LISTA 3

Sequências

1 — Prove a partir da definição que $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

2 —

a) Mostre que se a_n converge para a, então $|a_n|$ converge para $|a|$
Dica: use que $||x| - |y|| \le |x - y|$.

b) É verdade que se $|a_n|$ converge, então a_n converge? Prove ou forneça um contraexemplo.

3 — Seja a_n uma sequência de números reais, e L um número real. Defina $b_n = |a_n - L|$. Mostre que a_n converge para L se, e somente se, b_n converge para 0.

4 — Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Prove que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

5 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n^2 + n$

b) $a_n = n^2 - 7n$

c) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

6 — Prove que as seguintes sequências divergem:

a) $n - 10000$

b) $n!$

c) n^3

d) $(-1)^n n$

e) $a_1 = 1$ $a_n = n \cdot a_{n-1}$

7 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

8 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma dessas duas. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n^2 + n$

b) $a_n = n^2 - 7n$

c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

d) $a_n = \dfrac{2n-6}{3n+4}$

e) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

9 — Prove por indução que se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

a) Usando o exercício anterior, mostre que dados $p, q \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

b) Mostre que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\alpha} = a^{\alpha}.$$

10 — Suponha que a_n seja uma sequência crescente, b_n seja uma sequência decrescente, e que $a_n \le b_n$ para todo $n \ge 1$.

a) Mostre que a_n e b_n convergem.

b Se, além das hipóteses anteriores, temos que $b_n - a_n$ converge para 0, prove que a_n e b_n convergem para o mesmo limite.

11 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

12 — Dê um exemplo de uma sequência não limitada que não diverge para $+\infty$ ou para $-\infty$.

13 — Para s_n a sequência de termo geral dado abaixo, determine a convergência ou divergência da sequência (s_n). Calcule, caso exista, $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

a $s_n = \frac{n^4+3n+1}{5n^4+2}$

b $s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

c $s_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

d $s_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$

e $s_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$, onde α é um real dado

f $s_n = \int_0^n e^{-sx} dx (s > 0)$

g $s_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$

h $s_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}$

i $s_n = \frac{n^2-2}{n+1}$

j $s_n = \frac{1-n}{2^n}$

k $s_n = \frac{3^n}{n^3+5}$

14 — Seja a_n uma sequência de números reais que converge para L. Defina $b_n = a_{n+k_0}$. Mostre que b_n também converge para L.

15 —

a Dê um exemplo de uma sequência convergente (s_n) de números positivos tal que $\lim(s_{n+1}/s_n) = 1$.

b Dê um exemplo de uma sequência convergente (t_n) de números positivos tal que $\lim(t_{n+1}/t_n) = 1$.

16 — Prove:

a Se $\lim s_n = +\infty$ e $k > 0$, então $\lim k s_n = +\infty$.

b Se $\lim s_n = +\infty$ e $k < 0$, então $\lim k s_n = -\infty$.

c $\lim s_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim(-s_n) = -\infty$.

d Se $\lim s_n = +\infty$ e se (t_n) é uma sequência limitada, então $\lim(s_n + t_n) = +\infty$.

17 — Mostre que se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, então $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

18 — Mostre que se $a_n > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

19 — Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

20 — Mostre que, se uma sequência $(a_n)_{n=1}^\infty$ não é limitada superiormente, então existe uma subsequência $\left(a_{k_n}\right)_{n=1}^\infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$. Um resultado similar vale se a sequência não for limitada inferiormente, mas $-\infty$ substitui ∞.

21 — Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

22 — Dizemos que uma sequência (s_n) é contrativa se existe uma constante k com $0 < k < 1$ tal que $|s_{n+2} - s_{n+1}| \leq k |s_{n+1} - s_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que toda sequência contrativa é uma sequência de Cauchy e, portanto, é convergente.