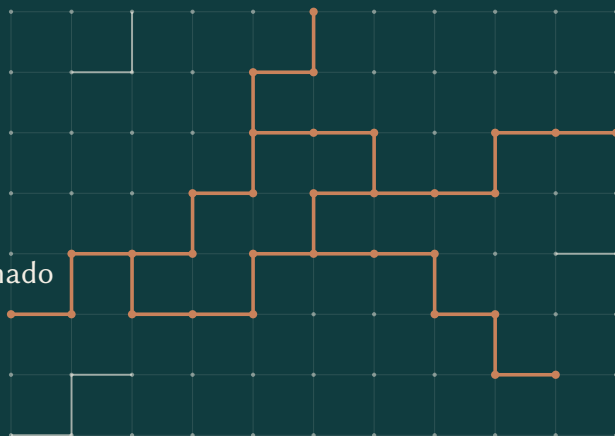


PROBABILIDADE, GEOMETRIA E TRANSIÇÃO DE FASE

# Percolação

Conectividade aleatória, transição de fase e geometria em grafos

Daniel Miranda Machado  
Cristian Coletti



Texto: Daniel Miranda Machado e Cristian Coletti.  
Universidade Federal do ABC.  
Composição em formato 17 × 24 cm.  
Versão de trabalho – setembro de 2026.

## Créditos editoriais e técnicos

Este livro foi preparado editorialmente a partir das notas originais dos autores, com revisão de português, homogeneização de notação, reorganização de capítulos e auditorias matemáticas das demonstrações. A preparação recente incluiu a revisão dos capítulos de percolação, transporte de massa, unicidade da componente infinita, regime subcrítico e do argumento de Duminil–Copin e Tassion, além da migração para a identidade tipográfica da coleção Soleira. *A responsabilidade final pelo conteúdo matemático e pelas escolhas autorais permanece com os autores.*

## Licença

© 2026 Daniel Miranda Machado e Cristian Coletti. Exceto quando indicado em contrário, esta obra está licenciada sob a **Creative Commons Atribuição–NãoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0)**. É permitida a cópia, redistribuição e adaptação do material, em qualquer meio ou formato, desde que seja atribuída a autoria apropriada e que o uso não tenha finalidade comercial. Uma cópia da licença está disponível em

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>.

# Motivação

---

A percolação estuda fenômenos de conectividade em redes aleatórias. Sua formulação foi motivada pelo transporte de fluidos em meios porosos, como o escoamento de óleo ou gás em formações rochosas e a passagem da água pelo pó de café. O modelo foi introduzido por Broadbent e Hammersley na década de 1950.

O termo *percolação* designa a passagem de um fluido por uma rede de poros e canais microscópicos. Em uma descrição simplificada, cada canal pode estar aberto ou fechado à passagem do fluido. No modelo mais básico, os estados dos canais são independentes: cada um está aberto com probabilidade  $p$  e fechado com probabilidade  $1 - p$ .

A conectividade do meio depende de como esses canais se organizam. Em uma rede infinita, a questão é saber se existe um caminho infinito de elos abertos. A variação de  $p$  pode produzir uma **transição de fase**: um valor crítico  $p_c$  separa o regime sem componentes infinitas daquele em que elas podem ocorrer.

Essa combinação de uma regra local simples com uma mudança no comportamento global fez da percolação um modelo importante na física estatística, na probabilidade e na combinatória. A mesma descrição também permite estudar fenômenos como:

- **propagação de epidemias**, em que indivíduos infectados podem transmitir a doença apenas a vizinhos conectados;
- **condutividade elétrica em materiais compostos**, em que a corrente pode fluir apenas quando existe uma rede conectada de elementos condutores;
- **propagação de informações ou falhas em redes**, como redes sociais e sistemas de telecomunicação.

## Percolação de elos na rede hipercúbica $\mathbb{Z}^d$

Para representar os canais do meio poroso, usamos inicialmente os elos de um reticulado hipercúbico  $d$ -dimensional. Essa escolha permite formular o modelo e suas principais questões em uma geometria familiar.

### Definição do modelo

Considere a rede hipercúbica  $\mathbb{Z}^d$ :

- os **sítios** são os pontos de coordenadas inteiras em  $\mathbb{Z}^d$ ;
- os **elos** conectam sítios vizinhos, isto é, pares  $(x, y)$  tais que  $\|x - y\|_1 = 1$ ;
- cada elo está **aberto** com probabilidade  $p$  e **fechado** com probabilidade  $1 - p$ ;
- os estados dos elos são independentes entre si.

### Conectividade e transição de fase

Chamamos de **componente aberta** (também chamada de *cluster*) o conjunto de sítios conectados por elos abertos. A função de percolação é definida por

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p(|C| = \infty), \quad (1)$$

onde  $C$  é a componente aberta que contém a origem.

A distinção entre os regimes se expressa por meio de um valor crítico  $p_c$ :

- se  $p < p_c$ , então  $\theta(p) = 0$ , isto é, não há percolação;
- se  $p > p_c$ , então  $\theta(p) > 0$ , isto é, existe uma componente infinita com probabilidade positiva;
- no ponto crítico  $p = p_c$ , o comportamento exige uma análise mais delicada e depende da dimensão  $d$ .

Estudaremos esses regimes em  $\mathbb{Z}^d$  e em classes mais gerais de grafos, examinando como a geometria do grafo se reflete nas propriedades da percolação.

# Sumário

---

|                                                         |           |
|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Motivação</b>                                        | <b>v</b>  |
| <b>1 Grafos</b>                                         | <b>1</b>  |
| 1.1 Grafos, caminhos e distância . . . . .              | 1         |
| 1.2 Árvores e crescimento . . . . .                     | 2         |
| 1.3 Grafos de Cayley . . . . .                          | 3         |
| 1.4 Automorfismos e grafos transitivos . . . . .        | 3         |
| 1.5 Quase-isometrias . . . . .                          | 4         |
| <b>2 Percolação</b>                                     | <b>6</b>  |
| 2.1 O modelo de Bernoulli . . . . .                     | 6         |
| 2.2 Eventos caudais e a lei 0–1 . . . . .               | 7         |
| 2.3 Acoplamento monótono e parâmetro crítico . . . . .  | 10        |
| 2.4 Invariância e ergodicidade . . . . .                | 11        |
| 2.5 Desigualdade de Harris . . . . .                    | 13        |
| 2.6 A componente de um vértice . . . . .                | 15        |
| 2.7 Grafos unidimensionais . . . . .                    | 16        |
| <b>3 Transição de fase em <math>\mathbb{Z}^d</math></b> | <b>19</b> |
| 3.1 Cota inferior por caminhos autoevitantes . . . . .  | 19        |
| 3.2 Cota superior via conjuntos de corte . . . . .      | 21        |
| 3.3 Dualidade . . . . .                                 | 29        |
| <b>4 Percolação em árvores</b>                          | <b>35</b> |
| 4.1 Processo de Galton–Watson . . . . .                 | 35        |
| 4.2 Percolação em árvores regulares . . . . .           | 38        |

|           |                                                                              |           |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b>  | <b>Ferramentas probabilísticas</b>                                           | <b>41</b> |
| 5.1       | Desigualdade BK . . . . .                                                    | 41        |
| 5.2       | Fórmula de Russo . . . . .                                                   | 44        |
| <b>6</b>  | <b>Número de componentes infinitas</b>                                       | <b>47</b> |
| 6.1       | Modificações locais e a lei $0,1,\infty$ . . . . .                           | 47        |
| 6.2       | Amenabilidade . . . . .                                                      | 49        |
| 6.3       | Pontos de trifurcação . . . . .                                              | 50        |
| 6.4       | Teorema de Burton–Keane . . . . .                                            | 54        |
| <b>7</b>  | <b>Regime subcrítico</b>                                                     | <b>56</b> |
| 7.1       | Susceptibilidade e decaimento exponencial . . . . .                          | 56        |
| 7.2       | Sharpness: os pontos críticos $p_T$ e $p_c$ . . . . .                        | 58        |
| 7.3       | O campo fantasma e a magnetização . . . . .                                  | 59        |
| 7.4       | As desigualdades diferenciais de Aizenman–Barsky . . . . .                   | 62        |
| 7.5       | Prova do teorema de Aizenman–Barsky . . . . .                                | 65        |
| <b>8</b>  | <b>O argumento de Duminil-Copin e Tassion</b>                                | <b>69</b> |
| 8.1       | O critério de fronteira . . . . .                                            | 69        |
| 8.2       | Um parâmetro crítico alternativo . . . . .                                   | 72        |
| 8.3       | A desigualdade diferencial . . . . .                                         | 72        |
| 8.4       | A susceptibilidade no ponto crítico . . . . .                                | 75        |
| <b>9</b>  | <b>Percolação planar</b>                                                     | <b>77</b> |
| 9.1       | Dualidade . . . . .                                                          | 77        |
| 9.2       | Cruzamentos em $\mathbb{Z}^2$ . . . . .                                      | 79        |
| 9.3       | A cota superior para o parâmetro crítico . . . . .                           | 80        |
| 9.4       | O argumento de Zhang no ponto autodual . . . . .                             | 81        |
| <b>10</b> | <b>Transporte de massa</b>                                                   | <b>84</b> |
| 10.1      | Ações, órbitas e estabilizadores . . . . .                                   | 84        |
| 10.2      | Funções invariantes . . . . .                                                | 86        |
| 10.3      | Unimodularidade . . . . .                                                    | 88        |
| 10.4      | Forma aleatória do princípio . . . . .                                       | 90        |
| <b>11</b> | <b>Aplicações do transporte de massa</b>                                     | <b>92</b> |
| 11.1      | Percolação invariante . . . . .                                              | 92        |
| 11.2      | Percolação crítica em grupos não amenáveis . . . . .                         | 95        |
| 11.3      | Exclusão de uma componente infinita única: $k_{p_c} \neq 1$ . . . . .        | 95        |
| 11.4      | Exclusão de infinitas componentes infinitas: $k_{p_c} \neq \infty$ . . . . . | 99        |

**Referências**

**109**

# Grafos

---

Este capítulo reúne apenas a linguagem de teoria dos grafos usada ao longo do livro. O objetivo não é desenvolver a teoria em geral, mas fixar notação para distância, crescimento, simetrias e grafos de Cayley.

## 1.1 Grafos, caminhos e distância

Um **grafo** é um par  $G = (V, E)$ , onde  $V = V(G)$  é o conjunto de vértices e  $E = E(G)$  é um conjunto de pares não ordenados de vértices. Se  $\{x, y\} \in E$ , escrevemos  $x \sim y$  e dizemos que  $x$  e  $y$  são adjacentes.

O **grau** de  $x$ , denotado por  $\deg(x)$ , é o número de seus vizinhos. Dizemos que  $G$  é **localmente finito** se todo vértice tem grau finito e  **$d$ -regular** se todo vértice tem grau  $d$ . Salvo indicação em contrário, todos os grafos deste livro são infinitos, conexos e localmente finitos.

### Exemplo 1.1 — A rede $\mathbb{Z}^d$ .

O grafo  $\mathbb{Z}^d$  tem conjunto de vértices  $\mathbb{Z}^d$  e uma aresta entre  $x$  e  $y$  quando

$$\sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1.$$

Ele é infinito, conexo e  $2d$ -regular.

### Definição 1.1

Um **caminho** é uma sequência  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  tal que  $x_i \sim x_{i+1}$  para todo  $i$ . Seu comprimento é  $n$ . Um caminho é **simples** ou **autoevitante** quando não repete vértices. Um **ciclo** é um caminho finito fechado sem repetições, exceto pelo vértice inicial/final.

A **distância de grafo** é

$$d_G(x, y) = \inf\{n : \text{existe um caminho de comprimento } n \text{ de } x \text{ a } y\}.$$

Como trabalharemos com grafos conexos,  $d_G(x, y) < \infty$  para quaisquer  $x, y$ .

Para  $r \geq 0$ , definimos a bola e a esfera

$$B(x, r) = \{y : d_G(x, y) \leq r\}, \quad S(x, r) = \{y : d_G(x, y) = r\}.$$

Se  $A \subset V$ , sua fronteira externa de vértices é

$$\partial A = \{y \notin A : \exists x \in A \text{ com } x \sim y\},$$

e sua fronteira de arestas é

$$\partial_e A = \{\{x, y\} \in E : x \in A, y \notin A\}.$$

Um **subgrafo**  $H$  de  $G$  possui  $V(H) \subset V(G)$  e  $E(H) \subset E(G)$ . Se  $A \subset V(G)$ , o **subgrafo induzido por**  $A$  contém todos os vértices de  $A$  e todas as arestas de  $G$  com os dois extremos em  $A$ .

## 1.2 Árvores e crescimento

Um grafo sem ciclos é uma **floresta**; uma floresta conexa é uma **árvore**. Em uma árvore existe um único caminho simples entre dois vértices.

Quando distinguimos um vértice  $o$ , chamado raiz, cada vértice  $x \neq o$  tem um único vizinho mais próximo de  $o$ , seu **pai**; os vizinhos mais distantes de  $o$  são seus **filhos**. A árvore infinita  $d$ -regular será denotada por  $\mathbb{T}_d$ .

O crescimento de um grafo é medido pelo volume das bolas. Fixado  $o \in V(G)$ , escrevemos

$$V_G(r) = |B(o, r)|.$$

Em grafos transitivos, a ordem de crescimento não depende da escolha de  $o$ .

Dizemos que  $G$  tem **crescimento subexponencial** se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |B(o, r)|}{r} = 0,$$

e **crescimento polinomial de grau no máximo  $D$**  se existe  $C < \infty$  tal que

$$|B(o, r)| \leq C(1 + r)^D$$

para todo  $r$ . Em particular,  $\mathbb{Z}^d$  tem crescimento polinomial de ordem  $d$ , enquanto  $\mathbb{T}_d$ , para  $d \geq 3$ , tem crescimento exponencial.

Essas noções aparecem quando se converte decaimento de probabilidades de conexão em somabilidade espacial.

### 1.3 Grafos de Cayley

Seja  $\Gamma$  um grupo e seja  $S \subset \Gamma$  um conjunto finito de geradores. Podemos substituir  $S$  por  $S \cup S^{-1}$  e, portanto, supor  $S$  simétrico.

#### Definição 1.2

O **grafo de Cayley**  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  tem conjunto de vértices  $\Gamma$  e uma aresta entre  $g$  e  $gs$  para cada  $g \in \Gamma$  e  $s \in S$ .

A distância da identidade  $e$  a  $g$  coincide com o menor comprimento de uma palavra em  $S$  que representa  $g$ ; essa quantidade é a **norma de palavra**  $|g|_S$ .

#### Exemplo 1.2.

- Para  $\Gamma = \mathbb{Z}^d$  e  $S = \{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ , obtemos a rede usual  $\mathbb{Z}^d$ .
- O grafo de Cayley do grupo livre em  $k$  geradores, usando os geradores e seus inversos, é a árvore regular de grau  $2k$ .
- A árvore regular de grau  $d$  também pode ser realizada como grafo de Cayley do produto livre de  $d$  cópias de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

◀

### 1.4 Automorfismos e grafos transitivos

Um **automorfismo** de  $G$  é uma bijeção  $\varphi : V(G) \rightarrow V(G)$  que preserva adjacências. O conjunto de todos os automorfismos forma o grupo  $\text{Aut}(G)$ .

**Definição 1.3**

O grafo  $G$  é **transitivo** se, para quaisquer  $x, y \in V(G)$ , existe  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

Em um grafo transitivo, todos os vértices têm o mesmo grau e qualquer quantidade definida apenas pela geometria enraizada do grafo é independente da raiz.

**Proposição 1.1**

Todo grafo de Cayley é transitivo.

*Demonstração.* Se  $x, y, g \in \Gamma$ , defina

$$\varphi_{x,y}(g) = yx^{-1}g.$$

Essa aplicação é bijetiva e satisfaz  $\varphi_{x,y}(x) = y$ . Se  $h = gs$  com  $s \in S$ , então

$$\varphi_{x,y}(h) = yx^{-1}gs = \varphi_{x,y}(g)s,$$

logo adjacências são preservadas. Portanto  $\varphi_{x,y}$  é um automorfismo do grafo de Cayley. ■

A recíproca é falsa: existem grafos transitivos que não são grafos de Cayley. Para os argumentos deste livro, a propriedade importante será a transitividade em si, e não uma representação específica por geradores.

## 1.5 Quase-isometrias

A escolha do conjunto finito de geradores muda as distâncias em um grafo de Cayley, mas não muda sua geometria em grande escala. A linguagem adequada para essa afirmação é a de quase-isometria.

**Definição 1.4**

Sejam  $(G, d_G)$  e  $(H, d_H)$  grafos conexos. Uma aplicação  $f : G \rightarrow H$  é uma **quase-isometria** se existem constantes  $\lambda \geq 1$ ,  $C \geq 0$  e  $D \geq 0$  tais que

$$\frac{1}{\lambda}d_G(x, y) - C \leq d_H(f(x), f(y)) \leq \lambda d_G(x, y) + C$$

para todos  $x, y \in G$ , e todo vértice de  $H$  está a distância no máximo  $D$  da imagem de  $f$ .

### Teorema 1.2

Se  $\Gamma$  é um grupo finitamente gerado e  $S, T$  são dois conjuntos finitos de geradores, então  $\text{Cay}(\Gamma, S)$  e  $\text{Cay}(\Gamma, T)$  são quase-isométricos.

*Demonstração.* Considere a identidade em  $\Gamma$ . Como  $S$  é finito, existe

$$L = \max_{s \in S} |s|_T < \infty.$$

Escreva

$$g^{-1}h = s_1 \cdots s_n, \quad n = d_S(g, h), \quad s_j \in S.$$

Pela desigualdade triangular para a norma de palavra,

$$|g^{-1}h|_T \leq \sum_{j=1}^n |s_j|_T \leq nL = L d_S(g, h).$$

Como  $|g^{-1}h|_T = d_T(g, h)$ , segue que

$$d_T(g, h) \leq L d_S(g, h).$$

Trocando  $S$  e  $T$ , existe  $L' < \infty$  tal que

$$d_S(g, h) \leq L' d_T(g, h).$$

Tomando

$$\lambda = \max\{L, L'\},$$

obtemos

$$\frac{1}{\lambda} d_S(g, h) \leq d_T(g, h) \leq \lambda d_S(g, h).$$

Logo a identidade é uma quase-isometria com  $C = 0$  e, como é sobrejetiva, com  $D = 0$ . ■

# Percolação

---

Seja  $G = (V, E)$  um grafo infinito, conexo e localmente finito. Como as bolas finitas em torno de um vértice esgotam  $V$ , tanto  $V$  quanto  $E$  são enumeráveis. Na *percolação de elos de Bernoulli* com parâmetro  $p \in [0, 1]$ , cada aresta é declarada aberta com probabilidade  $p$  e fechada com probabilidade  $1 - p$ , independentemente das demais. O objeto resultante é um subgrafo aleatório de  $G$ , e nosso interesse principal será compreender suas propriedades de conectividade.

O modelo foi introduzido por Broadbent e Hammersley em 1957. Apesar da simplicidade da definição, ele apresenta uma transição de fase: ao variar  $p$ , passa-se de um regime sem componentes infinitas para outro em que componentes infinitas podem ocorrer.

## 2.1 O modelo de Bernoulli

O espaço de configurações é

$$\Omega = \{0, 1\}^E.$$

Para  $\omega \in \Omega$  e  $e \in E$ , dizemos que  $e$  está *aberta* quando  $\omega(e) = 1$  e *fechada* quando  $\omega(e) = 0$ .

Se  $F \subset E$  é finito e  $\sigma \in \{0, 1\}^F$ , o *cilindro* determinado por  $(F, \sigma)$  é

$$C(F, \sigma) = \{\omega \in \Omega : \omega(e) = \sigma(e) \text{ para todo } e \in F\}.$$

Denotamos por  $\mathcal{F}_0$  a álgebra dos eventos cilíndricos e por

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$$

a  $\sigma$ -álgebra produto. A medida produto  $\mathbf{P}_p$  é caracterizada por

$$\mathbf{P}_p(C(F, \sigma)) = \prod_{\substack{e \in F \\ \sigma(e)=1}} p \prod_{\substack{e \in F \\ \sigma(e)=0}} (1-p).$$

Equivalentemente, sob  $\mathbf{P}_p$  as variáveis  $(\omega(e))_{e \in E}$  são independentes e têm distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ . A tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_p)$  será nosso espaço de probabilidade.

Dada  $\omega \in \Omega$ , escrevemos  $G_\omega$  para o subgrafo de  $G$  com conjunto de vértices  $V$  e conjunto de arestas abertas

$$E(\omega) = \{e \in E : \omega(e) = 1\}.$$

Para  $x \in V$ , denotamos por  $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}_\omega(x)$  a componente de  $x$  em  $G_\omega$ . Escrevemos

$$x \leftrightarrow y$$

quando  $x$  e  $y$  pertencem à mesma componente aberta. Para  $A, B \subset V$ , o evento  $A \leftrightarrow B$  significa que existem  $a \in A$  e  $b \in B$  com  $a \leftrightarrow b$ . Finalmente,

$$x \leftrightarrow \infty$$

denota o evento  $|\mathcal{C}(x)| = \infty$ .

### Exercício 2.1

Mostre que, para cada  $x \in V$ , o evento  $\{x \leftrightarrow \infty\}$  é mensurável. Sugestão: escreva-o como uma interseção enumerável de eventos que dependem apenas de uma bola finita em torno de  $x$ .

## 2.2 Eventos caudais e a lei 0–1

A existência de uma componente infinita é um evento global: modificar um número finito de arestas não altera sua ocorrência. A linguagem adequada para formalizar essa observação é a de eventos caudais.

Se  $(A_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de eventos, definimos sua  $\sigma$ -álgebra caudal por

$$\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 1} \sigma(A_n, A_{n+1}, \dots).$$

Os eventos de  $\mathcal{T}$  são chamados *eventos caudais*.

**Teorema 2.1 — Lei 0–1 de Kolmogorov**

Se  $A_1, A_2, \dots$  são eventos independentes e  $A$  pertence à  $\sigma$ -álgebra caudal associada, então

$$\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

*Demonstração.* Para cada  $n$ , o evento  $A$  pertence a  $\sigma(A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)$  e, portanto, é independente de  $\sigma(A_1, \dots, A_n)$ . Como

$$\sigma(A_1, A_2, \dots) = \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \sigma(A_1, \dots, A_n)\right),$$

um argumento padrão de classe monótona mostra que  $A$  é independente de toda a  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(A_1, A_2, \dots)$ . Mas  $A$  pertence a essa  $\sigma$ -álgebra. Logo,  $A$  é independente de si mesmo e

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap A) = \mathbf{P}(A)^2.$$

Portanto,  $\mathbf{P}(A)$  é 0 ou 1. ■

No espaço de percolação, para  $F \subset E$  finito, escrevemos

$$\mathcal{F}_F = \sigma(\omega(e) : e \in F) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_F = \sigma(\omega(e) : e \notin F).$$

A  $\sigma$ -álgebra caudal das arestas é

$$\mathcal{T}_{\text{edge}} = \bigcap_{F \subset E, F \text{ finito}} \mathcal{T}_F.$$

Assim, um evento é caudal quando seu valor não pode ser alterado modificando apenas um número finito de arestas.

A aproximação por eventos cilíndricos será usada várias vezes neste livro.

**Teorema 2.2**

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  um espaço de probabilidade e seja  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  uma álgebra que gera  $\mathcal{F}$ . Para todo  $B \in \mathcal{F}$  e todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que

$$\mathbf{P}(A \triangle B) < \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{M}$  a classe dos conjuntos  $B \in \mathcal{F}$  que podem ser aproximados, em diferença simétrica, por elementos de  $\mathcal{A}$  com erro arbitrariamente pequeno. Claramente  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}$  é fechada por complementos.

Suponha agora que  $B_n \uparrow B$  com  $B_n \in \mathcal{M}$ . Pela continuidade da medida, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n$  tal que  $\mathbf{P}(B \setminus B_n) < \varepsilon/2$ . Escolhendo  $A \in \mathcal{A}$  com  $\mathbf{P}(A \Delta B_n) < \varepsilon/2$ , obtemos  $\mathbf{P}(A \Delta B) < \varepsilon$ . Logo  $B \in \mathcal{M}$ . A estabilidade por interseções decrescentes segue tomando complementos. Portanto  $\mathcal{M}$  é uma classe monótona que contém a álgebra  $\mathcal{A}$ . Pelo teorema da classe monótona,

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M},$$

e a inclusão oposta é imediata. ■

Considere o evento

$$I = \{\omega : G_\omega \text{ contém uma componente infinita}\}.$$

Ele é mensurável, pois, sendo  $V$  enumerável,

$$I = \bigcup_{x \in V} \{x \leftrightarrow \infty\}.$$

Mais importante,  $I$  é caudal. De fato, suponha que duas configurações  $\omega$  e  $\eta$  coincidam fora de um conjunto finito  $F \subset E$ . Se  $\omega$  possui uma componente infinita  $C$ , remover as arestas de  $F$  de  $C$  produz apenas um número finito de componentes; pelo menos uma delas continua infinita. Abrir depois algumas arestas de  $F$  não pode destruir essa componente. Logo,  $\eta$  também possui uma componente infinita. Trocando os papéis de  $\omega$  e  $\eta$ , obtemos a equivalência.

### Teorema 2.3

Para todo grafo infinito, conexo e localmente finito  $G$ , defina

$$\Theta_G(p) = \mathbf{P}_p(I) = \mathbf{P}_p(\text{existe uma componente infinita}).$$

Então

$$\Theta_G(p) \in \{0,1\} \quad \text{para todo } p \in [0,1].$$

*Demonstração.* Enumere  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ . As variáveis coordenadas  $\omega(e_i)$  são independentes e, como acabamos de mostrar,  $I$  pertence à  $\sigma$ -álgebra caudal dessas coordenadas. A conclusão segue da lei 0–1 de Kolmogorov. ■

## 2.3 Acoplamento monótono e parâmetro crítico

É útil construir simultaneamente as percolações para todos os valores de  $p$ . Seja  $(U_e)_{e \in E}$  uma família de variáveis independentes, uniformes em  $[0,1]$ , e defina

$$\omega_p(e) = \mathbf{1}_{\{U_e \leq p\}}.$$

Para cada  $p$ , a configuração  $\omega_p$  tem distribuição  $\mathbf{P}_p$ . Além disso,

$$p \leq q \implies \omega_p \leq \omega_q$$

coordenada a coordenada.

Um evento  $A \subset \Omega$  é *crescente* se

$$\omega \in A, \quad \omega \leq \eta \implies \eta \in A.$$

É *decrecente* quando seu complementar é crescente.

### Lema 2.4

Se  $A$  é crescente e  $B$  é decrecente, então, para  $p \leq q$ ,

$$\mathbf{P}_p(A) \leq \mathbf{P}_q(A), \quad \mathbf{P}_p(B) \geq \mathbf{P}_q(B).$$

*Demonstração.* No acoplamento acima,  $\omega_p \leq \omega_q$ . Assim,  $\omega_p \in A$  implica  $\omega_q \in A$ , enquanto  $\omega_q \in B$  implica  $\omega_p \in B$ . Tomando probabilidades, obtemos as duas desigualdades. ■

O evento  $I$  é crescente. Portanto,  $p \mapsto \Theta_G(p)$  é não decrecente. Como  $\Theta_G(p)$  só assume os valores 0 e 1, existe um único limiar entre os dois regimes.

**Definição 2.1**

Definimos o *parâmetro crítico* de  $G$  por

$$p_c(G) = \sup\{p : \Theta_G(p) = 0\} = \inf\{p : \Theta_G(p) = 1\}.$$

Como  $G$  é infinito e conexo,  $\Theta_G(0) = 0$  e  $\Theta_G(1) = 1$ . Consequentemente,

$$\Theta_G(p) = 0 \quad \text{se } p < p_c(G), \quad \Theta_G(p) = 1 \quad \text{se } p > p_c(G).$$

Nada nessa definição determina o comportamento exatamente em  $p = p_c(G)$ . A percolação crítica é um dos temas centrais da teoria, e seu comportamento depende fortemente da geometria do grafo.

**Exercício 2.2**

Mostre diretamente que  $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ .

**2.4 Invariância e ergodicidade**

Em grafos com muitas simetrias, a lei 0–1 também pode ser vista como uma consequência da ergodicidade.

