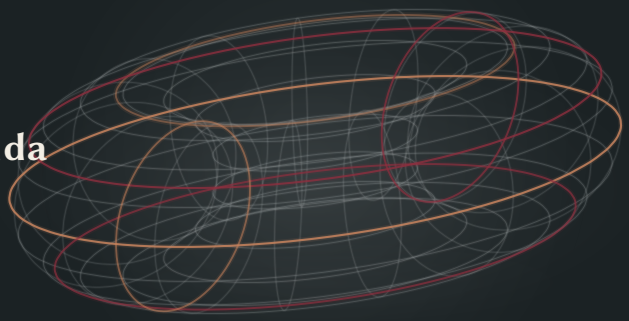
Introdução à Topologia Algébrica

Dahisy Lima
Daniel Miranda



2026

"It is by logic that we prove, but by intuition that we discover. "
- Henri Poincaré

Copyright © 2023–2026 Dahisy Lima e Daniel Miranda.

Licenciado sob a Creative Commons Atribuição–NãoComercial–SemDerivações 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0). Você não pode usar este arquivo exceto em conformidade com a Licença. Você pode obter uma cópia da Licença em
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.
A menos que exigido por lei aplicável ou acordado por escrito, o livro distribuído sob a Licença é distribuído "COMO ESTÁ", SEM GARANTIAS OU CONDIÇÕES DE QUALQUER TIPO, expressa ou implícita. Consulte a Licença para permissões específicas e limitações sob a Licença.



Notas de Aula – Versão 0.965

Sumário

Prefácio v

Agradecimentos vi

1. Conceitos básicos 1

1.1. Operações em Espaços Topológicos 1

1.1.1. União por um Ponto 1

1.1.2. Cone e Suspensão 2

1.2. Variedades 4

1.2.1. Superfícies 8

I. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento 16

2. Homotopia 17

2.1. Aplicações Homotópicas 18

2.1.1. Equivalência Homotópica 23

2.1.2. Espaços Contráteis 28

2.2. Homotopia Relativa 30

2.3. Homotopia de Caminhos 32

3. Grupo Fundamental 43

3.1. Grupo Fundamental 44

3.2. Homomorfismo Induzido 47

3.3. Espaços Simplesmente Conexos 53

3.4. Grupo Fundamental do Círculo 56

3.5. Aplicações de Grupo Fundamental 62

4. Espaço Recobrimento 66
4.1. Espaços de Recobrimento 67
4.2. Grupos Propriamente Descontínuos 76
4.3. Levantamento de Caminhos e Homotopias 83
4.4. Levantamento de Funções 95
4.5. Homomorfismos de Recobrimento e Transformações de Deck . . . 97
4.6. Classificação dos Espaços de Recobrimento 102
4.7. Representando Espaços de Recobrimento por Permutações 110
4.8. Classificação dos G-Recobrimentos 113
4.9. Teorema de Seifert-van Kampen 116
4.9.1. Grupo Fundamental de Superfícies 123
4.9.2. Grupo Fundamental de Variedades 4-dimensionais 126

II. Teoria de Homologia 136

5. Motivação 137
5.1. O que faremos nos próximos capítulos 145

6. Noções básicas de Teoria de Categorias$*$ 149
6.1. Categorias 150
6.2. Funtores 156
6.3. Transformações Naturais 159

7. Álgebra Homológica 164
7.1. R-módulos 165
7.2. Sequências Exatas 177
7.3. Funtores $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ e $A \otimes \bullet$ 182
7.4. Complexos de Cadeias e sua Homologia 188
7.5. Aplicações de Cadeias 191
7.6. Homotopia de Cadeias 195
7.7. Sequência Exata Longa em Homologia 197
7.8. Homologia Relativa 208

7.9. Complexo de Cocadeias e Cohomologia 209

8. Complexos Simpliciais e Δ-Complexos 220
8.1. Complexos Simpliciais 220
8.2. Δ-complexos 234

9. Homologia e Cohomologia Simplicial 241
9.1. Grupos de Homologia Simplicial 242
9.2. Homologia Simplicial com Coeficientes e Homologia Relativa . . . 252
9.3. Característica de Euler-Poincaré de um Complexo Simplicial 261
9.4. Cohomologia Simplicial 266
9.5. Cohomologia Simplicial Relativa 271
9.6. Intuições sobre Cohomologia Simplicial 274

10. Homologia Singular 287
10.1. Homologia Singular 288
10.2. Invariância Homotópica 299
10.3. Homologia Singular Relativa 302
10.4. Primeiro Grupo de Homologia e o Grupo Fundamental 307
10.5. Propriedade de Excisão e Sequência de Mayer-Vietoris 314
10.6. Limites Diretos e Axioma de Suporte Compacto 323
10.7. Demonstração do Princípio da Localidade 329
10.8. Equivalência entre a Homologia Simplicial e Singular 337
10.9. Homologia com Coeficientes 340
10.10.Teorema dos Coeficientes Universais 346
10.11.$\star$ Produto Cruzado e o Teorema de Eilenberg-Zilber 348

11. Aplicações 358
11.1. Teorema da Separação de Jordan-Brouwer 358
11.2. Invariância de Domínio e de Dimensão 365
11.3. Aplicações na Esfera 367
11.4. Teorema Fundamental da Álgebra 373
11.5. Teorema de Borsuk-Ulam 375
11.6. Teorema do Sanduíche de Presunto 378

12. Homologia Celular **384**
12.1. CW-Complexos 385
12.1.1. Definição Equivalente 391
12.2. Homologia de CW-Complexos 395
12.3. Axiomas de Eilenberg-Steenrod para a Homologia 408

13. Cohomologia Singular **413**
13.1. Cohomologia 414
13.2. Cohomologia Reduzida e Relativa 420
13.3. Propriedades da Cohomologia 424
13.4. Relação entre os Grupos de Homologia e Cohomologia 430
13.5. Produto Cup e o Anel de Cohomologia 433
13.6. Anéis de Cohomologia de Superfícies 437
13.7. Fórmula de Künneth 441
13.8. Axiomas de Eilenberg-Steenrod 449

14. Dualidade de Poincaré **452**
14.1. Cohomologia com Suporte Compacto 453
14.2. Orientabilidade 455
14.3. Produto Cap 466
14.4. Teorema da Dualidade de Poincaré 468
14.5. Aplicações 477

Prefácio

Essas notas correspondem aos apontamentos para os cursos de Introdução à Topologia Algébrica e Topologia Algébrica do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do ABC. Essas notas ainda estão incompletas e podem apresentar erros ou seções incompletas.

Ficaríamos muito gratos se nos fossem enviadas sugestões de melhorias ou que nos fossem apontados erros porventura encontrados.

Agradecimentos

Agradecemos aos alunos Alice Micheloni, Luciano Henrique Lacerda de Araújo e Vítor Marins Garcia pelas inúmeras sugestões e correções.

1 Conceitos básicos

1.1. Operações em Espaços Topológicos

1.1.1. União por um Ponto

Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) espaços topológicos com pontos marcados, a **união por um ponto**, ou o produto cunha, denotado por $X \vee Y$, é o espaço quociente da união disjunta de X e Y pela identificação $x_0 \sim y_0$, i.e.

$$X \vee Y = (X \sqcup Y)/\sim,$$

onde dois pontos distintos de $X \sqcup Y$ são equivalentes se, e somente se, ambos são os pontos base de X ou Y.

Esse espaço é munido de inclusões naturais $i_X : X \to X \vee Y$ e $i_Y : Y \to X \vee Y$ que são aplicações com ponto marcado e tais que qualquer aplicação $f : X \vee Y \to Z$ fornece um par de aplicações $f \circ i_X : X \to Z$, $f \circ i_Y : Y \to Z$.

Além disso, a partir de qualquer par de aplicações com ponto marcado $f_X : X \to Z$ e $f_Y : Y \to Z$, podemos construir uma aplicação $f_X \sqcup f_Y : X \sqcup Y \to Z$ que preserva a relação de equivalência $\sim$, ou seja, se $x \sim x'$, então $(f_X \sqcup f_Y)(x) = (f_X \sqcup f_Y)(x')$. Portanto, existe uma aplicação correspondente $X \vee Y \to Z$ que denotamos por $f_X \vee f_Y$.

Exemplo 1.1.

Se $X = Y = [0,1]$, com 0 como ponto base, então $X \vee Y$ é homeomorfo ao intervalo fechado $[-1,1]$ cujo ponto base está no meio, em 0, por exemplo. A figura a seguir representa este produto cunha e explica de onde vem o símbolo $\vee$.



◁

Exemplo 1.2.

A figura do espaço oito apresentada na Figura 1.1 é homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

◁

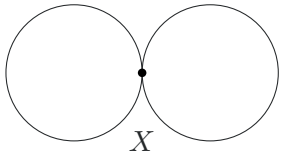


Figura 1.1.: Oito

Exemplo 1.3.

O espaço $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um produto cunha de um número enumerável de círculos.

◁

1.1.2. Cone e Suspensão

Dado um espaço topológico X, frequentemente é útil considerar o cone CX em X, ou seja, o espaço quociente

$$CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}.$$

O cone de X é contrátil, já que a aplicação $F : CX \times [0,1] \to CX$ definida por $F((x,s),t) = (x,st)$ é uma homotopia da aplicação identidade em CX para

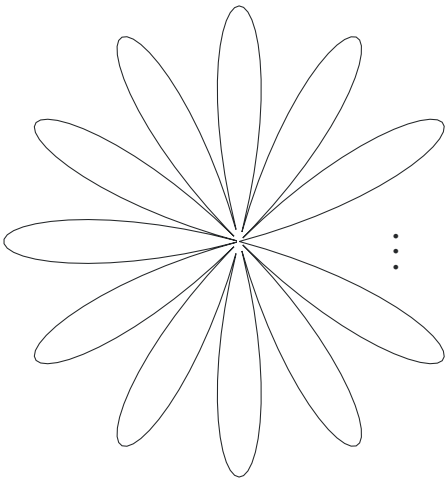
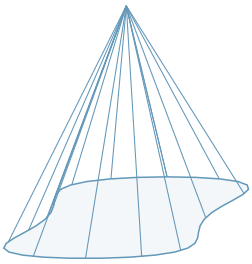
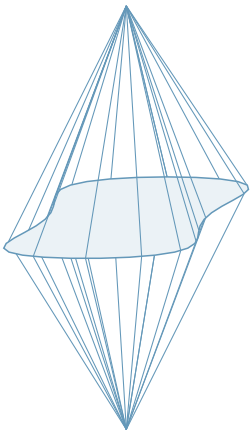


Figura 1.2.: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$



a aplicação constante. Vale ressaltar que, no entanto, esse espaço também contém uma cópia de X, já que o subconjunto $X \times \{1\}$ é homeomorfo a X.

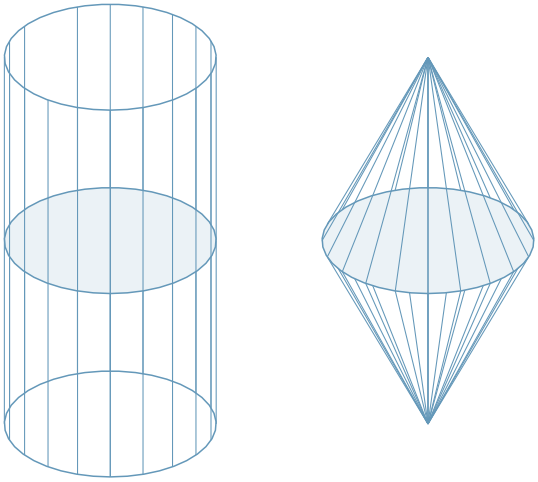
Também podemos formar a **suspensão** ou o **cone duplo** ΣX de X, definido como o quociente de $X \times [0,1]$ pela relação que identifica o subconjunto $X \times \{0\}$ para um ponto, e o subconjunto $X \times \{1\}$ para um ponto diferente. Esse espaço pode ser pensado como duas cópias de CX unidas pela cópia canônica de X contida em cada uma delas.



Exemplo 1.4.

Seja X a esfera $\mathbb{S}^1$, então ΣX é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^2$.

◁



Da mesma forma, $\Sigma\mathbb{S}^n$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^{n+1}$, para todo n não negativo, mesmo no caso $n = 0$.

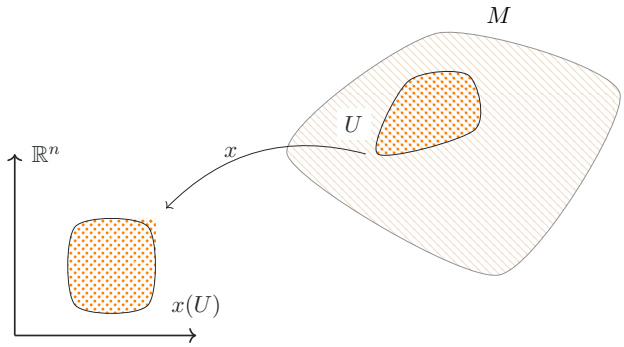
1.2. Variedades

Uma variedade topológica é um espaço topológico que se parece localmente com um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $(M,\ \mathcal{M})$ um espaço topológico e $U \subseteq M$ um subconjunto aberto. Um homeomorfismo

$$x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

num subconjunto aberto $x(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito uma **carta local** n-dimensional para $(M,\ \mathcal{M})$. As n-uplas $x(p) = (x^1(p),\ \ldots\ x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$, para $p \in U$, são chamadas de coordenadas locais de $p \in M$ em relação à carta local $(U,\ x)$.



Se pudermos encontrar uma carta local n-dimensional em torno de cada ponto de M, obteremos uma variedade topológica. Por várias razões, é útil exigir duas propriedades adicionais sobre a topologia de $(M,\ \mathcal{M})$: que seja segundo enumerável e de Hausdorff.

Variedade Topológica. Seja $(M,\ \mathcal{M})$ um espaço topológico. Então $(M,\ \mathcal{M})$ é uma **variedade topológica** de dimensão n se as três propriedades a seguir são satisfeitas:

1. para cada $p \in M$, existe uma carta local n-dimensional $(U,\ x)$ de $(M,\ \mathcal{M})$ com $p \in U$;
2. $(M,\ \mathcal{M})$ satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade;
3. $(M,\ \mathcal{M})$ é de Hausdorff.

1. $\mathbb{R}^n$ é obviamente uma variedade topológica n-dimensional. Nesse caso, precisamos de uma única carta para cobrir todo o espaço: $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
2. Podemos provar que a esfera unitária n-dimensional

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

é uma variedade topológica n-dimensional.

Para o ponto $x = (1,\ 0, \cdots,\ 0) \in S^n$, o conjunto $\{(x_1,\ \cdots,\ x_n) \in S^n \mid x_1 > 0\}$ é uma vizinhança com as propriedades requeridas, como vemos pela projeção ortogonal no hiperplano coordenado em $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por $x_1 = 0$. Para qualquer outro ponto $x \in S^n$, há uma rotação levando x para o ponto $(1,\ 0, \cdots,\ 0)$. Tal rotação é um homeomorfismo de S^n e, portanto, x também possui a carta requerida.

3. Qualquer espaço discreto é uma variedade topológica 0-dimensional.

4. A esfera S^1 é uma variedade topológica 1-dimensional.

5. O toro e a garrafa de Klein são variedades topológicas 2-dimensionais (falaremos mais sobre esses exemplos em breve).

6. Se M é uma variedade topológica n-dimensional, então qualquer subconjunto aberto de M também é uma variedade topológica n-dimensional. A demonstração desse fato é imediata.

Seja M é uma variedade topológica de dimensão m e seja N é uma variedade topológica de dimensão n, então o espaço produto $M \times N$ é uma variedade topológica de dimensão $m + n$.

A proposição decorre do fato de que, dados abertos $U_m \subset \mathbb{R}^m$ e $U_n \subset \mathbb{R}^n$, o produto $U_m \times U_n$ é um aberto em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Em geral, as variedades topológicas podem ser equipadas com alguma estrutura adicional. Uma classe importante de variedades é a classe formada por variedades diferenciáveis (ou suaves). Uma variedade suave é uma variedade topológica munida de uma estrutura diferenciável. Mais precisamente, um **atlas suave** para $(M,\ \mathcal{M})$ é uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de cartas locais n-dimensionais que também satisfaz a *condição de compatibilidade*: as aplicações

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são suaves (C^∞-diferenciável), para todos $\alpha, \beta \in A$ (essa condição é vazia se $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$).

Variedade Suave. Seja $(M,\ \mathcal{M})$ uma variedade topológica n-dimensional. Dizemos que $(M,\ \mathcal{M})$ é uma **variedade suave** de dimensão n se admite um atlas

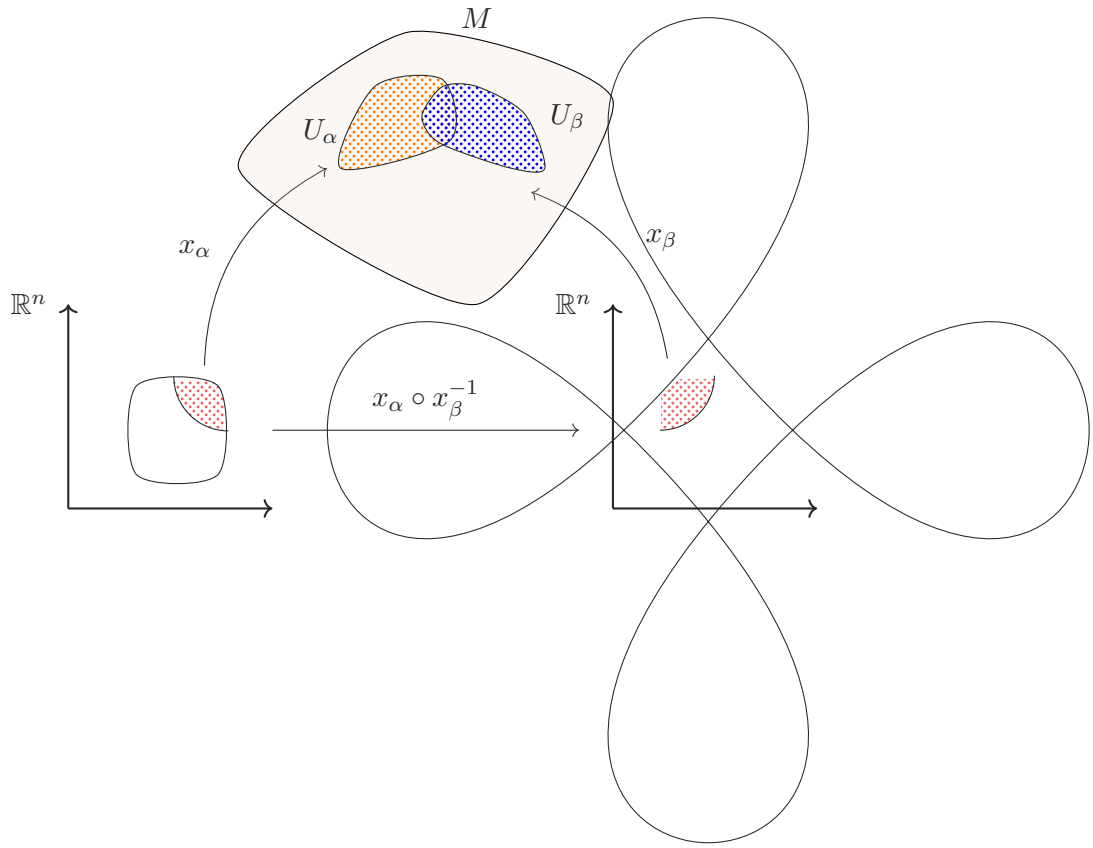


Figura 1.3.: As cartas de uma variedade diferenciável satisfazem as condição de compatibilidade.

diferenciável maximal com relação à condição de compatibilidade acima.

Exemplos de variedades suaves são: o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$, o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$. Para mais detalhes, veja (Lee, J., 2010).

1.2.1. Superfícies

Uma variedade bidimensional é denominada **superfície**. O exemplo mais simples de uma superfície compacta é a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Outro exemplo importante de superfície é o toro. O toro pode ser definido precisamente do modo a seguir. Seja X o quadrado unitário fechado no plano $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Então, um toro é qualquer espaço homeomorfo ao espaço quociente de X obtido identificando-se os lados opostos do quadrado de acordo com as seguintes regras:

$$(0, y) \sim (1, y) \ , \quad \text{para } \ 0 \leq y \leq 1,$$

$$(x, 0) \sim (x, 1) \ , \quad \text{para } \ 0 \leq x \leq 1 \ .$$

É conveniente representar simbolicamente como essas colagens são feitas através de um diagrama como na Figura 1.4. Os lados a serem identificados são marcados com a mesma letra do alfabeto, e as identificações devem ser feitas de forma que as direções indicadas pelas setas coincidam.

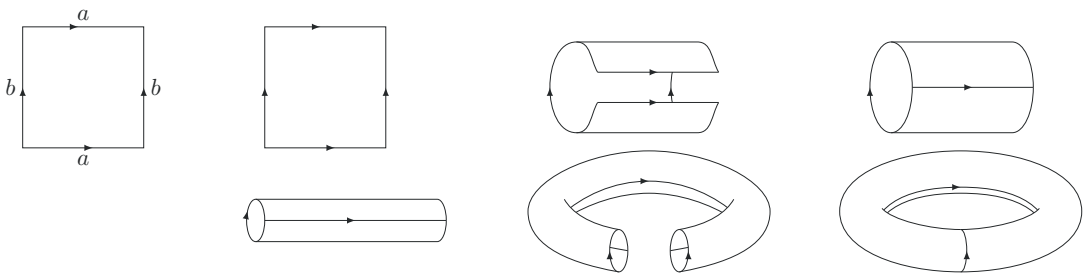


Figura 1.4.: Construção do toro

Nosso próximo exemplo de uma superfície compacta é o plano projetivo. Este é uma superfície compacta que não é homeomorfa a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}^3$, o que torna a sua visualização um pouco mais difícil. O espaço quociente da 2-esfera, $\mathbb{S}^2$, obtido pela identificação de cada par de pontos diametralmente opostos é chamado de **plano projetivo**. Também nos referiremos a qualquer espaço homeomorfo a este espaço quociente como plano projetivo.



Seja $H = \{(x, y, x) \in \mathbb{S}^2 | z \leq 0\}$ o hemisfério inferior fechado de $\mathbb{S}^2$. É claro que, para cada par de pontos diametralmente opostos em $\mathbb{S}^2$, pelo menos um ponto está em H. Se ambos os pontos estão em H, então eles estão no equador, que é a fronteira de H. Assim, poderíamos também ter definido o plano projetivo como o espaço quociente de H obtido identificando pontos diametralmente opostos na fronteira de H. Como H é obviamente homeomorfo ao disco unitário fechado E^2,

$$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

o espaço quociente de E^2 obtido pela identificação de pontos diametralmente opostos na fronteira é um plano projetivo. Isso pode ser visualizado projetando o hemisfério superior de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Podemos ainda substituir E^2 por qualquer espaço homeomorfo, por exemplo, um quadrado. Assim, um plano projetivo é obtido identificando-se os lados opostos de um quadrado conforme indicado na Figura 1.5.

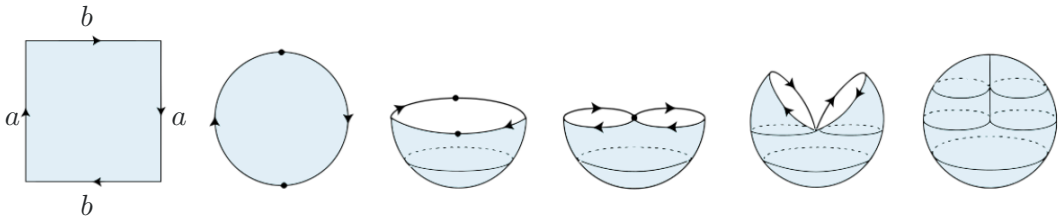


Figura 1.5.: Construção de um plano projetivo

Uma **garrafa de Klein** é qualquer espaço homeomorfo à superfície obtida ao identificar os lados de um quadrado unitário como na Figura 1.6.

Um diagrama planar é um polígono com $2n$ arestas no qual pares de arestas são identificados com a mesma letra e com uma orientação. Na topologia quociente, as arestas com os mesmos rótulos são identificadas ou coladas.

Os diagramas planares da esfera, do toro, da garrafa de Klein e do plano projetivo, dão origem às seguintes palavras:

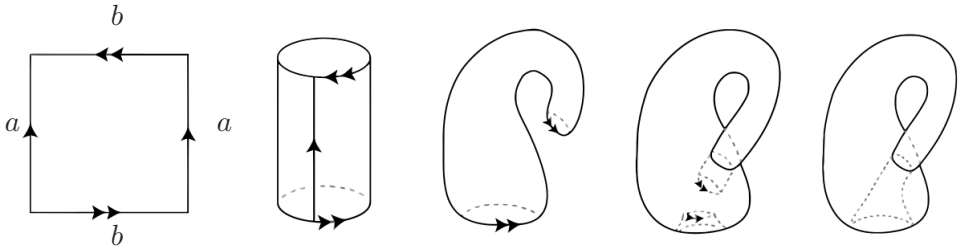


Figura 1.6.: Construção de uma garrafa de Klein a partir de um quadrado.

Superfície	**Palavra**
Toro	$aba^{-1}b^{-1}$
Garrafa de Klein	$aba^{-1}b$
Esfera	aa^{-1}
Plano projetivo	$abab$

Tabela 1.1.: Representação por palavras a partir do diagrama planar.

Soma Conexa Sejam S_1 e S_2 duas superfícies disjuntas. A **soma conexa** de S_1 e S_2, denotada por $S_1 \# S_2$, é obtida removendo um pequeno disco em cada superfície e, em seguida, colando as duas superfícies ao longo do bordo dos discos. Mais precisamente, escolhemos os subconjuntos $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ de modo que D_1 e D_2 sejam homeomorfos a $\mathbb{R}^2$. Seja S_i' o complemento do interior de D_i em S_i, para $i = 1$ e 2. Escolha um homeomorfismo h do bordo de D_1 no bordo de D_2. Definimos $S_1 \# S_2$ como o espaço quociente de $S_1' \cup S_2'$ obtido identificando-se os pontos x e $h(x)$, para todos os pontos x no bordo de D_1.

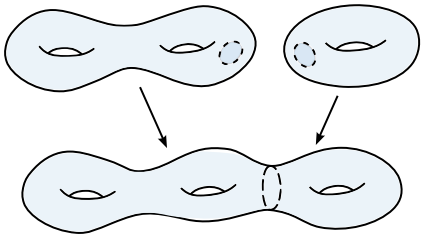


Figura 1.7.: Soma conexa de duas superfícies

Não é difícil provar que $S_1 \# S_2$ é uma superfície. Pode-se provar rigorosamente

que o tipo topológico de $S_1 \# S_2$ não depende da escolha dos discos D_1 e D_2 ou da escolha do homeomorfismo h. Além disso, fica claro, pela nossa definição, que não há distinção entre $S_1 \# S_2$ e $S_2 \# S_1$, ou seja, a operação é comutativa. Não é difícil ver que as superfícies $(S_1 \# S_2) \# S_3$ e $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ são homeomorfas. Isso significa que podemos falar sobre a soma conexa de várias superfícies sem qualquer ambiguidade. Vale ressaltar que a esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$ é o elemento neutro da soma conexa:

$$(\mathbb{S}^2 \# S) \approx (S \# \mathbb{S}^2) = S,$$

para qualquer superfície S.

Classificação das Superfícies Compactas. Qualquer superfície compacta é homeomorfa ou a esfera, ou a uma soma conexa de toros, ou a uma soma conexa de planos projetivos.

- A soma conexa de g toros será denotada por

$$\Sigma_g := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ vezes}}, \text{ para } g \in \mathbb{N}.$$

  Para $g = 0$ definimos $\Sigma_0 := \mathbb{S}^2$. Desta maneira obtemos um monoide isomorfo a $\mathbb{N}$, pois $\Sigma_g \# \Sigma_{g'} \approx \Sigma_{g+g'}$

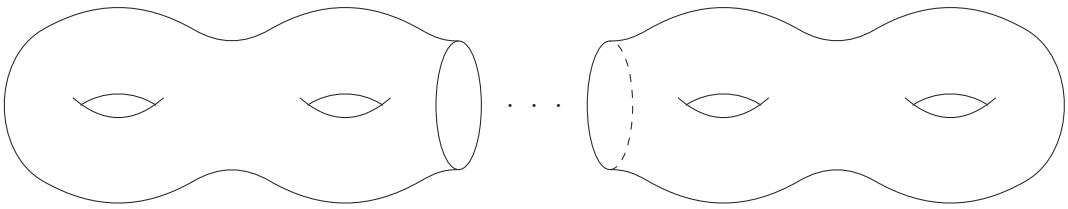
- A soma conexa de g espaços projetivos será denotada por

$$P_g := \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{g \text{ vezes}}, \text{ para } g \in \mathbb{N}.$$

  Para $g = 0$ definimos $P_0 := \mathbb{S}^2$. Novamente, obtemos um monoide isomorfo a $\mathbb{N}$.

Superfícies Σ_g

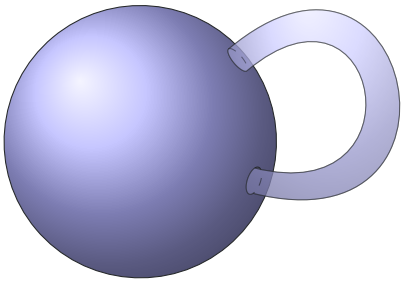
A superfície Σ_g é um toro generalizado, com g "buracos".



O número g é dito **gênero da superfície** Σ_g e coincide com o número máximo de círculos mergulhados na superfície que podem ser removidos sem tornar a superfície desconexa. Por exemplo, na esfera, um corte ao longo de qualquer círculo divide a superfície em duas componentes e assim a esfera tem gênero 0. Por outro lado, num toro podemos cortar ao longo de um círculo vertical ou horizontal de modo que a superfície resultante ainda é conexa, mas não é possível fazer um segundo corte, logo o toro tem gênero 1.

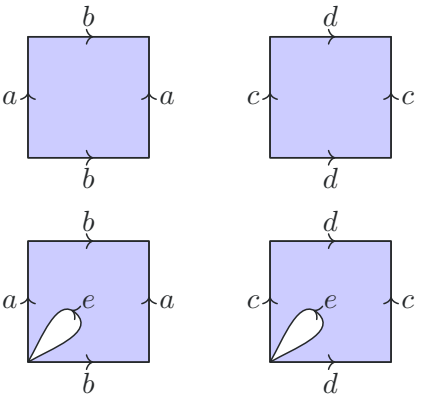
Observamos que uma superfície $S\#\mathbb{T}^2$ é homeomorfa à que se obtém acrescentando um cilindro a S da seguinte maneira:

- escolhemos dois discos $D_1, D_2 \subset S$ tais que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$;
- removemos o interior dos discos;
- identificamos os bordos de D_1 e D_2 com os bordos do cilindro.

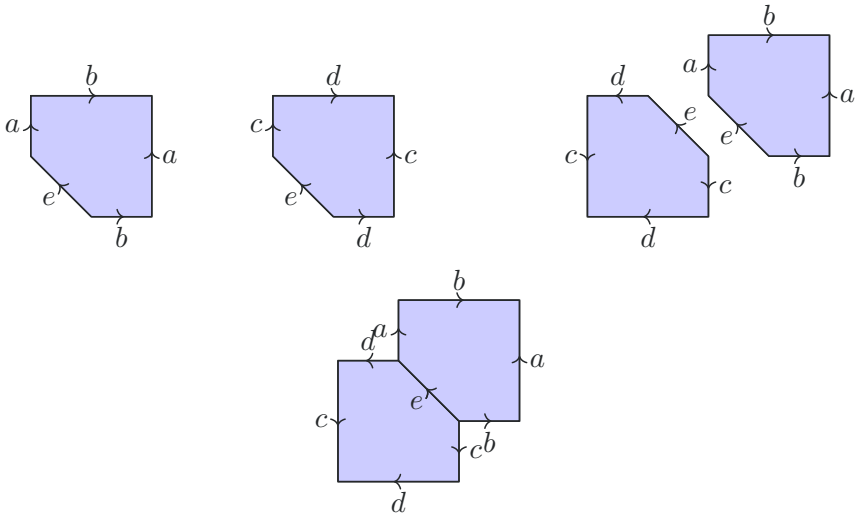


Repetindo a construção anterior, por indução, temos que Σ_g é homeomorfa a uma esfera na qual foram colados g cilindros.

Podemos também descrever estas superfícies através de um diagrama planar. Como já descrevemos a esfera e o toro através de diagramas, passemos a descrição das superfícies de gênero maior. A soma conexa de dois toros pode ser descrita da seguinte maneira. Removemos um disco contendo um vértice qualquer nos dois retângulos que representam os toros.

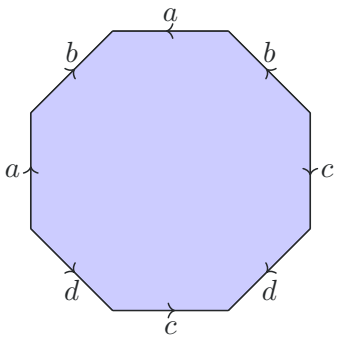


E identificamos os bordos dos dois discos removidos, ou seja, as arestas e.



Assim, obtemos o diagrama planar que é um octágono cujos lados devem ser quocientados conforme as identificações representadas pela palavra

$$aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}.$$

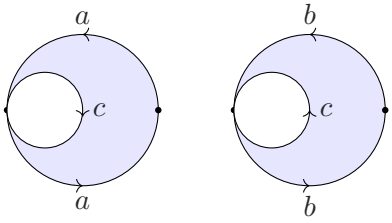


A técnica apresentada anteriormente pode ser repetida de modo a descrever a superfície Σ_g pelo diagrama planar que é o polígono de $4g$ lados com as colagens dadas pela palavra

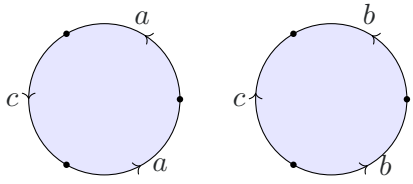
$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

Superfícies P_g

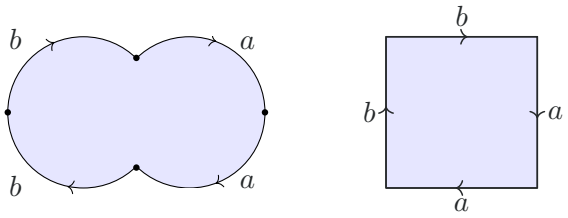
A soma conexa de dois planos projetivos pode ser descrita de maneira análoga a realizada anteriormente: removemos um disco contendo um dos vértices nos dois discos que representam os planos projetivos.



E observamos que os diagramas anteriores são equivalentes aos seguintes:



Finalmente, identificamos os bordos dos dois discos removidos, ou seja, as arestas nomeadas de c.



Dessa forma, obtemos o diagrama planar dado por um retângulo quocientado conforme as identificações indicadas e representado pela palavra

$$aabb.$$

De maneira análoga, a superfície P_g pode ser representada pelo diagrama planar dado pelo polígono de $2g$ lados e com colagens dado pela palavra:

$$a_1 a_1 \cdots a_g a_g.$$

Parte I.

Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento

2 Homotopia

Embora o conceito de homeomorfismo seja a noção natural de equivalência em topologia, em diversas circunstâncias se revela mais útil e ou mais prático estudar propriedades invariantes por deformações não necessariamente bijetivas, que "mantêm a forma" do espaço, mesmo que "esmagando" ou "esticando" algumas partes.

Por exemplo, o anel circular

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

não é homeomorfo ao círculo unitário $\mathbb{S}^1$, todavia "tem a mesma forma", pois é possível contrair continuamente A a $\mathbb{S}^1$. Uma forma de visualizar essa contração é contrair A de ambos os lados ao longo das direções radiais, ou seja, ao longo das semirretas de $\mathbb{R}^2$ que partem da origem. Veja Figura 2.1.

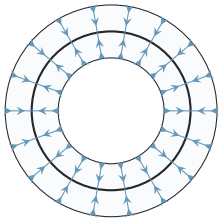


Figura 2.1.: O anel circular e o círculo são homotópicos.

Para exprimir esta ideia formalmente, é necessário introduzir o conceito de homotopia.

Neste capítulo, trataremos das noções básicas sobre homotopia, que serão fundamentais para a construção do grupo fundamental de um espaço topológico. Além

disso, em todos os resultados e definições, o intervalo fechado $[0,1]$ será denotado por I.

2.1. Aplicações Homotópicas

Homotopia. Sejam X e Y espaços topológicos, uma **homotopia** de X para Y é uma aplicação contínua $H : X \times [0,1] \to Y$. Normalmente, escreveremos $H_t(x) \coloneqq H(x,t)$.

Definimos abaixo a relação de homotopia entre funções.

Funções Homotópicas. Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas entre espaços topológicos. Dizemos que f e g são **aplicações homotópicas** se existir uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ que verifica

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = g(x), \quad \text{para todo } \ x \in X.$$

Nesse caso, dizemos que H é uma **homotopia** entre f e g.

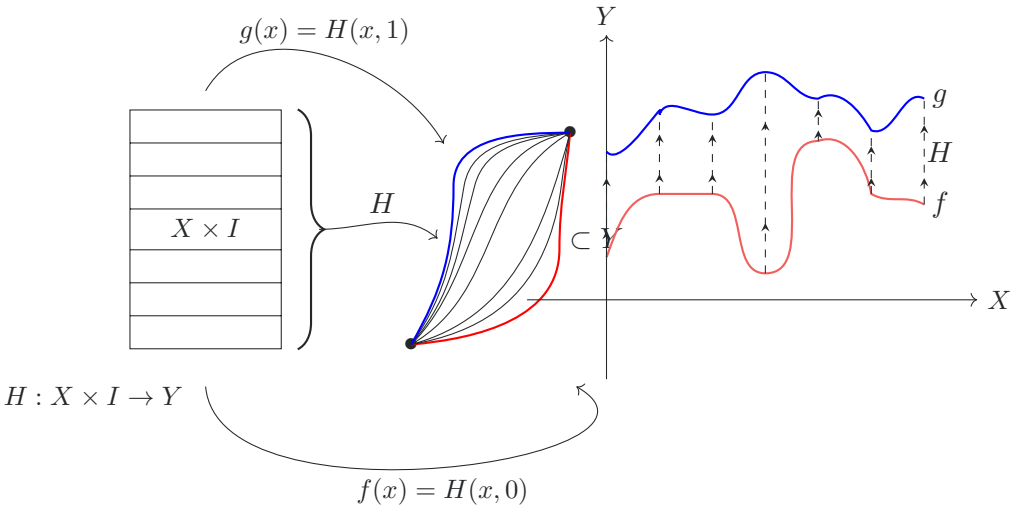
Se f e g são aplicações homotópicas, escrevemos $f \simeq g$, ou ainda, $H : f \simeq g$, em que H denota uma homotopia entre f e g.

Intuitivamente, podemos pensar na homotopia como um processo de deformação contínua da aplicação f na aplicação g. De fato, veja que uma homotopia $H : X \times I \to Y$ é uma família contínua de aplicações contínuas $H_t : X \to Y$, $H_t(x) \coloneqq H(x,t)$, parametrizada pelo intervalo $I = [0,1]$. Nesse sentido, se H é uma homotopia entre f e g com $H_0 = f$ e $H_1 = g$, então a família $(H_t)_{t \in I}$ começa em f e termina em g.

Exemplo 2.1.

Sejam $X = \mathbb{S}^1$ e $Y = \mathbb{R}^2$. Considere $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ o mergulho canônico de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^2$, i.e. $f(x,y) = (x,y)$, e $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ a função constante com valor $(0,0)$. As funções f e g são homotópicas, sendo $H(x,t) \coloneqq (1-t)f(x)$ uma homotopia entre elas.

◁



(a) Homotopia entre duas funções. (b) Duas funções homotópicas.

Figura 2.2.: Homotopia entre funções

Exemplo 2.2.

Sejam $f, g : X \to Y$ funções constantes com imagens $p, q \in Y$, respectivamente. Então f e g são homotópicas se, e somente se, p e q pertencem à mesma componente conexa por caminhos de Y. De fato, se $\alpha : I \to Y$ é um caminho em Y ligando p a q (ou seja, $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$), a aplicação $H : X \times I \to Y$, dada por $H(x, t) := \alpha(t)$, é uma homotopia entre f e g. Reciprocamente, se H é uma homotopia entre f e g, então para qualquer $x_0 \in X$ fixado, $\alpha(t) := H(x_0, t)$ define um caminho que liga p a q.

◁

Vale ressaltar o papel fundamental que o contradomínio exerce quando se trata de homotopias. Como vemos nos próximo exemplo.

Exemplo 2.3 — Funções não homotópicas.

As funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 1$ e $g(x) = -1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, são homotópicas, como verificamos no exemplo anterior. Se restringirmos o contradomínio para $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dadas por $f(x) = 1$ e $g(x) = -1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, não são homotópicas, já que 1 e -1 pertencem a componentes conexas distintas de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

◁

No caso particular em que Y é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, podemos mostrar que quaisquer duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são homotópicas.

Convexo. Um subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **convexo** se, dados $x, y \in D$ quaisquer, o segmento de reta ligando x a y está contido em D, ou seja, se $(1-t)x + ty \in D$, para todo $t \in [0, 1]$.

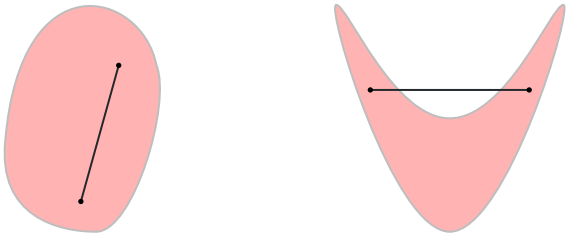


Figura 2.3.: Exemplos de conjunto convexo e de conjunto não convexo

Exemplo 2.4 — Homotopia em convexo.

Considere $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Então quaisquer duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ são homotópicas.

De fato, considere a aplicação $H : X \times I \to Y$ dada por

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Veja que H está bem definida, pois Y é convexo, logo $(1 - t)f(x) + tg(x) \in Y$ para quaisquer $x \in X$ e $t \in I$. Além disso,

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \\ H(x, 1) = g(x). \end{cases}$$

Portanto, H é uma homotopia entre f e g. Veja Figura 2.4.

◁

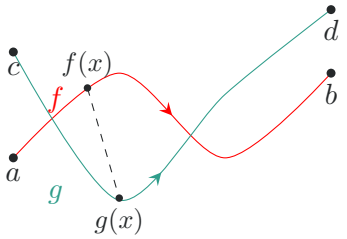


Figura 2.4.: Homotopia linear

A homotopia definida desta maneira é chamada de **homotopia linear**, e é surpreendentemente útil considerando sua simplicidade. Vale a pena notar que, quando bem definida, é sempre homotopia (por ser uma composição de funções contínuas).

Note que se Y for um conjunto estrelado ao invés de convexo no exemplo acima, a mesma propriedade é verificada e a demonstração é totalmente análoga.

A seguir, apresentamos condições suficientes para que duas aplicações sejam homotópicas na esfera.

