1. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA$.

L2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$. *(Limite da soma)*

L3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = AB$. *(Limite do produto)*

L4. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$ *então* $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{A}{B}$. *(Limite do quociente)*

L5. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |A|$. *(Limite do módulo)*

L6. *Se k é impar,* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. *(Limite da raiz)*

L7. *Se k é par e* $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. *(Limite da raiz)*

Demonstração. i Começaremos considerando o caso $c \neq 0$. Nosso objetivo é mostrar que a sequência (ca_n) converge a ca, ou seja nós queremos achar um ponto (M) a partir do qual

$$|ca_n - ca| < \varepsilon.$$

Observamos inicialmente que vale a igualdade:

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| \tag{2.4}$$

Como por hipótese sabemos que $a_n \to a$, isto implica que existe um ponto M_1 a partir do qual a diferença entre a sequência a_n e a é tão pequena quanto queiramos, ou seja: se $n > M_1$ então temos que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \tag{2.5}$$

(veja que o número real escolhido nesse caso foi $\frac{\varepsilon}{|c|}$, falaremos mais sobre o porque dessa escolha depois, por enquanto apenas note que podemos escolher esse número, e que pela definição de limite vai existir um ponto M_1 a partir do qual a desigualdade 2.5 é válida.)

Agora basta combinarmos as equações 2.4 e 2.5 para terminarmos a demonstração. Vejamos como:

Seja $M = M_1$, como definimos acima, então para $n > M_1$ temos que:

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| < |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} < \varepsilon. \tag{2.6}$$

E assim provamos que $(ca_n) \to ca$.

Antes de fazermos a demonstração dos outros itens. Vamos observar alguns pontos importantes. Primeiro porque escolher $\frac{\varepsilon}{|c|}$? A resposta é simples: para que a demonstração funcione, nem mais nem menos. Com essa escolha foi fácil provar $|a_n - a| < \varepsilon$. Ou seja, "para aonde eu devo ir, depende de onde quero chegar". É possível de antemão saber que escolha deve ser feita? Na verdade, não é necessário saber de antemão, vejamos como refazendo a demonstração:

Segunda demonstração Reobservamos que vale a igualdade:

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| \tag{2.7}$$

Como por hipótese sabemos que $a_n \to a$, isto implica que existe um ponto M_1 a partir do qual a diferença é tão pequena quanto queiramos, ou seja: se $n > M_1$ então temos que

$$|a_n - a| < \varepsilon_1 \tag{2.8}$$

Agora basta combinarmos as equações 2.7 e 2.8 temos que

Seja $M = M_1$, como definimos acima, então para $n > M_1$ temos que:

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| < |c|\,\varepsilon_1 \tag{2.9}$$

Agora como podemos escolher ε_1 tão pequeno quanto queiramos, escolhemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$ e assim 2.9 fica:

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| < |c|\,\varepsilon_1 = |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \tag{2.10}$$

O que prova que $(ca_n) \to ca$.

Vale observar também mais alguns fatos: foi fundamental a liberdade de podermos escolher o primeiro ε tão pequeno quanto queiramos. É fundamental, em demonstrações de limites entender quando e como escolher essas grandezas.

(ii) Para provarmos que $(a_n + b_n) \to (a + b)$, precisamos estimar

$$|(a_n + b_n) - (a + b)|$$

para valores grandes de n, e para esses valores obter que o módulo anterior é menor que ε.

Começamos reordenado o módulo anterior, e assim:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$$

Agora usaremos a desigualdade triangular para obtermos:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| < |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \tag{2.11}$$

Veja que reduzimos o problema de estimarmos $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ ao problema de estimarmos $|(a_n - a)|$ e $|(b_n - b)|$. Mas essas estimativas nos são dadas pela definição que as sequência a_n e b_n convergem respectivamente a a e b.

Como $a_n \to a$, por definição de convergência, temos que existe um ponto M_1 a partir do qual $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, i.e,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad n > M_1 \tag{2.12}$$

Por outro lado como por hipótese $b_n \to b$, por definição de convergência, temos que existe um ponto M_2 a partir do qual $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, i.e,

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad n > M_2 \tag{2.13}$$

Aqui é importante observar que a convergência de (a_n) e (b_n) implica que para cada uma dessas sequência temos um ponto para o qual cada uma delas é menor que ε, respectivamente M_1 e M_2. A priori, esses pontos não são iguais e portanto é necessário distingui-los. Intuitivamente eles são distintos pois as séries podem convergir com velocidades diferentes. Veja que a definição de convergência de cada série diz que para essa série existe um ponto (que depende da série, e do épsilon) a partir do qual os termos série estão a distância menor que ε do limite.

Feita essa observação, veja que existe um ponto a partir do qual ambas as sequências estão simultaneamente na ε-vizinhança de seus limites, esse ponto é $M = \max\{M_1, M_2\}$ pois se $n > M$ então valem:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad n > M \tag{2.14}$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad n > M \tag{2.15}$$

pois se $n > M$ então $n > M_1$ e $n > M_2$. Ou seja a partir do ponto M os termos de ambas as séries vão estar a distância menor que ε do seus limites, como dito anteriormente.

Agora, temos todos os ingredientes da nossa demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ seja $M = \max\{M_1, M_2\}$ então por 2.11

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| < |(a_n - a)| + |(b_n - b)|$$

e substituindo 2.14 e 2.15 na equação anterior temos:

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| < |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

(iii) Vamos provar que $(a_n b_n) \to ab$. Observamos primeiramente que vale as desigualdades

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| && (2.16)\\ &\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| && (2.17)\\ &\leq |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| && (2.18)\end{aligned}$$

No primeiro passo acima adicionamos e subtraímos ab_n, o que nos permitiu usar a desigualdade triangular. Esta é uma técnica inteligente e a usaremos algumas vezes.

Agora vamos proceder como anteriormente fazendo cada pedaço da ultima desigualdade menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ e assim fazendo a soma menor que ε.

Vamos agora supor que $a \neq 0$ (o caso $a = 0$ deixamos como exercício ao leitor). Como $(b_n) \to b$, existe M_1 tal que se $n > M_1$ então

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|\,2} \tag{2.19}$$

Feito isso temos uma estimativa para o segundo termo da equação 2.18. Estimar o primeiro termo, i.e, $|b_n| |a_n - a|$ existe um pouco mais de cuidado, pois neste termo estamos multiplicando por $|b_n|$ que é um termo variável. Como já vimos em existe uma cota C tal que para todo n temos que $|b_n <| C$ e observamos que está cota pode ser escolhida diferente de zero. (Porque?) e assim como $a_n \to a$ existe um ponto M_2 tal que se $n > M_2$ então:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{C} \tag{2.20}$$

Agora podemos terminar a demonstração, para tanto seja $M = \max\{M_1, M_2\}$, então se $n > M$ temos que:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| && (2.21)\\
&\leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab| && (2.22)\\
&\leq |b_n| |a_n - a| + |a| |b_n - b| && (2.23)\\
&< C |a_n - a| + |a| |b_n - b| && (2.24)\\
&< C \left(\frac{\varepsilon}{C}\right) + |a| \left(\frac{\varepsilon}{|a| 2}\right) = \varepsilon. && (2.25)
\end{aligned}$$

(iv) Como

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

pelo item 3 basta provarmos que se $b_n \to b$ então $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, sempre que $b \neq 0$. Começamos observando que:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b| |b_n|} \tag{2.26}$$

Como $b_n \to b$ sabemos que a sequência existe um ponto M tal que se $n > M_1$ então

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}, \tag{2.27}$$

o que implica que $|b_n| > |b| /2$ (porque?). Veja que existe um outro ponto M_2 tal que se $n > N_2$ então

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2}. \tag{2.28}$$

Finalmente escolhemos $M = \max\{M_1, M_2\}$, para $n > M$, teremos:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b| |b_n|} < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \frac{1}{|b| |b/2|} = \varepsilon \tag{2.29}$$

□

2.31 Exemplo $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

Pela propriedade da soma (**L2**), se os limites $\lim_{n\to\infty} 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ existirem, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

Mas, como já demonstramos $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$, por ser uma sequência constante e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

2.32 Exemplo *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.*

Vamos provar por indução. O caso $k = 1$ já foi feito. Assim vamos supor por hipótese indutiva que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$. Mas usando a **L3** temos que;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0 \cdot 0 = 0$$

2.33 Exemplo $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3}$

Observe que não podemos usar **L4** pois ambas as sequências do numerador e do denominador são divergentes.

Para calcularmos esse limite devemos usar a seguinte estrategia começamos dividindo por n^2 o numerador e o denominador, e logo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}$$

Supondo que os limites no denominador e no numerador existam, podemos usar **L4**, e temos

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n^2}\right)}$$

Supondo que os limites de cada termo da soma existam, podemos usar que o limite da soma é a soma dos limites (**L2**) e

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{2+0}{1+0} = 2$$

Veja que no final, chegamos que cada limite de cada termo soma existia, o que implica que o limite no numerador e denominador existiam, e assim nossa cadeia de raciocínios estava correta, pois cada suposição era correta.

2.34 Exemplo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Vamos calcular esse limite reduzindo seu calculo ao limite conhecido $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Para tanto começamos com algumas manipulações algébricas:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \tag{2.30}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \tag{2.31}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \tag{2.32}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \tag{2.33}$$

Para calcularmos o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

observe que a sequência $b_n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ e a sequência $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ são tais que $e_n = b_{n+1}$ e assim pelo exercício 2.34 elas possuem o mesmo limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$$

Temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = e^{-1}$$

Exercícios

2.19 — Para s_n a sequência de termo geral dado abaixo, determine a convergência ou divergência da sequência (s_n). Calcule, caso exista, $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

a) $s_n = \frac{n^4+3n+1}{5n^4+2}$
b) $s_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
c) $s_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
d) $s_n = \int_1^n \frac{1}{x}dx$
e) $s_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx$, onde α é um real dado

f) $s_n = \int_0^n e^{-sx}dx(s > 0)$
g) $s_n = \frac{3-2n}{1+n}$
h) $s_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$
i) $s_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}$
j) $s_n = \frac{2^n}{3 \cdot 2^n}$
k) $s_n = \frac{n^2-2}{n+1}$
l) $s_n = \frac{3+n-n^2}{1+2n}$
m) $s_n = \frac{1-n}{2^n}$
n) $s_n = \frac{3^n}{n^3+5}$
o) $s_n = \frac{n!}{2^n}$
p) $s_n = \frac{n!}{n^n}$
q) $s_n = \frac{n^2}{2^n}$
r) $s_n = \frac{n^2}{n!}$

2.20 — Prove por indução que se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

2.21 — Usando o exercício anterior, mostre que dados $p, q \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

2.22 — (Difícil) Mostre que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\alpha} = a^{\alpha}.$$

2.23 — Para cada um dos itens a seguir, prove ou forneça um contra-exemplo.

a) Se (s_n) e (t_n) são sequências divergentes, então $(s_n + t_n)$ diverge.
b) Se (s_n) e (t_n) são sequências divergentes, então $(s_n t_n)$ diverge.
c) Se (s_n) e $(s_n + t_n)$ são sequências convergentes, então (t_n) converge.
d) Se (s_n) e $(s_n t_n)$ são sequências convergentes, então (t_n) converge.

2.24 — Dê um exemplo de uma sequência não limitada que não diverge para $+\infty$ ou para $-\infty$.

2.25 —

a) Dê um exemplo de uma sequência convergente (s_n) de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}/s_n) = 1$.

b) Dê um exemplo de uma sequência convergente (t_n) de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(t_{n+1}/t_n) = 1$.

2.26 — Seja a sequência a_n definida recursivamente, estabelecendo $a_1 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}.$$

a) Mostre que, para todo $n \geq 1$, se $a_n > 1$, então $a_{n+1} > 1$.

b) Use o item anterior para mostrar que a sequência a_n está bem definida e que a_n é limitada inferiormente por 1.

c) Mostre que a_n é decrescente.

d) Mostre que a_n converge para algum limite $L \geq 1$.

e) Mostre que
$$\frac{2a_n - 1}{a_n} \text{ converge para } \frac{2L-1}{L}.$$

f) Determine o valor de L

2.27 — Prove:

a) Se $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ e $k > 0$, então $\lim_{n\to\infty} ks_n = +\infty$.

b) Se $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ e $k < 0$, então $\lim_{n\to\infty} ks_n = -\infty$.

c) $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty}(-s_n) = -\infty$.

d) Se $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ e se (t_n) é uma sequência limitada, então $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = +\infty$.

e) Se (s_n) converge para $L > 0$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$, então $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = +\infty$.

2.8 *Teorema do confronto*

Um modo extremamente eficaz de calcular limites é o Teorema do Confronto, que em termos vagos nos diz que se uma sequência está ensanduichada por duas outras que convergem ao mesmo limite, então a sequência ensanduichada também converge a esse limite.

2.35 **Teorema (do confronto)** *Dadas $(a_n), (b_n)$ e (c_n) sequências reais tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n > n_0$. Então se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, então* *existe* (b_n) *converge e* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Demonstração. Como a_n é convergente existe um ponto M_1 tal que se $n > M_1$, então:

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \tag{2.34}$$

Por outro lado como c_n é convergente existe um ponto M_2 tal que se $n > M_2$, então:

$$|c_n - L| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \tag{2.35}$$

Agora seja $M = \max\{M_1, eM_2\}$ então pela equação 2.34 $L - \varepsilon < a_n$ e como $b_n > a_n$ temos que $b_n > L - \varepsilon$. Já pela equação 2.35 $b_n < L + \varepsilon$ e como $c_n < b_n$ então $b_n < L + \varepsilon$. Assim $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$ para todo $n > M$ e assim temos que b_n converge a L. □

2.36 Exemplo *Se* $|r| < 1$ *então* $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

Provaremos primeiramente o caso $0 < r < 1$, neste caso como $r < 1$ então $\frac{1}{r} > 1$ e desta forma $\frac{1}{r} = 1 + \alpha \Leftrightarrow r = \frac{1}{1+\alpha}$.

Pelo Exemplo 1.38 temos que $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ e assim

$$0 < r^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha} < \frac{1}{n\alpha}$$

e logo pelo Teorema do Confronto o limite é zero.

No caso que $-1 < r < 0$, note que $-|r|^n < r^n < |r|^n$ e agora como $0 < |r| < 1$, temos que $|r|^n \to 0$ e assim novamente usando o Teorema do Confronto temos que $r^n \to 0$.

2.37 Exemplo $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$

Como: $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, dividindo essa desigualdade por n temos:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$$

2.38 Exemplo *Seja* a_n *uma sequência limitada e* b_n *uma sequência que converge a* 0 *então:*

$$a_n b_n \to 0$$

Como a_n *é limitada, existe* C *tal que*

$$-C < a_n < C.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $|b_n|$ temos:

$$-C\,|b_n| < a_n < C\,|bn|\,.$$

Agora como $b_n \to 0$ então $|b_n| \to 0$ e assim $C\,|bn| \to 0$ e $-C\,|bn| \to 0$, logo pelo Teorema do Confronto $a_n b_n \to 0$.

2.39 Proposição (Preservação de Desigualdades) *Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências reais convergentes tais que $a_n \to L$ e $b_n \to M$. Se $a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $L \le M$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $L > M$, de modo que $L - M > 0$. Definindo $\varepsilon = \frac{L-M}{2} > 0$, como $a_n \to L$, existe um $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \frac{L-M}{2}$ para todo $n \ge N_1$. Em particular, temos $a_n > \frac{M+L}{2}$ para $n \ge N_1$.

Além disso, como $b_n \to M$, existe um $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - M| < \frac{L-M}{2}$ para todo $n \ge N_2$. Em particular, temos $b_n < \frac{L+M}{2}$ para $n \ge N_2$.

Assim, para $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos $\frac{M+L}{2} < a_N \le b_N < \frac{L+M}{2}$, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $L \le M$. □

Exercícios

2.28 — Mostre que se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, então $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

2.29 — Mostre que se $a_n > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge 0$.

2.30 — Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

2.31 — Nesta questão queremos provar que, para qualquer $r > 0$, temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 1$.

a) Para qualquer constante $r \ge 1$, prove que $\frac{1}{r^n} \to 1$ à medida que $n \to \infty$.

b) Consequentemente, prove que, para qualquer constante $r \in (0,1)$, temos $\frac{1}{r^n} \to 1$ também.
Dica: Use a Desigualdade de Bernoulli.

c) Agora, seja (a_n) uma sequência que converge para um número positivo. Prove que a sequência $\left(\frac{1}{a_n^n}\right)$ também converge e determine seu limite.

d) Suponha que $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ sejam constantes positivas. Seja (a_n) a sequência dada por $a_n = \left(r_1^n + r_2^n + \cdots + r_k^n\right)^{1/n}$. Encontre o limite dessa sequência.

2.32 —

a) Usando que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ e o Exercício 2.31, encontre $\lim_{n\to\infty}(k+n)^{1/n}$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.

b) Encontre o limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{2^n - n}$.

2.33 — Nesta questão iremos generalizar os resultados do Exercício 2.31 considerando o limite $\lim_{n\to\infty} r^{a_n}$, onde $r > 0$ e (a_n) é alguma sequência real convergente.

a) Seja $r \geq 1$. Prove que $|r^x - 1| \leq |x||r-1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Considere uma sequência real (a_n) que converge para $a \in \mathbb{R}$. Usando a parte (a), prove que $\lim_{n\to\infty} r^{a_n} = r^a$ para qualquer $r \geq 1$ fixo.

c) Estenda o resultado da parte (b) para qualquer $0 < r < 1$.

2.9 *Subsequências*

2.40 Definição *Seja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números naturais tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. A sequência $\left(s_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ é chamada de* ***subsequência*** *de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.*

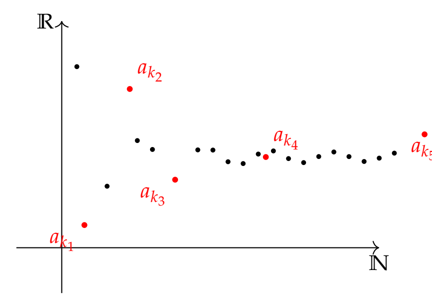


Figura 2.11: Sequência real (a_n). Uma subsequência (a_{k_n}) é selecionada pelos pontos vermelhos.

2.41 Exemplos *Sejam as sequências (a_n) e (b_n) definidas por $a_n = (-1)^n$ e $b_n = 2n$.*

1. *Se definirmos uma função crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $k(n) = 2n$, então temos uma nova sequência:*

$$(a_{k_n}) = (a_{2n}) = (a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots) = (1, 1, 1, 1, \ldots)$$

Esta sequência (a_{k_n}) é uma subsequência de (a_n) uma vez que estamos apenas pegando os termos de número par da sequência original e ignorando os demais.

2. *Também podemos definir $k(n) = n^2$ para que possamos criar uma subsequência de (b_n) dada por:*

$$(b_{k_n}) = (b_{n^2}) = (b_1, b_4, b_9, b_{16}, \ldots) = (2, 8, 18, 32, \ldots)$$

onde o n-ésimo termo nesta nova sequência é dado por $b_{k_n} = 2n^2$.

3. *Outro exemplo de uma subsequência é a cauda de uma sequência. A cauda de uma sequência (a_n) é uma sequência $(a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots)$ para algum N fixo em $\mathbb{N}$. Esta cauda é uma subsequência obtida pela pré-composição da sequência (a_n) com a função estritamente crescente $k(n) = N + n$. Assim, a subsequência resultante de (a_n) seria $(a_{k_n}) = (a_{N+n}) = (a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots)$.*

2.42 Teorema *Se uma sequência (s_n) converge para um número real s, então toda subsequência de (s_n) também converge para s.*

Demonstração. Seja (s_{n_k}) uma subsequência de (s_n). Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que $n \geq N$ implica que $|s_n - s| < \varepsilon$. Assim, para $k \geq N$, aplicamos o resultado do Exercício 2.35 para obter $n_k \geq k \geq N$, o que garante que $|s_{n_k} - s| < \varepsilon$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = s$. □

2.43 Exemplo *Uma aplicação do Teorema 2.42 é encontrar o valor do limite de uma sequência convergente. Suponha que $0 < x < 1$ e considere a sequência (s_n) definida por $s_n = x^{1/n}$. Como $0 < x^{1/n} < 1$ para todo n, (s_n) é limitada e crescente. Pelo Teorema da Convergência Monótona 2.20, (s_n) converge para algum número, digamos s. Temos que:*

$$s_{2n} = x^{1/(2n)} = \sqrt{x^{1/n}} = \sqrt{s_n}.$$

Pelo Teorema 2.42, $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n$, e, utilizando a propriedade $\lim_{n\to\infty} \sqrt{s_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} s_n}$, obtemos:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{s_n} = \sqrt{s}.$$

Portanto, $s^2 = s$, o que implica que $s = 0$ ou $s = 1$. Como $s_1 = x > 0$ e a sequência é crescente, temos que $s \neq 0$. Logo, $s = 1$ e $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$.

2.44 Exemplo *O Teorema 2.42 também pode ser útil para mostrar que uma sequência é divergente. Se a sequência $s_n = (-1)^n$ fosse convergente para algum número s, então todas as subsequências também convergiriam para s. No entanto, as subsequências (s_{2n}) e (s_{2n-1}) convergem para valores diferentes, +1 e -1, respectivamente, o que mostra que (s_n) não é convergente.*

2.45 Teorema (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais com $a_0 < s_n < b_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passo 1 (Construção da subsequência):

1. Definimos $L = |b_0 - a_0|$.
2. Dividimos o intervalo $[a_0, b_0]$ em duas metades. Pelo menos uma dessas metades deve conter infinitos valores s_n. Escolhemos uma dessas metades e chamamos-a de $[a_1, b_1]$. Observe que $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b_0 - a_0| = L$, e que $a_1 \in \left\{a_0, a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2}\right\}$, portanto $a_1 \geq a_0$. Existem infinitos s_n em $[a_1, b_1]$. Escolhemos um desses valores, digamos, s_{i_1}.
3. Agora, dividimos o intervalo $[a_1, b_1]$ em duas metades. Novamente pelo menos uma das metades deve conter infinitos s_n. Escolhemos

uma dessas metades e chamamos-a de $[a_2, b_2]$. Note que $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2}|b_1 - a_1| = \frac{L}{2}$, e que $a_2 \in \left\{a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}\right\}$, de modo que $a_2 \geq a_1$. Existem infinitos s_n em $[a_2, b_2]$. Escolhemos um desses valores, digamos, s_{i_2} com $i_2 > i_1$.