Se  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  e  $\omega \in \Omega$ , definimos

$$(\varphi\omega)(e) = \omega(\varphi^{-1}e).$$

Para um evento  $A \in \mathcal{F}$ , escrevemos

$$\varphi A = \{\varphi\omega : \omega \in A\}.$$

Dizemos que  $A$  é *invariante* se  $\varphi A = A$  para todo  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . A medida de Bernoulli  $\mathbf{P}_p$  é invariante sob automorfismos, pois os estados das arestas são i.i.d.

Denote por  $\mathcal{J}_{\text{Aut}(G)}$  a  $\sigma$ -álgebra dos eventos invariantes. Dizemos que  $\mathbf{P}_p$  é *Aut(G)-ergódica* se

$$A \in \mathcal{J}_{\text{Aut}(G)} \implies \mathbf{P}_p(A) \in \{0, 1\}.$$

### Proposição 2.5 — Ergodicidade da percolação

Suponha que  $G$  seja conexo e localmente finito e que toda órbita de vértices sob  $\text{Aut}(G)$  seja infinita. Então  $\mathbf{P}_p$  é  $\text{Aut}(G)$ -ergódica.

*Demonstração.* Seja  $A$  um evento invariante e fixe  $\varepsilon > 0$ . Pelo Teorema 2.2, existe um evento cilíndrico  $B$ , dependente apenas de um conjunto finito de arestas  $F$ , tal que

$$\mathbf{P}_p(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Se  $F = \emptyset$ , então  $B$  é constante e a estimativa abaixo é imediata. Podemos, portanto, supor  $F \neq \emptyset$ . Escolha um vértice  $x$  incidente a alguma aresta de  $F$  e seja  $K$  o conjunto finito dos extremos das arestas de  $F$ . Como a órbita de  $x$  é infinita e  $G$  é localmente finito, ela é não limitada. Logo existe  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  tal que

$$\text{dist}(\varphi x, K) > \text{diam}(K) + 1.$$

Como automorfismos preservam distâncias, isso implica  $\varphi F \cap F = \emptyset$ . Portanto, os eventos  $B$  e  $\varphi B$  dependem de conjuntos disjuntos de coordenadas e são independentes.

Além disso,  $A = \varphi A$  e  $\mathbf{P}_p(\varphi B) = \mathbf{P}_p(B)$ . Usando

$$(C_1 \cap D_1) \triangle (C_2 \cap D_2) \subseteq (C_1 \triangle C_2) \cup (D_1 \triangle D_2),$$

obtemos

$$|\mathbf{P}_p(A \cap \varphi A) - \mathbf{P}_p(B \cap \varphi B)| \leq \mathbf{P}_p(A \triangle B) + \mathbf{P}_p(\varphi A \triangle \varphi B) < 2\varepsilon.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_p(B)^2 - \mathbf{P}_p(A)^2| &= |\mathbf{P}_p(B) - \mathbf{P}_p(A)| (\mathbf{P}_p(B) + \mathbf{P}_p(A)) \\ &\leq 2\mathbf{P}_p(A \triangle B) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $A = \varphi A$  e  $B$  e  $\varphi B$  são independentes,

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}_p(A) - \mathbf{P}_p(A)^2| &= |\mathbf{P}_p(A \cap \varphi A) - \mathbf{P}_p(A)^2| \\ &\leq |\mathbf{P}_p(A \cap \varphi A) - \mathbf{P}_p(B \cap \varphi B)| + |\mathbf{P}_p(B)^2 - \mathbf{P}_p(A)^2| \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário,  $\mathbf{P}_p(A) = \mathbf{P}_p(A)^2$ . ■

### Exercício 2.3

Mostre que o evento  $I$  de existência de uma componente infinita é invariante sob  $\text{Aut}(G)$ . Conclua que, em um grafo transitivo infinito, a Proposição 2.5 fornece outra prova do Teorema 2.3.

## 2.5 Desigualdade de Harris

A monotonicidade também produz correlação positiva. O resultado seguinte é a forma da desigualdade FKG de que precisaremos. No contexto de medidas produto de Bernoulli, ela é usualmente chamada de *desigualdade de Harris*.

Uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é *crescente* quando

$$\omega \leq \eta \implies f(\omega) \leq f(\eta).$$

Antes da prova, registramos uma forma conveniente da aproximação por informação finita. Enumere  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$  e defina

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\omega(e_1), \dots, \omega(e_n)).$$

### Lema 2.6 — Aproximação por informação finita

Se  $X \in L^2(\mathbf{P}_p)$  e

$$X_n = \mathbf{E}_p[X \mid \mathcal{F}_n],$$

então  $X_n \rightarrow X$  em  $L^2$ . Além disso, se  $X$  é crescente, cada  $X_n$  é crescente como função das primeiras  $n$  coordenadas.

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2, indicadores de eventos cilíndricos são densos, em  $L^2$ , entre indicadores de eventos mensuráveis. Por aproximação por funções simples, as variáveis que dependem de um número finito de coordenadas são densas em  $L^2(\mathbf{P}_p)$ .

Fixe  $\varepsilon > 0$  e escolha uma variável  $Y$ , mensurável com respeito a  $\mathcal{F}_N$  para algum  $N$ , tal que  $\|X - Y\|_2 < \varepsilon$ . Para  $n \geq N$ , temos  $\mathbf{E}_p[Y \mid \mathcal{F}_n] = Y$ . Pela contração da esperança condicional em  $L^2$ ,

$$\|X_n - X\|_2 \leq \|\mathbf{E}_p[X - Y \mid \mathcal{F}_n]\|_2 + \|Y - X\|_2 \leq 2\varepsilon.$$

Isso prova a convergência.

Se  $X$  é crescente, fixar as primeiras  $n$  coordenadas e fazer a média sobre as restantes preserva a ordem coordenada a coordenada. Logo,  $X_n$  também é crescente. ■

**Proposição 2.7 — Desigualdade de Harris**

Se  $A$  e  $B$  são eventos crescentes, então

$$\mathbf{P}_p(A \cap B) \geq \mathbf{P}_p(A)\mathbf{P}_p(B).$$

Mais geralmente, se  $f$  e  $g$  são funções mensuráveis, limitadas e crescentes, então

$$\mathbf{E}_p[fg] \geq \mathbf{E}_p[f]\mathbf{E}_p[g].$$

*Demonstração.* Começamos com o caso em que  $f$  e  $g$  dependem apenas de  $n$  arestas. A prova é por indução em  $n$ .

Para  $n = 1$ ,

$$\mathbf{E}_p[fg] = pf(1)g(1) + (1-p)f(0)g(0),$$

enquanto

$$\mathbf{E}_p[f] = pf(1) + (1-p)f(0), \quad \mathbf{E}_p[g] = pg(1) + (1-p)g(0).$$

Subtraindo e fatorando,

$$\mathbf{E}_p[fg] - \mathbf{E}_p[f]\mathbf{E}_p[g] = p(1-p)(f(1) - f(0))(g(1) - g(0)) \geq 0,$$

pois  $f$  e  $g$  são crescentes.

Suponha o resultado válido para  $n - 1$  coordenadas. Condicione nos primeiros  $n - 1$  estados e aplique o caso de uma coordenada à última. Se

$$\bar{f} = \mathbf{E}_p[f \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})], \quad \bar{g} = \mathbf{E}_p[g \mid \omega(e_1), \dots, \omega(e_{n-1})],$$

então

$$\mathbf{E}_p[fg] \geq \mathbf{E}_p[\bar{f}\bar{g}].$$

As funções  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  são crescentes nas primeiras  $n - 1$  coordenadas. Pela hipótese de indução,

$$\mathbf{E}_p[\bar{f}\bar{g}] \geq \mathbf{E}_p[\bar{f}]\mathbf{E}_p[\bar{g}] = \mathbf{E}_p[f]\mathbf{E}_p[g]. \quad (2.1)$$

Isso prova o caso finito.

Para o caso geral, defina

$$f_n = \mathbf{E}_p[f \mid \mathcal{F}_n], \quad g_n = \mathbf{E}_p[g \mid \mathcal{F}_n].$$

Pelo lema anterior,  $f_n$  e  $g_n$  são crescentes, dependem apenas de  $n$  coordenadas e convergem em  $L^2$  para  $f$  e  $g$ , respectivamente. Pelo caso finito,

$$\mathbf{E}_p[f_n g_n] \geq \mathbf{E}_p[f_n]\mathbf{E}_p[g_n].$$

Tomando limites, obtemos a desigualdade desejada. A versão para eventos segue aplicando o resultado a  $f = \mathbf{1}_A$  e  $g = \mathbf{1}_B$ . ■

### Corolário 2.8

Se  $A_1, \dots, A_k$  são eventos crescentes, então

$$\mathbf{P}_p\left(\bigcap_{j=1}^k A_j\right) \geq \prod_{j=1}^k \mathbf{P}_p(A_j).$$

A mesma afirmação vale para eventos decrescentes.

*Demonstração.* A primeira afirmação segue por indução. Para eventos decrescentes, aplique a desigualdade de Harris às funções  $-\mathbf{1}_{A_j}$  ou, equivalentemente, troque aberta por fechada. ■

## 2.6 A componente de um vértice

Para  $x \in V$ , definimos a *função de percolação enraizada*

$$\theta_{G,x}(p) = \mathbf{P}_p(x \leftrightarrow \infty).$$

Se  $G$  é transitivo, esse valor não depende de  $x$ , e escrevemos simplesmente  $\theta_G(p)$ .

A função  $p \mapsto \theta_{G,x}(p)$  é não decrescente. A relação entre  $\theta_{G,x}$  e a probabilidade global  $\Theta_G$  é especialmente simples em grafos conexos.

### Teorema 2.9

Seja  $G$  um grafo infinito, conexo e localmente finito. Para cada  $p \in [0,1]$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $\Theta_G(p) = 1$ ;
2. existe  $x \in V$  tal que  $\theta_{G,x}(p) > 0$ ;
3. para todo  $x \in V$ ,  $\theta_{G,x}(p) > 0$ .

*Demonstração.* Como

$$I = \bigcup_{z \in V} \{z \leftrightarrow \infty\}$$

e  $V$  é enumerável,  $\Theta_G(p) = 1$  implica que existe  $z$  com  $\theta_{G,z}(p) > 0$ .

Fixe agora  $x \in V$ . Se  $\theta_{G,z}(p) > 0$ , então necessariamente  $p > 0$ . Escolha um caminho simples entre  $x$  e  $z$  com  $m$  arestas. Se todas essas arestas estiverem abertas, então  $x \leftrightarrow z$ ; pela independência,

$$\mathbf{P}_p(x \leftrightarrow z) \geq p^m > 0.$$

Os eventos  $\{x \leftrightarrow z\}$  e  $\{z \leftrightarrow \infty\}$  são crescentes. Pela desigualdade de Harris,

$$\theta_{G,x}(p) \geq \mathbf{P}_p(x \leftrightarrow z, z \leftrightarrow \infty) \geq \mathbf{P}_p(x \leftrightarrow z) \theta_{G,z}(p) > 0.$$

Logo, (2) implica (3).

Finalmente, (3) implica (2), e se  $\theta_{G,x}(p) > 0$  para algum  $x$ , então  $\Theta_G(p) > 0$ . Pelo Teorema 2.3,  $\Theta_G(p) = 1$ . ■

### Corolário 2.10

Para todo  $x \in V$ ,

$$p_c(G) = \sup\{p : \theta_{G,x}(p) = 0\} = \inf\{p : \theta_{G,x}(p) > 0\}.$$

Em particular, o parâmetro crítico não depende da escolha da raiz.

## 2.7 Grafos unidimensionais

O caso de  $\mathbb{Z}$  sugere uma classe de grafos que podem ser separados do infinito por cortes de tamanho uniformemente limitado.

### Definição 2.2 – Conjunto de corte

Seja  $o \in V$ . Um conjunto finito de arestas  $A \subset E$  é um *conjunto de corte para  $o$*  se a componente de  $o$  no grafo  $G \setminus A$  é finita. Equivalentemente, todo caminho infinito simples iniciado em  $o$  utiliza alguma aresta de  $A$ .

Em  $\mathbb{Z}$ , tomando  $o = 0$ , podemos escolher

$$A_n = \{\{n, n+1\}, \{-n, -n-1\}\}, \quad n \geq 0.$$

Os conjuntos  $A_n$  são dois a dois disjuntos, são conjuntos de corte para 0 e têm cardinalidade 2.

### Definição 2.3 — Grafo unidimensional

Um grafo infinito e conexo  $G$  é chamado *unidimensional* se existem um vértice  $o \in V$  e uma sequência  $(A_n)_{n \geq 1}$  de conjuntos de corte para  $o$ , dois a dois disjuntos, tais que

$$\sup_n |A_n| < \infty.$$

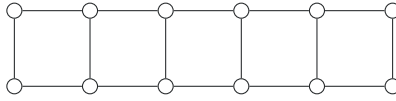


Figura 2.1: Grafo escada.

## Exercícios

### Exercício 2.4

Mostre que o grafo escada  $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$  é unidimensional.

### Exercício 2.5

Seja  $G$  um grupo finitamente gerado e suponha que  $H \leq G$  tenha índice finito e seja isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Mostre que qualquer grafo de Cayley de  $G$  é unidimensional.

### Teorema 2.11

Se  $G$  é unidimensional, então

$$p_c(G) = 1.$$

*Demonstração.* Sejam  $o$  e  $(A_n)$  como na definição, e escolha  $M < \infty$  tal que  $|A_n| \leq M$  para todo  $n$ . Para  $p < 1$ , denote por  $\mathcal{E}_n$  o evento de que todas as arestas de  $A_n$  estão fechadas. Então

$$\mathbf{P}_p(\mathcal{E}_n) = (1 - p)^{|A_n|} \geq (1 - p)^M > 0.$$

Como os conjuntos  $A_n$  são dois a dois disjuntos, os eventos  $\mathcal{E}_n$  são independentes.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_p\left(\bigcap_{k=1}^n \mathcal{E}_k^c\right) &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P}_p(\mathcal{E}_k^c) \\ &= \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}_p(\mathcal{E}_k)) \\ &\leq (1 - (1 - p)^M)^n \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Como os eventos  $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{E}_k^c$  decrescem com  $n$ , pela continuidade da probabilidade,

$$\mathbf{P}_p\left(\bigcap_{k \geq 1} \mathcal{E}_k^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_p\left(\bigcap_{k=1}^n \mathcal{E}_k^c\right) = 0.$$

Portanto, quase certamente algum  $\mathcal{E}_n$  ocorre. Quando isso acontece, todas as arestas de um conjunto de corte para  $o$  estão fechadas, e então  $|\mathcal{C}(o)| < \infty$ . Logo,

$$\theta_{G,o}(p) = 0 \quad \text{para todo } p < 1.$$

Pelo corolário anterior,  $p_c(G) = 1$ . ■

# Transição de fase em $\mathbb{Z}^d$

---

## 3.1 Cota inferior por caminhos autoevitantes

O objetivo deste capítulo é provar que

$$0 < p_c(\mathbb{Z}^d) < 1 \quad \text{para todo } d \geq 2.$$

Começaremos com uma contagem de caminhos autoevitantes para obter a cota inferior e, em seguida, usaremos o argumento de Peierls por conjuntos de corte para obter uma cota superior.

### **Teorema 3.1**

Seja  $G$  um grafo infinito e conexo com graus uniformemente limitados por  $D$ . Então,

$$p_c(G) \geq \frac{1}{D-1}.$$

*Demonstração.* Um caminho autoevitante em um grafo  $G$ , com início em um vértice  $x$ , é um caminho  $\gamma$  que satisfaz

$$\gamma_0 = x \quad \text{e} \quad \gamma_i \neq \gamma_j \text{ para todo } i \neq j,$$

ou seja, cada vértice é visitado no máximo uma vez. Denotemos por  $S_n$  o conjunto de todos os caminhos autoevitantes de comprimento  $n$  iniciados em  $x$  e defina

$$\mu_n = |S_n|.$$

Introduzimos, então, o número de crescimento

$$\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{1/n}.$$

Seja  $D$  o grau máximo de  $G$ . Após o primeiro passo, que pode ser realizado de  $D$  formas, um caminho autoevitante não pode retroceder imediatamente, restando no máximo  $D - 1$  escolhas em cada etapa subsequente. Assim, temos

$$\mu_n \leq D(D - 1)^{n-1}.$$

Tomando raízes  $n$ -ésimas,

$$\mu_n^{1/n} \leq D^{1/n}(D - 1)^{(n-1)/n} \longrightarrow D - 1,$$

e portanto

$$\mu \leq D - 1.$$

Assim, basta mostrar que  $p_c(G) \geq \mu^{-1}$ . Para isso, note que, para qualquer caminho  $\gamma \in S_n$ , o fato de  $\gamma$  ser autoevitante garante que ele utiliza  $n$  arestas distintas, de modo que

$$\mathbf{P}_p[\gamma \subset \mathcal{C}(x)] = p^n.$$

Consequentemente, a probabilidade de que exista pelo menos um caminho  $\gamma \in S_n$  totalmente aberto na componente conexa de  $x$  é limitada por

$$\mathbf{P}_p[\exists \gamma \in S_n : \gamma \subset \mathcal{C}(x)] \leq \sum_{\gamma \in S_n} \mathbf{P}_p[\gamma \subset \mathcal{C}(x)] = \mu_n p^n.$$

Seja  $E_n$  o evento de que existe um caminho aberto autoevitante de comprimento  $n$  iniciado em  $x$ . Os eventos  $(E_n)$  são decrescentes. Como  $G$  é localmente finito, uma componente infinita de  $x$  contém um caminho autoevitante infinito; reciprocamente, se existem caminhos autoevitantes abertos de comprimentos arbitrariamente

grandes, o lema de König aplicado à árvore dos caminhos simples finitos fornece um caminho aberto infinito. Portanto

$$\{x \leftrightarrow \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} E_n.$$

Pela continuidade da probabilidade para sequências decrescentes,

$$\mathbf{P}_p[x \leftrightarrow \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_p(E_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n p^n.$$

Se  $p = 0$ , o lado direito é obviamente zero. Se  $0 < p < \mu^{-1}$ , escolha  $\rho$  tal que

$$\mu p < \rho < 1.$$

Pela definição de limite superior, para  $n$  suficientemente grande,

$$\mu_n^{1/n} p \leq \rho,$$

e, portanto,

$$\mu_n p^n \leq \rho^n \rightarrow 0.$$

Logo

$$\theta_{G,x}(p) = 0 \quad \text{para todo } p < \mu^{-1},$$

e assim

$$p_c(G) \geq \mu^{-1} \geq \frac{1}{D-1}.$$

■

### Exemplo 3.1.

Seja  $\mathbb{T}_d$  a árvore  $d$ -regular. A contagem de caminhos autoevitantes fornece a estimativa  $p_c(\mathbb{T}_d) \geq \frac{1}{d-1}$ . Mais adiante veremos que, de fato,  $p_c(\mathbb{T}_d) = \frac{1}{d-1}$ .

◁

## 3.2 Cota superior via conjuntos de corte

Fixe um grafo infinito, conexo e localmente finito  $G$  e um vértice  $x \in V(G)$ . Um conjunto finito de arestas  $\Pi$  é um *conjunto de corte de  $x$  para o infinito* se a componente de  $x$  em  $G \setminus \Pi$  é finita. Dizemos que  $\Pi$  é *minimal* quando nenhum subconjunto próprio de  $\Pi$  ainda é um conjunto de corte.

**Exercício 3.1**

Mostre que todo conjunto de corte finito contém um conjunto de corte minimal.

**Proposição 3.2**

Para uma configuração de percolação em  $G$ ,

$$x \leftrightarrow \infty$$

se e somente se todo conjunto de corte minimal finito de  $x$  contém pelo menos uma aresta aberta.

*Demonstração.* Suponha primeiro que  $\mathcal{C}(x)$  seja finita. Como  $G$  é localmente finito, sua fronteira de arestas

$$\partial_e \mathcal{C}(x) = \{\{y, z\} \in E : y \in \mathcal{C}(x), z \notin \mathcal{C}(x)\}$$

é finita. Ela é um conjunto de corte de  $x$ , e todas as suas arestas são fechadas. Escolhendo dentro dela um subconjunto minimal que ainda seja um corte, obtemos um conjunto de corte minimal inteiramente fechado.

Reciprocamente, se  $\mathcal{C}(x)$  é infinita, a local finitude e o lema de König fornecem um caminho aberto autoevitante infinito iniciado em  $x$ . Todo conjunto de corte de  $x$  deve intersectar esse caminho e, portanto, contém uma aresta aberta. ■

A proposição anterior fornece a forma clássica do argumento de Peierls.

**Proposição 3.3**

Fixe  $x \in V(G)$  e denote por  $C_n(x)$  o conjunto dos conjuntos de corte minimais de  $x$  com cardinalidade  $n$ . Suponha que  $|C_n(x)| < \infty$  para todo  $n \geq 1$  e que existam  $n_0$  e  $M > 1$  tais que

$$|C_n(x)| \leq M^n \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Então

$$p_c(G) \leq \frac{M-1}{M}.$$

*Demonstração.* Fixe  $p > (M - 1)/M$ , de modo que  $M(1 - p) < 1$ . Se  $\Pi \in C_n(x)$ , a probabilidade de todas as arestas de  $\Pi$  estarem fechadas é  $(1 - p)^n$ . Logo, para  $N > n_0$ ,

$$\mathbf{P}_p(\exists n > N, \exists \Pi \in C_n(x) : \Pi \text{ está inteiramente fechada}) \leq \sum_{n > N} [M(1 - p)]^n.$$

Escolha  $N$  de modo que o lado direito seja no máximo  $1/2$  e denote o evento acima por  $A$ .

Como  $C_n(x)$  é finito para  $1 \leq n \leq N$ , o conjunto

$$F = \bigcup_{1 \leq n \leq N} \bigcup_{\Pi \in C_n(x)} \Pi$$

é finito. Seja  $B$  o evento de que todas as arestas de  $F$  estão abertas. Então  $\mathbf{P}_p(B) > 0$ . Os eventos  $B$  e  $A^c$  são crescentes; pela desigualdade de Harris,

$$\mathbf{P}_p(B \cap A^c) \geq \mathbf{P}_p(B)\mathbf{P}_p(A^c) \geq \frac{1}{2}\mathbf{P}_p(B) > 0.$$

Em  $B \cap A^c$  não existe conjunto de corte minimal inteiramente fechado: os cortes de tamanho no máximo  $N$  encontram  $F$ , cujas arestas estão abertas, e os cortes maiores são excluídos por  $A^c$ . Pela Proposição 3.2,  $x \leftrightarrow \infty$ . Assim  $\theta_{G,x}(p) > 0$ , e o capítulo anterior implica  $p_c(G) \leq p$ . Fazendo  $p \downarrow (M - 1)/M$ , obtemos a conclusão. ■

## Percolação uniforme e contagem de cortes minimais

Em um grafo não transitivo, a existência de percolação a partir de algum vértice não fornece, em geral, uma cota positiva uniforme sobre todos os vértices. Para formular o teorema de contagem de cortes minimais, definimos

$$\theta_G^*(p) := \inf_{v \in V(G)} \theta_{G,v}(p)$$

e o *parâmetro crítico uniforme*

$$p_c^*(G) := \inf\{p \in [0,1] : \theta_G^*(p) > 0\}.$$

Sempre  $p_c(G) \leq p_c^*(G)$ . Se  $G$  é quase-transitivo, isto é, se  $\text{Aut}(G)$  possui apenas um número finito de órbitas de vértices, então

$$p_c^*(G) = p_c(G).$$

De fato, para  $p > p_c(G)$  o capítulo anterior mostra que  $\theta_{G,v}(p) > 0$  para todo vértice  $v$ ; como essa probabilidade é constante em cada órbita e há apenas finitas órbitas, seu ínfimo é estritamente positivo.

Para  $v \in V(G)$  e  $n \geq 1$ , seja  $Q_n(v)$  o conjunto dos conjuntos de corte minimais de  $v$  com cardinalidade  $n$  e defina

$$q_n := \sup_{v \in V(G)} |Q_n(v)|, \quad \kappa(G) := \sup_{n \geq 1} q_n^{1/n}.$$

Permitimos  $q_n = \infty$ . Por exemplo, em  $\mathbb{Z}$  há infinitos cortes minimais de tamanho 2 para uma raiz fixa.

Para um conjunto  $S \subset V(G)$ , definimos sua *fronteira exposta* por

$$\partial_\infty S := \{\{a,b\} \in E : a \in S, b \notin S, b \text{ pertence a uma componente infinita de } G \setminus S\}.$$

### Lema 3.4

Se  $S$  é finito e conexo e  $u \in S$ , então  $\partial_\infty S$  é um conjunto de corte minimal de  $u$  para o infinito.

*Demonstração.* Todo caminho infinito simples iniciado em  $u$  visita  $S$  apenas um número finito de vezes. Na última saída de  $S$ , ele atravessa uma aresta de  $\partial_\infty S$ . Portanto  $\partial_\infty S$  é um conjunto de corte.

Se  $e = \{a,b\} \in \partial_\infty S$ , com  $a \in S$ , existe um caminho em  $S$  de  $u$  até  $a$  e existe um caminho infinito iniciado em  $b$  que permanece em  $G \setminus S$ . Concatenando esses caminhos com  $e$ , obtemos um caminho infinito a partir de  $u$  que não usa nenhuma outra aresta de  $\partial_\infty S$ . Logo, a remoção de qualquer aresta de  $\partial_\infty S$  destrói a propriedade de corte, provando a minimalidade. ■

### Proposição 3.5

Seja  $\Pi$  um conjunto de corte minimal de  $u$  e seja  $A$  a componente de  $u$  em  $G \setminus \Pi$ . Denote por

$$B = \{a \in A : \exists b \notin A \text{ com } \{a,b\} \in \Pi\}$$

o conjunto dos extremos internos das arestas de  $\Pi$ . Se

$$B \subset S \subset A,$$

então

$$\partial_\infty S = \Pi.$$

*Demonstração.* Como  $\Pi$  é um conjunto de corte,  $A$  é finito e conexo. Toda aresta de  $\partial_e A$  pertence a  $\Pi$ , pois  $A$  é uma componente de  $G \setminus \Pi$ . Pelo Lema 3.4,  $\partial_\infty A$  é um conjunto de corte minimal de  $u$ , e

$$\partial_\infty A \subseteq \partial_e A \subseteq \Pi.$$

A minimalidade de  $\Pi$  força

$$\partial_\infty A = \partial_e A = \Pi.$$

Se  $e = \{a, b\} \in \Pi$ , com  $a \in A$ , então  $a \in B \subset S$  e  $b$  possui um caminho infinito em  $G \setminus A \subset G \setminus S$ . Logo  $e \in \partial_\infty S$ , e portanto  $\Pi \subseteq \partial_\infty S$ .

Reciprocamente, seja  $e = \{a, b\} \in \partial_\infty S$ , com  $a \in S \subset A$ . Se  $e \notin \Pi$ , então  $b \in A$ , pois  $A$  é uma componente de  $G \setminus \Pi$ . Um caminho infinito iniciado em  $b$  e contido em  $G \setminus S$  teria de sair do conjunto finito  $A$  por alguma aresta de  $\partial_e A = \Pi$ . O extremo dessa aresta que pertence a  $A$  está em  $B \subset S$ , uma contradição. Assim  $e \in \Pi$ , concluindo a igualdade. ■

### Proposição 3.6

Seja  $G = (V, E)$  um grafo finito e conexo, e seja  $\mathbf{P}$  uma medida de percolação positivamente associada em  $G$ . Seja  $B \subseteq V$ , e suponha que existam  $\theta, p \in (0, 1]$  tais que

$$\mathbf{P}(u \leftrightarrow B) \geq \theta \quad \text{para todo } u \in V,$$

e

$$\mathbf{P}(e \text{ está aberta}) \geq p \quad \text{para toda } e \in E.$$

Então, para todo  $o \in V$ ,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{b \in B} \{o \leftrightarrow b\}\right) \geq c^{|B|}, \quad c := \left(\frac{p\theta}{2}\right)^{3/\theta}.$$

*Demonstração.* Ponha  $n = |B|$  e  $a = p\theta/2$ . Chamaremos uma sequência de vértices

$$x_1, \dots, x_k$$

de *encadeada* quando  $x_1 = o$  e, para cada  $i \geq 2$ ,

$$a \leq \mathbf{P}(x_i \leftrightarrow \{x_1, \dots, x_{i-1}\}) \leq \frac{\theta}{2}. \quad (3.1)$$

Como  $V$  é finito, existe uma sequência encadeada maximal. Fixe uma delas e escreva

$$X = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Primeiro mostramos que

$$\mathbf{P}(u \leftrightarrow X) \geq \frac{\theta}{2} \quad \text{para todo } u \in V. \quad (3.2)$$

De fato, seja

$$W = \left\{ u \in V : \mathbf{P}(u \leftrightarrow X) \geq \frac{\theta}{2} \right\}.$$

Temos  $X \subseteq W$ . Se  $W \neq V$ , a conexidade de  $G$  fornece uma aresta  $\{u, v\}$  com  $u \in W$  e  $v \notin W$ . Como os eventos

$$\{\{u, v\} \text{ está aberta}\} \quad \text{e} \quad \{u \leftrightarrow X\}$$

são crescentes, a associação positiva implica

$$\mathbf{P}(v \leftrightarrow X) \geq \mathbf{P}(\{u, v\} \text{ aberta}, u \leftrightarrow X) \geq p \frac{\theta}{2} = a.$$

Por outro lado,  $v \notin W$  dá  $\mathbf{P}(v \leftrightarrow X) < \theta/2$ . Portanto  $v$  poderia ser acrescentado ao fim da sequência encadeada, contrariando sua maximalidade. Isso prova (3.2).