Homotopias na esfera $\mathbb{S}^n$. Sejam $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ funções contínuas satisfazendo $f(x) \neq -g(x)$, para todo $x \in X$, ou seja, $f(x)$ e $g(x)$ não são pontos antipodais. Então, $f \simeq g$.

Demonstração. Defina a aplicação $H : X \times I \to \mathbb{S}^n$ como a projeção da interpolação linear na esfera:

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$

Por definição, a imagem $H(x,t)$ está sempre em $\mathbb{S}^n$. Portanto, basta verificar que H está bem definida.

Com efeito, as imagens de f e g são pontos da esfera unitária e, portanto, são vetores de norma 1. Se $f(x)$ e $g(x)$ não são pontos antipodais, então existem duas opções:

- $f(x) = g(x)$, mas como $t > 0, 1-t > 0$ é impossível que $(1-t)f(x)+tg(x) = 0$.

- $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes, então nenhuma combinação linear deles com coeficientes diferentes de zero podem somar 0.

Assim, H está bem definida. Claramente H é contínua, pois é a soma, produto e quociente de aplicações contínuas. Então, H é uma homotopia entre f e g.

■

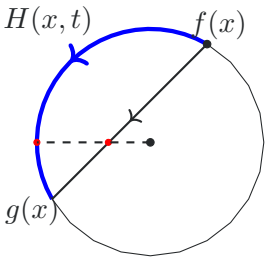


Figura 2.5.: Homotopia entre duas funções dada pela projeção da interpolação linear na esfera.

Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma função contínua.

1. Se f não possui pontos fixos (ou seja, se $f(x) \neq x$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$), então f é homotópica à aplicação antípoda $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $g(x) = -x$.

2. Se f satisfaz $f(x) \neq -x$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$, então f é homotópica à aplicação identidade $id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $id(x) = x$.

Aplicação Homotopicamente Nula. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é dita **homotopicamente nula** se f é homotópica a alguma aplicação constante de X em Y.

Homotopias na esfera $\mathbb{S}^n$. Seja $f : X \to \mathbb{S}^n$ uma função contínua que não é sobrejetora, então f é homotopicamente nula.

Demonstração. Como $f : X \to \mathbb{S}^n$ não é sobrejetora, existe a tal que $-a \notin f(X)$. Considere a função constante $g : X \to \mathbb{S}^n$, $g(x) = a$, para todo $x \in X$. Pela Proposição 2.1, $f \simeq g$. Logo, f é homotopicamente nula. ■

Exemplo 2.5 — Homotopicamente nula em convexo.

Considere Y um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, qualquer aplicação contínua $f : X \to Y$ é homotopicamente nula. Veja o Exemplo 2.4.

◁

Uma propriedade crucial de homotopia é que ela induzem uma relação de equivalência, como apresentamos a seguir. **Equivalência.** Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia $f \simeq g$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de X em Y.

Demonstração. Vamos provar que a relação $\simeq$ é reflexiva, simétrica e transitiva:

1. Dada uma função contínua $f : X \to Y$, a aplicação $H : X \times I \to Y$, dada por $H(x,t) = f(x)$, é uma homotopia entre f e f. Logo, $\simeq$ é reflexiva.

2. Dadas funções contínuas $f, g : X \to Y$ e relacionadas por uma homotopia $H : f \simeq g$, considere a aplicação $F : X \times I \to Y$ definida por $F(x,t) := H(x, 1-t)$. Veja que F é uma homotopia entre g e f. Logo, $\simeq$ é simétrica.

3. Dadas funções contínuas $f, g, h : X \to Y$ relacionadas por homotopias $F : f \simeq g$, $G : g \simeq h$, definimos $H : X \times I \to Y$ por

$$H(x,t) := \begin{cases} F_{2t}(x) = F(x, 2t), & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ G_{2t-1}(x) = G(x, 2t-1), & \text{se } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

   Note que H está bem definida e é contínua pelo Lema da Colagem. Assim, H é uma homotopia entre f e h, ou seja, $H : f \simeq h$. Logo, $\simeq$ é transitiva.

■

Para visualizarmos o que está acontecendo com a homotopia definida na demonstração do item 3 da proposição anterior, podemos considerar o caso particular em que $X = [0,1]$. Veja a Figura 2.6.

2.1.1. Equivalência Homotópica

Voltando ao exemplo do início do capítulo. Nesse exemplo, temos que o anel circular

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

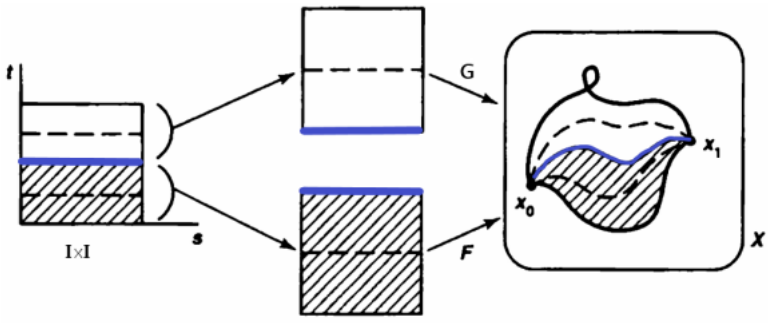


Figura 2.6.: Composição de homotopias

"tem a mesma forma" de $\mathbb{S}^1$, no sentido que podemos contrair continuamente A a $\mathbb{S}^1$ ao longo das direções radiais. Veja Figura 2.7.

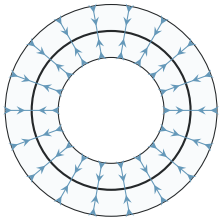


Figura 2.7.: O anel circular e o círculo são homotópicos.

Esse exemplo motiva a seguinte definição:
Sejam X um espaço topológico e A um subespaço de X.

a. Uma aplicação contínua $r : X \to A$ é dita uma **retração** de X em A se $r|_A = id_A$. Em outras palavras, uma retração é uma aplicação sobrejetora $r : X \to A$ tal que $r^2 = r$. Nesse caso, dizemos que A é um **retrato** de X.

b. Uma aplicação contínua $r : X \to A$ é dita um **retrato por deformação** de X em A se r é uma retração e $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$, em que $i : A \to X$ é a inclusão. Nesse caso, dizemos que A é um **retrato por deformação** de X.

Equivalentemente, A é um retrato por deformação de X se existe homotopia contínua $H\colon X \times I \to X$ tal que, para todo $x \in X$ e $a \in A$,

$$H(x,0) = x, \quad H(x,1) \in A, \quad \text{e} \quad H(a,1) = a.$$

Se, além disso, $H(a,t) = a$, para todo $a \in A$ e $t \in I$, então dizemos que A é um **retrato de deformação forte** de X.

Exemplo 2.6 — $\mathbb{S}^n$ é um retrato de deformação de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Considere a retração dada pela projeção radial:

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} &\to \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{||x||}. \end{aligned}$$

Seja $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $i(x) = x$, a inclusão . Claramente, $r \circ i = id_{\mathbb{S}^n}$. Além disso, a aplicação contínua $H : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \times I \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, definida por

$$H(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{||x||},$$

é uma homotopia entre $i \circ r$ e $id_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$. Logo, $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$. Veja ainda que $H(a,t) = a$, para todo $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $t \in I$. Portanto, $\mathbb{S}^{n-1}$ é um retrato de deformação forte de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

◁

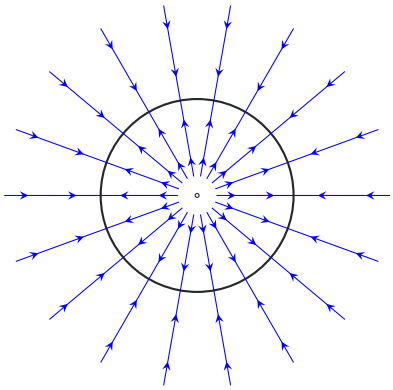


Figura 2.8.: A esfera unitária $\mathbb{S}^n$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Veremos mais adiante que a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ não é um retrato de deformação da bola fechada que a tem como bordo, $\overline{B^n}$.

Exemplo 2.7.

O círculo unitário ($\mathbb{S}^1$) pode ser visto como retrato de deformação de vários espaços topológicos. A Figura 2.9 mostra alguns exemplos de tais espaços.

◁

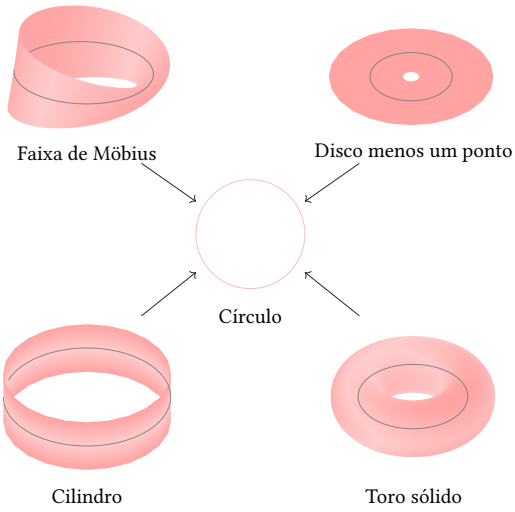


Figura 2.9.: Retratos por deformação.

Um dos principais problemas com o conceito de retração por deformação é que ele não constitui uma relação de equivalência. No entanto, as retrações por deformação podem ser vistas como um caso particular de uma classe mais ampla de transformações conhecidas como equivalências homotópicas. O conceito de equivalência homotópica desempenha um papel fundamental na Topologia Algébrica.

Equivalência homotópica. Dados espaços topológicos X e Y, uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é dita uma **equivalência homotópica** se existir $g : Y \to X$ contínua tal que

$$g \circ f \simeq id_X \quad \text{e} \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

Nesse caso, dizemos que g é a **inversa homotópica** de f e que os espaços X e Y possuem o mesmo **tipo de homotopia**.

Quando X e Y têm o mesmo tipo de homotopia, escrevemos $X \simeq Y$ para denotar tal fato.

Veja que a relação de equivalência homotópica (ou tipo de homotopia) é uma relação de equivalência entre espaços topológicos, ou seja,

$$X \simeq X, \qquad X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X, \qquad X \simeq Y,\ Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z.$$

Se $A \subset X$ é um retrato por deformação de X, então A é homotopicamente equivalente a X, ou seja, A e X têm o mesmo tipo de homotopia.

Demonstração. Considere uma retração $r : X \to A$ e a inclusão $i : A \to X$. Então $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ e, por hipótese, $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Consequentemente, A e X são homotopicamente equivalentes. ∎

Em outras palavras, todo retrato por deformação (ou ainda, todo retrato por deformação forte) é uma equivalência homotópica. De fato temos que dois espaços são homotopicamente equivalentes se, e somente se, ambos forem homeomorfos a retratos por deformação de um espaço maior (Fox, 1943).

Claramente, todo homeomorfismo é uma equivalência homotópica. No entanto, a recíproca não é verdadeira, como visto nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.8.

a. Um espaço convexo X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

b. A esfera unitária $\mathbb{S}^n$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. De fato, $\mathbb{S}^n$ é um retrato de deformação de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ como provamos no Exemplo 2.6. A retração dada pela projeção radial

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{x}{||x||}. \end{aligned}$$

é uma equivalência homotópica com inversa homotópica dada pela incusão $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

c. Seja $\overline{B^{n+1}}$ bola unitária fechada centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{B^{n+1}} \setminus \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{S}^n$. Basta aplicar um argumento semelhante ao item anterior.

d. A esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$, em que p e q são os polos norte e sul, respectivamente. De fato, $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ via a projeção estereográfica. Logo, $\mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pelo item (b), segue que

$$\mathbb{S}^n \setminus \{p, q\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}.$$

◁

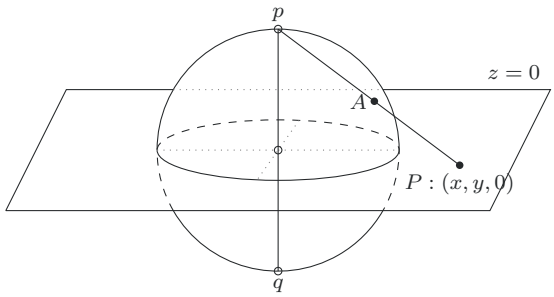


Figura 2.10.: A projeção estereográfica é um homeomorfismo entre $\mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exemplo 2.9.

O toro $\mathbb{T}^2$ menos um ponto tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (“figura oito”).

◁

Um dos grande problemas em teoria da homotopia é decidir quando dois espaços possuem o mesmo tipo de homotopia. Em Topologia Algébrica, definimos invariantes homotópicos que nos auxiliam nessa questão.

2.1.2. Espaços Contráteis

Contrátil. Um espaço topológico X é dito **contrátil** se tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

O resultado a seguir fornece uma caracterização de espaços contráteis.

Um espaço topológico X é contrátil se, e somente se, id_X é homotópica a uma aplicação constante.

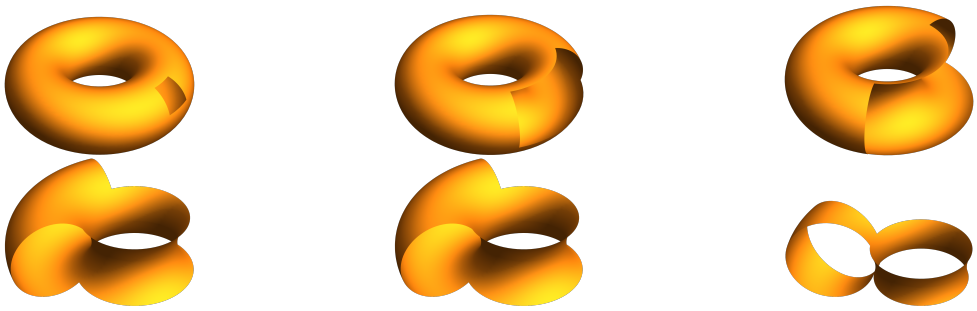


Figura 2.11.: O toro menos um ponto tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $f : X \to \{p\}$ uma equivalência homotópica entre X e um ponto p e seja $g : \{p\} \to X$ a inversa homotópica. Então, $g \circ f \simeq id_X$, em que $g \circ f$ é uma aplicação constante.
($\Leftarrow$) Se id_X é homotopicamente nula, então existe uma função constante $g : X \to X$, $g(x) = c$, que é homotópica a id_X. Tome $Y = \{c\}$, e considere a inclusão $i : Y \to X$ e a aplicação constante $f : X \to Y$, temos que $f \circ i = id_Y$ e $i \circ f = g \simeq id_X$. Logo, X é homotopicamente equivalente a um ponto, ou seja, contrátil. ∎

Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

Demonstração. Seja X um espaço contrátil e seja H uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $x \mapsto p$, para todo $x \in X$ e para $p \in X$ fixado. Então, para cada ponto $x \in X$, a correspondência $t \to H(x, t)$ define um caminho ligando x a p. ∎

Convexos e estrelados são contráteis. Pelo Exemplo 2.5, sabemos que todas as aplicações que tem como contradomínio um espaço convexo ou estrelado são homotopicamente nulas, portanto, é claro que qualquer convexo ou estrelado é contrátil.

Se X ou Y é contrátil, então qualquer aplicação contínua $f : X \to Y$ é homotópica a uma aplicação constante.

Demonstração. Suponha que X é contrátil e seja $H : X \times I \to X$ uma homotopia entre id_X e uma aplicação constante $c : X \to X$. Dada uma função contínua $f : X \to Y$, $f \circ H : X \times I \to Y$ é uma homotopia entre f e a aplicação constante $f \circ c$.

Por outro lado, suponha que Y é contrátil e seja $H : Y \times I \to Y$ uma homotopia entre id_Y e uma aplicação constante $c : Y \to Y$. Dada uma função contínua $f : X \to Y$, aplicação $F : X \times I \to Y$ dada por $F(x,t) = H(f(x),t)$ é uma homotopia entre f e uma aplicação constante $c \circ f$. ∎

Sejam X e Y espaços topológicos.

a. Se X é contrátil e Y é conexo por caminhos, então duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : X \to Y$ são homotópicas.

b. Se Y é contrátil, então, para qualquer X, duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : X \to Y$ são homotópicas.

Uma pergunta que surge é se $\mathbb{S}^n$ é contrátil. Nossa intuição diz que não. A demonstração desse fato não é simples, mas a Topologia Algébrica nos dá ferramentas apropriadas para responder tal pergunta, o que será feito no Capítulo 3.

2.2. Homotopia Relativa

Às vezes, nos interessa que a homotopia entre duas funções mantenha algum conjunto invariante.

Homotopia. Sejam X e Y espaços topológicos e $A \subseteq X$ um subespaço. Uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Y$ de X para Y é dita uma **homotopia relativa** para A (ou rel A) se

$$H(a,t) = H(a,0), \qquad \forall a \in A,\ \forall t \in [0,1],$$

i.e. $H_0(a) = H_t(a)$, para todo $a \in A$ e para todos $t \in [0,1]$.

Definimos abaixo o conceito de homotopia relativa entre funções.

Funções Homotópicas relativamente a um subespaço. Dadas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$. Dizemos que f e g são **aplicações homotópicas relativamente a um subespaço** $A \subseteq X$ se existir uma homotopia $H : X \times [0,1] \to Y$

que verifica

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = g(x), \quad \text{para todo } x \in X$$

e

$$H(a,t) = f(a) = g(a), \quad \text{para quaisquer } a \in A \text{ e } t \in I.$$

Nesse caso, dizemos que H é uma **homotopia relativa** entre f e g.

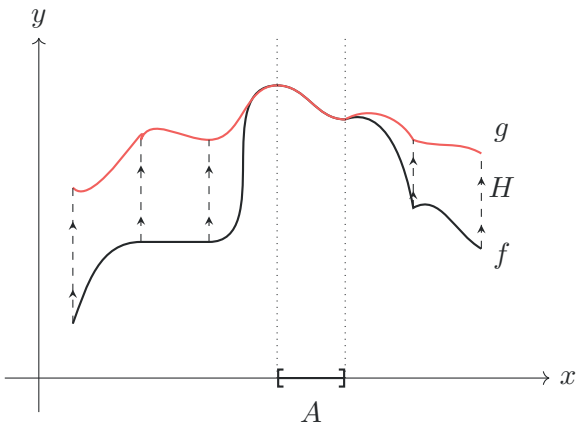


Figura 2.12.: Homotopia relativa.

Se f e g são aplicações homotópicas relativamente a A, escrevemos $f \simeq g \ (\text{rel } A)$, ou ainda $H : f \simeq g \ (\text{rel } A)$, em que H denota uma homotopia relativa entre f e g.

Exemplo 2.10.

A aplicação identidade $id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ é homotópica à aplicação $r : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, dada por $r(x) = \dfrac{x}{||x||}$, relativamente ao subespaço $\mathbb{S}^{n-1}$. De fato, $H : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \times I \to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ definida por

$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{||x||}$$

fornece tal homotopia relativa, como vimos no Exemplo 2.6.

◁

Exemplo 2.11.

Considere $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ as funções que parametrizam o semicírculo superior e inferior de $\mathbb{S}^1$, respectivamente, dadas por

$$f(x) = (cos(\pi x), sen(\pi x)) \quad \text{e} \quad g(x) = (cos(\pi x), -sen(\pi x)).$$

Seja $A = \{0,1\}$. Neste caso, f e g não são homotópicas relativamente a A, embora sejam homotópicas. Isso ocorre pois qualquer homotopia que deixe fixo os pontos 0 e 1 teria que passar pela origem. Veja Figura 2.13.

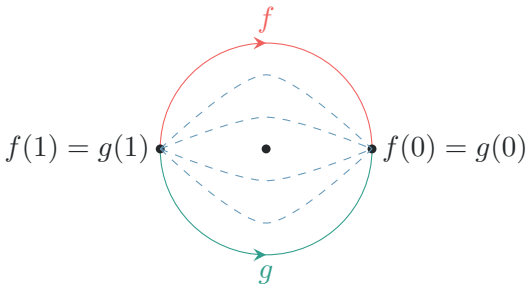


Figura 2.13.: f não é homotópica a g relativamente a A.

Sendo assim, se tomarmos $Y = \mathbb{R}^2$, então f e g são homotópicas relativamente a A.

◁

2.3. Homotopia de Caminhos

Um caso particular muito importante de homotopia é a homotopia de caminhos. Um **caminho** em X é uma aplicação contínua $\alpha : J \to X$, definida em um intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Se $\alpha(s_0) = \alpha(s_1)$, dizemos que o caminho é **fechado**, ou ainda, **laço com base em** x_0, onde $x_0 = \alpha(s_0) = \alpha(s_1)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que J é o intervalo $I = [0,1]$.

Exemplo 2.12.

Dado um espaço topológico X e um ponto $x_0 \in X$, a aplicação

$$\begin{aligned} e_{x_0} : I &\to X \\ t &\mapsto e_{x_0}(t) := x_0 \end{aligned}$$

é um caminho contínuo em X, denominado **caminho constante**.

◁

Exemplo 2.13.

Dado um caminho $\alpha : I \to X$, podemos considerar o **caminho inverso** $\alpha^{-1} : I \to X$ definido por $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$. Note que o ponto inicial de α^{-1} é o ponto final de α e o ponto final de α^{-1} é o ponto inicial de α. Seja $j : I \to I, j(s) = 1-s$. Então, $a^{-1} = a \circ j$.

◁

Como o intervalo I é contrátil, qualquer caminho $\alpha : I \to X$ é homotópico a uma aplicação constante. Sendo assim, a Teoria de Homotopia é mais relevante no contexto de caminhos quando consideramos que os extremos dos caminhos sejam mantidos fixos durante toda a homotopia.

Homotopia de caminhos com extremidades fixas. Dizemos que dois caminhos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ são **homotópicos com extremidades fixas** se forem homotópicos relativos ao conjunto $\partial I = \{0,1\}$, ou seja, se $\alpha \simeq \beta$ (rel $\{0,1\}$).

Em outras palavras, dois caminhos $\alpha, \beta : I \to X$ são ditos caminhos homotópicos se possuem as mesmas extremidades, isto é, $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$, e se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que, quaisquer que sejam $s, t \in I$, temos

$$\begin{cases} H(s,0) = \alpha(s), & H(s,1) = \beta(s), \\ H(0,t) = x_0, & H(1,t) = x_1. \end{cases}$$

Usaremos a notação $\alpha \cong \beta$ para denotar caminhos homotópicos com extremos fixos.

Em particular, dois caminhos fechados $\alpha, \beta : I \to X$, com $\alpha(0) = \beta(0) = x_0 = \alpha(1) = \beta(1)$, são caminhos homotópicos quando existe uma aplicação contínua

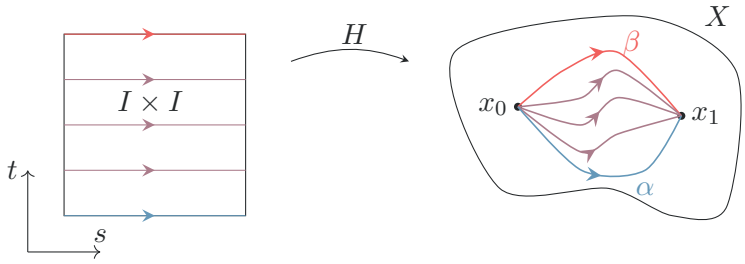


Figura 2.14.: Homotopia entre caminhos com extremidades fixas.

$H : I \times I \to X$ tal que, quaisquer que sejam $s, t \in I$, temos

$$\begin{cases} H(s,0) = \alpha(s), & H(s,1) = \beta(s), \\ H(0,t) = x_0, & H(1,t) = x_0. \end{cases}$$

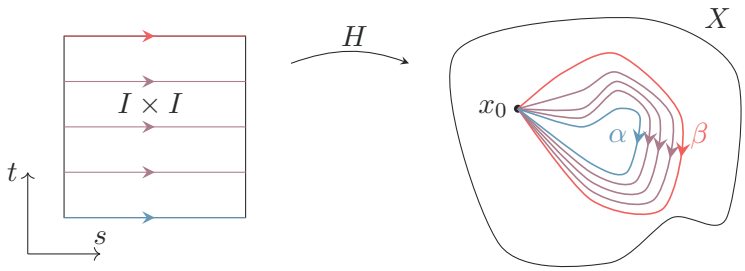


Figura 2.15.: Homotopia de caminhos fechados

No próximo exemplo, mostramos como a homotopia linear produz homotopias relativas.

Exemplo 2.14.

Em $\mathbb{R}^n$, qualquer par de caminhos cujas extremidades coincidem são homotópicos com extremos fixos. De fato, dados dois caminhos $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ que possuem as mesmas extremidades, isto é, $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$, como $\mathbb{R}^n$ é convexo, a homotopia linear $H : I \times I \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + t\beta(s),$$

está bem definida. Além disso:

$$\begin{cases} H(s,0) = \alpha(s), \;\; H(s,1) = \beta(s); \\ H(0,t) = x_0, \;\; H(1,t) = x_1. \end{cases}$$

Segue que $H : \alpha \simeq \beta \; (\text{rel } \partial I)$.

Mais geralmente, em qualquer espaço X homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, quaisquer dois caminhos cujas extremidades coincidam são homotópicos com extremos fixos.

De fato, sejam α, β caminhos em X. Fixado um homeomorfismo $h : X \to \mathbb{R}^n$, temos que $a = h \circ \alpha$, $b = h \circ \beta$ são caminhos em $\mathbb{R}^n$. Como a e b possuem as mesmas extremidades e estão em $\mathbb{R}^n$, eles são homotópicos com extremos fixos. Agora, dada uma homotopia relativa $H : I \times I \to \mathbb{R}^n$, verifica-se que $h \circ H$ é uma homotopia entre α e β relativamente à ∂I.

◁

Homotopia livre entre caminhos fechados. Dois caminhos fechados $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ são ditos **livremente homotópicos** se existir uma homotopia H entre α e β tal que $H_{t_0}(s) = H(s, t_0)$ é um caminho fechado para todo $t_0 \in I$.

Em outras palavras, dois caminhos fechados $\alpha, \beta : I \to X$ são livremente homotópicos quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ tal que, quaisquer que sejam $s, t \in I$, temos

$$H(s,0) = \alpha(s), \quad H(s,1) = \beta(s), \quad H(0,t) = H(1,t).$$

A homotopia de caminhos e homotopia livre também induzem relações de equivalências, como apresentamos a seguir. **Equivalência.** Seja X um espaço topológico.

a. A relação de homotopia de caminhos $\alpha \simeq \beta \; (\text{rel } \partial I)$ é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos em X com mesmos pontos iniciais e finais.

b. A relação de homotopia livre é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos fechados em X com base em um mesmo ponto.

A demonstração desse resultado segue os mesmos passos feitos na Proposição 2.1 e é deixada a cargo do leitor.

O produto de caminhos formaliza o conceito de "unir" dois caminhos, de modo que obtemos um novo caminho que percorre inicialmente o primeiro e posteriormente o segundo.

Produto ou Justaposição da caminhos. Dados $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ caminhos, tais que $\alpha(1) = \beta(0)$, denominamos **justaposição**, **concatenação** ou **produto de caminhos**, de α e β como sendo o caminho definido por:

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2s-1), & \text{se } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Veja que o caminho $\alpha * \beta$ está bem definido, pois $\alpha(1) = \beta(0)$. Além disso, $\alpha * \beta$ é um caminho contínuo em X.

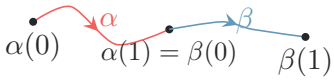


Figura 2.16.: Justaposição de caminhos ou caminho produto $\alpha\beta$.

A justaposição de caminhos induz uma operação $*$, o produto de caminhos.

Claramente, o conjunto dos caminhos em um espaço topológico, munido do produto de caminhos e inverso de caminhos, não satisfaz nenhum dos axiomas de grupo. De fato, o produto $\alpha * \beta$ nem sempre está definido, a associatividade $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ não é válida e não existe elemento neutro para o produto $*$. No entanto, à seguir, mostraremos que tais propriedades de grupos são satisfeitas à menos de homotopia com extremos fixos e de caminhos com $\alpha(1) = \beta(0)$.

Por questão de simplicidade, usaremos a notação $\alpha \cong \beta$ para denotar caminhos homotópicos com extremos fixos.

Propriedades de $*$. A operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. (Associatividade módulo homotopias com extremos fixos.) Dados caminhos α, β, γ tais que $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\beta(1) = \gamma(0)$, então

$$(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma).$$

2. (Elementos neutro à esquerda e à direita módulo homotopias com extremos fixos) Dado um caminho α em X com $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$, temos que

$$e_{x_0} * \alpha \cong \alpha \quad \text{e} \quad \alpha * e_{x_1} \cong \alpha,$$

em que e_{x_i} denota o caminho constante igual a x_i.

3. (Elemento inverso à esquerda e à direita módulo homotopias com extremo fixos) Dado um caminho α em X com extremos com $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$, temos que
$$\alpha * \alpha^{-1} \cong e_{x_0} \quad \text{e} \quad \alpha^{-1} * \alpha \cong e_{x_1},$$
em que α^{-1} é o caminho dado por $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$.

Demonstração. A demonstração de cada uma dessas afirmações baseia-se simplesmente em construir cada homotopia.

1. Note que os dois caminhos $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$ diferem apenas por uma reparametrização:
$$((\alpha*\beta)*\gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(4s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4s-1), & \text{se } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \qquad (\alpha*(\beta*\gamma))(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se} \\ \beta(4s-2), & \text{se} \\ \gamma(4s-3), & \text{se} \end{cases}$$
Para construir uma homotopia entre esses caminhos, faremos uso do diagrama apresentado na Figura 2.17.

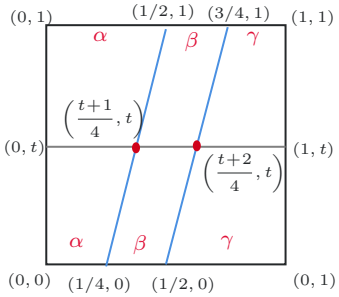


Figura 2.17.: Diagrama para a homotopia entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$.

Intuitivamente, alteramos ligeiramente a parametrização em cada passo $t \in I$, de modo que cada caminho H_t compartilhe a imagem com os caminhos originais, mas alterando a velocidade com a qual cada trecho é percorrido.

Formalmente, considere a seguinte homotopia de caminhos com extremos fixos:
$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{1+t}\right), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s-(1+t)), & \text{se } \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(\frac{4s-(2+t)}{2-t}\right), & \text{se } \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

A aplicação H é contínua, pelo Lema da Colagem, $H(s,0) = (\alpha * \beta) * \gamma(s)$, $H(s,1) = \alpha * (\beta * \gamma)(s)$ e $H(0,t) = \alpha(0)$ e $H(1,t) = \gamma(1)$ que fornece a homotopia desejada entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ e $\alpha * (\beta * \gamma)$.

2. Dado um caminho α, com $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$, temos que

$$(e_{x_0} * \alpha)(s) = \begin{cases} e_{x_0}(2s), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{e} (\alpha * e_{x_1})(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq t \\ e_{x_1}(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$$

Para construir uma homotopia entre os caminhos $e_{x_0} * \alpha$ e α (respectivamente, $\alpha * e_{x_1}$ e α), usamos os diagrama da Figura 2.18.

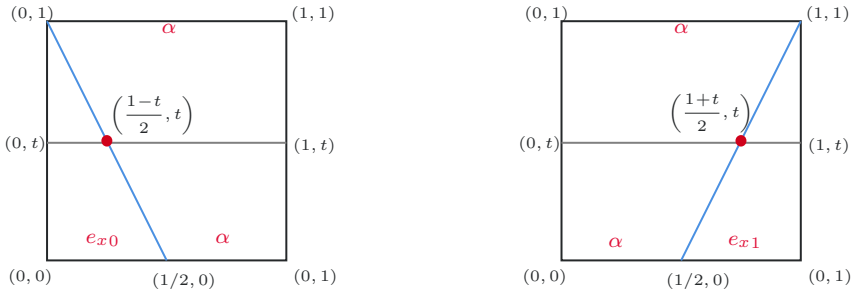


Figura 2.18.: Diagrama para as homotopias para elementos neutros.

As homotopias correspondentes aos diagramas são:

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha\left(\frac{2s+t-1}{1+t}\right), & \text{se } \frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{1+t}\right), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ x_1, & \text{se } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

O leitor pode verificar que as homotopias descritas acima satisfazem as propriedades desejadas.

3. Dado um caminho α em X com extremos com $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$, temos que

$$(\alpha * \alpha')(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha'(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2s), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Geometricamente, α^{-1} e α viajam "na mesma velocidade", mas em direções opostas. Então, $\alpha * \alpha^{-1}$ vai de $\alpha(0)$ a $\alpha(1)$ e retorna pelo mesmo caminho para $\alpha(0)$. Portanto, a homotopia de que vamos considerar é a que "traz o ponto de retorno cada vez mais perto", e no final é uma constante.

Considere o diagrama apresentado na Figura 2.19.

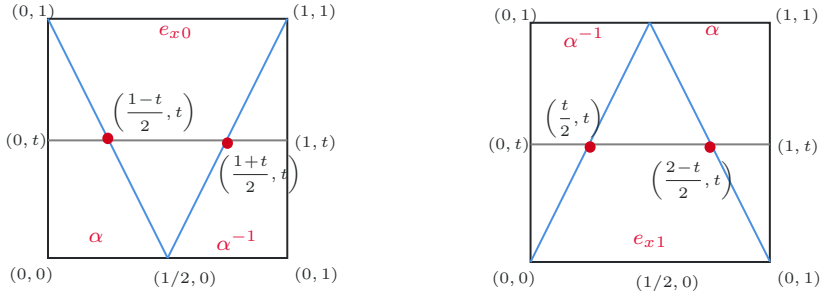


Figura 2.20.: Diagrama para a homotopia entre $\alpha * \alpha^{-1}$ e e_{x_0}.

Neste caso, a homotopia desejada é:

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha(1-t), & \text{se } \frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \alpha^{-1}(2s-1), & \text{se } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$*$ **é invariante por homotopia com extremos fixos.** Dados caminhos $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ em X, tais que $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\alpha'(1) = \beta'(0)$. Assuma que $\alpha \cong \alpha'$ e $\beta \cong \beta'$. Então:

1. $\alpha * \beta \cong \alpha' * \beta'$;
2. $\alpha^{-1} \cong (\alpha')^{-1}$.

Demonstração. A demonstração consiste em construir as respectivas homotopias.

1. Por hipótese, existem homotopias $F : \alpha \simeq \alpha'$ e $G : \beta \simeq \beta'$ com extremos fixos. Defina a aplicação $H : I \times I \to X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2},\ t \in I \\ G(2s-1,t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1,\ t \in I. \end{cases}$$

   Temos que $F(1,t) = G(0,t) = \alpha(1) = \beta(0)$, H está bem definida. Além disso, H é contínua, pois as restrições $H|_{(0,1/2)\times I}$ e $H|_{(1/2,1)\times I}$ são contínuas. Segue que H é uma homotopia de caminhos entre $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$.

2. Considere $L : I \times I \to X$ dada por $L(s,t) = F(1-s,t)$. Veja que L está bem definida e L é uma homotopia de caminhos entre α^{-1} e $(\alpha')^{-1}$.

■

Em uma homotopia $\alpha \cong \beta * \gamma$, é permitido ao ponto final de β (origem de γ) mover-se durante o processo de homotopia. Os extremos de $\beta * \gamma$ (iguais aos de α) é que devem permanecer fixos.

Dado um caminho $\alpha : I \to X$ em um espaço topológico X, vamos denotar por $[\alpha]$ a classe de homotopia (com extremos fixos) de α, ou seja, o conjunto de todos os caminhos em X com mesmos extremos que α e que são homotópicos a α via uma homotopia que mantêm os extremos fixos.

O produto de caminhos $*$ se estende para as classes de homotopia. Mais especificamente, dados caminhos α e β em X com $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Veja que o produto entre as classes de homotopia está bem definido, pela Proposição 2.3. Também podemos definir a classe inversa de $[\alpha]$ como sendo $[\alpha^{-1}]$,

$$[\alpha]^{-1} := [\alpha^{-1}],$$

que está bem definido pela Proposição 2.3.

Denote por $\Pi(X)$ o conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) de caminhos em um espaço topológico X, munido a lei de composição (produto) definido acima. Note que esse produto só está bem definido quando $\alpha(1) = \beta(0)$.

Além disso, $[\alpha][\alpha^{-1}] = [e_{x_0}]$ e $[\alpha^{-1}][\alpha] = [e_{x_1}]$, em que $x_0 = \alpha(0)$ e $x_1 = \alpha(1)$. Portanto, o elemento neutro não é único. Assim, $\Pi(X)$ munido desse produto forma um grupóide, chamado **grupóide fundamental** de X.

Exercícios

Ex. 1 — Mostre que a composição de caminhos satisfaz a seguinte propriedade de cancelamento: Se $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ e $g_0 \simeq g_1$ então $f_0 \simeq f_1$.

Ex. 2 — Seja X um espaço topológico. Mostre que duas funções contínuas $f, g : X \to \mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$, são sempre homotópicas.

Ex. 3 — Sejam $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ aplicações contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Ex. 4 — Mostre que se n é ímpar, então a aplicação antípoda $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $f(x) = -x$, é homotópica à aplicação identidade $id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $id(x) = x$.

Ex. 5 — (Relação entre homotopia e campos de vetores) Um campo vetorial contínuo em $\mathbb{S}^n$ é uma aplicação contínua $V : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que o produto interno $\langle x, V(x)\rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Mostre que se existir um campo vetorial contínuo não nulo em $\mathbb{S}^n$ (i.e. $V(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{S}^n$), então a aplicação antípoda $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é homotópica à identidade.

Ex. 6 — Mostre que uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \to X$ estende-se continuamente para a bola fechada unitária $\overline{B}^{n+1}$ se, e somente se, f é homotópica a uma constante.

Ex. 7 — Mostre que a retração de um espaço contrátil é contrátil.

Ex. 8 — Mostre que $Y \subseteq X$ é um retrato de X se, e somente se, toda aplicação contínua $f : Y \to Z$ admite extensão contínua $\overline{f} : X \to Z$.

Ex. 9 — Mostre que todo retrato por deformação de um espaço X é um retrato de X. Dê exemplo em que a recíproca é falsa.

Ex. 10 — Mostre que A é um retrato por deformação de X se, e somente se, existe

homotopia contínua $H : X \times I \to X$ tal que, para todo $x \in X$ e $a \in A$,

$$H(x,0) = x, \quad H(x,1) \in A, \quad \text{e} \quad H(a,1) = a.$$

Ex. 11 — Mostre que se X é contrátil, então o produto cartesiano $X \times Y$ tem o mesmo tipo de homotopia que Y, i.e. $X \times Y \simeq Y$. Em particular, se X e Y são contráteis, então $X \times Y$ é contrátil.

Ex. 12 — Sejam X e Y espaços que têm o mesmo tipo de homotopia, Então X é conexo (por caminho) se, e somente se, Y for conexo (por caminho).

Ex. 13 — Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então $X - \{x_0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $Y - \{f(x_0)\}$?

Ex. 14 — Sejam $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ famílias arbitrárias de espaços topológicos tais que X_λ e Y_λ têm o mesmo tipo de homotopia, para cada $\lambda \in \Lambda$. Mostre que

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \quad \text{e} \quad \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

têm o mesmo tipo de homotopia.

Ex. 15 — Seja $E = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ o eixo z de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\mathbb{R}^3 \setminus E$ tem o mesmo tipo de homotopia do círculo $\mathbb{S}^1$.

Ex. 16 — Mostre que a faixa de Mobius tem o mesmo tipo de homotopia do cilindro $\mathbb{S}^1 \times I$ mas não é homeomorfo a ele.

Ex. 17 — Considere os seguintes espaços: X é o espaço obtido de $\mathbb{S}^2$ colando o polo norte com o polo sul; $Y = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$, em que $\mathbb{S}^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$; Z é a união de um toro de revolução com um disco cujo bordo é o menor dos paralelos do toro. Mostre que X, Y e Z têm o mesmo tipo de homotopia.

Ex. 18 — Sejam $\alpha, \beta : I \to X$ caminhos fechados, com base nos pontos x_0 e y_0, respectivamente. Mostre que:

a. α e β são livremente homotópicos se, e somente, se, existe um caminho $\sigma : I \to X$, ligando x_0 e y_0, tal que $\alpha \cong (\sigma b)\sigma^{-1}$.

b. se α é livremente homotópico a um caminho constante, então $\alpha \cong e_{x_0}$, ou seja, α é homotópico a uma constante sem mover o ponto x_0 durante a homotopia.

3 Grupo Fundamental

Sejam $\mathbb{S}^2$ a esfera bidimensional e $\mathbb{T}^2$ o toro bidimensional, representados na Figura 3.1.

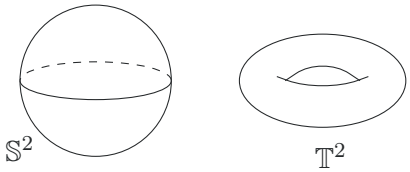


Figura 3.1.: Esfera, toro e bitoro.

Como podemos determinar se esses espaços são homeomorfos?

Neste capítulo, introduzimos o conceito de grupo fundamental de um espaço, o que nos permitirá responder essa questão. A resposta dependerá de uma das propriedades fundamentais de tais grupos: o fato de que espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos.

A teoria dos grupos fundamentais é um dos exemplos mais simples da estratégia de tradução de problemas topológicos para problemas algébricos. Esses grupos são construídos atribuindo uma estrutura de grupo ao conjunto de classes de homotopia de laços com base em um mesmo ponto, de forma funtorial, e desempenham um papel destacado no estudo de Topologia Algébrica.

De modo mais geral, propriedades e características que são compartilhadas por espaços homeomorfos são chamadas propriedades topológicas e invariantes topológicos; por outro lado aquelas compartilhadas por espaços homotopicamente equivalentes são chamados de propriedades homotópicas e invariantes homotópicos. E assim, como veremos, o grupo fundamental é um exemplo de invariante

homotópico (e consequentemente um invariante topológico) dos espaços topológicos. Foi através da busca e construção de invariantes, estabelecendo conexões entre a Topologia e Álgebra, que a Topologia Algébrica se desenvolveu.

Historicamente o conceito de grupo fundamental deve-se a Henry Poincaré. Em seu seminal artigo Analysis Situs aparece a definição do grupo fundamental de uma variedade conexa X. Sua definição era essencialmente a mesma que a utilizada atualmente, mas descrita em uma linguagem "intuitiva": laços com origem em um ponto x são caminhos que começam em x e voltam ao mesmo ponto; a composição de dois laços com origem em x é o laço obtido por justaposição, movendo-se primeiro ao longo do primeiro e depois ao longo do segundo; o inverso de um laço é obtido movendo-se ao longo desse laço na direção oposta. Poincaré considerou dois laços que podem ser "deformados" um no outro "equivalentes", sendo a sua origem comum fixa (lembre-se que a homotopia ainda não tinha sido definida com precisão); ele então chamou o grupo definido pela composição das classes de equivalência de grupo fundamental de X no ponto x.

Ressaltamos por último que a teoria dos grupos fundamentais são de grande importância não só na topologia, mas também em outros ramos da matemática, como análise complexa, geometria, grupos de Lie e também em algumas áreas além da matemática.