4. Continuamos o processo. E dessa forma, obtemos uma sequência de intervalos encaixantes (vide Figura 2.12):

$$\underbrace{[a_0, b_0]}_{\text{comprimento } L} \supset \overbrace{\underbrace{[a_1, b_1]}_{\text{comprimento } \frac{L}{2}}}^{s_{i_1} \in} \supset \overbrace{\underbrace{[a_2, b_2]}_{\text{comprimento } \frac{L}{4}}}^{s_{i_2} \in} \supset \cdots$$

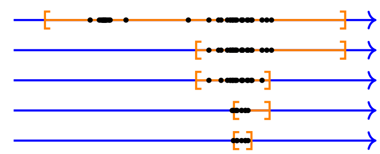


Figura 2.12: Intervalos encaixantes.

Note que $|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| = \frac{L}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$.

Passo 2 (Obtenção do Limite): A sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é monótona crescente e limitada superiormente por b_0. Portanto, ela converge. Denote o limite por s.

Passo 3 (Prova de que $s_n \to s$): Seja $\varepsilon > 0$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para s, temos que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } n \geq N_1.$$

Como s_{i_n} está no intervalo $[a_n, b_n]$, e o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ é $\frac{L}{2^n}$, a distância de s_{i_n} até a_n é no máximo $\frac{L}{2^n}$, o que converge para zero quando $n \to \infty$. Assim,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |s_{i_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } n \geq N_2.$$

Escolhendo $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, para $n \geq N$, temos:

$$|s_{i_n} - s| \leq |s_{i_n} - a_n| + |a_n - s| < \varepsilon$$

o que conclui a prova. □

Exercícios

2.34 — Dado s_k uma sequência convergente e $t_k = s_{n_k}$ com $n_k = k + n_0$ uma subsequência (estamos removendo os n_0 primeiros termos da sequência original, mantendo a ordem dos subsequentes). Então t_k converge e o limite é o mesmo da sequência s_k.

2.35 — Se (n_k) é uma sequência crescente de números naturais então (n_k) é ilimitada.

2.36 — Mostre que, se uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ não é limitada superiormente, então existe uma subsequência $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$. Um resultado similar vale se a sequência não for limitada inferiormente, mas $-\infty$ substitui ∞.

2.37 — Prove que toda sequência possui uma subsequência monótona. Use isso para fornecer outra demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass.
Dica: Considere o conjunto de todos os inteiros n com a propriedade de que $a_m \leq a_n$ para todo $m \geq n$ e reflita sobre as consequências de este conjunto ser finito ou infinito.

2.38 — Mostre que, se uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ não é limitada superiormente, então existe uma subsequência $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$. Um resultado similar vale se a sequência não é limitada inferiormente, mas com $-\infty$ substituindo ∞.

2.39 — Suponha que toda subsequência da sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tem um limite, mas sem assumir que todos têm o mesmo limite. Prove que a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ possui um limite.

2.40 — Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais e suponha que o conjunto de valores $A = \{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ que aparece na sequência possui um ponto de acumulação L. Mostre que existe uma subsequência $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, com termos distintos, que converge para L.

2.10 *Sequências de Cauchy*

Quando uma sequência (s_n) é convergente, os termos se aproximam cada vez mais do valor do limite para valores grandes de n. Consequentemente, eles também se aproximam entre si. Na verdade, essa última propriedade (chamada propriedade de Cauchy) é suficiente para garantir a convergência de sequências reais.

2.46 Definição (Sequências de Cauchy) *Uma sequência (s_n) de números reais é chamada de **sequência de Cauchy** se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, para $m, n \geq N$, temos $|s_n - s_m| < \varepsilon$.*

2.47 Proposição *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que (s_n) converge para s. Para mostrar que s_n está próximo de s_m para valores grandes de n e m, usamos o fato de que ambos estão próximos de s. Uma aplicação da desigualdade triangular nos dá:

$$|s_n - s_m| = |s_n - s + s - s_m| \leq |s_n - s| + |s - s_m|$$

Dado um $\varepsilon > 0$, escolhemos um número natural N tal que, para $k \geq N$, temos $|s_k - s| < \varepsilon/2$. Então, para $m, n \geq N$, temos:

$$|s_n - s_m| \leq |s_n - s| + |s - s_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, (s_n) é uma sequência de Cauchy. □

2.48 **Proposição** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. A demonstração é simples e será deixada como exercício. □

2.49 **Teorema (Critério de Convergência de Cauchy)** *Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Já mostramos que toda sequência convergente é de Cauchy. Agora, suponha que (s_n) seja uma sequência de Cauchy. Como a sequência (s_n) é limitada, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (s_{n_k}) de (s_n) que converge para algum limite $L \in \mathbb{R}$.

Provaremos agora que a sequência original converge para o mesmo limite.

Como (s_n) é uma sequência de Cauchy, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um N tal que, para todo $m, n > N$, $|s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Em particular, isso significa que, para $n, n_k > N$, temos $|s_n - s_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como (s_{n_k}) converge para L, existe um índice K tal que, para todo $n_k > K$, temos $|s_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $M = \max(N, K)$Para $n > M$, podemos usar a desigualdade triangular para obter:

$$|s_n - L| \leq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - L|.$$

Escolhendo $n_k > M$, temos $|s_n - s_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|s_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, obtemos:

$$|s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Mostramos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um M tal que, para todo $n > M$, $|x_n - L| < \varepsilon$. Isso prova que (s_n) converge para L.

Logo toda sequência de Cauchy nos números reais é convergente.

2.50 **Exemplo** *Ilustraremos o uso do critério de Cauchy mostrando que a sequência $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ é divergente.*

Se $m > n$, então:

$$s_m - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} > \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}$$

Em particular, quando $m = 2n$, temos $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$. Portanto, a sequência (s_n) não pode ser de Cauchy e, assim, não é convergente.

2.51 Teorema *Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado que satisfaz a Propriedade Arquimediana, então $\mathbb{K}$ é completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ é convergente.*

Sequências de Cauchy e Completude
O conceito de que toda sequência de Cauchy converge poderia ser tomado como a definição de completude de um corpo. Em outras palavras poderíamos ter assumido o seguinte axioma:

Axioma 13″ Um corpo ordenado é dito completo se e somente é arquimediano e toda sequência de Cauchy converge.

Esse Axioma da Completude pode ser mais intuitivo para o leitor, já que intuitivamente, uma sequência de Cauchy é uma sequência cujos elementos ficam cada vez mais próximos uns dos outros à medida que avançamos. Essa ideia de "aproximação"entre os termos sugere que a sequência está se "aproximando"de algum valor nos reais, mesmo que inicialmente não saibamos qual é esse valor. Nos reais, toda sequência de Cauchy realmente converge para um número real, o que reflete uma propriedade fundamental desse conjunto: ele é completo, ou seja, não "falta"nenhum número que possa servir de "destino"para a sequência.

Demonstração. A implicação $\Longleftarrow$ já foi demonstrada no Teorema 2.49.

Aqui, faremos apenas um esboço da prova da implicação $\Longrightarrow$, deixando como exercício ao leitor completar os detalhes. Seguiremos uma estratégia similar à utilizada no Teorema 2.45.

Considere $s \in S \neq \emptyset$ e seja M uma cota superior de S. Defina $a_0 = s$ e $b_0 = M$, e denote $L = |b_0 - a_0|$. Divida o intervalo $[a_0, b_0]$ ao meio e escolha o subintervalo à direita que contém ao menos um ponto de S, denotando este subintervalo por $[a_1, b_1]$. Repetindo esse processo, obtemos uma sequência de intervalos encaixantes

$$\underbrace{[a_0, b_0]}_{\text{comprimento } L} \supset \overbrace{\underbrace{[a_1, b_1]}_{\text{comprimento } \frac{L}{2}}}^{s_{i_1} \in} \supset \overbrace{\underbrace{[a_2, b_2]}_{\text{comprimento } \frac{L}{4}}}^{s_{i_2} \in} \supset \cdots$$

Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Se $j > i$, então $|a_i - a_j| \leq \frac{L}{2^i}$. Em um corpo **arquimediano**, temos que $\frac{L}{2^i} \to 0$ quando $i \to \infty$. Portanto, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma sequência de Cauchy e, consequentemente, converge. Denotemos o limite por s.

Finalmente, podemos concluir que s é o supremo de S. □

Exercícios

2.41 — Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

2.42 — Dizemos que uma sequência (s_n) é contrativa se existe uma constante k com $0 < k < 1$ tal que $|s_{n+2} - s_{n+1}| \leq k\,|s_{n+1} - s_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência contrativa é uma sequência de Cauchy e, portanto, é convergente.

* **2.43 —** Prove o Teorema 2.51.

** **2.44 —** O objetivo deste exercício é demonstrar que a afirmação:

toda sequência de Cauchy é convergente

não implica o Axioma da Completude.
Uma **série formal de Laurent** é uma expressão da forma

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n,$$

onde m é um inteiro não positivo e a_n é um número real para cada $n \in \mathbb{Z}$ com $n \geq m$, de modo que $a_m \neq 0$. Nessas condições, a_m é chamado de **coeficiente dominante** da série formal de Laurent.
Seja $\mathbb{R}(x)$ o conjunto de todas as séries formais de Laurent, incluindo a série nula 0, com operações de soma e produto definidas naturalmente pela manipulação usual de expressões algébricas com coeficientes reais e uma variável formal. Finalmente, dados $p, q \in \mathbb{R}(x)$, definimos $p \leq q$ se, e somente se, $p = q$ ou o coeficiente dominante de $q - p$ é um número real positivo.
Prove que:

a) $\mathbb{R}(x)$ é um corpo ordenado;
b) $\mathbb{R}(x)$ não é completo;
c) $\mathbb{R}(x)$ não satisfaz a Propriedade Arquimediana;
d) toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}(x)$ é convergente.

* **2.45 —** Um corpo satisfaz a **Propriedade dos Intervalos Encaixantes** se $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ for uma coleção de intervalos fechados e limitados encaixantes, ou seja, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \varnothing$. Prove que para corpo ordenado a Propriedade de Completude é equivalente a Propriedade dos Intervalos Encaixantes

2.11 *Limite de funções e continuidade*

Limite de funções

Dada uma função real f, estamos interessados em saber o comportamento de $f(x)$ à medida que x se aproxima de um ponto x_0, sem que x assuma esse valor. Esse é o tema desta seção. Em muitos casos, $f(x)$ se aproxima de $f(x_0)$, o que ocorre para funções contínuas, uma classe que será abordada mais adiante.

Precisamos esclarecer o que significa "x se aproximar de x_0 sem, contudo, assumir esse valor". Para investigar o valor de $f(x)$, é necessário que x pertença ao domínio de f, mas, como x não assume o valor x_0, $f(x_0)$ pode não estar definido. Isso significa que x_0 não precisa pertencer ao domínio de f, mas é essencial que seja possível "se aproximar de x_0"a partir de pontos do domínio de f. Formalmente, se A é o domínio de f, a noção de limite de funções tem sentido se, e somente se, x_0 for ponto de acumulação de A. Isto ocorre quando $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$, ou seja, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\backslash\{x_0\}$ convergente para x_0.

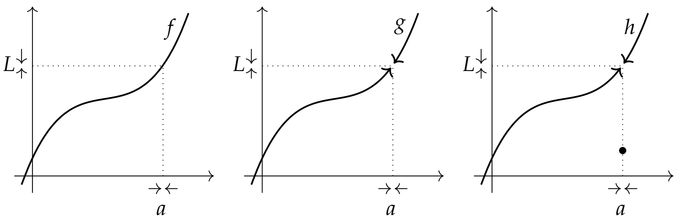
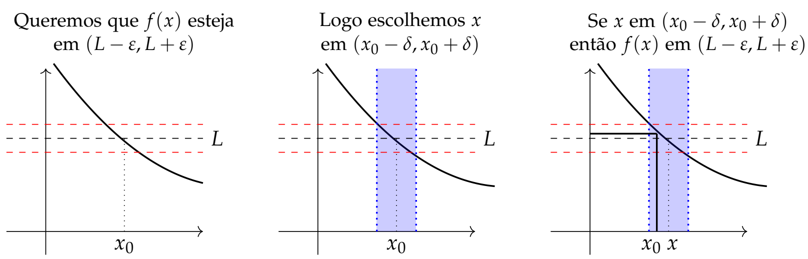


Figura 2.13: Os gráficos mostram três exemplos de funções para os quais os limites existem e são L. No primeiro caso, a função f está definida em a, e $f(a) = L$; na segunda, a função g não está definida em a; e na terceira, apesar de a função estar definida em a, temos que $h(a) \neq L$.

2.52 Definição *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acumulação de A. Dizemos que o **limite** de $f(x)$ quando x tende a x_0 é igual a $L \in \mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Nesse caso, escrevemos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.*



Importante: A consideração do limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 faz sentido somente quando x_0 é ponto de acumulação do domínio de f. Esta condição será assumida implicitamente daqui por diante.

Note que essa definição é análoga à de limite de sequências. A unicidade do limite também é válida aqui, e o leitor pode demonstrá-la como exercício.

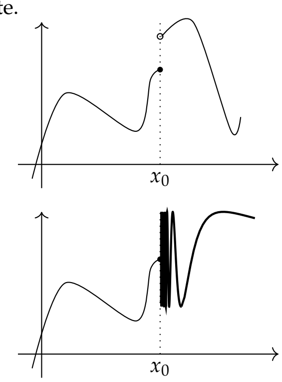


Figura 2.14: Exemplos de funções para as quais o limite não existe.

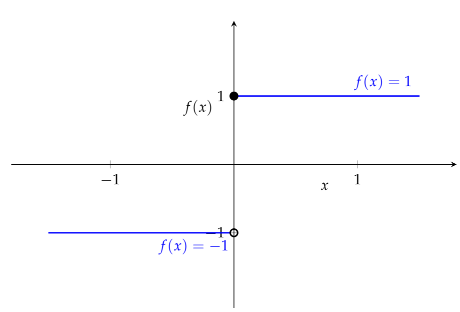
2.53 Exemplo *Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 0, \\ -1, & se\ x < 0. \end{cases}$$

O ponto 0 é um ponto de acumulação de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Suponha que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$ quando $0 < |x| < \delta$. Assim, temos

$$\begin{aligned} 2 = |1-(-1)| &= |f(\delta/2) - f(-\delta/2)| \\ &\leq |f(\delta/2) - L| + |f(-\delta/2) - L| < 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.



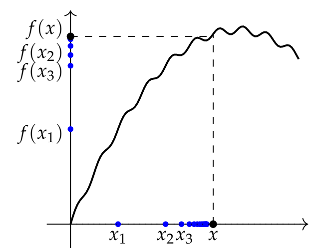
2.54 Exemplo *Seja $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ para todo $x \in (0,1]$. Note que 0 não está no domínio de f, mas é ponto de acumulação deste. Faz sentido perguntar se existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 0, e, caso exista, determinar seu valor.*

Mostraremos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. *Seja* $\varepsilon > 0$. *Para todo* $x \in (0,1]$, *temos*

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Assim, tomando qualquer $\delta > 0$, *temos que* $0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$. *Concluímos que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

2.55 Proposição (Limites por Sequências) *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* x_0 *um ponto de acumulação de* A. *Temos que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$ *para toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\backslash\{x_0\}$ *convergente para* x_0.



Demonstração. Suponha que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\backslash\{x_0\}$ e $x_n \to x_0$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $x_n \to x_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $|x_n - x_0| < \delta$. Logo, para $n \geq N$, temos $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, e, portanto, $f(x_n) \to L$.

Agora, suponha que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$ com $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = 1/n$, obtemos $x_n \in A$ tal que $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Assim, construímos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A\backslash\{x_0\}$ convergente para x_0, mas tal que $f(x_n)$ não converge para L, o que é um absurdo. Concluímos, portanto, que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. □

2.56 Proposição (Propriedades do Limite) *Sejam* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}$, *então:*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$;
2. $\lim_{x\to x_0} (cf(x)) = cL$;
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = L - M$;
4. $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = LM$;
5. *Se* $m \neq 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{m}$.

Demonstração. Deixamos para o leitor demonstrar essas propriedades a partir das correspondentes propriedades de limite de função. □

Funções contínuas

2.57 Definição *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$. *Dizemos que* f *é contínua em* x_0 *se, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $x \in A$, *se* $|x - x_0| < \delta$, *então* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Esta definição formaliza a ideia de que, quando x está suficientemente próximo de x_0, os valores de $f(x)$ também estarão próximos de $f(x_0)$.

Observamos que ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua no ponto a quando $a \in X$.

2.58 **Definição** *Dizemos que f é contínua em A se for contínua em todo ponto de A. Denotamos isso por $f \in C(A)$, ou seja, $f \in C(A)$ se, para todo $y \in A$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Alguns autores utilizam a notação $C^0(A)$ para designar o conjunto das funções contínuas em A, em vez de $C(A)$.

Se a é um ponto isolado de X, então toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a. Pois dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}$. Então $|x - a| < \delta$ com $x \in X$ implica $x = a$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.) Em particular, se todos os pontos de X são isolados, então qualquer função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.

2.59 **Proposição** *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação de X. Então $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Isso reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite nos pontos de acumulação.

Continuidade e Sequências

A seguir, enunciamos uma proposição que nos permite evitar o uso direto de ε e δ em muitas situações.

2.60 **Proposição** *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge para x_0, temos*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{2.36}$$

Essa proposição afirma que uma função é contínua se ela "comuta"com o símbolo de limite, isto é, f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right), \tag{2.37}$$

desde que a sequência (x_n) esteja contida no domínio de f e convirja para um ponto do domínio.

2.61 **Exemplo** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, tome uma sequência $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e outra $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ambas convergindo para x_0. Temos $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$ e $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 0$. Portanto, f é descontínua em qualquer ponto.

2.62 Proposição (Continuidade da função composta) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0. Assim, se f e g são contínuas, $g \circ f$ também é contínua.*

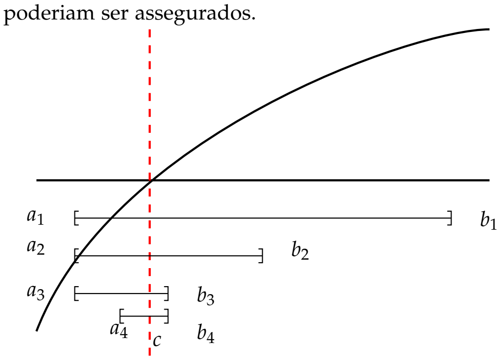
Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ uma sequência convergente para x_0. Como f é contínua, temos que $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. Como g é contínua em y_0, então $g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = g(y_0)$. Portanto, $g \circ f$ é contínua em x_0.

2.63 Teorema (do Valor Intermediário de Bolzano) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Se k é um número real tal que $f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$, então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

Dizemos que um corpo ordenado $\mathbb{K}$ satisfaz a **Propriedade do Valor Intermediário** se $f : [a, b] \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ é contínua com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, então $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Temos a seguinte equivalência: Um corpo $\mathbb{K}$ é completo se e somente se a Propriedade do Valor Intermediário é satisfeita.

Esse resultado justifica, ao menos em parte, a exigência de que um corpo seja completo para o desenvolvimento da Análise. A completude é fundamental porque permite a demonstração do Teorema do Valor Intermediário (e também do Teorema do Valor Médio), e o permitindo a existência de soluções para equações dentro de intervalos determinados. Sem essa propriedade, muitos dos resultados e teoremas centrais da Análise não poderiam ser assegurados.



Demonstração. Suponha $f(a) < f(b)$. O outro caso é similar Construiremos duas sequências (a_n) e (b_n)através do seguinte procedimento:

Se $m = \frac{a+b}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a, b]$, for tal que $f(m) \geqslant k$, então: $a_1 = a$ e $b_1 = m$. Caso contrário, $a_1 = m$ e $b_1 = b$. Então temos: $a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$ e $f(a_1) \leqslant k \leqslant f(b_1)$

O processo é então repetido: se $m = \frac{a_1+b_1}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$, for tal que $f(m) \geqslant k$, então: $a_2 = a_1$ e $b_2 = m$. Caso contrário, $a_2 = m$ e $b_2 = b_1$. Então temos: $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b$ e $f(a_2) \leqslant k \leqslant f(b_2)$ E assim por diante, construímos uma sequência de intervalos encaixantes:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

As sequências (a_n) e (b_n) são, respectivamente, crescente e decrescente. Além disso, por construção, o comprimento do intervalo $[a_n, b_n]$ é $\frac{b-a}{2^n}$. Portanto, os intervalos $[a_n, b_n]$ têm comprimentos que se tendem à 0 e as sequências (a_n) e (b_n) convergem, então, para o mesmo limite.

Seja $c \in [a, b]$ o seu limite comum. Vamos mostrar que $f(c) = k$.

Para qualquer inteiro $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$. Tomando o limite, obtemos: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant k \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ Como f é contínua em c, temos: $f(c) \leqslant k \leqslant f(c)$. Portanto: $f(c) = k$.

Concluímos que existe um número real c em $[a, b]$ tal que $f(c) = k$.□

2.12 *Sequências e a topologia da reta*

Conjuntos fechados também podem ser caracterizados em termos de sequências.

