LISTA 5

Sequências e Séries de Funções

1 — Encontre os limites pontuais de cada uma das seguintes sequências de funções no conjunto dado.

a $\left(\dfrac{nx}{1+nx}\right), \quad x \in [0,\infty)$.

b $\left(\dfrac{\operatorname{sen} nx}{1+nx}\right), \quad x \in [0,\infty)$.

c $\left((\cos x)^{2n}\right), \quad x \in \mathbb{R}$.

d $\left(nxe^{-nx^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$.

2 —

a Se (f_n) e (g_n) convergem uniformemente em um conjunto não vazio A, prove que (f_n+g_n) converge uniformemente em A.

b Se (f_n) e (g_n) convergem uniformemente em um conjunto não vazio A e, além disso, existem constantes M e N tais que $|f_n(x)| \leq M$ e $|g_n(x)| \leq N$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in A$, prove que $(f_n g_n)$ converge uniformemente em A.

c Encontre exemplos de sequências (f_n) e (g_n) que convergem uniformemente em um conjunto não vazio A, mas para as quais $(f_n g_n)$ não converge uniformemente em A.

3 — Mostre que, se (f_n) converge uniformemente em (a,b) e $(f_n(a))$ e $(f_n(b))$ convergem, então (f_n) converge uniformemente em $[a,b]$.

4 — Seja $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. Mostre que (f_n) não converge uniformemente para 0 em $[0,1]$.

5 — Mostre que a sequência (nxe^{-nx^2}) converge uniformemente para 0 em $[a,\infty)$ para todo $a>0$.

6 — Dê um exemplo de uma sequência de funções que não é contínua em nenhum ponto, mas que converge uniformemente para uma função contínua.

7 — Nos itens a seguir determine o raio de convergência das séries de potências fornecidas. Teste a convergência nos pontos de fronteira, caso o raio de convergência seja finito.

a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$.

b $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)2^n}$.

c $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$.

d $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 2^n z^n}{2n}$.

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[1-(-2)^n\right] z^n$.

f $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$.

g $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{n^2+1}$.

h $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} z^n}{n}$.

8 — Suponha que a sequência (a_n) seja limitada, mas que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Prove que o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é igual a 1.

9 — Se $A \subseteq \mathbb{R}$, defina $-A$ como sendo $\{-a : a \in A\}$. Seja A o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Prove que o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ é $-A$.

10 — Nos itens a seguir determine o raio de convergência das séries de potências fornecidas.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\operatorname{sen} an)z^n, \quad a > 0.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(\operatorname{senh} an)z^n, \quad a > 0.$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{a^n+b^n}, \quad a > 0,\ b > 0.$

11 — Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência em $\mathbb{R}$ para as seguintes séries de potências:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} j^{20}x^j.$

b) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{3^j j^4}.$

c) $\sum_{j=1}^{\infty} j\,x^j.$

d) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{5^j}x^j.$

e) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j j^2 x^j.$

f) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}x^j.$

g) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{(2j)}j}{(j!)^2}x^j.$

h) $\sum_{j=1}^{\infty}\ln(j)x^j.$

12 — Para cada uma das séries de potências nos itens a seguir determine o conjunto de todos os valores reais de x para os quais a série converge e calcule a soma da série.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n.$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^n.$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}x^n.$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}.$

g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$

h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}.$

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}.$

j) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+2)!}.$

13 — Cada uma das funções nos itens a seguir admite uma representação em série de potências em termos de x. Suponha a existência da expansão, verifique que os coeficientes têm a forma indicada e mostre que a série converge para os valores de x indicados.

a) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n, \quad a > 0$ (todo x). **Dica:** $a^x = e^{x\log a}$.

b) $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (todo x).

c) $\operatorname{sen}^2 x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ (todo x). **Dica:** $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

d) $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$ ($|x| < 2$).

e) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ (todo x).

14 — Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Qual é a série de Maclaurin de p?

15 — Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja representada por uma série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Encontre uma condição na sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ que seja equivalente à condição $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e prove a equivalência. Uma função que satisfaz essa condição é chamada de função **par**.

16 — Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja representada por uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Seja R o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Encontre uma condição na sequência $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ que seja equivalente a f ter um máximo local em a, e prove a equivalência.