Para limitar o tamanho de  $X$ , ponha  $X_i = \{x_1, \dots, x_i\}$  e seja  $N_i$  o número de componentes abertas da configuração que intersectam simultaneamente  $X_i$  e  $B$ . Para  $i \geq 2$ ,

$$N_i - N_{i-1} = \mathbf{1}_{\{x_i \leftrightarrow B, x_i \leftrightarrow X_{i-1}\}} \geq \mathbf{1}_{\{x_i \leftrightarrow B\}} - \mathbf{1}_{\{x_i \leftrightarrow X_{i-1}\}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N_i - N_{i-1}) &\geq \mathbf{P}(x_i \leftrightarrow B) - \mathbf{P}(x_i \leftrightarrow X_{i-1}) \\ &\geq \theta - \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{E}N_1 = \mathbf{P}(o \leftrightarrow B) \geq \theta$ , somando de  $i = 2$  até  $k$  obtemos

$$\mathbf{E}N_k = \mathbf{E}N_1 + \sum_{i=2}^k \mathbf{E}(N_i - N_{i-1}) \geq \theta + (k-1)\frac{\theta}{2}.$$

Como  $N_k \leq n$ ,

$$n \geq \mathbf{E}N_k \geq \theta + (k-1)\frac{\theta}{2} \geq k\frac{\theta}{2},$$

e portanto

$$k \leq \frac{2n}{\theta}. \quad (3.3)$$

Considere

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i=2}^k \{x_i \leftrightarrow X_{i-1}\}.$$

Se  $\mathcal{A}$  ocorre, todos os vértices de  $X$  pertencem à componente de  $o$ . Pela associação positiva,

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}) \geq \prod_{i=2}^k \mathbf{P}(x_i \leftrightarrow X_{i-1}) \geq a^{k-1} \geq a^{2n/\theta}.$$

Considere também

$$\mathcal{B} = \bigcap_{b \in B} \{b \leftrightarrow X\}.$$

Por (3.2) e associação positiva,

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}) \geq \left(\frac{\theta}{2}\right)^n.$$

Os eventos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são crescentes. Portanto, pela associação positiva,

$$\mathbf{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \geq \mathbf{P}(\mathcal{A})\mathbf{P}(\mathcal{B}) \geq a^{2n/\theta} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n.$$

Se os dois eventos ocorrem, todo vértice de  $B$  está conectado a  $o$ . Assim,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{b \in B} \{o \leftrightarrow b\}\right) \geq a^{2n/\theta} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n.$$

Como  $a = p\theta/2 \leq \theta/2 \leq 1$  e  $1/\theta \geq 1$ ,

$$\frac{\theta}{2} \geq a^{1/\theta},$$

e portanto

$$a^{2n/\theta} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \geq a^{3n/\theta} = c^n.$$

■

### Teorema 3.7 — Easo–Severo–Tassion

Para todo grafo infinito, conexo e localmente finito  $G$ ,

$$p_c^*(G) < 1 \iff \kappa(G) < \infty.$$

Este é o teorema de contagem de cortes minimais de Easo, Severo e Tassion; veja (Easo et al. 2025). Para grafos quase-transitivos, como  $p_c^* = p_c$ , recuperamos a formulação

$$p_c(G) < 1 \iff \kappa(G) < \infty.$$

*Demonstração.* Suponha primeiro que  $\kappa(G) < \infty$ . Escolha  $K < \infty$  tal que

$$|Q_n(v)| \leq K^n \quad \text{para todo } v \in V(G), n \geq 1.$$

Se  $\mathcal{C}(v)$  é finita, o Lema 3.4 mostra que  $\partial_\infty \mathcal{C}(v)$  é um conjunto de corte minimal de  $v$ , inteiramente formado por arestas fechadas. Portanto

$$\mathbf{P}_p(|\mathcal{C}(v)| < \infty) \leq \sum_{n \geq 1} |Q_n(v)|(1-p)^n \leq \sum_{n \geq 1} [K(1-p)]^n.$$

A cota é uniforme em  $v$  e tende a zero quando  $p \uparrow 1$ . Para algum  $p < 1$  ela é menor que  $1/2$ , de modo que

$$\inf_v \mathbf{P}_p(v \leftrightarrow \infty) \geq \frac{1}{2}.$$

Logo  $p_c^*(G) < 1$ .

Reciprocamente, suponha  $p_c^*(G) < 1$ . Existem  $p < 1$  e  $\theta > 0$  tais que

$$\mathbf{P}_p(v \leftrightarrow \infty) \geq \theta \quad \text{para todo } v \in V(G).$$

Fixe  $o \in V(G)$  e  $\Pi \in Q_n(o)$ . Seja  $A$  a componente de  $o$  em  $G \setminus \Pi$  e  $B$  o conjunto dos extremos internos de  $\Pi$ . Para  $u \in A$ , todo caminho aberto infinito iniciado em  $u$  deve encontrar  $B$  antes de atravessar  $\Pi$ ; logo

$$\mathbf{P}_p(u \overset{A}{\leftrightarrow} B) \geq \theta.$$

Aplicando a Proposição 3.6 à percolação de Bernoulli restrita ao subgrafo induzido por  $A$ , obtemos, com

$$c = \left( \frac{p\theta}{2} \right)^{3/\theta},$$

que o evento  $\mathcal{E}$  de todos os vértices de  $B$  estarem ligados a  $o$  dentro de  $A$  satisfaz

$$\mathbf{P}_p(\mathcal{E}) \geq c^{|B|} \geq c^n.$$

Se  $\mathcal{F}$  é o evento de todas as arestas de  $\Pi$  estarem fechadas, então  $\mathcal{E}$  depende apenas das arestas com ambos os extremos em  $A$ , enquanto  $\mathcal{F}$  depende das arestas de  $\Pi$ . Pela igualdade  $\Pi = \partial_e A$  estabelecida na prova da Proposição 3.5, esses conjuntos de arestas são disjuntos. Portanto

$$\mathbf{P}_p(\mathcal{E} \cap \mathcal{F}) = \mathbf{P}_p(\mathcal{E})\mathbf{P}_p(\mathcal{F}) \geq [c(1-p)]^n.$$

Em  $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ , a componente  $C$  de  $o$  satisfaz  $B \subset C \subset A$ . Pela Proposição 3.5,

$$\partial_\infty C = \Pi.$$

Os eventos  $\{\partial_\infty C = \Pi\}$ ,  $\Pi \in Q_n(o)$ , são disjuntos. Assim,

$$1 \geq \sum_{\Pi \in Q_n(o)} \mathbf{P}_p(\partial_\infty C = \Pi) \geq |Q_n(o)|[c(1-p)]^n.$$

Logo

$$|Q_n(o)| \leq K^n, \quad K = \frac{1}{c(1-p)},$$

uniformemente em  $o$  e  $n$ . Portanto  $\kappa(G) < \infty$ . ■

### 3.3 Dualidade

Como  $\mathbb{Z}^2$  é um subgrafo de  $\mathbb{Z}^d$  para todo  $d \geq 2$ ,

$$p_c(\mathbb{Z}^d) \leq p_c(\mathbb{Z}^2).$$

Assim, para obter uma cota superior uniforme para  $p_c(\mathbb{Z}^d)$ , basta trabalhar no plano.

Considere a imersão usual de  $\mathbb{Z}^2$ . Seu grafo dual é a rede deslocada

$$\widehat{\mathbb{Z}^2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2.$$

A cada aresta primal  $e$  corresponde a única aresta dual  $\hat{e}$  que a cruza. Dada uma configuração  $\omega$ , definimos

$$\widehat{\omega}(\hat{e}) = 1 - \omega(e).$$

Consequentemente, se  $\omega$  tem lei de percolação de Bernoulli com parâmetro  $p$ , então  $\widehat{\omega}$  tem lei de percolação de Bernoulli com parâmetro  $1 - p$  no grafo dual. Esta correspondência de configurações, por si só, não determina os parâmetros críticos; a identidade exata  $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$  será provada mais adiante, no capítulo de percolação planar.

#### Definição 3.1

Um *polígono autoevitante* no grafo dual é um caminho fechado finito

$$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n), \quad \gamma_0 = \gamma_n,$$

que não repete nenhum outro vértice. Dizemos que  $\gamma$  *envolve a origem* quando 0 pertence à componente limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ .

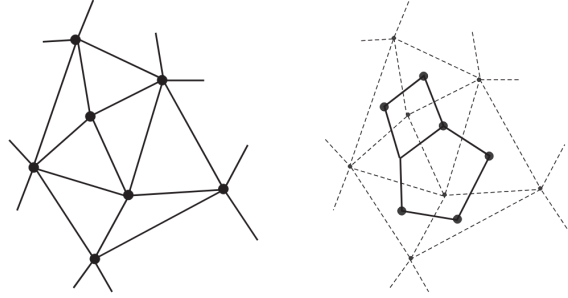


Figura 3.1: Grafo planar e seu grafo dual.

### Proposição 3.8

Um conjunto finito de arestas  $\Pi$  é um conjunto de corte minimal de 0 para o infinito em  $\mathbb{Z}^2$  se e somente se

$$\widehat{\Pi} = \{\hat{e} : e \in \Pi\}$$

é o conjunto de arestas de um polígono autoevitante em  $\widehat{\mathbb{Z}^2}$  que envolve a origem.

*Demonstração.* Suponha primeiro que  $\Pi$  seja um conjunto de corte minimal e seja  $A$  a componente finita de 0 em  $\mathbb{Z}^2 \setminus \Pi$ . Seguindo, no grafo dual, a fronteira que separa  $A$  da componente infinita de  $\mathbb{Z}^2 \setminus A$ , obtemos um circuito dual contido em  $\widehat{\Pi}$  que envolve a origem. Eliminando eventuais laços do circuito, obtemos um polígono autoevitante  $\gamma \subseteq \widehat{\Pi}$  que ainda envolve a origem. As arestas primais duais a  $\gamma$  formam, pelo teorema da curva de Jordan, um conjunto de corte de 0 contido em  $\Pi$ . Pela minimalidade de  $\Pi$ , esse subconjunto deve ser o próprio  $\Pi$ . Logo  $\widehat{\Pi} = \gamma$ .

Reciprocamente, suponha que  $\widehat{\Pi}$  seja um polígono autoevitante que envolve a origem. Pelo teorema da curva de Jordan, qualquer caminho primal de 0 ao infinito deve cruzar o polígono dual e, portanto, atravessar uma aresta de  $\Pi$ . Assim  $\Pi$  é um conjunto de corte. Escolha um subconjunto minimal  $\Pi' \subseteq \Pi$  que ainda seja um corte. Pela primeira parte da prova,  $\widehat{\Pi'}$  é um polígono autoevitante que envolve a origem e está contido no polígono  $\widehat{\Pi}$ . Um ciclo simples não contém propriamente outro ciclo simples como subconjunto de suas arestas; portanto  $\widehat{\Pi'} = \widehat{\Pi}$  e  $\Pi' = \Pi$ . ■

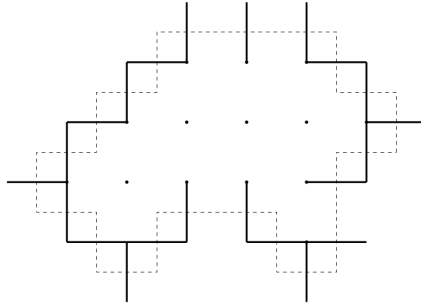


Figura 3.2: Um conjunto de corte minimal de 0 e seu polígono autoevitante dual.

### Corolário 3.9

Para todo  $d \geq 2$ ,

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(\mathbb{Z}^d) \leq \frac{2}{3}.$$

*Demonstração.* A cota inferior segue do primeiro teorema do capítulo, pois  $\mathbb{Z}^d$  tem grau  $2d$ .

Para a cota superior, fixamos a origem em  $\mathbb{Z}^2$  e denotamos por  $C_n(0)$  os cortes minimais de tamanho  $n$ . Pela Proposição 3.8, cada elemento de  $C_n(0)$  corresponde a um polígono autoevitante dual de comprimento  $n$  que envolve a origem.

Se  $w$  e  $h$  são, respectivamente, as amplitudes horizontal e vertical da caixa retangular mínima que contém tal polígono, então o fato de o polígono envolver a origem implica que essa caixa também contém a origem. Além disso, para um caminho fechado na rede quadrada,

$$2w + 2h \leq n.$$

Em particular, todos os vértices do polígono estão a distância  $\ell^\infty$  no máximo  $n/2 + 1$  da origem. Há, portanto, no máximo  $(2n + 3)^2$  escolhas possíveis para um vértice inicial do polígono.

A partir de um vértice fixo da rede dual, há no máximo

$$4 \cdot 3^{n-1}$$

caminhos autoevitantes de comprimento  $n$ . Assim

$$|C_n(0)| \leq 4(2n + 3)^2 3^{n-1}.$$

Tomando raízes  $n$ -ésimas,

$$|C_n(0)|^{1/n} \leq 3 \left( \frac{4(2n+3)^2}{3} \right)^{1/n} \rightarrow 3.$$

Portanto, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0(\varepsilon)$  tal que

$$|C_n(0)| \leq (3 + \varepsilon)^n \quad \text{para } n > n_0(\varepsilon).$$

A Proposição 3.3, com  $M = 3 + \varepsilon$ , fornece

$$p_c(\mathbb{Z}^2) \leq \frac{2 + \varepsilon}{3 + \varepsilon}.$$

Fazendo  $\varepsilon \downarrow 0$ , obtemos  $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq 2/3$ . Finalmente,

$$p_c(\mathbb{Z}^d) \leq p_c(\mathbb{Z}^2)$$

para  $d \geq 2$ . ■

## Exercícios

### Exercício 3.2

Suponha que  $\Pi$  não intercepte as arestas contidas na caixa

$$\{z \in \mathbb{Z}^2 : \|z\|_\infty \leq n\}.$$

Prove que  $|\Pi| > n$ . Assim,  $\Pi$  deve conter pelo menos uma aresta que esteja a distância, no máximo,  $n$  da origem.

### Exercício 3.3

#### Relação entre $p_c(G)$ e $p_c(\hat{G})$

No presente exercício, utilizamos a notação  $A \overset{B}{\longleftrightarrow} C$  para indicar que  $A$  e  $C$  estão conectados por um caminho usando vértices em  $B$  apenas. Consideramos percolação de Bernoulli em uma rede planar  $G$  embutida de tal forma que  $\mathbb{Z}^2$  atue transitivamente sobre  $G$ . Não assumimos simetria da rede.

Chamamos as partes esquerda, direita, superior e inferior de um retângulo de Esquerda, Direita, Topo e Base. Além disso,  $H(n, k)$  e  $V(n, k)$  são os eventos nos quais  $[0, n] \times [0, k]$  é cruzado horizontalmente e verticalmente por caminhos abertos.

**Passo 1** Use o Lema de Borel-Cantelli e o Teorema a seguir:

**Teorema 3.10 — Decaimento exponencial no diâmetro**

Para todo  $p < p_c$ , existe uma constante  $c_p > 0$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$\mathbf{P}_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \leq \exp(-c_p n).$$

Além disso, existe  $c > 0$  tal que, para  $p > p_c$ ,

$$\theta(p) \geq c(p - p_c).$$

para provar que, para  $p < p_c(G)$ , existe um número finito de circuitos abertos envolvendo um dado vértice de  $\widehat{G}$ . Deduzimos que:

$$p_c(G) + p_c(\widehat{G}) \leq 1.$$

Queremos provar a recíproca utilizando um argumento por contradição. A partir de agora, assumimos que tanto  $p > p_c(G)$  quanto  $p^* > p_c(\widehat{G})$ .

**Passo 2** Para  $s > 0$  e  $x \in \mathbb{Z}^2$ , definimos  $S_x = x + [0, s]^2$ . Prove que, para qualquer retângulo  $R$ , existe  $x = x(R) \in R \cap \mathbb{Z}^2$  tal que existem vizinhos  $x'$  e  $x''$  de  $x$  em  $\mathbb{Z}^2$  satisfazendo:

$$\mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{R} \text{Base}] \geq \mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{R} \text{Topo}],$$

$$\mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{R} \text{Esquerda}] \geq \mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{R} \text{Direita}],$$

$$\mathbf{P}_p[S_{x'} \xleftrightarrow{R} \text{Topo}] \geq \mathbf{P}_p[S_{x'} \xleftrightarrow{R} \text{Base}],$$

$$\mathbf{P}_p[S_{x''} \xleftrightarrow{R} \text{Direita}] \geq \mathbf{P}_p[S_{x''} \xleftrightarrow{R} \text{Esquerda}].$$

**Passo 3** Seja  $H = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,  $\ell_- = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ ,  $\ell_+ = \{0\} \times \mathbb{R}_-$  e  $\ell = \ell_- \cup \ell_+$ . Prove que existe  $x = x(m)$  com primeira coordenada igual a  $m$  satisfazendo:

$$\mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{H} \ell_-] \geq \mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{H} \ell_+],$$

$$\mathbf{P}_p[S_{x+(0,1)} \xleftrightarrow{H} \ell_-] \leq \mathbf{P}_p[S_{x+(0,1)} \xleftrightarrow{H} \ell_+].$$

**Passo 4** Utilizando o *truque da raiz quadrada*, deduza que:

$$\mathbf{P}_p[S_x \xleftrightarrow{H} \ell_-] \geq 1 - \sqrt{P_p[S_x \not\leftrightarrow \ell]}$$

$$\mathbf{P}_p[S_{x+(0,1)} \overset{H}{\longleftrightarrow} \ell_-] \geq 1 - \sqrt{P_p[S_{x+(0,1)} \not\longleftrightarrow \ell]}$$

**Passo 5** Usando o fato de que há uma componente infinita único quase certamente, prove que a probabilidade de que  $\{0\} \times [0,1]$  esteja conectado ao infinito tende a 0.

**Passo 6** Prove que a distância entre  $x(R)$  e a fronteira de  $R$  necessariamente tende a infinito quando  $\min\{n,k\} \rightarrow \infty$ .

**Passo 7** Utilizando  $x(R)$ , prove que:

$$\max\{\mathbf{P}_p[V(n,k)], \mathbf{P}_p[H(n,k+1)]\} \rightarrow 1$$

e

$$\min\{\mathbf{P}_p[V(n,k)], \mathbf{P}_p[H(n,k)]\} \rightarrow 0$$

quando  $\min\{k,n\} \rightarrow \infty$ . *Dica: use o truque da raiz quadrada e o critério de unicidade como nos passos anteriores.*

**Passo 8** Considerando o maior inteiro  $k$  tal que  $\mathbf{P}_p[V(n,k)] \geq \mathbf{P}_p[H(n,k)]$ , chegue a uma contradição. Deduzimos, então, que:

$$p_c(G) + p_c(\widehat{G}) \geq 1.$$

# Percolação em árvores

---

## 4.1 Processo de Galton–Watson

O processo de Galton–Watson surgiu do problema da sobrevivência de sobrenomes ao longo das gerações, estudado por Francis Galton e Henry William Watson no século XIX. Nesse modelo, cada indivíduo produz, independentemente dos demais, um número aleatório de descendentes segundo uma distribuição fixa.

Partimos de um único indivíduo, que constitui a **geração inicial**. Seus filhos formam a primeira geração; os filhos destes, a segunda, e assim sucessivamente. A repetição da mesma regra de descendência produz uma árvore genealógica aleatória.

Em vez de acompanhar toda a árvore, consideramos o **tamanho da população** em cada geração. Isso permite estudar a probabilidade de extinção: sob a hipótese não degenerada usual, a população se extingue quase certamente quando o número médio de descendentes por indivíduo é menor ou igual a 1; quando essa média é maior que 1, a sobrevivência tem probabilidade positiva.

Na percolação em árvores, a exploração da componente aberta pode ser descrita por esse processo de ramificação. O critério de extinção fornecerá, assim, o parâmetro crítico.

**Definição 4.1**

Seja  $\mu$  uma distribuição em  $\mathbb{N}$ , ou seja,  $\mu : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$  tal que  $\sum_n \mu(n) = 1$ . O **processo de Galton–Watson** com distribuição de descendência  $\mu$ , também denotado por  $\text{GW}_\mu$ , é a seguinte cadeia de Markov  $(Z_n)_n$  sobre  $\mathbb{N}$ :

Seja  $(X_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$  uma família de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição  $\mu$ .

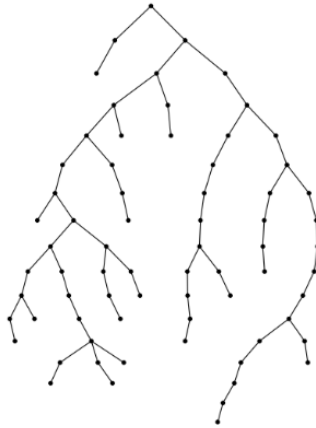
1. Na geração  $n = 0$ , definimos  $Z_0 = 1$ , isto é, iniciamos com um único indivíduo.

2. Dado  $Z_n$ , definimos:

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$$

onde  $X_{n+1,k}$  representa o número de descendentes do  $k$ -ésimo indivíduo na geração  $n$ .

Escrevemos ainda  $p_k = \mu(k)$ ,  $k \geq 0$ , para a probabilidade de um indivíduo ter exatamente  $k$  descendentes.

**Critério de extinção**

Seja  $m$  o número médio de descendentes por indivíduo,

$$m = \mathbb{E}[X_{1,1}] = \sum_{k \geq 0} k p_k,$$

e seja  $q$  a probabilidade de extinção. O comportamento do processo depende de  $m$  e do caso degenerado  $p_1 = 1$ :

### Teorema 4.1

- Se  $m < 1$ , então  $q = 1$ , ou seja, a extinção ocorre quase certamente.
- Se  $m > 1$ , então  $q < 1$ .
- Se  $m = 1$  e  $p_1 \neq 1$ , então  $q = 1$ .

*Demonstração.* Considere a função geradora da distribuição de descendência,

$$f(s) = \mathbf{E}[s^{X_{1,1}}] = \sum_{k \geq 0} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Seja

$$q_n = \mathbf{P}(Z_n = 0).$$

Como o estado 0 é absorvente,  $q_n$  é também a probabilidade de o processo ter se extinguido até a geração  $n$ . Condicionando no número  $k$  de descendentes do indivíduo inicial, a extinção até a geração  $n + 1$  ocorre exatamente quando cada uma das  $k$  linhagens se extingue até a geração  $n$ . Pela independência das linhagens,

$$q_{n+1} = \sum_{k \geq 0} p_k q_n^k = f(q_n), \quad q_0 = 0.$$

Assim,  $(q_n)_n$  é crescente e converge para a probabilidade de extinção  $q$ . Pela continuidade de  $f$ ,

$$q = f(q).$$

Além disso, se  $s \in [0, 1]$  satisfaz  $f(s) = s$ , então

$$q_0 = 0 \leq s, \quad q_n \leq s \implies q_{n+1} = f(q_n) \leq f(s) = s.$$

Por indução,  $q_n \leq s$  para todo  $n$ ; logo  $q \leq s$ . Portanto,  $q$  é o menor ponto fixo de  $f$  em  $[0, 1]$ .

A função  $f$  é convexa, satisfaz  $f(1) = 1$  e

$$f'(1-) = m$$

(com o valor  $+\infty$  permitido). Se  $m < 1$ , a convexidade fornece, para  $0 \leq s < 1$ ,

$$f(s) \geq f(1) + f'(1-)(s - 1) = 1 + m(s - 1).$$

Como  $s - 1 < 0$  e  $m < 1$ ,

$$1 + m(s - 1) > 1 + (s - 1) = s.$$

Logo  $f(s) > s$  para todo  $s < 1$ , o único ponto fixo é 1 e  $q = 1$ .

Se  $m = 1$ , a convexidade fornece  $f(s) \geq s$  em  $[0, 1]$ . Se houvesse igualdade em algum  $s < 1$ , a convexidade e a igualdade também em 1 forçariam  $f$  a coincidir com a reta identidade em todo o intervalo  $[s, 1]$  e, por analiticidade em  $(0, 1)$ , em todo  $(0, 1)$ ; isso equivale ao caso degenerado  $p_1 = 1$ . Portanto, quando  $p_1 \neq 1$ , temos novamente  $f(s) > s$  para todo  $s < 1$  e, assim,  $q = 1$ .

Finalmente, suponha  $m > 1$ . Então, para  $s < 1$  suficientemente próximo de 1,

$$f(s) < s.$$

Como  $f(0) = p_0 \geq 0$ , a continuidade fornece um ponto fixo em  $[0, 1]$ ; se  $p_0 = 0$ , o próprio 0 já é ponto fixo. Como  $q$  é o menor ponto fixo, segue que  $q < 1$ . ■

#### Exemplo 4.1 — Distribuição binomial.

Se os indivíduos geram descendentes segundo uma distribuição binomial  $X \sim \text{Bin}(d, p)$ , então a média é  $m = dp$ . O ponto crítico ocorre quando  $m = 1$ , ou seja,

$$p_c = \frac{1}{d}.$$

Para  $p < p_c$  ocorre extinção quase certa; para  $p > p_c$ , há probabilidade positiva de sobrevivência. No ponto crítico, vale a ressalva do caso degenerado  $p_1 = 1$ . ◀

O processo de Galton–Watson também é usado em biologia populacional e epidemiologia. Para a percolação, o exemplo binomial permite descrever a componente aberta em árvores regulares.

## 4.2 Percolação em árvores regulares

Considere  $d \geq 3$  e seja  $\mathbb{T}_d$  a árvore infinita  $d$ -regular: todo vértice possui exatamente  $d$  vizinhos. Fixe uma raiz  $o$ . A escolha da raiz não altera o grafo; ela serve apenas para orientar as arestas em direção ao infinito.

Se  $x_1, \dots, x_d$  são os vizinhos de  $o$ , a remoção de  $o$  decompõe  $\mathbb{T}_d$  em  $d$  subárvores disjuntas  $T_1, \dots, T_d$ , onde  $T_j$  contém  $x_j$ . Vista como árvore enraizada em  $x_j$ , cada  $T_j$  possui exatamente  $d - 1$  filhos por vértice.

É preciso distinguir a raiz dos demais vértices: a componente de  $o$  na árvore  $d$ -regular não é, desde a geração inicial, um processo de Galton–Watson homogêneo com distribuição  $\text{Bin}(d-1, p)$ , pois a raiz possui  $d$  vizinhos. Em cada ramo  $T_j$ , porém, o processo de descendência é Galton–Watson com essa distribuição.

### Proposição 4.2

Fixe  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Condicionalmente à abertura da aresta  $\{o, x_j\}$ , o número de vértices da componente de  $o$  em sucessivas gerações dentro de  $T_j$  é um processo de Galton–Watson com distribuição de descendência

$$\text{Bin}(d-1, p).$$

Os processos associados aos diferentes ramos são independentes.

*Demonstração.* Cada vértice de  $T_j$  possui  $d-1$  vizinhos mais distantes de  $o$ . As arestas que ligam um vértice a esses descendentes são independentes e abertas com probabilidade  $p$ . Assim, o número de descendentes abertos de cada indivíduo tem distribuição  $\text{Bin}(d-1, p)$ , independentemente dos demais. Ramos distintos usam conjuntos disjuntos de arestas, o que fornece a independência. ■

### Teorema 4.3

Para  $d \geq 3$ , na percolação por elos em  $\mathbb{T}_d$ ,

$$p_c(\mathbb{T}_d) = \frac{1}{d-1}.$$

Além disso,

$$\theta_{\mathbb{T}_d, o}\left(\frac{1}{d-1}\right) = 0,$$

e, portanto, não existe componente infinita no ponto crítico quase certamente.

