LISTA 1

Números Reais

Corpo

1 — Mostre que num corpo valem:

a) $-0 = 0$.

b) $1^{-1} = 1$.

c) Zero não admite reciproco.

d) Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.

e) Se $a \neq 0$, então $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

f) $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.

g) $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$

h) $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

i) $-(a - b) = -a + b$.

j) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

2 — Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dados $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, definimos a soma e o produto, respectivamente, como:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) \overset{\text{def}}{=} (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) \overset{\text{def}}{=} (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\ .$$

Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo.

3 — Seja $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais, pode ser descrito como $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, quando visto como conjunto. As operações neste corpo são definidas da seguinte forma: a soma de dois elementos $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e o produto $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy')$. O elemento neutro da adição é $(0, 0)$ e o neutro da multiplicação é $(1, 0)$. Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ é um corpo.

Corpo Ordenado

4 — Mostre que num corpo ordenado completo valem as seguintes afirmações:

a) Não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.

b) A soma de dois números negativos é um número negativo.

c) Se $a > 0$, então $1/a > 0$, se $a < 0$, então $1/a < 0$.

d) Se $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

e) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

f) Para números reais a e b quaisquer tem-se $a^2 + b^2 \geq 0$. Se a e b não são ambos 0 , então $a^2 + b^2 > 0$.

g) Se x verifica $0 \leq x < h$ para todo o número real positivo h, então $x = 0$.

5 — Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ não é um corpo ordenado.

Indução

6 — Prove que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

7 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9 — Prove que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$ para todo $n \in \mathbb{N}$

10 — Prove que $1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, quando $r \neq 1$.

Corpo ordenado completo

11 — Seja $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$. Prove que $\inf X = 0$.

12 —

- a) Se x e y são números reais quaisquer com $x < y$, prove que existe pelo menos um número real z tal que $x < z < y$.
- b) Se x é um número real arbitrário, prove que existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.
- c) Se $x > 0$, prove que existe um inteiro positivo n tal que $1/n < x$.
- d) Se x é um número real arbitrário, prove que existe um inteiro n único que verifica as desigualdades $n \leq x < n+1$. Este n é chamado a parte inteira de x e representa-se por $[x]$.

13 — Sejam $X \subset \mathbb{R}$ näo-vazio, limitado superiormente, e c um número real. Tem-se $c \leq \sup X$ se, o somente se, para cada $\varepsilon > 0$ real dado pode-so achar $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < X$. Enuncie e demonstre um resultado análogo com ínfimo em vez de supremo.

14 — Seja $I = [0,1)$. Prove que $\sup I = 1$.

15 — Sejam $A \subset B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

16 — Dado $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado inferiormente, seja $-A = \{-x; x \in A\}$. Prove que $-A$ é limitado superiormente e que sup $(-A) = -\inf A$.

17 — Seja $A \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $c \cdot A = \{c \cdot x; x \in A\}$. Prove que $c \cdot A$ é limitado e que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A, \quad \inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$. Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

* **18 —** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita lLimitada quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

- a) Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to R$ é uma função limitada $f + g : X \to R$.
- b) Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$
- c) Conclua que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.
- d) Considerando as funções $f, g : [-1,+1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que se pode ter $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

19 — Sejam A e B conjuntos de números reais positivos. Definimos

$$A \cdot B = \{x \cdot y; x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Prove que se A e B forem limitados então $A \cdot B$ é limitado, sendo $\sup(A \cdot B) = \sup A \quad \sup B$ e $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.