2.64 Proposição *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, o limite de toda sequência convergente em F pertence a F.*

Demonstração. Suponha primeiro que F é fechado e que (x_n) é uma sequência convergente de pontos $x_n \in F$ tal que $x_n \to x$. Então, toda vizinhança de x contém pontos $x_n \in F$. Isso implica que $x \notin F^c$, já que F^c é aberto e todo $y \in F^c$ possui uma vizinhança $V \subset F^c$ que não contém pontos em F. Portanto, $x \in F$.

Reciprocamente, suponha que o limite de toda sequência convergente de pontos em F pertença a F. Seja $x \in F^c$. Então, x deve ter uma vizinhança $V \subset F^c$; caso contrário, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F$ tal que $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$, de modo que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, e x seria o limite de uma sequência em F. Assim, F^c é aberto e F é fechado. □

A seguinte proposição fornece uma definição sequencial de um ponto de acumulação.

2.65 Proposição *Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em A com $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Suponha que $x \in \mathbb{R}$ seja um ponto de acumulação de A. Logo temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A \backslash \{x\}$ tal que $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$. Segue-se que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Reciprocamente, se x é o limite de uma sequência (x_n) em A com $x_n \neq x$, e V é uma vizinhança de x, então $x_n \in V \backslash \{x\}$ para n suficientemente grande, o que prova que x é um ponto de acumulação de A. □

2.66 Exemplo *Se*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

então 0 é um ponto de acumulação de A, pois $(1/n)$ é uma sequência em A tal que $1/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, 1 não é um ponto de acumulação de A, pois não existem sequências em A com termos distintos de 1 que convergem para 1. Todos os elementos de A diferentes de 1 são menores que $\frac{1}{2}$, e logo não se aproximam de 1.

Exercícios

2.46 — Prove que todo número real é limite de uma sequência de números racionais.

2.13 *Limite inferior e limite superior*

Se uma sequência é limitada, a divergência significa que ela pode oscilar em uma região limitada sem tender a um ponto específico em $\mathbb{R}$.

Às vezes, é útil entender essas oscilações conforme n tende ao infinito o que nos leva aos conceitos de Limite Superior e Limite Inferior.

Suponha que temos uma sequência real limitada (a_n). Como (a_n) é uma sequência limitada, seu supremo existe no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Além disso, isso implica que para qualquer subsequência de (a_n), seu supremo também existe. Assim, podemos definir uma nova sequência real (b_n) onde:

$$b_n = \sup_{m \geq n} a_m = \sup\{a_m : m \geq n\}.$$

É claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a_n \leq \sup_{m \geq n} a_m = b_n$. Como a sequência (a_n) é limitada inferiormente, a sequência (b_n) também é limitada inferiormente. Além disso, observamos que a sequência (b_n) é decrescente. De fato, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos a inclusão de conjuntos $\{a_m : m \geq n+1\} \subseteq \{a_m : m \geq n\}$, o que, pela Proposição 1.63, implica a desigualdade $b_{n+1} = \sup\{a_m : m \geq n+1\} \leq \sup\{a_m : m \geq n\} = b_n$.

Portanto, pelo Teorema de Bolzano, a sequência (b_n) converge e converge para o ínfimo do conjunto $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Em outras palavras, $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m\right)$ existe e é igual a

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m\right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} a_m\right).$$

Podemos repetir a construção substituindo o supremo pelo ínfimo e obter as seguintes definições:

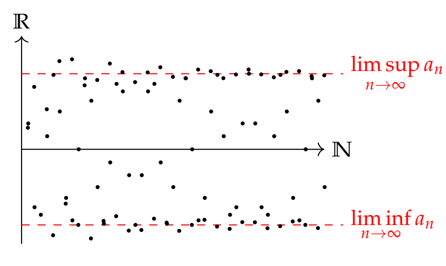


Figura 2.15: Limite superior e limite inferior de uma sequência (a_n) representada pelos pontos pretos. Conforme $n \to \infty$, $\sup_{m \geq n} a_m$ diminui e $\inf_{m \geq n} a_m$ aumenta. Eventualmente, eles convergem para $\limsup_{n\to\infty} a_n$ e $\liminf_{n\to\infty} a_n$, respectivamente.

2.67 Definição (Limite Superior e Limite Inferior) *Seja (a_n) uma sequência real limitada. Definimos o limite superior dessa sequência como:*

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m\right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{m \geq n} a_m\right).$$

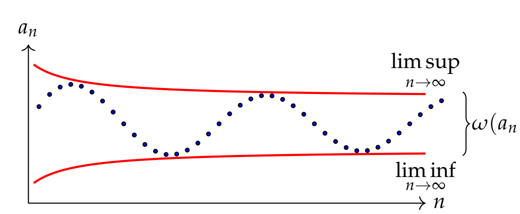
Analogamente, o limite inferior dessa sequência é definido como:

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{m \geq n} a_m\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{m \geq n} a_m\right).$$

2.68 Definição (Oscilação de uma sequência) *Seja (a_n) uma sequência limitada de números reais. A oscilação $\omega(a_n)$ dessa sequência é definida como a diferença entre o limite superior e o limite inferior de (a_n):*

$$\omega(a_n) = \limsup_{n \to \infty} a_n - \liminf_{n \to \infty} a_n.$$

Como veremos a oscilação é zero se, e somente se, a sequência converge.



2.69 Exemplos

1. *Para a sequência* $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ *temos que o limite inferior é -1 e o limite superior é 1.*
2. *Para a sequência* $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 2, \frac{3}{4}, 2, \frac{4}{5}, 2, \frac{5}{6}, 2, \frac{6}{7}, \ldots\right)$*. temos que o limite inferior é 1 e o limite superior é 2.*
3. *Para a sequência* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \ldots\right)$*. temos que o limite inferior é -1 e o limite superior é 1.*
4. *Para a sequência* $a_n = \operatorname{sen} n, n = 1, 2, 3, \ldots$ *temos que o limite inferior é -1 e o limite superior é 1.*

Os conceitos de limite superior e limite inferior são úteis para estudar o comportamento de qualquer sequência limitada, pois essas quantidades sempre existem, ao contrário do limite. Assim, em casos em que o limite de uma sequência não existe, o limite superior e o limite inferior podem ser usados como bons substitutos para analisar o comportamento da sequência quando n tende ao infinito.

2.70 Teorema *Seja* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais. Então* (a_n) *converge se, e somente se, ela é limitada e* $\liminf a_n = \limsup a_n$*.*

Demonstração. Prova da implicação $\Longrightarrow$. Suponha que (a_n) é limitada e que $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Seja $L := \limsup a_n = \liminf a_n$. Defina $M_n = \sup\{a_k\}_{k\geq n}$ e $m_n = \inf\{a_k\}_{k\geq n}$. Então, para todo n, temos

$$m_n \leq a_n \leq M_n.$$

Como (M_n) e (m_n) convergem para L, pelo Teorema do Confronto (a_n) também converge para L.

Prova da implicação $\Longleftarrow$. Suponha que (a_n) converge para L.

Seja $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, temos $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. De onde concluímos que a sequência (a_n) é limitada e que $L - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq L + \varepsilon$. Logo,

$$|\limsup a_n - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\liminf a_n - L| < \varepsilon.$$

Como isso é verdadeiro para todo $\varepsilon > 0$, concluímos que $\liminf a_n = L$ e que $\limsup a_n = L$. □

2.14 *Propriedades do limite superior e inferior*

Nessa seção apresentaremos algumas propriedades do Limite superior e inferior.

2.71 Proposição *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências reais limitadas.*

1. *Se $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \quad e \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

2. *Para a sequência (a_n), temos*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

3. *O limite superior é subaditivo, ou seja,*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

4. *O limite inferior é superaditivo, ou seja,*

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Demonstração.

1. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo e $j \geq n$, temos $a_j \leq b_j \leq \sup_{m\geq n} b_m$. Assim, $\sup_{m\geq n} b_m$ é um majorante para o conjunto $\{a_j : j \geq n\}$, o que implica que $\sup_{j\geq n} a_j \leq \sup_{m\geq n} b_m$. Tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando a Proposição 2.39, obtemos o resultado. A desigualdade para o limite inferior é deduzida de forma análoga.

2. Para a desigualdade intermediária, por definição, temos a ordenação $\inf_{m\geq n} a_m \leq \sup_{m\geq n} a_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \to \infty$ de ambos os lados , obtemos $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Para a primeira desigualdade observamos que o ínfimo de um conjunto é sempre menor ou igual ao ínfimo de qualquer um de seus subconjuntos. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $\inf_{j\in\mathbb{N}} a_j \leq \inf_{m\geq n} a_m$. Tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} a_j \leq \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} a_m\right) = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

A última desigualdade é demonstrada de maneira similar.

3. Primeiro, observamos que a sequência $(a_n + b_n)$ também é limitada, então seu limite superior existe. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo e $j \geq n$, temos $a_j + b_j \leq \sup_{m\geq n} a_m + \sup_{m\geq n} b_m$. Tomando o supremo para $j \geq n$, obtemos $\sup_{j\geq n}(a_j + b_j) \leq \sup_{m\geq n} a_m + \sup_{m\geq n} b_m$. Assim, tomando o limite quando $n \to \infty$ de ambos os lados da desigualdade chegamos à desigualdade desejada.

A prova para a última afirmação é similar à da terceira afirmação.□

2.72 Exemplo *Seja (a_n) a sequência real definida por $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Um gráfico dos primeiros termos desta sequência pode ser visto na Figura 2.16.*

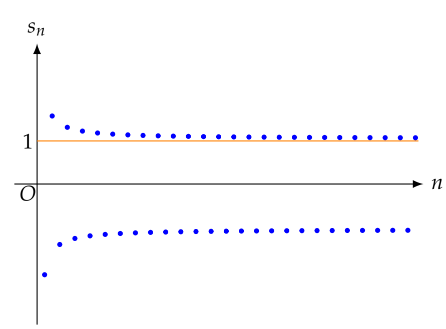


Figura 2.16: Gráfico da sequência definida por $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Esta sequência não converge, pois as subsequências (a_{2n}) e (a_{2n+1}) convergem para 1 e -1, respectivamente. No entanto, essa sequência é limitada, uma vez que $|a_n| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que garante a existência de seu limite superior e limite inferior. Vamos calcular esses valores.

Observe que todos os termos com índice par nesta sequência são positivos, enquanto os termos com índice ímpar são negativos. Logo, ao buscar o supremo, podemos ignorar os termos de índice ímpar, pois eles são claramente menores que qualquer um dos termos de índice par. Assim:

$$\sup_{m \geq n} a_m = \sup_{\substack{m \geq n \\ m \text{ par}}} a_m = \sup_{\substack{m \geq n \\ m \text{ par}}} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1 + \frac{1}{p(n)},$$

onde $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a função que associa a cada n o menor inteiro par maior ou igual a n. Conforme vimos no Exercício 3.1, essa função é dada por $p(n) = 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, sendo crescente e ilimitada. Assim, pelo que estabelece a Proposição 5.9.5, deduzimos que

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{p(n)}\right) = 1.$$

Usando um argumento similar, podemos mostrar que $\liminf_{n \to \infty} a_n = -1$.

Outra interpretação para o limite superior e o limite inferior é a seguinte:

2.73 **Proposição** *Seja (a_n) uma sequência real limitada. Então:*

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n > r \textit{ para infinitos valores de } n\},$$
$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \inf\{r \in \mathbb{R} : a_n < r \textit{ para infinitos valores de } n\}.$$

Demonstração. Vamos provar apenas a primeira igualdade. Denote o conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} : a_n > r \text{ para infinitos valores de } n\} \subseteq \mathbb{R}$.

1. Primeiro, mostramos que $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n \geq \sup(A)$. Escolha qualquer $x \in A$. Pela definição do conjunto A, existem infinitos índices $n \in \mathbb{N}$ para os quais $a_n > x$. Isso significa que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixo, existe um índice $j \geq n$ tal que $a_j > x$. Assim, temos que $\sup_{m \geq n} a_m > x$. Tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n \geq x$. Como $x \in A$ é arbitrário, isso implica que o conjunto A é limitado superiormente por $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$, de modo que temos a desigualdade $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n \geq \sup(A)$.
2. Para mostrar a desigualdade oposta, vamos provar que $\limsup\limits_{p \to \infty} a_p - \varepsilon \in A$ para todo $\varepsilon > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, para satisfazer as condições

sobre o conjunto A, precisamos encontrar uma quantidade infinita de termos a_n que seja maior que $\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon$.

Observe que para $\sup_{m\geq n} a_m$ com $n = 1$, pela caracterização do supremo, podemos encontrar um índice $k_1 \geq 1$ tal que $\sup_{m\geq 1} a_m - \varepsilon < a_{k_1} \leq \sup_{m\geq 1} a_m$. Isso implica que:

$$\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon = \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq p} a_m - \varepsilon \leq \sup_{m\geq 1} a_m - \varepsilon < a_{k_1}.$$

Encontramos nosso primeiro termo na sequência que é maior que $\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon$. Para o segundo termo, considerando $\sup_{m\geq k_1+1} a_m$, pela caracterização do supremo, podemos encontrar um índice $k_2 \geq k_1 + 1$ tal que $\sup_{m\geq k_1+1} a_m - \varepsilon < a_{k_2} \leq \sup_{m\geq k_1+1} a_m$. Isso implica que:

$$\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon = \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq p} a_m - \varepsilon \leq \sup_{m\geq k_1+1} a_m - \varepsilon < a_{k_2}.$$

Indutivamente, para cada $j \in \mathbb{N}$, usando $n = k_j + 1$ no argumento acima, podemos encontrar um índice $k_{j+1} \geq k_j + 1$ tal que $\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon < a_{k_{j+1}}$. Portanto, há infinitos termos de (a_n) que são maiores que $\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon$.

Assim, pela definição, $\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon \in A$. Isso significa que $\limsup_{p\to\infty} a_p - \varepsilon \leq \sup(A)$ para todo $\varepsilon > 0$. Usando o Exercício 4.8, concluímos que $\limsup_{p\to\infty} a_p \leq \sup(A)$.

Juntando as duas desigualdades, obtemos a igualdade desejada. □

2.74 Proposição *Seja (a_n) uma sequência real limitada. Então:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{r \in \mathbb{R} : a_n > r \textit{ para apenas um número finito de } n\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n < r \textit{ para apenas um número finito de } n\}.$$

Exercícios

2.47 — Sejam (s_n) e (t_n) sequências limitadas.

a) Prove que $\limsup\,(s_n + t_n) \leq \limsup s_n + \limsup t_n$.
b) Encontre um exemplo para mostrar que a igualdade pode não ocorrer no item anterior.

2.48 — Sejam (s_n) e (t_n) sequências limitadas.

a) Prove que $\liminf s_n + \liminf t_n \leq \liminf\,(s_n + t_n)$.

b) Encontre um exemplo para mostrar que a igualdade pode não ocorrer no item anterior.

2.49 — Prove que $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

2.50 — Prove que, se $\limsup s_n = +\infty$ e $k > 0$, então $\limsup (ks_n) = +\infty$.

2.51 — Prove que toda sequência possui uma subsequência monótona.

3
Construção dos reais

Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Como já vimos a principal limitação de $\mathbb{Q}$ é que ele não é completo. Neste capítulo apresentamos a construção dos números reais a partir dos racionais utilizando sequências de Cauchy.

Sabemos as propriedades que os números reais devem satisfazer: são os axiomas de corpos ordenados completos. Em particular, pelo Exercício 2.46 sabemos que qualquer número real pode ser visto como o limite de uma sequência de números racionais. Esse fato sugere que podemos definir os números reais como limites de sequências convergentes de números racionais. No entanto, a definição de sequência convergente depende explicitamente do ponto limite. Definimos a convergência para um valor L, e não a convergência em si. Para contornar essa dificuldade, baseamos nossa construção em sequências de Cauchy de números racionais, em vez de sequências convergentes. Sequências de Cauchy são definidas exclusivamente em termos de números racionais e coincidem com o conjunto de sequências que consideramos como convergentes para um limite em $\mathbb{R}$.

Por exemplo, para ilustrar a construção, estamos acostumados a pensar nos números reais como aproximações sucessivas. Por exemplo, escrevemos

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

para indicar que π é um número real que, com precisão de 5 casas decimais, coincide com o valor acima. No entanto, isso não nos diz o que π realmente é. Se quisermos uma aproximação mais precisa, podemos calcular π com mais casas decimais e ao continuar esse processo, obtemos uma sequência de aproximações racionais de π. Um exemplo de tal sequência é:

$$3, 3{,}1, 3{,}14, 3{,}142, 3{,}1416, 3{,}14159, \ldots$$

No entanto, essa não é a única sequência de números racionais que se aproxima de π(na verdade, está longe de ser a única!). Por exemplo, aqui está outra sequência:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}, \frac{1043835}{332263}, \ldots$$

A observação anterior é fundamental e nos mostra que devemos ser cuidadosos, pois sequências muito diferentes de números racionais podem aproximar o mesmo número real. Para lidar com essa ambiguidade, definiremos números reais como conjuntos de sequências racionais de aproximação, todas com o mesmo comportamento assintótico.

De modo mais preciso seja $\mathcal{C}$ a classe de todas as sequências de Cauchy de números racionais.Introduzimos uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$, considerando equivalentes duas sequências de Cauchy se a sequência das suas diferenças convergir para zero. Observe que a convergência para zero pode ser definida exclusivamente em termos de números racionais. Assim, os números reais serão definidos como classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Veremos que as operações aritméticas usuais e a relação de ordem podem ser facilmente definidas para essas classes de equivalência, e que o sistema resultante é completo.

Para formalizar essas ideias, a próxima seção contém definições precisas e alguns teoremas necessários para estabelecer a construção matemática rigorosa de $\widetilde{\mathbb{R}}$ (como foi concebida por Bolzano e Cauchy no início do século XIX).

3.1 *Construção via sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$*

Nos racionais podemos definir o que significa uma sequência tender a 0. De maneira simples, dizemos que uma sequência tende a 0 se sua cauda se torna (e permanece) arbitrariamente pequena. Isso significa que, dado um número racional positivo ε, eventualmente, os termos da sequência são todos menores que ε em valor absoluto.

3.1 Definição (Sequências nulas de números racionais) *Uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é chamada de **sequência nula** de números racionais se, para todo número racional $\varepsilon > 0$, existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \varepsilon$ para todos $n \geq N$. Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de todas as sequências nulas de números racionais.*

Exemplos típicos de sequências nulas são as sequências de termos $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{n}{n^2+1}$ e $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Embora, evidentemente, haja inúmeras outras.

Podemos também definir o que significa uma sequência tender a qualquer número racional q: dizemos que (a_n) tende a q se a sequência $(a_n - q)$ tende a 0. Por exemplo, a sequência cujos termos são dados por $a_n = \frac{n}{n+1}$ tende a 1, uma vez que $a_n - 1 = -\frac{1}{n+1}$ tende a 0.

Voltando ao exemplo de uma sequência de aproximações racionais a π, tal como

$$3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}142,\ 3{,}1416,\ 3{,}14159, \ldots$$

Essa sequência não converge para nenhum número racional. No entanto, seus termos estão cada vez mais próximos entre si, caracterizando-a como uma sequência de Cauchy cujos termos são todos racionais. Conforme já destacamos, basearemos nossa construção nesse tipo de sequência, em vez de sequências convergentes.

3.2 **Definição (Sequências de Cauchy de números racionais)** *Uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ é chamada de **sequência de Cauchy de números racionais** se, para todo número racional $\varepsilon > 0$, existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$. Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais.*

Toda sequência nula de números racionais é também uma sequência de Cauchy de números racionais. Logo, $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$.

Temos as seguintes propriedades das sequências de Cauchy de números racionais.

3.3 **Proposição** *Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ e $y : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ duas sequências.*

1. *Se $x, y \in \mathcal{C}$, então $(x + y) \in \mathcal{C}$ e $(xy) \in \mathcal{C}$.*
2. *Se $x, y \in \mathcal{N}$, então $(x + y) \in \mathcal{N}$ e $(xy) \in \mathcal{N}$.*
3. *Se $x \in \mathcal{N}$ e $y \in \mathcal{C}$, então $(xy) \in \mathcal{N}$.*

A demonstração da Proposição 3.3 será deixada como exercício ao leitor.

Estamos quase prontos para discutir a construção de Cauchy do sistema de números reais. Definiremos um número real a partir de uma sequência de Cauchy de números racionais. No entanto, como já discutido, precisamos lidar com a ambiguidade apresentada por diferentes sequências que convergem para o mesmo número. Portanto, precisaremos agrupar sequências de Cauchy em conjuntos, todos os quais possuem o mesmo comportamento assintótico, e definiremos um número real como tal conjunto de sequências de Cauchy. Para esse fim definiremos uma relação de equivalência nas sequências de Cauchy de números racionais.

3.4 **Definição** *Definimos uma relação em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ da seguinte maneira: se $x, y \in \mathcal{C}$, então x está relacionado com y se, e somente se, $(x - y) \in \mathcal{N}$ (ou seja, a sequência de diferenças é uma sequência nula).*

É fácil verificar que esta é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{C}$, o que faremos agora.

3.5 **Proposição** *A Definição 3.4 estabelece uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

- **Reflexiva:** $x_n - x_n = 0$, e a sequência cujos termos são todos zero claramente converge para 0. Portanto, (x_n) está relacionada a (x_n).
- **Simétrica:** Suponha que (x_n) esteja relacionada a (y_n), ou seja, $x_n - y_n \to 0$. Mas $y_n - x_n = -(x_n - y_n)$, e como apenas o valor absoluto $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ é relevante na Definição 2.2, segue-se que $y_n - x_n \to 0$ também. Assim, (y_n) está relacionada a (x_n).
- **Transitiva:** Suponha que (x_n) esteja relacionada a (y_n) e (y_n) esteja relacionada a (z_n). Isso significa que $x_n - y_n \to 0$ e $y_n - z_n \to 0$. Para sermos totalmente precisos, vamos fixar um pequeno $\varepsilon > 0$; então existe um N tal que para todo $n > N$, $|x_n - y_n| < \varepsilon/2$; também existe um M tal que para todo $n > M$, $|y_n - z_n| < \varepsilon/2$. Bem, então, contanto que n seja maior que ambos N e M, temos que

$$\begin{aligned} |x_n - z_n| &= |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \le |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

  Portanto, escolhendo L como o máximo entre N e M, vemos que dado $\varepsilon > 0$, podemos sempre escolher L tal que, para $n > L$, $|x_n - z_n| < \varepsilon$. Isso significa que $x_n - z_n \to 0$, ou seja, (x_n) está relacionada a (z_n). □

  Assim, de fato temos uma relação de equivalência.