*Demonstração.* Em cada ramo  $T_j$ , a sobrevivência além de  $x_j$  é governada por um processo de Galton–Watson com média

$$m = p(d-1).$$

Se  $p \leq 1/(d-1)$ , esse processo se extingue quase certamente. Como há apenas  $d$  ramos,

$$\mathbf{P}_p(o \leftrightarrow \infty) = 0.$$

Logo

$$p_c(\mathbb{T}_d) \geq \frac{1}{d-1}.$$

Se  $p > 1/(d-1)$ , o processo de Galton–Watson em cada ramo sobrevive com probabilidade positiva. A aresta  $\{o, x_j\}$  está aberta com probabilidade  $p > 0$ , independentemente da configuração no restante de  $T_j$ . Portanto, para qualquer  $j$ ,

$$\mathbf{P}_p(\{o, x_j\} \text{ aberta e o ramo } T_j \text{ sobrevive}) = p \mathbf{P}_p(T_j \text{ sobrevive}) > 0,$$

o que implica  $\theta_{\mathbb{T}_d, o}(p) > 0$ . Assim

$$p_c(\mathbb{T}_d) \leq \frac{1}{d-1}.$$

No ponto crítico  $p = 1/(d-1)$ , a média do processo é 1 e a distribuição  $\text{Bin}(d-1, p)$  não é degenerada em 1 para  $d \geq 3$ . Pelo critério de extinção de Galton–Watson, todos os ramos se extinguem quase certamente; portanto  $\theta_{\mathbb{T}_d, o}(p_c) = 0$ .

Por transitividade de  $\mathbb{T}_d$ , todo vértice tem a mesma probabilidade de pertencer a uma componente infinita; no ponto crítico essa probabilidade é zero. Como  $\mathbb{T}_d$  é enumerável, a probabilidade de existir alguma componente infinita é no máximo a soma, sobre os vértices, dessas probabilidades, e portanto é zero. ■

# Ferramentas probabilísticas

---

A desigualdade de van den Berg–Kesten e a fórmula de Russo permitem estudar dois aspectos das conexões abertas. A primeira controla ocorrências disjuntas de eventos crescentes; a segunda relaciona a variação de uma esperança com as influências das arestas.

## 5.1 Desigualdade BK

Fixe um conjunto finito de arestas  $F \subset E(G)$  e escreva  $\Omega_F = \{0,1\}^F$ . Para  $K \subset F$  e  $\omega \in \Omega_F$ , denotamos por

$$C_{\omega,K} = \{\eta \in \Omega_F : \eta|_K = \omega|_K\}$$

o cilindro determinado por  $\omega$  em  $K$ .

Dizemos que  $K$  *certifica* um evento  $A \subset \Omega_F$  na configuração  $\omega$  quando  $C_{\omega,K} \subset A$ .

**Definição 5.1**

Dados eventos  $A, B \subset \Omega_F$ , sua *ocorrência disjunta* é

$$A \circ B = \{\omega : \exists K, L \subset F, K \cap L = \emptyset, C_{\omega, K} \subset A, C_{\omega, L} \subset B\}.$$

Para eventos de conexão,  $A \circ B$  significa que as duas ocorrências podem ser realizadas por conjuntos disjuntos de arestas. Por exemplo, se  $A$  e  $B$  especificam duas conexões em um subgrafo finito, então  $A \circ B$  exige caminhos abertos disjuntos em arestas que certifiquem essas conexões.

**Teorema 5.1 — Desigualdade BK**

Se  $A$  e  $B$  são eventos crescentes que dependem apenas das arestas de um conjunto finito  $F$ , então

$$\mathbf{P}_p(A \circ B) \leq \mathbf{P}_p(A)\mathbf{P}_p(B).$$

A prova por indução em  $|F|$  usa a seguinte descrição de  $A \circ B$  em termos de configurações com suportes disjuntos.

Para configurações  $\omega, \eta \in \Omega_F$  com suportes disjuntos, escrevemos  $\omega + \eta$  para a configuração cuja coordenada em  $e$  é  $\omega(e) + \eta(e)$ .

**Lema 5.2**

Se  $A$  e  $B$  são crescentes, então

$$A \circ B = \{\omega + \eta : \text{supp}(\omega) \cap \text{supp}(\eta) = \emptyset, \omega \in A, \eta \in B\}.$$

*Demonstração.* Suponha primeiro que  $\xi \in A \circ B$  e escolha certificados disjuntos  $K, L \subset F$ . Defina

$$\omega(e) = \begin{cases} 0, & e \in L, \\ \xi(e), & e \notin L, \end{cases} \quad \eta(e) = \begin{cases} \xi(e), & e \in L, \\ 0, & e \notin L. \end{cases}$$

Então  $\xi = \omega + \eta$  e os suportes são disjuntos. Como  $K \cap L = \emptyset$ , a configuração  $\omega$  coincide com  $\xi$  em  $K$ , logo  $\omega \in C_{\xi, K} \subset A$ ; do mesmo modo,  $\eta \in C_{\xi, L} \subset B$ .

Reciprocamente, suponha  $\xi = \omega + \eta$  com suportes disjuntos,  $\omega \in A$  e  $\eta \in B$ . Tome  $K = \text{supp}(\omega)$  e  $L = \text{supp}(\eta)$ . Se uma configuração coincide com  $\omega$  em  $K$ , ela

é maior ou igual a  $\omega$ ; como  $A$  é crescente,  $K$  certifica  $A$ . Analogamente,  $L$  certifica  $B$ . Logo  $\xi \in A \circ B$ . ■

*Prova da desigualdade BK.* O caso  $|F| \leq 1$  é imediato. Suponha o resultado conhecido para  $|F| - 1$  arestas e escolha  $e \in F$ . Ponha  $F' = F \setminus \{e\}$ . Para um evento  $C \subset \Omega_{F'}$  e  $j \in \{0, 1\}$ , defina sua seção

$$C_j = \{\omega \in \Omega_{F'} : \omega_{j,e} \in C\},$$

onde  $\omega_{j,e}$  é obtida acrescentando a coordenada  $e$  com valor  $j$ .

Se  $C$  é crescente, então  $C_0 \subset C_1$  e ambas as seções são crescentes. Escreva  $D = A \circ B$ . Do Lema 5.2 obtemos

$$D_0 \subset A_0 \circ B_0$$

e

$$D_1 \subset (A_0 \circ B_1) \cup (A_1 \circ B_0).$$

Além disso, como  $A_0 \subset A_1$  e  $B_0 \subset B_1$ ,

$$D_0 \subset (A_0 \circ B_1) \cap (A_1 \circ B_0), \quad D_1 \subset A_1 \circ B_1.$$

Pela hipótese de indução,

$$\mathbf{P}_p(D_0) \leq \mathbf{P}_p(A_0)\mathbf{P}_p(B_0), \quad \mathbf{P}_p(D_1) \leq \mathbf{P}_p(A_1)\mathbf{P}_p(B_1).$$

Para a estimativa cruzada, ponha

$$E = A_0 \circ B_1, \quad H = A_1 \circ B_0.$$

As inclusões acima dão  $D_0 \subset E \cap H$  e  $D_1 \subset E \cup H$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_p(D_0) + \mathbf{P}_p(D_1) &\leq \mathbf{P}_p(E \cap H) + \mathbf{P}_p(E \cup H) \\ &= \mathbf{P}_p(E) + \mathbf{P}_p(H) \\ &\leq \mathbf{P}_p(A_0)\mathbf{P}_p(B_1) + \mathbf{P}_p(A_1)\mathbf{P}_p(B_0), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade usa novamente a hipótese de indução.

Usando

$$\mathbf{P}_p(A) = (1 - p)\mathbf{P}_p(A_0) + p\mathbf{P}_p(A_1)$$

e a fórmula análoga para  $B$ , expandimos o produto e aplicamos as três estimativas anteriores:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_p(A)\mathbf{P}_p(B) &= (1-p)^2\mathbf{P}_p(A_0)\mathbf{P}_p(B_0) \\
 &\quad + p(1-p)[\mathbf{P}_p(A_0)\mathbf{P}_p(B_1) + \mathbf{P}_p(A_1)\mathbf{P}_p(B_0)] \\
 &\quad + p^2\mathbf{P}_p(A_1)\mathbf{P}_p(B_1) \\
 &\geq (1-p)^2\mathbf{P}_p(D_0) + p(1-p)[\mathbf{P}_p(D_0) + \mathbf{P}_p(D_1)] + p^2\mathbf{P}_p(D_1) \\
 &= [(1-p)^2 + p(1-p)]\mathbf{P}_p(D_0) + [p(1-p) + p^2]\mathbf{P}_p(D_1) \\
 &= (1-p)\mathbf{P}_p(D_0) + p\mathbf{P}_p(D_1) \\
 &= \mathbf{P}_p(D).
 \end{aligned}$$



**Passagem para grafos infinitos.** A desigualdade se estende a eventos de conexão que possuem testemunhos finitos — por exemplo,  $\{x \leftrightarrow y\}$  ou  $\{A \leftrightarrow B\}$  com  $A$  e  $B$  finitos. Para isso, escolhe-se uma exaustão por subgrafos finitos  $G_1 \subset G_2 \subset \dots$  e restringem-se os caminhos a  $G_n$ . Os eventos assim obtidos crescem para o evento de conexão original, e o mesmo vale para a ocorrência disjunta. Aplicando BK em cada  $G_n$  e passando ao limite por continuidade crescente da probabilidade, obtemos a desigualdade correspondente no grafo infinito. Eventos sem testemunho finito, como  $\{x \leftrightarrow \infty\}$ , exigem uma aproximação específica antes de aplicar esse argumento.

## 5.2 Fórmula de Russo

Seja  $X : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R}$  uma variável aleatória. Para  $e \in F$ , defina

$$\partial_e X(\omega) = X(\omega_{1,e}) - X(\omega_{0,e}).$$

A quantidade  $\mathbf{E}_p[\partial_e X]$  é a influência da aresta  $e$  sobre  $X$ .

### Teorema 5.3 — Fórmula de Russo–Margulis

Se  $X$  depende apenas de um conjunto finito  $F$  de arestas, então

$$\frac{d}{dp}\mathbf{E}_p[X] = \sum_{e \in F} \mathbf{E}_p[\partial_e X].$$

*Demonstração.* É útil permitir parâmetros distintos em cada aresta. Escreva  $F = \{e_1, \dots, e_n\}$  e, para  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , seja  $\mathbf{P}_{\mathbf{p}}$  a medida produto com

$$\mathbf{P}_{\mathbf{p}}(\omega(e_j) = 1) = p_j.$$

Defina  $f(\mathbf{p}) = \mathbf{E}_{\mathbf{p}}[X]$ .

Fixe  $j$  e condicione nos estados de todas as arestas exceto  $e_j$ . Para cada configuração das demais coordenadas, a esperança condicional de  $X$  é uma função afim de  $p_j$ :

$$p_j X(\omega_{1,e_j}) + (1 - p_j) X(\omega_{0,e_j}).$$

Logo

$$\frac{\partial f}{\partial p_j}(\mathbf{p}) = \mathbf{E}_{\mathbf{p}}[\partial_{e_j} X].$$

Aplicando a regra da cadeia à diagonal  $p_1 = \dots = p_n = p$ ,

$$\frac{d}{dp} \mathbf{E}_p[X] = \frac{d}{dp} f(p, \dots, p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j}(p, \dots, p) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_p[\partial_{e_j} X],$$

que é a fórmula desejada. ■

Para um evento  $A$ , dizemos que  $e$  é *pivotal* na configuração  $\omega$  quando mudar apenas o estado de  $e$  altera a ocorrência de  $A$ . Equivalentemente,

$$e \text{ é pivotal para } A \iff \mathbf{1}_A(\omega_{1,e}) \neq \mathbf{1}_A(\omega_{0,e}).$$

#### Lema 5.4

Se  $A$  é crescente, então

$$\partial_e \mathbf{1}_A(\omega) = \mathbf{1}_{\{e \text{ é pivotal para } A\}}(\omega).$$

Consequentemente,

$$\mathbf{E}_p[\partial_e \mathbf{1}_A] = \mathbf{P}_p(e \text{ é pivotal para } A).$$

*Demonstração.* Como  $A$  é crescente,

$$\mathbf{1}_A(\omega_{1,e}) \geq \mathbf{1}_A(\omega_{0,e}).$$

A diferença entre os dois indicadores é, portanto, 1 exatamente quando forçar  $e$  a aberta faz  $A$  ocorrer e forçar  $e$  a fechada faz  $A$  falhar, isto é, exatamente quando  $e$  é pivotal. ■

### **Teorema 5.5 — Fórmula de Russo para eventos crescentes**

Se  $A$  é crescente e depende apenas de um conjunto finito  $F$  de arestas, então

$$\frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A) = \sum_{e \in F} \mathbf{P}_p(e \text{ é pivotal para } A).$$

*Demonstração.* Aplique a fórmula de Russo–Margulis a  $X = \mathbf{1}_A$  e use o Lema 5.4. ■

# Número de componentes infinitas

---

Uma questão básica da teoria da percolação é saber quantas componentes infinitas podem coexistir. Em  $\mathbb{Z}^d$ , Aizenman, Kesten e Newman provaram em 1987 que, quando existe uma componente infinita, ela é quase certamente única. Burton e Keane deram depois um argumento particularmente simples, baseado em ergodicidade, modificações locais e amenabilidade.

Neste capítulo apresentamos essa prova em duas etapas. Primeiro mostraremos que, em um grafo transitivo, o número de componentes infinitas só pode ser

$$0, \quad 1, \quad \text{ou} \quad \infty$$

quase certamente. Em seguida, mostraremos que a alternativa  $\infty$  é impossível em grafos amenáveis.

## 6.1 Modificações locais e a lei $0,1,\infty$

Usaremos repetidamente o fato de que, para  $p \in (0,1)$ , qualquer modificação de um número finito de arestas tem probabilidade estritamente positiva.

Seja  $F \subset E(G)$  finito e seja  $\eta \in \{0,1\}^F$ . Para  $\omega \in \{0,1\}^{E(G)}$ , definimos

$$\omega_{\eta,F}(e) = \begin{cases} \eta(e), & e \in F, \\ \omega(e), & e \notin F. \end{cases}$$

Quando  $\eta \equiv 1$  ou  $\eta \equiv 0$ , escrevemos  $\omega_{1,F}$  e  $\omega_{0,F}$ .

### Lema 6.1 – Energia finita

Seja  $p \in (0,1)$ ,  $F \subset E(G)$  finito e  $\eta \in \{0,1\}^F$ . Se  $A$  é um evento com  $\mathbf{P}_p(A) > 0$ , então o conjunto de configurações obtidas a partir de configurações de  $A$  forçando os estados de  $F$  a serem  $\eta$  também tem probabilidade positiva.

*Demonstração.* Particione  $A$  de acordo com os  $2^{|F|}$  possíveis estados das arestas de  $F$ . Existe  $\xi \in \{0,1\}^F$  tal que

$$\mathbf{P}_p(A \cap \{\omega|_F = \xi\}) > 0.$$

Dentro de um cilindro, a medida produto se decompõe entre as coordenadas de  $F$  e as coordenadas fora de  $F$ . Substituir o padrão  $\xi$  pelo padrão  $\eta$  multiplica o peso das coordenadas de  $F$  por um fator estritamente positivo, pois  $0 < p < 1$ . Portanto, a imagem desse subconjunto pela modificação  $\omega \mapsto \omega_{\eta,F}$  tem probabilidade positiva. ■

Esse pequeno lema é a forma de *propriedade de energia finita* de que precisaremos. Seja  $N = N(\omega)$  o número de componentes infinitas da configuração aberta.

### Lema 6.2

Seja  $G$  um grafo infinito, conexo e transitivo. Para a percolação de Bernoulli em  $G$  e  $p \in (0,1)$ , existe

$$k_p \in \{0,1,\infty\}$$

tal que

$$\mathbf{P}_p(N = k_p) = 1.$$

*Demonstração.* O número  $N$  é invariante por automorfismos de  $G$ . Pela ergodicidade da percolação de Bernoulli em grafos transitivos, existe

$$k_p \in \{0,1,2,\dots,\infty\}$$

tal que  $N = k_p$  quase certamente.

Resta excluir  $2 \leq k_p < \infty$ . Fixe  $o \in V(G)$  e denote por  $N_r$  o número de componentes infinitas que intersectam a bola  $B(o,r)$ . Como as bolas exaurem o grafo,

$$N_r \uparrow N,$$

e, portanto,

$$\{N_r \geq 2\} \uparrow \{N \geq 2\}.$$

Se  $2 \leq k_p < \infty$ , então  $N \geq 2$  quase certamente e, pela continuidade crescente da probabilidade,

$$\mathbf{P}_p(N_r \geq 2) \longrightarrow \mathbf{P}_p(N \geq 2) = 1.$$

Em particular, existe  $r$  tal que

$$\mathbf{P}_p(N_r \geq 2) > 0.$$

A bola  $B(o, r)$  é conexa. Considere o conjunto finito  $F_r$  das arestas com ambas as extremidades em  $B(o, r)$ . Se declararmos todas as arestas de  $F_r$  abertas, todas as componentes infinitas que intersectam  $B(o, r)$  passam a pertencer a uma única componente aberta. Assim, em qualquer configuração com  $N_r \geq 2$ , essa modificação reduz o número total de componentes infinitas em pelo menos uma unidade.

Pelo lema de energia finita, a configuração modificada ocorre com probabilidade positiva. Teríamos, portanto,

$$\mathbf{P}_p(N \leq k_p - 1) > 0,$$

em contradição com  $N = k_p$  quase certamente. Logo, nenhum valor finito maior que 1 é possível. ■

## 6.2 Amenabilidade

A unicidade da componente infinita está intimamente ligada à possibilidade de encontrar grandes conjuntos com fronteira pequena.

### Definição 6.1

Seja  $G$  um grafo localmente finito e  $S \subset V(G)$  finito e não vazio. A *fronteira externa* de  $S$  é

$$\partial S = \{y \notin S : \text{existe } x \in S \text{ com } x \sim y\}.$$

A constante isoperimétrica de  $G$  é

$$\Phi(G) = \inf_{\substack{S \subset V(G) \\ S \text{ finito, conexo} \\ S \neq \emptyset}} \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

Dizemos que  $G$  é *amenável* quando  $\Phi(G) = 0$ .

Equivalentemente, com essa convenção,  $G$  é amenável se existe uma sequência de conjuntos finitos, conexos e não vazios  $(S_n)_n$  tal que

$$\frac{|\partial S_n|}{|S_n|} \rightarrow 0.$$

Uma sequência com essa propriedade é chamada de *sequência de Følner*.

A interpretação geométrica é simples: em um grafo amenável existem regiões finitas cujo volume é muito maior que sua fronteira. Em um grafo não amenável, ao contrário, toda região finita possui uma fronteira proporcional ao volume.

## Exercícios

### Exercício 6.1

Seja  $S \subset \mathbb{T}_d$  finito e conexo, com  $|S| \geq 2$ . Mostre que

$$|\partial S| = (d - 2)|S| + 2.$$

Deduza que  $\Phi(\mathbb{T}_d) = d - 2$ .

### Exercício 6.2

Mostre que  $\mathbb{Z}^d$  é amenável.

## 6.3 Pontos de trifurcação

O argumento de Burton–Keane transforma a hipótese de infinitas componentes infinitas em uma densidade positiva de pontos com três braços infinitos.

### Definição 6.2

Seja  $\omega$  uma configuração e  $x \in V(G)$ . Dizemos que  $x$  é um *ponto de trifurcação* se  $x$  pertence a uma componente aberta infinita e, ao remover  $x$  dessa componente, restam pelo menos três componentes conexas infinitas. Denotaremos por  $T(x)$  o evento de que  $x$  é um ponto de trifurcação.

A figura mental é a de um vértice do qual partem pelo menos três braços abertos que seguem para o infinito e que não podem ser conectados entre si sem passar novamente pelo vértice.

O primeiro lema mostra por que esses pontos aparecem quando há infinitas componentes infinitas.

**Lema 6.3**

Seja  $G$  infinito, conexo e transitivo e seja  $p \in (0,1)$ . Se

$$N = \infty \quad \mathbf{P}_p\text{-q.c.},$$

então

$$\mathbf{P}_p(\mathcal{T}(o)) > 0$$

para todo vértice  $o \in V(G)$ .

*Demonstração.* Fixe  $o \in V(G)$ . Como o número de componentes infinitas que intersectam  $B(o,r)$  cresce para  $N = \infty$ , existe  $r$  tal que o evento

$$A = \{B(o,r) \text{ intersecta pelo menos três componentes infinitas}\}$$

tem probabilidade positiva.

Escreva  $K = B(o,r)$ . Em cada configuração de  $A$ , cada uma dessas componentes possui, após a remoção de  $K$ , uma componente infinita ligada a  $K$  por alguma aresta aberta da fronteira. Como  $K$  é finito e localmente finito, sua fronteira de arestas é finita e há apenas finitas triplas possíveis dessas arestas. O evento  $A$  é a união dos eventos em que alguma dessas triplas liga  $K$  a três componentes infinitas distintas fora de  $K$ . Como  $\mathbf{P}_p(A) > 0$ , ao menos uma dessas triplas determina um subevento de probabilidade positiva. Assim, existem três arestas fixas

$$e_i = \{a_i, b_i\}, \quad a_i \in K, \quad b_i \notin K, \quad i = 1, 2, 3,$$

e um subevento  $A' \subset A$ , de probabilidade positiva, tal que:

- as três arestas  $e_1, e_2, e_3$  estão abertas;
- para cada  $i$ , o vértice  $b_i$  pertence a uma componente aberta infinita do subgrafo induzido por  $V(G) \setminus K$ ;
- essas três componentes infinitas são distintas.

Escolha uma árvore geradora do subgrafo induzido por  $K$ . Acrescente a ela as três arestas  $e_i$  e considere a subárvore mínima  $Q$  que contém  $b_1, b_2, b_3$ . Essa árvore possui um único vértice de ramificação  $v \in K$  no qual se encontram os três caminhos que levam a  $b_1, b_2, b_3$ .

Agora modificamos apenas as arestas que têm pelo menos uma extremidade em  $K$ : declaramos abertas as arestas de  $Q$  e fechadas todas as demais. Fora desse conjunto finito, a configuração permanece inalterada. Após essa modificação, os

três braços de  $Q$  ligam  $v$  às três componentes infinitas distintas localizadas fora de  $K$ , e nenhuma outra aresta incidente a  $K$  pode reconectá-las. Consequentemente, a remoção de  $v$  deixa pelo menos três componentes abertas infinitas.

Pelo lema de energia finita, o evento obtido por essa modificação tem probabilidade positiva. Portanto,

$$\mathbf{P}_p(T(v)) > 0$$

para algum  $v \in K$ . Pela transitividade e invariância da medida de Bernoulli, a probabilidade de ser ponto de trifurcação é a mesma em todos os vértices, e assim

$$\mathbf{P}_p(T(o)) > 0.$$

■

Precisamos agora da parte combinatória do argumento.

#### **Lema 6.4 — Contagem de trifurcações**

Para toda configuração de percolação e todo conjunto finito  $S \subset V(G)$ ,

$$\#\{x \in S : x \text{ é ponto de trifurcação}\} \leq |\partial S|.$$

*Demonstração.* Fixe uma componente aberta infinita  $C$  que contenha pelo menos um ponto de trifurcação de  $S$ , e escreva

$$T_C = \{x \in C \cap S : x \text{ é ponto de trifurcação}\}.$$

Usaremos o seguinte fato elementar de teoria de grafos.

*Fato combinatório.* Se  $H$  é um grafo conexo e localmente finito e  $T$  é um conjunto finito não vazio de vértices tal que, para cada  $t \in T$ , o grafo  $H \setminus \{t\}$  possui pelo menos três componentes infinitas, então  $H \setminus T$  possui pelo menos  $|T| + 2$  componentes infinitas.

Vamos justificar esse fato com um pouco mais de detalhe. Cada  $t \in T$  é um ponto de articulação de  $H$ . Considere a *árvore bloco-corte* de  $H$ : seus vértices são os pontos de articulação e os blocos maximais de  $H$ , e ligamos um ponto de articulação a cada bloco que o contém. Para um grafo conexo, essa estrutura é uma árvore.

Remova dessa árvore os vértices correspondentes aos elementos de  $T$ . Como  $T$  é finito e  $H$  é localmente finito, cada elemento de  $T$  tem grau finito na árvore bloco-corte; logo surgem apenas finitas componentes. Contraia cada uma delas a um único vértice e mantenha os vértices de  $T$ . Obtemos uma árvore finita  $Q$ .

Um vértice contraído de  $Q$  será chamado *infinito* quando a parte correspondente de  $H \setminus T$  contém infinitos vértices. Para cada  $t \in T$ , as pelo menos três componentes infinitas de  $H \setminus \{t\}$  determinam três direções distintas na árvore bloco-corte. Remover os demais vértices do conjunto finito  $T$  não pode tornar finitas todas as componentes contidas em uma dessas direções; em cada direção resta ao menos uma componente infinita de  $H \setminus T$ . Portanto, em  $Q$ , de cada vértice  $t \in T$  partem pelo menos três ramos que contêm vértices infinitos.

Agora tome a menor subárvore  $Q_\infty$  de  $Q$  que contém todos os vértices infinitos. Equivalentemente, remova sucessivamente de  $Q$  as folhas que não são infinitas. Nenhum dos três ramos infinitos que partem de um vértice de  $T$  é eliminado; assim, todo vértice de  $T$  tem grau pelo menos 3 em  $Q_\infty$ . Todas as folhas de  $Q_\infty$  são vértices infinitos.

Seja  $L$  o número de folhas de  $Q_\infty$  e seja  $m$  o número de vértices de grau pelo menos 3. Para uma árvore finita,

$$\sum_{v \in V(Q_\infty)} (\deg(v) - 2) = -2.$$

As folhas contribuem  $-1$  cada uma, os vértices de grau 2 contribuem 0 e cada um dos  $m$  vértices de grau pelo menos 3 contribui ao menos 1. Portanto,

$$-2 \geq -L + m,$$

e assim

$$L \geq m + 2.$$

Como todo vértice de  $T$  tem grau pelo menos 3, temos  $m \geq |T|$ . Logo  $Q_\infty$  possui pelo menos  $|T| + 2$  folhas infinitas. Elas correspondem a componentes infinitas distintas de  $H \setminus T$ , provando o fato combinatório.

Aplicando o fato a  $H = C$  e  $T = T_C$ , concluímos que

$$C \setminus T_C$$

possui pelo menos  $|T_C| + 2$  componentes infinitas.

Cada uma dessas componentes contém um vértice distinto de  $C \cap \partial S$ . De fato, se a componente já começa fora de  $S$ , ela contém um vizinho externo de algum ponto de  $T_C \subset S$ . Caso contrário, ela contém um vértice de  $S$  e, por ser infinita, algum caminho aberto nela precisa sair de  $S$ ; o primeiro vértice após a saída pertence a  $\partial S$ . Componentes distintas são disjuntas e, portanto, fornecem vértices de fronteira distintos. Logo,

$$|T_C| + 2 \leq |C \cap \partial S|.$$

Somando sobre as diferentes componentes abertas infinitas  $C$  que contêm pontos de trifurcação em  $S$ , os conjuntos  $C \cap \partial S$  são disjuntos. Consequentemente,

$$\sum_C |T_C| \leq |\partial S|,$$

como queríamos. ■

## 6.4 Teorema de Burton–Keane

Estamos prontos para excluir a possibilidade de infinitas componentes infinitas em grafos amenáveis.

### Teorema 6.5 — Burton–Keane

Seja  $G$  um grafo infinito, conexo, transitivo e amenável. Para todo  $p \in [0,1]$ , o número  $N$  de componentes infinitas da percolação de Bernoulli satisfaz

$$N \in \{0,1\} \quad \mathbf{P}_p\text{-q.c.}$$

Em particular, sempre que existe uma componente infinita, ela é quase certamente única.

*Demonstração.* Os casos  $p = 0$  e  $p = 1$  são imediatos. Suponha  $p \in (0,1)$ .

Pelo Lema 6.2,

$$N \in \{0,1,\infty\} \quad \mathbf{P}_p\text{-q.c.}$$

Resta excluir  $N = \infty$ .