3.1. Grupo Fundamental

Como vimos no final do capítulo anterior, o conjunto $\Pi(X)$ das classes de homotopia de caminhos com extremos fixos em um espaço topológico X, munido da lei de composição, fornece apenas um grupóide. No entanto, se restringirmos nossa análise para o conjunto dos caminhos fechados com base em um mesmo ponto $x_0 \in X$ teremos a unicidade do elemento neutro e o produto estará bem definido para qualquer caminho fechado com ponto base x_0.

Denote por $\sim_{x_0}$ a relação de equivalência dada pela homotopia entre caminhos fechados com base em x_0 com os extremos fixos.

Grupo Fundamental. Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Definimos o

grupo fundamental de X com base no ponto x_0 como:

$$\pi_1(X, x_0) := \{\alpha : [0,1] \to X \mid \alpha \text{ é contínua, } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}/\sim_{x_0}$$

com a operação:

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]\,.$$

Em outras palavras, $\pi_1(X, x_0)$ é o conjunto formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base no ponto x_0,

$$\pi_1(X, x_0) := \{[\alpha] \mid \alpha : [0,1] \to X \text{ contínua, } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

Dado um espaço topológico X e dado um ponto $x_0 \in X$, o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ com base em x_0 está bem definido.

Demonstração. Pela Proposição 2.3, a operação $*$ é preservada por homotopias com extremidades fixas e, portanto, a operação $\cdot$ induzida nas classes de equivalência está bem definida. Além disso, é associativa. Pela Proposição 2.3, o elemento inverso da classe $[\alpha]$ é a classe do caminho inverso de α, i.e. $[\alpha^{-1}]$. Por fim, temos a unicidade do elemento neutro, que é precisamente a classe do caminho constante e_{x_0}, como provamos na Proposição 2.3. ∎

Exemplo 3.1.

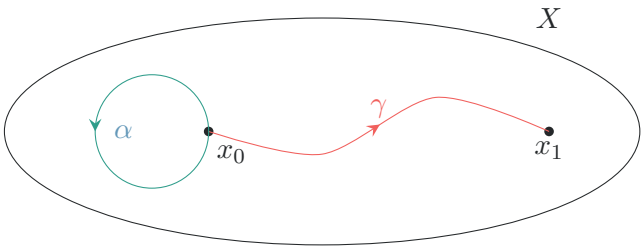
Dado $Y \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, todos os caminhos fechados com base em x_0 são homotópicos ao caminho constante e_{x_0} com extremos fixos, via a homotopia linear. Logo,

$$\pi_1(Y, x_0) = \{[e_{x_0}]\}.$$

Portanto, o grupo fundamental com base em $x_0 \in Y$ de um conjunto convexo Y é sempre trivial.

◁

Veja que a definição do grupo fundamental leva em consideração o ponto base x_0. Mostraremos, a seguir, que a escolha do ponto base não afeta a estrutura do grupo fundamental quando o espaço é conexo por caminhos. Sejam x_0 e x_1 pontos de uma mesma componente conexa por caminhos de X, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia $[\gamma]$ de caminhos que ligam x_0 a x_1 induz um isomorfismo $C_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$.



Demonstração. Como x_0 e x_1 estão na mesma componente conexa por caminhos de X, existe um caminho $\gamma : I \to X$ com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Defina a seguinte função:

$$\begin{aligned} C_\gamma : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

A função C_γ é um isomorfismo de grupo:

1. Claramente, C_γ está bem definida. De fato, $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma$ é um caminho fechado com base em x_1; se α e α' são homotópicos com extremidades fixas, então $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma$ e $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma$ também são homotópicos com extremos fixos. Logo, $C_\gamma([\alpha]) = C_\gamma([\alpha'])$.

2. C_γ é um homomorfismo de grupo. Com efeito, a imagem do produto é o produto das imagens:

$$\begin{aligned} C_\gamma([\alpha] \cdot [\beta]) &= C_\gamma([\alpha * \beta]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \beta * \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \cdot [\gamma^{-1} * \beta * \gamma] \\ &= C_\gamma([\alpha]) \cdot C_\gamma([\beta]). \end{aligned}$$

3. C_γ é um isomorfismo. Com efeito, sua inversa é dada por $C_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, $C_{\gamma^{-1}}([\beta]) := [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$.

■

Se X é conexo por caminhos, então o grupo fundamental é independente do ponto base, ou seja, dados $x_0, x_1 \in X$, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.

A proposição acima parece resolver a questão de independência em relação ao ponto base em cada componente conexa por caminhos de X: nesse caso, garantimos não apenas que o grupo fundamental é independente do ponto base, mas

também fornecemos um isomorfismo explícito. No entanto, ainda temos que ter algum cuidado com o ponto base mesmo em espaços conexos por caminhos. Se pretendemos identificar todos os grupos fundamentais com apenas um, encontramos uma dificuldade: o isomorfismo depende da classe de homotopia do caminho γ ligando x_0 a x_1. No geral, o isomorfismo não é natural, i.e., não há uma maneira canônica de identificar $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. Não é errado falar do grupo fundamental de um espaço, mas devemos sempre ter em mente a consideração acima. Se o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, então o isomorfismo descrito acima é natural, i.e., independente da escolha do caminho γ. Com efeito, dados dois caminhos γ e δ ligando x_0 a x_1, temos que

$$\begin{aligned} C_\gamma([\alpha]) &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] = [\gamma^{-1} * \alpha * \delta * \delta^{-1}\gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * \alpha * \delta] \cdot [\delta^{-1} * \gamma] = [\delta^{-1} * \gamma] \cdot [\gamma^{-1} * \alpha * \delta] \\ &= [\delta^{-1} * \alpha * \delta] = C_\delta([\alpha]). \end{aligned}$$

Devido ao resultado anterior, é natural considerarmos espaços topológicos conexos por caminhos quando estamos trabalhando com grupo fundamental.

3.2. Homomorfismo Induzido

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua com $f(x_0) = y_0$. Dado um caminho fechado α em X com base em x_0, $f \circ \alpha$ é um caminho fechado em Y com base em y_0. A seguir, mostramos que a correspondência $\alpha \mapsto f \circ \alpha$ dá origem a um homomorfismo induzido nos grupos fundamentais.

Lema 3.1

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua com $f(x_0) = y_0$. A aplicação

$$\begin{aligned} f_\# : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\mapsto f_\#([\alpha]) := [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

está bem definida e é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. A aplicação $f_\#$ está bem definida. Com efeito, se $H : \alpha \simeq \beta \ (\text{rel } \partial I)$ é uma homotopia de caminhos entre α e β, então $f \circ H$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$, ou seja, se $\alpha \cong \beta$, então $f \circ \alpha \cong f \circ \beta$.

Além disso, $f_\#$ é um homomorfimo de grupos, já que $f\circ(\alpha*\beta) = (f\circ\alpha)*(f\circ\beta)$, logo

$$\begin{aligned} f_\#([\alpha]\cdot[\beta]) &= f_\#([\alpha*\beta]) = [f\circ(\alpha*\beta)] \\ &= [(f\circ\alpha)*(f\circ\beta)] = [f\circ\alpha]\cdot[f\circ\beta] \\ &= f_\#([\alpha])\cdot f_\#([\beta]). \end{aligned}$$

■

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua com $f(x_0) = y_0$. O **homomorfismo induzido** por f é definido por

$$\begin{aligned} f_\# : \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(Y,y_0) \\ [\alpha] &\mapsto f_\#([\alpha]) := [f\circ\alpha]. \end{aligned}$$

Considere aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ entre espaços topológicos, com $f(x_0) = y_0$ e $g(y_0) = z_0$. Sejam $f_\# : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ e $g_\# : \pi_1(Y,y_0) \to \pi_1(Z,z_0)$ os homomorfismos induzidos. Então

$$(g\circ f)_\# = g_\# \circ f_\#.$$

Além disso, se $id : X \to X$ é a identidade, então $id_\# : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ é o homomorfismo identidade.

Demonstração. Dado um caminho fechado α em X com base em x_0, temos

$$\begin{aligned} (g\circ f)_\#([\alpha]) &= [(g\circ f)\circ\alpha] = [g\circ(f\circ\alpha)] \\ &= g_\#([f\circ\alpha]) = g_\#(f_\#([\alpha])) = g_\#\circ f_\#([\alpha]). \end{aligned}$$

Além disso,

$$id_\#([\alpha]) = [id\circ\alpha] = [\alpha].$$

■

O próximo resultado garante que o grupo fundamental é um invariante topológico, ou seja, espaços topológicos homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos.

Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo com $f(x_0) = y_0$, então o homomorfismo induzido $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Com efeito, seja $f^{-1} : Y \to X$ a inversa de f. Pela proposição anterior, temos que:

$$f_\#^{-1} \circ f_\# = (f^{-1} \circ f)_\# = (\mathrm{id}_X)_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$$

$$f_\# \circ f_\#^{-1} = (f \circ f^{-1})_\# = (\mathrm{id}_Y)_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(Y)}\,.$$

Assim, $f_\#^{-1}$ é a inversa de $f_\#$, e $f_\#$ é isomorfismo. ∎

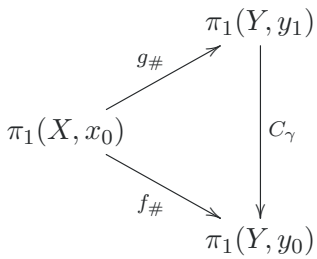
Em particular, se dois espaços têm grupos fundamentais diferentes, então eles não são homeomorfos.

O grupo fundamental não é apenas um invariante topológico, mas também um invariante homotópico. A seguir, provaremos que espaços homotopicamente equivalentes possuem grupos fundamentais isomorfos. Para isso, precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas homotópicas e sejam $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = g(x_0)$. Assuma que Y conexo. Os homomorfismos induzidos $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ e $g_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ estão relacionados por

$$f_\# = C_\gamma \circ g_\#,$$

em que γ é um caminho ligando y_1 a y_0 e C_γ é a aplicação definida na Proposição 3.1. Em outras palavras, o diagrama abaixo é comutativo:

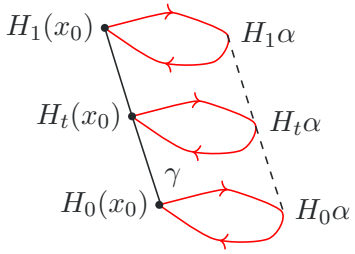


Demonstração. Seja $F : X \times I \to Y$ uma homotopia entre g e f, assim $F(x,0) = g(x)$ e $F(x,1) = f(x)$, para todo $x \in X$. Considere o caminho $\gamma : I \to Y$ dado por $\gamma(t) = F(x_0, t)$, veja que γ é um caminho ligando $g(x_0) = y_1$ a $f(x_0) = y_0$.

Dado um caminho fechado α em X com ponto base x_0, temos que $f \circ \alpha$ e $\gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma$ são homotópicos com extremos fixos. Com efeito, a aplicação $H : I \times I \to Y$ dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4s + 4st), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/4 \\ F(\alpha(4s-1), t), & \text{se } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ F(x_0, 2(s + t - st) - 1), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

é uma homotopia com extremos fixos entre os caminhos $[\gamma^{-1} * (g \circ \alpha)] * \gamma$ e $[e_{y_0} * (f \circ \alpha)] * e_{y_0}$. Como $[e_{y_0} * (f \circ \alpha)] * e_{y_0}$ é homotópico, com extremos fixos, ao caminho $f \circ \alpha$, segue que $f \circ \alpha \cong \gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma$.



Portanto, temos que

$$f_\#([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [\gamma^{-1} * (g \circ \alpha) * \gamma] = C_\gamma([g \circ \alpha]) = C_\gamma \circ g_\#([\alpha]).$$

Segue que $f_\# = C_\gamma \circ g_\#$, como queríamos provar. ∎

Finalmente, mostraremos que se X e Y são espaços topológicos conexos por caminhos com o mesmo tipo de homotopia, então eles possuem grupos fundamentais isomorfos. Mais especificamente:

Sejam X e Y são espaços topológicos conexos por caminhos, Se $f : X \to Y$ é uma equivalência homotópica, então o homomorfismo induzido $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Sejam $f : X \to Y$ uma equivalência homotópica e $g : Y \to X$ sua inversa homotópica. Então $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$.Tome como ponto base $x_0 \in X$ e sejam $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$.

Sejam $f^0_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $f^1_\# : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, y_1)$ e $g_\# : \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(Y, x_1)$ os homomorfismos induzidos por f e g. Como $g \circ f \simeq id_X$, pela Proposição 3.2, temos que $g_\# \circ f^0_\# = C_\gamma$, em que C_γ é o isomorfismo induzido por um caminho γ em X ligando x_0 a x_1. Segue que $g_\#$ é sobrejetor. Analogamente, como $f \circ g \simeq id_Y$, pela Proposição 3.2, temos que $f^1_\# \circ g_\# = C_\beta$, em que h_β é o isomorfismo induzido por um caminho β em Y ligando y_0 a y_1. Segue que $g_\#$ é injetor.

Em suma, temos um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f^0_\#} & \pi_1(Y, y_0) \\ {\scriptstyle C_\gamma}\downarrow & \swarrow_{g_\#} & \downarrow{\scriptstyle C_\beta} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow[f^1_\#]{} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

e $g_\#$ é um isomorfismo. Consequentemente, $f^0_\#$ e $f^1_\#$ também são isomorfismos. Segue que $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(Y, y_0)$. ■

O grupo fundamental de um espaço contrátil é trivial.

Seja $A \subset X$ um retrato por deformação ou um retrato por deformação forte de X. Se $x_0 \in A$, então uma retração $r : X \to A$ induz um isomorfismo:

$$r_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0).$$

Exemplo 3.2.

Usando o Corolário 3.2, temos o seguinte:

a. Como $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ é um retrato de deformação de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, temos que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (x_0, 0)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \{0\}, (x_0, 0)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0).$$

b. Como o círculo central Σ de uma faixa de Möbius $\mathbb{M}$ é um retrato de deformação de $\mathbb{M}$, temos:

$$\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(\Sigma, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0).$$

Este exemplo mostra, que embora os grupos fundamentais da faixa de Möbius e da esfera $\mathbb{S}^1$ sejam isomorfos, os espaços não são homeomorfos.

Veja a Figura 3.2.

◁

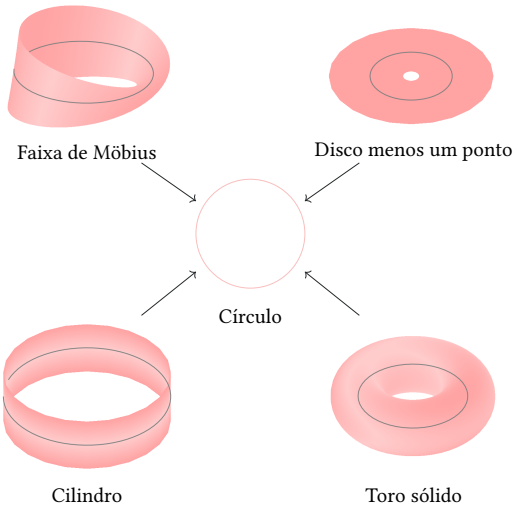


Figura 3.2.: Espaços homotopicamente equivalentes e logo com grupos fundamentais isomorfos.

O próximo resultado garante que o grupo fundamental do produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto direto dos grupos fundamentais de X e Y. Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o espaço produto com a topologia produto. Dados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, temos

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Demonstração. A demonstração será deixada como exercício. ■

Vale ressaltar que se uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é sobrejetora (ou injetora) não vale necessariamente que a induzida $f_\#$ será sobrejetora (ou injetora).

3.3. Espaços Simplesmente Conexos

Relembre que se X é conexo por caminhos, então $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, para quaisquer $x_0, x_1 \in X$. **Simplesmente Conexo.** Um espaço topológico X conexo por caminhos é dito **simplesmente conexo** quando seu grupo fundamental é trivial.

Exemplo 3.3.

Qualquer subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo.

◁

Dado um espaço topológico X, as afirmações abaixo são equivalentes:

a. X é simplesmente conexo;

b. X é conexo por caminhos e todo caminho fechado é livremente homotópico a uma constante.

c. Duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : S^1 \to X$ são homotópicas.

d. X é conexo por caminhos e toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^1 \to X$ estende-se contiuamente ao disco $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Demonstração. A demonstração será deixada como exercício. ■

A esfera $\mathbb{S}^n$, com $n \geq 2$, é simplesmente conexa. Uma intuição para esse fato pode ser obtida supondo dois caminhos α e β em $\mathbb{S}^n$ tais que ambos os caminhos não passem por um ponto p da esfera. Usando a projeção estereográfica P, temos que $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Logo, a imagem $P \circ \alpha$ e $P \circ \beta$ dos caminhos α e β são caminhos homotópicos por uma homotopia $H(s, t)$. A função $P^{-1} \circ H(s, t)$ fornece então uma homotopia entre α e β em $\mathbb{S}^n$. O problema desse argumento é que existem curvas que cobrem todos os pontos da esfera. Sendo assim, precisamos de um argumento mais sofisticado. A demonstração que apresentaremos de que a esfera $\mathbb{S}^n$, com $n \geq 2$, é simplesmente conexa terá como base o lema a seguir.

Lema 3.2

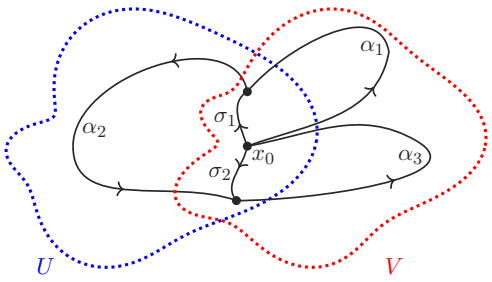
Seja X um espaço topológico tal que $X = U \cup V$, com U e V subespaços abertos simplesmente conexos. Se $U \cap V$ é conexo por caminhos, então X é simplesmente conexo.

Demonstração. Fixe um ponto base $x_0 \in U \cap V$. Dado um caminho fechado α com base em x_0, pela continuidade de α, o conjunto $\{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$ é uma cobertura por abertos do compacto I. Logo, existe uma partição de I, digamos

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

tal que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ ou $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset V$. Além disso, se dois intervalos consecutivos $[t_{i-1}, t_i]$ e $[t_i, t_{i+1}]$ são tais que $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ e $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ pertencem ambos a U ou a V, eliminamos o ponto comum t_i da partição; logo, podemos considerar uma partição tal que $\alpha(t_i) \subset U \cap V$, para todo $i = 0, \ldots, n$.

Agora, como $U \cap V$ é conexo por caminhos, seja σ_i um caminho em $U \cap V$ que liga x_0 a $\alpha(t_i)$.



Para cada $i = 1, \ldots, n$, considere a reparametrização do caminho $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$:

$$\alpha_i : I \to X, \quad \alpha_i(s) := \alpha((t_i - t_{i-1})s + t_{i-1}).$$

Assim, $\alpha_i(0) = \alpha(t_{i-1})$ e $\alpha_i(1) = \alpha(t_i)$. Claramente, $\alpha \cong \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n$. Segue que

$$\alpha \cong (\alpha_1 * \sigma_1^{-1}) * (\sigma_1 * \alpha_2 * \sigma_2^{-1}) * (\sigma_2 * \alpha_3 * \sigma_3^{-1}) * \cdots * (\sigma_n * \alpha_n).$$

Note que $\sigma_i * \alpha_{i+1} * \sigma_{i+1}^{-1}$ está contido em U ou em V. Como ambos são simplesmente conexos, o caminho fechado $\sigma_i * \alpha_{i+1} * \sigma_{i+1}^{-1}$ é homotópico ao caminho constante e_{x_0}. Portanto, $\alpha \cong e_{x_0}$ e segue que $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$. ∎

Para $n \geq 2$, a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa.

Demonstração. Sejam $p_N = (0, \ldots, 0, 1)$ e $p_S = (0, \ldots, 0, 1)$ os polos norte e sul da esfera $\mathbb{S}^n$, respectivamente. Tome $U := \mathbb{S}^n \setminus \{p_N\}$ e $V := \mathbb{S}^n \setminus \{p_S\}$. Veja que U e V são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ via projeções estereográficas. Logo, U e V são abertos simplesmente conexos. Além disso, $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{p_N, p_S\}$, que é homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, portanto conexo por caminhos, já que $n \geq 2$. Pelo lema anterior, segue que $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexo. ∎

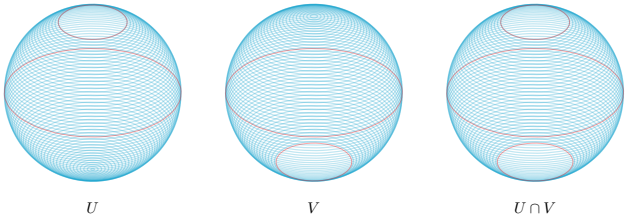


Figura 3.3.: Decomposição de $\mathbb{S}^n$ em dois abertos simplesmente conexos.

Na próxima seção, provaremos que $\mathbb{S}^1$ não é simplesmente conexa, de fato, mostraremos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

a. Se $n > 2$, então $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é simplesmente conexo. De fato, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

b. Se $m \geq 2$ e $n \geq 2$, então $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa. Com efeito, denote por p o ponto em comum entre as esferas, i.e. $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n = \{p\}$, e tome pontos $a \in \mathbb{S}^m \setminus \{p\}$ e $b \in \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$. Sejam $U = \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n \setminus \{a\}$ e $V = \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n \setminus \{b\}$. Como,

$$\mathbb{S}^m \simeq U \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^n \simeq V,$$

U e V são abertos simplesmente conexos e $U \cap V$ é conexo por caminhos. Pelo lema anterior, $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ é conexo por caminhos.

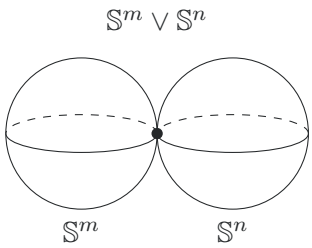


Figura 3.4.: $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa, para $m, n \geq 2$.

A união de dois espaços simplesmente conexos não é necessariamente um espaço simplesmente conexo, mesmo que tenham um ponto em comum. Um exemplo é o cone gêmeo de Griffths.

3.4. Grupo Fundamental do Círculo

Nessa seção, apresentamos o primeiro exemplo de espaço topológico que possui grupo fundamental não trivial, a saber, a esfera $\mathbb{S}^1$. A partir do grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$, conseguimos novos exemplos de espaços topológicos cujos grupos fundamentais são não triviais.

Nosso objetivo aqui é provar que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, em que $x_0 = (1, 0)$. Mais especificamente:

Grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$. O grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$, $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, é um grupo cíclico infinito gerado pela classe de homotopia do laço $\omega(s) = (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$ baseado em $x_0 = (1, 0)$. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z} &\to \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \\ n &\mapsto [\omega_n], \end{aligned}$$

em que $\omega_n : I \to \mathbb{S}^1$ é laço baseado em $x_0 = (1, 0)$ dado por $\omega_n(s) = (\cos(2\pi ns), \operatorname{sen}(2\pi ns))$, é um isomorfismo de grupos. A ideia básica para provar esse resultado é comparar caminhos em $\mathbb{S}^1$ com caminhos na reta real $\mathbb{R}$ por meio da aplicação de projeção:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s)). \end{aligned}$$

Podemos visualizar essa projeção geometricamente fazendo um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$ como uma hélice parametrizada por $s \mapsto (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s), s)$, e p é a restrição para a hélice da projeção de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Veja a Figura 3.5.

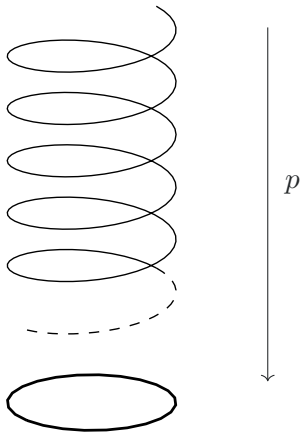


Figura 3.5.: Hélice: um mergulho de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. Projeção p no círculo $\mathbb{S}^1$.

Vejamos como podemos associar caminhos fechados em $\mathbb{S}^1$ a caminhos em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$\widetilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{\omega}_n(s) = ns,$$

ou seja, $\widetilde{\omega}_n$ é um caminho em $\mathbb{R}$ que começa em 0 e termina no inteiro n. Na hélice, $\widetilde{\omega}_n$ corresponde a um caminho que começa em $(1, 0, 0)$ e dá $|n|$ voltas ao longo da hélice, para cima se $n > 0$ e para baixo se $n < 0$. Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, o caminho fechado

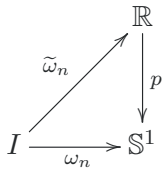
$$\omega_n(s) = (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$$

em $\mathbb{S}^1$ baseado em $x_0 = (1, 0)$, dá $|n|$ voltas completas em $\mathbb{S}^1$ (no sentido anti-horário, se $n > 0$; e no sentido horário, se $n < 0$).

Note que

$$\omega_n = p \circ \widetilde{\omega}_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, o diagrama abaixo é comutativo:



Por essa razão, dizemos que o caminho $\widetilde{\omega}_n$ é um **levantamento** do caminho ω_n, ou seja, a relação $\omega_n = p \circ \widetilde{\omega}_n$ é expressa dizendo que $\widetilde{\omega}_n$ é um levantamento de ω_n. (No Capítulo 4, iremos formalizar a noção de espaço de recobrimento e levantamento de caminhos.) Finalmente, observe que a medida que o caminho $\widetilde{\omega}_n$ percorre a hélice para cima ou para baixo, sua sombra, i.e. o caminho ω_n, dar voltas em em $\mathbb{S}^1$ no sentido anti-horário ou sentido horário, respectivamente. Veja Figura 3.6. Essa correspondência entre caminhos fechados em $\mathbb{S}^1$ e caminhos em $\mathbb{R}$ é crucial para o cálculo do grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$.

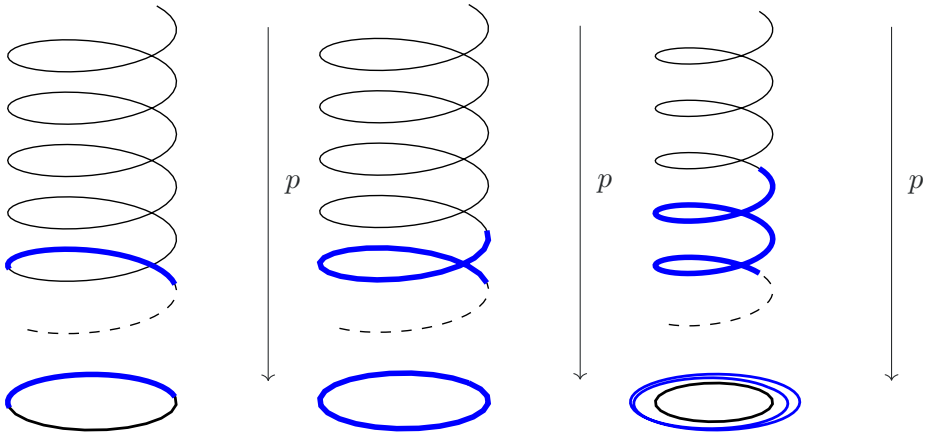


Figura 3.6.: Caminhos em $\mathbb{R}$ e suas projeções em $\mathbb{S}^1$.

A seguir, iniciamos a prova do Teorema 3.4.

Afirmação 3.3

A aplicação $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, dada por $\Phi(n) = [\omega_n]$, é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Primeiramente, para cada $m \in \mathbb{Z}$, considere o mapa de translação por $|m|$ unidades $\tau_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por $x \mapsto x + m$.

Agora, veja que o caminho $\widetilde{\omega}_m * \tau_m\widetilde{\omega}_n$ é homotópico ao caminho $\widetilde{\omega}_{m+n}$. Com efeito, ambos os caminhos têm os mesmos extremos e $\mathbb{R}$ é convexo, logo basta tomar a homotopia linear. De fato, esses caminhos são parametrizações do mesmo caminho. Seja $F : I \times I \to \mathbb{R}$ uma homotopia entre eles, i.e.

$$F : \ \widetilde{\omega}_m * \tau_m\widetilde{\omega}_n \ \cong \ \widetilde{\omega}_{m+n}.$$

Quando projetamos tais caminhos em $\mathbb{S}^1$ via a aplicação p, obtemos caminhos homotópicos:

$$G : \ p \circ (\widetilde{\omega}_m * \tau_m\widetilde{\omega}_n) \ \cong \ p \circ \widetilde{\omega}_{m+n},$$

em que a homotopia $G : I \times I \to \mathbb{S}^1$ é dada por $G = p \circ F$.

Usando esses fatos, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(m) \cdot \Phi(n) &= [\omega_m] \cdot [\omega_n] = [p \circ \widetilde{\omega}_m] \cdot [p \circ \widetilde{\omega}_n] \\
&= [p \circ \widetilde{\omega}_m] \cdot [p \circ (\tau_m\widetilde{\omega}_n)] \\
&= [(p \circ \widetilde{\omega}_m) * (p \circ \tau_m\widetilde{\omega}_n)] \\
&= [p \circ (\widetilde{\omega}_m * \tau_m\widetilde{\omega}_n)] \\
&= [p \circ \widetilde{\omega}_{m+n}] = \Phi(m+n).
\end{aligned}$$

Portanto, Φ é um homomorfismo de grupos. ∎

Para provar que Φ é uma aplicação sobrejetora, iremos usar o seguinte lema, que será provado no Capítulo 4 (Teorema 4.4):

Lema 3.4 — Levantamento de caminhos

Para cada caminho $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ com $x_0 = \alpha(0) = (1, 0)$ e para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, existe um único levantamento $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

Afirmação 3.5

A aplicação $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, dada por $\Phi(n) = [\omega_n]$, é sobrejetora.

Demonstração. Seja $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ uma classe de homotopia de caminhos fechados em $\mathbb{S}^1$, em que $x_0 = (1, 0)$. Queremos mostrar que existe um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha \cong \omega_n$.

Note que $0 \in p^{-1}(\{x_0\})$. Pelo lema acima, existe um único caminho $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ com $\tilde{\alpha}(0) = 0$ tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, ou seja, $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α. Como

$$(p \circ \tilde{\alpha})(1) = \alpha(1) = x_0 \in \mathbb{S}^1,$$

temos que $\tilde{\alpha}(1)$ deve ser um número inteiro. Em outras palavras, $\tilde{\alpha}$ é um caminho que começa em 0 e termina em um número inteiro n.

Como $\mathbb{R}$ é convexo, existe uma homotopia de caminhos $H : \tilde{\alpha} \cong \widetilde{\omega}_n$ (basta tomar a homotopia linear). Assim, $p \circ H$ é uma homotopia de caminhos em $\mathbb{S}^1$:

$$p \circ H : \ \alpha = p \circ \tilde{\alpha} \ \cong \ p \circ \widetilde{\omega}_n = \omega_n.$$

Portanto, temos que $[\alpha] = [\omega_n] = \Phi(n)$. Segue que Φ é sobrejetora. ∎

Para provar que Φ é uma aplicação injetora, iremos usar o seguinte lema, que será provado no Capítulo 4 (Teorema 4.3):

Lema 3.6 — Levantamento de Homotopia

Para cada homotopia de caminhos $H : I \times I \to \mathbb{S}^1$ com $H(0, t) = x_0 = (1, 0)$ e para cada $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, existe um único levantamento $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{H}(0, t) = \tilde{x}_0$.

Afirmação 3.7

A aplicação $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$, dada por $\Phi(n) = [\omega_n]$, é injetora.

Demonstração. Suponha que $\Phi(m) = \Phi(n)$ para $m, n \in \mathbb{Z}$, ou seja, suponha que $\omega_n \cong \omega_m$. Vamos mostrar que $m = n$. Seja $H : I \times I \to \mathbb{S}^1$ uma homotopia de caminhos entre ω_m e ω_n, em particular, $H(s,0) = \omega_m(s)$, $H(s,1) = \omega_n(s)$ e $H(0,t) = H(1,t) = x_0 = (1,0)$.

Como $0 \in p^{-1}(\{x_0\})$, pelo lema anterior, existe um único levantamento $\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{H}(0,t) = 0$. Além disso, como o levantamento é único, devemos ter

$$\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{\omega}_m(s) \quad \text{e} \quad \widetilde{H}(s,1) = \widetilde{\omega}_n(s).$$

Como $\widetilde{H}$ é uma homotopia de caminhos (com extremos fixos), $\widetilde{H}_t(1)$ deve ser constante para todo caminho H_t ao longo da homotopia. Por outro lado,

$$\widetilde{H}_0(1) = \widetilde{\omega}_m(1) = m \quad \text{e} \quad \widetilde{H}_1(1) = \widetilde{\omega}_n(1) = n.$$

Segue que $m = n$, como queríamos provar. ∎

Note que $[\omega]^n = [\omega_n]$, em que $\omega_n(s) = (\cos(2\pi ns), \operatorname{sen}(2\pi ns))$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.4.

a. A esfera $\mathbb{S}^n$, com $n > 1$, não é homeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Com efeito, esses espaços possuem grupos fundamentais não isomorfos.

b. Considere o cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Como C é um retrato por deformação de $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ (via uma homotopia linear), segue que

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Um gerador para $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$ é dado pela classe de homotopia do círculo central $\alpha(s) = (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s), 0)$. Um caminho fechado em C é homotópico a n vezes o gerador α, quando n é o número "líquido" de vezes que o caminho fechado intersecta transversalmente a geratriz $(1,0) \times \mathbb{R}$. Em geral, temos que

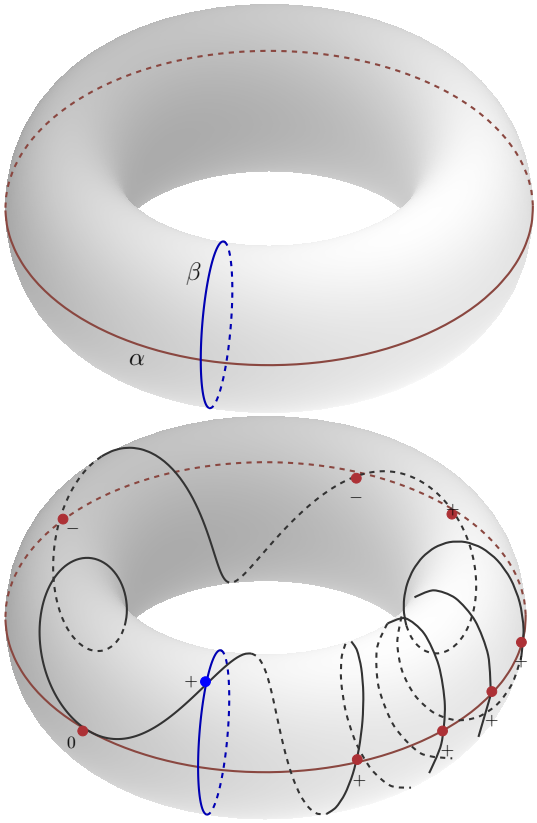
$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n, p_0) \cong \mathbb{Z}.$$

c. Considere o toro bidimensional $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Temos que

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, (x_0, x_0)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \times \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Assim, $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ é abeliano com dois geradores.

◁



3.5. Aplicações de Grupo Fundamental

Recorde que $\mathbb{D}^2$ denota o disco unitário fechado em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ponto Fixo de Brouwer. Toda aplicação contínua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tem um ponto fixo, i.e., existe $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe uma aplicação contínua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tal que $f(x) \neq x$, para todo $x \in \mathbb{D}^2$. Considere uma aplicação $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ defina da seguinte forma: $r(x) \in \mathbb{S}^1$ é dada pela intersecção de $\mathbb{S}^1$ com a semi-reta de origem em $h(x)$ e que passa por x. Veja que r é contínua, pois pequenas variações de x corresponde a pequenas variações de $r(x)$. Além disso, $r(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Assim, r é uma retração de $\mathbb{D}^2$ em $\mathbb{S}^1$.

Agora, considere um caminho fechado α em $\mathbb{S}^1$ com base em x_0. Em $\mathbb{D}^2$, existe uma homotopia de α para um caminho constante e_{x_0} com base em x_0, de fato, a homotopia linear $H(s,t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$ fornece tal homotopia de caminhos. Como a retração r é a identidade em $\mathbb{S}^1$, a composição $r \circ H$ é uma homotopia em $\mathbb{S}^1$ entre $r \circ \alpha = \alpha$ e e_{x_0}. O que contradiz o fato de que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Segue que toda aplicação contínua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tem um ponto fixo. ∎

Invariância da Dimensão. $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $n = 2$.

Demonstração. Se $n = 1$, o resultado é trivial, pois $\mathbb{R}$ meno sum ponto é desconexo, enquanto que $\mathbb{R}^2$ menos um ponto ainda é conexo. Seja $n > 1$. Sabemos que $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{S}^1$. Logo, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$. Por outro lado, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ é homeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, temos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) \cong \pi_1(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}).$$

Como, $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa, para $n \geq 2$, logo, $\pi_1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ e $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) = \{0\}$. Logo, teremos a igualdade apenas quando $n = 2$. ∎

Exercícios

Ex. 19 — Um espaço topológico X é simplesmente conexo se, e somente se, existe uma única classe de homotopia de caminhos ligando dois pontos de X.

Ex. 20 — Seja $(G, \cdot)$ um grupo. O centro de G, denotado por $Z(G)$, é definido por:

$$Z(G) = \{a \in G \mid a \cdot b = b \cdot a, \text{ para todo } b \in G\},$$

ou seja, é o conjunto dos elementos de G que comutam.

Seja X um espaço topológico. Considere caminhos γ e σ ligando x_0 e x_1.

1. Mostre que $C_\gamma = C_\sigma$ se, e somente se, $[\sigma * \gamma] \in Z(\pi_1(X, x_0))$.
2. Mostre que $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano se, e somente se, C_γ não depende do caminho γ.

Ex. 21 — Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o espaço produto com a topologia produto. Dados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, mostre que

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Ex. 22 — Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \to Y$ contínua. Mostre, exibindo um exemplo, que:

1. A sobrejetividade de f não garante a sobrejetividade de $f_\#$
2. A injetividade de f não garante a injetividade de $f_\#$.

Ex. 23 — Seja $r : X \to Y$ um retrato por deformação e $i : Y \to X$ a inclusão. Mostre que $r_\#$ é sobrejetora e que $i_\#$ é injetora.

Ex. 24 — Dado um espaço topológico X, prove que as afirmações abaixo são equivalentes:

1. X é simplesmente conexo;
2. X é conexo por caminhos e todo caminho fechado é livremente homotópico a uma constante.
3. Duas aplicações contínuas quaisquer $f, g : \mathbb{S}^1 \to X$ são homotópicas.
4. X é conexo por caminhos e toda aplicação contínua $f : \mathbb{S}^1 \to X$ estende-se continuamente ao disco $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ex. 25 — Seja X um espaço topológico não vazio, denotamos e definimos o cone de X por:

$$C(X) = (X \times [0, 1])/\sim, \quad \text{onde} \quad (x, 1) \sim (y, 1), \forall x, y \in X.$$

1. Determine $C\left(\mathbb{S}^1\right)$ e $C\left(\mathbb{S}^2\right)$.
2. Se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua, podemos estender f a $C(f) : C(X) \longrightarrow C(Y)$ continuamente?

3. Calcule $\pi_1\left(C(X), x_0\right)$, para qualquer X.

Ex. 26 — Determine se existe algum espaço topológico X tal $X \times \mathbb{S}^1$ seja homeomorfo a:

1. $\mathbb{S}^2$.
2. $\mathbb{RP}^2$.

Ex. 27 — Um espaço topológico X é dito espaço de Hopf se existem uma função contínua (multiplicação), $m : X \times X \longrightarrow X$ e $x_0 \in X$ tais que $m\left(x_0, x_0\right) = x_0$, $q_1 \circ i \simeq \mathrm{id}_X \ (\mathrm{rel}\ \{x_0\})$ e $m \circ q_2 \simeq \mathrm{id}_X \ (\mathrm{rel}\ \{x_0\})$, onde

$$q_1, q_2 : X \longrightarrow X \times X$$

são definidas por $q_1(x) = (x, x_0)$ e $q_2(x) = (x_0, x)$. Com as notações anteriores, seja X um espaço de Hopf. Mostre que:

1. $m\left((q_1 \circ \alpha) * (q_2 \circ \beta)\right) \simeq \alpha * \beta$, onde α e β são caminhos fechados com base em x_0.
2. $\pi_1\left(X, x_0\right)$ é abeliano.

Ex. 28 — Utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, mostre que toda matriz real 3×3 com entradas positivas, possui um autovalor positivo. **Dica:** Associe a cada matriz uma ação na intersecção do octante positivo com a esfera unitária fechada em $\mathbb{R}^n$

4 Espaço Recobrimento

Neste capítulo introduzimos os espaços de recobrimento e utilizamos desses conceitos para estender nosso estudo dos grupos fundamentais. Ao longo do capítulo estabeleceremos uma conexão íntima entre as características algébricas dos grupos fundamentais e a linguagem geométrica de espaços de recobrimento.

Nesse sentido o principal resultado deste capítulo é estabelecer uma correspondência exata entre os vários espaços de recobrimento de um espaço base X e subgrupos de seu grupo fundamental $\pi_1(X)$. Neste ponto, a analogia com a Teoria de Galois é inevitável, com sua correspondência entre extensões de corpo e subgrupos do grupos de Galois.

De modo mais geral, três noções estão interligadas de tal forma que cada uma determina essencialmente as outras duas: grupo fundamental, espaço de recobrimento e ações de grupos propriamente descontínuas. Historicamente, eles apareceram na ordem inversa.

De modo muito simplificado, as primeiras noções associadas ao que atualmente denominamos por ações de grupos propriamente descontínuas aparecem nos trabalhos de Gauss com o conceito de domínio fundamental. Mas foi com Riemann, no final do século XIX, que surgiu o segundo membro da tríade que mencionamos no início, a ideia de uma superfície consistindo em "muitas folhas, sobrepostas umas às outras, e cobrindo muitas vezes a mesma parte do plano", o que iniciou o estudo sistêmico da espaços de recobrimento. As aplicações deste conceito feitas por Riemann à teoria das funções analíticas de uma variável complexa mostram que ele tinha em mente o conceito moderno de "superfície de recobrimento ramificada". Finalmente o conceito de grupo fundamental surgiu nos trabalhos de Henry Poincaré publicados entre 1895 e 1904.

Ressaltamos por último que a teoria da espaços de recobrimento é de grande importância não só na topologia, mas também em outros ramos da matemática, como análise complexa, geometria, grupos de Lie e também em algumas áreas além da matemática.

4.1. Espaços de Recobrimento

Nosso objetivo nessa seção é generalizar a estratégia que utilizamos para calcular o grupo fundamental do círculo. Realizaremos tal objetivo isolando as propriedades da aplicação

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ s &\mapsto (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s)). \end{aligned}$$

Os espaços que consideraremos neste capítulo serão todos espaços de Hausdorff. Os espaços de recobrimento são definidos por meio de aplicações $p : \widetilde{X} \to X$ que são homeomorfismos locais satisfazendo restrições bastante fortes. Desta forma, começaremos recordando a definição de homeomorfismo local.

Homeomorfismo local. Sejam X, Y espaços topológicos, uma aplicação $f : X \to Y$ é dita um **homeomorfismo local** se, para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $V = f(U)$ é um aberto em Y e a restrição $f|_U$ é um homeomorfismo de U em V.