Denotamos essa relação como $x \sim y$. Observe que, se $p, q \in \mathbb{Q}$, então $\overline{p} \sim \overline{q}$ se, e somente se, $p = q$, usando as notações da Definição 3.7

A classe de equivalência representada por $x \in \mathcal{C}$ é o conjunto

$$[x] = \{x' \in \mathcal{C} \mid x' \sim x\} \subset \mathcal{C}$$

Duas classes de equivalência são ou idênticas ou disjuntas. De fato, se $x \sim y$, então $[x] = [y]$, e se $x \not\sim y$, então $[x] \cap [y] = \emptyset$. A união de todas as classes de equivalência é $\mathcal{C}$.

Cada classe de equivalência também é chamada de **número real** e assim $[x]$ é o número real representado pela sequência x. O mesmo número real pode ser representado por qualquer sequência em $[x]$, isto é, por qualquer sequência $x' \sim x$.

3.6 Definição (Números reais) *Seja $\widetilde{\mathbb{R}}$ o conjunto de todas as classes de equivalência. Esse conjunto é chamado de **conjunto dos números reais**.*

Os números reais que conhecemos possuem uma estrutura complexa, conforme delineado pelos axiomas de corpo, axiomas de ordem e pela propriedade do supremo. Assim, é necessário um esforço adicional para reconhecer essas classes de equivalência como números reais. Para começar, estamos acostumados a considerar $\mathbb{Q}$ como um subconjunto de $\widetilde{\mathbb{R}}$, o que faremos a seguir.

3.7 Definição (Sequências constantes de números racionais) *Cada número racional $q \in \mathbb{Q}$ define uma sequência constante $\overline{q} : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, onde definimos $\overline{q}_n = q$ para todos $n \in \mathbb{N}$.* [1]

[1] Ou seja a sequência $(q, q, q, q, \ldots)$

Dessa forma, podemos considerar $\mathbb{Q}$ como parte de $\widetilde{\mathbb{R}}$ ao pensar em cada número racional q como sua classe de equivalência associada $\overline{q}$, ou seja, $[\overline{q}]$. É comum simplificar essa notação e referir-se à classe de equivalência apenas como q. Formalizaremos essa ideia na Definição 3.15 e no Teorema 3.16. Observe ainda que $\overline{q} \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $q = 0$.

3.8 Exemplo *Para representar o número real 2 na construção dos números reais via sequências de Cauchy de números racionais, consideramos a classe de equivalência de todas as sequências de Cauchy que convergem para 2, ou seja, $[\overline{2}]$. Alguns exemplos de sequências nesta classe são:*

1. ***Sequência constante:***

$$a_n = 2, \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Esta é uma sequência trivial que, obviamente, converge para 2.

2. ***Sequência racional aproximando 2:***

$$a_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Esta sequência é estritamente crescente e converge para 2 quando $n \to \infty$.

3. ***Sequência alternada convergindo para 2:***

$$a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Apesar de alternar acima e abaixo de 2, esta sequência também converge para 2.
Cada sequência na classe $[\overline{2}]$ é dito um representante dessa classe.

Axiomas de Corpo e Ordem Queremos que $\widetilde{\mathbb{R}}$ seja um corpo ordenado e para tanto definimos os números reais positivos.

3.9 Definição (Números reais positivos) *Chamamos uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ de **sequência eventualmente positiva** se existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todos $n \geq N$. Chamamos um número real $[x] \in \widetilde{\mathbb{R}}$ de número real positivo se toda sequência $y \in [x]$ for eventualmente positiva. Seja $P_{\widetilde{\mathbb{R}}} \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ o conjunto de todos os números reais positivos.*

No Teorema 3.17 mostraremos que os axiomas de ordem são satisfeitos em $\widetilde{\mathbb{R}}$ com essa definição de positividade. Antes disso precisamos das seguintes proposições

3.10 **Proposição** *Seja $x \in \mathcal{C}$. Suponha que, para todo número racional $\varepsilon > 0$ e para todo $N \in \mathbb{N}$, exista um $n \geq N$ tal que $|x_n| \leq \varepsilon$. Então, $x \in \mathcal{N}$.*

Demonstração. Dado um racional $\varepsilon > 0$, encontre um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| \leq \varepsilon/2$ para todos $m, n \geq N$. Isso pode ser feito, já que $x \in \mathcal{C}$. Por hipótese podemos encontrar um $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$ e $|x_m| \leq \varepsilon/2$. Seja $n \geq N$. Então:

$$|x_n| = |x_m + (x_n - x_m)| \leq |x_m| + |x_n - x_m| \leq (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2) = \varepsilon$$

Portanto, $x \in \mathcal{N}$. □

3.11 **Proposição** *Seja $x \in \mathcal{C}$ e $x \notin \mathcal{N}$. Então, existe um número $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, tal que as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

1. *Existe um $M \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m| > \varepsilon$ para todos $m \geq M$.*
2. *Existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que ou $x_n > \varepsilon$ para todos $n \geq N$, ou $-x_n > \varepsilon$ para todos $n \geq N$.*
3. *Seja $y \sim x$. Então, existe um $K \in \mathbb{N}$ tal que x_k e y_k sejam ambas não nulos e tenham o mesmo sinal para todos $k \geq K$.*

Demonstração. Como $x \notin \mathcal{N}$, a hipótese da Proposição 3.10 não pode ser verdadeira. Assim, existe um número racional $\varepsilon > 0$ e um $M \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m| > \varepsilon$ para todos $m \geq M$. Isso prova a primeira parte.

Agora, encontre um $N \geq M$, $N \in \mathbb{N}$, tal que $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$. Isso pode ser feito, pois x é uma sequência de Cauchy. Se x_m e x_n tiverem sinais opostos, então $|x_n - x_m| > 2\varepsilon$, o que violaria a condição de que $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$. Portanto, ou $x_n > \varepsilon$ para todos $n \geq N$, ou $x_n < -\varepsilon$ para todos $n \geq N$. Isso prova a segunda parte.

Seja $y \sim x$. Então, $(x - y) \in \mathcal{N}$. Encontre um $K \geq N$ tal que $|y_k - x_k| < \varepsilon/2$ para todos $k \geq K$. Então, $-a/2 \leq y_k - x_k \leq \varepsilon/2$, o que mostra que $x_k - \varepsilon/2 \leq y_k \leq x_k + \varepsilon/2$ para todos $k \geq K$. Isso prova a última parte. □

Agora vamos entender a estrutura algébrica de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Antes de verificarmos os axiomas de corpo, precisamos definir o que significa somar duas classes de equivalência de sequências de Cauchy, como multiplicá-las e o que classes representam os elementos neutros da adição e multiplicacão.

3.12 **Definição (Operações sobre os números reais)** *Definiremos as operações de adição e multiplicação $\widetilde{\mathbb{R}} \times \widetilde{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Sejam $[x], [y] \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Assim, $[x]$ e $[y]$ são dois números reais e também duas classes de equivalência representadas* *pelas sequências x e y. Suas soma $[x]+[y]$ e produto $[x]\cdot[y]$ são definidos como*

$$[x]+[y] \triangleq [x+y] \quad e \quad [x]\cdot[y] \triangleq [xy]$$

Essas definições são intuitivas, pois se baseiam no fato de que o limite da soma de duas sequências é igual à soma dos limites, e o mesmo vale para os produtos. O Teorema 3.14 apresentado a seguir demonstra que, com essas operações, os axiomas de corpo são satisfeitos em $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Antes de prosseguir, é essencial verificar que essas operações estão bem definidas. Se $[x]=[x']$ e $[y]=[y']$, é necessário que $[x+y]=[x']+[y']$ e $[xy]=[x']\cdot[y']$, pois, caso contrário, as definições acima perderiam sentido. A justificativa para essa consistência é dada pela Proposição 3.13 a seguir.

3.13 **Proposição** *As operações de soma e multiplicação de números reais estão bem definidas. Isto é, sejam $x, x', y, y' \in \mathcal{C}$. Se $x \sim x'$ e $y \sim y'$, então $(x+y)\sim(x'+y')$ e $(xy)\sim(x'y')$.*

Demonstração. Suponha que $x' = x+p$ e $y' = y+q$, com $p, q \in \mathcal{N}$. Então:

$$(x'+y')-(x+y) = p+q \in \mathcal{N}.$$

Assim, $(x+y)\sim(x'+y')$. Além disso:

$$(x'y')-(xy) = (py)+(xq)+(pq) \in \mathcal{N}.$$

Portanto, $(xy)\sim(x'y')$. □

3.14 **Teorema (Corpo)** *Seja $\widetilde{\mathbb{R}}$ o conjunto de todas as classes de equivalência em $\mathcal{C}$. Sejam as operações de adição e multiplicação $\widetilde{\mathbb{R}}\times\widetilde{\mathbb{R}}\to\widetilde{\mathbb{R}}$ definidas por:*

$$[x]+[y] = [x+y] \quad e \quad [x]\cdot[y] = [xy]\,.$$

Então, $\widetilde{\mathbb{R}}$ munido dessas operações satisfaz os axiomas de corpo.

Demonstração. Sejam $\overline{0}$ e $\overline{1}$ as sequências constantes compostas por todos os valores 0 e todos os valores 1, respectivamente. Observamos que $\left[\overline{0}\right]=\mathcal{N}$, e notamos que $\left[\overline{0}\right]$ é o elemento neutro da adição em $\widetilde{\mathbb{R}}$, enquanto $\left[\overline{1}\right]$ é o elemento neutro da multiplicação em $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Para demonstrar a existência do inverso multiplicativo, consideremos $[x]\neq\left[\overline{0}\right]$. Mostraremos que existe um $y\in\mathcal{C}$ tal que $[x]\,[y]=\left[\overline{1}\right]$. Como sabemos que $x\in\mathcal{C}$ e $x\notin\mathcal{N}$, a primeira parte da Proposição 3.11 nos garante a existência de um número racional $a>0$ e um $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n|>a$ para todo $n\geq N$. Definimos a sequência $y:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ como $y_n=0$ se $n<N$ e $y_n=1/x_n$ se $n\geq N$. Afirmamos que $y\in\mathcal{C}$ e que $[x]\,[y]=\left[\overline{1}\right]$.

Para $m, n \geq N$, temos:

$$|y_n - y_m| = |(1/x_n) - (1/x_m)| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n x_m|} \leq \frac{1}{a^2} |x_n - x_m| .$$

Seja $b > 0$ um número racional. Então, existe um $M \geq N$, com $M \in \mathbb{N}$, tal que $|x_n - x_m| \leq a^2 b$ para todos $m, n \geq M$. Assim, concluímos que $|y_n - y_m| \leq b$ para todo $m, n \geq M$, garantindo que $y \in \mathcal{C}$. Vemos que $x_n y_n = 1$ para todo $n \geq N$, resultando em $(x_n y_n - 1) = 0$ para todo $n \geq N$. Portanto, temos que $(xy - 1) \sim 0$, ou seja, $xy \sim 1$. Assim, concluímos que $[x][y] = [\overline{1}]$.

A verificação dos outros axiomas é bastante rotineira. Como exemplo, verificaremos apenas a distributividade. A adição e a multiplicação em $\mathcal{C}$ satisfazem a propriedade distributiva. De fato, se $a, b, c \in \mathcal{C}$, temos:

$$\begin{aligned}(a(b+c))_n &= a_n(b+c)_n = a_n b_n + a_n c_n \\ &= (ab)_n + (ac)_n = ((ab) + (ac))_n.\end{aligned}$$

Agora, seja $[a], [b], [c] \in \widetilde{\mathbb{R}}$ com $a, b, c \in \mathcal{C}$. Então, obtemos:

$$\begin{aligned}[a]([b] + [c]) &= [a][b + c] = [a(b+c)] \\ &= [(ab) + (ac)] = [ab] + [ac] \\ &= [a][b] + [a][c] .\end{aligned}$$

□

Portanto, o axioma da distributividade é satisfeito.

3.15 Definição (Mergulho Canônico de $\mathbb{Q}$ em $\widetilde{\mathbb{R}}$) *Seja $\varphi : \mathbb{Q} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ a função definida como $\varphi(p) = [\overline{p}]$. Aqui, $\overline{p} \in \mathcal{C}$ é a sequência constante com todos os termos iguais a $p \in \mathbb{Q}$. Chamaremos $\varphi : \mathbb{Q} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ de mergulho canônico de $\mathbb{Q}$ em $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

3.16 Teorema *O mergulho canônico de $\mathbb{Q}$ em $\widetilde{\mathbb{R}}$ é uma função injetora $\varphi : \mathbb{Q} \to \widetilde{\mathbb{R}}$. Ela preserva a adição e a multiplicação no sentido de que:*

$$\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q) \quad e \quad \varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q) \quad \textit{para todos } p, q \in \mathbb{Q}.$$

Demonstração. Se $[\overline{p}] = [\overline{q}]$, então $\overline{p} \sim \overline{q}$ e $(\overline{p} - \overline{q})$ é uma sequência de zeros. Mas uma sequência constante é uma sequência nula apenas se o termo constante for zero. Portanto, $[\overline{p}] = [\overline{q}]$ em $\widetilde{\mathbb{R}}$ apenas se $p = q$ em $\mathbb{Q}$. Isso mostra que $\varphi : \mathbb{Q} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ é injetora. Para a segunda parte:

$$\varphi(p+q) = [\overline{p+q}] = [\overline{p} + \overline{q}] = [\overline{p}] + [\overline{q}] = \varphi(p) + \varphi(q)$$

A terceira igualdade segue da definição de adição em $\widetilde{\mathbb{R}}$. A prova de que $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$ é semelhante. □

Identificação de $\mathbb{Q}$ com $\varphi(\mathbb{Q})$. Ignoramos as diferenças entre $p \in \mathbb{Q}$, $\overline{p} \in \mathcal{C}$ e $\varphi(p) = [\overline{p}] \in \widetilde{\mathbb{R}}$. O significado será claro a partir do contexto. Assim, consideramos $\mathbb{Q}$ como um subconjunto de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Também denotamos os números reais com letras simples, como é costume.

3.17 **Teorema (Corpo Ordenado)** *Seja $\widetilde{\mathbb{R}}$ o conjunto de números reais com as operações aritméticas definidas na Definição 3.12. Seja $P_{\widetilde{\mathbb{R}}}$ o conjunto de todos os números reais positivos, conforme definido na Definição 3.9. Então, os axiomas de ordem são satisfeitos em $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\left[\overline{0}\right] = -\left[\overline{0}\right]$ não é positivo. Por exemplo, a sequência $x_n = (-1)^n(1/n)$ é uma sequência nula que não é eventualmente positiva. Agora, seja $[x] \neq \left[\overline{0}\right]$. Mostraremos que ou $[x]$ ou $-[x]$ é positivo.

Temos que $x \notin \mathcal{N}$. Assim, a segunda parte da Proposição 3.11 mostra que ou x ou $-x$ é eventualmente positivo. Suponha que x seja eventualmente positivo. Então, a última parte da Proposição 3.11 mostra que, se $y \sim x$, isto é, se $y \in [x]$, então y também é eventualmente positivo. Portanto, $[x]$ é um número real positivo. De forma semelhante, se $-x$ for eventualmente positivo e se $y \sim x$, então $-y$ também é eventualmente positivo. Nesse caso, $-[x] = [-x]$ é um número real positivo. Isso prova a primeira parte dos axiomas de ordem.

Para a segunda parte, suponha que $[x]$ e $[y]$ sejam ambos positivos. Então, existem $a, b > 0$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, e um $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ e $y_n > b$ para todos $n \geq N$. Portanto, $x_n + y_n > a + b > 0$ e $x_n y_n > ab > 0$ para todos $n \geq N$. Assim, $[x] + [y]$ e $[x]\,[y]$ são ambos números positivos e diferentes de zero. □

3.2 *Completude*

E passaremos agora a demonstrar a completude de $\widetilde{\mathbb{R}}$.

3.18 **Proposição** *Seja x um representante de $r \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Suponha que exista um $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq x_n$. Então $0 \leq r$.*

Demonstração. Qualquer número real deve satisfazer exatamente uma das seguintes condições: $r = 0$, $r \in P$, ou $-r \in P$. Nossa hipótese descarta a última condição. De fato, essa condição significa que todos os representantes de $-r$ devem ser eventualmente positivos. Mas $-r$ tem pelo menos um representante $-x$ que não é eventualmente positivo. Assim, $-r \notin P$. Portanto, ou $r = 0$ ou $r \in P$. □

3.19 **Proposição** *Seja $r > 0$, com $r \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Então existe um $p \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < p < r$.*

Demonstração. Seja x uma sequência representante de r. Assim, x é eventualmente positiva, já que $r > 0$. A Proposição 3.11 mostra que existe um $a > 0$, com $a \in \mathbb{Q}$, e um $N \in \mathbb{N}$ tal que, ou $x_n > a$ para todo $n \geq N$, ou $x_n < -a$ para todo $n \geq N$. O segundo caso não pode ser verdadeiro, pois x deve ser eventualmente positiva. Logo, $x_n > a$ para todo $n \geq N$. Pela Proposição 3.18, $0 < a \leq r$. Defina $p = a/2$. Assim, $0 < (a/2) < a \leq r$ mostra que $0 < p < r$. □

3.20 **Proposição** *Sejam $r, s \in \widetilde{\mathbb{R}}$ e $r < s$. Então existe um $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r < q < s$.*

Demonstração. Temos $0 < (s - r)$. Use da Proposição 3.19 para encontrar $p \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < p < (s - r)$. Sejam x e y sequências representantes de r e s. Então $0 < (s - r) - p$ mostra que a sequência $(y_n - x_n - p)$ é eventualmente positiva. Encontre $M \in \mathbb{N}$ tal que $y_m > x_m + p$ para todo $m \geq M$. Como x é uma sequência de Cauchy, existe um $N \geq M$, $N \in \mathbb{N}$, tal que $|x_N - x_n| \leq p/4$ para todo $n \geq N$.

Defina $q_1 = x_N + (p/4)$ e $q_2 = x_N + (3p/4)$. Se $n \geq N$, então:

$$q_1 - x_n = (p/4) + (x_N - x_n) \geq (p/4) + |x_N - x_n| \geq 0$$

mostra que $r \leq q_1$, e

$$q_2 = x_N + (3p/4) = x_n + (x_N - x_n) + (3p/4) \leq x_n + p \leq y_n$$

mostra que $q_2 \leq s$. Se $q = (q_1 + q_2)/2 = x_N + (p/2)$, então $r < q < s$. □

Um número real $M \in \widetilde{\mathbb{R}}$ é considerado um limite superior para um conjunto $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ se $a \leq M$ para todos os elementos $a \in A$. É importante notar que, se A possui um limite superior $M \in \widetilde{\mathbb{R}}$, então também possui um limite superior $M' \in \mathbb{Q}$. Essa conclusão segue da Proposição 3.20 ou do fato de que qualquer sequência de Cauchy de números racionais é limitada por um número racional.

3.21 **Proposição** *Seja A um conjunto não vazio de números reais que possui um limite superior. Então, existe um $p \in \mathbb{Q}$ tal que p não é um limite superior para A, mas $p + 1$ é um limite superior para A.*

Demonstração. Seja $a \in A$. Então, $r = (a - 1)$ não é um limite superior para A. Escolha $s < r$ tal que $s \in \mathbb{Q}$. Assim, s não é um limite superior para A. A sequência $s_n = s + n$ é não limitada, o que significa que existe $n \in \mathbb{N}$ para o qual $s + n$ serve como um limite superior para A. Pelo princípio da indução, podemos encontrar o menor $m \in \mathbb{N}$ tal que $q = s + m$ é um limite superior. Assim, $p = q - 1 = s + (m - 1)$ não é um limite superior para A. (Isso é claramente válido se $m \geq 2$, mas continua sendo verdade mesmo se $m = 1$.) □

3.22 **Proposição** *Seja A um conjunto não vazio de números reais que possui um limite superior. Então, existem duas sequências de números racionais p_n e q_n tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, p_n não é um limite superior para A, q_n é um limite superior para A, e $(q_n - p_n) = (1/2)^{n-1}$.*

Demonstração. Sejam p e q os dois números obtidos da Proposição 3.21 Defina $p_1 = p$ e $q_1 = q$. Nossas condições se satisfazem para $n = 1$. Suponha que p_n e q_n tenham sido definidos de forma que p_n não é um limite superior, q_n é um limite superior, e $(q_n - p_n) = (1/2)^{n-1}$.

Defina $s_n = \frac{p_n+q_n}{2}$. Se s_n não é um limite superior, defina $p_{n+1} = s_n$ e $q_{n+1} = q_n$. Se s_n é um limite superior, então defina $p_{n+1} = p_n$ e $q_{n+1} = s_n$. Assim, nossas condições também se satisfazem para $n + 1$. Portanto, as sequências p_n e q_n são definidas por indução.

3.23 Proposição *As sequências p_n e q_n obtidas da Proposição 3.22 são sequências de Cauchy equivalentes.*

Demonstração. Observamos que as sequências (p_n) e (q_n) são monótonas e limitadas, pois $p_n \leq p_{n+1} \leq q_{n+1} \leq q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Também temos que $|p_{n+1} - p_n| \leq (1/2)^{n-1}$ Além disso, $|q_n - p_n| = (1/2)^{n-1} \to 0$, o que implica que ambas pertencem a mesma classe. Assim, (p_n) e (q_n) são sequências de Cauchy equivalentes.