Suponha, por absurdo, que  $N = \infty$  quase certamente. Pelo Lema 6.3,

$$t_p := \mathbf{P}_p(T(o)) > 0.$$

Por transitividade, essa probabilidade independe de  $o$ .

Se  $S \subset V(G)$  é finito, denote por

$$\tau(S) = \sum_{x \in S} \mathbf{1}_{T(x)}$$

o número de pontos de trifurcação em  $S$ . Pela invariância,

$$\mathbf{E}_p[\tau(S)] = |S| t_p.$$

Por outro lado, o Lema 6.4 fornece, configuração por configuração,

$$\tau(S) \leq |\partial S|.$$

Tomando expectativas,

$$|S| t_p = \mathbf{E}_p[\tau(S)] \leq |\partial S|.$$

Dividindo por  $|S|$ ,

$$t_p \leq \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

Como  $G$  é amenável, escolha uma sequência de Følner  $(S_n)_n$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$t_p \leq \frac{|\partial S_n|}{|S_n|} \rightarrow 0,$$

contradizendo  $t_p > 0$ .

Portanto  $N \neq \infty$  quase certamente. A lei  $0,1,\infty$  conclui que  $N \in \{0,1\}$  quase certamente. ■

**Ideia da prova.** O argumento pode ser resumido em uma tensão entre volume e fronteira. Se houvesse infinitas componentes infinitas, a energia finita permitiria produzir pontos de trifurcação com densidade positiva. Em uma região grande, portanto, esperaríamos um número de trifurcações proporcional ao volume. Mas cada trifurcação exige novos braços que escapam da região, e o número desses braços é controlado pela fronteira. Em um grafo amenável, a fronteira é desprezível em relação ao volume, e as duas estimativas são incompatíveis.

# Regime subcrítico

---

Neste capítulo estudamos o regime  $p < p_c$ . O ponto central é a *nitidez da transição de fase*: abaixo do parâmetro crítico, a componente de um vértice tem tamanho médio finito e as conexões a grandes distâncias decaem exponencialmente.

Há duas etapas conceitualmente distintas. Primeiro mostramos que a finitude da susceptibilidade implica decaimento exponencial. Depois discutimos o teorema de Menshikov e Aizenman–Barsky, segundo o qual a susceptibilidade é finita para todo  $p < p_c$ . Uma prova moderna e mais curta da mesma conclusão será apresentada no capítulo seguinte, pelo método de Duminil-Copin e Tassion.

## 7.1 Susceptibilidade e decaimento exponencial

Fixe um grafo infinito, conexo e localmente finito  $G$ . Para  $x \in V(G)$ , escrevemos

$$S_n(x) = B(x, n) \setminus B(x, n-1)$$

para a esfera de raio  $n$  centrada em  $x$ .

### Definição 7.1

Para  $p \in [0, 1]$ , definimos a *susceptibilidade* no vértice  $x$  por

$$\chi_{G,x}(p) = \mathbf{E}_p[|\mathcal{C}(x)|].$$

Se  $G$  é transitivo, essa quantidade independe de  $x$ ; nesse caso escrevemos simplesmente  $\chi_G(p)$ , ou  $\chi(p)$  quando o grafo estiver claro.

A susceptibilidade pode ser infinita. Se  $p > p_c(G)$ , então  $\mathbf{P}_p[x \leftrightarrow \infty] > 0$  para todo  $x$ , e portanto  $\chi_{G,x}(p) = \infty$ .

A conexão entre susceptibilidade e decaimento espacial é dada pelo lema seguinte, frequentemente atribuído ao argumento de Hammersley.

### Lema 7.1

Suponha que  $G$  seja transitivo. Se  $\chi(p) < \infty$ , então existem constantes  $c = c(p) > 0$  e  $C = C(p) < \infty$  tais que

$$\mathbf{P}_p[x \leftrightarrow S_n(x)] \leq Ce^{-cn}$$

para todo  $x \in V(G)$  e todo  $n \geq 0$ .

*Demonstração.* Pela transitividade,

$$a_m := \mathbf{E}_p[|\mathcal{C}(x) \cap S_m(x)|]$$

não depende de  $x$ . Como

$$\sum_{m \geq 0} a_m = \chi(p) < \infty,$$

podemos escolher  $m \geq 1$  tal que  $a_m =: \alpha < 1$ .

Se  $x \leftrightarrow S_{n+m}(x)$ , existe um caminho aberto simples que parte de  $x$  e alcança  $S_{n+m}(x)$ . Seja  $y$  o primeiro vértice desse caminho em  $S_m(x)$ . Os dois trechos do caminho, antes e depois de  $y$ , fornecem ocorrência disjunta dos eventos

$$\{x \leftrightarrow y\} \quad \text{e} \quad \{y \leftrightarrow S_n(y)\}.$$

Logo, pela desigualdade BK,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow S_{n+m}(x)] &\leq \sum_{y \in S_m(x)} \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow y] \mathbf{P}_p[y \leftrightarrow S_n(y)] \\ &= a_m \mathbf{P}_p[x \leftrightarrow S_n(x)], \end{aligned}$$

onde usamos novamente a transitividade na última igualdade.

Iterando,

$$\mathbf{P}_p[x \leftrightarrow S_n(x)] \leq \alpha^{\lfloor n/m \rfloor}.$$

Isso já é decaimento exponencial. Por exemplo, tomando  $c = -m^{-1} \log \alpha$  e ajustando uma constante  $C$  para os primeiros  $m$  valores de  $n$ , obtemos a forma anunciada. ■

Assim, para provar decaimento exponencial em todo o regime subcrítico basta mostrar que

$$\chi(p) < \infty \quad \text{para todo } p < p_c.$$

É exatamente esse o conteúdo do teorema de sharpness.

## 7.2 Sharpness: os pontos críticos $p_T$ e $p_c$

Suponha agora que  $G$  seja transitivo. Definimos

$$p_T = p_T(G) := \inf\{p \in [0,1] : \chi(p) = \infty\}.$$

Como  $\chi(p) = \infty$  para  $p > p_c$ , temos imediatamente  $p_T \leq p_c$ .

### **Teorema 7.2 — Menshikov–Aizenman–Barsky**

Se  $G$  é um grafo transitivo e localmente finito, então

$$p_T(G) = p_c(G).$$

Equivalentemente, para todo  $p < p_c(G)$ ,

$$\chi(p) = \mathbf{E}_p[|\mathcal{C}(o)|] < \infty.$$

Combinando o Teorema 7.2 com o Lema 7.1, obtemos imediatamente:

### **Corolário 7.3**

Para todo  $p < p_c(G)$ , existem  $c(p) > 0$  e  $C(p) < \infty$  tais que

$$\mathbf{P}_p[o \leftrightarrow S_n(o)] \leq C(p)e^{-c(p)n}.$$

O resultado foi obtido independentemente por Menshikov e por Aizenman–Barsky. O argumento de Menshikov parte de uma estimativa subexponencial suficientemente forte e fecha um procedimento de bootstrap. O método de Aizenman–Barsky introduz um campo auxiliar de vértices “verdes” e transforma o problema em desigualdades diferenciais. É essa segunda prova que apresentamos a seguir.

**Leitura avançada.** A demonstração abaixo é substancialmente mais técnica que o restante do capítulo. Para uma primeira leitura, é perfeitamente razoável aceitar o Teorema 7.2 e seguir para o argumento de Duminil-Copin–Tassion no capítulo seguinte.

### 7.3 O campo fantasma e a magnetização

Fixe um vértice  $o \in V(G)$  e denote por  $D$  o grau de  $G$ . Além da percolação de elos com parâmetro  $p$ , colorimos cada vértice de verde, independentemente dos demais e das arestas, com probabilidade  $\varepsilon \in (0,1)$ . Denotamos por  $\Gamma$  o conjunto aleatório de vértices verdes e por  $\mathbf{P}_{p,\varepsilon}$  a medida produto correspondente.

Para  $r \geq 1$ , seja  $B_r = B(o,r)$ . Escrevemos  $\mathcal{C}_r(x)$  para a componente de  $x$  na percolação restrita ao subgrafo induzido por  $B_r$ ; se  $x \notin B_r$ , tomamos  $\mathcal{C}_r(x) = \emptyset$ . Em particular,

$$\mathcal{C}_r := \mathcal{C}_r(o).$$

Essa truncação é importante: todos os eventos envolvendo  $\mathcal{C}_r$  dependem apenas de um número finito de arestas, e portanto a fórmula de Russo pode ser aplicada diretamente.

#### Definição 7.2

Definimos a *magnetização em volume finito* e sua versão infinita por

$$M_r(p,\varepsilon) = \mathbf{P}_{p,\varepsilon}[\mathcal{C}_r \cap \Gamma \neq \emptyset],$$

$$M(p,\varepsilon) = \mathbf{P}_{p,\varepsilon}[\mathcal{C}(o) \cap \Gamma \neq \emptyset].$$

Definimos ainda

$$\chi(p,\varepsilon) = \mathbf{E}_{p,\varepsilon} [|\mathcal{C}(o)| \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}(o) \cap \Gamma = \emptyset\}}].$$

**Representação pelo vértice fantasma.** É útil representar as cores verdes acrescentando um vértice auxiliar  $g$  e, para cada vértice  $v$ , uma aresta fantasma  $\{v,g\}$ , aberta com probabilidade  $\varepsilon$ , independentemente das arestas de  $G$  e das demais arestas fantasma. Então

$$\mathcal{C}_r(x) \cap \Gamma \neq \emptyset \iff x \leftrightarrow g$$

no grafo aumentado correspondente. A prova da desigualdade BK do capítulo anterior é coordenada a coordenada e vale, sem alteração, para medidas produto

com parâmetros distintos em coordenadas distintas. Assim, podemos aplicá-la ao produto em que as arestas ordinárias têm parâmetro  $p$  e as arestas fantasma têm parâmetro  $\varepsilon$ .

Observe que

$$M(p,0) = \theta_G(p),$$

no sentido do limite  $\varepsilon \downarrow 0$ . De fato, condicionando no tamanho da componente,

$$M(p,\varepsilon) = 1 - \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}_p[|\mathcal{C}(o)| = n](1 - \varepsilon)^n,$$

com a convenção de que  $(1 - \varepsilon)^\infty = 0$ . Analogamente,

$$M_r(p,\varepsilon) = 1 - \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}_p[|\mathcal{C}_r| = n](1 - \varepsilon)^n.$$

Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon}(p,\varepsilon) = \frac{\chi(p,\varepsilon)}{1 - \varepsilon}.$$

## Exercícios

### Exercício 7.1

Mostre que

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon}(p,\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}_p[|\mathcal{C}_r| = n] n(1 - \varepsilon)^{n-1}.$$

### Exercício 7.2

Mostre que

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon}[|\mathcal{C}_r \cap \Gamma| = 1] = \varepsilon \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon}(p,\varepsilon).$$

### Lema 7.4 – Passagem ao volume infinito

Fixe  $p, \varepsilon \in (0,1)$ . Então

$$M_r(p,\varepsilon) \uparrow M(p,\varepsilon),$$

e  $M(p,\varepsilon)$  é diferenciável em  $p$  e em  $\varepsilon$ , com

$$\frac{\partial M_r}{\partial p} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial p}, \quad \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} \rightarrow \frac{\partial M}{\partial \varepsilon}.$$

*Demonstração.* Ponha  $q = 1 - \varepsilon$ ,  $X_r = |\mathcal{C}_r|$  e  $X = |\mathcal{C}(o)|$ . Os eventos que definem  $M_r$  crescem para o evento que define  $M$ . Mais precisamente, se a componente completa de  $o$  encontra um vértice verde mas  $\mathcal{C}_r$  não encontra nenhum, então  $\mathcal{C}_r$  alcança  $S_r(o)$  e todos os seus vértices são não verdes. Consequentemente,

$$0 \leq M - M_r \leq q^{r+1},$$

de modo que a convergência é, inclusive, uniforme em  $p$ .

Para a derivada em  $\varepsilon$ , temos

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} = \mathbf{E}_p[X_r q^{X_r-1}].$$

Se  $X < \infty$ , então  $X_r = X$  para todo  $r$  suficientemente grande; se  $X = \infty$ , então  $X_r \rightarrow \infty$  e  $X_r q^{X_r-1} \rightarrow 0$ . Como

$$\sup_{n \geq 1} n q^{n-1} < \infty,$$

o teorema da convergência dominada fornece

$$\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} \longrightarrow \mathbf{E}_p[X q^{X-1} \mathbf{1}_{\{X < \infty\}}] = \frac{\partial M}{\partial \varepsilon}.$$

Resta a derivada em  $p$ . Na representação pelo vértice fantasma, seja  $I_r(e)$  o evento de que a aresta ordinária  $e$  seja pivotal para  $\{o \leftrightarrow g\}$  dentro de  $B_r$ , e seja  $I(e)$  o evento pivotal correspondente no grafo inteiro. Pela fórmula de Russo em volume finito,

$$\frac{\partial M_r}{\partial p} = \sum_e \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I_r(e)).$$

Para cada aresta fixa  $e$ , como os eventos de conexão ao vértice fantasma crescem com  $r$ , temos

$$\mathbf{1}_{I_r(e)} \longrightarrow \mathbf{1}_{I(e)} \quad \text{quase certamente.}$$

O ponto delicado é justificar que, ao aumentar o volume, a soma das influências não perde massa em arestas cada vez mais distantes. Como a pivotalidade de  $e$  não depende do estado da própria aresta,

$$(1 - p)\mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I_r(e)) = \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I_r(e), e \text{ fechada}).$$

Se  $e$  está fechada e é pivotal, então  $o$  ainda não está ligado ao vértice fantasma; logo a componente  $\mathcal{C}_r$  não contém vértices verdes. Além disso, uma das extremidades de  $e$  pertence a  $\mathcal{C}_r$ . Se  $e \notin B_{R-1}$ , essa componente alcança distância pelo menos  $R - 1$  de  $o$  e, portanto,

$$X_r = |\mathcal{C}_r| \geq R.$$

Fixada uma configuração das arestas ordinárias, há no máximo  $DX_r$  arestas incidentes a  $\mathcal{C}_r$ . Assim, o número de arestas fechadas e pivotais com  $e \notin B_{R-1}$  é no máximo

$$DX_r \mathbf{1}_{\{X_r \geq R\}} \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}_r \cap \Gamma = \emptyset\}}.$$

Condicionaldo agora em  $\mathcal{C}_r$ , a probabilidade de nenhum de seus  $X_r$  vértices ser verde é  $q^{X_r}$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} (1-p) \sum_{e: e \notin B_{R-1}} \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I_r(e)) &\leq D \mathbf{E}_p[X_r q^{X_r} \mathbf{1}_{\{X_r \geq R\}}] \\ &\leq D \sup_{n \geq R} n q^n. \end{aligned}$$

A cota não depende de  $r$  e seu lado direito tende a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . A mesma estimativa, obtida do mesmo modo, vale para as influências no volume infinito.

Agora a passagem ao limite das somas fica explícita. Dado  $\delta > 0$ , escolha  $R$  de modo que as duas caudas, finita e infinita, sejam menores que  $\delta$ . Dentro de  $B_{R-1}$  há apenas um número finito de arestas; para cada uma delas,

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I_r(e)) \rightarrow \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I(e)).$$

Logo a soma sobre as arestas de  $B_{R-1}$  converge termo a termo, enquanto as duas caudas permanecem uniformemente pequenas. Portanto

$$\sum_e \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I_r(e)) \rightarrow \sum_e \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I(e)),$$

e a série do lado direito é convergente.

A forma contável da fórmula de Russo, obtida por truncção da fórmula finita quando a soma das influências é finita, fornece

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \sum_e \mathbf{P}_{p,\varepsilon}(I(e)).$$

Isso conclui também a convergência das derivadas em  $p$ . ■

## 7.4 As desigualdades diferenciais de Aizenman–Barsky

Para  $x \in B_r$ , seja

$$A_x = \{\mathcal{C}_r(x) \cap \Gamma \neq \emptyset\}.$$

Se  $x \in B_r$ , então  $B_r(o) \subset B_{2r}(x)$ ; pela transitividade,

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon}(A_x) \leq M_{2r}(p,\varepsilon).$$

**Lema 7.5**

Para todo  $r \geq 1$ ,

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon}[|\mathcal{C}_r \cap \Gamma| \geq 2] \leq M_r^2 + pM_{2r} \frac{\partial M_r}{\partial p}.$$

*Demonstração.* Escrevemos  $A \circ B$  para ocorrência disjunta, no sentido da desigualdade BK.

Primeiro considere o evento  $A_o \circ A_o$ : existem duas conexões abertas, disjuntas em arestas, de  $o$  a vértices verdes. Pela desigualdade BK,

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon}[A_o \circ A_o] \leq M_r^2.$$

Resta tratar configurações em que  $|\mathcal{C}_r \cap \Gamma| \geq 2$ , mas  $A_o \circ A_o$  não ocorre. Trabalhe no grafo finito aumentado por  $\mathfrak{g}$ . Há pelo menos duas arestas fantasma abertas ligadas a vértices distintos da componente de  $o$ . Como não existem dois caminhos  $o$ - $\mathfrak{g}$  disjuntos em arestas, o teorema de Menger, na versão para arestas, mostra que existe uma aresta aberta cuja remoção separa  $o$  de  $\mathfrak{g}$ . Essa aresta não pode ser fantasma, pois há pelo menos duas arestas fantasma abertas.

Escolha, entre as arestas pivotais que aparecem em um caminho aberto de  $o$  a  $\mathfrak{g}$ , a última antes de chegar a  $\mathfrak{g}$ , e escreva-a como  $e = \{x, y\}$ , com  $x$  do lado de  $o$ . Ao remover  $e$ , a componente de  $o$  não contém vértices verdes. Além disso, existem dois caminhos de  $y$  a  $\mathfrak{g}$  disjuntos em arestas: caso contrário, Menger produziria outra aresta de corte entre  $y$  e  $\mathfrak{g}$ , que seria uma aresta pivotal situada depois de  $e$ , contradizendo a escolha de  $e$ . Em termos do campo verde, do lado de  $y$  ocorrem, portanto, duas conexões disjuntas a vértices verdes distintos.

Para tornar a contagem compatível com Russo, force  $e$  a estar fechada e denote por  $\mathcal{C}_{r,e}$  a componente de  $o$  em  $B_r$ . Defina

$$B_{x,y} = \{x \in \mathcal{C}_{r,e}, y \notin \mathcal{C}_{r,e}, \mathcal{C}_{r,e} \cap \Gamma = \emptyset\}.$$

Defina ainda  $A_y^{(e)}$  como o evento de que  $y$  esteja ligado a  $\Gamma$  no grafo em que  $e$  foi removida. Os eventos  $B_{x,y}$  e  $A_y^{(e)}$  não dependem do estado original de  $e$ , e

$$B_{x,y} \cap A_y^{(e)}$$

é exatamente o evento de que  $e$  seja pivotal para  $A_o$ , com orientação de  $x$  para  $y$ .

Condicione agora em  $\mathcal{C}_{r,e} = C$ . No complemento de  $C$ , a desigualdade BK e a estimativa  $\mathbf{P}(A_y^{(e)}) \leq M_{2r}$  dão

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon}[B_{x,y} \cap (A_y^{(e)} \circ A_y^{(e)})] \leq M_{2r} \mathbf{P}_{p,\varepsilon}[B_{x,y} \cap A_y^{(e)}].$$

Somando sobre as arestas orientadas e usando a fórmula de Russo,

$$\sum_{(x,y)} \mathbf{P}_{p,\varepsilon} [B_{x,y} \cap (A_y^{(e)} \circ A_y^{(e)})] \leq M_{2r} \frac{\partial M_r}{\partial p}.$$

Na configuração original a aresta separadora  $e$  deve estar aberta. Como o evento no lado direito da definição acima independe do estado de  $e$ , aparece um fator  $p$ . Consequentemente,

$$\mathbf{P}_{p,\varepsilon} [|\mathcal{C}_r \cap \Gamma| \geq 2, (A_o \circ A_o)^c] \leq p M_{2r} \frac{\partial M_r}{\partial p}.$$

Somando os dois casos, obtemos a desigualdade desejada. ■

### Lema 7.6

Para todo  $r \geq 1$ ,

$$(1-p) \frac{\partial M_r}{\partial p} \leq D(1-\varepsilon) M_{2r} \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon}.$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Russo,

$$(1-p) \frac{\partial M_r}{\partial p} = \sum_e \mathbf{P}_{p,\varepsilon} [e \text{ está fechada e é pivotal para } A_o].$$

Quando uma aresta fechada  $e = \{x, y\}$  é pivotal, podemos orientá-la de modo que  $x \in \mathcal{C}_r$  e  $y \notin \mathcal{C}_r$ . Necessariamente  $\mathcal{C}_r \cap \Gamma = \emptyset$ , enquanto  $y$  se conecta a um vértice verde fora de  $\mathcal{C}_r$ .

Condicionando em  $\mathcal{C}_r = C$ , a probabilidade dessa conexão a partir de  $y$  é, por monotonicidade e transitividade, no máximo  $M_{2r}$ . Como cada vértice de  $C$  é incidente a no máximo  $D$  arestas, obtemos

$$\begin{aligned} (1-p) \frac{\partial M_r}{\partial p} &\leq D M_{2r} \mathbf{E}_{p,\varepsilon} [|\mathcal{C}_r| \mathbf{1}_{\{\mathcal{C}_r \cap \Gamma = \emptyset\}}] \\ &= D(1-\varepsilon) M_{2r} \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Passando ao limite  $r \rightarrow \infty$ , obtemos as duas desigualdades fundamentais. ■

**Lema 7.7**

Para  $p, \varepsilon \in (0, 1)$ ,

$$M \leq \varepsilon \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} + M^2 + pM \frac{\partial M}{\partial p},$$

e

$$(1 - p) \frac{\partial M}{\partial p} \leq D(1 - \varepsilon)M \frac{\partial M}{\partial \varepsilon}.$$

*Demonstração.* Temos a decomposição

$$M_r = \mathbf{P}[|\mathcal{C}_r \cap \Gamma| = 1] + \mathbf{P}[|\mathcal{C}_r \cap \Gamma| \geq 2].$$

O primeiro termo é

$$\varepsilon \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon},$$

e o segundo é controlado pelo Lema 7.5. O Lema 7.4 permite passar ao limite. A segunda desigualdade segue da mesma forma a partir do Lema 7.6. ■

## 7.5 Prova do teorema de Aizenman–Barsky

*Prova do Teorema 7.2.* Fixe

$$p < q < p_c(G).$$

Para todo  $s \in [p, q]$ ,

$$M(s, \varepsilon) \leq M(q, \varepsilon) \longrightarrow \theta_G(q) = 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Escolha  $\eta > 0$  de modo que

$$M(s, \varepsilon) \leq \frac{1}{2}$$

para todos  $s \in [p, q]$  e  $0 < \varepsilon < \eta$ .

Além disso,

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon}(s, \varepsilon) = \frac{\chi(s, \varepsilon)}{1 - \varepsilon} \geq \mathbf{P}_s[|\mathcal{C}(o)| = 1] = (1 - s)^D \geq (1 - q)^D > 0.$$

Logo, para cada  $s \in [p, q]$ , a função  $\varepsilon \mapsto M(s, \varepsilon)$  é estritamente crescente em  $(0, \eta)$ . Como  $M(s, 0) = 0$  e

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon}(s, \varepsilon) \geq (1 - q)^D,$$

temos  $M(s, \eta) \geq \eta(1 - q)^D$ . Fixe

$$x_0 = \frac{1}{2} \min\{1, \eta(1 - q)^D\} > 0.$$

A inversa  $f_s$  de  $\varepsilon \mapsto M(s, \varepsilon)$  está, portanto, definida em  $[0, x_0]$ , uniformemente em  $s \in [p, q]$ , e satisfaz

$$f_s(x) = \varepsilon \iff M(s, \varepsilon) = x.$$

Pela regra da função inversa,

$$f'_s(M(s, \varepsilon)) \frac{\partial M}{\partial \varepsilon}(s, \varepsilon) = 1,$$

de modo que, para  $0 < x \leq x_0$ ,

$$f'_s(x) \leq (1 - q)^{-D}.$$

Usando a segunda desigualdade do Lema 7.7 na primeira, obtemos, uniformemente em  $s \in [p, q]$ ,

$$M \leq \frac{\partial M}{\partial \varepsilon}(\varepsilon + CM^2) + M^2, \quad C := \frac{qD}{1 - q}.$$

Escrevendo  $x = M(s, \varepsilon)$  e  $\varepsilon = f_s(x)$ , essa desigualdade equivale a

$$x \leq \frac{f_s(x) + Cx^2}{f'_s(x)} + x^2.$$

Portanto,

$$\frac{1}{x} f'_s(x) - \frac{f_s(x)}{x^2} \leq C + f'_s(x).$$

O lado esquerdo é exatamente

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f_s(x)}{x} \right).$$

Como  $f'_s$  é uniformemente limitado, existe uma constante  $C_q < \infty$ , dependente apenas de  $q$  e de  $D$ , tal que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f_s(x)}{x} \right) \leq C_q \quad (0 < x \leq x_0).$$

Suponha, por contradição, que

$$\chi(p) = \infty.$$

Como  $p < p_c$ , a componente de  $o$  é finita quase certamente, e portanto

$$\chi(p, \varepsilon) \uparrow \chi(p) = \infty \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Consequentemente,

$$f'_p(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1 - \varepsilon}{\chi(p, \varepsilon)} = 0.$$

Integrando a desigualdade anterior entre  $y$  e  $x$ , e depois fazendo  $y \downarrow 0$ , obtemos

$$\frac{f_p(x)}{x} \leq C_q x,$$

ou seja,

$$f_p(x) \leq C_q x^2.$$

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos  $M(p, \varepsilon) \leq x_0$ , e portanto  $f_p(M(p, \varepsilon)) = \varepsilon$ . Assim,

$$M(p, \varepsilon) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{C_q}}.$$

Em particular, para  $\varepsilon > 0$  fixo e  $\varepsilon'$  suficientemente pequeno,

$$\limsup_{\varepsilon' \downarrow 0} \frac{\log(M(q, \varepsilon)/M(p, \varepsilon'))}{\log(\varepsilon/\varepsilon')} \leq \frac{1}{2}.$$

Voltamos agora à primeira desigualdade do Lema 7.7. Ela pode ser reescrita como

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log M + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial p} (pM - p).$$

Integramos essa desigualdade no retângulo

$$[p, q] \times [\varepsilon', \varepsilon], \quad 0 < \varepsilon' < \varepsilon < \eta.$$

Como  $M$  é crescente nas duas variáveis,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_p^q \log \frac{M(s, \varepsilon)}{M(s, \varepsilon')} ds \\ &\quad + \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{qM(q, \xi) - q - pM(p, \xi) + p}{\xi} d\xi \\ &\leq (q - p) \log \frac{M(q, \varepsilon)}{M(p, \varepsilon')} + (qM(q, \varepsilon) - pM(p, \varepsilon') + p - q) \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}. \end{aligned}$$

Dividindo por  $\log(\varepsilon/\varepsilon')$  e fazendo  $\varepsilon' \downarrow 0$ , obtemos

$$0 \leq \frac{1}{2}(q - p) + qM(q, \varepsilon) + p - q,$$

pois  $M(p,0) = \theta_G(p) = 0$ . Assim,

$$M(q,\varepsilon) \geq \frac{q-p}{2q}.$$

Finalmente, fazendo  $\varepsilon \downarrow 0$ , chegamos a

$$\theta_G(q) \geq \frac{q-p}{2q} > 0,$$

contradizendo  $q < p_c$ .

Logo  $\chi(p) < \infty$ . Como  $p < p_c$  era arbitrário, concluímos que  $p_T \geq p_c$ . Juntamente com a desigualdade trivial  $p_T \leq p_c$ , isso prova  $p_T = p_c$ . ■

**Conclusão.** O conteúdo essencial do capítulo pode ser resumido em uma cadeia curta de implicações:

$$p < p_c \implies \chi(p) < \infty \implies \mathbf{P}_p[o \leftrightarrow S_n(o)] \leq C(p)e^{-c(p)n}.$$

O primeiro passo é a sharpness da transição de fase; o segundo é o argumento de Hammersley. No próximo capítulo veremos uma prova alternativa da primeira implicação, baseada na quantidade  $\varphi_p(S)$ , que evita o campo fantasma.

# O argumento de Duminil-Copin e Tassion

---

A prova de Duminil-Copin e Tassion para a nitidez da transição de fase na percolação de Bernoulli se baseia em um critério de fronteira. Para cada conjunto finito, o argumento considera uma quantidade que mede o fluxo esperado de conexões através de sua fronteira. A condição de que esse fluxo seja menor que um caracteriza o regime subcrítico.