Claramente todo homeomorfismo é um homeomorfismo local. Além disso, um homeomorfismo local $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, aberta e localmente injetiva.

A característica fundamental de um homeomorfismo local $f : X \to Y$ é que o espaço X herda todas as propriedades topológicas locais de Y como, por exemplo, conectividade local, compacidade local, e assim por diante, e no caso em f for sobrejetora, então Y também herda as propriedades topológicas locais de X.

Uma deficiência dos homeomorfismos locais é que, nesse contexto, não temos a propriedade de levantamento de curvas, i.e., dado um homeomorfismo local $f : X \to Y$ e uma curva $\alpha : I \to Y$ não necessariamente temos a existência de uma curva $\widetilde{\alpha} : I \to X$ tal que $f \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$. Um exemplo simples de tal inexistência pode ser construído do seguinte modo: considere o homeomorfismo lo-

cal $p : (0,2) \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$ e o caminho $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$, $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$, então α não pode ser levantado para $(0,1)$. Para ver isso, suponha que $\widetilde{\alpha}$ é um levantamento de α, como $\alpha(0) = \alpha(1) = (1,0)$, temos que $p(\widetilde{\alpha}(0)) = p(\widetilde{\alpha}(1))$, logo $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\alpha}(1) = 1$, pois $p^{-1}((1,0)) = \{1\}$. Assim, α se levanta para uma curva fechada em $(0,2)$, que consequentemente é homotópica a um caminho constante, mas α não o é, o que gera uma contradição.

Precisamos de um conceito mais forte do que o de homeomorfismo local, o conceito de aplicação de recobrimento.

Espaço de Recobrimento. Sejam X e $\widetilde{X}$ espaços topológicos de Hausdorff. Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação contínua sobrejetora. Dizemos que $(\widetilde{X}, p)$ é um **espaços de recobrimento** de X se, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que $p^{-1}(U_x)$ pode ser escrito como uma união disjunta de conjuntos abertos U_λ em $\widetilde{X}$, com $\lambda \in \Lambda_x$, e tal que para cada λ, a restrição $p|_{U_\lambda} : U_\lambda \to U_x$ é um homeomorfismo.

Nesse caso a aplicação $p : \widetilde{X} \to X$ é dita **aplicação de recobrimento**

Alguns autores não pedem que $p : \widetilde{X} \to X$ seja uma aplicação contínua sobrejetora mas assumem que X é conexo por caminhos e localmente conexos por caminhos, ao definir um espaço de recobrimento.

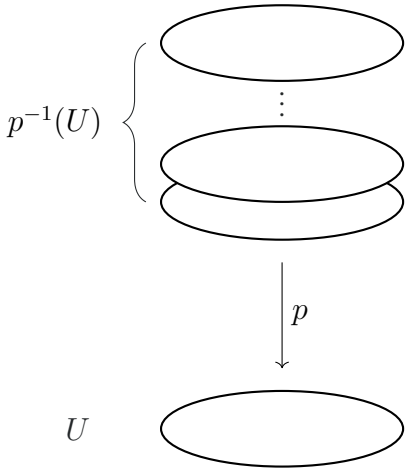
Se X e $\widetilde{X}$ são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos. Então, as seguinte afirmações são equivalentes:

1. $(\widetilde{X}, p)$ é um de espaço de recobrimento de X;
2. dada $p : \widetilde{X} \to X$, para cada $x \in X$, existe um conjunto aberto e conexo por caminhos U contendo x tal que cada componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ é homeomorfa a U sob a aplicação p.

A equivalência dessas duas definições nos casos em que X e $\widetilde{X}$ são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos será deixada como exercício ao leitor.

Se $(\widetilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento de X, é usual chamar o espaço topológico X de **espaço de base**. Os conjuntos U_x são chamados de **vizinhanças elementares** ou ainda de **vizinhanças distinguidas**. Os conjuntos abertos disjuntos em $\widetilde{X}$ que se projetam homeomorficamente para U_x por p são chamados de **folhas** de $\widetilde{X}$ sobre U_x.

Quando U_x é conexo, essas folhas são as componentes conexas de $p^{-1}(U)$, portanto, neste caso, elas são determinadas exclusivamente por U, mas no caso em que U não é conexo, a decomposição de $p^{-1}(U)$ em folhas claramente pode não ser única.



Destacamos que não é suficiente que uma aplicação seja um homeomorfismo local para ser uma aplicação de recobrimento. Considere a aplicação $p : (0, 2) \to \mathbb{S}^1$ definida por $p(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$. Essa aplicação é um homeomorfismo local, mas para qualquer vizinhança pequena U de $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$, algumas componentes de $p^{-1}(U)$ não são mapeadas homeomorficamente para U.

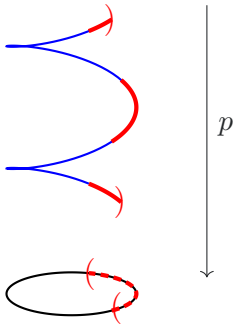


Figura 4.1.: Um homeomorfismo local que não é uma aplicação de recobrimento.

O número de pontos na imagem inversa de um ponto, sob uma aplicação de recobrimento, é localmente constante, e no caso em que o espaço de base é conexo,

esse número é constante e é denominado **número de folhas** do recobrimento.

A cardinalidade de $p^{-1}(x)$ é localmente constante e se X for conexo então a cardinalidade é constante.

Demonstração. Considere $x \in X$ e uma vizinhança elementar U_x de x. Para cada y em U_x, temos que as cardinalidades de $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ são iguais, assim é localmente constante. Como consequência dessa observação, os conjuntos de mesma cardinalidade são abertos e claramente sua união é todo o espaço. Sendo X conexo, um desses conjuntos abertos é todo X e logo a cardinalidade é constante. ■

Seja $(\widetilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X, então:

- Para cada $x \in X$, o subconjunto discreto $p^{-1}(x)$ é denominado de **fibra** de x.
- Quando X é conexo, o **grau do recobrimento** é a cardinalidade de $p^{-1}(x)$, para todo x. Se o grau do recobrimento é dois, então este é denominado de **recobrimento duplo**.
- Se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, o recobrimento é dito um **recobrimento universal**. A razão dessa nomenclatura ficará evidente nas próximas seções.

Recobrimentos.

1. A identidade $\mathrm{id}_X : X \to X$ é uma aplicação de recobrimento para qualquer espaço X. Esse recobrimento é dito trivial e é um recobrimento de uma folha.
2. Seja Y um espaço com a topologia discreta. Então, a projeção $\pi_X : X \times Y \to X$ é um recobrimento.
3. A reta real $\mathbb{R}$ recobre o círculo $\mathbb{S}^1$ por meio da aplicação:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)). \end{aligned}$$

A aplicação $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ é uma aplicação de recobrimento com infinitas folhas.

De fato, dado um ponto x no círculo, então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p^{-1}(x) = t + n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Considere o intervalo fechado $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ com $\varepsilon < \frac{1}{2}$, então $p|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ é uma bijeção contínua na sua imagem.Como o intervalo $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$

é compacto, temos que $p|_{[t-\varepsilon,t+\varepsilon]}$ é um homeomorfismo, logo leva os abertos $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ em abertos V de $\mathbb{S}^1$ (que são arcos contendo x).

A imagem inversa de V, $p^{-1}(V)$, consiste em um número enumerável de intervalos ao longo da reta real, i.e, $p^{-1}(V) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(t-\varepsilon+n, t+\varepsilon+n)$. Todos esses intervalos são disjuntos, aplicados homeomorficamente a V por p e assim provamos que é um recobrimento.

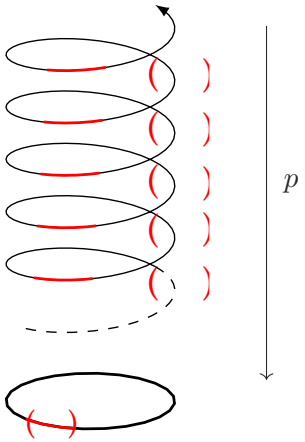


Figura 4.2.: Recobrimento do círculo

4. Se $(\widetilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento de X e $(\widetilde{Y}, q)$ é um espaço de recobrimento de Y, então $(\widetilde{X}\times\widetilde{Y}, p\times q)$ é um espaço de recobrimento de $X\times Y$ com a aplicação de recobrimento $p\times q$ definida por $(p\times q)(x,y) = (p(x), q(y))$. Deixamos a demonstração desse fato para o leitor, mas observamos que se U é um conjunto aberto elementar do ponto $x\in X$ e V é um conjunto aberto elementar do ponto $y\in Y$, então $U\times V$ é um conjunto aberto elementar de $(x,y)\in X\times Y$.

   A partir desse fato, podemos construir exemplos de espaços de recobrimento do toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Em particular, o plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, o cilindro $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ ou o próprio toro podem servir como espaços de recobrimento.

5. A esfera $\mathbb{S}^n$ recobre o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$ com a seguinte aplicação:

$$p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$$
$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto [x_1, \ldots, x_{n+1}].$$

De fato, dado um ponto $p = \{x, -x\} \in \mathbb{RP}^n$, existe uma vizinhança aberta homeomorfa a um disco $\widetilde{V}$ contendo x em $\mathbb{S}^n$ tal que $\widetilde{V} \cap -\widetilde{V} = \emptyset$. Como p é aberta, $V = p(\widetilde{V})$ é uma vizinhança aberta cuja imagem inversa consiste em dois abertos $\widetilde{V}$ e $-\widetilde{V}$ homeomorfos a discos em torno de dois pontos antipodais de $\mathbb{S}^n$. Estes são disjuntos, $p|_{\widetilde{V}}$ e $p|_{-\widetilde{V}}$ são homeomorfismos e as condições são satisfeitas. Esse é um exemplo de um recobrimento duplo não trivial.

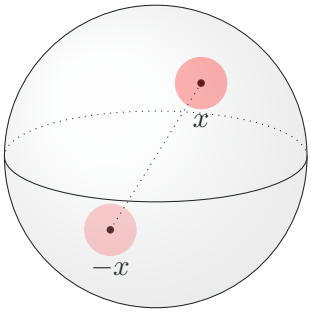
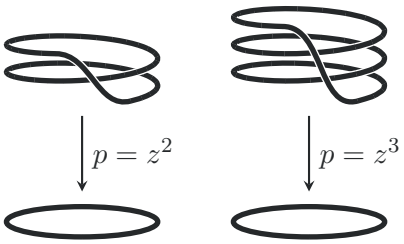


Figura 4.3.: $\mathbb{S}^n$ recobre o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^n$.

6. A aplicação $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $z \mapsto z^n$, ou seja, $(\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \mapsto (\cos(2\pi nt), \operatorname{sen}(2\pi nt))$, para um inteiro positivo fixo n, é um recobrimento de $\mathbb{S}^1$ com n folhas.



7. Seja a função exponencial complexa $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Afirmamos que $(\mathbb{C}, \exp)$ é um espaço de recobrimento de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e que, para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, o disco aberto

$$U_z = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < |z|\}$$

é uma vizinhança elementar. Para provar isso, temos que mostrar que qualquer componente V da imagem inversa de U_z é levada homeomorficamente em U_z

por exp; ou seja, que existe uma função contínua $f : U_z \to V$ tal que, para qualquer $w \in U_z$,

$$\exp[f(w)] = w,$$

e, para qualquer $v \in V$,

$$f(\exp v) = v.$$

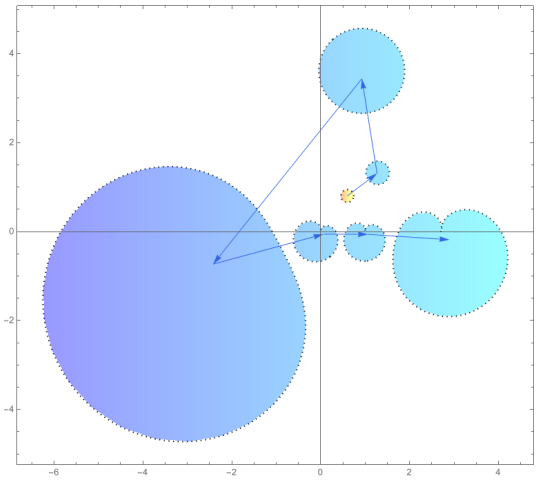


Figura 4.4.: Algumas folhas do recobrimento $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ associadas à vizinhança elementar em amarelo.

Uma tal função f é chamada de "ramo da função logarítmica no disco U_z" e a existência de tal função pode ser demonstrada usando o Teorema da Função Inversa.

Podemos expressar esse recobrimento de outra forma: se $z = x + iy$, então

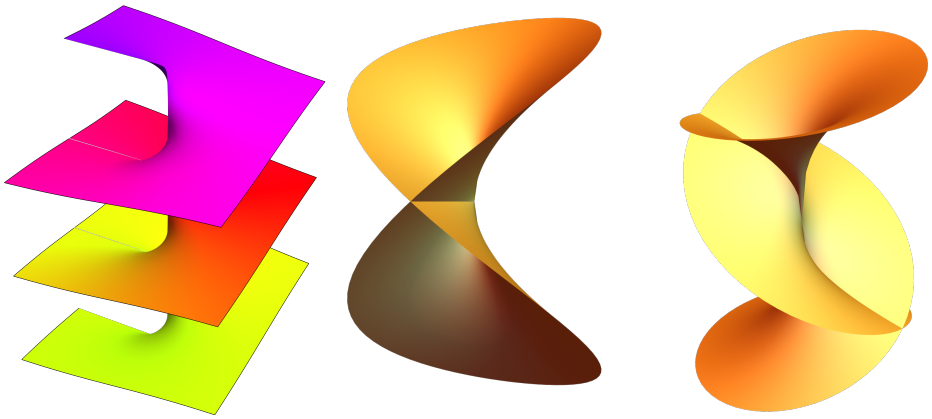
$$\exp z = (\exp x) \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

onde $\exp x = e^x$ é a função exponencial real, $\exp : \mathbb{R} \to \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$. A partir desta fórmula, emerge o seguinte fato. Podemos considerar $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\} \times \mathbb{S}^1$ (usando coordenadas polares). Então, podemos considerar a aplicação $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ como uma aplicação $p \times q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{r \in \mathbb{R} : r > 0\} \times \mathbb{S}^1$, onde $p(x) = e^x$ e $q(y) = (\cos y, \operatorname{sen} y)$.

8. Para qualquer número inteiro $n \neq 0$, seja $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o polinômio definido por $p_n(z) = z^n$. Então, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, p_n)$ é um espaço de recobrimento de $\mathbb{C} \setminus$

$\{0\}$. A existência dos vários "ramos" da função $\sqrt[n]{z}$ é análoga à do exemplo anterior. Note que é necessário omitir 0 do domínio e do contradomínio da função p_n; caso contrário, não teríamos um espaço de recobrimento. Assim, como no exemplo anterior, podemos considerar $\mathbb{C}\setminus\{0\} = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\} \times \mathbb{S}^1$ e decompor o espaço de recobrimento $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, p_n)$ no produto cartesiano de dois espaços de recobrimento.

9. Finalmente, o exemplo anterior pode ser generalizado. Seja $p(z)$ um polinômio complexo considerado como uma aplicação $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, e seja F o conjunto de valores críticos de $p(z)$. Então a aplicação induzida $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ é uma aplicação de recobrimento com $\deg(p(z))$ folhas.



(a) Recobrimento dado por $\exp(z)$. (b) Recobrimento dado por z^2. (c) Recobrimento dado por z^3.

Exemplo 4.1.

Nesse exemplo, vamos apresentar alguns espaços de recobrimento de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Para simplificar a notação, vamos denotar por X a união por um ponto $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Podemos visualizar esse espaço como um grafo com um único vértice e duas arestas, que rotularemos como α e β com orientações escolhidas.

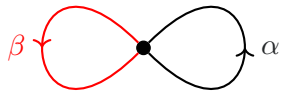


Figura 4.6.: $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

Os espaços de recobrimento de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ são particularmente interessantes ao constituírem uma família notavelmente diversificada, que ilustra de forma muito concreta grande parte da teoria geral.

Para descrever esses espaços de recobrimento, começamos observando que a cada grafo G temos associado um espaço topológico denominado realização geométrica do grafo ou grafo geométrico G. Neste espaço, os vértices são pontos distintos e as arestas são subespaços homeomorfos a $[0, 1]$ coladas por suas extremidades nas arestas. Duas arestas se encontram apenas em suas extremidades comuns.

Agora seja $\widetilde{X}$ um grafo geométrico com quatro extremidades de arestas em cada vértice. Suponhamos que cada aresta em $\widetilde{X}$ tenha sido etiquetada como α ou β e possua uma orientação de tal forma que a estrutura local próxima a cada vértice seja idêntica àquela em X. Isto é, deve haver duas arestas rotuladas por α, uma entrando no vértice e outra saindo e analogamente para β. Os grafos $\widetilde{X}$ com tais propriedades serão denominados de grafos 2-orientados.

Dado um grafo 2-orientado $\widetilde{X}$, podemos construir uma função $p : \widetilde{X} \to X$ que leva todos os vértices de $\widetilde{X}$ para o vértice de X e cada aresta de $\widetilde{X}$ para a aresta correspondente em X. Essa função é um homeomorfismo no interior de cada aresta e preserva a orientação. É evidente que a condição de espaço de recobrimento é satisfeita para p. Por outro lado, todo espaço de recobrimento de X é, na verdade, um grafo que herda uma 2-orientação de X. Alguns exemplos de tais recobrimentos são apresentados na Figura 4.7.

Um recobrimento simplesmente conexo de $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ é dado pela árvore regular de grau 4, que é uma árvore infinita com 4 arestas em cada vértice, como ilustrado na Figura 4.8.

◁

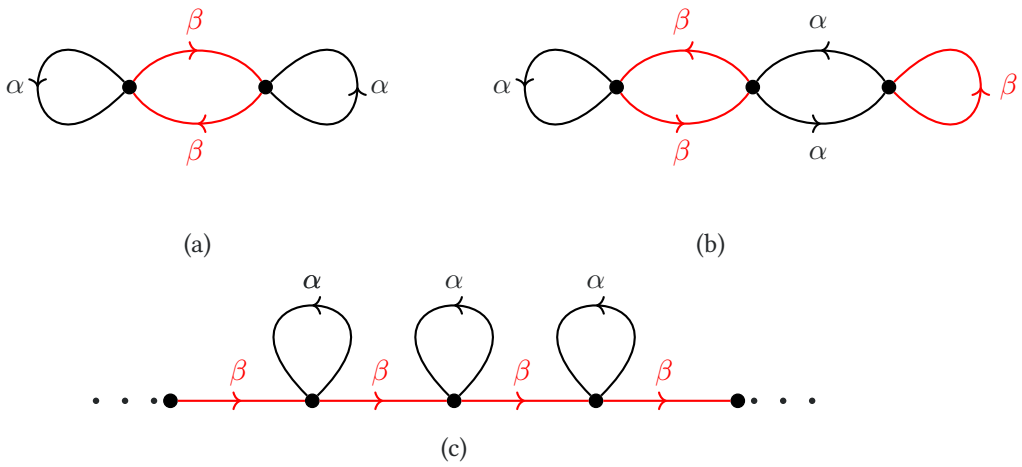


Figura 4.7.: Exemplos de espaços de recobrimento de $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

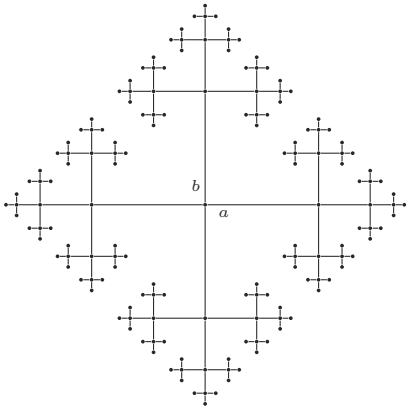


Figura 4.8.: Recobrimento universal de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. As arestas para cima são rotuladas com b e as para a direita com a.

4.2. Grupos Propriamente Descontínuos

Uma das famílias mais importantes de aplicações de recobrimento são obtidos pela ação de grupos de homeomorfismos propriamente descontínuos, que descreveremos no que se segue.

Começamos pela observação que o conjunto de todos os homeomorfismos de um espaço topológico X é um grupo quando munido com a operação de compo-

sição. Um subgrupo G deste grupo é chamado de grupo de homeomorfismos de X. Lembremos que uma ação de um grupo G em um espaço X é uma aplicação $G\times X \to X$, onde a imagem de (g, x) será denotado por gx, tal que $(gh)x = g(hx)$ e $ex = x$.

Para $x \in X$, a órbita de x é o conjunto $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$. É fácil ver que duas órbitas são disjuntas ou idênticas. Assim, elas particionam o espaço X. O conjunto de todas as órbitas é denotado por X/G, e será munido da topologia quociente da aplicação $p : X \to X/G$ levando x a $G(x)$, e é chamado de **espaço de órbitas**. Observe que nessa topologia a aplicação canônica $p : X \to X/G$ é claramente contínua e também aberta, pois, para $U \subset X$ aberto e U' sua imagem em X/G, então

$$p^{-1}\left(U'\right) = \bigcup\{gU \mid g \in G\}$$

que é uma união de conjuntos abertos e, portanto, é aberto.

Uma ação de um grupo de homeomorfismos G em um espaço X é dita **propriamente descontínua** se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que

$$gU \cap U \neq \varnothing \Rightarrow g = e,$$

em que e é o elemento identidade de G. Neste caso, dizemos que U é uma **vizinhança conveniente** do ponto x e que G é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos do espaço topológico X.

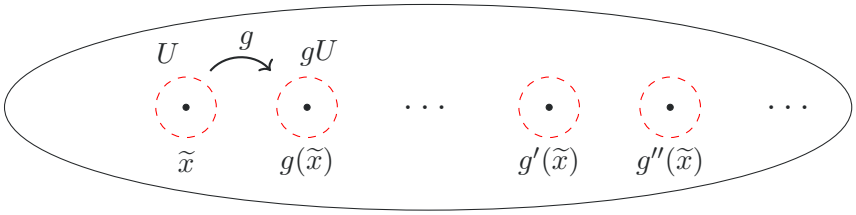


Figura 4.9.: Ação propriamente descontínua de um grupo G.

Para apresentarmos uma descrição mais concreta do espaço das órbitas de diversos exemplos, precisamos da definição de conjunto fundamental. Um subconjunto fechado $F \subset X$ é um **conjunto fundamental** para a ação de G sobre X se $G \cdot F = X$ e existe uma vizinhança aberta $U = U_F$ de F tal que, para cada $K \subset X$ compacto, o conjunto $\{g \in G : gU \cap K \neq \emptyset\}$ é finito (condição de finitude local).

O próximo resultado nos diz que para descrevermos o espaço de órbitas podemos nos restringir aos conjuntos fundamentais. Apesar de extremamente simples, ele nos permitirá descrever o espaço das órbitas de várias ações.

Suponha que F seja um conjunto fundamental para a ação propriamente descontínua de G em um espaço primeiro enumerável e de Hausdorff X. Então a aplicação de projeção natural $p : F/G \to X/G$ é um homeomorfismo.

Demonstração. A aplicação p é contínua pela definição da topologia quociente. Claramente, p é uma bijeção. Resta mostrar que p é uma aplicação fechada. Como o conjunto F é fechado, basta mostrar que a projeção $q : F \to X/G$ é uma aplicação fechada.

Suponha que (x_n) seja uma sequência em F tal que $q(x_n)$ converge para algum $y \in X/G, y$ que é representado por um ponto $x \in F$. Então existe uma sequência $g_n \in G$ tal que $g_n(x_n)$ converge para x. Como $\{g_n(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é compacto que podemos assumir sem perda de generalidade que está contido em U_F, assim a hipótese de finitude local implica que a sequência (g_n) é finita. Portanto, após a remoção dos primeiros temos temos que, $g_n = g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O fato de F ser fechado implica então que $x \in F$. Logo temos que x é um ponto de acumulação de (x_n) e consequentemente que $q : F \to F/G$ é uma aplicação fechada. ■

Exemplo 4.2.

A ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, x) &\longrightarrow x + z. \end{aligned}$$

é propriamente descontínua com as vizinhanças convenientes sendo qualquer intervalo aberto de diâmetro menor que 1.

A órbita de x é $G(x) = \{x + z, z \in \mathbb{Z}\}$, e o conjunto $[0, 1]$ é um conjunto fundamental e assim $X/G = [0, 1]/\{0 \sim 1\} = \mathbb{S}^1$.

◁

De maneira equivalente, dizemos que a ação de um grupo de homeomorfismos G em um espaço topológico X é propriamente descontínua se, para todo ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U tal que, para quaisquer elementos distintos g e h em G, os conjuntos $g \cdot U$ e $h \cdot U$ são disjuntos, ou seja, não têm interseção.

A ação do grupo G sobre X é dita **livre** se $g \cdot x \neq x$, para todo $x \in X$ e todo $g \in G, g \neq e$. Nesse caso, dizemos que G age **livremente** em X.

Se o grupo G age de forma totalmente descontínua sobre X, então G age livremente em X.

Dado um grupo G com uma ação propriamente descontínua em um espaço X, as órbitas $G \cdot x$ de cada ponto em X formam conjuntos discretos. Uma vizinhança V é conveniente em relação a um grupo propriamente descontínuo G se, e somente se, ela contiver no máximo um elemento de cada órbita de G.

Se X é um espaço de Hausdorff, então as órbitas $G \cdot x$ relativas a um grupo propriamente descontínuo G de homeomorfismos de X são subconjuntos fechados de X. De fato, se y não pertence a $G \cdot x$, então uma vizinhança conveniente de y contém no máximo um ponto gx da órbita $G \cdot x$. Como gx é um conjunto fechado, podemos escolher uma vizinhança menor de y que seja disjunta de $G \cdot x$. Em particular, quando X é um espaço de Hausdorff compacto, qualquer grupo propriamente descontínuo G de homeomorfismos de X é finito. De fato, escolhendo um ponto fixo $x_0 \in X$, a função que leva cada elemento g em G para gx_0 é uma bijeção da G para a órbita $G \cdot x_0$. Essa órbita, sendo discreta e fechada no espaço compacto X, deve ser finita.

Exemplo 4.3 — Toro n-dimensional.

Vamos considerar a seguinte ação de $\mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (v, x) &\longrightarrow x + v. \end{aligned}$$

Esta ação é propriamente descontínua. Para demonstrar esse fato, basta considerar conjuntos abertos de diâmetro menor que 1. Pode-se mostrar que o conjunto fundamental dessa ação é o cubo unitário e, olhando para as identificações das faces desse cubo, que o espaço quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é o toro n-dimensional.

◁

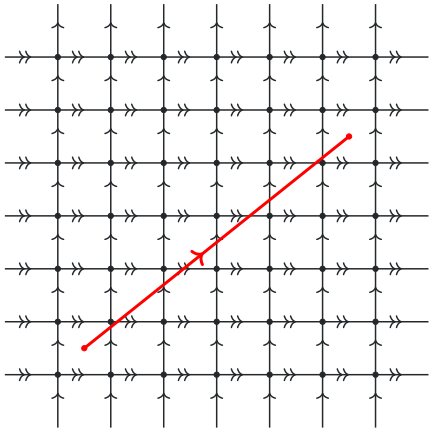


Figura 4.10.: Ação de $\mathbb{Z}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.4 — Espaço Projetivo.

Considere a função antipodal $-\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$, levando o ponto x em seu antipodal $-x$. Definimos o grupo G como $G = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, no qual a operação de grupo é a composição de funções. O grupo G atua de forma propriamente descontínua sobre $\mathbb{S}^n$.

De fato, se escolhermos um conjunto aberto $U \subset \mathbb{S}^n$ contido em um dos hemisférios, podemos observar que:

$$-\mathrm{id} \cdot U \cap U = \emptyset.$$

Nesse caso, o espaço quociente $\mathbb{S}^n/G$ é o espaço projetivo n-dimensional.

◁

Seja G um grupo de homeomorfismos agindo livremente no espaço X. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A ação do grupo G é propriamente descontínua.
2. A projeção canônica $p : X \to X/G$ é uma aplicação de recobrimento.
3. A aplicação $p : X \to X/G$ é localmente injetiva.

Demonstração.
1 $\Rightarrow$ **2** Sejam $y = p(x)$ um ponto arbitrário em X/G e U uma vizinhança conveniente de x. Como p é uma aplicação aberta, $V = p(U)$ é uma vizinhança aberta de y. Temos então que:

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$$

é a união de conjuntos abertos dois a dois disjuntos, e a restrição da aplicação contínua p para cada um desses conjuntos abertos é injetiva; portanto, é um homeomorfismo em $p(g \cdot U) = p(U) = V$.
2 $\Rightarrow$ **3** Toda aplicação de recobrimento é localmente injetiva dada que é um homeomorfismo local.
3 $\Rightarrow$ **1** Como a aplicação é localmente injetiva e a ação é livre temos que cada ponto $x \in X$ pertence à um conjunto aberto U no qual não existem dois pontos distintos da mesma órbita. Consequentemente U é uma vizinhança conveniente de x e isso prova que $3 \Rightarrow 1$. ∎

Um recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ é dito um G**-recobrimento** se ele é proveniente de uma ação propriamente descontínua de G em $\widetilde{X}$. Um G-recobrimento é dito trivial se ele é da forma $X \times G \to X$ com G agindo apenas no segundo fator.

O resultado abaixo, que demonstraremos na seção 4.5, conecta os espaços de recobrimento provenientes dos grupos que agem de maneira propriamente descontínua e o grupo fundamental do espaço quociente e fornece uma ferramenta poderosa para determinarmos os grupos fundamentais.

Teorema 4.1

Se X é simplesmente conexo e localmente conexo por caminho e G age de forma propriamente descontínua como um grupo de homeomorfismos em X, então

$$\pi_1(X/G) \cong G.$$

Exemplo 4.5 — Grupo fundamental do toro 2-dimensional.

Pelo Exemplo 4.3, temos que o grupo fundamental é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

◁

Exemplo 4.6 — Grupo fundamental do Plano Projetivo.

Pelo Exemplo 4.4, temos que o grupo fundamental é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

◁

Exemplo 4.7 — Garrafa de Klein.

Considere o grupo de transformações do plano gerado por α e β, onde $\alpha(x, y) = (x + 1, y)$ e $\beta(x, y) = (1 - x, y + 1)$. Uma análise cuidadosa dessa ação deve convencer o leitor de que o espaço de órbitas $\mathbb{R}^2/G$ é a garrafa de Klein. O grupo é definido abstractamente como gerado pelos elementos α e β, e tem a única relação $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}$. (Isso é facilmente verificado geometricamente.)

Este grupo é não abeliano, possui um subgrupo cíclico infinito normal, gerado por α, com um grupo quociente também cíclico infinito, gerado pela imagem de β. De acordo com o Teorema 4.1, este grupo é o grupo fundamental da garrafa de Klein.

◁

Exemplo 4.8 — Espaço Lenticular.

Considere $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ vista como

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \mid |z| = 1\}.$$

Sejam $\epsilon = e^{2\pi i/p}$ a p-ésima raiz primitiva da unidade e $q_1, \ldots, q_n$ inteiros coprimos a p.

Considere $\mathbb{Z}_p = \left\{1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}\right\}$ e permita que ela aja sobre $\mathbb{S}^{2n-1}$ como

$$\epsilon\,(z_1, \ldots, z_n) = (\epsilon^{q_1} z_1, \ldots, \epsilon^{q_n} z_n).$$

Essa ação é propriamente descontínua, assim como qualquer ação por um grupo finito, tal que $gx = x \Rightarrow g = e$ (o que o leitor deve verificar). O espaço de órbitas é denotado por $L\,(p; q_1, \ldots, q_n)$ e é chamado de espaço lenticular.

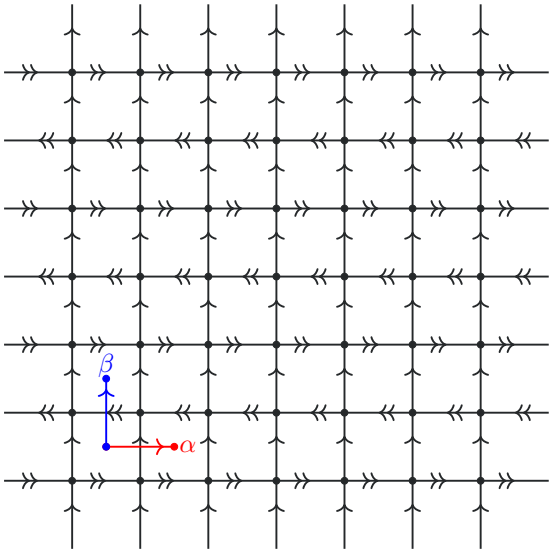


Figura 4.11.: A ação de G em $\mathbb{R}^2$ cujo espaço de órbitas $\mathbb{R}^2/G$ é a garrafa de Klein.

De acordo com o Teorema 4.1, o grupo fundamental de qualquer um desses espaços é $\mathbb{Z}_p$. No caso tridimensional quando $n = 2$, $L(p; 1, q)$ é frequentemente denotado como $L(p, q)$.

◁

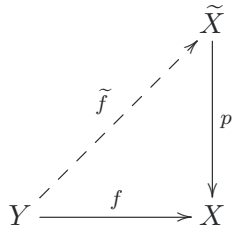
Dado um grupo abeliano finitamente gerado G, pelo Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitamente Gerados, temos que $G \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_m}$ onde $q_1, \ldots, q_m$ são potências de números primos (não necessariamente distintos). Dessa forma, através de somas diretas de espaços lenticulares e de círculos $\mathbb{S}^1$ é possível construir um espaço que tenha G como grupo fundamental.

4.3. Levantamento de Caminhos e Homotopias

Uma das características fundamentais dos espaço de recobrimento é o seu comportamento em relação ao levantamento de aplicações.

O **levantamento** de uma função contínua $f : Y \to X$ é uma função contínua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$. Ou seja, o problema de levantamento solicita a

existência de uma aplicação $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ que torne o diagrama abaixo comutativo.



Uma aplicação que verifica essa propriedade é denominada de **levantamento** de f.

Antes de atacarmos o problema da existência do levantamento, começaremos com dois resultados preliminares: a existência do levantamento local e a unicidade de tal levantamento sobre certas condições.

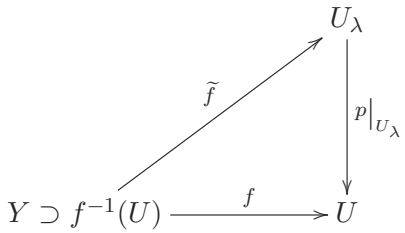
Unicidade do Levantamento. Sejam X um espaço de Hausdorff e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Se Y é conexo e $g : Y \to X$ é contínua, então dois levantamentos $\widetilde{g}, \hat{g} : Y \to \widetilde{X}$ de g que coincidem em um ponto $y_0 \in Y$ são iguais.

Demonstração. O conjunto $A = \{y \in Y, \widetilde{g}(y) = \hat{g}(y)\}$ não é vazio, pois $y_0 \in A$. Como $\widetilde{X}$ é um espaço de Hausdorff, A é fechado em Y uma vez que é a imagem inversa da diagonal sob a aplicação $\widetilde{g} \times \hat{g} : Y \to \widetilde{X} \times \widetilde{X}$, e a diagonal é fechada.

Para concluir que $\widetilde{g} = \hat{g}$, basta provar que A é aberto em Y. Para isso, seja $a \in A$. Existe uma vizinhança V de $\widetilde{g}(a) = \hat{g}(a)$ tal que $p|_V$ é injetiva. Pela continuidade de $\widetilde{g}$ e $\hat{g}$, existe uma vizinhança U de a com $\widetilde{g}(U) \subset V$ e $\hat{g}(U) \subset V$. Portanto, para todo $y \in U$ temos $p\widetilde{g}(y) = g(y) = p\hat{g}(y)$ e, como p é injetiva em V, temos que $\widetilde{g}(y) = \hat{g}(y)$. Consequentemente, temos que $U \subset A$ e logo A é aberto. ∎

Existência do Levantamento Local. Sejam X um espaço de Hausdorff e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Sejam $y_o \in Y$, $x_0 = f(y_o) \in U$ aberto elementar de X e $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Então existem um único λ e um levantamento local $\widetilde{f}$ tal que $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}$ cuja imagem está em U_λ, de modo que o diagrama a seguir é

comutativo:



Além disso, $\widetilde{f} = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ f$.

Demonstração. Seja λ tal que $\widetilde{x} \in U_\lambda$. Mostraremos que $\widetilde{f} = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ f$ é um levantamento cuja imagem está em U_λ.

Observe que $p|_{U_\lambda}$ é um homeomorfismo, pela definição de espaço de recobrimento, logo existe a inversa de $p|_{U_\lambda}$. A composição $\widetilde{f} = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ f$ é contínua e, é claro, torna o diagrama comutativo, logo é levantamento. Além disso, a imagem reside em U_λ pois $(p|_{U_\lambda})^{-1} \circ f$. A unicidade segue da proposição anterior. ∎

A seguir provaremos o Teorema de Levantamento de Homotopias que é de suma importância para determinar o grupo fundamental de muitos espaços e para isso precisaremos do seguintes lemas:

Lema 4.2 — Número de Lebesgue

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma cobertura aberta de X. Então, existe um número real positivo λ tal que todo subconjunto de X de diâmetro menor que λ está inteiramente contido em U_i, para algum i.

Demonstração. Por compacidade, podemos assumir que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura aberta finita do espaço métrico compacto X.

Agora, suponha que não exista tal λ. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n um conjunto de diâmetro menor $1/n$ tal que $A_n \notin U_i$, para qualquer i. Para cada n, escolha $x_n \in A_n$ e considere x um ponto de acumulação da sequência resultante. Temos que $x \in U_i$, para algum i, então para algum $\lambda > 0, U(x, \lambda) \subset U_i$. Escolha n suficientemente grande de modo que $1/n < \lambda/2$, e seja $m > n$ tal que

$x_m \in U(x, \lambda/2)$. Logo $x_m \in A_m$, e consequentemente $A_m \cap U(x, \lambda/2) \neq \varnothing$. Como o diâmetro de A_m é menor que $\lambda/2$, temos que $A_m \subset U(x, \lambda) \subset U_i$, uma contradição. ∎

Qualquer número λ que funcione no lema anterior é chamado de **número de Lebesgue** para a cobertura.

Lema 4.3 — de Wallace

Sejam Y um espaço topológico e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de $Y \times I$. Então, para qualquer ponto $y \in Y$, existem uma vizinhança N de y em Y e um inteiro positivo n de modo que $N \times [i/n, (i+1)/n] \subset U_\alpha$, para algum α e para todo $0 \leq i < n$.

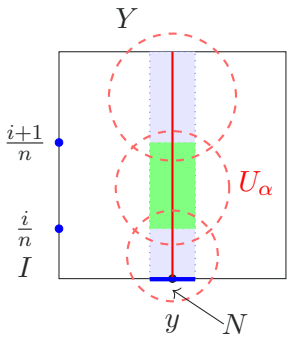


Figura 4.12.: A vizinhança $N \times [i/n, (i+1)/n] \subset U_\alpha$

Demonstração. Observamos inicialmente que podemos cobrir $\{y\} \times I$ por um refinamento de $\{U_\alpha\}$ da forma $N_1 \times V_1, N_2 \times V_2, \ldots, N_k \times V_k$ pela compacidade de I e pela definição da topologia do produto.

O Lema de Lebesgue implica que existe um $n > 0$ tal que cada $[i/n, (i+1)/n]$ está contido em um dos V_j. Basta então tomar este n e $N = \bigcap N_i$. ∎

Teorema 4.4 — Levantamento de caminhos

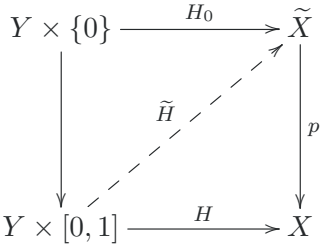
Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento, e seja $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ um ponto na fibra sobre x, ou seja, $p(\widetilde{x}) = x$. Então, para todo caminho contínuo $\alpha : [0,1] \to X$ com $\alpha(0) = x$, existe um único levantamento $\widetilde{\alpha} : [0,1] \to \widetilde{X}$ de α que começa em $\widetilde{x}$, ou seja, $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x}$ e $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

Demonstração. Se o caminho α estiver contido em uma vizinhança elementar U a existência do levantamento é direta. Para demonstrarmos isso, seja V a folha em $p^{-1}(U)$ que contém $\widetilde{x}$, então, p leva V homeomorficamente em U, e assim existe uma única $\widetilde{\alpha}$ em V com as propriedades necessárias.

É claro que α não estará, em geral, contido em uma vizinhança elementar U. No entanto, podemos sempre expressar α como o concatenação de um número finito de caminhos "mais curtos", cada um dos quais está contido numa vizinhança elementar, e depois aplicar o argumento do parágrafo anterior a cada um destes caminhos mais curtos indutivamente.

Os detalhes deste procedimento podem ser descritos como segue. Seja $\{U_i\}$ uma cobertura de X por vizinhanças elementares, então $\left\{\alpha^{-1}(U_i)\right\}$ é uma cobertura aberta do espaço métrico compacto $[0,1]$. Escolha um inteiro n tão grande tal que $1/n$ seja menor que o número de Lebesgue desta cobertura. Divida o intervalo $[0,1]$ nos subintervalos fechados $[0,1/n], [1/n, 2/n], \ldots, [(n-1)/n, 1]$. Observe que α leva cada subintervalo em uma vizinhança elementar em X. Agora definimos $\widetilde{\alpha}$ indutivamente nesses subintervalos, começando com $[0,1/n]$. ∎

Levantamento de Homotopia. Sejam X e Y espaços de Hausdorff e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Seja $H : Y \times I \to X$ uma homotopia e $H_0 : Y \times \{0\} \to \widetilde{X}$ um levantamento da restrição de H a $Y \times \{0\}$. Então existe uma única homotopia $\widetilde{H} : Y \times I \to \widetilde{X}$ fazendo o seguinte diagrama comutar:



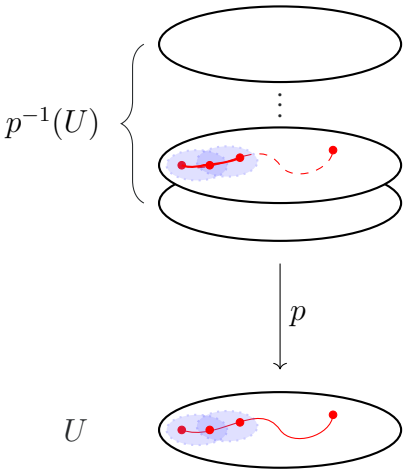


Figura 4.13.: Levantamento de caminho.

Além disso, se H é uma homotopia relativa a Y' para algum $Y' \subset Y$, então $\widetilde{H}$ também o é.

Demonstração. A demonstração da existência tem dois passos. Primeiro, iremos construir um levantamento local e depois colar todas essas "peças" do levantamento, construindo assim o levantamento global.

Começaremos construindo o levantamento local, isto é, para cada $y \in Y$ um levantamento $\widetilde{H}_y : V_y \times [0,1] \to \widetilde{X}$, onde V_y é um vizinhança elementar aberta de y.