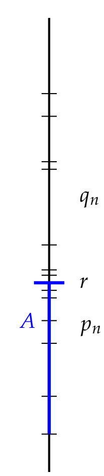
3.24 Teorema *Seja A um conjunto não vazio de números reais que possui um limite superior. Então, A possui um menor limite superior. Mais explicitamente, existe um $r \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tal que r é um limite superior para A, mas se $s < r$, com $s \in \widetilde{\mathbb{R}}$, então s não é um limite superior para A.*

Demonstração. Sejam p_n e q_n as sequências de Cauchy equivalentes obtidas nas Proposições 3.22 e Proposição 3.23. Denotamos por r o número real que ao qual ambas as sequências pertencem. Diremos nesse caso que elas convergem a r.

Demonstraremos que r é o supremo do conjunto A.

Primeiramente, mostraremos que r é uma cota superior de A. Suponha, por contradição, que exista um elemento $a \in A$ tal que $a > r$. Pela densidade dos racionais, podemos encontrar um número racional q entre r e a, ou seja, $r < q < a$. Como q_n converge para r, a partir de certa ordem, todos os termos da sequência q_n serão menores que q. Em particular, existe um índice N tal que $q_n < q$ para todo $n \geq N$. No entanto, isso contradiz o fato de q_n ser uma sequência de cotas superiores de A, uma vez que encontramos um elemento $a \in A$ maior do que todos os termos de q_n a partir de certa ordem.

Em seguida, mostraremos que r é a menor cota superior de A. Suponha que exista uma cota superior s de A tal que $s < r$. Novamente, pela densidade dos racionais, podemos encontrar um número racional p entre s e r, ou seja, $s < p < r$. Como p_n converge para r, a partir de certa ordem, todos os termos da sequência p_n serão maiores que p. Em particular, existe um índice N tal que $p_n > p$ para todo $n \geq N$. No entanto, isso contradiz o fato de s ser uma cota superior de A, uma



vez que encontramos um termo p_n da sequência que é maior do que a cota superior s.

Portanto, concluímos que r é o menor limite superior de A, ou seja, $r = sup(A)$.

Com isso, concluímos a construção dos números reais. Em todo caso, podemos agora afirmar com segurança que de fato existe um corpo ordenado completo.

3.25 **Teorema (Existência dos Reais)** *Existe um corpo ordenado completo.*

3.3 *Unicidade*

3.26 **Definição** *Sejam $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ dois corpos. Uma função $\varphi : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ é chamada de* ***isomorfismo de corpos*** *se:*

*a. φ é **bijetora**;*

b. φ preserva a ordem: para todo $a, b \in \mathbb{K}_1$ tal que $a < b$,

$$\varphi(a) < \varphi(b);$$

c. φ preserva a operação de adição: para todo $a, b \in \mathbb{K}_1$,

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b);$$

d. φ preserva a operação de multiplicação: para todo $a, b \in \mathbb{K}_1$,

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b);$$

e. $\varphi(1_{\mathbb{K}_1}) = 1_{\mathbb{K}_2}$, onde $1_{\mathbb{K}_1}$ e $1_{\mathbb{K}_2}$ são os elementos neutros da multiplicação em $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$, respectivamente.

*Se tal função φ existir, dizemos que os corpos $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ são **isomorfos** e escrevemos $\mathbb{K}_1 \cong \mathbb{K}_2$.*

Um isomorfismo de corpos nos diz que, estruturalmente, os corpos $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ são "idênticos", embora possam ter representações diferentes. Um isomorfismo preserva todas as propriedades importantes de um corpo, como as operações de soma e multiplicação, bem como os elementos neutros (0 e 1).

3.27 **Teorema** *Sejam $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ corpos ordenados completos então $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ são isomorfos.*

A demonstração será deixada ao leitor. Veja Exercício 3.1

Como consequência da construção dos reais realizada nesse capítulo temos a existência de um corpo ordenado completo e pelo Teorema 3.27 temos a unicidade a menos de isomorfismo desse corpo.

3.28 **Teorema (Existência e unicidade dos reais)** *Existe um único corpo ordenado completo.*

Exercícios

3.1 — Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Denote por $0'$ e $1'$ o zero e a unidade de $\mathbb{K}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$n' = \underbrace{1' + \cdots + 1'}_{n-vezes} \quad \text{e } (-n)' = -n'$$

Definimos uma função $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{K}$ como $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p'}{q'}$ para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, e, para x irracional, seja $\varphi(x) = \sup\left\{\frac{p'}{q'} \in \mathbb{K} \mid \frac{p}{q} < x\right\}$.
Prove que φ é um isomorfismo entre $\widetilde{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{K}$.

3.2 — Seja $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ um isomorfismo de $\widetilde{\mathbb{R}}$ em si mesmo. Prove que φ é a identidade. Conclua que, se $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ são corpos ordenados completos, existe um único isomorfismo de $\mathbb{K}_1$ em $\mathbb{K}_2$.

3.4 *Cortes de Dedekind*

Nosso objetivo nesta seção é esboçar uma construção alternativa dos números reais através dos cortes de Dedekind. Novamente a ideia é encontrar um conjunto $\widehat{\mathbb{R}}$ que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{Q} \subset \widehat{\mathbb{R}}$.
2. $\widehat{\mathbb{R}}$ é um conjunto ordenado: $(\widehat{\mathbb{R}}, <)$.
3. Em $\widehat{\mathbb{R}}$, estão definidas as operações de adição e de multiplicação de modo que $(\widehat{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ seja um corpo, e de modo que essas operações sejam compatíveis com a relação de ordem, i.e., ($\widehat{\mathbb{R}}$ seja um corpo ordenado.
4. O corpo $\widehat{\mathbb{R}}$ possua a propriedade do supremo, ou seja, todo subconjunto não vazio e limitado superiormente em $\widehat{\mathbb{R}}$ possui um menor limite superior em $\widehat{\mathbb{R}}$.

A ideia intuitiva por trás dos cortes de Dedekind é simples, embora sua definição formal possa parecer um pouco técnica à primeira vista. Nosso objetivo é usar os números racionais para construir os números reais, e a observação chave é que todo número real pode ser caracterizado pelo conjunto dos números racionais que são maiores do que ele. Por exemplo, o número real 2 pode ser representado pelo conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 2\}$.

Por outro lado, não podemos definir diretamente $\sqrt{2}$ como o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$, pois $\sqrt{2}$ não pertence a $\mathbb{Q}$. Para superar essa dificuldade, definimos os cortes de Dedekind como subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que se comportam de maneira semelhante a conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$, onde r é um número real, mas utilizando apenas definições fundamentadas exclusivamente nos números racionais.

Depois de estabelecermos algumas propriedades dos cortes de Dedekind na seção atual, na Seção 3.5 definiremos o conjunto dos números reais como a coleção de todos os cortes de Dedekind de $\mathbb{Q}$.

3.29 Definição *Um **corte de Dedekind** (L_α, U_α) é uma subdivisão de $\mathbb{Q}$ em dois subconjuntos L_α (intervalo inferior) e U_α (intervalo superior) tal que:*

1. *$U_\alpha \neq \varnothing$ e $U_\alpha \neq \mathbb{Q}$,*
2. *U_α não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$;*
3. *para todos $x \in L_\alpha$ e $y \in U_\alpha$, temos $x < y$.*

De modo equivalente temos:

O que denominamos de corte de Dedekind é frequentemente chamado de **corte superior**, para diferenciá-lo do correspondente **corte inferior**. Ambos os tipos de cortes, que são imagens espelhadas um do outro, podem ser utilizados na construção dos números reais. Optamos por trabalhar com cortes superiores porque, tecnicamente, são um pouco mais fáceis de usar, devido ao fato de que o produto de números positivos resulta em um número positivo, enquanto o produto de números negativos não necessariamente é negativo.

3.30 Definição *Seja $A \subseteq \mathbb{Q}$ um conjunto. O conjunto A é um **corte de Dedekind** se satisfizer as seguintes três propriedades:*

1. *$A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{Q}$.*
2. *Se $x \in A$ e $y \in \mathbb{Q}$ com $y \geq x$, então $y \in A$.*
3. *Se $x \in A$, então existe algum $y \in A$ tal que $y < x$.*

A demonstração da equivalência das duas definições de corte será deixada como exercício ao leitor.

A partir da segunda definição, podemos ver que especificar apenas U_α é suficiente para definir um corte de Dedekind (L_α, U_α). Portanto, para abreviar, em vez do par (L_α, U_α), geralmente nos referimos a um corte de Dedekind apenas como $A = U_\alpha$, com o entendimento implícito de que o corte é dado por $(A, \mathbb{Q} \backslash A)$.

3.31 Exemplo (Cortes Racionais) *Para todo $r \in \mathbb{Q}$, podemos associar ao número r o corte :*

$$Q_r := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > r\}.$$

*Assim a cada $r \in \mathbb{Q}$, associamos um corte de Dedekind Q_r. Esses cortes são ditos **cortes racionais** . Um **corte irracional** é um corte de Dedekind que não é um corte racional.*

Devido ao Exemplo 3.31, sabemos que cortes de Dedekind existem e há pelo menos tantos deles quanto há números racionais. A próxima pergunta natural a se fazer é se todos os cortes de Dedekind são da forma do exemplo. Para isso precisamos da seguinte proposição:

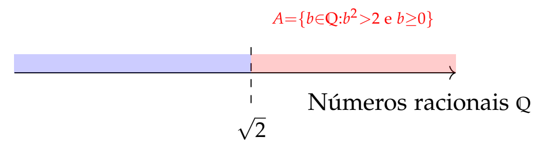
Em geral um corte de Dedekind A pode ou não ter ínfimo em $\mathbb{Q}$. Em particular, se A possui um ínfimo, esse corte é racional conforme definido acima. Se A não possui um ínfimo, dizemos que o corte A é irracional.

3.32 Proposição *Um corte de Dedekind $A \subseteq \mathbb{Q}$ tem um ínfimo em $\mathbb{Q}$ se, e somente se, $A = Q_q = \{x \in \mathbb{Q} : x > q\}$ para algum $q \in \mathbb{Q}$.*

3.33 Exemplo *Considere o corte definido por*

$$A := \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 > 2\}.$$

Então, o ínfimo de A não existe em $\mathbb{Q}$ e A não é um corte de Dedekind racional. A posteriori (uma vez que completarmos a construção de $\widehat{\mathbb{R}}$), podemos dizer que A é, na verdade, o número $\sqrt{2}$.



Antes de usar os cortes de Dedekind para construir o conjunto dos números reais utilizaremos o restante da presente seção para provar algumas propriedades úteis dos cortes de Dedekind.

3.34 Proposição *Seja $A \subseteq \mathbb{Q}$ um corte de Dedekind.*

1. *$A^c = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a$ para todo $a \in A\}$.*
2. *Seja $x \in A^c$. Se $y \in \mathbb{Q}$ e $y \leq x$, então $y \in A^c$.*

Demonstração. 1. Vamos provar que $A^c = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a$ para todo $a \in A\}$.

Primeiramente, seja $x \in A^c$. Então, por definição, $x \notin A$. Para qualquer $a \in A$, consideramos as possibilidades: $x < a$, $x = a$ ou $x > a$.

- Se $x = a$, então $x \in A$, o que contradiz o fato de que $x \in A^c$.
- Se $x < a$, então, como A é um corte de Dedekind e $a \in A$, segue que $x \in A$, pois todo número racional menor que um elemento de A também pertence a A. Isso contradiz $x \in A^c$.

Portanto, a única possibilidade é $x > a$ para todo $a \in A$. Assim, concluímos que

$$A^c \subseteq \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a \text{ para todo } a \in A\}.$$

Agora, seja $y \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a$ para todo $a \in A\}$. Suponha, para obter uma contradição, que $y \in A$. Como A não possui maior elemento (pela propriedade dos cortes de Dedekind), existe algum $b \in A$ tal que $b > y$. Porém, isso é impossível, pois assumimos que $y > a$ para todo $a \in A$, logo não pode existir tal b. Portanto, $y \notin A$, ou seja, $y \in A^c$. Assim, temos

$$A^c \supseteq \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a \text{ para todo } a \in A\}.$$

Concluímos que

$$A^c = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a \text{ para todo } a \in A\}.$$

2. A demonstração do segundo item é deixada como exercício para o leitor. □

3.35 **Proposição** *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ cortes de Dedekind. Então, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira: $A \subsetneqq B$, $A = B$ ou $B \subsetneqq A$.*

Demonstração. Se $A = B$, não há nada a provar, então suponha que $A \neq B$. Existem agora dois casos. Primeiro, suponha que exista algum $a \in A$ tal que $a \in B^c$. Então, pela Proposição 3.34, sabemos que $a < b$ para todo $b \in B$. Pela definição de cortes de Dedekind, segue que $b \in A$ para todo $b \in B$. Portanto, $B \subseteq A$. Como estamos assumindo que $B \neq A$, temos que $B \subsetneqq A$. O segundo caso é que exista algum $d \in B$ tal que $d \in A^c$, e um argumento semelhante mostra que $A \subsetneqq B$; omitimos os detalhes. □

3.36 **Proposição** *Seja $\mathcal{A}$ uma família não vazia de subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Suponha que todo $X \in \mathcal{A}$ X seja um corte de Dedekind. Se $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \neq \mathbb{Q}$, então $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ é um corte de Dedekind.*

Demonstração. Seja $B = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$. Suponha que $B \neq \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que B satisfaz as três partes da definição de cortes de Dedekind.

1. Sabemos que $X \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathcal{A}$, logo $B \neq \emptyset$. Por hipótese, sabemos que $B \neq \mathbb{Q}$.
2. Seja $b \in B$ e $y \in \mathbb{Q}$. Suponha que $y \geq b$. Sabemos que $b \in X$ para algum $X \in \mathcal{A}$. Pelo item 2. da definição de cortes de Dedekind aplicada a X, temos que $y \in X$. Logo, $y \in B$.
3. Seja $c \in B$. Então, $c \in D$ para algum $D \in \mathcal{A}$. Pela definição de cortes de Dedekind, existe algum $z \in D$ tal que $z < c$. Portanto, $z \in B$. □

O seguinte lema sobre cortes de Dedekind é um pouco técnico e tem uma demonstração um tanto trabalhosa, mas ele será necessário para definir a adição, multiplicação, oposto e o inverso multiplicativo para os números reais.

3.37 **Proposição** *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ cortes de Dedekind. Então:*

1. *O conjunto*
$$M = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + b, \text{ com } a \in A \text{ e } b \in B\}$$
é um corte de Dedekind.
2. *O conjunto*
$$N = \{r \in \mathbb{Q} \mid -r < c, \text{ para algum } c \in A^c\}$$
é um corte de Dedekind.
3. *Suponha que $0 \in A^c$ e $0 \in B^c$. Então, o conjunto*
$$P = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = ab, \text{ com } a \in A \text{ e } b \in B\}$$
é um corte de Dedekind.

4. *Suponha que existe algum $q \in A^c$ tal que $q > 0$. Então, o conjunto*

$$Q = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \text{ e } \frac{1}{r} < c, \text{ para algum } c \in A^c \right\}$$

é um corte de Dedekind.

Demonstração. Demonstramos os itens 1 e 2, deixando os demais para o leitor.

1. Defina
$$M = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + b, \text{ com } a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Mostraremos que M satisfaz as três propriedades de um corte de Dedekind.

(a) *M é não vazio e diferente de $\mathbb{Q}$.*

Como A e B são cortes de Dedekind, são subconjuntos não vazios e próprios de $\mathbb{Q}$. Escolha $a \in A$ e $b \in B$. Então, $r = a + b \in M$, logo $M \neq \emptyset$.

Além disso, existem $p \in A^c$ e $q \in B^c$, onde $A^c = \mathbb{Q} \setminus A$ e $B^c = \mathbb{Q} \setminus B$. Para todo $a \in A$ e $b \in B$, temos $a < p$ e $b < q$. Portanto, $r = a + b < p + q$ para todos $r \in M$, e como $p + q \notin M$ (pois $p \notin A$ e $q \notin B$), concluímos que $M \neq \mathbb{Q}$.

(b) *M é fechado para baixo: se $r \in M$ e $s \in \mathbb{Q}$ com $s < r$, então $s \in M$.*

Seja $r = a + b \in M$ com $a \in A$ e $b \in B$, e $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r$. Como $s < a + b$, existe $\epsilon > 0$ com $s = a + b - \epsilon$.

Escolha $a' \in \mathbb{Q}$ com $a' < a$ e $a + b - \epsilon < a' + b \leq a + b$. Como $a' < a$ e A é fechado para baixo, $a' \in A$. Então, $s' = a' + b \in M$ e $s' \leq s$.

Assim, $s \in M$.

(c) *M não possui maior elemento.*

Seja $r = a + b \in M$. Como A e B não possuem maior elemento, existem $a' \in A$ com $a' > a$ ou $b' \in B$ com $b' > b$.

Suponha que $a' > a$. Então, $r' = a' + b > a + b = r$, e como $a' \in A$ e $b \in B$, temos $r' \in M$.

Portanto, para todo $r \in M$, existe $r' \in M$ com $r' > r$, mostrando que M não possui maior elemento.

2. Defina
$$N = \{r \in \mathbb{Q} \mid -r < c, \text{ para algum } c \in A^c\}.$$ □

Mostraremos que N é um corte de Dedekind.

(a) *N é não vazio e diferente de $\mathbb{Q}$.*

Como $A^c \neq \emptyset$, existe $c \in A^c$. Então, $-c < c$, logo $-c \in N$, e assim $N \neq \emptyset$.

Por outro lado, como $A \neq \emptyset$, existe $a \in A$. Então, $-a > c$ para todo $c \in A^c$, o que implica $-a \notin N$. Portanto, $N \neq \mathbb{Q}$.

(b) *N é fechado para baixo.*

Seja $r \in N$ e $s \in \mathbb{Q}$ com $s < r$. Temos que $-r < c$ para algum $c \in A^c$. Como $s < r$, segue que $-s > -r$, logo $-s < c$, o que implica $s \in N$.

(c) *N não possui maior elemento.*

Seja $r \in N$. Então, $-r < c$ para algum $c \in A^c$. Como A^c não possui menor elemento, existe $c' \in A^c$ com $c' < c$. Então, $-r < c'$, implicando que $r' = -c' > r$.

Note que $-r' = c' \in A^c$, portanto $r' \in N$. Assim, para todo $r \in N$, existe $r' \in N$ com $r' > r$, mostrando que N não possui maior elemento.

3.5 *Construindo os Números Reais por cortes de Dedekind*

3.38 **Definição** *O conjunto dos números reais, denotado por $\widehat{\mathbb{R}}$, é definido por*

$$\widehat{\mathbb{R}} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid A \text{ é um corte de Dedekind } \}.$$

Agora dotaremos $\widehat{\mathbb{R}}$ de uma estrutura de corpo ordenado. Começaremos estabelecendo a relação de ordem, pois ela será necessária nas definições de multiplicação e do inverso multiplicativo.

Dado que os cortes de Dedekind são conjuntos de números racionais, definimos a relação de menor em números reais em termos da relação de "subconjunto"nos conjuntos de números racionais.

3.39 **Definição** *A relação $<$ em $\widehat{\mathbb{R}}$ é definida por $A < B$ se, e somente se, $A \supsetneq B$, para todos $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$. A relação $\leq$ em $\widehat{\mathbb{R}}$ é definida por $A \leq B$ se, e somente se, $A \supseteq B$, para todos $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$.*

A seguinte definição de adição e oposto para os números reais faz sentido devido à Proposição 3.37.

3.40 **Definição** *A soma $+$ em $\widehat{\mathbb{R}}$ é definida por*

$$A + B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + b \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B\}$$

para todos $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$. O oposto de um corte A em $\widehat{\mathbb{R}}$ é definido por

$$-A = \{r \in \mathbb{Q} \mid -r < c \text{ para } c \in A^c\}$$

para todo $A \in \widehat{\mathbb{R}}$.

A definição de multiplicação e inverso multiplicativo para os números reais é um pouco mais complicada do que a definição de adição e oposto, pois precisaremos de vários casos.

3.41 **Proposição** *Seja $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ e seja $r \in \mathbb{Q}$.*

1. *$A > Q_r$ se, e somente se, existe algum $q \in A^c$ tal que $q > r$.*

2. *$A \geq Q_r$ se, e somente se, $r \in A^c$ se, e somente se, $a > r$ para todo $a \in A$.*

3. *Se $A < Q_0$ então $-A \geq Q_0$.*

Demonstração. Provaremos apenas 3. Suponha que $A < Q_0$. Então $A \supsetneq Q_0$. Como $Q_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, segue que existe algum $q \in A$ tal que $q \leq 0$. Pelo item 2. da definição de cortes de Dedekind, deduzimos que $0 \in A$. Logo, $0 \notin A^c$, e portanto $-0 \notin A^c$, o que implica que $0 \notin -A$, e assim $0 \in \mathbb{Q} - (-A)$ e logo $-A \geq Q_0$. □

A seguinte definição de multiplicação e inverso multiplicativo faz sentido devido à Proposição 3.37 e à Proposição 3.41.

3.42 Definição *A multiplicação $\cdot$ em $\widehat{\mathbb{R}}$ é definida por*

$$A \cdot B = \begin{cases} \{r \in \mathbb{Q} \mid r = ab \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B\}, & \text{se } A \geq Q_0 \text{ e } B \geq Q_0 \\ -[(-A) \cdot B], & \text{se } A < Q_0 \text{ e } B \geq Q_0 \\ -[A \cdot (-B)], & \text{se } A \geq Q_0 \text{ e } B < Q_0 \\ (-A) \cdot (-B), & \text{se } A < Q_0 \text{ e } B < Q_0 \end{cases}$$

O inverso de A em $\widehat{\mathbb{R}} \setminus \{Q_0\}$ é definido por

$$A^{-1} = \begin{cases} \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \text{ e } \frac{1}{r} < c \text{ para } c \in A^c\}, & \text{se } A > Q_0 \\ -(-A)^{-1}, & \text{se } A < Q_0 \end{cases}$$

Tendo agora definido as operações básicas e relações nos números reais, estamos prontos para provar as propriedades algébricas mais fundamentais desses números. A demonstração do teorema a seguir é longa e, em partes, tediosa, e o leitor não será criticado se optar por pular alguns dos detalhes na primeira leitura. Como é usual, escreveremos "AB"ao invés de "$A \cdot B$", exceto em casos de possível ambiguidade ou para facilitar a leitura. Escreveremos $A > B$ para significar o mesmo que $B < A$.