Ao longo deste capítulo,  $G = (V, E)$  é um grafo infinito, conexo, localmente finito e transitivo, e  $o \in V$  é um vértice fixo. Consideramos percolação de elos de Bernoulli com parâmetro  $p$ .

## 8.1 O critério de fronteira

Se  $S \subset V$  e  $x, y \in S$ , escrevemos

$$x \overset{S}{\leftrightarrow} y$$

quando existe um caminho aberto de  $x$  a  $y$  cujos vértices pertencem a  $S$ . Para conjuntos  $A, B \subset S$ , a notação  $A \overset{S}{\leftrightarrow} B$  tem o significado análogo.

Para  $S \subset V$ , definimos a fronteira orientada de arestas por

$$\partial_e S = \{(x, y) : x \in S, y \notin S, x \sim y\}.$$

Cada aresta que cruza a fronteira de  $S$  aparece exatamente uma vez nessa orientação. Se  $S$  é finito e contém  $o$ , definimos

$$\varphi_p(S) = p \sum_{(x,y) \in \partial_e S} \mathbf{P}_p[o \overset{S}{\leftrightarrow} x].$$

Assim,  $\varphi_p(S)$  é o número esperado de arestas abertas que saem de  $S$  e cuja extremidade interna está conectada a  $o$  por um caminho aberto inteiramente contido em  $S$ .

Para  $r \geq 0$ , seja  $B_r = B(o, r)$  e defina a susceptibilidade truncada por

$$\chi(r, p) = \sum_{x \in B_r} \mathbf{P}_p[o \leftrightarrow x].$$

A truncção se aplica apenas à soma sobre os vértices de  $B_r$ ; a conexão continua sendo tomada no grafo inteiro.

### Exercício 8.1

Mostre que, para todo  $p \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r, p) = \chi(p) = \mathbf{E}_p[|\mathcal{C}(o)|].$$

A decomposição de um caminho em sua primeira saída de um conjunto finito permite relacionar as conexões internas às conexões que alcançam o exterior. O lema seguinte expressa essa relação.

#### Lema 8.1

Sejam  $z \in S \subset V$ , com  $S$  finito, e sejam  $A, B \subset V$  tais que  $z \in A$ ,  $B \subset A$  e  $B \cap S = \emptyset$ . Então

$$\mathbf{P}_p[z \overset{A}{\leftrightarrow} B] \leq \sum_{(x,y) \in \partial_e S} p \mathbf{P}_p[z \overset{S}{\leftrightarrow} x] \mathbf{P}_p[y \overset{A}{\leftrightarrow} B].$$

*Demonstração.* Suponha que  $z \overset{A}{\leftrightarrow} B$ . Escolha um caminho aberto simples

$$z = x_0, x_1, \dots, x_m \in B$$

contido em  $A$ , e seja  $k$  o primeiro índice tal que  $x_{k+1} \notin S$ . Então

$$z \overset{S}{\leftrightarrow} x_k, \quad \{x_k, x_{k+1}\} \text{ está aberta,} \quad x_{k+1} \overset{A}{\leftrightarrow} B.$$

Os três eventos podem ser testemunhados por conjuntos disjuntos de arestas, usando respectivamente o trecho inicial do caminho, a aresta de saída e o trecho final. Portanto,

$$\{z \overset{A}{\leftrightarrow} B\} \subseteq \bigcup_{(x,y) \in \partial_e S} \left( \{z \overset{S}{\leftrightarrow} x\} \circ \{\{x,y\} \text{ aberta}\} \circ \{y \overset{A}{\leftrightarrow} B\} \right).$$

A desigualdade de BK e a independência do estado da aresta  $\{x,y\}$  dão o resultado. ■

### Lema 8.2

Suponha que exista um conjunto finito  $S \ni o$  tal que  $\varphi_p(S) < 1$ . Então

$$\chi(p) \leq \frac{|S|}{1 - \varphi_p(S)} < \infty.$$

*Demonstração.* Para  $u \in V(G)$ , defina

$$H_r(u) = \sum_{v \in B_r} \mathbf{P}_p[u \leftrightarrow v], \quad H_r^* = \sup_{u \in V(G)} H_r(u).$$

Como  $B_r$  é finito,  $H_r^* \leq |B_r| < \infty$ , e

$$\chi(r, p) = H_r(o) \leq H_r^*.$$

Fixe  $u \in V(G)$  e escolha um automorfismo  $\psi_u$  tal que  $\psi_u(o) = u$ . Para  $v \in B_r \setminus \psi_u S$ , aplique o Lema 8.1 com raiz  $u$ , conjunto  $\psi_u S$ ,  $A = V(G)$  e  $B = \{v\}$ . Obtemos

$$\mathbf{P}_p[u \leftrightarrow v] \leq \sum_{(x,y) \in \partial_e(\psi_u S)} p \mathbf{P}_p[u \overset{\psi_u S}{\leftrightarrow} x] \mathbf{P}_p[y \leftrightarrow v].$$

Somando em  $v \in B_r \setminus \psi_u S$  e usando a transitividade,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in B_r \setminus \psi_u S} \mathbf{P}_p[u \leftrightarrow v] &\leq \sum_{(x,y) \in \partial_e(\psi_u S)} p \mathbf{P}_p[u \overset{\psi_u S}{\leftrightarrow} x] H_r(y) \\ &\leq \varphi_p(S) H_r^*. \end{aligned}$$

A contribuição dos vértices de  $B_r \cap \psi_u S$  é no máximo  $|S|$ . Portanto

$$H_r(u) \leq |S| + \varphi_p(S) H_r^*.$$

Tomando o supremo em  $u$ ,

$$H_r^* \leq |S| + \varphi_p(S) H_r^*,$$

e, como  $\varphi_p(S) < 1$ ,

$$H_r^* \leq \frac{|S|}{1 - \varphi_p(S)}.$$

Assim

$$\chi(r, p) \leq \frac{|S|}{1 - \varphi_p(S)}.$$

Fazendo  $r \rightarrow \infty$  e usando o Exercício 8.1, obtemos

$$\chi(p) \leq \frac{|S|}{1 - \varphi_p(S)}.$$

■

## 8.2 Um parâmetro crítico alternativo

Defina

$$q_c = \sup\{p \in [0, 1] : \text{existe } S \ni o \text{ finito com } \varphi_p(S) < 1\}.$$

Para cada  $S$  finito,  $p \mapsto \varphi_p(S)$  é contínua e não decrescente. Consequentemente, o conjunto

$$\mathcal{Q} = \{p : \exists S \ni o \text{ finito com } \varphi_p(S) < 1\}$$

é um intervalo inicial de  $[0, 1]$ . Em particular, todo  $p < q_c$  pertence a  $\mathcal{Q}$ .

Se  $p < q_c$ , o Lema 8.2 implica  $\chi(p) < \infty$ . Pelo Lema 7.1, existe  $c(p) > 0$  tal que

$$\mathbf{P}_p[o \leftrightarrow S_n(o)] \leq C(p)e^{-c(p)n}.$$

Em particular,  $\theta_G(p) = 0$ . Logo

$$q_c \leq p_c.$$

A desigualdade oposta será obtida por uma estimativa diferencial para probabilidades de conexão em volume finito.

## 8.3 A desigualdade diferencial

Para  $r \geq 1$ , escreva

$$A_r = \{o \overset{B_r}{\leftrightarrow} S_r(o)\}.$$

O evento  $A_r$  depende apenas das arestas com as duas extremidades em  $B_r$ .

**Lema 8.3**

Para todo  $r \geq 1$  e todo  $p \in (0,1)$ ,

$$\frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A_r) \geq \frac{1}{p(1-p)} \inf_{o \in S \subset B_r} \varphi_p(S) (1 - \mathbf{P}_p(A_r)).$$

*Demonstração.* Seja  $E_r$  o conjunto das arestas com ambas as extremidades em  $B_r$ . Para uma configuração em  $E_r$ , defina

$$\mathcal{S} = \{x \in B_r : x \overset{B_r}{\leftrightarrow} S_r(o)\}.$$

No evento  $A_r^c$ , temos  $o \in \mathcal{S}$ .

Como  $A_r$  é crescente e depende de um número finito de arestas, a fórmula de Russo dá

$$\frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A_r) = \sum_{e \in E_r} \mathbf{P}_p(e \text{ é pivotal}).$$

Para um evento crescente, condicionado a  $e$  ser pivotal,  $A_r^c$  ocorre exatamente quando  $e$  está fechada. Como a pivotalidade não depende do estado da própria aresta,

$$\frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A_r) = \frac{1}{1-p} \sum_{e \in E_r} \mathbf{P}_p(e \text{ é pivotal}, A_r^c).$$

Fixe agora  $S \subset B_r$  com  $o \in S$ . No evento  $\{\mathcal{S} = S\}$ , uma aresta  $(x,y) \in \partial_e S$  é pivotal para  $A_r$  precisamente quando

$$o \overset{S}{\leftrightarrow} x.$$

Com efeito, todo  $y \in B_r \setminus S$  está conectado a  $S_r(o)$ , enquanto toda aresta da fronteira de  $S$  está fechada sempre que sua extremidade interna pertence à componente de  $o$  em  $S$ . Além disso, o evento  $\{\mathcal{S} = S\}$  é determinado pelas arestas que não têm as duas extremidades em  $S$ , ao passo que  $\{o \overset{S}{\leftrightarrow} x\}$  depende apenas das arestas internas a  $S$ . Esses eventos são, portanto, independentes.

Decompondo segundo os possíveis valores de  $\mathcal{S}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dp} \mathbf{P}_p(A_r) &= \frac{1}{1-p} \sum_{o \in S \subset B_r} \sum_{(x,y) \in \partial_e S} \mathbf{P}_p[o \overset{S}{\leftrightarrow} x, \mathcal{S} = S] \\
 &= \frac{1}{1-p} \sum_{o \in S \subset B_r} \mathbf{P}_p(\mathcal{S} = S) \sum_{(x,y) \in \partial_e S} \mathbf{P}_p[o \overset{S}{\leftrightarrow} x] \\
 &= \frac{1}{p(1-p)} \sum_{o \in S \subset B_r} \varphi_p(S) \mathbf{P}_p(\mathcal{S} = S) \\
 &\geq \frac{1}{p(1-p)} \inf_{o \in S \subset B_r} \varphi_p(S) \mathbf{P}_p(A_r^c),
 \end{aligned}$$

que é a desigualdade desejada. ■

#### **Teorema 8.4 — Duminil–Copin–Tassion**

Para a percolação de Bernoulli em  $G$ , vale  $q_c = p_c$ . Além disso:

1. para todo  $p < p_c$ , existem  $c(p) > 0$  e  $C(p) < \infty$  tais que

$$\mathbf{P}_p[o \leftrightarrow S_n(o)] \leq C(p)e^{-c(p)n};$$

2. para todo  $p > p_c$ ,

$$\theta_G(p) \geq \frac{p - p_c}{p(1 - p_c)}.$$

*Demonstração.* Já vimos que  $q_c \leq p_c$ . Fixe agora  $p > q_c$ . Para todo  $t > q_c$  e todo conjunto finito  $S \ni o$ , temos  $\varphi_t(S) \geq 1$ . Portanto, pelo Lema 8.3,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_t(A_r) \geq \frac{1}{t(1-t)} (1 - \mathbf{P}_t(A_r)).$$

Escrevendo  $f_r(t) = 1 - \mathbf{P}_t(A_r)$ ,

$$\frac{d}{dt} \log f_r(t) \leq -\frac{1}{t(1-t)}.$$

Integre entre  $q$  e  $p$ , onde  $q_c < q < p$ :

$$\log \frac{f_r(p)}{f_r(q)} \leq -\int_q^p \frac{dt}{t(1-t)} = -\log \frac{p(1-q)}{q(1-p)}.$$

Como  $f_r(q) \leq 1$ ,

$$f_r(p) \leq \frac{q(1-p)}{p(1-q)}.$$

Fazendo  $q \downarrow q_c$ ,

$$\mathbf{P}_p(A_r) \geq \frac{p - q_c}{p(1 - q_c)}.$$

Finalmente, fazendo  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\theta_G(p) \geq \frac{p - q_c}{p(1 - q_c)} > 0.$$

Logo  $p_c \leq q_c$ , e portanto  $p_c = q_c$ . A mesma desigualdade, agora com  $q_c = p_c$ , dá o segundo item.

Para o primeiro item, se  $p < p_c = q_c$ , então  $p \in \mathcal{Q}$ , de modo que existe  $S \ni o$  finito com  $\varphi_p(S) < 1$ . O Lema 8.2 fornece  $\chi(p) < \infty$ , e o Lema 7.1 fornece o decaimento exponencial. ■

## 8.4 A susceptibilidade no ponto crítico

O critério de fronteira também permite provar a divergência da susceptibilidade no ponto crítico.

### Proposição 8.5

Temos

$$\chi(p_c) = \infty.$$

Consequentemente,

$$p < p_c \iff \chi(p) < \infty.$$

*Demonstração.* Como  $q_c = p_c$ , nenhum conjunto finito  $S \ni o$  satisfaz  $\varphi_{p_c}(S) < 1$ . De fato, se  $p_c < 1$  e tal conjunto existisse, a continuidade de  $p \mapsto \varphi_p(S)$  daria a mesma desigualdade para algum  $p > p_c$ , contradizendo a definição de  $q_c$ . Se  $p_c = 1$ , considere a componente  $K$  de  $o$  no subgrafo induzido por  $S$ . Como  $K$  é finita e  $G$  é infinito e conexo, existe uma aresta  $(x, y)$  com  $x \in K$  e  $y \notin K$ . Em  $p = 1$ , temos  $o \overset{S}{\leftrightarrow} x$ , e portanto  $\varphi_1(S) \geq 1$ .

Logo, para todo  $r$ ,

$$\varphi_{p_c}(B_r) \geq 1.$$

Se  $D$  é o grau de  $G$ , então

$$\begin{aligned}
 \infty &= \sum_{r \geq 0} 1 \leq \sum_{r \geq 0} \varphi_{p_c}(B_r) \\
 &= p_c \sum_{r \geq 0} \sum_{(x,y) \in \partial_e B_r} \mathbf{P}_{p_c}[o \overset{B_r}{\leftrightarrow} x] \\
 &\leq D \sum_{x \in V} \mathbf{P}_{p_c}(o \leftrightarrow x) = D \chi(p_c).
 \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos que, se  $(x,y) \in \partial_e B_r$ , então  $d(o,x) = r$ , que cada  $x$  participa de no máximo  $D$  arestas de saída e que

$$\mathbf{P}_{p_c}[o \overset{B_r}{\leftrightarrow} x] \leq \mathbf{P}_{p_c}(o \leftrightarrow x).$$

Portanto  $\chi(p_c) = \infty$ .

A equivalência final segue do teorema anterior e do fato de que  $\chi(p) = \infty$  para  $p > p_c$ . ■

# Percolação planar

A geometria planar permite traduzir ausência de conexões abertas em existência de barreiras duais. Nesta seção formalizamos essa correspondência e a usamos para identificar o ponto crítico da percolação por elos em  $\mathbb{Z}^2$ .

## 9.1 Dualidade

Seja  $G$  um grafo plano, isto é, um grafo planar com uma imersão fixa no plano. O grafo dual  $\hat{G}$  possui um vértice para cada face de  $G$  e uma aresta dual  $\hat{e}$  cruzando cada aresta primal  $e$ . Para uma configuração  $\omega \in \{0,1\}^{E(G)}$ , definimos a configuração dual por

$$\hat{\omega}(\hat{e}) = 1 - \omega(e).$$

Assim, uma aresta dual está aberta exatamente quando a aresta primal correspondente está fechada.

Antes da dualidade probabilística, isolamos o fato geométrico que a sustenta.

### Lema 9.1 — Fronteiras primais e ciclos duais

Seja  $G$  um grafo plano finito e conexo e seja  $C \subset V(G)$ . Denote por

$$(\partial_e C)^* = \{\hat{f} : f \in \partial_e C\}$$

o conjunto das arestas duais que cruzam a fronteira de arestas de  $C$ . Então

cada vértice do subgrafo dual formado por  $(\partial_e C)^*$  tem grau par. Consequentemente,  $(\partial_e C)^*$  se decompõe em ciclos e toda aresta dual de  $(\partial_e C)^*$  pertence a algum desses ciclos.

*Demonstração.* Fixe uma face  $F$  de  $G$  e percorra sua fronteira uma vez. Cada vez que atravessamos uma aresta de  $\partial_e C$ , passamos de um vértice de  $C$  para um vértice fora de  $C$ , ou vice-versa. Como o percurso termina no mesmo lado em que começou, o número dessas mudanças é par. No dual, isso diz exatamente que o vértice correspondente à face  $F$  é incidente a um número par de arestas de  $(\partial_e C)^*$ , contando multiplicidades quando necessário.

Portanto, todas as componentes do subgrafo dual formado por  $(\partial_e C)^*$  têm todos os graus pares. Como o grafo é finito, cada uma admite um circuito e pode ser decomposta em ciclos; em particular, cada uma de suas arestas pertence a um ciclo. ■

A forma elementar da dualidade que será usada adiante é a seguinte.

### Proposição 9.2

Seja  $G$  um grafo plano finito e conexo e seja  $e = \{x, y\} \in E(G)$ . Denote por  $\hat{e} = \{\hat{x}, \hat{y}\}$  a aresta dual correspondente. Para toda configuração  $\omega$ , exatamente uma das alternativas ocorre:

1. existe um caminho primal aberto de  $x$  a  $y$  em  $G \setminus \{e\}$ ;
2. existe um caminho dual aberto de  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$  em  $\hat{G} \setminus \{\hat{e}\}$ .

*Demonstração.* Considere a componente aberta  $C$  de  $x$  no grafo  $G \setminus \{e\}$ . Se  $y \in C$ , vale a primeira alternativa. Suponha então  $y \notin C$ . Nesse caso,

$$e \in \partial_e C.$$

Além disso, toda aresta de  $\partial_e C$  diferente de  $e$  está fechada: se  $f = \{u, v\} \neq e$ , com  $u \in C$  e  $v \notin C$ , estivesse aberta, então  $v$  também poderia ser alcançado a partir de  $x$  em  $G \setminus \{e\}$ , contradizendo a definição de  $C$ .

Se as duas faces adjacentes a  $e$  coincidem, então  $\hat{x} = \hat{y}$  e a segunda alternativa vale pelo caminho de comprimento zero. Suponha, portanto,  $\hat{x} \neq \hat{y}$ . Pelo Lema 9.1, a aresta  $\hat{e}$  pertence a um ciclo dual formado por arestas que cruzam  $\partial_e C$ . Removendo  $\hat{e}$  desse ciclo, obtemos um caminho dual de  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$  que evita  $\hat{e}$ . Todas as suas arestas

cruzam arestas de  $\partial_e C \setminus \{e\}$  e, portanto, são duais de arestas primais fechadas. Logo o caminho dual é aberto.

Resta ver que as duas alternativas não podem ocorrer simultaneamente. Suponha que exista um caminho primal aberto simples  $P$  de  $x$  a  $y$  evitando  $e$ . A união de  $P$  com  $e$  é um ciclo primal simples. As duas faces adjacentes a  $e$  ficam em lados opostos desse ciclo. Assim, qualquer caminho dual de  $\hat{x}$  a  $\hat{y}$  que evite  $\hat{e}$  precisa cruzar alguma aresta de  $P$ . Mas uma aresta dual aberta cruza uma aresta primal fechada, enquanto todas as arestas de  $P$  são abertas. Isso é impossível. ■

A prova contém a ideia que reaparecerá em todo o capítulo: uma fronteira primal funciona como uma barreira dual. Quando uma conexão primal falha, procuramos a interface que separa o conjunto alcançável de seu alvo; as arestas dessa interface são fechadas e, vistas no dual, formam uma conexão aberta.

## 9.2 Cruzamentos em $\mathbb{Z}^2$

Seja

$$R = [a, a'] \times [b, b'] \cap \mathbb{Z}^2$$

um retângulo. Denotamos suas faces oeste, leste, norte e sul por  $\partial_W R$ ,  $\partial_E R$ ,  $\partial_N R$  e  $\partial_S R$ . Escrevemos

$$H(R) = \{\partial_W R \xleftrightarrow{R} \partial_E R\}$$

para o evento de cruzamento primal aberto da esquerda para a direita.

O retângulo dual  $\hat{R}$  é obtido na rede deslocada  $\hat{\mathbb{Z}}^2 = \mathbb{Z}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , com as arestas duais que cruzam as arestas de  $R$ . Denotamos por  $V^*(\hat{R})$  o evento de existência de um cruzamento dual aberto de cima para baixo.

### Proposição 9.3

Para toda configuração  $\omega$ , exatamente um dos eventos  $H(R)$  e  $V^*(\hat{R})$  ocorre.

*Demonstração.* Se  $H(R)$  ocorre, qualquer caminho dual de cima para baixo deve cruzar o caminho primal horizontal. No ponto de cruzamento, a aresta dual corresponde justamente à aresta primal atravessada. Como os estados primal e dual são opostos, os dois caminhos não podem ser simultaneamente abertos. Portanto  $V^*(\hat{R})$  não ocorre.

Suponha agora que  $H(R)$  não ocorre. Seja  $C \subset R$  o conjunto dos vértices que podem ser alcançados a partir de  $\partial_W R$  por caminhos abertos contidos em  $R$ . Como

permitimos caminhos de comprimento zero, toda a face oeste pertence a  $C$ ; por outro lado,

$$C \cap \partial_E R = \emptyset.$$

Toda aresta de  $R$  com um extremo em  $C$  e outro em  $R \setminus C$  é fechada.

Vejamos por que essas arestas contêm uma barreira de norte a sul. Imagine percorrer a interface que separa  $C$  da componente do complemento ligada à face leste. Na borda norte, passamos de uma região ligada ao oeste para uma região ligada ao leste; o mesmo ocorre na borda sul. A interface não pode terminar no interior do retângulo: em torno de cada face interior, as arestas da fronteira entram e saem em número par, exatamente como no Lema 9.1. Portanto, uma das componentes duais dessa interface começa na borda norte e termina na borda sul.

Essa componente cruza apenas arestas da fronteira de  $C$ , que são fechadas no primal. As arestas duais correspondentes são, portanto, abertas, e obtemos um cruzamento dual aberto de cima para baixo. Logo  $V^*(\hat{R})$  ocorre. ■

A igualdade de probabilidades no ponto autodual requer escolher um retângulo cuja geometria seja preservada, após rotação, pela passagem ao dual. Para

$$R_n = [0, n+1] \times [0, n] \cap \mathbb{Z}^2,$$

o retângulo dual associado a um cruzamento vertical é, após uma rotação de  $\pi/2$  e uma translação, congruente a  $R_n$ . Assim, em  $p = 1/2$ ,

$$\mathbb{P}_{1/2}[H(R_n)] = \mathbb{P}_{1/2}[V^*(\hat{R}_n)].$$

Como os dois eventos são complementares pela Proposição 9.3, concluímos que

$$\mathbb{P}_{1/2}[H(R_n)] = \frac{1}{2} \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (9.1)$$

Observe que essa conclusão não vale, em geral, para um retângulo arbitrário: a igualdade  $1/2$  depende da congruência entre o retângulo primal e o dual rotacionado.

### 9.3 A cota superior para o parâmetro crítico

O argumento a seguir usa a nitidez da transição de fase já provada no capítulo sobre o regime subcrítico. Ele fornece uma demonstração curta da metade difícil da identidade de Harris–Kesten.

**Teorema 9.4**

Para a percolação por elos em  $\mathbb{Z}^2$ ,

$$p_c(\mathbb{Z}^2) \leq \frac{1}{2}.$$

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $1/2 < p_c(\mathbb{Z}^2)$ . Então  $p = 1/2$  está no regime subcrítico. Pelo decaimento exponencial, existem  $C, c > 0$  tais que, uniformemente em  $x$ ,

$$\mathbb{P}_{1/2}[x \leftrightarrow S_m(x)] \leq Ce^{-cm}.$$

Se  $H(R_n)$  ocorre, algum  $x \in \partial_W R_n$  está ligado à face leste. Como a distância entre as duas faces verticais é  $n + 1$ , esse vértice satisfaz

$$x \leftrightarrow S_{n+1}(x).$$

Portanto, usando  $|\partial_W R_n| = n + 1$ ,

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}_{1/2}[H(R_n)] \leq \sum_{x \in \partial_W R_n} \mathbb{P}_{1/2}[x \leftrightarrow S_{n+1}(x)] \leq (n + 1)Ce^{-c(n+1)}.$$

O lado direito tende a zero, uma contradição. Logo  $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq 1/2$ . ■

## 9.4 O argumento de Zhang no ponto autodual

A outra metade do teorema usa unicidade da componente infinita e a geometria planar. A apresentação abaixo segue a forma usual do argumento de Zhang; para a geometria dos cruzamentos primal–dual e esta versão do argumento, veja também (Yadin s.d.; Grimmett e Grimmett 1999).

**Teorema 9.5**

Para a percolação por elos em  $\mathbb{Z}^2$ ,

$$\theta_{\mathbb{Z}^2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Consequentemente,

$$p_c(\mathbb{Z}^2) \geq \frac{1}{2}.$$

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $\theta_{\mathbb{Z}^2}(1/2) > 0$ . Pela lei 0–1, existe então quase certamente alguma componente infinita primal; pelo Teorema de Burton–Keane, ela é quase certamente única. Como, em  $p = 1/2$ , a configuração dual tem novamente a lei da percolação de Bernoulli com parâmetro  $1/2$ , existe também quase certamente uma única componente infinita dual.

Para  $n \geq 1$ , seja

$$Q_n = [-n, n]^2 \cap \mathbb{Z}^2.$$

O evento  $\{Q_n \leftrightarrow \infty\}$  cresce, quando  $n \rightarrow \infty$ , para o evento de existência de uma componente infinita. Portanto

$$\mathbb{P}_{1/2}(Q_n \leftrightarrow \infty) \rightarrow 1.$$

Escolha  $n$  tão grande que

$$\mathbb{P}_{1/2}(Q_n \leftrightarrow \infty) > 1 - \frac{1}{8^4}.$$

Denote por  $A_W, A_E, A_N, A_S$  os eventos de que, respectivamente, as faces oeste, leste, norte e sul de  $Q_n$  estejam ligadas ao infinito por um caminho primal aberto que, depois do último vértice em  $Q_n$ , permanece fora da caixa. Se  $Q_n$  está ligado ao infinito, tome um caminho aberto simples até o infinito e considere sua última visita a  $Q_n$ ; ela ocorre em uma das quatro faces. Assim,

$$\{Q_n \leftrightarrow \infty\} = A_W \cup A_E \cup A_N \cup A_S.$$

Consequentemente,

$$\{Q_n \nleftrightarrow \infty\} = A_W^c \cap A_E^c \cap A_N^c \cap A_S^c.$$

Os quatro eventos do lado direito são decrescentes. Pela desigualdade de Harris e pela simetria da rede,

$$1 - \mathbb{P}_{1/2}(Q_n \leftrightarrow \infty) \geq \prod_{D \in \{W, E, N, S\}} \mathbb{P}_{1/2}(A_D^c) = \mathbb{P}_{1/2}(A_W^c)^4.$$

Logo

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_D) \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_{1/2}(Q_n \leftrightarrow \infty))^{1/4} > \frac{7}{8}$$

para cada direção  $D$ .

Faça agora a mesma construção no retângulo dual correspondente. Escreva  $A_N^*$  e  $A_S^*$  para os eventos de existência de braços duais abertos, respectivamente das

faces norte e sul para o infinito, permanecendo fora da caixa dual depois da última visita. Pela autodualidade e pelas simetrias de  $\mathbb{Z}^2$ ,

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_N^*) > \frac{7}{8}, \quad \mathbb{P}_{1/2}(A_S^*) > \frac{7}{8}.$$

Portanto, pela desigualdade da união,

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_W \cap A_E \cap A_N^* \cap A_S^*) \geq 1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} > 0.$$

Resta entender a geometria desse evento. Há dois braços primais infinitos, um saindo a oeste e outro a leste, e dois braços duais infinitos, um saindo ao norte e outro ao sul. Suponha que os dois braços primais pertençam à mesma componente infinita. Podemos então ligá-los por um caminho primal aberto finito. Eliminando laços e aparando os trechos anteriores às primeiras interseções, obtemos uma curva primal simples que vai ao infinito para oeste e para leste. Acrescentando o ponto no infinito, essa curva se transforma numa curva de Jordan na esfera; portanto ela separa as direções norte e sul.