Aplicando o Lema 4.3, para a cobertura $H^{-1}(U_{x_i})$ temos que existe um vizinhança V_y tal que $V_y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$.

Procederemos por indução na partição do intervalo $\{t_0, \ldots, t_r\}$ sendo $t_j = j/n$:

- O caso inicial é simplesmente a homotopia:

$$\widetilde{H}_y|_{V_y \times \{0\}} = H_0|_{V_y \times \{0\}}$$

- Para o passo indutivo, suponhamos dada $\widetilde{H}_{y,i} := \widetilde{H}_y|_{V_y \times [0,t_i]}$.

  Vamos mostrar que podemos reduzir o problema à uma única folha do levantamento, ou seja, que $V_y \times \{t_i\} \subset \widetilde{H}_{y,i}^{-1}(U_{i+1}^{\lambda})$.

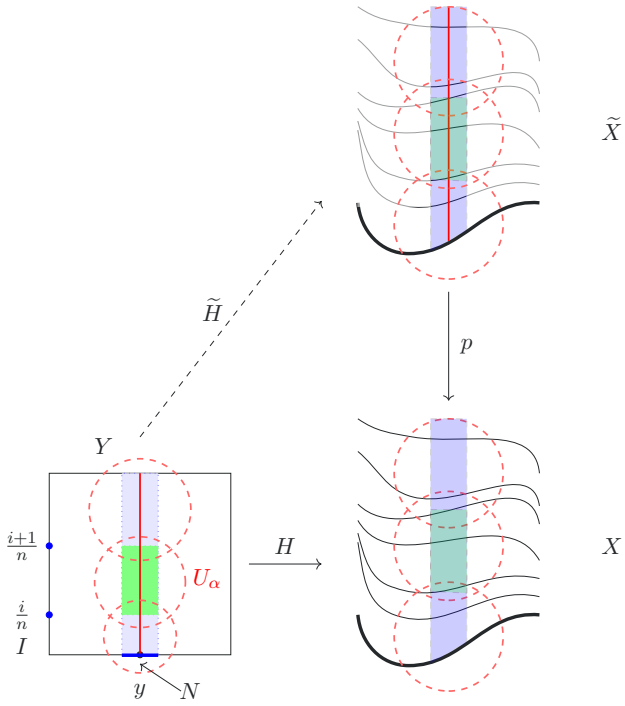


Figura 4.14.: Levantamento de Homotopia

Como a imagem da homotopia $H|_{V_y \times [t_i, t_{i+1}]}$ está em U_{i+1}, resulta que $H(y, t_i) \in U_{i+1}$. Então, temos:

$$\widetilde{H}_{y,i}(y, t_i) \in p^{-1}(U_{i+1}) = \bigcup_{\lambda} U_{i+1}^{\lambda}$$

onde a união é disjunta. Desta forma, existe um único λ tal que $\widetilde{H}_y(y, t_i) \in U_{i+1}^{\lambda}$. Consequentemente $(y, t_i) \in \widetilde{H}_{y,i}^{-1} U(_{i+1}^{\lambda})$, que é aberto, e por tanto existe uma vizinhança W_y que satisfaz $W_y \times \{t_i\} \subset \widetilde{H}_{y,i}^{-1}(U_{i+1}^{\lambda})$. Reduzimos então a vizinhança original V_y a $V_y \cap W_y$ e então $V_y \times \{t_i\} \subset \widetilde{H}_{y,i}^{-1}(U_{i+1}^{\lambda})$.

Como $V_y \times [t_i, t_{i+1}] \subset H^{-1}(U_{i+1})$ pelo Lema 4.3 do levantamento local, temos o levantamento:

$$\widetilde{H}_y|_{V_y \times [t_i, t_{i+1}]} := (p|_{U_{i+1}^{\lambda}})^{-1} \circ H.$$

Assim só necessitamos demonstrar que a aplicação:

$$\widetilde{H}_y|_{V_y\times[0,t_{i+1}]} = \begin{cases} \widetilde{H}_y|_{V_y\times[0,t_i]} & \text{se } 0 \leq t \leq t_i \\ \widetilde{H}_y|_{V_y\times[t_i,t_{i+1}]} & \text{se } t_i \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

está bem definida, é continua e é levantamento.

O fato que está definida é direto. Basta observar que o valor de cada pedaço em $V_y \times \{t_i\}$ coincide, ou seja, para qualquer $y' \in V_y$:

$$p|_{U^\lambda_{i+1}}(\widetilde{H}_y|_{[0,t_i]}(y',t_i)) = H(y',t_i) = p|_{U^\lambda_{i+1}}(\widetilde{H}_y|_{[t_i,t_{i+1}]}(y',t_i))$$

e como $p|_{U^\lambda_{i+1}}$ é um homeomorfismo, são iguais.

A continuidade segue do Lema de Colagem e o fato que é levantamento pode ser demonstrado facilmente.

Com esta indução, temos, para cada $y \in Y$, um levantamento $\widetilde{H}_y : V_y \times [0,1] \to \widetilde{X}$. Mostraremos agora que podemos colar todos estes levantamentos para construir um levantamento global.

Para isso sejam $y, y' \in Y$ e os levantamentos correspondentes $\widetilde{H}_y$ e $\widetilde{H}_{y'}$. Basta mostrar que ambos coincidem na parte comum dos domínios: $V_y \cap V_{y'}$.

Para provar isto, consideramos $y'' \in V_y \cap V_{y'}$. Queremos mostrar que $\widetilde{H}_y(y'',\cdot) = \widetilde{H}_{y'}(y'',\cdot)$. Mas como ambos são levantamentos de H em $\{y''\}\times[0,1]$ y então ambas satisfazem:

$$\widetilde{H}_y(y'',0) = H_0(y'',0) = \widetilde{H}_{y'}(y'',0)$$

Então, como coincidem em um ponto do conjunto conexo ($\{y''\}\times[0,1]$), temos pelo Lema 4.3 que coincidem.

Esse mesmo argumento garante a unicidade do levantamento.

■

O levantamento é um problema homotópico. De fato, se $f : Y \to X$ tiver um levantamento $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$, então toda função $g \simeq f$ também terá levantamento. Apenas considere a homotopia $H : f \simeq g$, e pelo lema de levantamento existe $\widetilde{f}$, de forma que $\widetilde{g} = \widetilde{f}_1$ é um levantamento de g.

da Monodromia. Seja $p : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento. Suponha que $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ sejam dois caminhos em $\widetilde{X}$ tendo o mesmo ponto inicial $\widetilde{x}_0$. Então $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ são equivalentes se, e somente se, $p\widetilde{\alpha}, p\widetilde{\beta}$ são caminhos equivalentes em X.

Demonstração. Se $F : I \times I \to \widetilde{X}$ é uma aplicação contínua tal que

$$F(s,0) = \widetilde{\alpha}(s), \qquad F(s,1) = \widetilde{\beta}(s), \qquad s \in I$$
$$F(0,t) = \widetilde{x}_0, \qquad F(1,t) = \widetilde{x}_1, \qquad t \in I,$$

então $p \circ F : I \times I \to X$ é uma aplicação contínua tal que para todo $s \in I, p \circ F(s,0) = p\widetilde{\alpha}(s), p \circ F(s,1) = p\widetilde{\beta}(s)$ e para todo $t \in I, p \circ F(0,t) = p\left(\widetilde{x}_0\right), p \circ F(1,t) = p\left(\widetilde{x}_1\right)$. Isso prova a implicação.

Por outro lado, suponha que $F : I \times I \to X$ seja uma homotopia entre $p\widetilde{\alpha}$ e $p\widetilde{\beta}$ relativa a $\{0,1\} \subset I$. Pela propriedade de levantamento de homotopia, existe uma única homotopia $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$ e $p\widetilde{F} = F$. Restringindo $\widetilde{F}$ em $(s,0), s \in I$, encontramos um caminho $s \to \widetilde{F}(s,0)$ começando em $\widetilde{x}_0$ e levantando $p\widetilde{\alpha}$. Claramente, $\widetilde{\alpha}(s)$ também é um caminho em $\widetilde{X}$ começando em $\widetilde{x}_0$ e levantando p $\widetilde{\alpha}$. Portanto, pela propriedade de unicidade dos caminhos de recobrimento, $\widetilde{F}(s,0) = \widetilde{\alpha}(s)$ para todos $s \in I$.

Por um argumento semelhante, temos $\widetilde{F}(s,1) = \widetilde{\beta}(s)$. Restringindo $\widetilde{F}$ em $(0,t), t \in I$, obtemos um caminho $\widetilde{F}(0,t)$ que se projeta sob p para a constante caminho em x_0; por outro lado, o caminho constante $\widetilde{x}_0$ em $\widetilde{X}$ também começa em $\widetilde{x}_0$ e se projeta sob p para o caminho constante ax_0 em X. Portanto, novamente pela proposição de Unicidade do Levantamento, $\widetilde{F}(0,t)$ deve ser um caminho constante baseado em $\widetilde{x}_0$. Da mesma forma, o caminho $\widetilde{F}(1,t)$ deve ser um caminho constante baseado em algum ponto $\widetilde{x}_1$ sobre x_1. Isso prova que $\widetilde{F}$ é uma homotopia entre $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ relativa à $\{0,1\}$. Portanto, $\widetilde{\alpha}$ é equivalente a $\widetilde{\beta}$.

■

Por definição, dois caminhos no espaço são equivalentes, significa que têm os mesmos pontos inicial e terminal. Assim, se $p\widetilde{\alpha}$ e $p\widetilde{\beta}$ são equivalentes, então pelo teorema acima $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ são equivalentes. Sabemos que eles têm o mesmo ponto inicial. Portanto, é uma consequência e não uma hipótese do teorema acima que $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ deve ter o mesmo ponto terminal.

Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Seja $\alpha : (I, \partial I) \to (X, y_0)$ um laço. Se α é homotópico à um laço constante relativo a ∂I então qualquer levantamento de α para um caminho é um laço e é homotópico à um laço constante relativo a ∂I.

Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Se α é um laço com base em X em x_0 que se levanta para um laço em $\widetilde{X}$ com base em $\widetilde{X}$ em $\widetilde{x}_0$, então qualquer laço homotópico à α relativo à ∂I também se levanta para um laço em $\widetilde{X}$ com base em $\widetilde{x}_0$. Ou seja, o levantamento de um laço é uma propriedade da classe $[\alpha]$.

Lembramos que qualquer aplicação contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo de grupo $f_\sharp : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ para todo $x \in X$, definido por $f_\sharp[\alpha] = [f \circ \alpha]$. Se $p : \widetilde{X} \to X$ é um aplicação de recobrimento, então sabemos que ela é sobre. Mas a aplicação induzida, em geral, não precisa ser sobrejetiva. No entanto, segue do teorema anterior que $p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é sempre uma aplicação injetiva.

Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Então

$$p_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

é injetiva. E sua imagem consiste nas classes de laços com base em x_0 em X que levantam para laços com base em $\widetilde{x}_0$ em $\widetilde{X}$.

Demonstração. Um elemento do kernel de $p_\#$ é representado por um laço $\widetilde{\alpha}_0 : I \to \widetilde{X}$ com uma homotopia $H_t : I \to X$ de $\alpha_0 = p\widetilde{\alpha}_0$ para o laço trivial. Pelas corolários anteriores, existe uma levantamento de homotopia $\widetilde{H}_t$ começando com $\widetilde{\alpha}_0$ e terminando com um laço constante. Portanto $[\widetilde{\alpha}_0] = 0$ em $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e $p_\#$ é injetiva.

Para a segunda afirmação da proposição, observamos que laços baseados em x_0 que são levantados para laços baseados em $\widetilde{x}_0$ representam elementos da imagem de $p_\# : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Por outro lado, um laço representando um elemento da imagem de $p_\#$ é homotópico a um laço com tal levantamento, portanto, pelo Teorema de Levantamento de Homotopias 4.3, o próprio laço deve ter tal levantamento. ∎

Se um espaço de Hausdorff, conexo por caminho e localmente conexo por caminho X tiver um espaço de recobrimento não trivial, então $\pi_1(X, x_0) \neq 1$.

Demonstração. Sejam $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1$ dois pontos em $p^{-1}(x_0)$ e α um caminho entre eles. Então $p \circ \alpha$ é um laço com base em X em x_0 que não se levanta para um laço com base em $\widetilde{X}$ em $\widetilde{x}_0$. Pelo Corolário 4.3, segue-se que $[p \circ \alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ não está na imagem de $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e, portanto, é um elemento não trivial. ∎

Como consequência do Corolário 4.3, conhecemos vários espaços com grupos fundamentais não triviais: o círculo, a garrafa de Klein, o toro e o plano projetivo. Mais tarde, calcularemos completamente esses grupos fundamentais.

O número de folhas de um espaço de recobrimento $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ com X e $\widetilde{X}$ conexo por caminho é igual ao índice de $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ em $\pi_1(X, x_0)$.

Demonstração. Para um laço α em X baseado em x_0, seja $\widetilde{\alpha}$ seu levantamento para $\widetilde{X}$ começando em $\widetilde{x}_0$. Um produto

$$\beta \cdot \alpha \text{ com } [\beta] \in H = p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$$

tem levantamento $\widetilde{\beta} \cdot \widetilde{\alpha}$ terminando no mesmo ponto que $\widetilde{\alpha}$ já que $\widetilde{\beta}$ é um laço. Assim, podemos definir uma função Φ das classes $H[\alpha]$ para $p^{-1}(x_0)$ enviando $H[\alpha]$ para $\widetilde{\alpha}(1)$. A conectividade por caminho de $\widetilde{X}$ implica que Φ é sobrejetiva, já que $\widetilde{x}_0$ pode ser unido a qualquer ponto em $p^{-1}(x_0)$ por um caminho $\widetilde{\alpha}$ projetando-se para um laço α baseado em x_0. Para ver que Φ é injetiva, observe que $\Phi(H[\alpha_1]) = \Phi(H[\alpha_2])$ implica que $\widetilde{\alpha}_1(1) = \widetilde{\alpha}_2(1)$ e logo $\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1}$ levanta-se para um laço em $\widetilde{X}$ baseado em $\widetilde{x}_0$, e dessa forma $[\alpha_1][\alpha_2]^{-1} \in H$ e, portanto, $H[\alpha_1] = H[\alpha_2]$. ∎

Se $p : \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento com $\widetilde{X}$ simplesmente conexo, então o número de folhas é igual à ordem de $\pi_1(X, x_0)$. **Grupo Fundamental do Espaço Projetivo.** Como a esfera $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa para $n > 1$ e $\mathbb{S}^n$ é um recobrimento duplo do espaço projetivo real n-dimensional $\mathbb{RP}^n$, segue-se que $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

O Corolário 4.3 leva à seguinte questão: suponha que $\widetilde{x}_0$ e $\widetilde{x}_1$ sejam pontos de X tais que $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) = x_0$. Como as imagens dos homomorfismos

$$p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0),$$
$$p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \to \pi_1(X, x_0),$$

se comparam? A resposta é dada pelo seguinte teorema: Seja $(\widetilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X e $x_0 \in X$. Então, os subgrupos $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ para $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ são exatamente uma classe de conjugação de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

Demonstração. Primeiramente provaremos que as imagens dos homomorfismos

$$p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0),$$
$$p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \to \pi_1(X, x_0),$$

são conjugadas. Para isso seja uma classe $[\gamma]$ de caminhos em $\widetilde{X}$ de $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}_1$. Essa escolha define um isomorfismo $u : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)$ pela fórmula $u(\alpha) = [\gamma]^{-1}\alpha[\gamma]$ e um homomorfismo $v(\beta) = (p_\sharp[\gamma])^{-1}\,\beta\,(p_\sharp[\gamma])$. Obtemos assim o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(X, x_0) \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) & \xrightarrow{p_\sharp} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Como $p_\sharp([\gamma])$ é um caminho fechado e, portanto, um elemento de $\pi_1(X, x_0)$. Temos que as imagens de $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e de $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ sob $p_\sharp$ são subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Agora provaremos que todo subgrupo na classe de conjugação do subgrupo $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ pode ser obtido como a imagem $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)$ para alguma escolha do ponto $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Para provar esse fato, começamos observando que qualquer subgrupo nesta classe de conjugação tem a forma $[\alpha]^{-1}\left[p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right][\alpha]$ para alguma escolha do elemento $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$.

Escolhemos então um caminho fechado $\alpha : I \to X$ representando $[\alpha]$. Pelo teorema de Levantamento de Caminhos temos um caminho $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ cobrindo α com o ponto inicial x_0. Seja $\widetilde{x}_1$ o ponto final de $\widetilde{\alpha}$. Então, é fácil ver que

$$p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) = [\alpha]^{-1}\left[p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right][\alpha].$$

■

4.4. Levantamento de Funções

É importante também saber sobre a existência dos levantamentos de aplicações gerais, e não apenas dos levantamentos de homotopias. O seguinte teorema fornece a resposta para o problema do levantamento de forma geral.

Este é um problema importante na topologia, uma vez que muitas questões topológicas podem ser formuladas em termos de encontrar tais levantamentos.

Teorema 4.5 — Levantamento

Suponha que $p : \widetilde{X} \to X$ seja uma aplicação de recobrimento com $p(\widetilde{x}) = x_0$. Suponha que Y seja um espaço topológico conexo por caminho e localmente conexo por caminho e que $f : Y \to X$ seja uma aplicação satisfazendo $f(y_0) = x_0$. Então, existe uma única aplicação, denominada levantamento de f

$$\widetilde{f} : (Y, y_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$$

tal que $p \circ \widetilde{f} = f$ se, e somente se, $f_{\#}\pi_1(Y, y_0) \subset p_{\#}\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Demonstração. A ida é imediata pois $f_{\#} = p_{\#} \circ \widetilde{f}_{\#}$.

Para a volta. Primeiro vamos definir a função $\widetilde{f}$. Dado $y \in Y$, seja $\alpha : I \to Y$ um caminho ligando y_0 a y. Então $f \circ \alpha$ é um caminho em X. Podemos levantar esse caminho para um caminho $\widetilde{\alpha} : (I, 0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ e assim podemos definir a função $\widetilde{f}$ como $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\alpha}(1)$. Dessa forma, temos que $p \circ \widetilde{f}(y) = p(\widetilde{\alpha}(1)) = f(\alpha(1)) = f(y)$.

Precisamos demonstrar que $\widetilde{f}$ está bem definida, ou seja, independe da escolha do caminho. Para isso suponha β outro caminho em Y unindo y_0 a y. Então $\alpha * \beta^{-1}$ é um laço em Y baseado em y_0. Como $[f\alpha * f\beta^{-1}] = f_\sharp[\alpha * \beta^{-1}] \in \operatorname{im} f_\sharp \subset \operatorname{im} p_\sharp$ temos pelo Corolário 4.3 que $f\alpha * f\beta^{-1}$ se levanta para um laço σ baseado em $\widetilde{x}_0$.

Agora dividimos o laço σ no produto $\sigma_1 * \sigma_2^{-1}$ dos caminhos σ_1, σ_2 em $\widetilde{X}$ definindo $\sigma_1(t) = \sigma(t/2), \sigma_2(t) = \sigma(1 - t/2), t \in I$. Então, para cada $t \in I, p\sigma_1(t) = p\sigma(t/2) = (f\alpha) * (f\beta)^{-1}(t/2) = f\alpha(t)$ e, da mesma forma, $p\sigma_2(t) = f\beta(t)$. Como σ_1 e $\widetilde{\alpha}$ concordam em $\widetilde{x}_0$ e $p\sigma_1 = f\alpha = p\widetilde{\alpha}$, podemos aplicar o Teorema da

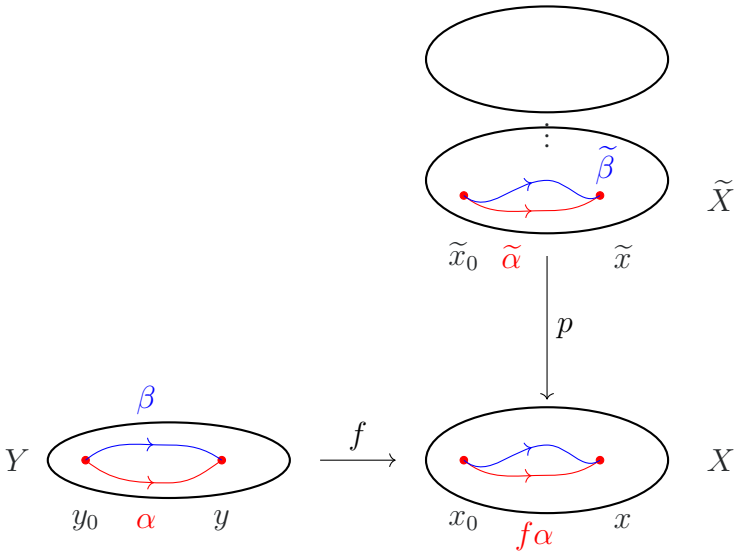


Figura 4.15.: Levantamento da função $f : Y \to X$.

Monodromia para concluir que $\sigma_1(1) = \widetilde{\alpha}(1)$ e $\sigma_2(1) = \widetilde{\beta}(1)$. No entanto, como $\sigma_1(1) = \sigma_2(1) = \sigma\left(\frac{1}{2}\right)$, temos que $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$. Notamos que pela definição segue direto que $p\widetilde{f} = f$.

Finalmente, precisamos mostrar que $\widetilde{f}$ é contínua. Ou seja, dado um conjunto aberto $V \subset \widetilde{X}$ queremos mostrar que $\widetilde{f}^{-1}(V)$ é aberto. Seja $V \subset \widetilde{X}$ sendo V um aberto que se projeta sobre o aberto elementar U e $y \in \widetilde{f}^{-1}(V)$. Temos então que $f(y) \in U \subset Y$. Precisamos encontrar um conjunto aberto $W \subset Y$ contendo y tal que $\widetilde{f}(W) \subset$V. O conjunto $f^{-1}(U) \subset Y$ é aberto porque f é contínua e seja $W \subset f^{-1}(U)$ um subconjunto aberto conexo por caminho de $f^{-1}(U)$ contendo y o que existe pois Y é localmente conexo por caminho. Para mostrar que tal W satisfaz $\widetilde{f}(W) \subset V$, escolha $y' \in W$ e um caminho $\alpha \in W$ de y para y'. Então temos $\widetilde{f}(y') = \widetilde{f \circ \alpha}(1)$, onde $\widetilde{f \circ \alpha}$ é o levantamento de $f \circ \alpha$ começando em $\widetilde{f}(y)$. Esta levantamento pode ser expresso também por $p^{-1}|_U \circ f \circ \alpha$. Isso implica que $\widetilde{f}(y') = q(f(\alpha(1))) \in V$, então $\widetilde{f}^{-1}(V)$ contém W. E logo $\widetilde{f}$ é contínua. ∎

Neste teorema, a hipótese de que o espaço topológico Y seja localmente conexo por caminho não pode ser removida, para isso veja o exercício 38.

Seja Y um espaço topológico simplesmente conexo, e localmente conexo por

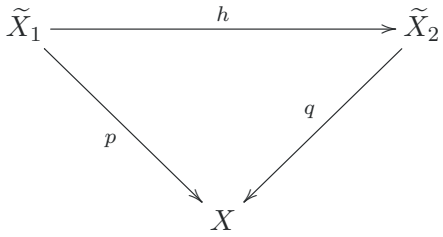
caminho. Seja $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, y_0)$ uma aplicação de recobrimento. Seja $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ uma aplicação. Então, existe um levantamento $\widetilde{f}$ de f levando y_0 a qualquer ponto em $p^{-1}(x_0)$. O levantamento $\widetilde{f}$ é único se a imagem de y_0 for especificada.

Seja $X, \widetilde{X}_1$ e $\widetilde{X}_2$ espaços topológicos conexos por caminho e localmente conexos por caminho. Sejam $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ aplicações de recobrimento com $\widetilde{X}_1$ simplesmente conexo, e $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$ e $x \in X$ tais que $p_i(\widetilde{x}_i) = x$. Então existe uma única aplicação $\widetilde{f} : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ de modo que $\widetilde{f}(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$ e $p_2 \circ \widetilde{f} = p_1$. Além disso, $\widetilde{f}$ é uma aplicação de recobrimento.

Demonstração. Esse fato decorre diretamente do Lema 4.3, exceto pela afirmação de que $\widetilde{f}$ é uma aplicação de recobrimento que será deixado para o leitor. ∎

4.5. Homomorfismos de Recobrimento e Transformações de Deck

Sejam $(\widetilde{X}_1, p)$ e $(\widetilde{X}_2, q)$ espaços de recobrimento do mesmo espaço X. Um **homomorfismo de recobrimento** h de $(\widetilde{X}_1, p)$ a $(\widetilde{X}_2, q)$ é uma aplicação contínua $h : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ tal que o diagrama é comutativo.



Se além disso, se h é um homeomorfismo, então h é chamado de **isomorfismo**. Se houver um isomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p)$ a $(\widetilde{X}_2, q)$, então estes são chamados de **espaços de recobrimento isomorfos** ou **equivalentes** , caso contrário, são considerados espaços de recobrimento distintos.

Um isomorfismo de um espaço de recobrimento sobre si mesmo é chamado de **automorfismo** ou **transformação de deck**.

Um homomorfismo de recobrimento h de $(\widetilde{X}_1, p)$ a $(\widetilde{X}_2, q)$ é uma aplicação de recobrimento e assim $(\widetilde{X}_1, h)$ é um recobrimento de $\widetilde{X}_2$.

Exemplo 4.9.

Considere o espaço de recobrimento $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ onde $p(z) = z^n$. Nesse caso as transformações de deck são isomorfismos de recobrimento $F : (\mathbb{S}^1, p_n) \to \mathbb{S}^1, p_n)$, satisfazendo $p_n \circ F = p_n$. Em outras palavras, $(F(z))^n = z^n$, e então $F(z) = \mu z$ para algum μ raiz n-ésima da unidade, i.e., com $\mu^n = 1$. A aplicação $F(z) = \mu z$ é uma transformação de deck para qualquer raiz n-ésima da unidade e qualquer transformação de deck deve ter esta forma. Isso nos diz que o grupo de deck é $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \cong \mathbb{Z}_n$. Essas transformações são ilustradas na Figura 4.16.

◁

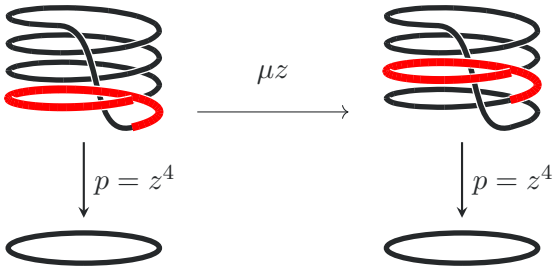
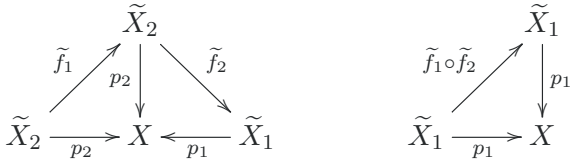


Figura 4.16.: A transformação de deck $F(z) = \mu z$ age "girando as fibras e carregando elas para cima".

Seja X espaço topológico simplesmente conexo, conexo por caminho e localmente conexo por caminho. Sejam $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ aplicações de recobrimento com $\widetilde{X}_1$ e $\widetilde{X}_2$ simplesmente conexos. Se $\widetilde{x}_i \in \widetilde{X}_i$ são tais que $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$ então existe uma única aplicação $\widetilde{f} : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ \widetilde{f} = p_1$ e $\widetilde{f}(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$.

Além disso, $\widetilde{f}$ é um isomorfismo de recobrimento.

Demonstração. Usando o Corolário 4.4 temos que existem aplicações de recobrimento $\widetilde{f}_1 : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ e $\widetilde{f}_2 : \widetilde{X}_2 \to \widetilde{X}_1$ tais que $\widetilde{f}_2 \circ \widetilde{f} :_1 \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_1$ tal que $\widetilde{f}_2 \circ \widetilde{f}$ é um levantamento de p_1 para o recobrimento $\widetilde{X}_1$ com $f_2 f_1(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_1$.



Mas a identidade $\widetilde{x}_1$ também é um levantamento de p_1 com $\mathrm{id}(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_1$. Pela unicidade do levantamento temos $f_2 f_1 = \mathrm{id}_{\widetilde{X}_1}$. O mesmo argumento mostra que $f_1 f_2 = \mathrm{id}_{\widetilde{X}_2}$. ∎

Assim, todos os espaços de recobrimento universais, i.e., simplesmente conexos, de um determinado espaço são equivalentes. Eles nem sempre existem, mas existem se impusermos algumas restrições, como demonstrado no Teorema 4.6.

Seja $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ o conjunto de todos os automorfismos de um espaço de recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X.

A aplicação identidade $1_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é um automorfismo e o inverso de um automorfismo é novamente um automorfismo. Consequentemente, $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ é um grupo sob composição usual de aplicações.

O grupo $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ é denominado de **grupo de automorfismo** do espaço de recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X. Esses automorfismos também são conhecidos como **transformações de recobrimento** ou **transformações de deck** do espaço de recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X.

Um espaço de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ é dito **regular** ou **normal** se para cada $x \in X$ e todo par de levantamentos de x $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in p^{-1}(x)$ existe uma transformação de deck levando $\widetilde{x}$ para $\widetilde{x}'$. Intuitivamente, um espaço de recobrimento normal é aquele com simetria máxima.

1. O recobrimento $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dado pela aplicação $p_n(z) = z^n$ é um recobrimento normal para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Pela Proposição 4.5 todo recobrimento universal é um recobrimento normal.

3. Os grafos a) da Figura 4.7 e o grafo da Figura 4.8 são recobrimentos normais de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. Enquanto que os grafos b) e c) da Figura 4.7 não o são.

O termo normal é motivado pelo seguinte resultado.

Seja $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ um espaço de recobrimento conexo por caminho do espaço conexo por caminho, localmente conexo por caminho X, e seja o subgrupo $H = p_\sharp\left(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right) \subset \pi_1(X, x_0)$. Então:

1. O espaço de recobrimento é normal se H for um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.

2. $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ é isomorfo ao quociente $N(H)/H$ onde $N(H)$ é o normalizador de H em $\pi_1(X, x_0)$.

Em particular, $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_0)/H$ se $\widetilde{X}$ é um recobrimento normal. Portanto, para o recobrimento universal $\widetilde{X} \to X$ temos $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)$.

Demonstração.

1 O Teorema 4.3 nos diz que mudar o ponto base $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ para $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ corresponde precisamente à conjugação de H por um elemento $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ onde γ possui um levantamento $\widetilde{\gamma}$ ligando $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}_1$.

Assim $[\gamma]$ está no normalizador $N(H)$ se, e somente se, $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1))$, que pelo critério de levantamento é equivalente à existência de uma transformação de deck levando $\widetilde{x}_0$ para $\widetilde{x}_1$. Portanto, o espaço de recobrimento é normal se $N(H) = \pi_1(X, x_0)$, ou seja, se H for um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.

2 Defina $\varphi : N(H) \to \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ enviando $[\gamma]$ para a transformação de deck τ levando $\widetilde{x}_0$ para $\widetilde{x}_1$, na notação acima. Então φ é um homomorfismo, pois se γ' é outro laço correspondente à transformação de deck τ' levando $\widetilde{x}_0$ para $\widetilde{x}_1'$ então $\gamma \cdot \gamma'$ sobe para $\widetilde{\gamma} \cdot (\tau(\widetilde{\gamma}'))$, um caminho de $\widetilde{x}_0$ para $\tau(\widetilde{x}_1') = \tau\tau'(\widetilde{x}_0)$, já que $\tau(\widetilde{\gamma}')$ é um levantamento de γ' ligando $\widetilde{x}_1 = \tau(\widetilde{x}_0)$ à $\tau(\widetilde{x}_1')$. Então $\tau\tau'$ é a transformação de deck correspondente para $[\gamma][\gamma']$. Pelo parágrafo anterior φ é sobrejetivo. Seu kernel consiste em classes $[\gamma]$ elevando-se a laços em $\widetilde{X}$. Esses são exatamente os elementos de $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = H$. ∎

Se uma ação de um grupo G em um espaço Y é propriamente descontínua, então:

1. A aplicação quociente $p : Y \to Y/G, p(y) = Gy$, é um espaço de recobrimento normal.

2. G é o grupo de transformações de deck deste espaço de recobrimento $Y \to Y/G$ se Y for conexo por caminho.

3. G é isomorfo a $\pi_1(Y/G, \bullet)/p_\sharp(\pi_1(Y), \bullet)$ se Y for conexo por caminho e localmente conexo por caminho.

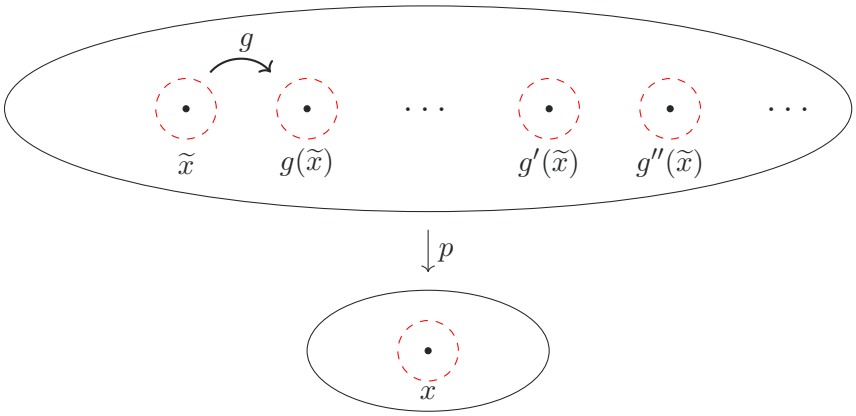


Figura 4.17.: Recobrimento associado a ação propriamente descontínua de um grupo G é normal.

Demonstração. Dado uma vizinhança aberta conveniente $U \subset Y$, a aplicação quociente p simplesmente identifica todos os conjuntos homeomorfos disjuntos $\{g(U) \mid g \in G\}$ para um único conjunto aberto $p(U)$ em Y/G. Pela definição da topologia quociente em $Y/G, p$ se restringe a um homeomorfismo de $g(U)$ em $p(U)$ para cada $g \in G$ então temos um espaço de recobrimento.

Cada elemento de G atua como uma transformação de deck, e o espaço de recobrimento é normal, pois $g_2 g_1^{-1}$ leva $g_1(U)$ a $g_2(U)$. O grupo de transformação de deck contém G como um subgrupo, e é igual a este subgrupo se Y for conexo por caminho, pois se f for qualquer transformação de deck, então para um ponto escolhido arbitrariamente $y \in Y, y$ e $f(y)$ estão na mesma órbita e existe um $g \in G$ com $g(y) = f(y)$, portanto $f = g$ já que as transformações de deck de um espaço de recobrimento conexo por caminho são determinados exclusivamente pela imagem de um ponto.

A última afirmação a proposição é imediata da parte **2** da Proposição 4.5. ■

Como corolário temos:

Teorema 4.6

Se X é simplesmente conexo e localmente conexo por caminho e G age de forma propriamente descontínua como um grupo de homeomorfismos em X, então

$$\pi_1(X/G, \bullet) \cong G$$

.

4.6. Classificação dos Espaços de Recobrimento

Esta subseção considera o problema de classificar todos os diferentes espaços de recobrimento de um espaço de base fixo X. O principal impulso desta classificação é dado na correspondência de Galois entre espaços de recobrimento conexos de X e subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. A correspondência de Galois ψ surge da função que atribui a cada espaço de recobrimento $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ o subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ de $\pi_1(X, x_0)$. Pelo Corolário 4.3 temos que a correspondência ψ é injetiva. Para mostrar que ψ é sobrejetiva, temos que mostrar que, correspondendo a cada subgrupo G de $\pi_1(X, x_0)$, existe um espaço de recobrimento $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$ de modo que $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) = G$.

Um espaço espaço topológico X é dito **localmente simplesmente conexo** se admite uma base de vizinhança formada por conjuntos simplesmente conexos.

Os espaços de maior interesse na topologia algébrica são localmente simplesmente conexos:

- As variedades são localmente simplesmente conexas por terem uma base de vizinhanças formada por conjuntos homeomorfos ao disco aberto.
- Os complexos simpliciais, que serão definidos no Capítulo 8, são localmente simplesmente conexos porque são localmente contráteis.
- Os CW-complexos que apresentaremos no Capítulo 8 12, são localmente simplesmente conexos porque são localmente contráteis.

Todo espaço localmente simplesmente conexo também é localmente conexo por

caminho e assim localmente conexo.

Um condição mais fraca pode ser obtida se, ao invés de exigirmos que uma vizinhança U seja simplesmente conexa, pedirmos que cada laço em U seja contrátil em X, mas não necessariamente exigirmos que a contração ocorra dentro de U. A importância dessa condição na teoria dos espaços de recobrimento pode ser entendida a partir do Lema 4.7 que mostra que essa é uma condição necessária para a existência de recobrimentos simplesmente conexos.

Um espaço topológico X é dito **semilocalmente simplesmente conexo** se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U_x tal que a aplicação induzida pela inclusão $i : U_x \hookrightarrow X$ é trivial, ou seja, $i_\sharp : \pi_1(U_x, x) \to \pi_1(X, x)$ é trivial. Equivalentemente, todo caminho fechado em U_x em x é homotopicamente nulo em X.

Um espaço localmente simplesmente conexo é certamente semilocalmente simplesmente conexo.

Lema 4.7

Seja $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento e sejam x_0 e $\widetilde{x}_0$ tais que $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Se $\widetilde{X}$ for simplesmente conexo, então x_0 possui um vizinhança U tal que a inclusão $i : U \to X$ induz a homomorfismo trivial

$$i_\sharp : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Ou seja, X é semilocalmente simplesmente conexo.

Demonstração. Seja U uma vizinhança elementar de x_0 e seja U_α a folha sobre U contendo $\widetilde{x}_0$. Seja α um laço em U baseado em x_0. Como p define um homeomorfismo de U_α com U, o laço α se levanta a um laço $\widetilde{\alpha}$ em U_α baseado em $\widetilde{x}_0$. Uma vez que $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, existe uma homotopia de caminho $\widetilde{H}$ em $\widetilde{X}$ entre $\widetilde{\alpha}$ e um laço constante. Então $p \circ \widetilde{H}$ é uma homotopia de caminho em X entre α e um laço constante. ∎

Exemplo 4.10.

Um exemplo de espaço que não é semilocalmente simplesmente conexo é o brinco havaiano que consiste na união por um ponto de círculos cada vez menores. Formalmente o subespaço $X \subset \mathbb{R}^2$ consistindo nos círculos de raio $1/n$ centrados no ponto $(1/n, 0)$ para $n = 1, 2, \cdots$.

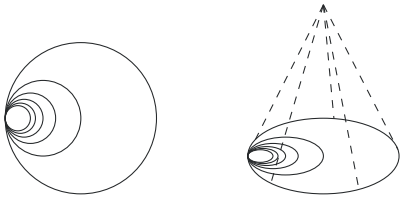


Figura 4.18.: Brinco havaiano e o cone sobre o brinco havaiano.

Por outro lado, se tomarmos o cone CX sobre o brinco havaiano, este é semilocalmente simplesmente conexo, uma vez que é contrátil, mas não é localmente simplesmente conexo.

◁

Seja X um espaço conexo por caminho. localmente conexo e semilocalmente simplesmente conexo. Então, para cada subgrupo G de $\pi_1(X, x_0)$ existe um espaço de recobrimento $p : \widetilde{X}_G \to X$ tal que $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_G, \widetilde{x_0})) = G$ para algum ponto base escolhido adequado $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}_G$.

Demonstração. Seja $x \in X$. Como X e é semilocalmente simplesmente conexo existe um vizinhança aberta conexa por caminho W_x de x, de modo que todo caminho fechado em W_x baseado em x é homotopicamente nulo em X. Novamente, como X é localmente conexo por caminho. existe uma vizinhança aberta conexa U_x de x, de modo que $x \in U_x \subset W_x$. Claramente, todo caminho fechado em U_x em x é homotopicamente nulo em X e assim podemos assumir que os conjuntos elementares U_x são localmente conexos e semilocalmente conexos por caminho. Denotaremos o conjunto das vizinhanças abertas localmente conexas e semilocalmente conexas por caminho de $\mathcal{U}$.

Agora vamos construir o espaço $\widetilde{X}_G$.

Seja $\Omega(X, x_0)$ a família de todos os caminhos α em X com $\alpha(0) = x_0$, munido

com a topologia compacto-aberto

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha : (I, 0) \to (X, x_0)\}.$$

Definimos a relação de equivalência:

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \bmod G \text{ se, e somente se, } \alpha_1(1) = \alpha_2(1) \text{ e } \left[\alpha_1 * \alpha_2^{-1}\right] \in G$$

A classe de equivalência de $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ será denotada por $[\alpha]_G$.

Vamos denotar por $\widetilde{X}_G$ o conjunto de todas essas classes de equivalência, munido com a topologia quociente. Se e_{x_0} for o caminho constante baseado em x_0, definimos $\widetilde{x}_0 = [e_{x_0}]_G \in \widetilde{X}_G$ e

$$\begin{aligned} p : &\widetilde{X}_G \to X \\ &[\alpha]_G \mapsto \alpha(1). \end{aligned}$$

Então $p(\widetilde{x}_0) = x_0$.

Podemos fornecer uma descrição mais concreta da topologia em $\widetilde{X}_G$. Dado um conjunto $U \in \mathcal{U}$ e um caminho α em X de x_0 até um ponto em U, seja

$$U_{[\alpha]_G} = \{[\alpha \cdot \eta]_G \mid \eta \text{ é um caminho em } U \text{ com } \eta(0) = \alpha(1)\}$$

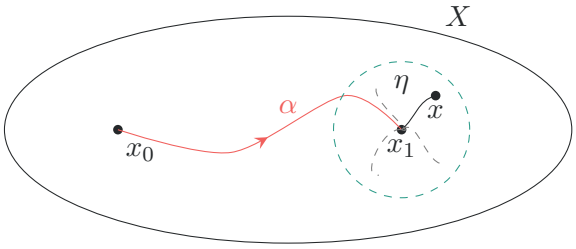


Figura 4.19.: Vizinhança $U_{[\alpha]_G}$

Como a notação indica, $U_{[\alpha]_G}$ depende apenas da classe $[\alpha]_G$. Observamos que $p : U_{[\alpha]_G} \to U$ é sobrejetiva já que U é conexo por caminho e injetiva já que diferentes escolhas de η ligando $\alpha(1)$ a um $x \in U$ fixo representam o mesmo elemento em $\widetilde{X}_G$ Também temos que

$$U_{[\alpha]_G} = U_{[\alpha']_G} \text{ se } \left[\alpha'\right]_G \in U_{[\alpha]_G}.$$

Pois se $\alpha' = \alpha \cdot \eta$ então os elementos de $U_{[\alpha']_G}$ têm a forma $[\alpha \cdot \eta \cdot \mu]_G$ e, portanto, estão em $U_{[\alpha]_G}$, sendo a inclusão contrária análoga

Os conjuntos $U_{[\alpha]_G}$ formam uma base para uma topologia em $\widetilde{X}_G$. Pois se tivermos dois desses conjuntos $U_{[\alpha]_G}, V_{[\alpha']_G}$ e um elemento $[\alpha \cdot \eta]_G \in U_{[\alpha]_G} \cap V_{[\alpha']_G}$, temos $U_{[\alpha]_G} = U_{[\alpha\cdot\eta]_G}$ e $V_{[\alpha']_G} = V_{[\alpha\cdot\eta]_G}$. Portanto, se $W \in \mathcal{U}$ está contido em $U \cap V$ e contém $\alpha \cdot \eta(1)$ então $W_{[\alpha\cdot\eta]_G} \subset U_{[\alpha\cdot\eta]_G} \cap V_{[\alpha\cdot\eta]_G}$ e $[\alpha \cdot \eta]_G \in W_{[\alpha\cdot\eta]_G}$. Deixaremos ao leitor demonstrar que conjuntos $U_{[\alpha]_G}$ formam uma base para a topologia quociente em $\widetilde{X}_G$

Temos ainda que a aplicação $p : U_{[\alpha]_G} \to U$ é um homeomorfismo, pois fornece uma bijeção entre os subconjuntos $V_{[\alpha']_G} \subset U_{[\alpha]_G}$ e os conjuntos $V \in \mathcal{U}$ contidos em U. Ou seja, em uma direção temos $p\left(V_{[\alpha']_G}\right) = V$ e na outra direção temos $p^{-1}(V) \cap U_{[\alpha]_G} = V_{[\alpha']_G}$ para qualquer $[\alpha']_G \in U_{[\gamma]_G}$ com ponto final em V, já que $V_{[\alpha']_G} \subset U_{[\alpha']_G} = U_{[\alpha]_G}$ e $V_{[\alpha']_G}$ são levados em V pela bijeção p.