Começaremos com o seguinte lema técnico cuja demonstração deixaremos ao leitor:

3.43 Lema *Seja $A \subseteq \mathbb{Q}$ um corte de Dedekind. Seja $y \in \mathbb{Q}$.*

1. *Suponha que $y > 0$. Então existem $u \in A$ e $v \in A^c$ tais que $y = u - v$, e $v < w$ para algum $w \in A^c$.*

2. *Suponha que $y > 1$, e que existe algum $q \in A^c$ tal que $q > 0$. Então existem $r \in A$ e $s \in A^c$ tais que $s > 0$, $y > \frac{r}{s}$ e $s < g$ para algum $g \in A^c$.*

3.44 Teorema *Sejam $A, B, C \in \widehat{\mathbb{R}}$.*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(Associatividade da soma)*

2. $A + B = B + A$ *(Comutatividade da soma)*
3. $A + Q_0 = A$ *(Elemento neutro da soma)*
4. $A + (-A) = Q_0$ *(Existência do oposto)*
5. $(AB)C = A(BC)$ *(Associatividade da multiplicação)*
6. $AB = BA$ *(Comutatividade da multiplicação)*
7. $A \cdot Q_1 = A$ *(Elemento neutro da multiplicação)*
8. *Se* $A \neq Q_0$, *então* $AA^{-1} = Q_1$ *(Existência do inverso da multiplicação)*
9. $A(B + C) = AB + AC$ *(Distributividade)*
10. *Exatamente uma das relações* $A < B$, $A = B$, *ou* $A > B$ *é verdadeira (Tricotomia)*
11. *Se* $A < B$ *e* $B < C$, *então* $A < C$ *(Transitividade)*
12. *Se* $A < B$, *então* $A + C < B + C$ *(Compatibilidade com a soma)*
13. *Se* $A < B$ *e* $C > Q_0$, *então* $AC < BC$ *(Compatibilidade com a multiplicação)*
14. $Q_0 < Q_1$ *(Não-Trivialidade)*

Demonstração. Vamos demonstrar alguns itens deste teorema, não na ordem em que são apresentados, mas seguindo uma sequência escolhida de modo que a prova de cada item dependa apenas dos itens anteriores.

14. Deixado como exercício para o leitor.

1. Vamos demonstrar que a adição em $\widehat{\mathbb{R}}$ é associativa, ou seja, para quaisquer cortes de Dedekind $A, B, C \in \widehat{\mathbb{R}}$, temos:

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \{r \in \mathbb{Q} \mid r = (a + b) + c \text{ com } a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + (b + c) \text{ com } a \in A, b \in B, c \in C\} \\ &= A + (B + C).\end{aligned}$$

2. A demonstração deste item é bastante semelhante à do item (1), por isso omitimos os detalhes.

3. Utilizando a definição de adição para $\widehat{\mathbb{R}}$, temos que

$$A + Q_0 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + b \text{ com } a \in A, b \in Q_0\}.$$

Seja $a \in A$. Pela definição dos cortes de Dedekind, existe algum $c \in A$ tal que $c < a$. Assim, $a - c > 0$, e portanto $a - c \in Q_0$. Logo, $a = c + (a - c) \in A + Q_0$, o que implica que $A \subseteq A + Q_0$.

Agora, seja $d \in A + Q_0$. Então $d = s + t$ para algum $s \in A$ e $t \in Q_0$. Pela definição de Q_0, sabemos que $t > 0$. Portanto, $d > s$. Pelo item 2 da definição de cortes de Dedekind, segue que $d \in A$. Assim, $A + Q_0 \subseteq A$, e concluímos que $A + Q_0 = A$.

4. Utilizando as definições de adição e oposto para $\widehat{\mathbb{R}}$, temos que

$$A + (-A) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r = a + b \text{ com } a \in A, b \in -A\}.$$

Seja $x \in A + (-A)$. Então $x = s + t$ para algum $s \in A$ e $t \in -A$. Pela definição de $-A$, existe algum $c \in A^{\mathsf{c}}$ tal que $-t < c$. Pela Proposição 3.34, sabemos que $-t \in A^{\mathsf{c}}$, e portanto, pela mesma proposição, temos que $-t < s$. Consequentemente, $s + t > 0$, o que implica que $x \in Q_0$. Assim, concluímos que $A + (-A) \subseteq Q_0$.

Agora, seja $y \in Q_0$. Então $y > 0$. Pelo Lema 3.43, existem $u \in A$ e $v \in A^{\mathsf{c}}$ tais que $y = u - v$, e $v < w$ para algum $w \in A^{\mathsf{c}}$. Portanto, $y = u + (-v)$, e como $-(-v) = v < w$, temos que $-v \in -A$. Logo, $y \in A + (-A)$. Assim, $Q_0 \subseteq A + (-A)$, e concluímos que $A + (-A) = Q_0$.

10. Esta parte do teorema é direta da Proposição 3.35.

11. Esta parte do teorema é direta das propriedades de subconjuntos.

12. Suponha que $A < B$. Portanto, $A \supsetneqq B$. Seja $x \in B + C$. Então $x = u + v$ para algum $u \in B$ e $v \in C$. Então $u \in A$, logo $x \in A + C$. Segue que $A + C \supseteq B + C$. Existe algum $p \in A - B$. Então, pela Proposição 3.34, sabemos que $p < b$ para todo $b \in B$. Seja $c \in C$. Então $p + c < b + c$ para todo $b \in B$. Segue da Proposição 3.34 que $p + c \in \mathbb{Q} - (B + C)$. Como $p + c \in A + C$, concluímos que $A + C \supsetneqq B + C$.

5. Deixado ao leitor como Exercício.

6. Pelo item 10. deste teorema, sabemos que ou $A \geq Q_0$ ou $A < Q_0$, e de maneira similar para B. Temos, agora, quatro casos.

Primeiro, suponha que $A \geq Q_0$ e $B \geq Q_0$. Então

$$\begin{aligned} AB &= \{r \in \mathbb{Q} \mid r = ab \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B\} \\ &= \{r \in \mathbb{Q} \mid r = ba \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B\} = BA. \end{aligned}$$

Em segundo lugar, suponha que $A \geq Q_0$ e $B < Q_0$. Sabemos que $-B > Q_0$. A definição da multiplicação de cortes de Dedekind, juntamente com o caso que já provamos, implica que $AB = -[A(-B)] = -[(-B)A] = BA$.

Os outros dois casos em que $A < Q_0$ e $B \geq Q_0$, e em que $A < Q_0$ e $B < Q_0$, são muito semelhantes ao caso já provado, e omitimos os detalhes.

7. Deixado para o leitor.

8. Suponha que $A \neq Q_0$. Pelo item 10. deste teorema, sabemos que $A > Q_0$ ou $A < Q_0$. Vamos considerar ambos os casos separadamente.

Caso 1: Suponha que $A > Q_0$.

Sabemos que $A^{-1} > Q_0$. Pela definição de multiplicação de cortes de Dedekind, temos:

$$AA^{-1} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = ab \text{ com } a \in A \text{ e } b \in A^{-1} \right\}.$$

Seja $x \in AA^{-1}$. Então, existem $u \in A$ e $v \in A^{-1}$ tais que $x = uv$. Pela Proposição 3.41, sabemos que $u > 0$. Além disso, como $A > Q_0$, a definição de A^{-1} implica que $v > 0$ e que $\frac{1}{v} < h$ para algum $h \in A^c$. Pela Proposição 3.34, concluímos que $\frac{1}{v} \in A^c$ e que $\frac{1}{v} < u$. Portanto, $1 < uv$, ou seja, $x > 1$, o que significa que $x \in Q_1$. Assim, demonstramos que $AA^{-1} \subseteq Q_1$.

Agora, seja $y \in Q_1$. Então $y > 1$. Como $A > Q_0$, pela Proposição 3.41, existe $q \in A^c$ com $q > 0$. Pelo Lema 3.43, existem $r \in A$ e $s \in A^c$ com $s > 0$ tais que $y > \frac{r}{s}$ e $s < k$ para algum $k \in A^c$. Observamos que $\frac{1}{s} > 0$ e que $\frac{1}{s} \in A^{-1}$. Assim, $\frac{r}{s} = r \cdot \frac{1}{s} \in AA^{-1}$. Como $y > \frac{r}{s}$, pela propriedade dos cortes de Dedekind, temos que $y \in AA^{-1}$. Portanto, $Q_1 \subseteq AA^{-1}$, e concluímos que $AA^{-1} = Q_1$.

Caso 2: Suponha que $A < Q_0$.

Pela definição de inverso multiplicativo, temos $A^{-1} = -(-A)^{-1}$. Portanto,

$$-A^{-1} = -\left[-(-A)^{-1}\right] = (-A)^{-1}.$$

Sabemos que $-A > Q_0$, e pelo caso anterior, concluímos que $(-A)(-A)^{-1} = Q_1$. Assim,

$$AA^{-1} = (-A)\left(-A^{-1}\right) = (-A)(-A)^{-1} = Q_1.$$

13. Suponha que $A < B$ e $C > Q_0$.

Pelos itens 4. e 12. deste teorema, temos que $A + (-A) = Q_0$ e, portanto,

$$Q_0 = A + (-A) < B + (-A).$$

Isso implica que $[B + (-A)] > Q_0$.

Multiplicando ambos os lados por C, que é positivo (pois $C > Q_0$), obtemos:

$$[B + (-A)]C > Q_0 C = Q_0.$$

Pelos itens 12. e 3. do teorema, temos:

$$AC + [B + (-A)]C > AC + Q_0 = AC.$$

Utilizando os itens 6. e 9. do teorema, sabemos que:

$$[A + (B + (-A))]C = BC. \qquad \square$$

Portanto, concluímos que $BC > AC$.

A definição de cortes de Dedekind torna fácil provar o **Axioma 13'**.

3.45 **Teorema (Existência do Ínfimo)** *Seja $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ um conjunto. Se $\mathcal{A}$ for não vazio e limitado inferiormente, então $\mathcal{A}$ possui um ínfimo*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{A}$ seja um conjunto não vazio de cortes de Dedekind em $\mathbb{Q}$ que é limitado inferiormente. Definimos

$$L = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X.$$

Nosso objetivo é mostrar que $L = \inf \mathcal{A}$.

Primeiramente, vamos verificar que L é um corte de Dedekind. Como L é a união de cortes de Dedekind, e cada um deles é um subconjunto próprio de $\mathbb{Q}$, não vazio e sem maior elemento, segue da Proposição 3.36 que L também é um corte de Dedekind.

Em seguida, mostramos que L é o maior limitante inferior de $\mathcal{A}$.

1. **L é um limitante inferior de $\mathcal{A}$:**

   Para todo $X \in \mathcal{A}$, temos que $X \subseteq L$, pois L é a união de todos esses conjuntos. Portanto, $L \leq X$ para todo $X \in \mathcal{A}$, o que significa que L é um limitante inferior de $\mathcal{A}$.

2. **L é o maior limitante inferior de $\mathcal{A}$:**

   Seja $B \in \widehat{\mathbb{R}}$ um limitante inferior arbitrário de $\mathcal{A}$. Isso significa que $B \leq X$ para todo $X \in \mathcal{A}$, ou seja, $X \subseteq B$ para todo $X \in \mathcal{A}$. Tomando a união sobre todos os $X \in \mathcal{A}$, obtemos:

   $$L = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \subseteq B.$$

   Portanto, $L \leq B$. Como B foi escolhido arbitrariamente entre os limitantes inferiores de $\mathcal{A}$, concluímos que L é o maior desses limitantes inferiores. □

Assim, mostramos que $L = \inf \mathcal{A}$.

Não utilizaremos no que se segue a construção dos reais via sequências de Cauchy ou via cortes de Dedekind. Todas as propriedades dos números reais que utilizaremos são as derivadas da definição de corpo ordenado completo derivadas de **Axioma 1**, ..., **Axioma 13**. Nossa construção dos números reais prova que existe um conjunto com as propriedades que esperamos dos números reais, mas, em última análise, são as propriedades dos números reais, e não a forma como eles são construídos, que importam.

4
Séries

As séries numéricas, ferramentas fundamentais da matemática, possuem uma história rica e complexa, intimamente ligada à evolução do pensamento matemático e à busca por compreender a natureza do infinito. Desde a antiguidade, métodos como o de exaustão de Arquimedes já exploravam ideias relacionadas, mas foi com o cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz, no século XVII, que as séries numéricas ganharam destaque como ferramentas matemáticas centrais.

No século XVIII, figuras como Euler e Bernoulli expandiram significativamente o campo, investigando a convergência e aplicando as propriedades das séries infinitas em áreas como a teoria dos números e a física. Euler, em particular, desenvolveu métodos para somar séries e estudou sua aplicabilidade em diversos contextos matemáticos.

O século XIX trouxe um rigor maior para a teoria das séries, com matemáticos como Cauchy e Weierstrass formalizando conceitos essenciais de convergência e desenvolvendo critérios precisos para determinar o comportamento das séries. Essa era de rigor matemático foi crucial para resolver paradoxos e incertezas, consolidando as séries numéricas como ferramentas fundamentais na matemática e na análise e na modelagem de fenômenos naturais.

4.1 Convergência

Dado (a_n) uma sequência de números reais, podemos construir uma nova sequência a partir dessa, através de somas parciais dos termos dessa sequência:

$$s_1 = a_1 \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

e em geral

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

A sequência (s_n) é denominada **série infinita** ou simplesmente **série** e é denotada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_k$$

O termos de uma série são chamados **somas parciais**, e assim diremos que $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ é a $n-$ésima soma parcial da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

4.1 Exemplos *1. As primeiras somas parciais da série* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *são:*

$$s_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad s_2 = 1 + \frac{1}{2} \qquad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

2. As primeiras somas parciais da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ *são:*

$$s_1 = \frac{1}{2} \qquad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

3. As primeiras somas parciais da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ *são:*

$$s_1 = 1 \qquad s_2 = 1 + x \quad s_3 = 1 + x + x^2 \quad s_4 = 1 + x + x^2 + x^3$$

Como séries são um tipo particular de sequências, podemos falar em convergência e limites de séries. Porém, para maior clareza reescreveremos a definição de limite de sequências para o caso particular das séries.

4.2 Definição (Convergência de Séries) *Dada* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série, e seja* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *a sequência das somas parciais, dizemos que o* ***limite da série*** *é L se a sequência das somas parciais converge a L, ou seja se dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $M \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > M$ *então*

$$|s_n - L| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - L \right| < \varepsilon.$$

Neste caso L é dito ***soma*** *da série e a série* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *é dita convergente.*

Observação: Apesar de ambíguo, é costume denotar tanto a série infinita como seu limite, caso esse exista, como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Assim como ocorre nas somas finitas, podemos notar que o índice j é uma variável muda. Portanto, se utilizarmos k como outro índice, temos que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j = \sum_{k=0}^{\infty} z_k.$$

Temos também a seguinte definição:

$$\sum_{j=m}^{\infty} z_j \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} z_{j+m},$$

para cada inteiro m onde $z_m, z_{m+1}, \ldots$ estão definidos. É evidente que, se $m \leq r$, então:

A convergência de uma série infinita não depende dos seus termos iniciais, mas sim do comportamento dos termos na "cauda"da série, ou seja, para valores grandes de n. Isto porque somar ou subtrair um número finito de termos não altera a natureza convergente ou divergente da série. O que realmente importa é se a soma dos termos restantes converge para um valor finito à medida que n tende ao infinito. Portanto, ao analisar a convergência de uma série, concentramos nossa atenção no comportamento dos termos na parte final da sequência.

4.3 **Proposição** *A série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge se e somente se $\sum_{j=m}^{\infty} z_j$ converge. Se uma dessas séries convergirem então vale:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = \sum_{j=1}^{m} z_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} z_j.$$

A demonstração dessa proposição será deixada ao leitor. Assim, para verificar que estas séries convergem basta verificar a convergência de apenas uma delas.

4.4 **Exemplo** *A série infinita*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

é um dos exemplo mais simples de série convergente.

Vamos provar que ela converge para 1. A soma parcial dos primeiros n termos é dada por

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Cada soma parcial finita é igual a:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

e logo

$$|s_n - 1| = \frac{1}{2^n}$$

de modo que s_n tende a 1.

4.5 **Teorema** *Se $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ é convergente, então $a_k \to 0$.*

Demonstração. Como $a_n = s_n - s_{n-1}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ (Por que?), temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

O que prova que o limite de a_n existe e é 0.

4.6 Exemplo *Mostre que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+7}$$

diverge.

Solução: *Temos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{7}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0$$

E portanto, pelo Teorema 4.5 a série diverge.

4.7 Exemplo *A série harmônica,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

é uma das séries infinitas mais celebradas da matemática. Como um contra-exemplo, poucas séries ilustram de forma mais clara que a convergência dos termos para zero não é suficiente para garantir a convergência da série. Como série conhecida, apenas algumas poucas são usadas com tanta frequência em comparações.

Ao longo do texto, H_n é usado para denotar a n-ésima soma parcial da série harmônica. Isto é,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Prova.[1] *Considere a subsequência $(H_{2^k})_{k=0}^{\infty}$.*

$$H_1 = 1 = 1 + 0\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

E em geral, podemos mostrar por indução que:

$$H_{2^k} \geq 1 + k\left(\frac{1}{2}\right)$$

Como a subsequência (H_{2^k}) é ilimitada, a sequência (H_n) diverge.

[1] Essa demonstração deve-se a Nicole Oresme e data de cerca de 1350 e ficou perdida por séculos.

4.8 Exemplo *A série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3+5}$ diverge.*

Pelo teorema anterior uma condição necessária para que a série convirja é que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{2n^3+5}$ seja igual a zero. Mas se calcularmos o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2n^3+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+5/n^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

vemos que essa condição não é satisfeita, logo a série diverge.

Linearidade

Como vimos na Seção 1.6 os somatórios finitos possuem as seguintes propriedades:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k \quad \text{(propriedade aditiva)} \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k \quad \text{(propriedade homogênea).} \tag{4.2}$$

O teorema que iremos apresentar a seguir é uma extensão natural dessas propriedades para as séries infinitas convergentes.

4.9 Teorema *Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ são séries infinitas convergentes r α e β dois números reais dados, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n+db_n)$ também converge, e a sua soma é dada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n+db_n)=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n+d\sum_{n=1}^{\infty}b_n \tag{4.3}$$

Demonstração. Tendo em conta as Equações 4.1) e 4.2 podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k+db_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k+d\sum_{k=1}^{n}b_k \tag{4.4}$$

Quando $n\to\infty$ o primeiro termo do segundo membro de 4.4 tende para $c\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ e o segundo termo tende para $d\sum_{k=1}^{\infty}b_k$. Portanto o primeiro membro tende para a sua soma, e isso prova que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_k+db_k)$ converge para a soma indicada por 4.3. □

O teorema possui o seguinte corolário que é frequentemente utilizado para concluir a divergência da série.

4.10 Teorema *Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge e se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ diverge.*

Demonstração. Visto que $b_n=(a_n+b_n)-a_n$, e porque $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge, o Teorema 4.9 diz-nos que a convergência de $\sum(a_n+b_n)$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Deste modo, $\sum(a_n+b_n)$ não pode convergir se $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge. □

4.11 Exemplo *A série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2^k}\right)$ diverge porque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge, embora $\sum_{n=1}^{\infty}1/2^k$ convirja.*

Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ são ambas divergentes, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ pode ou não convergir. Por exemplo quando $a_n=b_n=1$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ diverge. Mas quando $a_n=1$e $b_n=-1$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge

Exercícios

4.1 — Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, suponha que existe um número natural N tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq N$. Prove que $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum b_n$ é convergente. Assim, a convergência de uma série não é afetada pela alteração de um número finito de termos. (Claro, o valor da soma pode mudar.)

4.2 — Seja (a_n) uma sequência de números reais não negativos. Prove que $\sum a_n$ converge se, e somente se, a sequência das somas parciais é limitada.

4.3 — Prove que a série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge se e somente se $\sum_{j=m}^{\infty} z_j$ converge. Se uma dessas séries convergirem então vale:

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = \sum_{j=1}^{m} z_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} z_j.$$

4.4 — [Critério de Cauchy para Séries] Prove que:
Uma série infinita $\sum a_n$ converge se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, se $n \geq m \geq N$, então

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

4.2 Série geométrica

A série geométrica é obtida através da soma dos termos de uma progressão geométrica, i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty} px^{k-1}.$$

Como vimos no exercício 1.16 se $x \neq 1$ as somas parciais de uma progressão geométrica podem ser expressas através da formula fechada:

$$\sum_{k=1}^{n} px^{n-1} = \frac{p - px^n}{1 - x}.$$

No caso $x = 1$ a soma da progressão geométrica se reduz a soma de constantes, e assim

$$\sum_{k=1}^{n} p = np.$$

Vamos agora calcular a "soma infinita de uma progressão geométrica", ou seja o limite da série geométrica. Começamos observando que se $x \neq 1$ então:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} px^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{p - px^n}{1-x}. \tag{4.5}$$

$$= p \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

E deste modo o comportamento de s_n é determinado pelo comportamento de x^n. Como vimos no exercício 2.36 se $|x| < 1$ então $x^n \to 0$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} px^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{p - px^n}{1-x} = \frac{p}{1-x}.$$

Se se $|x| > 1$ então x^n diverge e logo a série também diverge. No caso $x = 1$ claramente a série diverge.