Assim, um caminho dual que unisse os braços norte e sul teria de cruzar essa curva primal. Mas uma aresta dual aberta só cruza uma aresta primal fechada, de modo que tal cruzamento é impossível. Logo, se os dois braços primais pertencem à mesma componente infinita, os dois braços duais pertencem a componentes infinitas distintas. Pela mesma argumentação com primal e dual trocados, no evento acima há necessariamente ou pelo menos duas componentes infinitas primais ou pelo menos duas componentes infinitas duais.

Ambas as alternativas têm probabilidade zero pelo Teorema de Burton–Keane, aplicado à rede primal e à rede dual. Isso contradiz a probabilidade positiva obtida acima. Portanto

$$\theta_{\mathbb{Z}^2}(1/2) = 0.$$

■

Combinando os dois teoremas obtemos o resultado de Harris–Kesten:

$$p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}, \quad \theta_{\mathbb{Z}^2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

# Transporte de massa

---

O princípio de transporte de massa é uma ferramenta para explorar simetrias em grafos transitivos. A ideia é simples: cada vértice envia certa quantidade de massa aos demais, segundo uma regra compatível com as simetrias do grafo. Em situações unimodulares, a massa total esperada enviada por um vértice coincide com a massa total esperada recebida por ele.

Para formular esse princípio com precisão, começamos recordando algumas noções sobre ações de grupos.

## 10.1 Ações, órbitas e estabilizadores

Seja  $\Gamma$  um grupo que atua em um conjunto  $X$ . Escrevemos

$$\Gamma \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x,$$

com

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \quad \text{e} \quad 1_\Gamma \cdot x = x.$$

Para  $x \in X$ , definimos a *órbita* de  $x$  por

$$\Gamma x = \{g \cdot x : g \in \Gamma\}$$

e o *estabilizador* de  $x$  por

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma : g \cdot x = x\}.$$

A ação é chamada *transitiva* quando  $\Gamma x = X$  para todo  $x \in X$ .

Se  $S \subset \Gamma$ , usaremos ainda a notação

$$Sx = \{g \cdot x : g \in S\}.$$

A partir de agora, suponha que  $X$  seja um grafo localmente finito e que  $\Gamma \leq \text{Aut}(X)$ . Como os automorfismos preservam distâncias, para quaisquer  $x, y \in X$ ,

$$\Gamma_x y \subseteq \{z \in X : \text{dist}(x, z) = \text{dist}(x, y)\}.$$

Em particular,  $\Gamma_x y$  é finito.

Para  $x, y \in X$ , defina também

$$\Gamma_{x,y} = \{g \in \Gamma : g \cdot x = y\}.$$

Esse conjunto pode ser vazio; quando não é, ele é simultaneamente uma classe lateral à esquerda de  $\Gamma_x$  e uma classe lateral à direita de  $\Gamma_y$ .

### Lema 10.1

Suponha que  $\Gamma$  atue em  $X$ . Se  $\Gamma_{x,y} \neq \emptyset$  e  $g \in \Gamma_{x,y}$ , então

$$\Gamma_{x,y} = g\Gamma_x = \Gamma_y g.$$

Além disso, para todo  $z \in X$ ,

$$|\Gamma_{x,y} z| = |\Gamma_x z| = |\Gamma_y(gz)|.$$

*Demonstração.* Se  $h \in \Gamma_{x,y}$ , então  $g^{-1}h \in \Gamma_x$ , de modo que  $h \in g\Gamma_x$ . Reciprocamente, se  $k \in \Gamma_x$ , então  $gk \in \Gamma_{x,y}$ . Logo,

$$\Gamma_{x,y} = g\Gamma_x.$$

Analogamente,  $hg^{-1} \in \Gamma_y$  para todo  $h \in \Gamma_{x,y}$ , e obtemos

$$\Gamma_{x,y} = \Gamma_y g.$$

Da primeira identidade,

$$\Gamma_{x,y} z = g(\Gamma_x z),$$

e a aplicação  $u \mapsto gu$  é uma bijeção entre  $\Gamma_x z$  e  $\Gamma_{x,y} z$ . Portanto,

$$|\Gamma_{x,y} z| = |\Gamma_x z|.$$

Como  $\Gamma_y = g\Gamma_x g^{-1}$ , temos também

$$\Gamma_y(gz) = g(\Gamma_x z),$$

o que prova a segunda igualdade. ■

### Exercício 10.1

Mostre que

$$|\Gamma_x y| = [\Gamma_x : \Gamma_x \cap \Gamma_y].$$

Deduza que, se todos os estabilizadores  $\Gamma_x$  são finitos, então

$$|\Gamma_x y| = |\Gamma_y x|$$

sempre que  $x$  e  $y$  pertencem à mesma órbita.

## 10.2 Funções invariantes

Uma função

$$f : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$$

é chamada *invariante* sob a ação de  $\Gamma$  se

$$f(gx, gy) = f(x, y)$$

para todos  $g \in \Gamma$  e  $x, y \in X$ .

Interpretaremos  $f(x, y)$  como a quantidade de massa enviada por  $x$  para  $y$ . A invariância significa que essa regra não distingue posições que são equivalentes pelas simetrias do grafo.

O resultado geral envolve um fator de correção que mede a possível assimetria entre estabilizadores.

### **Teorema 10.2 – Princípio geral de transporte de massa**

Suponha que  $\Gamma \leq \text{Aut}(X)$ , com  $X$  localmente finito, e seja

$$f : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$$

uma função invariante. Então, para quaisquer  $a, b \in X$ ,

$$\sum_{x \in \Gamma b} f(a, x) = \sum_{y \in \Gamma a} f(y, b) \frac{|\Gamma_y b|}{|\Gamma_b y|}.$$

As duas somas podem assumir o valor  $+\infty$ .

A única parte menos imediata da prova é a troca dos índices da soma. Vale isolá-la.

### Lema 10.3 — Reindexação das órbitas

Fixe  $a, b \in X$ . Para  $z \in \Gamma b$  e  $y \in \Gamma a$ ,

$$y \in \Gamma_{z,b}a \iff z \in \Gamma_{y,a}b.$$

Além disso, sempre que essas condições valem,

$$|\Gamma_{z,b}a| = |\Gamma_b y|.$$

*Demonstração.* Se  $y \in \Gamma_{z,b}a$ , existe  $g \in \Gamma$  tal que

$$gz = b, \quad ga = y.$$

Aplicando  $g^{-1}$ , obtemos

$$g^{-1}y = a, \quad g^{-1}b = z,$$

isto é,  $z \in \Gamma_{y,a}b$ . A implicação inversa é a mesma conta com  $g$  e  $g^{-1}$  trocados.

Para a cardinalidade, escolha  $g$  como acima. Pelo Lema 10.1,

$$|\Gamma_{z,b}a| = |\Gamma_z a| = |\Gamma_b(ga)| = |\Gamma_b y|.$$

■

*Prova do Teorema 10.2.* Fixe  $a, b \in X$ . Para  $z \in \Gamma b$ , o conjunto  $\Gamma_{z,b}$  é não vazio. Se  $g \in \Gamma_{z,b}$ , então, pela invariância de  $f$ ,

$$f(a, z) = f(ga, gb) = f(ga, b).$$

Portanto,  $f(y, b)$  tem o mesmo valor para todo  $y \in \Gamma_{z,b}a$ . Podemos distribuir o termo  $f(a, z)$  uniformemente sobre esse conjunto:

$$f(a, z) = \frac{1}{|\Gamma_{z,b}a|} \sum_{y \in \Gamma_{z,b}a} f(y, b).$$

Somando em  $z \in \Gamma b$ ,

$$\sum_{z \in \Gamma b} f(a, z) = \sum_{z \in \Gamma b} \frac{1}{|\Gamma_{z, b} a|} \sum_{y \in \Gamma_{z, b} a} f(y, b).$$

Agora aparece a reindexação. Pelo Lema 10.3, o par  $(z, y)$  contribui para a soma acima exatamente quando

$$y \in \Gamma a \quad \text{e} \quad z \in \Gamma_{y, a} b.$$

Como todos os termos são não negativos, podemos trocar a ordem das somas por Tonelli:

$$\sum_{z \in \Gamma b} f(a, z) = \sum_{y \in \Gamma a} f(y, b) \sum_{z \in \Gamma_{y, a} b} \frac{1}{|\Gamma_{z, b} a|}.$$

Fixado  $y$ , o mesmo lema mostra que o denominador não depende do  $z$  que aparece na soma:

$$|\Gamma_{z, b} a| = |\Gamma_b y|.$$

Por outro lado, o Lema 10.1 dá

$$|\Gamma_{y, a} b| = |\Gamma_y b|.$$

Há, portanto, exatamente  $|\Gamma_y b|$  parcelas, cada uma igual a  $1/|\Gamma_b y|$ . Assim,

$$\sum_{z \in \Gamma_{y, a} b} \frac{1}{|\Gamma_{z, b} a|} = \frac{|\Gamma_y b|}{|\Gamma_b y|},$$

e obtemos

$$\sum_{x \in \Gamma b} f(a, x) = \sum_{y \in \Gamma a} f(y, b) \frac{|\Gamma_y b|}{|\Gamma_b y|}.$$

■

## 10.3 Unimodularidade

O fator que aparece no princípio geral desaparece quando a ação não distingue, em termos de cardinalidade de órbitas de estabilizadores, o sentido  $x \rightarrow y$  do sentido  $y \rightarrow x$ .

**Definição 10.1**

Suponha que  $\Gamma \leq \text{Aut}(X)$ . Dizemos que a ação de  $\Gamma$  sobre  $X$  é *unimodular* se

$$|\Gamma_x y| = |\Gamma_y x|$$

para todos  $x, y \in X$  que pertencem à mesma órbita.

Um grafo transitivo  $X$  é chamado *unimodular* quando a ação natural de  $\text{Aut}(X)$  sobre  $X$  é unimodular.

Quando a ação é transitiva e unimodular, o princípio geral assume a forma mais familiar.

**Corolário 10.4**

Suponha que  $\Gamma \leq \text{Aut}(X)$  atue transitivamente e de forma unimodular em  $X$ . Se

$$f : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$$

é invariante, então, para todo  $o \in X$ ,

$$\sum_{x \in X} f(o, x) = \sum_{x \in X} f(x, o).$$

*Demonstração.* Como a ação é transitiva,  $\Gamma o = X$ . Aplicando o Teorema 10.2 com  $a = b = o$ , obtemos

$$\sum_{x \in X} f(o, x) = \sum_{x \in X} f(x, o) \frac{|\Gamma_x o|}{|\Gamma_o x|}.$$

Pela unimodularidade, o quociente é igual a 1. ■

O recíproco também é verdadeiro: para ações transitivas, a identidade de transporte de massa caracteriza a unimodularidade.

**Teorema 10.5 — Princípio de transporte de massa**

Suponha que  $\Gamma \leq \text{Aut}(X)$  atue transitivamente em  $X$ . Então a ação é unimodular se e somente se, para toda função invariante

$$f : X \times X \longrightarrow [0, \infty]$$

e todo  $o \in X$ , vale

$$\sum_{x \in X} f(o, x) = \sum_{x \in X} f(x, o).$$

*Demonstração.* A implicação direta é o Corolário 10.4.

Para a recíproca, suponha que a identidade de transporte de massa valha para toda função invariante. Fixe  $a, b \in X$  e considere a órbita diagonal do par  $(a, b)$ :

$$\Gamma(a, b) = \{(ga, gb) : g \in \Gamma\}.$$

Defina

$$f(x, y) = \mathbf{1}_{\{(x, y) \in \Gamma(a, b)\}}.$$

A função  $f$  é invariante. Aplicando a identidade de transporte de massa no vértice  $a$ , temos

$$\sum_{y \in X} f(a, y) = \sum_{x \in X} f(x, a).$$

O lado esquerdo conta precisamente os vértices da órbita  $\Gamma_a b$ , portanto é igual a  $|\Gamma_a b|$ .

Por outro lado,  $f(x, a) = 1$  se e somente se existe  $g \in \Gamma$  tal que

$$ga = x \quad \text{e} \quad gb = a.$$

Logo, os possíveis valores de  $x$  formam o conjunto  $\Gamma_{b,a}a$ . Como a ação é transitiva,  $\Gamma_{b,a}a \neq \emptyset$ , e pelo Lema 10.1,

$$|\Gamma_{b,a}a| = |\Gamma_b a|.$$

Consequentemente,

$$|\Gamma_a b| = |\Gamma_b a|.$$

Como  $a$  e  $b$  são arbitrários, a ação é unimodular. ■

## 10.4 Forma aleatória do princípio

Nas aplicações probabilísticas, a quantidade de massa enviada depende da própria configuração aleatória. Essa é a forma que será usada no capítulo seguinte.

Suponha que  $\Omega$  seja uma configuração aleatória cuja distribuição é invariante sob uma ação transitiva e unimodular de  $\Gamma$  em  $X$ . Seja

$$F : X \times X \times \Omega \longrightarrow [0, \infty]$$

uma regra de transporte satisfazendo a equivariância

$$F(gx, gy, g\omega) = F(x, y, \omega)$$

para todo  $g \in \Gamma$ .

Defina

$$f(x, y) = \mathbb{E}[F(x, y, \Omega)].$$

Pela invariância da lei de  $\Omega$ , a função  $f$  é invariante. Portanto, pelo Teorema 10.5 e pelo teorema de Tonelli,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{y \in X} F(o, y, \Omega) \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in X} F(x, o, \Omega) \right].$$

Em palavras: *a massa esperada enviada pela origem é igual à massa esperada recebida pela origem*. Essa formulação permite transformar propriedades globais de uma configuração aleatória em identidades locais, e será a principal ferramenta do próximo capítulo.

# Aplicações do transporte de massa

---

## 11.1 Percolação invariante

A percolação invariante estende os modelos de elos e de sítios, preservando as simetrias do grafo, mas permitindo dependências entre os estados das arestas ou dos vértices.

A exigência é que a distribuição da configuração permaneça a mesma quando aplicamos um automorfismo do grafo. A percolação de Bernoulli (ou i.i.d.) é um caso particular: cada aresta ou vértice é declarado aberto com probabilidade  $p$ , independentemente dos demais. A invariância, porém, não exige independência; ela admite tanto dependências locais quanto correlações de longo alcance.

### Definição 11.1 — Percolação invariante

Seja  $G$  um grafo. Seja  $\mathbb{P}$  uma medida de probabilidade em algum dos conjuntos  $2^{V(G)}$ ,  $2^{E(G)}$  ou  $2^{V(G) \cup E(G)}$ . Seja  $\Omega$  o subconjunto aleatório associado (isto é, a configuração aleatória correspondente). Dizemos que  $\mathbb{P}$  (ou  $\Omega$ ) é uma percolação invariante se  $\mathbb{P}$  é invariante sob a ação de  $\text{Aut}(G)$ ; ou seja, se para todo  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ , a medida de probabilidade  $\mathbb{P} \circ \varphi^{-1}$  coincide com  $\mathbb{P}$ . Em outras palavras,  $\varphi \Omega$  e  $\Omega$  têm a mesma distribuição.

Quando desejamos distinguir entre os casos  $2^{V(G)}$ ,  $2^{E(G)}$  ou  $2^{V(G) \cup E(G)}$  acima, diremos que  $\mathbb{P}$  (ou  $\Omega$ ) é uma percolação invariante de sítios (resp. elos, resp. mista).

**Exercício** Seja  $G$  um grafo de Cayley. Mostre que tanto a percolação de sítios quanto a de elos em  $G$  são percolações invariantes.

### Exemplo 11.1.

Pode  $\Omega$  consistir, quase certamente, em um único vértice? Se  $G$  é transitivo, não existe percolação invariante tal que  $|\Omega| = 1$  quase certamente.

De fato, se houvesse uma medida  $\mathbb{P}$  tal, então  $\mathbb{P}[\Omega = \{x\}]$  seria constante independentemente de  $x$  (pela transitividade). Portanto,

$$1 = \sum_x \mathbb{P}[\Omega = \{x\}] = \sum_x p = \infty$$

◁

### Exemplo 11.2.

Seja  $G$  transitivo. Pode  $\Omega$  ser, quase certamente, um conjunto finito e não vazio de vértices? Isto é, existe uma percolação invariante  $\Omega$  tal que  $0 < |\Omega| < \infty$  quase certamente?

Se houvesse tal medida  $\mathbb{P}$ , então definimos  $\Omega'$  escolhendo-se inicialmente  $\Omega$  segundo  $\mathbb{P}$  e, em seguida, escolhendo-se uniformemente um vértice  $x$  de  $\Omega$ , e fixando  $\Omega' = \{x\}$ . Isto é,

$$\mathbb{P}[\Omega' = \{x\} | (\Omega)] = \frac{\mathbf{1}_{\{x \in \Omega\}}}{|\Omega|}.$$

Afirmamos que  $\Omega'$  é uma percolação invariante, o que contradiz o exemplo anterior.

De fato, seja  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . Então,

$$\mathbb{P}[\varphi\Omega' = \{x\} | (\Omega)] = \mathbb{P}[\Omega' = \{\varphi^{-1}x\} | (\Omega)] = \frac{\mathbf{1}_{\{\varphi^{-1}x \in \Omega\}}}{|\Omega|} = \frac{\mathbf{1}_{\{x \in \varphi\Omega\}}}{|\varphi\Omega|} = \mathbb{P}[\Omega' = \{x\} | (\varphi\Omega)].$$

Como  $\Omega$  e  $\varphi\Omega$  têm a mesma distribuição, isso mostra que  $\Omega'$  é invariante.

◁

**Exemplo 11.3.**

Se  $G$  é transitivo, então o número de componentes finitas em uma percolação invariante  $\Omega$  deve ser 0 ou  $\infty$  quase certamente.

Com efeito, suponha que  $N$  denote o número de componentes finitas, e que  $\mathbb{P}[0 < N < \infty] > 0$ . Então, definimos  $\Omega'$  como a união de todas as componentes finitas; a medida  $\mathbb{P}[\Omega' \in \cdot \mid (0 < N < \infty)]$  é uma percolação invariante para a qual  $\mathbb{P}[|\Omega'| < \infty \mid 0 < N < \infty] = 1$ .

&lt;

**Exemplo 11.4.**

Seja  $\mathbb{P}$  uma percolação invariante e seja  $\Psi$  o conjunto (aleatório) de todos pontos de “ $r$ -trifurcação”. Então,  $\Psi$  também é uma percolação invariante. Portanto,  $|\Psi| \in \{0, \infty\}$  quase certamente.

&lt;

**Proposição 11.1**

Seja  $\mathbb{P}$  uma percolação invariante em algum grafo de Cayley  $G$ . Para qualquer  $x \in G$ , a componente de  $x$ , denotada por  $\mathcal{C}(x)$ , contém ou 0 ou infinitos pontos de trifurcação.

*Demonstração.* Para cada configuração  $\omega \in \{0,1\}^{V(G)}$  e  $x, y \in G$ , definimos

$$F(x, y, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{se a componente de } x \text{ em } \omega \text{ contiver 0 ou infinitos pontos } r\text{-trifurcação;} \\ \frac{1}{N}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $N$  é o número de pontos  $r$ -trifurcação na componente de  $x$ . Mais precisamente, se a componente de  $x$  contém exatamente  $N$  pontos  $r$ -trifurcação, definimos

$$F(x, y, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \text{se } y \text{ é ponto de trifurcação;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observamos que  $F(\varphi x, \varphi y, \varphi \omega) = F(x, y, \omega)$  para  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . Assim, definindo  $f(x, y) := \mathbb{E}[F(x, y, \Omega)]$ , temos que  $f$  é uma função invariante. Pelo princípio de transporte de massa,

$$\sum_x f(o, x) = \sum_x f(x, o).$$

Por definição,  $\sum_x F(o, x, \omega)$  é igual a 0 ou 1. Portanto,  $\sum_x f(o, x) \leq 1$ .

Denote por  $A$  o evento de que  $o$  é um ponto  $r$ -trifurcação e sua componente possui um número positivo e finito de pontos  $r$ -trifurcação. Para toda configuração  $\omega \in A$ , a componente de  $o$  é infinita e, para qualquer  $x$  nessa componente,  $F(x, o, \omega) = \frac{1}{N}$ . Logo  $\sum_x F(x, o, \omega) = \infty$  em  $A$ . Se  $P(A) > 0$ , teríamos

$$1 \geq \sum_x f(x, o) \geq \mathbb{E} \left[ \sum_x F(x, o, \omega) \mathbf{1}_A \right] = \infty,$$

contradição. Assim, para cada vértice  $o$ ,

$$P(o \text{ é trifurcação e sua componente contém apenas finitas trifurcações}) = 0.$$

Como  $V(G)$  é enumerável, a união desses eventos sobre todos os vértices também tem probabilidade zero. Se alguma componente possuísse um número positivo e finito de pontos de trifurcação, um desses pontos pertenceria justamente a essa união. Logo, quase certamente, cada componente contém ou nenhum ponto de trifurcação ou infinitos pontos de trifurcação. ■

## 11.2 Percolação crítica em grupos não amenáveis

Recordemos a definição de  $\Phi(G)$ , a constante de Cheeger do grafo  $G$ , e que  $G$  é amenável se e somente se  $\Phi(G) = 0$ .

O teorema de Benjamini, Lyons, Peres e Schramm descreve a percolação no ponto crítico para a classe de grafos a seguir.

### **Teorema 11.2**

Se  $G$  é um grafo não amenável unimodular e transitivo, então  $\theta(p_c) = 0$ .

A prova será dividida em duas etapas: primeiro mostramos que o número de componentes infinitas em  $p_c$  não pode ser 1; em seguida, que não pode ser  $\infty$ .

Trataremos da percolação por elos; o caso de sítios é análogo.

## 11.3 Exclusão de uma componente infinita única: $k_{p_c} \neq 1$

**Lema 11.3**

Seja  $\Omega$  uma percolação invariante em um grafo unimodular e transitivo  $G$  de modo que todas as componentes de  $\Omega$  sejam finitas. Então,

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega}(x)] \leq \deg_G - \Phi(G).$$

Consequentemente, se  $\{\Omega_{\varepsilon}\}_{\varepsilon}$  é uma família de configurações de percolação invariante tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}[\Omega_{\varepsilon}(e) = 1] = 1$  para toda aresta  $e$ , e se  $G$  é não amenável, então existe  $\varepsilon > 0$  para o qual  $\Omega_{\varepsilon}$  possui uma componente infinita com probabilidade positiva. Se, além disso, a lei de  $\Omega_{\varepsilon}$  é ergódica, essa probabilidade é um.

*Demonstração.* Seja  $S$  finito, conexo e não vazio. Como  $G$  é transitivo, ele é regular; denotemos seu grau por  $\deg_G$ . Contando, para cada vértice de  $S$ , as arestas que permanecem dentro de  $S$ , obtemos

$$\sum_{x \in S} \deg_S(x) = \deg_G |S| - |\partial_e S|.$$

Cada vértice de  $\partial S$  é extremo exterior de pelo menos uma aresta de  $\partial_e S$ . Portanto

$$|\partial_e S| \geq |\partial S| \geq \Phi(G)|S|,$$

e assim

$$\frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} \deg_S(x) \leq \deg_G - \Phi(G).$$

Como todas as componentes de  $\Omega$  são finitas, defina-se

$$F(x, y, \Omega) = \frac{\deg_{\Omega}(x)}{|C(x)|} \cdot 1_{\{x \leftrightarrow y \text{ (em } \Omega)\}}.$$

Assim, definimos  $f(x, y) := \mathbb{E}[F(x, y, \Omega)]$ , que é uma função invariante. Pelo princípio de transporte de massa,

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega}(x)] = \sum_y f(x, y) = \sum_y f(y, x) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{|C(x)|} \sum_{y \leftrightarrow x} \deg_{\Omega}(y)\right] \leq \deg_G - \Phi(G),$$

pois cada  $C(x)$  é finita e conexa.

Se  $G$  não for amenável, então  $\Phi(G) > 0$ . Fixe um vértice  $x$ . Como ele possui apenas finitos vizinhos  $e$ , para cada aresta  $e$  incidente a  $x$ , temos  $\mathbb{P}[\Omega_{\varepsilon}(e) = 1] \rightarrow 1$ , podemos escolher  $\varepsilon$  tão pequeno que

$$\mathbb{P}[\Omega_{\varepsilon}(x \sim y) = 1] > 1 - \deg_G^{-1} \Phi(G)$$

para todo vizinho  $y$  de  $x$ . Segue que

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega_\varepsilon}(x)] = \sum_{y \sim x} \mathbb{P}[\Omega_\varepsilon(x \sim y) = 1] > \deg_G - \Phi(G).$$

Se todas as componentes de  $\Omega_\varepsilon$  fossem finitas quase certamente, a primeira parte daria a desigualdade oposta. Logo  $\Omega_\varepsilon$  possui uma componente infinita com probabilidade positiva; sob ergodicidade, o evento de existência de uma componente infinita é invariante e, portanto, tem probabilidade um. ■

#### Teorema 11.4

Seja  $G$  um grafo não amenável unimodular e transitivo. Seja  $k_{p_c}$  o número de componentes infinitas na percolação de elos em  $G$  com parâmetro  $p_c$ . Então  $\mathbb{P}[k_{p_c} = 1] = 0$ .

*Demonstração.* Considere o acoplamento natural das configurações de percolação  $(\Omega_p)_{p \in [0,1]}$ . Suponha, por contradição, que em  $p_c$  exista quase certamente uma única componente infinita, que denotaremos por  $\mathcal{C}_\infty$ . A hipótese é invariante e, pela ergodicidade da percolação de Bernoulli, essa é precisamente a situação correspondente a  $k_{p_c} = 1$ .

Para cada vértice  $x \in V(G)$ , defina

$$c(x) = \{z \in \mathcal{C}_\infty : d_G(x, z) = d_G(x, \mathcal{C}_\infty)\}.$$

O conjunto  $c(x)$  é não vazio. Além disso, está contido numa esfera finita em torno de  $x$ ; pela local finitude de  $G$ , é finito. A construção é equivariante: aplicar um automorfismo à configuração leva  $c(x)$  em  $c(\varphi x)$ .

Para  $0 < \varepsilon < p_c$ , definimos a configuração  $H_\varepsilon$  declarando aberta uma aresta  $e = \{x, y\}$  se, e somente se,

1.  $d_G(x, \mathcal{C}_\infty) < \varepsilon^{-1}$  e  $d_G(y, \mathcal{C}_\infty) < \varepsilon^{-1}$ ;
2. todos os vértices de  $c(x) \cup c(y)$  pertencem a uma mesma componente de  $\Omega_{p_c - \varepsilon}$ .

Como o acoplamento natural e a regra  $x \mapsto c(x)$  são equivariantes,  $H_\varepsilon$  é uma percolação invariante.

Usaremos as seguintes propriedades de  $H_\varepsilon$ .

1. *Monotonicidade.* Se  $\varepsilon > \delta > 0$ , então  $p_c - \varepsilon < p_c - \delta$  e a condição de distância para  $H_\varepsilon$  é mais restritiva. Logo

$$H_\varepsilon \leq H_\delta.$$

2. Cada aresta aparece quando  $\varepsilon \downarrow 0$ . Fixe  $e = \{x, y\}$ . O conjunto  $c(x) \cup c(y)$  é finito e está contido na componente conexa  $\mathcal{C}_\infty$  de  $\Omega_{p_c}$ . Podemos, portanto, escolher uma coleção finita de caminhos abertos em  $\Omega_{p_c}$  que conecta todos esses vértices. No acoplamento natural, uma aresta  $f$  pertence a  $\Omega_{p_c}$  quando  $U(f) \leq p_c$ ; como os rótulos têm distribuição contínua, quase certamente nenhum dos rótulos da coleção finita é exatamente  $p_c$ . Assim, existe  $\eta(e) > 0$  tal que todos esses caminhos já estão abertos em  $\Omega_{p_c - \varepsilon}$  sempre que  $0 < \varepsilon < \eta(e)$ . Reduzindo ainda mais  $\varepsilon$ , a condição de distância também é satisfeita. Portanto

$$H_\varepsilon(e) \uparrow 1 \quad \text{quase certamente quando } \varepsilon \downarrow 0,$$

e, por convergência dominada,

$$\mathbb{P}[H_\varepsilon(e) = 1] \rightarrow 1.$$

Pelo Lema 11.3, para algum  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $H_\varepsilon$  possui uma componente infinita com probabilidade positiva. Fixe, numa configuração desse evento, um caminho simples infinito

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

formado por arestas de  $H_\varepsilon$ .