Desta forma temos que a aplicação $p : \widetilde{X}_G \to X$ é homeomorfismo local e consequentemente contínua. Assim temos que $p : \widetilde{X}_G \to X$ é um espaço de recobrimento, pois para $U \in \mathcal{U}$ fixo, os conjuntos $U_{[\alpha]_G}$ particionam $p^{-1}(U)$ porque se $[\alpha \cdot \eta]_G \in U_{[\alpha]_G} \cap U_{[\alpha']_G}$ então $U_{[\alpha]_G} = U_{[\alpha\cdot\eta]_G} = U_{[\alpha']_G}$.

Finalmente a imagem de $p_\sharp : \pi_1(\widetilde{X}_G, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, \widetilde{x}_0)$ é precisamente G. Porque, para qualquer laço β em X com base em x_0, seu levantamento para $\widetilde{X}_G$ começando em $\widetilde{x}_0 = \langle e_{x_0} \rangle_G$ termina em $[\beta]_G$ e, portanto, a imagem desse caminho levantado em $\widetilde{X}_G$ é um laço se, e somente se, $[\beta]_G \sim [e_{x_0}]_G$, ou equivalentemente, se $[\beta] \in G$. ∎

Existência do Recobrimento Universal. Seja X um espaço conexo e localmente conexo. Então X possui um espaço de recobrimento universal $\widetilde{X}$ se, e somente se, $\widetilde{X}$ é semilocalmente simplesmente conexo.

Demonstração. O Teorema 4.6 comprova a suficiência da condição. O lema 4.7 dá a necessidade da condição. ∎

de Classificação. Seja X um espaço conexo por caminho e localmente conexo por caminho. Então, dois espaços de recobrimento $p : \widetilde{X}_1 \to X$ e $q : \widetilde{X}_2 \to X$ conexos por caminho são isomorfos através de um homeomorfismo $f : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ levando um ponto base $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ para um ponto base $\widetilde{x}_2 \in q^{-1}(x_0)$ se, e somente se, $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = q_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.

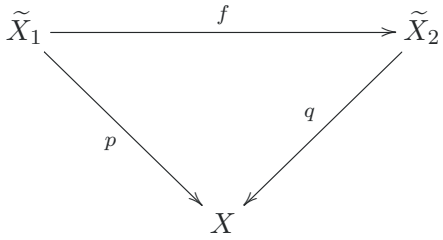
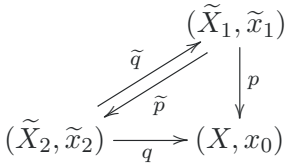


Figura 4.20.: Diagrama para duas coberturas isomorfas de X.

Demonstração. Suponha que exista um homeomorfismo $f : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to \left(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2\right)$. Então, as duas relações $p = q \circ f$ e $q = p \circ f^{-1}$ mostram que $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = q_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$.

Para a recíproca, seja $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)) = q_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2))$. Então, pelo critério de levantamento, podemos levantar p para $\widetilde{p} : (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1) \to \left(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2\right)$ com $q \circ \widetilde{p} = p$.



Da mesma forma, obtemos $\widetilde{q} : \left(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2\right) \to (\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1)$ com $p \circ \widetilde{q} = q$.

Então, pela propriedade de unicidade do levantamento, temos que $\widetilde{p} \circ \widetilde{q} = \mathrm{id}_{\widetilde{X}_2}$ e $\widetilde{q} \circ \widetilde{p} = \mathrm{id}_{\widetilde{X}_1}$, uma vez que estes levantamentos fixam os pontos de base. Consequentemente, $p_\sharp$ e $q_\sharp$ são isomorfismos inversos. ∎

Seja X um espaço conexo por caminho, localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo. Então todo espaço de recobrimento conexo por caminho $q : \widetilde{X}' \to X$ é isomorfo a um espaço de recobrimento da forma $p : \widetilde{X}_G \to X$.

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ um ponto no espaço base de X e $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}'$ um ponto na fibra de x_0. Se $G = q_\sharp \pi_1(\widetilde{X}', \widetilde{x}_0)$, então $p_\sharp \pi_1(\widetilde{X}_G, x_0) = G$. Portanto, o Teorema 4.6 mostra que os espaços de recobrimento $p : \widetilde{X}_G \to X$ e $q : \widetilde{X}' \to X$ são isomorfos. ∎

Apresentamos agora uma generalização do Teorema de Classificação acima da seguinte forma.

Classificação na Forma Geral. Seja X um espaço conexo por caminho, localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo. Então, existe uma bijeção entre o conjunto de classes de espaços de recobrimento conexos por caminho a menos de isomorfismos que fixam os pontos base $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$, e o conjunto de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$, obtido atribuindo os subgrupos $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ aos espaços de recobrimento $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Se os pontos de base forem ignorados, esta correspondência fornece uma bijeção entre classes de isomorfismo de espaços de recobrimento conexos por caminho $p : \widetilde{X} \to X$ e classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

Demonstração. A primeira parte segue dos Teoremas 4.6 e 4.6

Para demonstrar a segunda parte, afirmamos que o espaço de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ obtido alterando o ponto base $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ corresponde exatamente a alterar $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ para um subgrupo conjugado de $\pi_1(X, x_0)$.

Suponha que $\widetilde{x}_1$ seja outro ponto base em $p^{-1}(x_0)$. Seja $\widetilde{\alpha}$ um caminho de $\widetilde{x}_0$ para $\widetilde{x}_1$. Então, $\widetilde{\alpha}$ projeta para um laço α em X, que representa algum elemento $g \in \pi_1(X, x_0)$. Defina G_i por $G_i = p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_i))$ para $i = 0, 1$. Então temos uma inclusão $g^{-1}G_0 g \subset G_1$, já que para $\widetilde{\beta}$ um laço em $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{\gamma}^{-1} * \beta * \widetilde{\gamma}^{-1}$ é um laço em $\widetilde{x}_1$. Da mesma forma, $gG_1g^{-1} \subset G_0$. Usando a conjugação da última relação por g^{-1}, temos $G_1 \subset g^{-1}G_0 g$ e, portanto, $g^{-1}G_0 g = G_1$. Consequentemente, alterar o ponto base de $\widetilde{x}_0$ para $\widetilde{x}_1$ altera G_0 para o subgrupo conjugado $G_1 = g^{-1}G_0 g$.

Por outro lado, para alterar G_0 para um subgrupo conjugado $G_1 = g^{-1}G_0 g$, escolha um laço σ que representa g, e que se levanta para um caminho $\widetilde{\sigma}$ a partir de $\widetilde{x}_0$ e seja $\widetilde{x}_1 = \widetilde{\sigma}(1)$. O argumento anterior prova que $G_1 = g^{-1}G_0 g$. ∎

Seja X um espaço conexo por caminho e localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo. A **correspondência de Galois** ψ é a função

que atribui a cada espaço de recobrimento $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ o subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ de $\pi_1(X, x_0)$, e como já demonstramos ψ é uma bijeção.

Correspondência de Galois

Se X é um espaço conexo por caminho, localmente conexo por caminho, semilocalmente simplesmente conexo com espaço de recobrimento $p_U : (\widetilde{X}_U, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$, então, a menos de isomorfismo de recobrimentos fixando os pontos base, existe uma bijeção:

$$\begin{array}{ccc} \text{Subgrupo de } \pi_1(X, x_0) & \longleftrightarrow & \text{Recobrimento conexo por caminho de } X \\ \text{Subgrupo normal de } \pi_1(X, x_0) & \longleftrightarrow & \text{Recobrimento conexo por caminho normal de } X \\ H & \longleftrightarrow & p_H : \widetilde{X}_H \to X \\ \pi_1(X, x_0) & \longleftrightarrow & X \\ \{e\} & \longleftrightarrow & p_U : \widetilde{X}_U \to X \end{array}$$

Para uma sequência de subgrupos $\{\mathrm{e}\} \subset H \subset G \subset \pi_1(X, x_0)$ obtém-se uma sequência de recobrimentos $\widetilde{X}_U \longrightarrow \widetilde{X}_H \longrightarrow \widetilde{X}_G \longrightarrow X$. Para um subgrupo $H \subset \pi_1(X, x_0)$ com índice $[\pi_1(X, x_0) : H] = d$, o recobrimento $p_H : \widetilde{X}_H \to X$ tem grau d.

4.7. Representando Espaços de Recobrimento por Permutações

Nesta seção apresentamos uma maneira de classificar os diferentes espaços de recobrimento de n-folhas de um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocamente simplesmente conexo, X, sem nos restringirmos à espaços de recobrimento conexos.

Para motivarmos o resultado, sejam $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ e $\widetilde{X}_3$ os três possíveis espaços de recobrimento com três folhas de $\mathbb{S}^1$, onde o subscrito indica o número de componentes. Para cada um desses espaços de recobrimento $p_i : \widetilde{X}_i \to \mathbb{S}^1$, temos que os três levantamentos diferentes de um laço em $\mathbb{S}^1$ que gera $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)$ determinam uma permutação na fibra de um ponto $p^{-1}(x_0) = \widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3$, enviando o ponto inicial do levantamento para o ponto final desse levantamento. Para $\widetilde{X}_1$, esta ação é uma permutação cíclica, para $\widetilde{X}_2$ é uma transposição que fixa o primeiro ponto e

permuta os outros dois, e para $\widetilde{X}_3$ é a permutação identidade. Essas permutações obviamente determinam os espaços de recobrimento de forma única, a menos de isomorfismo.

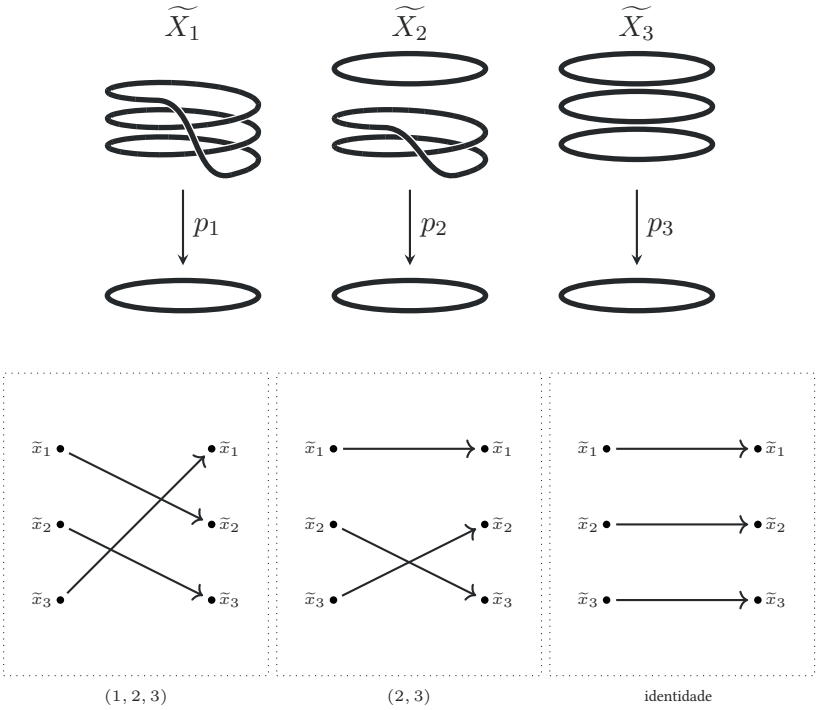


Figura 4.21.: Permutações associadas aos recobrimentos.

Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semilocamente simplesmente conexo. Os espaços de recobrimento com n-folhas de X são classificados pelas classes de conjugação de homomorfismos $\pi_1(X, x_0) \to S_n$, onde S_n é o grupo simétrico de ordem n.

Demonstração. Dado um espaço de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$, então todo caminho α em X possui um levantamento único $\widetilde{\alpha}$ começando em um ponto dado da fibra $p^{-1}(\alpha(0))$, o que nos permite construir a aplicação L_α enviando o ponto final $\widetilde{\alpha}(1)$ de cada levantamento $\widetilde{\alpha}$ para o ponto inicial $\widetilde{\alpha}(0)$. A aplicação $L_\alpha : p^{-1}(\alpha(1)) \to p^{-1}(\alpha(0))$ é uma bijeção com inversa $L_{\alpha^{-1}}$.

Pelo Teorema de Monodromia a aplicação L_α depende apenas da classe de homotopia de α, e assim se restringirmos a atenção a laços baseados em um ponto

$x_0 \in X$, a associação $\alpha \mapsto L_\alpha$ fornece um homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ para o grupo de permutações de $p^{-1}(x_0)$. Esse homomorfismo é denominado de **ação do grupo fundamental** $\pi_1(X, x_0)$ **na fibra** $p^{-1}(x_0)$.

Vamos demonstrar agora que o espaço de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ pode ser completamente reconstruído a partir da ação de $\pi_1(X, x_0)$ na fibra $F = p^{-1}(x_0)$. Para tanto, seja $\widetilde{X}_u \to X$ o recobrimento universal de X. Pela construção do recobrimento X_G feita no Teorema 4.6 podemos ver os pontos do recobrimento universal $\widetilde{X}_u$ como classes de homotopia de caminhos em X que começam em x_0.

Definimos então a aplicação $\phi : \widetilde{X}_u \times F \to \widetilde{X}$ enviando o par $([\alpha], \widetilde{x}_0)$ para $\widetilde{\alpha}(1)$, onde $\widetilde{\alpha}$ é a levantamento de α para $\widetilde{X}$ começando em $\widetilde{x}_0$. Temos que a aplicação ϕ é um homeomorfismo local, pois uma vizinhança de $([\alpha], \widetilde{x}_0)$ em $\widetilde{X}_u \times F$ consiste de pares $([\alpha \cdot \eta], \widetilde{x}_0)$ com η um caminho começando $\alpha(1)$ e contido em uma vizinhança elementar localmente conexa e semilocalmente conexa por caminho de $\alpha(1)$. Temos também que h é sobrejetiva, uma vez que X é conexo por caminhos.

A aplicação ϕ induz um homeomorfismo do espaço quociente $\widetilde{X}_u \times F/\{x \sim y \leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)\}$ em $\widetilde{X}$. Para descrever o espaço quociente, suponhamos que $\phi([\alpha], \widetilde{x}_0) = \phi([\alpha'], \widetilde{x}'_0)$. Então, α e α' são ambos caminhos de x_0 para o mesmo ponto final, e $\widetilde{x}'_0 = L_{\alpha' \cdot \alpha^{-1}}(\widetilde{x}_0)$.

Seja β o laço $\alpha' \cdot \alpha^{-1}$, então $\phi([\alpha], \widetilde{x}_0) = \phi([\beta \cdot \alpha], L_\beta(\widetilde{x}_0))$. Inversamente, para qualquer laço β, temos $\phi([\alpha], \widetilde{x}_0) = \phi([\beta \cdot \alpha], L_\beta(\widetilde{x}_0))$. Assim, ϕ induz uma aplicação bem definida para $\widetilde{X}$ a partir do espaço quociente de $\widetilde{X}_u \times F$ obtido ao identificar $([\alpha], \widetilde{x}_0)$ com $([\beta \cdot \alpha], L_\beta(\widetilde{x}_0))$ para cada $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$. Denotemos este espaço quociente como $\widetilde{X}_\rho$, onde ρ é o homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ para o grupo de permutações de F especificado pela ação. Existe uma projeção natural $\widetilde{X}_\rho \to X$ enviando $([\alpha], \widetilde{x}_0)$ para $\alpha(1)$, e esta projeção é um recobrimento, uma vez que se $U \subset X$ é um conjunto aberto sobre o qual o recobrimento universal $\widetilde{X}_u$ se decompõe como um produto $U \times \pi_1(X, x_0)$, então as identificações que definem $\widetilde{X}_\rho$ simplesmente colapsam $U \times \pi_1(X, x_0) \times F$ para $U \times F$.

Finalmente observamos que a aplicação $\widetilde{X}_\rho \to \widetilde{X}$ induzida por ϕ é uma bijeção e, portanto, um homeomorfismo, uma vez que ϕ era um homeomorfismo local. Como este homeomorfismo $\widetilde{X}_\rho \to \widetilde{X}$ leva cada fibra de $\widetilde{X}_\rho$ para a fibra correspondente de $\widetilde{X}$, é um isomorfismo de espaços de recobrimento.

4.8. Classificação dos G-Recobrimentos

Podemos generalizar o Teorema de Classificação para G-Recobrimentos não necessariamente conexos.

Classificação de G-recobrimentos. Seja X um espaço conexo, localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo. Então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de homomorfismos de $\pi_1(X, x_0)$ ao grupo G e o conjunto de G-recobrimento com ponto marcado, a menos de isomorfismo:

$$\mathrm{Hom}\,(\pi_1(X, x_0), G) \leftrightarrow \{G\text{-recobrimentos de } X \text{ com pt. marcado.}\}/\text{ isomorfismo.}$$

Demonstração. Seja $p_U : \widetilde{X}_U \to X$ o recobrimento universal e fixamos $x_0 \in X$ e $\widetilde{x}_0 \in P_U x_0$. Seja $\rho : \pi_1(X, x_0) \to G$ um homomorfismo do grupo fundamental de X para um grupo qualquer G. Construiremos a partir do homomorfismo ρ um G-recobrimento $p_\rho : X_\rho \to X$, junto com um ponto marcado y_ρ em X_ρ na fibra de x_0.

Antes de continuarmos, destacamos que as construções envolvidas na demonstração desse teorema sãp bastante similares àss realizadas nos Teoremas 4.6 e 4.7 e assim omitiremos alguns detalhes.

Para começar muniremos o grupo G com a topologia discreta, e consequentemente o produto cartesiano $\widetilde{X}_U \times G$ é um produto de $|G|$ cópias de $\widetilde{X}_U$, uma para cada elemento de G. Temos também uma ação à esquerda de $\pi_1(X, x_0)$ em $\widetilde{X}_U \times G$ dada por:

$$[\alpha] \cdot (z \times g) \coloneqq [\alpha] \cdot z \times g \cdot \rho([\alpha]^{-1}),$$

para $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0), z \in \widetilde{X}_U, g \in G$. Aqui $[\alpha] \cdot z$ é a ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\widetilde{X}_U$ que foi descrita na demonstração de 4.5, e $g \cdot \rho\left([\alpha]^{-1}\right)$ é o produto do grupo G. Definimos X_ρ como o quociente de $\widetilde{X}_U \times G$ por esta ação de $\pi_1(X, x_0)$:

$$X_\rho = \widetilde{X}_U \times G/\pi_1(X, x_0)$$

e seja y_ρ a imagem do ponto $\widetilde{x}_0 \times e$ em X_ρ. Denotaremos por $[z \times g]$ a imagem em X_ρ do ponto $z \times g$ em $\widetilde{X}_U \times G$. Observamos que, pela ação de $\pi_1(X, x_0)$ em

$\widetilde{X}_U \times G$, temos, para z em $\widetilde{X}_U$, g em G e $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$,

$$[\![[\alpha] \cdot z \times g]\!] = [\![z \times g \cdot \rho([\alpha])]\!].$$

Definimos então a aplicação $p_\rho : X_\rho \to X$ levando $[\![z \times g]\!]$ para $p_U(z)$. Temos que grupo G atua sobre X_ρ pela fórmula

$$h \cdot [\![z \times g]\!] = [\![z \times h \cdot g]\!], \text{ para } h, g \in G \text{ e} z \in X.$$

Afirmamos que esta ação é propriamente descontínua, fazendo $p_\rho : X_\rho \to X$ um G-recobrimento.

Para provar a afirmação, seja V ser uma vizinhança elementar em X. Pel o Corolário 4.3,e pela Proposição 4.2 existe um isomorfismo de $u^{-1}(V)$ com o recobrimento produto $V \times \pi_1(X, x_0)$, no qual $\pi_1(X, x_0)$ age à esquerda no segundo fator. Isso fornece os homeomorfismos:

$$p_\rho^{-1}(V) \cong (V \times \pi_1(X, x_0)) \times G/\pi_1(X, x_0) \cong V \times G,$$

o último homeomorfismo é dado por

$$[\![(u \times [\sigma]) \times g]\!] \mapsto u \times g \cdot \rho([\sigma]).$$

Todos os homeomorfismos anteriores são compatíveis com as projeções em V, e logo temos que, sobre V, a ação de G é propriamente descontínua e o recobrimento é um G-recobrimento. Uma vez que X é coberto por tais conjuntos abertos V, podemos estender o resultado para a aplicação $p_\rho : X_\rho \to X$.

Para a recíproca, suponha que $p : Y \to X$ seja um G-recobrimento, com um ponto marcado y sobre x_0. A partir desse recobrimento construiremos um homomorfismo ρ de $\pi_1(X, x_0)$ para G. Para cada $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$ o elemento $\rho([\alpha])$ em G é determinado pela fórmula

$$\rho([\alpha]) \cdot y \coloneqq y * \alpha,$$

onde $y * \alpha$ é o ponto final da levantamento do caminho α que começa em y.

Esta operação possui as seguintes propriedades:

1. $(z * \alpha) * \beta = z * (\alpha \cdot \beta)$ para $z \in p^{-1}(x_0)$, α um laço em x_0, e β um caminho começando em x_0;

2. $g \cdot (z * \gamma) = (g \cdot z) * \gamma$ para $g \in G, z \in p^{-1}(x_0)$, e γ um caminho começando em x_0.

A demonstração de **1** é imediata da definição. Para demonstrar isso seja $\widetilde{\alpha}$ o levantamento de α começando em z e $\widetilde{\beta}$ o levantamento de β começando em $(z * \alpha)$. Então o ponto final do levantamento $\widetilde{\alpha * \beta}$ começando em$z$ é igual ao ponto final de $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}$. A demonstração da segunda propriedade decorre de que se $\widetilde{\gamma}$ é um levantamento de γ começando em z, então o caminho $t \mapsto g \cdot \widetilde{\gamma}(t), 0 \leq t \leq 1$, é um levantamento de γ que começa em $g \cdot z$. O ponto final deste caminho, que é $(g \cdot z) * \gamma$ por definição, é $g \cdot \widetilde{\gamma}(1)$, e de $\widetilde{\gamma}(1) = z * \gamma$, temos **2**.

A aplicação ρ é um homomorfismo. Demonstraremos isso usando as propriedades **1** e **2**:

$$\begin{aligned}(\rho([\alpha]) \cdot \rho([\beta])) \cdot y &= \rho([\alpha]) \cdot (\rho([\beta]) \cdot y) = \rho([\alpha]) \cdot (y * \beta) \\ &= (\rho([\alpha]) \cdot y) * \beta = (y * \alpha) * \beta \\ &= y * (\alpha \cdot \beta) = \rho([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot y\end{aligned}$$

Agora mostraremos a unicidade. Dado um G-recobrimento $p : \widetilde{X}' \to X$ com ponto marcado, a partir da qual construímos um homomorfismo ρ, devemos agora mostrar que o recobrimento dado é isomorfo ao recobrimento $p_\rho : X_\rho \to X$ construído a partir de ρ. Vamos construir uma aplicação de X_ρ para $\widetilde{X}'$, e para isso definiremos uma aplicação de $\widetilde{X}_U \times G$ para $\widetilde{X}'$ e mostraremos que orbita por $\pi_1(X, x_0)$ têm a mesma imagem. Para isso lembramos que pela demonstração do Teorema 4.6 podemos ver o recobrimento universal $\widetilde{X}_U$ como o espaço de classes de homotopia de caminhos em X começando em x_0. E definimos a aplicação:

$$\widetilde{X}_U \times G \to \widetilde{X}', \quad [\gamma] \times g \mapsto g \cdot (y * \gamma) = (g \cdot y) * \gamma$$

Esta aplicação é contínua. Devemos ainda verificar que está bem definida. Ou seja, que um ponto equivalente $([\alpha] \cdot [\gamma]) \times \left(g \cdot \rho([\alpha])^{-1}\right)$ é levado para o mesmo ponto pela ação de $\pi_1(X, x_0)$. Por **1** e **1**, este ponto é levado para

$$\begin{aligned}\left(g \cdot \rho([\alpha])^{-1}\right) \cdot (y * (\alpha \cdot \gamma)) &= \left(g \cdot \rho([\alpha])^{-1}\right) \cdot ((y * \alpha) * \gamma) \\ &= \left(\left(g \cdot \rho([\alpha])^{-1}\right) \cdot (y * \alpha)\right) * \gamma \\ &= \left(g \cdot \left((y * \alpha) * \alpha^{-1}\right)\right) * [\gamma] \\ &= \left(g \cdot \left(y * \left(\alpha \cdot \alpha^{-1}\right)\right)\right) * [\gamma] = (g \cdot y) * [\gamma]\end{aligned}$$

como desejado. Logo temos uma aplicação do quociente X_ρ para $\widetilde{X}'$, que é um homomorfismo de espaços de recobrimento de X, mais ainda é um homomorfismo de G-recobrimentos, o que pode ser facilmente verificado, e de onde temos que deve ser um isomorfismo.

Por outro lado, começando com um homomorfismo ρ, construímos um G-recobrimento $X_\rho \to X$, a partir do qual construímos outro homomorfismo, digamos ρ'. Devemos mostrar que $\rho' = \rho$. Agora, para $[\alpha]$ em $\pi_1(X, x_0)$,

$$\begin{aligned}\rho'([\alpha]) \cdot [\widetilde{x}_0 \times e] &= [\widetilde{x}_0 \times e] * \alpha = [\widetilde{x} * \alpha \times e] \\ &= [[\alpha] \cdot \widetilde{x}_0 \times e] = [\widetilde{x}_0 \times e \cdot \rho([\alpha])] = [\widetilde{x} \times \rho([\alpha])] \\ &= \rho([\alpha]) \cdot [\widetilde{x}_0 \times e].\end{aligned}$$

Consequentemente temos que $\rho'([\alpha]) = \rho([\alpha])$, o que conclui a demonstração. ∎

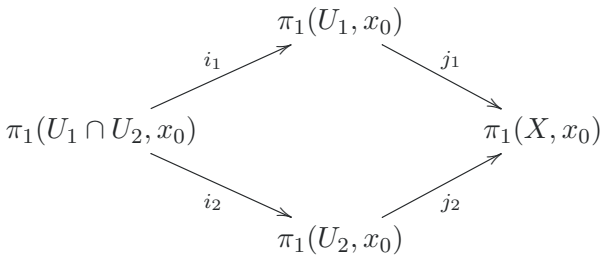
Observamos que os recobrimentos no Teorema 4.8 não precisam ser conexos e de fato, eles serão conexos exatamente quando o homomorfismo correspondente for sobrejetivo.

4.9. Teorema de Seifert-van Kampen

Esta seção contém uma demonstração muito curta e elegante do Teorema de Seifert-van Kampen atribuída à Grothendieck. Esta demonstração verifica diretamente a propriedade universal no Teorema de Seifert-van Kampen, em vez de se basear em geradores e relações. A única desvantagem da demonstração que apresentaremos é que ela só funciona para espaços localmente conexos por caminho e semilocalmente simplesmente conexos, observamos no entanto, os espaços que não satisfazem essas hipóteses em geral são degenerados o suficiente para que os seus grupos fundamentais sejam de utilidade limitada.

Seja X um espaço topológico conexo por caminho, localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo e seja $X = U_1 \cup U_2$ uma cobertura aberta de X. Suponha que U_1, U_2, e $U_1 \cap U_2$ sejam todos não vazios e conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos. Seja x_0 um ponto na intersec-

ção, então temos o seguinte diagrama comutativo de grupos fundamentais:



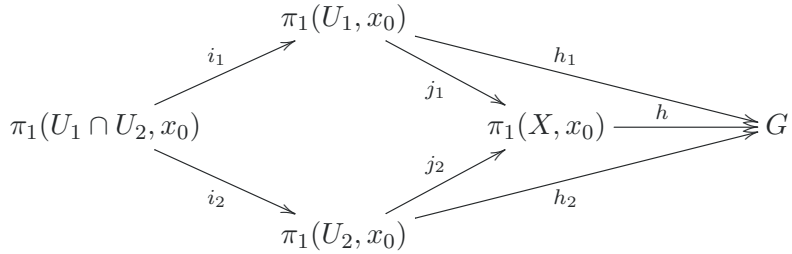
sendo as aplicações induzidos pela inclusão de subespaços.

Vamos descrever como o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ é determinado pelo diagrama acima. A descrição que apresentaremos será dada através de uma propriedade universal.

Começamos observando que qualquer homomorfismo h de $\pi_1(X, x_0)$ para G determina um par de homomorfismos:

$$h_1 = h \circ j_1 : \pi_1(U_1, x_0) \to G$$
$$h_2 = h \circ j_2 : \pi_1(U_2, x_0) \to G$$

Temos também, pela comutatividade do diagrama anterior, que os homomorfismos $h_1 \circ i_1$ e $h_2 \circ i_2$ são os mesmos. O Teorema de Seifert-van Kampen diz que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo universal com essa propriedade.



Assim, a afirmação do Teorema de Seifert-van Kampen é a seguinte:

de Seifert-van Kampen. Seja X um espaço topológico localmente conexo por caminho e semilocalmente simplesmente conexo e seja $X = U_1 \cup U_2$ uma cobertura aberta de X. Suponha que U_1, U_2, e $U_1 \cap U_2$ sejam todos não vazios, conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Então, para todo $x_0 \in U_1 \cap U_2$, e qualquer par de homomorfismos

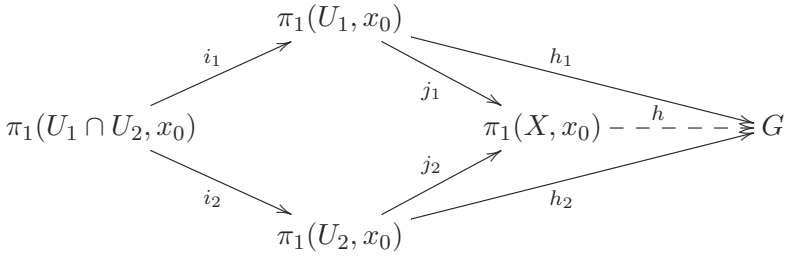
$$h_1 : \pi_1(U_1, x_0) \to G \quad \text{e} \quad h_2 : \pi_1(U_2, x_0) \to G$$

tal que $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$, existe um único homomorfismo

$$h : \pi_1(X, x_0) \to G$$

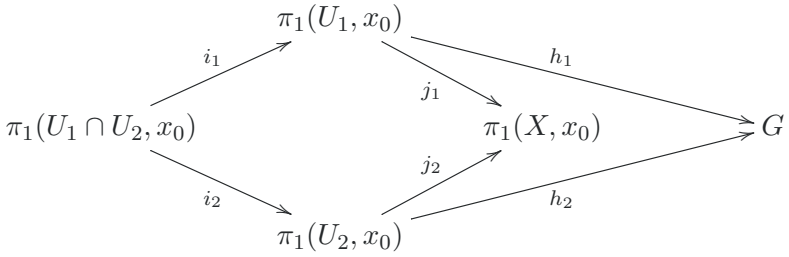
tal que $h_1 = h \circ j_1$ e $h_2 = h \circ j_2$.

Nesse caso dizemos que o diagrama comutativo a seguir é um diagrama de pushout.



A chave para demonstrar o teorema é encontrar uma representação geométrica para um homomorfismo proveniente do grupo fundamental de um espaço. Essa conexão é fornecida pelo Teorema de Classificação de G-recobrimentos (4.8).

Demonstração. Considere um grupo G e um diagrama comutativo como mostrado abaixo.



Usando o Teorema 4.8, podemos associar aos homomorfismos

$$h_1 : \pi_1(U_1, x_0) \to G$$
$$h_2 : \pi_1(U_2, x_0) \to G$$

G-recobrimentos regulares com pontos marcados $p_1 : (\widetilde{U}_1, \widetilde{u}_1) \to (U_1, x_0)$ e $p_2 : (\widetilde{U}_2, \widetilde{u}_2) \to (U_2, x_0)$. Para $i = 1, 2$, seja $\widetilde{V}_i = p_i^{-1}(U_1 \cap U_2)$, de modo que

$(\widetilde{V}_i, \widetilde{u}_i) \to (U_1 \cap U_2, x_0)$ seja o G-recobrimento com ponto marcado representando o homomorfismo $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_i, x_0) \to G$.

Uma vez que os homomorfismos anteriores são iguais pela comutatividade do diagrama, vemos que $(\widetilde{V}_1, \widetilde{u}_1) \to (U_1 \cap U_2, x_0)$ e $(\widetilde{V}_2, \widetilde{u}_2) \to (U_1 \cap U_2, x_0)$ são G-recobrimentos com pontos marcados isomorfos e, assim, existe um homeomorfismo G-equivariante único $\phi : (\widetilde{V}_1, \widetilde{u}_1) \to (\widetilde{V}_2, \widetilde{u}_2)$.

Usando ϕ, podemos colar $p_1 : (\widetilde{U}_1, \widetilde{u}_1) \to (U_1, x_0)$ e $p_2 : (\widetilde{U}_2, \widetilde{u}_2) \to (U_2, x_0)$ para obter um G-recobrimento com ponto marcado em $(\widetilde{X}_U, \widetilde{x}) \to (X, x_0)$. Usando o Teorema 4.8 uma última vez, vemos que a esse recobrimento temos associado o homomorfismo desejado $\pi_1(X, x_0) \to G$, fazendo com que o diagrama comute. A unicidade desse homomorfismo segue da unicidade em cada etapa da prova acima.

■

Lema 4.8

No caso especial em que s e t são injetivos

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & H \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G' \end{array}$$

o grupo pushout G'existe e é chamado de produto amalgamado de G e H sobre A e é denotado por $G *_A H$. Se tivermos as apresentações de grupos $G = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ e $H = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, então uma apresentação do grupo pushout $(G * H)/N$ é dado por

$$\left\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \left\{ s(a)t(a)^{-1} : a \in A \right\} \right\rangle .$$

de Seifert-van Kampen - Segunda Forma. Seja X um espaço topológico e seja $U, V \subset X$ subconjuntos abertos tais que $U \cap V$ seja não vazio e seja conexo por caminho. Seja $x_0 \in U \cap V$ um ponto base. Então

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) \underset{\pi_1(U \cap V, x_0)}{*} \pi_1(V, x_0).$$

Para a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$ com $n \geq 2$, escolhemos um ponto base $x_0 \in \mathbb{S}^n$

no equador e definimos U_1 como complemento do polo sul e U_2 como complemento do polo norte. Então U_1 e U_2 são contráteis de modo que o quadrado pushout é

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^n, x_0). \end{array}$$

Logo temos que $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa para $n \geq 2$.

Considere a figura oito $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, e sejam U_1, U_2 laços, cada um junto com uma pequena sobreposição aberta no outro laço. Então a interseção $U_1 \cap U_2$ se parece com a letra " X", portanto $U_1 \cap U_2 \simeq x_0$. Então o quadrado pushout é

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \end{array}$$

e logo $\pi_1\left(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0\right) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$ é o grupo livre em dois geradores.

Indutivamente, o grupo fundamental da união por um ponto de n cópias do círculo é isomorfo à F_n, o grupo livre em n letras.

De forma mais geral, isso mostra que a suspensão ΣX de qualquer espaço conexo X tem grupo fundamental zero.

Colando ao longo de interseções simplesmente conexas. Se $X = U \cap V$ onde U e V são conexos e $U \cap V$ é simplesmente conexo, então obtemos $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.

Removendo um ponto de uma variedade. Dada uma variedade n-dimensional M, com $n \geq 3$, vamos relacionar os grupos fundamentais de M e $M \setminus \{p\}$. Seja U uma pequena vizinhança de p, homeomorfa a uma bola em $\mathbb{R}^n$ e seja $V = M \setminus \{p\}$. Então $U \cap V \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ que é simplesmente conexa para $n > 2$, dessa forma obtemos que $\pi_1(M, x_0) = \pi_1(M \setminus \{p\}, x_0)$.

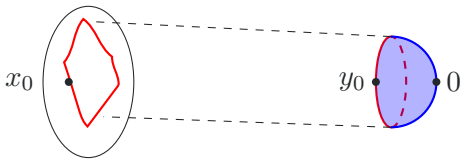
Somas conexas. Dadas duas variedades n-dimensionais M e N, a soma conexa $M \# N$ é construída removendo uma bola de cada um de M e N e colando-as ao longo de seus bordos,

$$(M \setminus \operatorname{int}(\mathbb{D}^n)) \cup_{\partial \mathbb{D}^n} (N \setminus \operatorname{int}(\mathbb{D}^n))).$$

Se $n \geq 3$, obtemos o produto livre

$$\pi_1(M\#N, x_0) = \pi_1\left(M \setminus \mathbb{D}^n, x_0\right) * \pi_1\left(N \setminus \mathbb{D}^n, x_0\right) = \pi_1(M, x_0) * \pi_1(N, x_0).$$

O processo de anexar uma n-célula num espaço topológico é definido da seguinte forma: começamos com um espaço topológico X, uma n-célula $\mathbb{D}^n$, ou seja, um espaço topológico homeomorfo ao disco n-dimensional, e uma função $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} \to X$ e anexamos $\mathbb{D}^n$ a X, colando-o ao longo da imagem de f para obter o espaço quociente $X \cup_f \mathbb{D}^n$:



Podemos usar o Teorema de Seifert-van Kampen para analisar como a colagem altera o grupo fundamental.

Se $n \geq 3$, então a aplicação $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0)$ induzida pela inclusão é um isomorfismo, onde x_0 é um ponto na imagem de f. Ou seja, anexar um disco de dimensão maior que 3 não afeta o grupo fundamental.

Demonstração. Novamente, a dificuldade para poder aplicar o Teorema de Seifert-van Kampen é que precisamos trabalhar com conjuntos abertos.

Seja $0 \in \mathbb{D}^n$ um ponto no interior de $\mathbb{D}^n$. Definimos $A = X \cup_f (\mathbb{D}^n \setminus \{0\})$. Note que $\mathbb{D}^n \setminus \{0\}$ retrai-se por deformação para a fronteira $\mathbb{S}^{n-1}$. Assim, A retrai-se por deformação para X. Defina $B = \text{int}(\mathbb{D}^n)$. Então

$$A \cap B = \text{int}(\mathbb{D}^n) \setminus 0 \cong \mathbb{S}^{n-1}.$$

Não podemos usar y_0 como nosso ponto base, já que este ponto não está em $A \cap B$. Em vez disso, escolhemos um ponto arbitrário $y_1 \in A \cap B$. Uma vez que $\mathbb{D}^n$ é conexo por caminhos, temos um caminho γ ligando y_1 a y_0, e podemos usá-lo para recuperar os grupos fundamentais com base em y_0.

Agora o Teorema de Seifert-van Kampen diz que:

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_1) \cong \pi_1(A, y_1) \underset{\pi_1(A\cap B, y_1)}{*} \pi_1(B, y_1).$$

Uma vez que B é um disco e $A \cap B$ é simplesmente conexo, já que para $n \geq 3$ a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ é simplesmente conexa, e logo seu grupo fundamental é trivial. Portanto, obtemos

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_1) \cong \pi_1(A, y_1).$$

Agora podemos usar a curva γ para mudar o ponto base de y_1 para $y_0 \equiv x_0$. Assim,

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

■

O caso mais interessante ocorre quando temos dimensões menores.

Se $n = 2$, então a aplicação natural $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, x_0)$ é sobrejetiva, e o núcleo é $N([f])$, o normalizador do grupo gerado por f. Note que esta afirmação faz sentido, já que $\mathbb{S}^{n-1}$ é um círculo e $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ é um laço em X. Ou seja se anexarmos um disco ao laço dado por f, esse laço simplesmente desaparece.

Demonstração. Como antes, obtemos

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n, y_1) \cong \pi_1(A, y_1) \underset{\pi_1(A \cap B, y_1)}{*} \pi_1(B, y_1).$$

Novamente, B é contrátil, e $\pi_1(B, y_1) \cong 1$. No entanto, $\pi_1(A \cap B, y_1) \cong \mathbb{Z}$. Uma vez que $\pi_1(A \cap B, y_1)$ é homotópico ao laço induzido por f, consequentemente temos que

$$\pi_1(A, y_1) \underset{\pi_1(A \cap B, y_1)}{*} 1 = (\pi_1(A, y_1) * 1)/N[\pi_1(A \cap B, y_1)] \cong \pi_1(X, x_0)/N([f]).$$

■

Em resumo, temos

$$\pi_1(X \cup_f \mathbb{D}^n) = \begin{cases} \pi_1(X) & n \geq 3 \\ \pi_1(X)/N([f]) & n = 2 \end{cases}$$

E assim apenas mata o laço em torno de $U \cap V$; ou seja, $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)/N$ onde N é o subgrupo normal gerado por um laço em torno de $U \cap V$.

Seja $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, então o grupo fundamental de X é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e um gerador do grupo fundamental é a classe de uma circunferência de raio 1 centrada

no ponto $(0,0)$. Se colarmos uma célula sobre essa circunferência o grupo fundamental de $X \cup_f \mathbb{D}^2$ é trivial, o que é bastante intuitivo pois podemos contrair todos os laços à um ponto contornando a origem removida utilizando a célula colada. Se a curva no qual a célula é colada não contém a origem então o grupo fundamental de $X \cup_f \mathbb{D}^2$ não se altera e assim é isomorfo à $\mathbb{Z}$.