Assim provamos que:

4.12 Teorema *Dados $p, x \in \mathbb{R}$. Se $|x| < 1$ então $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} px^{n-1}$ converge e*

$$p + px + px^2 + \cdots px^{n-1} + \cdots = \frac{p}{1-x} \tag{4.8}$$

Se $|x| \geq 1$ então $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} px^{n-1}$ diverge.

Como consequências desse resultado temos:

4.13 Exemplos

1. *Se escolhermos o termo inicial como sendo 1 e a razão como sendo x na equação 4.8 temos:*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

2. *Se escolhermos o termo inicial como sendo 1 e a razão como sendo $-x$ na equação 4.8 temos:*

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad |x| < 1$$

3. *Se escolhermos o termo inicial como sendo 1 e a razão como x^2 na equação 4.8 temos:*

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| < 1$$

4.14 Exemplo *Encontre a soma da série*

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \cdots$$

Veja que a série anterior é uma série geométrica de termo inicial 3 e razão $-\frac{2}{5}$. Como $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$ a série converge e sua soma é:

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \cdots = \frac{3}{1+\frac{2}{5}} = \frac{15}{7}$$

4.3 Série telescópica

A propriedade telescópica de soma (vide exercício 1.8.c) nos diz que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_n$$

Uma série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ é dita **telescópica** em relação a sequência b_n se cada termo a_n puder ser expresso como

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

4.15 **Exemplo** *Para a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, temos as somas parciais dadas por*

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

e logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge para 1.

O exemplo anterior pode ser generalizado para o seguinte teorema.

4.16 **Teorema** *Dado $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série telescópica em relação a sequência b_n, i.e, $a_n = b_n - b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Então*

1. *a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e somente se a sequência b_n converge.*
2. *se a sequência b_n converge a b então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b \qquad\qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Demonstração. Seja s_n a soma parcial, então:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k - b_k + 1 = b_1 - b_{n+1}$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k - b_k + 1\right) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - b$$

4.17 **Exemplo** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \dfrac{1}{6}$

Começamos observando que

$$\frac{2}{n^3+6n^2+11n+6} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

ou seja a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+6n^2+11n+6} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right)$$

Como $b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Então $b_1 = \frac{1}{6}$ e $b = 0$.

Exercícios

4.5 — Cada uma das séries abaixo pertence a uma das seguintes categorias: telescópica, geométrica ou uma série cuja soma parcial pode ser simplificada. Para cada caso, demonstre que a série converge e calcule o valor de sua soma.

a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{3^j}$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+2)}$

c) $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{4}{j^2-4}$

d) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{j^2+4j+3}$

e) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{6j}{3j+1-2j+1+3j-2j}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$.

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$.

j) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}$

k) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j+1}}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$

4.6 — Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, então $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{j+1}} \right)$ converge.

4.7 — Pode $\sum_{j=0}^{\infty}(x_j+y_j)$ convergir quando pelo menos uma de $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ diverge?

4.8 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ converge, onde $z_j \neq 0$ para todo j, então $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z_j}$ diverge.

4.9 — A série $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j 2^{1/j}$ é convergente?

4.10 — Mostre que $\sum_{j=1}^{\infty} aj$ converge se, e somente se, $a = 0$.

4.11 — Avalie as seguintes somas:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j + 2j}{3^j}$;

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5^j} - \frac{1}{j(j+1)} \right)$.

4.12 — Seja (x_n) uma sequência decrescente de termos positivos e suponha que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge. Mostre que $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$. Este resultado é conhecido como o teorema de Pringsheim.
Dica: Defina $m = n/2$ para n par e $m = (n+1)/2$ para n ímpar. Então, $S_n - S_m \geq n x_n$.

4.4 *Convergência absoluta*

Se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ possui alguns termos negativos, frequentemente consideramos a série relacionada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, embora o contrário não seja verdade.

4.18 Definição

- *Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***converge absolutamente*** *(ou é absolutamente convergente).*

- *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então dizemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***converge condicionalmente*** *(ou é condicionalmente convergente).*

4.19 Teorema *Se uma série converge absolutamente, então ela converge.*

Demonstração. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja absolutamente convergente, isto é, que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Pelo critério de Cauchy para séries, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que $n \geq m \geq N$ implica

$$||a_m| + \cdots + |a_n|| < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$|a_m + \cdots + a_n| \leq ||a_m| + \cdots + |a_n|| < \varepsilon,$$

de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge. □

Quando os termos de uma série são não negativos, convergência e convergência absoluta são equivalentes.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes, o mesmo se verifica para a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ qualquer que seja a escolha de α e β. Isto é uma consequência imediata da desigualdade triangular e a demonstração será deixada ao leitor.

Exercícios

4.13 — Prove que, se $\sum |a_n|$ converge e (b_n) é uma sequência limitada, então $\sum a_n b_n$ também converge.

4.14 — a) Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge absolutamente, então $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ também converge.

b) O recíproco é verdadeiro?

c) É verdade que, se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge, então $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ também converge?

4.15 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$ são séries absolutamente convergentes, então $\sum_{j=0}^{\infty} z_j w_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha z_j + \beta w_j)$ também são absolutamente convergentes para todos os números reais α e β.

4.16 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ é uma série absolutamente convergente, então

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} z_j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |z_j|.$$

4.5 *Teste da comparação*

Consideramos nesta seção apenas séries de termos não negativos, isto é, séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ onde cada $a_n \geq 0$. Uma vez que as somas parciais de tais séries são monótonas crescentes, pode aplicar-se o Teorema 2.20 para se obter a seguinte condição necessária e suficiente de convergência.

4.20 **Teorema** *Se $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se a sequência das respetivas somas parciais é limitada superiormente.*

Se as somas parciais são limitadas superiormente por um número M, por exemplo, a soma da série não pode então exceder M.

4.21 Teorema (Teste da Comparação) *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries infinitas de termos não negativos. Isto é, $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ para todo n. Então:*

1. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $0 \leq b_n \leq a_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.*

2. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

Demonstração. Como $b_n \geq 0$ para todo n, a sequência (t_n) das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é crescente. Na parte 1, essa sequência é limitada pela soma de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, logo, (t_n) converge pelo teorema da convergência monótona, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Na parte 2, (b_n) não pode convergir senão $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ teria que convergir. □

4.22 Exemplo *Considere a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

No Exemplo 4.15, vimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente, então o Teorema 4.20 implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ também converge.

4.23 Exemplo *Podemos utilizar o Teorema 4.20 para demonstrar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Observamos primeiramente a desigualdade*

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

a qual é verdadeira para todo $k \geq 1$, pois $k!$ é formado por $k-1$ fatores todos eles maiores que 2. E logo temos a convergência.

4.24 Exemplo *Teste a convergência ou divergência da série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Solução: *Podemos estudar a convergência da série comparando-a com a série harmônica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geq 3$, e assim:*

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \quad n \geq 3.$$

Sabemos que $\sum \frac{1}{n}$ é divergente. Assim, a série dada é divergente pelo Teste da Comparação.

Exercícios

4.17 — Use o Teste da Comparação para determinar se as séries são convergentes ou divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

4.18 — Mostre que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^j \sqrt{j}}$ converge.

4.19 — Mostre que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j}}$ diverge.

4.20 — Seja (x_n) uma sequência de termos positivos e suponha que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ também converge.

4.21 — Seja (x_n) uma sequência de termos positivos. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{1+x_j}$ converge.

4.22 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ converge, então $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j|}{j}$ também converge.

*** **4.23 —**

a) Seja (a_n) uma sequência decrescente de termos não negativos. Prove o teste de condensação de Cauchy: a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

b) Use a parte (a) para mostrar que a série p-série $\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

4.6 *Teste do limite*

Nosso próximo teste para convergência é frequentemente mais fácil de aplicar do que o teste da comparação. Primeiro, entretanto, precisamos de uma nova notação.

4.25 Definição *Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos positivos. Dizemos que a_n e b_n são da mesma ordem de magnitude se existir um número positivo L tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Nesse caso, escrevemos $a_n \sim Lb_n$.

4.26 **Teorema (Teste do Limite)** *Sejam* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *e* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *séries de termos positivos. Se* $a_n \sim Lb_n$ *para algum* $L > 0$*, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.*

Demonstração. É dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0.$$

Segue da definição de limite existência de um número N_1 tal que $a_n/b_n > L/2$ para todo $n \geq N_1$. Similarmente, existe N_2 tal que $a_n/b_n < L + L/2 = 3L/2$ para todo $n \geq N_2$. Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$ e escolha $n \geq N$. Então:

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$

Logo,

$$a_n < \frac{3Lb_n}{2}.$$

Agora aplicamos o teste da comparação. Suponha que $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ é convergente. Logo a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3Lb_j}{2}$$

também converge, o que implica que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge pelo teste da comparação. Similarmente, se $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge, então $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ também converge. □

4.27 **Exemplo** *Teste a convergência da série:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)}.$$

Solução: *Definimos:*

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \textit{para todo } n > 0.$$

Mostramos que a_n *tem a mesma ordem de magnitude de* $1/n^2$*. Assim, definimos:*

$$b_n = \frac{1}{n^2} \quad \textit{para todo } n > 0.$$

Então, temos:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1 \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Logo, $a_n \sim b_n$*. Como* $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *converge, segue que* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *também converge pelo Teste do Limite.*

4.28 Exemplo *Teste a convergência da série:*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sqrt{j+1}-\sqrt{j}\right)^2.$$

Solução: *ara todo $n \geq 0$, definimos:*

$$\begin{aligned}a_n &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2\\ &= \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^2\\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2}.\end{aligned}$$

Agora, definimos:

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \textit{para todo } n > 0.$$

Como:

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2}{n} &= \frac{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}{n}\\ &= 2+\frac{1}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 4 \quad \textit{quando } n \to \infty,\end{aligned}$$

segue que $a_n \sim \frac{b_n}{4}$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ é a série harmônica divergente, concluímos que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ também diverge pelo Teste do Limite. Δ

Exercícios

4.24 — Determine a convergência de cada uma das seguintes séries:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+1}{5^j-j}$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+1}-\sqrt{j}}{j}$

c) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^j}{j^2}$

d) $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j=3}+\sqrt{j+3}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}\right)^2$

f) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^2}{n^3-3}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)}$

h) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2}{n^2-2n-3}$

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^6+9}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+7}{n^4 \operatorname{sen}^2(n)}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^2(5n)}{4^n+\cos^2(n)}$

l) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2+2n}$

m) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n^2-n}{n^3+9}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+4n+1}}{n^3+1}$

o) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(e^{1/j}-1\right)^p$ para todo p racional;

p) $\sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{j^2+1-j}$

q) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+1}-\sqrt{j}}{\sqrt{j+1}}$

r) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2+1/j}}$

4.25 — Encontre todos os inteiros t tais que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+t-\sqrt{t}}}$$

seja convergente.

4.26 — Considere $a > 0$ e $b > 0$. Encontre todo p racional tal que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(aj+b)^p}$$

seja convergente.

4.7 Teste da raiz e do quociente

4.29 **Teorema (Teste da Raiz)** *Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, seja $R = \limsup |a_n|^{1/n}$.*

- *Se $R < 1$, então a série converge absolutamente.*
- *Se $R > 1$, então a série diverge.*
- *Caso contrário, $R = 1$, e o teste não fornece informações sobre a convergência ou divergência.*

Demonstração. Se $R < 1$, escolha r tal que $R < r < 1$. Então, temos $|a_n|^{1/n} \leq r$ para n suficientemente grande, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge. Pelo teste da comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

Se $R > 1$, então $|a_n| \geq 1$ para infinitos termos, o que implica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Quando $R = 1$, não se pode concluir sobre a convergência ou divergência. A fim de demonstrar esse fato, vamos analisar dois exemplos clássicos: a série harmônica ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) e a série p com $p = 2$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). Ambas as séries possuem um raio de convergência comum, $R = 1$, o que pode ser verificado utilizando o limite $n^{1/n} \to 1$ quando $n \to \infty$. Entretanto, ja vimos que a série harmônica diverge, enquanto a série p com $p = 2$ converge. Esse contraste demonstra que o raio de convergência de uma série de potências, por si só, não é suficiente para determinar se a série converge ou diverge nos extremos do intervalo de convergência. □

4.30 **Exemplo** *Por aplicação do Teste da raiz é fácil determinar a convergência da série $\sum_{n=3}^{\infty} (\log n)^{-n}$, pois que*

$$a_n^{1/n} = \frac{1}{\log n} \to 0 \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

4.31 **Exemplo** *Aplicando o Teste da raiz a $\sum [n/(n+1)]^{n^2}$, encontramos*

$$a_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e} \quad \textit{quando} \quad n \to \infty$$

dado que $1/e < 1$, a série converge.

Uma aplicação ligeiramente distinta do critério de comparação conduz ao critério do quociente.

4.32 **Teorema (Teste da Razão)** *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos.*

(a) Se $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, então a série converge absolutamente.

(b) Se $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, então a série diverge.

(c) Caso contrário, $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, e o teste não fornece informação sobre a convergência ou divergência.

Demonstração. Seja $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. Se $L < 1$, então escolha r de forma que $L < r < 1$.

Pela propriedade "Para todo $\varepsilon > 0$ existe um número natural N tal que $n \geq N$ implica que $s_n < m + \varepsilon$", existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r.$$

Segue-se por indução que

$$\left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| \leq r^k |a_n|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $0 < r < 1$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ também converge, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente pelo teste da comparação.

Se $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, então segue-se que $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para n suficientemente grande. Logo, a sequência (a_n) não pode convergir para zero, e pelo Teorema 4.5 a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deve divergir.

A parte (c) segue da observação de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge e a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, conforme vimos anteriormente no Exemplo 4.7. Para ambas as séries temos $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. □

4.33 **Exemplo**

- *Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Seja $a_n = \frac{n}{2^n}$, temos:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{n+1}{2n}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$. Similarmente, $|a_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}}{2}$, então $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2}$. Assim, tanto o teste da razão quanto o teste da raiz indicam que $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ converge

- *Qualquer série da forma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$*, onde* $p \in \mathbb{R}$*, é chamada de série-p. Para essa série,*
$$r = R = \alpha = 1$$
para qualquer $p > 0$*; assim, ambos os testes são inconclusivos.*

  Para $p \leq 1$*, temos* $n^p \leq n$*, de modo que* $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$*. Como a série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge, concluímos, pelo teste da comparação, que a série-p diverge para* $p \leq 1$*.*

- *Considere*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k!}, \quad 0 < p < \infty.$$
Aqui, $a_k = \frac{p^k}{k!}$*. Assim,*
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{p^{k+1}}{p^k} \frac{k!}{(k+1)!} = p \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$
Pelo teste da razão, a série converge para todo $p, 0 < p < \infty$*. Neste exemplo, a presença de* $k!$ *torna o teste da raiz difícil de usar.*

- *Considere* $\sum a_n$*, onde*
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & \text{se } n = 2k \\ \frac{1}{3^k}, & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}.$$
Aqui,
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$
Por cálculo,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^k, & n = 2k \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k, & n = 2k+1 \end{cases}.$$
Consequentemente, $r = 0$ *e* $R = \infty$*. Portanto, o teste da razão é inconclusivo. Por outro lado,*
$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 2k \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{1/(2k+1)}, & n = 2k+1 \end{cases}$$
Temos que $\lim_{k\to\infty}(\sqrt{3})^{1/(2k+1)} = 1$*. Portanto,* $\alpha = 1/\sqrt{2}$*, e a série converge pelo teste da raiz.*

O Exemplo 4.334.33 fornece um exemplo de uma série para a qual o teste da razão é inconclusivo, mas o teste da raiz funcionou. Assim, parece que o teste da raiz é um teste mais forte, fato que é confirmado pelo teorema a seguir.

4.34 Teorema *Seja (a_n) uma sequência de números positivos. Então*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Observação: Como consequência do teorema, se uma série $\sum a_k$ converge pelo teste da razão, ou seja, $R < 1$, então também temos $\alpha < 1$. Similarmente, se $\sum a_k$ diverge pelo teste da razão, ou seja, $r > 1$, então também temos $\alpha > 1$. Assim, se o teste da razão prova a convergência ou divergência da série, o teste da raiz também o faz. O contrário, no entanto, como indicado acima, é falso.

Demonstração. Seja

$$R = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Se $R = \infty$, então não há nada a provar. Assim, suponha que $R < \infty$, e seja $\beta > R$ arbitrário. Então existe um número inteiro positivo n_0 tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \beta \quad \text{para todo } n \ge n_0.$$

Como na demonstração do teste da razão, isso nos dá $a_n \le M\beta^n$ para todo $n \ge n_0$, onde $M = a_{n_0}/\beta^{n_0}$. Logo,

$$\sqrt[n]{a_n} \le \beta \sqrt[n]{M} \quad \text{para todo } n \ge n_0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \beta.$$

Como $\beta > R$ era arbitrário, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le R$, o que prova o resultado. A desigualdade para o limite inferior é provada de maneira similar. □

Exercícios

4.27 — Seja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ uma série de termos positivos. Mostre que, se $a_{n+1} \ge a_n$ para todo n, então a série diverge.

4.28 — Determine a convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{e^j}$;

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j}$;

c) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j!}$;

d) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{j!}$;

e) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^2}{(2j)!}$;

f) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^3}{(3j)!}$.

4.29 —

a) Suponha que $a_n > 0$, $b_n > 0$, e $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ para todo n. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge se $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ converge.
Dica: Mostre que a sequência $\{a_n/b_n\}$ é não-crescente e use o Exercício 4.13.)

b) Use a parte (a) para testar a convergência das seguintes séries:
1. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{je^j j!}$;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{e^j j!}$.

Note que o teste da razão não fornece conclusões nesses exemplos.

4.30 — Teste a convergência da série $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!x^j}{j^j}$ para todo $x > 0$.

4.31 — Aplique o teste da raiz para investigar a convergência da série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^j}{j!}$.

4.32 — Determine a convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j}{2j-1}\right)^j$;

b) $\sum_{j=2}^{\infty} \left(j^{1/j} - 1\right)^j$;

c) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3j/2}{2^j}$;

d) $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{\alpha j}$ para todo α real;

e) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{\left(j^{1/2}+1\right)^j}$ para todo $x > 0$;

f) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(j^2+1\right)^{-j^2}}{\left(j^2+j+1\right)^{-j^2}}$;

g) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{j^2}$;

h) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{2^{j^2}}$.

4.33 — Considere a série $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j}\left(1 - \frac{1}{j}\right)^j$.

a) Mostre que o teste da raiz não é aplicável.

b) Teste a convergência da série. (**Dica:** use uma série conhecida.)

4.8 O numero e - revisitado

Nesta seção, demonstraremos que o número de Euler e pode ser representado pela série infinita $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Como consequência dessa representação, provaremos que e é um número irracional, ou seja, não pode ser expresso como a fração de dois números inteiros. Para esse fim, definimos e' pela série:

$$e' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Antes de prosseguir, mostraremos que essa série converge. Seja $a_n = \frac{1}{n!}$. Então:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Portanto, pelo Critério da Razão, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

Agora, vamos provar que e' é, de fato, o número de Euler.

4.35 Teorema

$$e' = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Demonstração. Definimos duas sequências:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{e} \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Por definição, temos

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e' \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Assim, o teorema será comprovado ao demonstrar que

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le e' \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} t_n \ge e'$$

Prova de que $\limsup_{n\to\infty} t_n \le e'$**.**

Pelo Teorema Binomial temos que

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

Podemos reescrever a igualdade anterior como:

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Como $1 - \frac{j}{n} \le 1$ para $j \ge 1$, temos

$$t_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le \limsup_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = e'.$$

Prova de que $\liminf_{n\to\infty} t_n \geq e'$**.**
Recorde que

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Fixe $m \in \mathbb{N}$ e seja $n \geq m$. Como os termos são não negativos, temos

$$t_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{j}{n}\right) = 1$ para cada j, segue que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} t_n &\geq \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\\ &= s_m.\end{aligned}$$

Como $\liminf_{n\to\infty} t_n \geq s_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \geq \lim_{m\to\infty} s_m = e'.$$

□

Agora mostraremos a taxa de convergência da sequência $s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ para e. Utilizaremos essa propriedade para demonstrar que e é um número irracional.

A taxa de convergência de uma sequência convergente é uma medida de quão rapidamente os termos da sequência s_n se aproximam de seu limite L à medida que n aumenta. Essa taxa é frequentemente expressa por meio de estimativas que limitam a diferença $|s_n - L|$ em termos de uma função que tende a zero quando $n \to \infty$.

No caso específico da sequência $s_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ que converge para e, a taxa de convergência é determinada pela desigualdade:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}.$$

Essa desigualdade nos fornece uma estimativa explícita de quão próxima s_n está de e para cada valor de n. O termo $\frac{1}{n!\,n}$ diminui extremamente rápido conforme n aumenta, devido ao crescimento exponencial do fatorial $n!$. Isso indica que a sequência s_n converge para e com uma taxa de convergência muito rápida.

4.36 Proposição (Taxa de convergência de s_n para e) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade:*

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}.$$

Demonstração. Consideremos a diferença entre e e s_n:

$$\begin{aligned}e - s_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right).\end{aligned}$$

Observando que cada termo subsequente é menor que o anterior, podemos majorar a soma infinita:

$$\begin{aligned}
e - s_n &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{n!\,n}.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}.$$

□

4.37 **Teorema** *O número e é irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que e seja racional. Então, existem inteiros positivos p e q tais que:

$$e = \frac{p}{q}.$$

Aplicando a proposição anterior com $n = q$, obtemos:

$$0 < e - s_q < \frac{1}{q!\,q}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $q!$, temos:

$$0 < q!\,e - q!\,s_q < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Note que $q!\,e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$ é um número inteiro, pois p e q são inteiros. Além disso, $q!\,s_q$ também é inteiro, já que:

$$q!\,s_q = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q} \text{inteiro} = \text{inteiro}.$$

Portanto, $q!\,e - q!\,s_q$ é um número inteiro positivo menor que 1, o que é impossível. Essa contradição implica que nossa suposição inicial está errada. Logo, e é irracional. □

4.9 *Teste da integral*

Para aplicar os critérios de comparação é necessário dispor de alguns exemplos de séries de comportamento conhecido. As séries geométricas e as séries p são importantes para esta finalidade. Novos exemplos podem ser obtidos de maneira muito simples por aplicação do critério de comparação com um integral, pela primeira vez demonstrado por Cauchy em 1837 .