3. Um caminho infinito em  $H_\varepsilon$  produz uma componente infinita abaixo de  $p_c$ . Ponha

$$U = \bigcup_{j \geq 0} c(x_j).$$

Esse conjunto é infinito. De fato, se  $U$  fosse finito, cada  $x_j$  estaria a distância menor que  $\varepsilon^{-1}$  de algum vértice de  $U$ ; todos os  $x_j$  pertenceriam então à união finita de bolas de raio  $[\varepsilon^{-1}]$  centradas nos vértices de  $U$ . Essa união é finita pela local finitude, em contradição com o fato de o caminho  $(x_j)$  ser simples e infinito.

Por outro lado, se  $x_j \sim x_{j+1}$  é uma aresta de  $H_\varepsilon$ , a definição garante que  $c(x_j) \cup c(x_{j+1})$  está contido em uma única componente de  $\Omega_{p_c - \varepsilon}$ . Encadeando essa afirmação ao longo do caminho, todo o conjunto  $U$  pertence a uma mesma componente de  $\Omega_{p_c - \varepsilon}$ . Como  $U$  é infinito, essa componente é infinita.

Obtivemos, com probabilidade positiva, uma componente infinita para o parâmetro  $p_c - \varepsilon < p_c$ , contradizendo a definição de  $p_c$ . Logo

$$\mathbb{P}(k_{p_c} = 1) = 0.$$



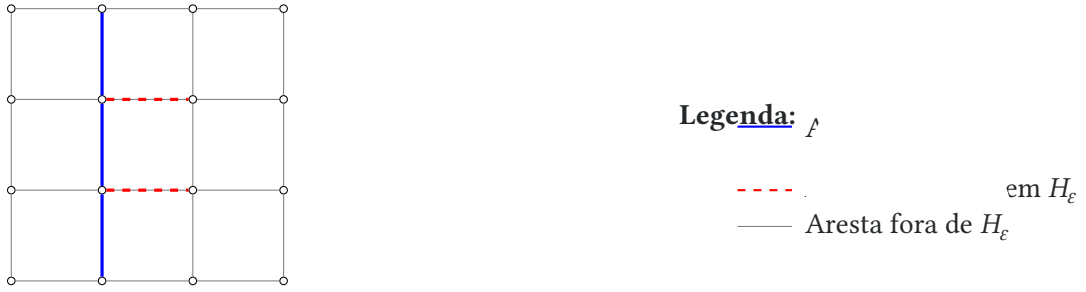


Figura 11.1: Exemplo esquemático da configuração  $H_\varepsilon$ : em azul a componente  $\Omega$ ; em vermelho, conexões adicionais em  $H_\varepsilon$ .

## 11.4 Exclusão de infinitas componentes infinitas: $k_{pc} \neq \infty$

Recordemos a definição de um ponto  $r$ -trifurcação  $x$ ; esse evento é denotado por  $\Psi_r(x)$ . Temos  $\Psi_r(x) = \{M_r \geq 3\}$  onde  $M_r = (N_r)_{0, E(B(x,r))}$  e  $N_r$  é o número de componentes infinitas que intersectam a bola de raio  $r$ ; ou seja,  $\Psi_r(x)$  é o evento de que, ao tornar todas as arestas em  $B(x,r)$  a estarem fechadas, existam ao menos 3 caminhos infinitos a partir de  $\partial B(x,r)$ . Tal evento é independente de  $\mathcal{F}_{E(B(x,r))}$ .

### Lema 11.5

Seja  $\Omega$  uma percolação invariante em um grafo unimodular e transitivo  $G$ . Então, se

$$\mathbb{P}[\Psi_1(x), |\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty] > 0,$$

segue que

$$\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mid (|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty)] > 2.$$

*Demonstração.* Defina  $R(x,y,\Omega)$  como o indicador do evento de que exista um caminho simples infinito da forma  $(x = x_0, y = x_1, x_2, x_3, \dots)$  com  $\Omega(x_n \sim x_{n+1}) = 1$  para todo  $n$ . Defina

$$F(x,y,\Omega) = \begin{cases} 2 R(x,y,\Omega), & \text{se } R(y,x,\Omega) = 0, \\ R(x,y,\Omega), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja,  $F(x,y,\Omega) = 1$  se é possível ir ao infinito a partir de  $x$  em duas direções, com uma delas passando por  $y$ ; se é possível ir ao infinito via  $y$  porém só existe uma direção, então  $F(x,y,\Omega) = 2$ . A regra atribui pesos distintos às duas possibilidades

de prolongamento de um caminho até o infinito.

A função  $F$  é invariante e, conseqüentemente,  $f(x,y) := \mathbb{E}[F(x,y,\Omega)]$  é invariante.

Note que

$$F(x,y,\Omega) + F(y,x,\Omega) = 2 \mathbf{1}_{\{\Omega(x \sim y)=1\}} \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}_\Omega(x)|=\infty\}}.$$

Logo,

$$\sum_y [F(x,y,\Omega) + F(y,x,\Omega)] = 2 \deg_\Omega(x) \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}_\Omega(x)|=\infty\}}.$$

O Princípio de Transporte de Massa implica

$$\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}_\Omega(x)|=\infty\}}] = \frac{1}{2} \sum_y [f(x,y) + f(y,x)] = \sum_y f(x,y) = \mathbb{E}\left[\sum_y F(x,y,\Omega)\right].$$

Sempre que  $|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty$  e  $x$  é um ponto de trifurcação, obtemos  $\sum_y F(x,y,\Omega) \geq 3$ . Além disso, para qualquer  $x$  com  $|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty$ , deve existir ao menos um caminho de  $x$  até o infinito, de modo que  $\sum_y F(x,y,\Omega) \geq 2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mathbf{1}_{\{|\mathcal{C}_\Omega(x)|=\infty\}}] &= \sum_y \mathbb{E}[F(x,y,\Omega) \mathbf{1}_{\{\Psi_1(x), |\mathcal{C}_\Omega(x)|=\infty\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[F(x,y,\Omega) \mathbf{1}_{\{\Psi_1(x)^c, |\mathcal{C}_\Omega(x)|=\infty\}}] \\ &\geq 3 \mathbb{P}[\Psi_1(x), |\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty] \\ &\quad + 2 \mathbb{P}[\Psi_1(x)^c, |\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty] \\ &= 2 \mathbb{P}[|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty] + \mathbb{P}[\Psi_1(x), |\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty] \\ &> 2 \mathbb{P}[|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mid (|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty)] > 2.$$

Além disso,

$$\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mid |C_\Omega(x)| = \infty] = \frac{\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_\Omega(x)|=\infty\}}]}{\mathbb{P}[|C_\Omega(x)| = \infty]}.$$

Substituindo:

$$\frac{\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_\Omega(x)|=\infty\}}]}{\mathbb{P}[|C_\Omega(x)| = \infty]} > 2,$$

portanto,

$$\mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mid |C_\Omega(x)| = \infty] > 2.$$



## Medida produto condicional: percolação invariante e Bernoulli

Seja  $G = (V, E)$  um grafo localmente finito. Considere:

- Uma medida de percolação *invariante*  $\mu$  sobre  $\{0, 1\}^E$ , ou seja,  $\omega \in \{0, 1\}^E$  é uma configuração aleatória onde cada aresta está aberta ( $\omega(e) = 1$ ) ou fechada ( $\omega(e) = 0$ );
- Para cada configuração  $\omega \sim \mu$ , as *componentes abertas* (componentes conexas do subgrafo induzido por  $\omega$ ) são denotadas por  $\{\mathcal{C}_i(\omega)\}_{i \in I}$ , onde  $I$  é um conjunto (aleatório) de índices.

Sobre essa configuração, definimos uma segunda percolação de Bernoulli com parâmetro  $p \in [0, 1]$ , *restrita às arestas abertas de  $\omega$* .

### Definição 11.2 — Percolação invariante e Bernoulli

Seja  $\nu$  a medida de probabilidade associada a uma percolação invariante. Para cada realização  $\omega$  da percolação invariante, definimos uma configuração de percolação invariante + Bernoulli,  $\omega' \in \{0, 1\}^E$  por:

- Arestas  $e \in \omega$ : abertas com probabilidade  $p \in [0, 1]$ , independentemente entre si;
- Arestas  $e \notin \omega$ : fixadas como fechadas, ou seja,  $\omega'(e) = 0$  com probabilidade 1.

A *medida de percolação invariante + Bernoulli* resultante é a medida produto condicional  $\mathbb{P}_\nu^p$  sobre  $\omega' \in \{0, 1\}^E$  dada por:

$$\mathbb{P}_\nu^p(\omega') = \int \mathbb{P}_p(\omega' \mid \omega) d\nu(\omega),$$

onde  $\mathbb{P}_p(\cdot \mid \omega)$  é a medida produto de Bernoulli com parâmetro  $p$ , condicionada à configuração  $\omega$ , ou seja,

$$\mathbb{P}_p(\omega' \mid \omega) = \prod_{e \in \omega} p^{\omega'(e)} (1 - p)^{1 - \omega'(e)} \cdot \prod_{e \notin \omega} \delta_0(\omega'(e)).$$

onde

$$\delta_0(\omega'(e)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega'(e) = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Lema 11.6**

Seja  $\Omega$  uma percolação invariante em um grafo unimodular e transitivo  $G$ . Suponha que todas as componentes de  $\Omega$  sejam árvores (possivelmente finitas) quase certamente. Então, se

$$\mathbb{P}[\Psi_1(x), x \leftrightarrow \infty] > 0,$$

segue que, quase certamente, existe alguma componente  $\mathcal{C}$  de  $\Omega$  tal que a percolação de elos de Bernoulli em  $\mathcal{C}$  satisfaça  $p_c < 1$ .

*Demonstração.* Vimos que se  $\mathbb{P}[\Psi_1(x), x \leftrightarrow \infty] > 0$ , então

$$m := \mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mid (x \leftrightarrow \infty)] > 2.$$

Escolhemos  $p < 1$  suficientemente próximo de 1 para que  $mp > 2$ . Essa escolha usa a desigualdade estrita  $m > 2$ , e não apenas  $m \geq 2$ .

Seja  $\Omega'$  a percolação de elos de Bernoulli de parâmetro  $p$  sobre  $\Omega$ . Então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\deg_{\Omega'}(x) \mid (|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty)] &= \sum_{y \sim x} \mathbb{P}[\Omega(x \sim y) = 1 \mid (|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty)] p \\ &= \mathbb{E}[\deg_\Omega(x) \mid (|\mathcal{C}_\Omega(x)| = \infty)] p = mp > 2. \end{aligned}$$

Nessa construção, cada aresta de  $\Omega$  tem probabilidade  $p$  de permanecer em  $\Omega'$ .

Para comparar esse grau médio com o de uma componente finita, usamos a identidade  $|E(T)| = |T| - 1$  para uma árvore finita  $T$ . Portanto,

$$2|T| > 2|E(T)| = \sum_{x, y \in T} \mathbf{1}_{\{x \sim y\}} = \sum_{x \in T} \deg_T(x).$$

Se todas as componentes de  $\Omega'$  são árvores finitas quase certamente, consideramos a função de transporte  $F(x, y, \Omega)$  definida por

$$F(x, y, \Omega) := \frac{\deg_{\Omega'}(x)}{|C_{\Omega'}(x)|} \cdot \mathbf{1}_{\{y \in C_{\Omega'}(x)\}} \cdot \mathbf{1}_{\{|C_\Omega(x)| = \infty\}},$$

que representa a quantidade de massa que o vértice  $x$  envia a  $y$ , normalizada pelo tamanho de sua componente em  $\Omega'$ , e condicionada ao fato de  $x$  pertencer a uma componente infinita de  $\Omega$ .

**O Princípio de Transporte de Massa** iguala a massa total esperada *enviada* à massa total esperada *recebida*:

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega'}(x) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_\Omega(x)| = \infty\}}] = \mathbb{E} \left[ \sum_y F(y, x, \Omega) \right].$$

A massa recebida em  $x$  pode ser escrita como

$$\sum_y F(y, x, \Omega) = \sum_{y \in C_{\Omega'}(x)} \frac{\deg_{\Omega'}(y)}{|C_{\Omega'}(x)|} \cdot \mathbf{1}_{\{|C_{\Omega'}(x)|=\infty\}} = \frac{1}{|C_{\Omega'}(x)|} \sum_{y \in C_{\Omega'}(x)} \deg_{\Omega'}(y) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_{\Omega'}(x)|=\infty\}}.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega'}(x) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_{\Omega'}(x)|=\infty\}}] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{|C_{\Omega'}(x)|} \sum_{y \in C_{\Omega'}(x)} \deg_{\Omega'}(y) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_{\Omega'}(x)|=\infty\}} \right].$$

Como, por hipótese, todas as componentes de  $\Omega'$  são árvores finitas, para cada componente  $C$  temos

$$\frac{1}{|C|} \sum_{y \in C} \deg_{\Omega'}(y) < 2,$$

e, portanto,

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega'}(x) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_{\Omega'}(x)|=\infty\}}] < 2 \cdot \mathbb{P}[|C_{\Omega'}(x)| = \infty].$$

Por outro lado, o cálculo do grau médio forneceu

$$\mathbb{E}[\deg_{\Omega'}(x) \cdot \mathbf{1}_{\{|C_{\Omega'}(x)|=\infty\}}] = mp \cdot \mathbb{P}[|C_{\Omega'}(x)| = \infty],$$

e, pela escolha de  $p$ , temos  $mp > 2$ . Portanto,

$$mp \cdot \mathbb{P}[|C_{\Omega'}(x)| = \infty] > 2 \cdot \mathbb{P}[|C_{\Omega'}(x)| = \infty],$$

o que leva a uma contradição.

Logo a hipótese de que todas as componentes de  $\Omega'$  são finitas não pode ser verdadeira. Assim,  $\Omega'$  contém quase certamente uma componente infinita, o que mostra que  $p_c < 1$  para alguma componente  $\mathcal{C} \subseteq \Omega$ .



Definimos a *floresta geradora mínima livre*  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$  como o subconjunto de arestas  $e \in \Omega$  que não pertencem a nenhum ciclo de  $\Omega$  no qual  $e$  recebe o maior valor atribuído entre as arestas do ciclo.

### Definição 11.3

Seja  $(\Omega_p)_p$  o acoplamento natural de percolação de elos construído a partir das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas  $U(e)_e$ . Para cada  $p$ , definimos a **floresta geradora mínima livre** (FGM)  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_p$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x \sim y) = 1 &\iff \Omega_p(x \sim y) = 1 \text{ e } \forall \text{ caminho finito } \gamma : x \rightarrow y, \gamma \subset \Omega_p, \\ &\exists j, 0 \leq j \leq |\gamma| - 1 : U(\gamma_j \sim \gamma_{j+1}) \geq U(x \sim y). \end{aligned}$$

A **floresta geradora mínima livre** de um grafo  $G$  com pesos aleatórios contínuos  $U(e) \in [0,1]$  atribuídos às arestas pode ser construída removendo-se de cada ciclo simples a aresta com o maior rótulo. Isso produz, com probabilidade 1, uma floresta livre de ciclos.

### Exercício 11.1

Mostre que FGM é uma percolação invariante.

### Lema 11.7

Seja  $G$  um grafo transitivo e  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p_c}$  para  $p_c = p_c(G)$ . Então, quase certamente, para todo  $x$ , a componente  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}(x)$  de  $x$  em  $\mathcal{F}$  é uma árvore que abrange  $\mathcal{C}_{p_c}(x)$ .

Em particular, se  $x$  é um ponto de trifurcação em uma componente infinita de  $\Omega_{p_c}$ , então ele também é um ponto de trifurcação em uma árvore infinita em  $\mathcal{F}_{p_c}$ .

*Demonstração.* É suficiente provar que para qualquer  $x \sim y \in \Omega_{p_c}$ , temos  $y \leftrightarrow x$  em FGM.

Fixe  $x \sim y \in \Omega_{p_c}$ . Seja  $u = U(x \sim y)$ . Mostraremos que, se  $x \not\leftrightarrow y$  em FGM, então a componente  $\mathcal{C}_u(x)$  em  $\Omega_u$  é infinita.

Assuma que  $y \not\leftrightarrow x$  em FGM. Como  $x \sim y \notin \mathcal{F}$ , deve existir um caminho simples  $\alpha : x \rightarrow y$  contido em  $\mathcal{C}_u(x)$ , ou seja, com  $\alpha$  aberto em  $\Omega_u$ .

Se  $\alpha$  for aberto em FGM, então  $x \leftrightarrow y$  em FGM, contradizendo nossa suposição.

Portanto, deve existir uma aresta  $\alpha_\ell \sim \alpha_{\ell+1}$  que não pertence à FGM. No entanto, pela definição, isso proporciona um caminho simples  $\gamma : \alpha_\ell \rightarrow \alpha_{\ell+1}$  tal que

$$\max_{0 \leq j \leq |\gamma|-1} U(\gamma_j \sim \gamma_{j+1}) < U(\alpha_\ell \sim \alpha_{\ell+1}) \leq u$$

(já que  $\alpha$  é aberta em  $\Omega_u$ ). Logo,  $E(\alpha \cup \gamma) \setminus \{\alpha_\ell \sim \alpha_{\ell+1}\}$  é aberto em  $\Omega_u$ , e, portanto, contém um caminho simples  $\beta : x \rightarrow y$  que também é aberto em  $\Omega_u$ .

Numa floresta há *um único* caminho simples entre quaisquer dois vértices da mesma componente conexa. Se a interseção  $\gamma \cap \alpha$  contivesse um vértice  $\alpha_j$  diferente dos extremos, haveria dois caminhos distintos em  $F_{<w}$  ligando  $\alpha_i$  a  $\alpha_j$ : um subcaminho de  $\alpha$  e um de  $\gamma$ , formando um ciclo — impossível em  $F_{<w}$ . Logo  $\gamma \cap \alpha = \{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ .

Como  $\alpha$  é simples, a concatenação indicada não repete vértices, portanto  $\beta$  é simples.

De fato,

$$\beta = (x_0, \dots, \alpha_\ell = \gamma_0, \dots, \gamma_{|\gamma|} = \alpha_{\ell+1}, \dots, \alpha_{|\alpha|}),$$

o que implica  $|\beta| = |\alpha| + |\gamma| - 1 > |\alpha|$ .

Por indução, isso implica que, para qualquer  $k$ , há um caminho  $\alpha : x \rightarrow y$  tal que  $\alpha$  está aberto em  $\Omega_u$  e  $|\alpha| > k$ . Logo,  $|E(\mathcal{C}_u(x))| > k$  para todo  $k$ , o que significa  $|\mathcal{C}_u(x)| = \infty$ .

Mas como  $\mathcal{F} \subseteq \Omega_p$ , na verdade temos:

$$C_{\mathcal{F}}(x) \subseteq C_{\Omega_p}(x),$$

temos uma contradição.

Concluimos que, se  $x \sim y \in \Omega_{p_c}$  e  $x \not\leftrightarrow y$  em FGM, então  $|\mathcal{C}_u(x)| = \infty$ , para  $u = U(x \sim y)$ . Como  $U(x \sim y) \neq p_c$  quase certamente, temos

$$\mathbb{P}[x \sim y \in \Omega_{p_c} \text{ e } x \not\leftrightarrow y \text{ em FGM}] \leq \mathbb{P}[\exists u < p_c, |\mathcal{C}_u(x)| = \infty] = 0.$$

Logo, mostramos que quase certamente, para qualquer  $x \sim y \in \Omega_{p_c}$ , também  $x \leftrightarrow y$  em FGM. Isso implica, por um exercício abaixo, que  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}(x)$  seja uma árvore que abrange  $\mathcal{C}_{p_c}(x)$ , para qualquer  $x$ , quase certamente.

Finalmente, se  $x$  é um ponto de trifurcação em  $\Omega_{p_c}$ , então  $|\mathcal{C}_{p_c}(x)| = \infty$ , e remover as arestas adjacentes a  $x$  dividiria  $\mathcal{C}_{p_c}(x)$  em pelo menos 3 componentes infinitas. Se  $T(x)$  for a árvore que abrange  $\mathcal{C}_{p_c}(x)$  em FGM, então remover as arestas adjacentes a  $x$  também dividirá  $T(x)$  em 3 componentes infinitas. ■

**Exercício 11.2**

Mostre que, se para qualquer  $x \sim y \in \Omega_p$  temos  $x \leftrightarrow y$  em  $\mathcal{F}_p$ , então para cada componente conexa  $\mathcal{C}_p(x)$  em  $\Omega_p$ , a componente  $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_p}(x)$  de  $x$  em  $\mathcal{F}_p$  é uma árvore que abrange  $\mathcal{C}_p(x)$ .

**Exercício 11.3**

Mostre que

$$\mathbb{P}[\exists u < p_c : |\mathcal{C}_u(x)| = \infty] = 0.$$

**Teorema 11.8**

Seja  $G$  um grafo não amenável, unimodular e transitivo. Seja  $k_{p_c}$  o número de componentes infinitas na percolação de elos em  $G$  com parâmetro  $p_c$ . Então,

$$\mathbb{P}[k_{p_c} = \infty] = 0.$$

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que  $\mathbb{P}[k_{p_c} = \infty] > 0$ .

Fixe  $r > 0$ . Defina o evento:

$\Psi_r(x) := \{\text{existem pelo menos três componentes infinitas de } \Omega_{p_c} \text{ conectadas a } \partial B(x, r) \text{ por caminhos abertos em } B(x, r)\}.$

Como assumimos  $k_{p_c} = \infty$  temos que  $p_c < 1$ , então existe  $r$  tal que  $\mathbb{P}[\Psi_r(x)] > 0$ .

Então, se conectarmos quaisquer três componentes infinitas a partir de  $\partial B(x, r)$  por caminhos abertos dentro de  $B(x, r)$ , obtemos

$$\mathbb{P}[\exists y \in B(x, r) : \Psi_1(y), y \leftrightarrow \infty \mid \Psi_r(x)] \geq q > 0.$$

Pela transitividade, isso vale para qualquer vértice, e em particular

$$\mathbb{P}[\Psi_1(x), x \leftrightarrow \infty] > 0.$$

Seja agora  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{p_c}$  como no Lema 11.7. Aplicando o Lema 11.7, temos que, com probabilidade positiva,  $x$  é um ponto de trifurcação em uma árvore infinita da floresta geradora mínima livre  $\mathcal{F}_{p_c} \subseteq \Omega_{p_c}$ .

Em seguida, pelo Lema 11.6, segue que  $\mathcal{F}_{p_c}$  contém quase certamente alguma subárvore  $\mathcal{C} \subseteq \Omega_{p_c}$  tal que

$$p_c(\mathcal{C}) < 1.$$

No entanto, como  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ , onde  $\mathcal{C}'$  é uma componente de  $\Omega_{p_c}$ , segue que:

$$p_c(\mathcal{C}') \leq p_c(\mathcal{C}) < 1,$$

Entretanto,

$$p_c(\mathcal{C}') = 1.$$

Para ver isso suponha, por contradição, que

$$p_c(\mathcal{C}') < 1.$$

Então existe algum  $p < 1$  tal que a percolação de Bernoulli com parâmetro  $p$  sobre  $\mathcal{C}'$  possui uma componente infinita com probabilidade positiva.

Contudo, como  $\mathcal{C}' \subseteq \Omega_{p_c}$ , isso implica que  $\Omega_{p_c}$  percolaria com parâmetro  $p \cdot p_c$  menor que  $p_c$ , o que contradiz a definição do limiar crítico  $p_c$ .

Portanto,

$$\mathbb{P}[k_{p_c} = \infty] = 0.$$

■

### Lema 11.9 — Florestas na percolação

Seja  $\Omega$  um processo de percolação  $\Gamma$ -invariante em um grafo  $G$ . Se, com probabilidade positiva, existe uma componente de  $\Omega$  com pelo menos três fins então (em um espaço de probabilidade ampliado) existe uma floresta aleatória  $\mathcal{F} \subset \Omega$  tal que a distribuição do par  $(\mathcal{F}, \Omega)$  é  $\Gamma$ -invariante e, com probabilidade positiva, alguma componente de  $\mathcal{F}$  possui ao menos três fins.

*Demonstração.* Atribuímos variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em  $[0,1]$  às arestas (independentemente da configuração  $\Omega$ ). Definimos a *floresta geradora mínima livre*  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$  como o subconjunto de arestas  $e \in \Omega$  que não pertencem a nenhum ciclo de  $\Omega$  no qual  $e$  recebe o maior valor atribuído entre as arestas do ciclo.

Não há ciclos em  $\mathcal{F}$ , pois, em qualquer ciclo de  $\Omega$ , a aresta de maior rótulo é removida. Além disso, toda componente de  $\mathcal{F}$  contida em uma componente infinita de  $\Omega$  é quase certamente infinita. Para ver isso, suponha que  $K$  seja uma componente finita de  $\mathcal{F}$  contida numa componente infinita de  $\Omega$ . Existe então ao menos uma aresta aberta de  $\Omega$  com um extremo em  $K$  e outro fora de  $K$ . Escolha, entre todas essas arestas, aquela de menor rótulo, digamos  $e$ .

A aresta  $e$  não pode ser excluída da floresta. De fato, qualquer ciclo de  $\Omega$  que contenha  $e$  precisa sair de  $K$  por  $e$  e voltar a  $K$  por outra aresta  $f$  da mesma fronteira. Pela escolha de  $e$  e pela continuidade dos rótulos, quase certamente  $U(f) > U(e)$ . Portanto  $e$  não é a aresta de maior rótulo desse ciclo. Como isso vale para todo ciclo que contém  $e$ , a definição da floresta geradora mínima livre força  $e \in \mathcal{F}$ , contradizendo o fato de  $K$  ser uma componente de  $\mathcal{F}$ . Logo, cada vértice de uma componente infinita de  $\Omega$  pertence a alguma árvore infinita de  $\mathcal{F}$ .

Suponha agora que a componente  $C_\Omega(x)$  tem, com probabilidade positiva, ao menos três fins. Fixe uma árvore finita  $T$  que contém  $x$  tal que, com probabilidade positiva,  $T \subset C_\Omega(x)$  e  $C_\Omega(x) \setminus V(T)$  possui ao menos três componentes infinitas. Com probabilidade positiva, ocorrem simultaneamente os seguintes eventos:

1.  $T \subset C_\Omega(x)$ ;
2.  $C_\Omega(x) \setminus V(T)$  possui ao menos três componentes infinitas;
3. todas as arestas de  $T$  recebem valores menores que  $\frac{1}{2}$ ;
4. todas as arestas incidentes a  $V(T)$ , mas não pertencentes a  $T$ , recebem valores maiores que  $\frac{1}{2}$ .

Sob esse evento,  $T \subset \mathcal{F}$ , e  $T$  pertence a uma árvore de  $\mathcal{F}$  com ao menos três fins. ■

# Referências

---

- Bollobás, B. e O. Riordan (2006). *Percolation*. Cambridge University Press.
- Durrett, R. (2010). *Probability: theory and examples*. Cambridge university press.
- Easo, P., F. Severo e V. Tassion (2025). «Counting minimal cutsets and  $p_c < 1$ ». Em: *Forum of Mathematics, Pi* 13, e23. DOI: [10.1017/fmp.2025.10011](https://doi.org/10.1017/fmp.2025.10011).
- Grimmett, G. e G. Grimmett (1999). *Percolation*. Springer.
- Kesten, H. (1982). *Percolation theory for mathematicians*. Vol. 2. Springer.
- Lyons, R. e Y. Peres (2017). *Probability on trees and networks*. Vol. 42. Cambridge University Press.
- Yadin, A. (s.d.). *an introduction to percolation*.

# Índice Remissivo

---

- $d$ -regular, 1
- autoevitante, 2
- automorfismo, 3
- caminho, 2
- ciclo, 2
- crescimento polinomial de grau no máximo  $D$ , 3
- crescimento subexponencial, 3
- distância de grafo, 2
- filhos, 2
- floresta, 2
- floresta geradora mínima livre, 104
- grafo, 1
- grafo de Cayley, 3
- grau, 1
- Lei 0-1 de Kolmogorov, 8
- localmente finito, 1
- norma de palavra, 3
- pai, 2
- quase-isometria, 4
- simples, 2
- subgrafo, 2
- subgrafo induzido por  $A$ , 2
- transitivo, 4
- árvore, 2