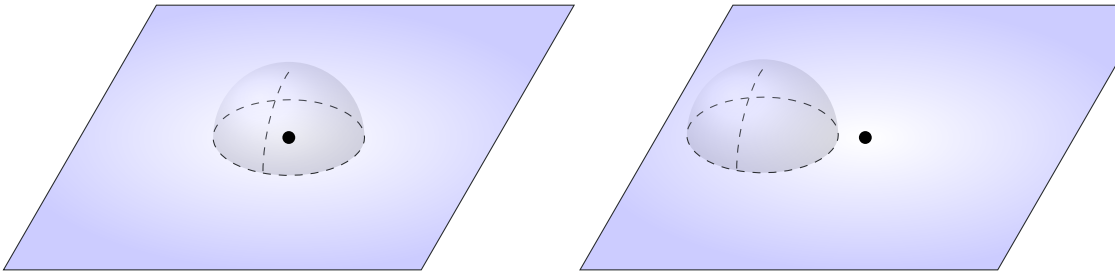


Figura 4.22.: Colagem de células em $X = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Como consequência do teorema anterior temos: Qualquer grupo finitamente apresentado $\langle a_1, \ldots, a_m | \; r_1, \ldots, r_n \rangle$ pode ser obtido como o grupo fundamental de um espaço topológico de Hausdorff compacto obtido da colagem em uma única 0-célula, de um laço para cada gerador a_i e de uma 2-célula para cada relação r_i.

Ou seja, qualquer grupo finitamente apresentado $\langle a_1, \ldots, a_m | \; r_1, \ldots, r_n \rangle$ pode ser obtido como o grupo fundamental de um CW-complexo finito bidimensional.

A demonstração da proposição anterior é deixada como exercício ao leitor. Veja o Exercício 59.

4.9.1. Grupo Fundamental de Superfícies

A representação na forma normal de uma superfície compacta e orientável Σ_g diagrama planar que é o polígono de $4g$ lados P com as colagens dadas pela palavra

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

pode ser usada para calcular o grupo fundamental de Σ_g. Seja x_0 o ponto em Σ_g que é a imagem dos vértices em P, e sejam α_i e β_i os laços em Σ que são as imagens dos lados correspondentes de P.

Seja F_{2g} o grupo livre com $2g$ geradores $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$. Existe um homomorfismo de grupos de F_{2g} para o grupo fundamental $\pi_1(\Sigma_g, x)$ que leva a_i para α_i e

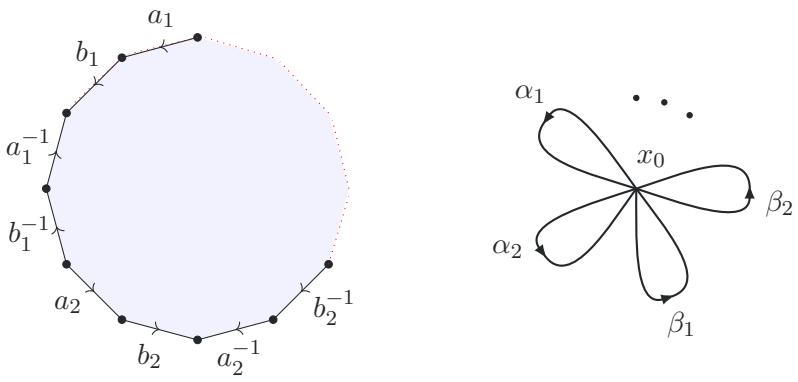


Figura 4.23.: Diagrama planar da superfície Σ_g.

b_i para β_i, para $1 \leq i \leq g$. Afirmamos primeiro que o elemento

$$c_g = a_1 \cdot b_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot a_2^{-1} \cdot b_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_g \cdot b_g \cdot a_g^{-1} \cdot b_g^{-1}$$

em F_{2g} é levado para o elemento identidade de $\pi_1(\Sigma_g, x)$ por meio desse homomorfismo. Na verdade, o caminho produto

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1^{-1} \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \beta_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_g \cdot \beta_g \cdot \alpha_g^{-1} \cdot \beta_g^{-1}$$

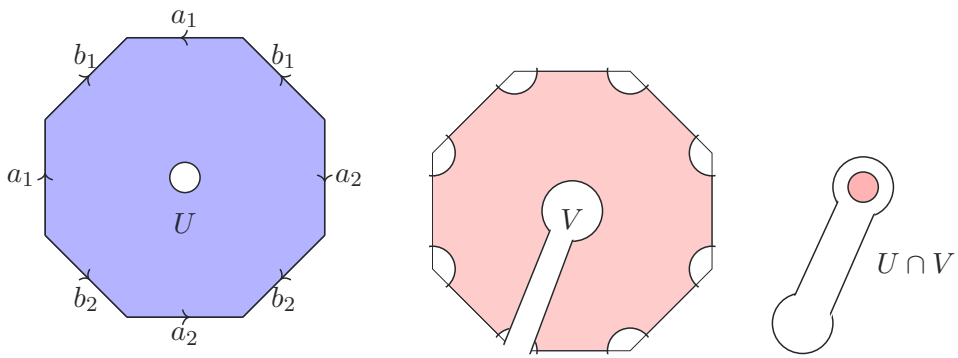
é homotópico ao caminho constante baseado em x, uma vez que o caminho correspondente nos lados de P é homotópico a um caminho constante em P (uma vez que P é convexo), e a composição com a aplicação contínua de P para Σ_g fornece uma homotopia em Σ_g.

Seja N_g o subgrupo normal mínimo de F_{2g} contendo c_g, ou seja, N_g é o subgrupo gerado por todos os elementos da forma $u \cdot c_g \cdot u^{-1}$ para todos os u em F_{2g}. Do que acabamos de ver, N_g está no núcleo do homomorfismo de F_{2g} para $\pi_1(\Sigma_g, x)$, então temos um homomorfismo

$$F_{2g}/N_g \mapsto \pi_1(\Sigma_g, x)$$

O homomorfismo $F_{2g}/N_g \to \pi_1(\Sigma_g, x)$ é um isomorfismo.

Demonstração. Aplicaremos o Teorema de Seifert-van Kampen. Seja U a imagem em Σ_g do complemento de um pequeno disco no meio de P, e seja V a imagem em Σ_g de um conjunto aberto que contém esse disco, como mostrado na Figura abaixo:



Seja K a imagem da fronteira de P em Σ_g. Este K é um grafo que consiste em $2g$ laços baseados em x, então $\pi_1(K, x_0)$ é o grupo livre com geradores $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$, ou seja, $\pi_1(K, x_0) = F_{2g}$. Pela projeção radial a partir do centro do disco, vê-se que K é uma retração por deformação de U. Portanto, temos um isomorfismo

$$\pi_1(U, x_0) \cong \pi_1(K, x_0).$$

Portanto, $\pi_1(U, x_0)$ também é o grupo livre F_{2g} com os mesmos geradores. Agora, V é homeomorfo a um disco, então $\pi_1(V, x_0) = \{e_{x_0}\}$ é trivial, e $U \cap V$ é um retrato por deformação de um círculo, e assim $\pi_1(U \cap V, x_0) = \mathbb{Z}$. A inclusão de $U \cap V$ em U leva um gerador de $\pi_1(U \cap V, x_0)$ ao elemento $c_g = a_1 \cdot b_1 \cdot a_1^{-1} \ldots \cdot b_g^{-1}$. Pelo Teorema de Seifert-van Kampen, para qualquer grupo G, fornecer um homomorfismo de $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ para G é o mesmo que fornecer um homomorfismo de $\pi_1(U, x_0) = F_{2g}$ para G (e um homomorfismo de $\pi_1(V, x_0) = \{e\}$ para G) de tal maneira que a composição

$$\mathbb{Z} = \pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0) \to G$$

leva um gerador de $\mathbb{Z}$ ao elemento identidade de G. Isso significa precisamente que se tem um homomorfismo de F_{2g} para G de modo que c_g é levado para a identidade, ou equivalente, que N_g é levado para a identidade. Ou seja,

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g, x_0), G) = \mathrm{Hom}(F_{2g}/N_g, G).$$

Isso implica que a aplicação de F_{2g}/N_g para $\pi_1(\Sigma_g, x_0)$ é um isomorfismo.

■

Dito de outra forma:

$$\pi_1(\Sigma_g, x_0), = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

4.9.2. Grupo Fundamental de Variedades 4-dimensionais

Uma versão geométrica do Exemplo 4.9 mostra que qualquer grupo finitamente apresentado é o grupo fundamental de alguma variedade 4-dimensional suave.

Comece com a variedade 4-dimensional fechada

$$X = (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1) \# \cdots \# (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1),$$

que é a soma conexa de $|S|$ cópias de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$. Usando Seifert-van Kampen, temos que $\pi_1(X, x_0) \cong \langle a_1, \ldots, a_{|S|} \rangle$, o grupo livre em $|S|$ geradores onde o gerador a_i é representado pela $\mathbb{S}^1$ do i-ésimo fator $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ da soma X.

Cada relação r_j pode ser representada por um laço simples suave b_j em X. De fato, isso é verdade para qualquer variedade n-dimensional orientável M tal que $n \geq 3$ já que em uma variedade de dimensão ≥ 3 há "espaço" suficiente para se livrar das auto-interseções em qualquer caminho fechado por meio de deformações arbitrariamente pequenas.

Cada laço b_j tem uma vizinhança tubular N_j, que é uma cópia de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3$ mergulhada em X. O bordo de N_j é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Observe que $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2$ também tem bordo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Portanto, podemos cortar N_j de X e inserir uma cópia de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2$ em seu lugar, anexando-a ao conjunto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ "vazio" deixado para trás em $X \setminus \text{int}(N_j)$.

O único passo que resta é verificar que remover N_j e substituí-lo por uma cópia de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2$ tem o efeito de matar r_j. Vamos denotar por X_j a variedade obtida de X por este processo. Temos então:

$$X_j = (X \setminus \text{int}(N_j)) \cup_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2} (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2).$$

Agora

$$\begin{aligned}\pi_1(X \setminus \operatorname{int}(N_j)) &= \langle a_1, \ldots, a_{|S|} \rangle, \\ \pi_1(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2) &= 0, \\ \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) &= \langle c \rangle,\end{aligned}$$

onde c é representado por $\mathbb{S}^1 \times \{\text{pt}\}$ em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Observe que a imagem de c em X_j é precisamente a curva b_j. Portanto por Seifert-van Kampen temos que

$$\pi_1(X_j) = \langle a_1, \ldots, a_{|S|} \mid b_j \rangle.$$

Se X' denota o resultado de fazer esta cirurgia para todos os b_j's, temos que

$$\begin{aligned}\pi_1(X') &= \langle a_1, \ldots, a_{|S|} \mid b_1, \ldots, b_{|R|} \rangle \\ &= \langle S \mid R \rangle.\end{aligned}$$

Esta construção foi utilizada por Andrei Markov em sua prova de que não pode existir nenhum algoritmo para decidir se duas variedades 4-dimensionais compactas, orientáveis e trianguláveis são homeomorfas ou não. A prova de Markov prova a inexistência a partir do fato de que não existe um algoritmo geral para decidir se duas apresentações de grupos representam ou não grupos isomorfos.

Exercícios

Ex. 29 — Dado um espaço de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ e um subconjunto $A \subset X$, seja $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$, mostre que a restrição $p : \widetilde{A} \to A$ é um espaço de recobrimento.

Ex. 30 — Mostre que se $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X_1$ e $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X_2$ são espaços de recobrimento, então seu produto $p_1 \times p_2 : \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$ também é um espaço de recobrimento.

Ex. 31 — Mostre que a aplicação $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$ é um espaço de recobrimento. Generalize para a aplicação $p : \mathbb{S}^1 \to S^2, z \mapsto z^n$.

Ex. 32 — Sejam G um grupo topológico conexo por caminhos e H um subgrupo normal discreto de G. Se $p : G \to G/H$ é o homomorfismo natural, mostre que (G, p) é um espaço de recobrimento de G/H.

Ex. 33 —

1. Sejam X, Y, Z espaços conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos e $h : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicações contínuas e assuma que $f = g \circ h$ é uma aplicação de recobrimento. Então g é uma aplicação de recobrimento se, e somente se, h é uma aplicação de recobrimento.
2. Sejam X um espaço localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo, $p_1 : \widetilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento de X e $p_2 : \widetilde{\widetilde{X}} \to \widetilde{X}$ um espaço de recobrimento de $\widetilde{X}$. Então, a composição $p_1 \circ p_2 : \widetilde{\widetilde{X}} \to X$ é um espaço de recobrimento. **Dica.** Olhe para os levantamentos das aplicações de recobrimento e use o item anterior.

Ex. 34 — Suponha que $p : \widetilde{X} \to X$ seja uma aplicação de recobrimento, com $\widetilde{X}$ sendo conexo por caminhos. Mostre que se X for simplesmente conexo, então p é um homeomorfismo.

Ex. 35 — Suponha que $p : \widetilde{X} \to X$ seja uma aplicação de recobrimento. Sejam α e β caminhos em X com $\alpha(1) = \beta(0)$; e sejam $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ respectivos levantamentos tais que $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(0)$. Mostre que $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}$ é um levantamento de $\alpha * \beta$.

Ex. 36 — Seja $p : \widetilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento com $p^{-1}(x)$ finito e não vazio para todo $x \in X$. Mostre que $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo se, e somente se, X também é simplesmente conexo.

Ex. 37 — Mostre que o brinco havaiano é semilocalmente simplesmente conexo e que o cone CX sobre o brinco havaiano é semilocalmente simplesmente conexo mas não é localmente simplesmente conexo.

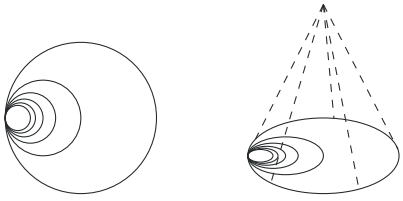


Figura 4.24.: Brinco havaiano e o cone sobre o brinco havaiano.

Ex. 38 — Seja Y o quasi-círculo mostrado na Figura 4.25, ou seja, o subconjunto

fechado de $\mathbb{R}^2$ que consiste em uma parte do gráfico de $y = \operatorname{sen}(1/x)$, o segmento $\{0\} \times [-1, 1]$, e um arco que conecta essas duas partes. A aplicação que colapsa o segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ para o ponto $(0, 1)$ pode ser vista como uma aplicação quociente $f : Y \to \mathbb{S}^1$. Mostre que a aplicação f não se levanta para o espaço de recobrimento $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, embora $\pi_1(Y) = 0$. Portanto, a conexidade local por caminho de Y é uma hipótese necessária no critério de levantamento.

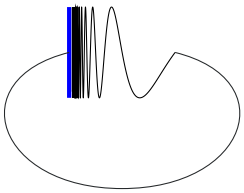
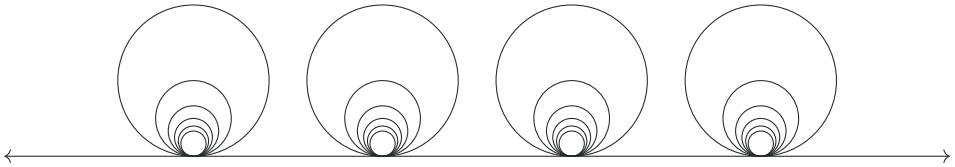


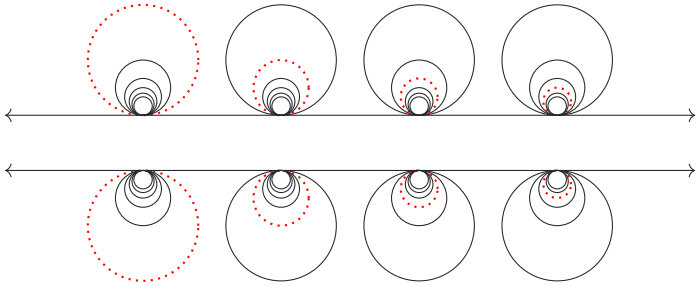
Figura 4.25.: Quasi-círculo

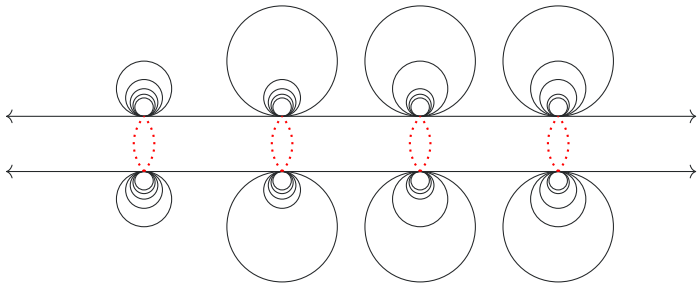
Ex. 39 — Sejam $q : X \to Y$ e $r : Y \to Z$ espaços de recobrimento, e $p = r \circ q$. Mostre que se $r^{-1}(z)$ é finito para cada $z \in Z$, então p é um espaço de recobrimento.

Ex. 40 — Seja X o brinco havaiano descrito no Exemplo 4.10, e $\widetilde{X}$ seu espaço de recobrimento mostrado na figura a seguir.



Construa um espaço de recobrimento de duas folhas $Y \to \widetilde{X}$ de modo que a composição $Y \to \widetilde{X} \to X$ dos dois espaços de recobrimento não seja um espaço de recobrimento. Veja as figuras abaixo para uma ideia de como fazer isso:





Ex. 41 — Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto e seja G um grupo de homeomorfismos de X cuja ação é livre de pontos fixos. Suponha que, para cada subespaço compacto K de X, existem apenas finitos elementos g de G de modo que a interseção $K \cap g(K)$ seja não vazia. Prove que

1. Para cada subespaço compacto K de X, mostre que a união dos conjuntos $g(K)$, para $g \in G$, é fechada em X.
2. Mostre que X/G é de Hausdorff.
3. Mostre que a ação de G é propriamente descontínua.
4. Mostre que X/G é localmente compacto.

Ex. 42 — Mostre que duas aplicações de recobrimento de um espaço conexo X são isomorfas, com um isomorfismo que pode não preservar pontos base, se, e somente se, as imagens de seus grupos fundamentais forem subgrupos conjugados do grupo fundamental de X.

Ex. 43 — Uma seção de um recobrimento $p : Y \to X$ é uma aplicação contínua $s : X \to Y$ tal que $p \circ s$ seja a aplicação identidade de X. Mostre que se um G-recobrimento tem uma seção, então o recobrimento é um recobrimento trivial de G.

Ex. 44 — Seja $p : Y \to X = Y/G$ um G-recobrimento, e sejam φ_1 e φ_2 isomorfismos de G-recobrimentos de Y para Y. Se X for conexo, e φ_1 e φ_2 concordarem em um ponto de Y, mostre que $\varphi_1 = \varphi_2$.

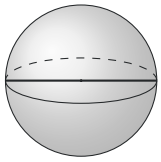
Ex. 45 — Seja G o subgrupo do grupo de homeomorfismos do plano, gerado pela translação $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ e pela transformação $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. Mostre que esta ação de G em $\mathbb{R}^2$ é propriamente descontínua e identifique o quociente $\mathbb{R}^2/G$ com a garrafa de Klein.

Ex. 46 — Seja G o subgrupo do grupo de homeomorfismos do plano, gerado pela translação $(x, y) \mapsto (x+1, -y)$. Mostre que esta ação é propriamente descontínua e identifique o quociente com uma faixa de Möbius.

Ex. 47 —

1. Se G age de forma propriamente descontínua em um espaço Y, e H é um subgrupo de G, mostre que H também de forma propriamente descontínua. Mostre que o aplicação natural de Y/H para Y/G é uma aplicação de recobrimento. Se n for o índice de H em G, esse é um recobrimento com n-folhas.
2. Realize essa construção quando G é o grupo de transformações do plano do Item 45 e H é o subgrupo gerado pelas duas transformações $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ e $(x, y) \mapsto (x, y+2)$. Identifique $\mathbb{R}^2/H$ com um toro e descreva o recobrimento resultante de duas folhas da garrafa de Klein.

Ex. 48 — Considere o espaço $X \subset \mathbb{R}^3$ que é a união por um ponto de uma esfera e um diâmetro.



1. Qual o grupo fundamental de X? **Dica.** Ache um espaço conhecido homotopicamente equivalente a X.
2. Construa um espaço de recobrimento simplesmente conexo de X. (Desenhe esse espaço.)
3. Encontre todos os espaços de recobrimento conexos por caminho para X. Descreva-os algebrica e geometricamente.
4. Diga quais são todos os recobrimentos de 3-folhas (não necessariamente conexo)
5. Apresente dois levantamento de recobrimentos normais de X.
6. Apresente dois exemplos de recobrimentos não normais de X.
7. Faça o mesmo quando Y é a união de uma esfera e um círculo que se intersecta em dois pontos.

Ex. 49 —

1. Determine o grupo fundamental de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.
2. Encontre todos os espaços de recobrimento conexos para $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.
3. Determine o recobrimento normal de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.
4. Apresente dois exemplos de recobrimentos normais de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.
5. Apresente dois exemplos de recobrimentos não normais de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.
6. Quais são todos os recobrimentos de 3 folhas de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.

Ex. 50 — Um espaço de recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X é dito regular se $p_*\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ para cada $x_0 \in X$. Se $(\widetilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento regular de X, mostre que $p_*\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}\right) = p_*\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}\right)$ para cada par de pontos $\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}$ na mesma fibra.

Ex. 51 — Se $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, então todo espaço de recobrimento de X é regular.

Ex. 52 — Seja X um espaço conexo e localmente conexo por caminho e seja $x_0 \in X$. Então mostre que um espaço de recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X é regular se, e somente se, o grupo $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ atua transitivamente na fibra sobre x_0 .

Ex. 53 — Se X é um espaço de Hopf, prove que todo espaço de cobertura de B é regular.

Ex. 54 — Seja $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ a união por um ponto de um círculo e uma esfera. Obtenha o recobrimento universal de X.

Ex. 55 — Qual é o recobrimento universal do espaço formado pela união por um ponto de um toro com um círculo?

Ex. 56 — Seja M uma superfície compacta e orientável de gênero $g > 1$. Mostre que existe $f : M \to \mathbb{S}^1$ contínua, não homotópica a uma constante.

Ex. 57 — Encontre espaços cujos grupos fundamentais sejam isomorfos aos seguintes grupos:

1. $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$;
2. $\mathbb{Z}/n_1 \times \mathbb{Z}/n_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k$;

3. $\mathbb{Z}/n * \mathbb{Z}/m$;
4. $\mathbb{Z}/n_1 * \mathbb{Z}/n_2 * \cdots * \mathbb{Z}/n_k$.

Ex. 58 — Seja $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ a união por um ponto de duas circunferências.

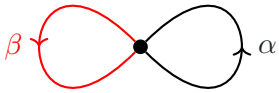
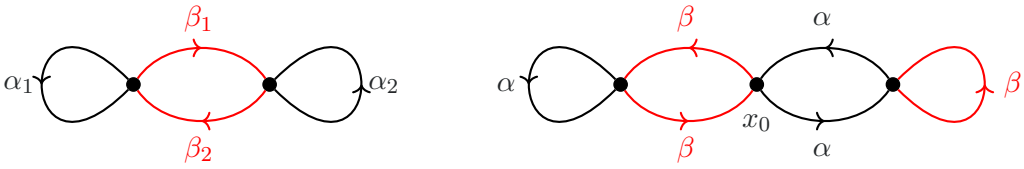


Figura 4.26.: $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

1. Seja $\widetilde{X}$ o espaço ilustrado na Figura 4.27a; seja $p : \widetilde{X} \to X$ a aplicação que envolve cada arco α_1 e α_2 ao redor de α e leva β_1 e β_2 homeomorficamente em β. Mostre que p é uma aplicação de recobrimento normal.
2. Determine o grupo de transformações de recobrimento do recobrimento de X indicada na Figura 4.27b. Esse recobrimento é normal?



(a) (b)

Figura 4.27.: Exemplos de espaços de recobrimento de $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

3. Usando o Teorema de van Kampen mostre que o grupo de fundamental do espaço da Figura 4.27b é

$$\langle a^2, b^2, aba^{-1}, bab^{-1} \rangle$$

Ex. 59 — Prove o seguinte:

Teorema. Se G é um grupo finitamente apresentado, então existe um espaço de Hausdorff compacto X cujo grupo fundamental é isomorfo a G.

Prova. Suponha que G tenha uma apresentação com n geradores e m relações. Seja A a união por um ponto de n círculos; forme um espaço X a partir da colagem

de A e m cópias $B_1, \ldots, B_m$ da bola unitária por meio de uma aplicação contínua $f : \bigcup \partial B_i \to A$.

1. Mostre que X é de Hausdorff.
2. Prossiga por indução em m.

Ex. 60 — Prove o seguinte:
Teorema. Seja G um grupo topológico com operação de multiplicação $m : G \times G \to G$ e elemento identidade e. Assuma que $p : \widetilde{G} \to G$ é uma aplicação de recobrimento e que G e $\widetilde{G}$ são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos. Dado $\widetilde{e}$ com $p(\widetilde{e}) = e$, existe uma única operação de multiplicação em $\widetilde{G}$ que a torna em um grupo topológico, de modo que $\widetilde{e}$ seja o elemento identidade e p seja um homomorfismo.
Prova.

1. Seja $I : G \to G$ a aplicação $I(g) = g^{-1}$. Mostre que existem aplicações únicos $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ e $\widetilde{I} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ com $\widetilde{m}(\widetilde{e} \times \widetilde{e}) = \widetilde{e}$ e $\widetilde{I}(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$, de modo que $p \circ \widetilde{m} = m \circ (p \times p)$ e $p \circ \widetilde{I} = I \circ p$.
2. Mostre que as aplicações $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dados por $\widetilde{g} \to \widetilde{m}(\widetilde{e} \times \widetilde{g})$ e $\widetilde{g} \to \widetilde{m}(\widetilde{g} \times \widetilde{e})$ são iguais à aplicação identidade de $\widetilde{G}$.
3. Mostre que as aplicações $\widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dados por $\widetilde{g} \to \widetilde{m}(\widetilde{g} \times \widetilde{I}(\widetilde{g}))$ e $\widetilde{g} \to \widetilde{m}(\widetilde{I}(\widetilde{g}) \times \widetilde{g})$ levam $\widetilde{G}$ para $\widetilde{e}$.
4. Mostre que as aplicações $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ dadas por
$$\widetilde{g} \times \widetilde{g}' \times \widetilde{g}'' \to \widetilde{m}\left(\widetilde{g} \times \widetilde{m}\left(\widetilde{g}' \times \widetilde{g}''\right)\right)$$
$$\widetilde{g} \times \widetilde{g}' \times \widetilde{g}'' \to \widetilde{m}\left(\widetilde{m}\left(\widetilde{g} \times \widetilde{g}'\right) \times \widetilde{g}''\right)$$
são iguais.
5. Complete a prova.

Ex. 61 — Seja $p : \widetilde{G} \to G$ um homomorfismo de grupos topológicos que é uma aplicação de recobrimento. Mostre que se G for abeliano, então $\widetilde{G}$ também é abeliano.

Ex. 62 — Descreva o grupo fundamental de $\mathbb{R}^2 \backslash Z$, onde Z é o conjunto $\mathbb{Z} \times \{0\}$ de todos os pontos de coordenadas inteiras no eixo x.

Ex. 63 — Seja X um espaço topológico cujo grupo fundamental é abeliano e que

possui um espaço de recobrimento universal. Se $(\widetilde{X}_1, p_1)$ e $(\widetilde{X}_2, p_2)$ são espaços de recobrimento de X, defina $(\widetilde{X}_1, p_1) \geqq (\widetilde{X}_2, p_2)$ se, e somente se, existir um homomorfismo de $(\widetilde{X}_1, p_1)$ para $(\widetilde{X}_2, p_2)$.

1. Prove que essa relação é transitiva, reflexiva e que, se $(\widetilde{X}_1, p_1) \leqq (\widetilde{X}_2, p_2)$ e $(\widetilde{X}_2, p_2) \leqq (\widetilde{X}_1, p_1)$, então $(\widetilde{X}_1, p_1)$ é isomorfo a $(\widetilde{X}_2, p_2)$.
2. Prove que quaisquer dois espaços de recobrimento de X têm um supremo e um ínfimo em relação a essa relação de ordem parcial.
   Observação. Esse resultado não é verdadeiro se a hipótese de que $\pi(X)$ seja abeliano for removida.

Parte II.

Teoria de Homologia

5 Motivação

Voltamos à uma variante do problema com o qual iniciamos o estudo dos grupos fundamentais. Sejam $\mathbb{S}^2$ a esfera bidimensional, $\mathbb{T}^2$ o toro bidimensional e $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ o bitoro bidimensional, representados na Figura 5.1.

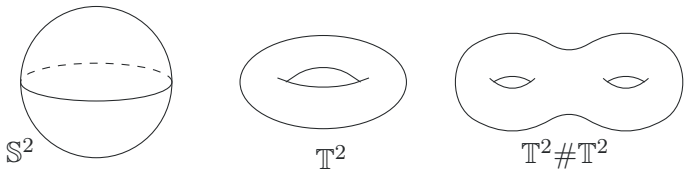


Figura 5.1.: Esfera, toro e bitoro.

Os grupos fundamentais desses espaços não são isomorfos e assim temos que estes espaços não são homeomorfos.

Porém, uma resposta mais intuitiva baseia-se na nossa intuição que estes espaços não são homeomorfos uma vez que que o toro $\mathbb{T}^2$ "possui um buraco", o bitoro $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ "possui dois buracos", enquanto que a esfera $\mathbb{S}^2$ não "possui buracos". Nessas notas, iremos construir a partir dessa vaga ideia de buracos uma nova estrutura algébrica, os grupos de homologia, que nos permitirá mostrar a não existência de tais homeomorfismos. [1]

Novamente ressaltamos que a estratégia de associar e utilizar ferramentas da álgebra abstrata para estudar espaços topológicos é a origem da Topologia Algébrica. O objetivo básico é encontrar invariantes algébricos que diferenciem, e em alguns casos classifiquem, os espaços topológicos a menos de homeomorfismo ou equi-

[1] Para sermos precisos, cada um desses espaços possui um "buraco" bidimensional mas o que os diferenciam é o número de "buracos" unidimensionais.

valência homotópica. Assim, a Topologia Algébrica consiste essencialmente em encontrar "traduções" (funtores) interessantes da categoria de espaços topológicos para uma categoria de estruturas algébricas. Desta maneira, podemos traduzir problemas topológicos em problemas algébricos, esperando que a versão algébrica seja mais simples.

Começaremos com alguns exemplos que ilustram o caminho que pretendemos percorrer.

Na Figura 5.2a, apresentamos um grafo com três vértices x, y e z e cinco arestas a, b, c, d e e. Na Figura 5.2b, colamos a célula A (um disco) nas arestas a e d; na Figura 5.2c, colamos a célula B nas arestas b e e; e finalmente na Figura 5.2d, colamos mais uma célula C nas arestas b e e.

O que acontece intuitivamente com o número de buracos conforme realizamos a construção de colagem? Intuitivamente, a Figura 5.2a possui três buracos, a Figura 5.2b possui dois buracos, já que a colagem da célula A fechou um dos buracos. De modo análogo, a Figura 5.2c possui um buraco, e finalmente na Figura 5.2d temos algo diferente: além dos buracos delimitados pelas arestas a, b, c temos um outro tipo de buraco delimitado pelas células B e C.

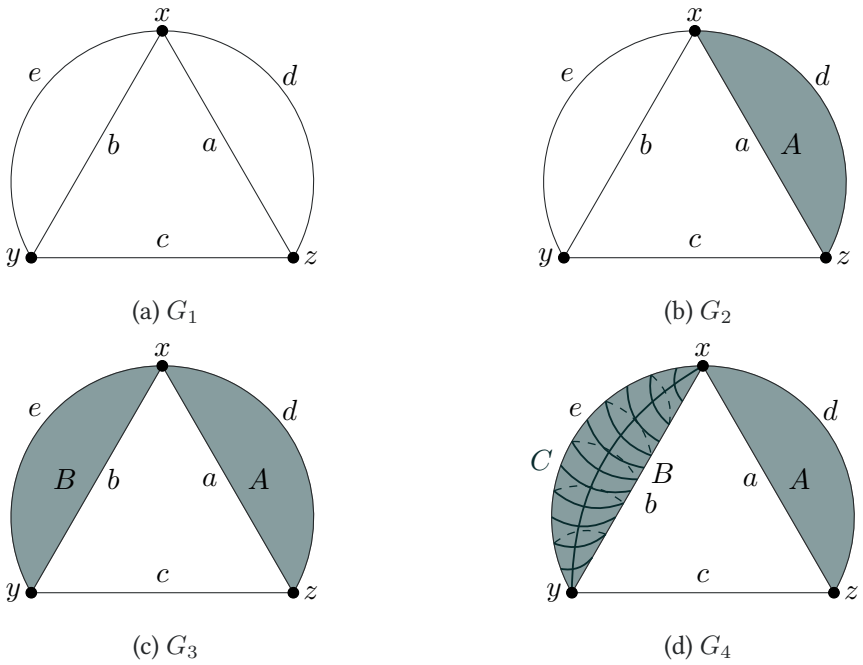
Antes de prosseguirmos vale a pena observar que o grupo fundamental consegue distinguir os espaços apresentados nas Figuras 5.2a, 5.2b e 5.2c, porém não é capaz de distinguir as Figuras 5.2c e 5.2d.

Vamos analisar cada uma dessas figuras e ver como podemos começar a transformar essas intuições em uma teoria matemática.

Análise de G_1: Começaremos orientando as arestas de G_1 como na Figura 5.3 e consideramos os laços formados por sequências de arestas, começando e terminando no mesmo ponto. Por exemplo, a partir do ponto x, o loop be^{-1} viaja para frente ao longo da aresta b, então para trás ao longo de e, o que é indicado pelo expoente -1.

Queremos que a estrutura dos ciclos seja abeliana e assim, por exemplo, o dois laços abc e cab devem ser considerados iguais. Os laços abc e cab representam o mesmo ciclo, apenas com escolhas de ponto inicial e final diferentes. A mesma coisa acontece para um loop qualquer: escolher outro ponto inicial em um loop apenas permuta suas letras ciclicamente.

Estando numa estrutura abeliana, vamos mudar para a notação aditiva, de modo



(a) G_1 (b) G_2

(c) G_3 (d) G_4

Figura 5.2.

que os ciclos se tornem combinações lineares de arestas com coeficientes inteiros, como $e - 3c - 2b$. Um preço dessa escolha é que $a + c + b$, que não possui uma interpretação geométrica imediata, representa o mesmo ciclo que $a + b + c$.

Vamos chamar qualquer combinação de arestas de *cadeias*. E as cadeias que possam ser decompostas como combinação linear de caminhos fechados de *ciclos*.

Nesse exemplo, as cadeias são da forma $k_1a + k_2b + k_3c + k_4d + k_5e$. E os ciclos são combinações de $e - b$, $a + b + c$ e $d - a$, i.e.

$$k(e - b) + l(a + b + c) + m(d - a) \ .$$

Com uma pequena manipulação algébrica, podemos reescrever essa condição como

$$a(l - m) + b(l - k) + cl + dm + ek \ .$$

E fazendo as substituições $l - m = k_1, l - k = k_2$ e $k = k_5$, obtemos que os ciclos são as cadeias da forma:

$$k_1a + k_2b + (k_2 + k_5)c + (-k_1 + k_2 + k_5)d + k_5e \ .$$

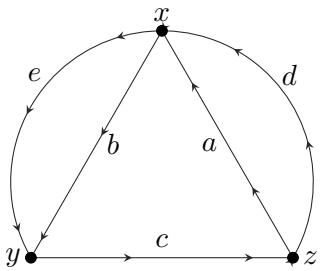


Figura 5.3.: G_1

Um modo mais algébrico de ver que uma cadeia $k_1a + k_2b + k_3c + k_4d + k_5e$ representa um ciclo é garantindo que o número de vezes que a cadeia "entra" em cada vértice é igual ao mesmo número de vezes que "sai" desse vértice:

$$\begin{aligned} \text{vértice } x: &\quad k_1 - k_2 + k_4 - k_5 = 0 \\ \text{vértice } y: &\quad k_2 - k_3 + k_5 = 0 \\ \text{vértice } z: &\quad -k_1 + k_3 - k_4 = 0 \end{aligned}$$

Cuja solução é $k_3 = k_2 + k_5$ e $k_4 = -k_1 + k_2 + k_5$ e novamente obtemos que os ciclos são da forma:

$$k_1a + k_2b + (k_2 + k_5)c + (-k_1 + k_2 + k_5)d + k_5e\,. \tag{5.1}$$

Compreendido isso, podemos fazer esses mesmos cálculos de uma forma mais geral e que leve aos grupos de homologia.

Para isso, definimos C_1 o grupo das cadeias de arestas, i.e., o grupo abeliano livremente gerado pelas arestas:

$$C_1 = \langle a, b, c, d, e \rangle$$

e C_0 o grupo das cadeias de pontos, i.e., o grupo abeliano livremente gerado pelos pontos:

$$C_0 = \langle x, y, z \rangle.$$

Agora, definimos o operador bordo ∂_1 como sendo um homomorfismo de C_1 a C_0 que associa a cada aresta o seu ponto final menos o ponto inicial. E, de posse desse operador, temos um modo algébrico simples de garantir que o número de

vezes que a cadeia "entra" em cada vértice é igual ao mesmo número de vezes que "sai" desse vértice. Vejamos:

$$\begin{aligned}
&\partial_1(k_1a + k_2b + k_3c + k_4d + k_5e) \\
&= k_1\partial_1(a) + k_2\partial(b) + k_3\partial(c) + k_4\partial(d) + k_5\partial(e) \\
&= k_1(x - z) + k_2(y - x) + k_3(z - y) + k_4(x - z) + k_5(y - x) \\
&= (k_1 - k_2 + k_4 - k_5)\, x + (k_2 - k_3 + k_5)\, y + (-k_1 + k_3 - k_4)\, z\ .
\end{aligned}$$

Resumo: Temos algumas conclusões importantes aqui. A primeira é que os ciclos são dados pelo kernel do operador bordo ∂_1, $\ker \partial_1$. Também é fácil ver que $e - b$, $a + b + c$, e $d - a$ formam uma base para o kernel. E, dessa forma, temos que o espaço G_1 possui 3 buracos unidimensionais.

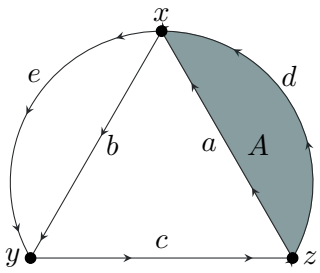


Figura 5.4.: G_2

Análise de G_2: Começaremos orientando as arestas de G_2 como na Figura 5.4. E definimos C_2 o grupo das cadeias das células bidimensionais, i.e., o grupo abeliano livremente gerado por A:

$$C_2 = \langle A \rangle,$$

C_1 o grupo das cadeias de arestas, i.e., o grupo abeliano livremente gerado pelas arestas:

$$C_1 = \langle a, b, c, d, e \rangle\ ,$$

e C_0 o grupo das cadeias de pontos, i.e., o grupo abeliano livremente gerado pelos pontos:

$$C_0 = \langle x, y, z \rangle.$$

Definimos o operador bordo $\partial_2 : C_2 \to C_1$ por $\partial_2(A) = a - d$. Já o operador bordo $\partial_1 : C_1 \to C_0$ é definido como anteriormente. Por completude, podemos definir também o bordo de um ponto como sendo 0, e assim temos também o operador $\partial_0 : C_0 \to 0$, dado por $\partial_0(x) = \partial_0(y) = \partial_0(z) = 0$.

Assim, temos a sequência de grupos e homomorfismos:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0\,.$$

Observamos que $\operatorname{im}\partial_2 = \langle a - d\rangle$. E que o ciclo $a - d$ foi "fechado" pela inclusão da célula A. Em outras palavras, ele não é mais um furo em G_2. Isso sugere que façamos o quociente do grupo de ciclos, obtidos no exemplo anterior, pelo subgrupo gerado por $a - d$, ou seja, $\ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2$. Isso nos leva a definição do grupo de homologia

$$H_1(G_2) = \frac{\ker\partial_1}{\operatorname{im}\partial_2}$$

Nesse caso específico, temos que:

$$C_2 \cong \mathbb{Z} \qquad C_1 \cong \mathbb{Z}^5 \qquad C_0 \cong \mathbb{Z}^3$$

e como $e - b$, $a + b + c$, e $d - a$ forma uma base para $\ker\partial_1$, $a - d$ é uma base para $\operatorname{im}\partial_2$, temos que

$$H_1(G_2) = \frac{\ker\partial_1}{\operatorname{im}\partial_2} \cong \mathbb{Z}^2.$$

Este resultado pode ser interpretado de maneira intuitiva como G_2 possui dois buracos 1-dimensionais.

Finalmente, em função dos geradores escolhidos, podemos escrever a sequência de grupos de cadeias como:

$$C_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}} C_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}} C_0 \xrightarrow{(0)} 0\,.$$

Motivado pela definição de H_1, podemos definir

$$H_0(G_2) = \frac{\ker\partial_0}{\operatorname{im}\partial_1}.$$

Nesse caso, como $\ker\partial_0$ são todos os pontos, ao quocientarmos por $\operatorname{im}\partial_1$ estamos quocientando pela relação de equivalência que $x \approx y$ se $x - y$ é o bordo de

um caminho, ou seja, estamos colocando dois pontos na mesma classe se eles estão conectados por um caminho. Dessa forma, $H_0(G_2)$ nos fornece o número de componentes conexas por caminhos.

Nesse exemplo, $\ker \partial_0 = \langle x, y, z \rangle$ e $\operatorname{im} \partial_1 = \langle x - z, z - y, y - x \rangle$, logo

$$H_0(G_2) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} \cong \mathbb{Z}.$$

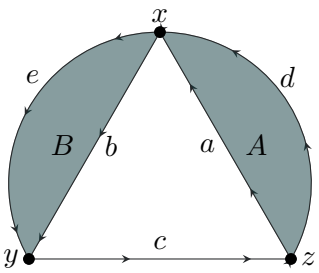


Figura 5.5.: G_3

Análise de G_3: A análise de G_3 não é muito diferente da análise de G_2. Nesse caso, o operador bordo $\partial_2 : C_2 \to C_1$ é dado por $\partial_2(A) = a - d$ e $\partial_2(B) = b - e$. Como $e - b$, $a + b + c$, e $d - a$ formam uma base para $\ker \partial_1$ e como $a - d$ e $b - e$ formam uma base para $\operatorname{im} \partial_2$, temos que

$$H_1(G_2) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} \cong \mathbb{Z}.$$

O que pode ser interpretado de maneira intuitiva como G_3 possui um buraco 1-dimensional.

Análise de G_4: Nesse caso, temos três 2-células e $\partial_2 : C_2 \to C_1$ é dado por $\partial_2(A) = a - d$ e $\partial_2(B) = \partial_2(C) = b - e$. E como $e - b$, $a + b + c$, e $d - a$ formam uma base para $\ker \partial_1$ e como $a - d$ e $b - e$ formam uma base para $\operatorname{im} \partial_2$. temos que

$$H_1(G_4) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} \cong \mathbb{Z}.$$

O que pode ser interpretado de maneira intuitiva como G_4 possui um buraco 1-dimensional.

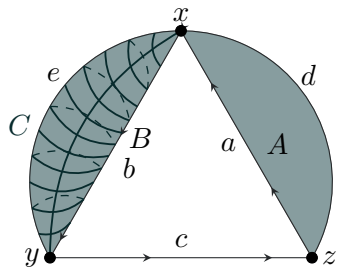


Figura 5.6.: G_4

Nada novo até aqui! Como não temos nenhuma célula tridimensional podemos completar nossa sequência de grupos de cadeias do seguinte modo:

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

e definirmos o grupo de homologia

$$H_2(G_4) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{im} \partial_3}.$$

Nesse caso, podemos ver a cadeia $B - C$ como um ciclo 2-dimensional gerando o grupo de homologia $H_2(G_4) = \ker \partial_2 \cong \mathbb{Z}$. Topologicamente, o ciclo $B - C$ é a esfera formada pelas células B e C juntas com seu círculo limite comum. Este ciclo esférico detecta a presença de um "buraco bidimensional" em G_4, a região delimitada pela esfera.

