LISTA 2

Topologia da Reta

Valor absoluto

1 — Demonstre as seguintes propriedades do módulo;

- a) $|x-y| = |y-x|$
- b) $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$
- c) $|x \cdot y| = |x||y|$
- d) Se $c \geq 0$ então $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$
- e) $-|x| \leq x \leq |x|$
- f) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)
- g) $||x| - |y|| \leq |x-y|$
- h) Se $|x-y| < c$, então $|x| < |y| + c$.

2 — (Não existência de Infinitesimais) Mostre que se $|x-a| < \varepsilon$ para todo ε então $x = a$.

Topologia da Reta

3 — Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.

4 — Dado um número natural $p > 1$, prove que os números racionais da forma $\frac{m}{p^n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ constituem um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

5 — Prove ou forneça um contraexemplo: Se um conjunto S possui um máximo e um mínimo, então S é um conjunto fechado.

6 — Seja A um subconjunto não vazio e aberto de $\mathbb{R}$ e seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Prove que $A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

7 — Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Prove o seguinte:

- a) $\operatorname{int} S$ é um conjunto aberto.
- b) $\operatorname{int}(\operatorname{int} S) = \operatorname{int} S$.
- c) $\operatorname{int}(S \cap T) = (\operatorname{int} S) \cap (\operatorname{int} T)$.
- d) $(\operatorname{int} S) \cup (\operatorname{int} T) \subseteq \operatorname{int}(S \cup T)$.
- e) Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

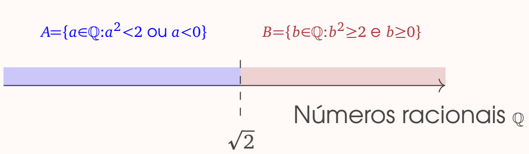
8 — [Corte de Dedekind] Um par ordenado (A, B) onde A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que a não possui elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $x < y$ é dito corte de Dedekind [1]

- a) Prove que, num corte de Dedekind (A, B), vale $\sup A = \inf B$.
- b) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind.

[1] Um exemplo típico de corte de Dedekind dos números racionais $\mathbb{Q}$ é dado pela partição (A, B) com

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2 \text{ ou } a < 0\},$$
$$B = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 \geq 2 \text{ e } b \geq 0\}.$$

Como veremos posteriormente este corte representa o número irracional $\sqrt{2}$ na construção do corpo dos reais de Dedekind.



Prove que existe uma bijeção $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

9 — Se A é aberto e B é fechado, prove que $A \backslash B$ é aberto e $B \backslash A$ é fechado.

10 — Prove: $(\mathrm{cl}\,S) \backslash (\mathrm{int}\,S) = \partial S$.

11 — Seja S um conjunto infinito e limitado e seja $x = \sup S$. Prove: Se $x \notin S$, então $x \in S'$.

12 — Suponha que S seja um conjunto não vazio e limitado, e seja $m = \sup S$. Prove ou forneça um contraexemplo: m é um ponto de fronteira de S.

13 — Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Prove o seguinte:

- **a** $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\,S) = \mathrm{cl}\,S$.
- **b** $\mathrm{cl}(S \cup T) = (\mathrm{cl}\,S) \cup (\mathrm{cl}\,T)$.
- **c** $\mathrm{cl}(S \cap T) \subseteq (\mathrm{cl}\,S) \cap (\mathrm{cl}\,T)$.
- **d** Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

14 — Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja $\overline{S}$ a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm S.

- **a** Prove que $\overline{S}$ é um conjunto fechado.
- **b** Prove que $\overline{S}$ é o menor conjunto fechado que contém S. Ou seja, mostre que $S \subseteq \overline{S}$, e se C é qualquer conjunto fechado que contém S, então $\overline{S} \subseteq C$.
- **c** Prove que $\overline{S} = \mathrm{cl}\,S$.
- **d** Se S é limitado, prove que $\overline{S}$ é limitado.

15 — Dê exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados (ilimitados) cuja interseção seja vazia e de uma sequência decrescente de intervalos (abertos) limitados cuja interseção seja vazia.