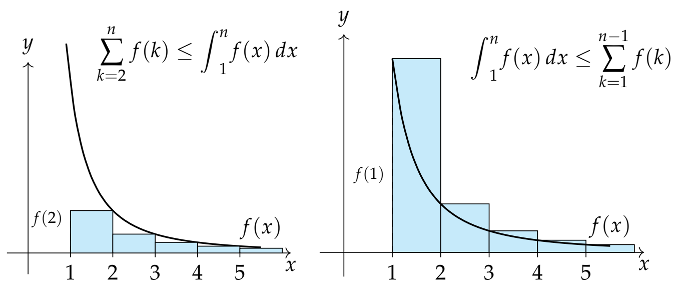
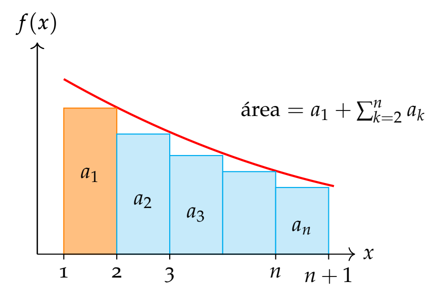


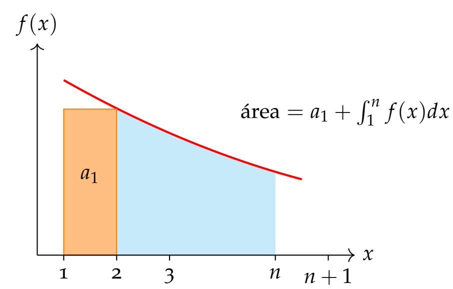
Figura 4.1: Ilustração do do critério de comparação com a integral.

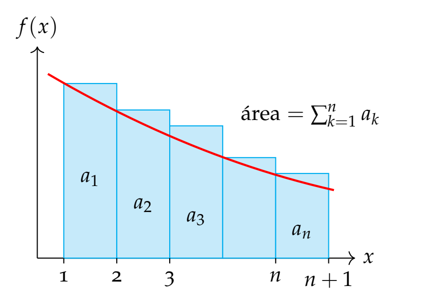
4.38 Teorema (Critério de comparação com a integral) *Se f é uma função positiva decrescente, definida para todo real $x \geq 1$ e, se para cada $n \geq 1$, é*

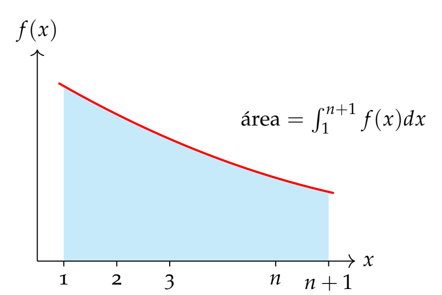
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad e \quad t_n = \int_1^n f(x)dx$$

então ambas as séries (s_n) e (t_n) convergem ou divergem.









Demonstração. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e que $a_k = f(k)$ para $k \geq 1$.

Para provar a primeira implicação, suponha que $\int_1^\infty f(x)dx$ converge, de modo que:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = L$$

para algum número finito L.

Como $a_k = f(k)$ para $k \geq 1$ e $f(x)$ é decrescente, podemos concluir que:

$$a_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_1^n f(x)dx$$

Somando o número finito a_1 em ambos os lados desta desigualdade, temos:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

(vide margem). Como $f(x) > 0$, $\int_1^n f(x)dx$ aumenta à medida que n aumenta, de modo que:

$$s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx \leq a_1 + \int_1^\infty f(x)dx = a_1 + L$$

Isso nos diz que a sequência (s_n) é limitada superiormente. Como $f(x) > 0$, sabemos que $a_{n+1} = f(n+1) > 0$ para qualquer $n \geq 1$, então:

$$s_{n+1} = a_{n+1} + s_n > s_n$$

o que significa que (s_n) é uma sequência crescente. O Teorema da Convergência Monótona nos diz, então, que (s_n) é uma sequência convergente, logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Agora, suponha que $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge. Como $a_k = f(k)$ para $k \geq 1$ e $f(x)$ é decrescente, podemos concluir que:

$$a_k \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Como $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$$

então (s_n) é uma sequência divergente e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

4.39 **Exemplo (Série p)** *O critério de comparação com um integral permite demonstrar que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge-se e somente se } p > 1$$

Fazendo $f(x) = x^{-s}$ tem-se

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{n^{1-p}-1}{1-p} & \text{se } p \neq 1 \\ \log n & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

Se $p > 1$ o termo $n^{1-p} \to 0$ quando $n \to \infty$ e por isso (t_n) converge. Pelo critério do integral, tal implica a convergência da série para $s > 1$.
Quando $p \leq 1$ então $t_n \to \infty$ e a série diverge. O caso especial $p = 1$, a série harmônica, também diverge. Esse caso já havia sido discutido no Exemplo 4.7.

4.40 **Exemplo** *O mesmo método pode ser utilizado para demonstrar que*[2]

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \quad \text{converge-se e somente se } s > 1$$

A correspondente integral neste caso é

$$t_n = \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s} dx = \begin{cases} \frac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1-s} & \text{se } s \neq 1 \\ \log(\log n) - \log(\log 2) & \text{se } s = 1 \end{cases}$$

Então (t_n) converge se e só se $s > 1$ e por tal motivo, em virtude do critério do integral, o mesmo acontece com a série em questão.

[2] Inicia-se a soma com $n = 2$ para evitar que $\log n$ se anule.

Exercícios

4.34 — Determine se as seguintes séries convergem ou divergem e justifique sua resposta:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

4.10 Séries alternadas

Dedicamos os estudos anteriores à análise minuciosa de séries de termos não negativos. Agora, nosso foco se volta para séries alternadas, que se caracterizam pela alternância de sinais em seus termos, e que podem ser expressas na forma geral:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

com $a_n > 0$.

4.41 **Teorema (Teste de Séries Alternadas)** *Se (a_n) é uma sequência decrescente de números positivos e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge.*

Demonstração. Vamos mostrar que a sequência (s_n) das somas parciais converge. Existem dois tipos de somas parciais, dependendo de estarmos somando um número ímpar ou par de termos. Por exemplo,

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Agora, como (a_n) é decrescente, temos $a_k - a_{k+1} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

e a subsequência (s_{2n}) é crescente. Ela também é limitada superiormente, pois para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Portanto, pelo *Teorema da Convergência Monótona*, a subsequência (s_{2n}) converge para algum número real s.

Para as somas parciais de índice ímpar, temos

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Mas $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, então devemos ter $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$.

Combinando esses resultados, vemos que, dado $\varepsilon > 0$, existem N_1 e N_2 tais que $n \geq N_1$ implica que $|s_{2n} - s| < \varepsilon$ e $n \geq N_2$ implica que $|s_{2n+1} - s| < \varepsilon$. Assim, para $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, $|s_n - s| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$, de modo que a sequência (s_n) das somas parciais converge. □

4.42 **Exemplo** *Como a sequência $(1/n)$ é decrescente e $1/n \to 0$, vemos que a série harmônica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ converge.*

Para determinarmos o valor dessa série utilizaremos a série logarítmica

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

que como provaremos mais adiante converge sempre que $-1 < x \leq 1$. Para x positivo é uma série alternada. Em particular, quando $x = 1$, obtemos a fórmula

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

a qual nos diz que a soma da série harmônica alternada é $\log 2$. *Este resultado é de particular interesse em virtude do fato da série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergir.*

Exercícios

4.35 — Determine a convergência ou divergência das seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n-1)}{2n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$

4.36 — Determine se as seguintes séries convergem absolutamente e condicionalmente:

a) $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j-\sqrt{j}}$.

b) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{j+2}{3}\right)^j$.

c) $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^2\left(\frac{x}{x+1}\right)^j$, para todo $x \neq -2$.

d) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(1 + \frac{j-1}{2j}\right)$.

4.37 — Seja (a_n) uma sequência decrescente de números positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Mostre que a soma s da série alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ está entre qualquer par de somas parciais sucessivas. Isto é, mostre que $s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$. Use isso para concluir que, para todo n, $|s - s_n| \leq a_{n+1}$. Assim, o erro ao parar no n-ésimo termo não excede o valor absoluto do próximo termo.

4.38 — Mostre que a série é convergente. Quantos termos da série são necessários para somar com a precisão indicada?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ (erro $< 0{,}01$)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$ (erro $< 0{,}0001$)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ (erro $< 0{,}00005$)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}$ (erro $< 0{,}01$)

4.11 Rearranjo de Séries

A propriedade comutativa da adição garante que, em uma soma finita, a ordem dos termos não altera o resultado final. No entanto, essa propriedade não se estende, em geral, a somas infinitas (séries). Ao lidarmos com séries infinitas, a situação torna-se mais complexa, e algumas propriedades intuitivas podem não se manter. Em 1852, o matemático Bernhard Riemann demonstrou um resultado surpreendente: a ordem dos termos em uma série condicionalmente convergente pode afetar o valor da soma, podendo até mesmo fazer com que a série convirja para diferentes valores ou divirja.

Considere a série alternada:

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

Essa série converge para 0, pois, para um número suficientemente grande de termos, as somas parciais se aproximam arbitrariamente de 0. No entanto, se substituirmos todos os termos pelos seus valores absolutos, obtemos

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$$

que é uma série divergente, pois equivale à série harmônica duplicada. Assim, a série original é *condicionalmente convergente*.

Utilizando rearranjos apropriados dos termos da série original, é possível obter séries que convergem para valores diferentes de zero. Por exemplo, ao reordenar os termos tomando dois termos positivos seguidos de um termo negativo, repetidamente, obtemos:

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \dots$$

Essa série converge para um valor diferente de zero. De fato, de maneira geral, ao rearranjar os termos de uma série condicionalmente convergente, podemos fazer com que a nova série convirja para qualquer número real pré-determinado, ou mesmo que divirja. Esse resultado notável é conhecido como *Teorema de Riemann*.

O exemplo anterior ilustra que a ordem dos termos em uma série condicionalmente convergente pode influenciar o valor de sua soma. No entanto, essa alteração na soma não ocorre em séries absolutamente convergentes. A seguir, provaremos que a reordenação dos termos de uma série absolutamente convergente não altera sua soma. Antes de iniciarmos a demonstração, formalizaremos os conceitos de convergência condicional e rearranjo.

4.43 **Definição** *Uma série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita* ***condicionalmente convergente*** *se ela converge, mas a série dos valores absolutos de seus termos, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, diverge.*

4.44 **Definição** *Uma* ***permutação*** *dos números naturais é uma bijeção do conjunto dos números naturais nele mesmo, isto é, uma função $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que é injetiva e sobrejetiva.*

4.45 **Exemplo** *A função $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por*

$$\sigma(k) = \begin{cases} k-1 & \text{se } k \text{ é par} \\ k+1 & \text{se } k \text{ é impar} \end{cases}$$

é uma permutação dos naturais.

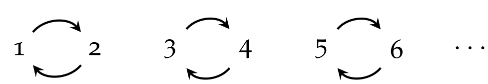


Ilustração da permutação dos naturais com a função $\sigma(k)$ Isso significa que, se σ é uma permutação, então para cada número natural b, existe exatamente um número natural a tal que $\sigma(a) = b$. Em particular, se $x \neq y$, então $\sigma(x) \neq \sigma(y)$.

4.46 **Definição** *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série e σ é uma permutação dos números naturais, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde $b_n = a_{\sigma(n)}$, é dita um* ***rearranjo*** *da série original.*

4.47 **Teorema** *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente com soma L. Então, todo rearranjo dessa série também converge absolutamente e tem soma L.*

Demonstração. Seja σ uma permutação dos números naturais e considere o rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde $b_n = a_{\sigma(n)}$. Primeiramente observamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolutamente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ é uma série de termos não-negativos cujas somas parciais são limitadas superiormente por $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Para mostrar que a soma do rearranjo é igual a L, consideremos as somas parciais $L_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, temos que $L_n \to L$ quando $n \to \infty$. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N_1$, temos $|L_n - L| < \varepsilon$. Também temos que existe N_2 tal que para $n > N_2$ temos que $\sum_{k=n}^{\infty} a_n < \varepsilon$ pois $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Como σ é uma bijeção, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(M)\}$$

contém todos os índices de 1 a $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, para $n \geq M$, as somas parciais B_n incluem todos os termos $a_1, a_2, \ldots, a_N$, possivelmente em ordem diferente.

Podemos escrever:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{j \in J} a_j,$$

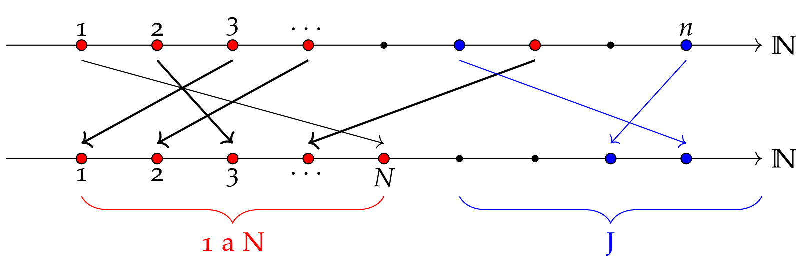
onde J é o conjunto de índices $j > N$ tais que $\sigma(k) = j$ para algum $k \leq n$.

Então,

$$B_n - L = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i - L \right) + \sum_{j \in J} a_j.$$

Como $\left| \sum_{i=1}^{N} a_i - L \right| = |L_N - L| < \varepsilon$ e $\left| \sum_{j \in J} a_j \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon$, Concluímos que $|B_n - L| < 2\varepsilon$.

Assim, $B_n \to L$ quando $n \to \infty$, ou seja, a soma do rearranjo é igual a L. □



A hipótese de convergência absoluta no Teorema 4.47 é essencial. Bernhard Riemann mostrou que, para séries condicionalmente convergentes de termos reais, é possível rearranjar os termos de forma que a série resultante convirja para qualquer soma pré-determinada ou até mesmo que divirja. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Riemann de Reordenamento de Séries*.

Uma propriedade fundamental de séries condicionalmente convergentes é que elas possuem infinitos termos positivos e infinitos termos negativos. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ condicionalmente convergente e definamos:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \qquad a_n^- = \min\{a_n, 0\}. \tag{4.9}$$

Assim, a_n^+ é igual a a_n se a_n for positivo, e zero caso contrário; a_n^- é igual a a_n se a_n for negativo, e zero caso contrário.

Podemos então escrever:

$$a_n = a_n^+ + a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ - a_n^-.$$

Analisando as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, temos o seguinte resultado.

4.48 Teorema *Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos reais, vale que:*

1. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente, então ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergem.*
2. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem, e temos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Demonstração. 1. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, mas $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, e sabendo que $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n^-$ não podem ambas convergir, pois isso implicaria na convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Como os termos a_n^+ e $-a_n^-$ são não negativos, e a soma de pelo menos uma delas diverge, ambas devem divergir.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n^-$ convergem, pois seus termos são não negativos e menores ou iguais a $|a_n|$. Portanto, ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem, e a igualdade segue diretamente da definição de $a_n = a_n^+ + a_n^-$. □

Este resultado reforça a importância da convergência absoluta na análise de séries infinitas. Enquanto séries absolutamente convergentes têm suas somas inalteradas por rearranjos, séries condicionalmente convergentes podem ter suas somas drasticamente alteradas pela reordenação de seus termos.

4.12 Teorema do Rearranjo de Riemann

Agora, podemos demonstrar o Teorema do Rearranjo de Riemann.

4.49 Teorema (Teorema do Rearranjo de Riemann) *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente de termos reais e seja L um número real dado. Então, existe um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos termos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge para L.*

Demonstração. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente, as séries de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e de termos negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ ambas divergem (para $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente), onde:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Vamos construir um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que converge para L seguindo o procedimento a seguir:

1. Selecionamos termos positivos a_n^+ em ordem, somando-os até que a soma parcial exceda L. Seja p_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{p_1} a_n^+ > L.$$

2. Em seguida, adicionamos termos negativos a_n^- em ordem, somando-os até que a soma parcial fique abaixo de L. Seja q_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$S_2 = S_1 + \sum_{n=1}^{q_1} a_n^- < L.$$

3. Repetimos o processo: adicionamos mais termos positivos suficientes para que a soma parcial exceda L novamente, depois mais termos negativos para que a soma fique abaixo de L, e assim por diante.

Assim, construímos uma sequência de somas parciais S_k que alternam em torno de L. Como os termos a_n tendem a zero (pois $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge), a diferença $|S_k - L|$ diminui conforme avançamos no processo.

Mais precisamente, a diferença entre cada soma parcial e L é limitada pelo módulo do próximo termo a ser adicionado:

$$|S_k - L| \leq |a_{N_k}|,$$

onde N_k é o índice do último termo adicionado na k-ésima etapa. Como $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que $|S_k - L| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Portanto, o rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge para L, conforme desejado. □

Exercícios

4.39 — Determine se cada série converge condicionalmente, converge absolutamente ou diverge. Justifique sua resposta.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$
b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n}$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$
f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$
h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
j) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)$

4.13 *Representação decimal dos números reais II*

Na seção 1.13 apresentamos uma breve discussão sobre a representação dos números reais, e um dos pontos problemáticos levantados era o significado preciso das representações decimais infinitas, como a do número

$$r = 1,23857572047657368856 92....$$

Naquele ponto apresentamos uma interpretação para as representações infinitas, que relida aos olhos dos conceitos desse capítulo nos dizia que o limite da sequência dos "truncamentos da representação infinita" seria o número r. De posse dos conceitos de limite, vamos olhar mais cuidadosamente a essa representação. Para isso, começaremos construindo a partir um número real r sua representação decimal.

A observação fundamental para construirmos a representação de um número real é a afirmação bastante natural e intuitiva que dado um número real r existe um inteiro a_0 tal que

$$a_0 \leq r < a_0 + 1,$$

sendo que a igualdade na expressão anterior somente ocorre se r for um inteiro. O número a_0 descrito assim será a parte inteira da representação decimal de r.

Para encontrarmos o primeiro dígito da representação decimal de r, considere agora o número real $r - a_0$, que claramente está no intervalo $[0, 1)$. Logo, o número $10(r - a_0)$ está no intervalo $[0, 10)$. Novamente, sabemos existe um inteiro a_1 com $a_1 \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ tal que $a_1 \leq 10(r - a_0) < a_1 + 1$. Ou seja, de modo equivalente existe a_1 tal que:

$$\frac{a_1}{10} \leq (r - a_0) < a_1 + 1 < \frac{(a_1 + 1)}{10}$$

e logo

$$0 \leq r - (a_0 + \frac{a_1}{10}) < \frac{1}{10}.$$

Para encontrarmos o segundo dígito da representação decimal consideramos $r - (a_0 + \frac{a_1}{10}$, que como sabemos está no intervalo $[0, 1/10)$ multiplicando por 100 temos teremos um número no intervalo $[0, 10)$.

E assim novamente temos que existe um inteiro a_2, com $a_2 \in (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ tal que $a_2 \leq 100(r - (a_0 + \frac{a_1}{10}) < a_2 + 1$. ou seja tal que

$$0 \leq r - (a_0 + \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{100}) < \frac{1}{100}.$$

Na n-enésima etapa teremos:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{100} + \cdots \frac{an}{10^n} \leq r < a_0 + \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{100} + \cdots \frac{an+1}{10^n} \tag{4.10}$$

ou de modo equivalente

$$0 \leq r - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{100} + \cdots \frac{an}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n} \tag{4.11}$$

Desta forma construímos para um número real r sua representação decimal $a_0.a_1a_2a_3\cdots$, onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ para todo $i > 0$. Veja que para sermos precisos, o resultado de nossa construção foi uma série infinita cujas somas parciais são:

$$s_n = \sum_{n=0}^{n} a_n 10^n$$

E pela desigualdade 4.10 temos a seguinte estimativa do erro da aproximação:

$$|r - s_n| < \frac{1}{10^n}$$

e assim temos que a série converge a r.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 10^n = r.$$

Exercícios

4.40 — Prove que a representação decimal de um número racional é finita ou periódica.

4.41 — Prove que se a representação decimal de um número é finita ou periódica então ele é racional.

4.42 — Prove que todo número cuja representação decimal é da forma forma $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ com $a_n \neq 0$ também pode ser representado como $a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)99999\cdots$

4.43 — Prove que a constante de Liouville $L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ é irracional.

Referências Bibliográficas

Stephen Abbott et al. *Understanding analysis*, volume 2. Springer, 2001.

Mustafa A Akcoglu, Paul FA Bartha, and Dzung Minh Ha. *Analysis in vector spaces*. John Wiley & Sons, 2011.

Tom M Apostol. *Cálculo I: cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à álgebra linear*. Reverte, 2021.

Ethan D Bloch. *The real numbers and real analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.

John M Howie. *Real analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.

Syafiq Johar. *The Big Book of Real Analysis*. Springer, 2023.

Finnur Lárusson. *Lectures on real analysis*, volume 21. Cambridge University Press, 2012.

Steven R Lay. *Analysis: An introduction to proof*. Pearson, 2014.

Elon Lages Lima. *Análise real*, volume 1.

Charles HC Little, Kee L Teo, and Bruce Van Brunt. *Real analysis via sequences and series*. Springer, 2015.

Robert Magnus et al. *Fundamental mathematical analysis*. Springer, 2020.

Rinaldo B Schinazi. *From calculus to analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.

Terence Tao. *Analysis I*, volume 1. Springer, 2006.

Vladimir Antonovich Zorich and Octavio Paniagua. *Mathematical analysis I*. Springer, 2016.

Índice Remissivo