LISTA 4

Sequências

1 — Seja $x:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ e $y:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ duas sequências. Prove que

- **a** Se $x,y\in\mathcal{C}$, então $(x+y)\in\mathcal{C}$ e $(xy)\in\mathcal{C}$.
- **b** Se $x,y\in\mathcal{N}$, então $(x+y)\in\mathcal{N}$ e $(xy)\in\mathcal{N}$.
- **c** Se $x\in\mathcal{N}$ e $y\in\mathcal{C}$, então $(xy)\in\mathcal{N}$.

2 — Prove que as operações de soma $[x]+[y]$ e produto $[x]\cdot[y]$ definidos como

$$[x]+[y]\stackrel{\text{def}}{=}[x+y] \quad \text{e} \quad [x]\cdot[y]\stackrel{\text{def}}{=}[xy]$$

satisfazem:

- **a** Comutatividade da soma e da multiplicação.
- **b** Associatividade da soma e da multiplicação.
- **c** Existência do oposto da soma.

3 — Prove que o número real [0] não é nem positivo nem negativo.

4 — Seja $x\in\mathbb{R}$. Não é possível que ambos x e $-x$ sejam positivos.

Séries

5 — Mostre que cada uma das séries a seguir é divergente:

- **a** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$
- **b** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$
- **c** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
- **d** $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

6 — Encontre a soma de cada uma das séries a seguir:

- **a** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
- **b** $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
- **c** $\sum_{n=0}^{\infty}2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
- **d** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$
- **e** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$
- **f** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$
- **g** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$

7 — Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, suponha que existe um número natural N tal que $a_n=b_n$ para todo $n\geq N$. Prove que $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum b_n$ é convergente. Assim, a convergência de uma série não é afetada pela alteração de um número finito de termos. (Claro, o valor da soma pode mudar.)

8 — Seja (a_n) uma sequência de números reais não negativos. Prove que $\sum a_n$ converge se, e somente se, a sequência das somas parciais é limitada.

9 — Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ converge. Justifique sua resposta.

10 — [Critério de Cauchy para Séries] Prove que: Uma série infinita $\sum a_n$ converge se, e somente se, para cada $\varepsilon>0$, existe um número natural N tal que, se $n\geq m\geq N$, então

$$|a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n|<\varepsilon.$$

11 — Determine se as seguintes séries convergem ou divergem e justifique sua resposta:

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$

c $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

d $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n^2}$

12 — Prove que, se $\sum |a_n|$ converge e (b_n) é uma sequência limitada, então $\sum a_n b_n$ também converge.

13 — Seja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ uma série de termos positivos. Mostre que, se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, então a série diverge.

14 — Teste a convergência das seguintes séries:

a $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!\, e^j}{j^j}$

b $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{j!\, j!}$

c $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j^2}{j!}$

d $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)!}{j!\, j}$

e $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^2}{(2j)!}$

f $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^3\, 3j}{(2j)!}$

15 —

a Suponha que $a_n > 0$, $b_n > 0$, e $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ para todo n. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge se $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ converge.
Dica: Mostre que a sequência $\{a_n/b_n\}$ é não-crescente e use o Exercício 12.)

b Use a parte (a) para testar a convergência das seguintes séries:

1. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{j e^j j!}$;
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{e^j j!}$.

Note que o teste da razão não fornece conclusões nesses exemplos.

16 — Determine se as seguintes séries convergem ou divergem, justificando sua resposta:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$