	Grupos de Homologia		
Espaços	H_0	H_1	H_2
G_1	1	3	0
G_2	1	2	0
G_3	1	1	0
G_4	1	1	1

Tabela 5.1.: Homologias dos espaços G_i's.

5.1. O que faremos nos próximos capítulos

Deve estar claro que um padrão emerge dos exemplos abordados na seção anterior. Para um espaço X associamos um complexo de cadeias $C_n(X)$ que são grupos abelianos livres com base nas n-células de X, e homomorfismos de bordo $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, em termos dos quais definimos o grupo de homologia

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}.$$

No Capítulo 6, apresentamos uma breve introdução à Teoria de Categorias. Categorias são uma forma de generalizar e sistematizar a noção de estruturas matemáticas e de transformações que preservam essas estruturas. Os conceitos e a linguagem categórica permeiam todo o texto. Nesse contexto, os grupos de homologia $H_n(\bullet)$ serão uma função que associa a cada espaço topológico um grupo abeliano. Aqui, temos uma função (um funtor) entre duas estruturas matemáticas distintas (duas categorias). E a Teoria de Categorias fornece uma linguagem natural para formular e lidar com teorias envolvendo múltiplas estruturas matemáticas.

No Capítulo 7, apresentamos resultados de Álgebra Homológica que serão necessários ao desenvolvimento da homologia. Um conceito central desse capítulo é o de complexos de cadeias, e associado a estes a homologia e a cohomologia dos complexos de cadeias. A Álgebra Homológica fornece os meios para extrair as informações contidas nesses complexos e apresentá-las na forma de invariantes.

No Capítulo 8, vamos apresentar diferentes estruturas em espaços topológicos: as variedades, os complexos simpliciais, os Δ-complexos e os CW-complexos. As variedades são espaços cuja topologia é localmente similar a de um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e dispensam maiores apresentações. E grosseiramente, os complexos simpliciais, os Δ-complexos e os CW-complexos são espaços topológicos munidos de uma estrutura combinatória proveniente de como esses espaços são construídos a partir da colagem de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Essa estrutura combinatória varia dependendo de como as colagens se dão e desempenham um papel fundamental na interconexão entre os espaços e as teorias homológicas.

Nos Capítulos 9 e 10, desenvolvemos as teorias de Homologia Simplicial para um Δ-complexo e a Homologia Singular para espaços topológicos. A Homologia Simplicial serve como um protótipo para a Homologia Singular ao possuir uma descrição geométrica concreta e intuitiva e ao ser mais fácil de definir e calcular.

Em contrapartida, a construção da Homologia Singular é mais abstrata, mas, como veremos, em muitos casos é mais fácil e direto demonstrar os resultados usando homologia singular, pois por construção esta teoria é naturalmente mais compatível com as ideias topológicas. No final do Capítulo 10, provaremos a equivalência dessas teorias para Δ-complexos.

No Capítulo 11, apresentaremos diversas aplicações da Teoria de Homologia. Dentre as aplicações estão: o Teorema da Curva de Jordan, O Teorema da Invariância de Domínio e de Dimensão, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema de Borsuk-Ulam. E apresentamos a homologia celular $H_p^{\mathrm{cw}}(X;R)$. Como veremos a homologia celular concorda com a homologia singular se X é um CW-complexo. E em muitos casos práticos, o número de p-células é pequeno e dessa forma o complexo celular $C_*^{\mathrm{cw}}(X;R)$ é muito mais tratável do que o complexo singular $S_*(X;R)$.

E no Capítulo 13, apresentamos a Teoria de Cohomologia Singular. A cohomologia é uma variante algébrica da homologia, resultante do processo de dualização. O que é um pouco surpreendente é que a contravariância leva a uma estrutura extra na cohomologia: um produto natural denominado produto cup, que tornam os grupos de cohomologia um anel.

Exercícios

Ex. 64 — Calcule os grupos de homologia para a figura do oito e sua divisão em células conforme apresentado na Figura 5.7

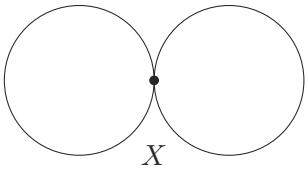


Figura 5.7.: Oito

Ex. 65 — Calcule os grupos de homologia $H_i(X)$, com $i = 0, 1, 2$, para os seguintes espaços X:

1. a superfície do tetraedro representado na Figura 5.8a;
2. o tetraedro sólido;
3. o grafo obtido pelas arestas do tetraedro na Figura 5.8b.



(a) Tetraedro (b) Grafo das arestas do tetraedro

Figura 5.8.

Ex. 66 — Considere o círculo e o cilindro com suas divisões em células conforme apresentados na Figura 5.9. Calcule os grupos de homologia $H_i(X)$, com $i = 0, 1, 2$, para esses espaços.

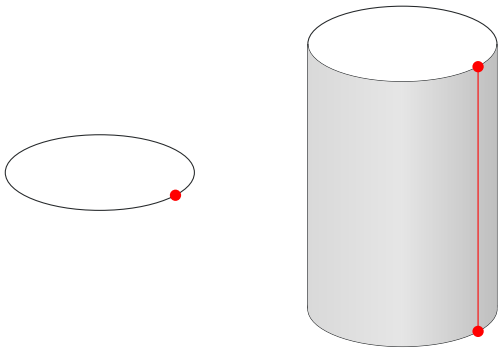


Figura 5.9.: Círculo e cilindro

Ex. 67 — Considere cilindro perfurado e sua divisão em células conforme apresentado na Figura 5.10. Calcule os grupos de homologia $H_i(X)$, com $i = 0, 1, 2$, quando:

1. X é a casca deste cilindro perfurado;
2. X é o cilindro perfurado sólido.

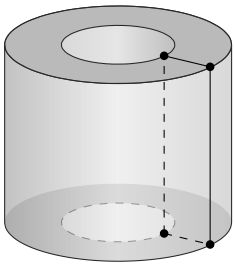


Figura 5.10.: Cilindro perfurado oco

6 Noções básicas de Teoria de Categorias*

Sejam $\mathbb{T}^2$ o toro bidimensional e $\mathbb{X}$ a xícara de café, representados na Figura 6.1.

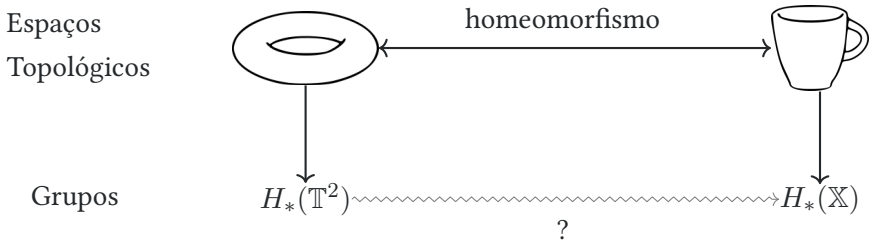


Figura 6.1.

O toro e a xícara são exemplos de espaços topológicos e, como veremos, podemos associar a cada um destes espaços seus grupos de homologia $H_*(\mathbb{T}^2)$ e $H_*(\mathbb{X})$, respectivamente. Nesse contexto, o primeiro grupo de homologia $H_1(\bullet)$ será uma função que associa a cada espaço topológico um grupo abeliano. Aqui temos uma função (um funtor) entre duas estruturas matemáticas distintas (duas categorias). Uma expectativa natural é que, como o toro e a xícara são espaços homeomorfos, seus grupos de homologia sejam isomorfos. Ou seja, que os grupos de homologia sejam realmente invariantes topológicos.

A breve introdução à teoria de categorias que apresentamos a seguir nos fornecerá a linguagem natural para formular e lidar com tais questões.

Categoria é uma forma de generalizar e sistematizar a noção de estruturas matemáticas e de transformações que preservam essas estruturas. Assim, uma categoria é uma coleção de objetos e aplicações entre esses objetos, denominados morfismos.

Exemplos típicos do que "objetos" podem ser são espaço vetorial, grupo e espaço topológico; e exemplos típicos do que "morfismo" pode significar são transformação linear, "homomorfismo" e "função contínua", respectivamente.

Categorias são objetos matemáticos, e com isso em mente, não é surpreendente que haja uma boa noção de aplicação entre categorias. Tais aplicações são chamadas de funtores. Mais surpreendente, talvez, seja a existência de um terceiro nível: podemos falar sobre aplicações entre funtores, que são chamadas de transformações naturais.

6.1. Categorias

Uma categoria $\mathscr{C}$ consiste em:

- uma coleção $\mathrm{ob}(\mathscr{C})$ de **objetos**;
- para cada $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$, uma coleção $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ de **morfismos** ou **flechas** de A para B;
- para cada $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$, uma função

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,C) \\ (g, f) & \mapsto & g \circ f, \end{array}$$

  denominada **composição**;
- para cada $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$, um elemento 1_A de $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A)$, chamado **identidade**;

satisfazendo os seguintes axiomas:

- **associatividade**: para cada $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$ e $h \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$, temos $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- **elemento neutro**: para cada $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, temos $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Muitas vezes escrevemos:

$$\begin{array}{ccc} A \in \mathscr{C} & \text{significando} & A \in \mathrm{ob}(\mathscr{C}); \\ f\colon A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B & \text{significando} & f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B); \\ gf & \text{significando} & g \circ f. \end{array}$$

A partir da definição de categoria, temos que para cada sequência

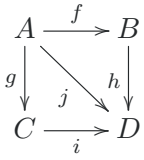
$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

de morfismos em $\mathscr{C}$, é possível construir exatamente um morfismo

$$A_0 \to A_n$$

obtido da composição: $f_n f_{n-1} \cdots f_1$.

Usaremos frequentemente o conceito de **diagrama comutativo**. Por exemplo, dados os objetos e morfismos:



em uma categoria, dizemos que o diagrama **comuta** se $i \circ g = h \circ f = j$. De modo geral, um diagrama é dito **comutativo** se sempre que houver dois caminhos de um objeto X para um objeto Y, o morfismo de X para Y obtido pela composição ao longo de um caminho é igual ao morfismo obtido pela composição ao longo do outro caminho.

Se $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, denominamos A de **domínio** e B de **contradomínio** (ou ainda **codomínio**) de f.

a. A categoria **Set** dos conjuntos cujos objetos são conjuntos, e dados conjuntos A e B, um morfismo de A para B na categoria **Set** é simplesmente uma função de A em B. A composição de funções nesta categoria é a composição ordinária de funções, os morfismos identidade são os esperados.

   Em situações como esta, muitas vezes não nos preocupamos em especificar a composição de funções bem como os morfismos identidades. Escrevemos "a categoria de conjuntos e funções", deixando o resto subentendido.

b. A categoria **Grp** dos grupos é a categoria cujos objetos são grupos e cujos morfismos são homomorfismos de grupo.

c. Da mesma forma, definimos a categoria **Ring** de anéis e homomorfismos de anéis.

d. Para cada corpo $\mathbb{K}$, definimos a categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ de espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e aplicações lineares entre eles.

e. A categoria **Top** cujos objetos são os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas.

f. A categoria $\mathbf{Top}_*$ dos espaços topológicos com ponto marcado. Um objeto é um par (X, x_0), sendo X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Um morfismo $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ é uma função contínua $f : Y \to X$ tal que $f(y_0) = x_0$.

Um morfismo $f\colon A \to B$ em uma categoria $\mathscr{C}$ é um **isomorfismo** se existir um morfismo $g\colon B \to A$ em $\mathscr{C}$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$. Nesse caso, denominamos g de **inversa** de f e denotamos tal fato por $g = f^{-1}$.

Se existe um isomorfismo de A para B, dizemos que os objetos A e B são **isomorfos** e denotamos tal fato por $A \cong B$.

Os isomorfismos em **Set** são exatamente as bijeções. Isso equivale à afirmação de que uma função tem uma inversa se, e somente se, for injetora e sobrejetora.

Os isomorfismos em **Grp** são exatamente os isomorfismos dos grupos.

Da mesma forma, os isomorfismos em **Ring** são exatamente os isomorfismos dos anéis.

Exemplo 6.1.

Os isomorfismos em **Top** são os homeomorfismos. Observamos que, em contraste com a situação em **Grp** e **Ring**, um morfismo bijetor em **Top** não é necessariamente um isomorfismo. Um exemplo clássico é o morfismo

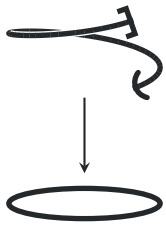
$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \to & \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ t & \mapsto & e^{2\pi i t}, \end{array}$$

que é uma bijeção contínua, mas não um homeomorfismo, pois $[0, 1)$ não é compacto enquanto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ o é.

◁

Um morfismo de R-módulos $f : A \to B$ é dito um

a. **endomorfismo** se o domínio coincide com o contradomínio, i.e., $A = B$;



b. **automorfismo** se f é simultaneamente um endomorfismo e um isomorfismo;

c. **monomorfismo** se $fg_1 = fg_2$ implica que $g_1 = g_2$, para quaisquer morfismos $g_i : C \to A$, com C um R-módulo qualquer (ou seja, f pode ser cancelado à esquerda de uma composição);

d. **epimorfismo** se $g_1 f = g_2 f$ implica que $g_1 = g_2$, para quaisquer morfismos $g_i : B \to C$, com C um R-módulo qualquer (ou seja, f pode ser cancelado à direita de uma composição).

É importante ressaltar que, em geral, em categorias que morfismos são funções, monomorfismos podem não ser funções injetoras e epimorfismos podem não ser funções sobrejetoras. No entanto, estas noções coincidem nas categorias: **Set**, **Grp**, **Ring**, **Ab**, por exemplo.

Nos exemplos de categorias mencionados até agora, os objetos da categoria são conjuntos munidos de uma estrutura (como uma estrutura de grupo, uma topologia ou, no caso de **Set**, nenhuma estrutura). Os morfismos são as funções que preservam a estrutura, no sentido apropriado. E em cada um deles, há um sentido claro de quais são os elementos de um determinado objeto.

No entanto, observamos que nem todas as categorias são assim. Em geral, os objetos de um categoria não são conjuntos equipados com uma estrutura suplementar. Mas trataremos nesse livro apenas de categorias do primeiro tipo.

A seguir, apresentamos dois exemplos de categorias cujos objetos não são conjuntos equipados com uma estrutura adicional.

a. Dado um monoide $(G, *)$, podemos criar uma categoria $\mathscr{C}$ com um único objeto, que denotamos por x, tomando como morfismos os elementos do monoide G, i.e. $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(x, x) = G$, a composição de morfismos é dada pela operação $*$ de G e o morfismo identidade é o elemento neutro de G.

b. Um grafo dirigido com um laço em cada vértice, ou seja uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo, dá origem a uma categoria $\mathscr{C}$ cujos objetos são dados pelos vértices do grafo. Dados dois vértices a e b, os morfismos em $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(a, b)$ correspondem aos caminhos no grafo que vão de a para b. A composição é dada pela concatenação de caminhos. Um morfismo identidade em a é o laço que começa em a e termina em a.

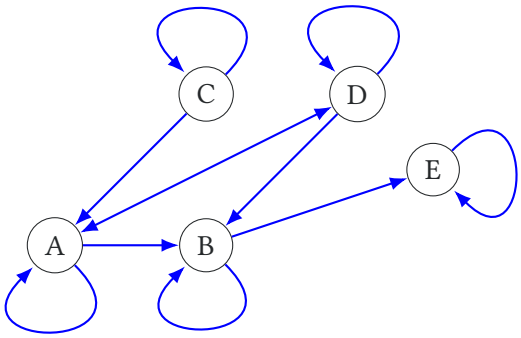


Figura 6.2.: Grafo dirigido com laços em cada vértice.

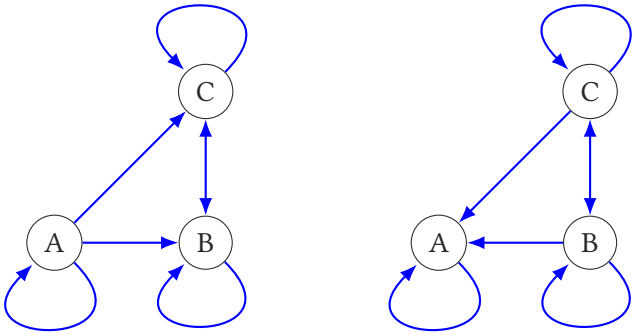
Apresentamos a seguir duas maneiras de construir novas categorias a partir de categorias já existentes.

Dada uma categoria $\mathscr{C}$ podemos construir a categoria **oposta** ou categoria **dual** $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, definida invertendo as flechas. Formalmente, $\mathrm{ob}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathscr{C})$ e $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B, A) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ para todos os objetos A e B.

As identidades em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ são as mesmas que em $\mathscr{C}$. A composição em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ é a mesma que em $\mathscr{C}$, mas com os argumentos invertidos, i.e., se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ forem morfismos em $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ então $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ são morfismos em $\mathscr{C}$. Mais especificamente, dados morfismos $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A, B)$ e $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(B, C)$ na categoria oposta, temos que $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, A)$ e $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, B)$ e, portanto, podemos fazer a composição $f \circ g$ em $\mathscr{C}$ que corresponde a um morfismo em $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, A)$. Assim, definimos a composição $f \circ_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} g$ como sendo o morfismo $g \circ f$, i.e., $f \circ_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} g = g \circ f$.

Exemplo 6.2.

Seja $\mathscr{C}$ a categoria gerada pelo grafo G na Figura 6.3a. A categoria oposta corresponde à categoria gerada pelo grafo G' obtido de G ao inverter todas as flechas, apresentado em 6.3b



(a) (b)

◁

O **princípio da dualidade** é uma das ideias fundamentais na Teoria de Categorias. Informalmente, este afirma que a cada definição categórica, teorema e prova possuem um **dual**, obtido invertendo todas as flechas. Invocar o princípio da dualidade pode salvar o trabalho: dado qualquer teorema, invertendo as flechas ao longo do seu enunciado bem como em sua prova produz um teorema dual.

Dadas as categorias $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, definimos a **categoria produto** $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, de modo que:

$$\begin{aligned} \mathrm{ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) &= \mathrm{ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{ob}(\mathscr{D}), \\ \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}((A,B),(A',B')) &= \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,A') \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(B,B'). \end{aligned}$$

Dito de outra forma, um objeto da categoria produto $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ é um par (A, B), onde $A \in \mathscr{C}$ e $B \in \mathscr{D}$. Um morfismo $(A, B) \to (A', B')$ em $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ é um par (f, g), onde $f\colon A \to A'$ em $\mathscr{C}$ e $g\colon B \to B'$ em $\mathscr{D}$. A composição de pares de morfismos é dada pela composição componente por componente.

6.2. Funtores

Uma das lições da Teoria de Categorias é que sempre que encontramos um novo tipo de objeto matemático, devemos sempre perguntar se há uma noção de morfismo entre esses objetos. Um morfismo entre categorias é denominado funtor.

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Um **funtor** $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ consiste em:

- uma função
$$\mathrm{ob}(\mathscr{C}) \to \mathrm{ob}(\mathscr{D}),$$
escrita como $A \mapsto F(A)$;
- para cada $A, A' \in \mathscr{C}$, uma função
$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A') \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(A), F(A')),$$
escrita como $f \mapsto F(f)$,

satisfazendo os seguintes axiomas:

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$, sempre que $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ em $\mathscr{C}$;
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$, sempre que $A \in \mathscr{C}$.

Os exemplos mais fáceis de funtores são os **funtores de esquecimento**.

a. O funtor $F\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ é definido da seguinte forma: se G for um grupo, então $F(G)$ é o conjunto subjacente de G, e se $f\colon G \to H$ for um homomorfismo de grupo, então $F(f)$ é a própria função f. Dessa forma, o funtor F esquece a estrutura de grupo e esquece que os homomorfismos de grupos preservam a estrutura de grupos.

b. Da mesma forma, para qualquer corpo $\mathbb{K}$, existe um funtor $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$ esquecendo a estrutura de espaço vetorial dos espaços vetoriais.

c. Os funtores de esquecimento não precisam esquecer toda a estrutura. Por exemplo, denote por $\mathbf{Ab}$ a categoria dos grupos abelianos. Existe um funtor $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ que esquece a estrutura multiplicativa, mantendo apenas a estrutura de grupo aditivo do anel.

d. Existe um funtor de inclusão $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ definido por $U(A) = A$ para qualquer grupo abeliano A e $U(f) = f$ para qualquer homomorfismo f de grupos abelianos. Esse funtor esquece que os grupos abelianos são abelianos.

Funtores em topologia algébrica.

Historicamente, alguns dos primeiros exemplos de funtores surgiram em topologia algébrica. Nesse contexto, a estratégia é aprender sobre um espaço extraindo dados de alguma forma inteligente, montando com esses dados uma estrutura algébrica e depois estudando essa estrutura algébrica em vez do espaço original. A topologia algébrica envolve, portanto, muitos funtores de categorias de espaços topológicos para categorias de álgebras.

a. O Grupo Fundamental π_1 é um funtor de $\mathbf{Top}_*$ para $\mathbf{Grp}$ associando a cada espaço topológico o grupo de classes de homotopia dos caminhos fechados começando e terminando no ponto base x_0. Esse funtor é descrito em maiores detalhes no Apêndice 2.

b. Para cada $n \in \mathbb{N}$, há um funtor $H_n\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ atribuindo a um espaço seu n-ésimo grupo de homologia. Esse livro é dedicado a esse funtor.

Segue da definição de funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ que:

- F transforma cada diagrama comutativo em $\mathscr{C}$ em um diagrama comutativo em $\mathscr{D}$;
- se f é um isomorfismo em $\mathscr{C}$, então $F(f)$ é um isomorfismo em $\mathscr{D}$.

Às vezes, encontramos operações semelhantes a um funtor mas que invertem as flechas, de modo que um morfismo $A \to A'$ em $\mathscr{C}$ dá origem a um morfismo $F(A) \leftarrow F(A')$ em $\mathscr{D}$. Tais operações são chamadas de funtores contravariantes.

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias. Um **funtor contravariante** de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$ é um funtor $\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$.

Um funtor contravariante satisfaz as propriedades funtoriais com a seguinte ressalva: se $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A')$ é um morfismo em $\mathscr{C}$, então $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(A'), F(A))$ é um morfismo em $\mathscr{D}$ e $F(f' \circ f) = F(f) \circ F(f')$.

Um funtor comum $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ às vezes é denominado **funtor covariante** de $\mathscr{C}$ para $\mathscr{D}$, para ênfase.

Exemplo 6.3.

Dado um espaço topológico X, seja $C(X)$ o anel de funções contínuas em X tomando valores reais. As operações de anel são definidas pontualmente. Um morfismo contínuo $f\colon X \to Y$ induz um homomorfismo de anel $C(f)\colon C(Y) \to C(X)$, definido em $q \in C(Y)$ tomando $(C(f))(q)$ como o morfismo composto

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} \mathbb{R}.$$

Observe que $C(f)$ vai na direção oposta de f. Logo, concluímos que C é um funtor contravariante de **Top** para **Ring**.

◁

Exemplo 6.4.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Para quaisquer dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W,

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{\text{transformações lineares } V \to W\}$$

é um espaço vetorial. Os elementos desse espaço vetorial são eles mesmos morfismos, e as operações de espaço vetorial (adição e multiplicação escalar) são definidas pontualmente.

Agora, fixe um espaço vetorial W. Qualquer morfismo linear $f\colon V \to V'$ induz um morfismo linear

$$f^*\colon \mathrm{Hom}(V', W) \to \mathrm{Hom}(V, W),$$

definido em $q \in \mathrm{Hom}(V', W)$ tomando $f^*(q)$ como o morfismo composto

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{q} W.$$

Isso define um funtor

$$\mathrm{Hom}(-, W)\colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}.$$

Um caso especialmente importante é quando W é o corpo $\mathbb{K}$, nesse caso o espaço vetorial $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ é denominado **dual** de V, e é escrito como V^*. Então, temos um funtor contravariante

$$(\ )^* = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{K})\colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$$

enviando cada espaço vetorial para seu dual.

◁

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias e seja $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor de $\mathscr{C}$ em $\mathscr{D}$. O funtor F induz uma função

$$F_{A,B} : \ \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

para cada par de objetos A e B em $\mathscr{C}$. O funtor F é dito

- **fiel** se $F_{A,B}$ é injetora;
- **pleno** se $F_{A,B}$ é sobrejetora;
- **plenamente fiel** (pleno e fiel) se $F_{A,B}$ é bijetora,

para cada A e B em $\mathscr{C}$.

Uma categoria $\mathscr{C}$ é dita **pré-aditiva** se, para todo $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ é um grupo abeliano satisfazendo a lei de distributividade:

$$f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2 \qquad (g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f \ .$$

São exemplos de categorias pré-aditivas:

1. a categoria dos grupos abelianos;
2. a categoria de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$;
3. a categoria de módulos (à esquerda) sobre um anel R.

Um funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre categorias pré-aditivas $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ é **aditivo** se, para todo $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, com $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$, tem-se $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

6.3. Transformações Naturais

Certamente muito antes da definição de categoria ser dada, os matemáticos estavam cientes de que alguns isomorfismos eram melhores do que outros. Por exemplo, se V é um espaço vetorial de dimensão finita, podemos escolher uma base de V e a partir dela criar a base dual de V^*. Por extensão linear, temos um isomorfismo de V para V^*. No entanto, esse isomorfismo depende fortemente da escolha

da base de V. Em contraste, temos um isomorfismo $V \cong V^{**}$ que leva um vetor $v \in V$ para o funcional linear em V^* dado pela avaliação de funcionais lineares de V^* em v.

Este isomorfismo surge naturalmente, e transformações naturais buscam captar o que essa naturalidade deve significar matematicamente. Como uma vantagem importante, um isomorfismo "naturalmente definido" será automaticamente compatível com homomorfismos. Em nosso exemplo, isso significa que para todos os morfismos lineares $f : V \to W$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

comuta. Esta observação é a base para a seguinte definição.

Uma **transformação natural** entre dois funtores $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é uma aplicação ξ que, a cada objeto $X \in \mathscr{C}$, associa um morfismo $\xi(X) : F(X) \to G(X)$ em $\mathscr{D}$, de tal forma que os diagramas abaixo são sempre comutativos (se cada $\xi(X)$ é isomorfismo, fala-se que ξ é um **isomorfismo natural**):

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \xi(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & F & \\ \mathscr{C} & \Downarrow \xi & \mathscr{D} \\ & G & \end{array}$$

Assim, de um ponto de vista intuitivo, uma transformação natural é uma correspondência entre dois funtores, responsável por conectar morfismos entre objetos distintos. Por este motivo, às vezes se escreve $\xi : F \to G$, representando-a diagramaticamente de maneira mais simples, assim como exposto no segundo dos diagramas acima.

Exemplo 6.5 — Abelianização.

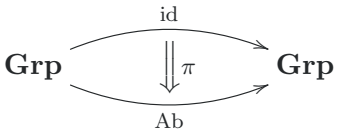
Defina um funtor $\mathrm{Ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ como segue:

1. Para qualquer grupo $G \in \mathbf{Grp}$, $\mathrm{Ab}(G) = G/[G,G]$ é a abelianização de G.

2. Dado qualquer homomorfismo $f : G \to H$ em $\mathbf{Grp}$, $\mathrm{Ab}(f)$ é definido da seguinte maneira: a composição $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{\pi_H} H/[H,H]$ contém $[G,G]$ em seu kernel, pois $H/[H,H]$ é abeliano, logo existe uma aplicação $G/[G,G] \to H/[H,H]$, denotada como $\mathrm{Ab}(f)$, de modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad f \quad} & H \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_H} \\ G/[G,G] & \xrightarrow{\mathrm{Ab}(f)} & H/[H,H] \end{array}$$

O diagrama acima também mostra que π é uma transformação natural de $\mathrm{id} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ para $\mathrm{Ab} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$.



◁

Exemplo 6.6 — Bidual.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ a categoria de espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Defina um funtor $(\ )^{**} : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ da seguinte forma:

1. Dado um objeto V, temos que V^{**} é o bidual de V.

2. Dada uma aplicação $f : V \to W$, f^{**} é a aplicação construída da seguinte forma: primeiro, definimos $f^* : W^* \to V^*$ por $(\varphi : W \to \mathbb{K}) \mapsto (\varphi \circ f : V \to \mathbb{K})$.

   Então, definimos $B(f) = f^{**} : V^{**} \to W^{**}$ por $(\varphi : V^* \to \mathbb{K}) \mapsto (\varphi \circ f^* : W^* \to \mathbb{K})$.

   Pode-se verificar que $(\ )^{**}$ é um funtor.

Para qualquer espaço vetorial V, existe uma aplicação de avaliação

$$\epsilon_V : V \longrightarrow V^{**}$$
$$v \longmapsto \epsilon_v$$

sendo $\epsilon_v(f) \coloneqq f(v)$. Quando V é de dimensão finita, ϵ_V é um isomorfismo.

O diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_V} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{\quad f^{**} \quad} & W^{**} \end{array}$$

comuta.

Para demonstrar a comutatividade do diagrama, seja $v \in V$. Então $\epsilon_W(f(v))$ é a aplicação em $W^* \to \mathbb{K}$ que leva $T : W \to \mathbb{K}$ para $T(f(v))$. Por outro lado, $\epsilon_V(v)$ é a aplicação em $V^* \to \mathbb{K}$ que leva $T : V \to \mathbb{K}$ para $T(v)$. Então $f^{**}(\epsilon_V(v))$ é a aplicação que leva $T : W \to \mathbb{K}$ para $(\epsilon_V(v))(T \circ f) = (T \circ f)(v) = T(f(v))$, exatamente o mesmo que $\epsilon_W(f(v))$. Logo $\epsilon_W(f(v)) = f^{**}(\epsilon_V(v)) = T \mapsto T(f(v))$. Portanto, $\epsilon_W \circ f = f^{**} \circ \epsilon_V$, como desejado.

Então, temos uma transformação natural

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \;\overset{\mathrm{id}}{\underset{(\,)^{**}}{\Downarrow \epsilon}}\; \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$$

◁

Exercícios

Ex. 68 — Prove que o inverso de um morfismo invertível é único.

Ex. 69 — Todo conjunto pré-ordenado, ou seja, todo par $(X, \leq)$ com X um conjunto não vazio e $\leq$ uma relação transitiva e reflexiva em X, dá origem a categoria **Ord** cujos objetos são os elementos de X e, para qualquer par de elementos x e y, os morfismos $\mathrm{Hom}(x, y)$ são definidos da seguinte forma: possui um único elemento (x, y) se $x \leq y$ e é vazio caso contrário. A composição é dada por $(y, z) \circ (x, y) \coloneqq (x, z)$.

1. Verifique detalhadamente que **Ord** é uma categoria.
2. Mostre que a categoria oposta é a categoria dada por $(X, \geq)$.

Ex. 70 — Seja $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ um funtor e seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathscr{C}$.

1. Prove que se f é um isomorfismo, então $F(f)$ é um isomorfismo.
2. Suponha que F seja plenamente fiel. Prove que $F(f)$ é um isomorfismo se, e somente se, f é um isomorfismo.

Ex. 71 — Prove que:

1. $\mathrm{GL}_n(\bullet)$ é um functor da categoria **CRing** de anéis comutativos para a categoria **Grp** de grupos, levando um anel comutativo A para o grupo $\mathrm{GL}_n(A)$.
2. $(\bullet)^\times$ é um funtor **CRing** $\to$ **Grp** enviando um anel A para seu grupo de unidades $A^\times$.
3. O determinante é uma transformação natural $\det : \mathrm{GL}_n \to (\bullet)^\times$.

7 Álgebra Homológica

Grosso modo, podemos dizer que a Álgebra Homológica é o estudo dos funtores homológicos e das estruturas algébricas associadas. Um conceito central é o dos grupos de homologia e cohomologia de complexos de cadeias e todo o arcabouço conceitual resultante.

É uma disciplina relativamente jovem, cujas origens remontam às investigações em topologia combinatória no século 19, através do trabalho de Riemann e Betti sobre "números de homologia" e o posterior desenvolvimento rigoroso desse conceito por Poincaré em 1895.

Esse conjunto de conceitos e técnicas, motivados pela topologia, foram aplicados para definir e explorar a homologia e cohomologia de vários sistemas algébricos: Tor e Ext para grupos abelianos, homologia e cohomologia de grupos e álgebras de Lie, a cohomologia de álgebras associativas, e feixes e cohomologia de feixes.

O termo foi cunhado por Cartan e Eilenberg em 1956, no livro *Homological Algebra* que cristalizou e redirecionou o campo completamente tornando a teoria da álgebra homológica independente de seu habitat original na topologia e construindo-a para uma teoria geral de módulos sobre anéis comutativos.

Atualmente seu uso é pervasivo em várias áreas da matemática como Topologia Algébrica, Teoria de Grupos, Geometria Algébrica e Teoria de Anéis Comutativos.

Nesse capítulo, introduzimos os conceitos e resultados básicos de Álgebra Homológica que serão essenciais ao estudo da homologia e cohomologia de espaços topológicos.

7.1. R-módulos

Um R-módulo é um "espaço vetorial sobre um anel R"; isto é, na definição de espaço vetorial, permitimos que os escalares estejam em um anel R ao invés de um corpo.

Seja R um anel associativo com unidade 1. Um R-**módulo à esquerda** consiste em um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ e uma operação (multiplicação por escalar)

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m = rm \end{aligned}$$

tal que, para todo $m, m' \in M$ e $r, r' \in R$, valem as seguintes propriedades:

1. $r(m + m') = rm + rm'$
2. $(r + r')m = rm + r'm$
3. $(rr')m = r(r'm)$
4. $1_R m = m$

a. Todo espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-módulo à esquerda.

b. Todo grupo abeliano é um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda. De fato, se $(G, +)$ é um grupo abeliano, defina a multiplicação $\mathbb{Z} \times G \to G$ da seguinte maneira:

$$zg \coloneqq \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{z \text{ vezes}}, & \text{se } z > 0 \\ \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{z \text{ vezes}}, & \text{se } z < 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Munido dessa multiplicação por escalar, os grupos abelianos são exatamente os $\mathbb{Z}$-módulos.

c. Todo anel R é um R-módulo à esquerda, definindo a multiplicação por escalar $R \times R \to R$ como sendo a multiplicação dos elementos de R.

De forma análoga, define-se R-**módulo à direita** como sendo um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ munido de uma operação $\cdot : R \times M \to M, (r, m) \mapsto r \cdot m = rm$ que satisfaz as propriedades da Definição 7.1 exceto a terceira que é substituída por:

3′ $(rr')m = r'(rm)$.

Se o valor de $\cdot : R \times M \to M$, em (r, m) for representado por mr, a propriedade 3' terá a forma mais natural:

3″ $m(rr') = (mr)r'$.

Usaremos consistentemente a última notação quando nos referirmos à R-módulos à direita. É comum escrevermos ${}_RM$ (resp., M_R) para denotar que M é um R-módulo à esquerda (resp., à direita).

Note que se R é um anel comutativo, então R-módulos à esquerda são R-módulos à direta e vice-versa.

Um grupo abeliano aditivo M é um bimódulo ou simplesmente um R-**módulo** se M é simultaneamente um R-módulo à direita e um R-módulo à esquerda e as respectivas multiplicações por escalar são compatíveis, i.e. $r \cdot (m * s) = (r \cdot m) * s$, para todo $r, s \in R, m \in M$.

A seguir, consideramos R-módulos à esquerda. Todos os resultados deste capítulo são verdadeiros *mutatis mutandis* para R-módulos à direita.

Sejam M e N dois R-módulos à esquerda. Uma aplicação $f : M \to N$ é um **homomorfismo de R-módulos** à esquerda se

1. $f(m + m') = f(m) + f(m')$,
2. $f(rm) = rf(m)$,

para todo $m, m' \in M$ e para todo $r \in R$. Em outros termos, $f : M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos se as operações binárias de adição e multiplicação por escalar são preservadas. Outro nome dado para um homomorfismo de R-módulos é **aplicação R-linear**.

Um homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$ bijetor é chamado de **isomorfismo de R-módulos** e, nesse caso, os módulos M e N são ditos isomorfos.

Note que os homomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos são os homomorfismos de grupos abelianos, enquanto os homomorfismos entre espaços vetoriais ($\mathbb{K}$-módulos) são precisamente as transformações lineares usuais.

Seja M um R-módulo e $S \subseteq M$. Dizemos que S é um R-**submódulo** de M se S é um R-módulo com respeito a ação de R sobre M e a restrição da operação $+$ em M.

Exercício 7.1

Mostre que $S \subseteq M$ é um R-submódulo se, e somente se, S é um subgrupo de M e $r \cdot s \in S$, para todo $r \in R$ e $s \in S$.

a. Seja $(G, +)$ um grupo abeliano (logo, um $\mathbb{Z}$-módulo). Os subgrupos de G são exatamente os $\mathbb{Z}$-submódulos de G.

b. Os submódulos de $\mathbb{Z}$ são da forma $n\mathbb{Z}$, com $n \in \mathbb{N}$.

c. Considere R como R-módulo. Os R-submódulos de R são exatamente os ideais de R.

d. Dado um homomorfismo de R-módulo $f : M \to N$, o núcleo $\ker f \coloneqq \{m \in M \mid f(m) = 0_N\}$ e a imagem $\operatorname{im} f \coloneqq \{n \in N \mid \exists m \in M, n = f(m)\}$ de f são R-submódulos de M e N, respectivamente.

Dado um R-submódulo N de M, definimos o **módulo quociente** de M por N como sendo o grupo abeliano M/N com a estrutura de R-módulo dada por

$$r(m + N) \coloneqq rm + N, \quad \forall r \in R, m \in M.$$

Dado um homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$, o módulo quociente $N/\operatorname{im} f$ é chamado de **cokernel** de f e é denotado por $\operatorname{coker}(f)$.

Os famosos teoremas de isomorfismo de grupos e espaços vetoriais também são válidos para R-módulos.

Teoremas do Isomorfismo. Considere um R-módulo à esquerda M.

1. Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de R-módulo, então
$$\frac{M}{\ker f} \cong \operatorname{im} f.$$
2. Se M_1, M_2 são R-submódulos de M, então
$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$
3. Se N e P são R-submódulos de M e $P \subseteq N \subseteq M$, então P é um submódulo de N e
$$\frac{M/P}{N/P} \cong M/N.$$

Soma, Produto Direto, Soma Direta

Seja M um R-módulo. Dada uma família $\{N_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M, a **soma** dos submódulos N_i, denotada por $\sum_{i\in I} N_i$, é o R-módulo gerado pelo conjunto $\cup_{i\in I} N_i$, i.e.

$$\sum_{i\in I} N_i \coloneqq \{r_1v_1 + \cdots + r_kv_k \mid r_j \in R,\ v_j \in \cup_{i\in I} N_i\} = \{v_{i_1} + \cdots + v_{i_k} \mid\ k \in \mathbb{N},\ v_{i_j} \in N_{i_j}$$

Se I é finito, digamos $I = \{1, 2, \ldots, k\}$, escreve-se $\sum_{i=1}^{k} N_i$, ou ainda $N_1 + N_2 + \cdots + N_k$.

Seja uma família arbitrária $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos. O **produto direto** de $\{M_i\}_{i\in I}$, denotado por $\prod_{i\in I} M_i$, é o R-módulo definido da seguinte forma:

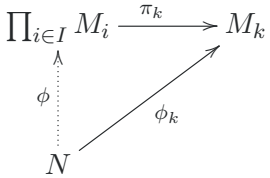
- conjunto suporte: produto cartesiano $\{(v_i)_{i\in I} \mid v_i \in M_i\}$;
- operação de grupo: $(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} \coloneqq (v_i + w_i)_{i\in I}$;
- multiplicação por escalar: $a(v_i)_{i\in I} \coloneqq (av_i)_{i\in I}$.

Para cada $j \in I$, projeção canônica $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ é o homomorfismo de R-módulos que a cada $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ associa o elemento $v_j \in M_j$.

Propriedade Universal do Produto Direto. Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos. Dados N um R-módulo e uma coleção de homomorfismos $\{\phi_i : N \to M_i\}_{i\in I}$, existe um único homomorfismo $\phi : N \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que

$$\pi_k \circ \phi = \phi_k, \text{ para cada } k \in I,$$

i.e. o diagrama abaixo é comutativo:



Além disso, a soma direta $\sum_{i\in I} M_i$ é determinada, a menos de isomorfismo, pela propriedade universal acima.

A **soma direta** de uma família arbitrária $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos, que denotamos por $\bigoplus_{i\in I} M_i$ é o submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$ formado pelos elementos $(v_i)_{i\in I} \in$

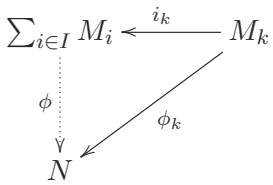
$\bigoplus_{i\in I} M_i$ com suporte finito, i.e., v_i é 0, o elemento neutro aditivo, exceto para uma quantidade finita de índices.

Dada a soma direta $\{M_i\}_{i\in I}$, podemos associar naturalmente dois homomorfismos: a projeção $\pi_j\colon \bigoplus_{i\in I} A_i \to A_j$, para cada $j \in I$ e inclusão $i_j\colon A_j \to \bigoplus_{i\in I} A_i$ para $j \in I$.

Propriedade Universal da Soma Direta. Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos. Dados N um R-módulo e uma coleção de homomorfismos $\{\phi_i : M_i \to N\}_{i\in I}$, existe um único homomorfismo $\phi : \sum_{i\in I} M_i \to N$ tal que

$$\phi \circ i_k = \phi_k, \text{ para cada } k \in I,$$

i.e. o diagrama abaixo é comutativo:



Além disso, o produto direto $\prod_{i\in I} M_i$ é determinado, a menos de isomorfismo, pela propriedade universal acima.

No caso em que $I = \{1, 2, ..., k\}$ é um conjunto finito, a soma direta e o produto direto coincidem. Nesse caso, é costume representar ambos por $\bigoplus_{i=1}^{k} M_i$, ou ainda, $M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$.

Sejam M um R-módulo e $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos de M. Então, temos que $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$ se, e somente se, valem as seguintes condições:

a. $M = \sum_{i\in I} M_i$

b. $M_j \cap (M_{i_1} + \cdots + M_{i_k}) = \{0\}$ se $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Sejam M um R-módulo e $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos de M. Se $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$, então cada $v \in M$ escreve-se de maneira única da forma

$$v_{i_1} + \cdots + v_{i_k}, \text{ com } i_k \in I,\ v_{i_k} \in M_{i_k}.$$

Alguns tipos R-módulos

Dado um R-módulo M, um subconjunto $S \subseteq M$, com $S \neq \emptyset$, é um **conjunto gerador** de M se todo elemento de M pode ser escrito como uma combinação linear (soma finita) de elementos de S com coeficientes do anel R, i.e. dado $v \in M$,

$$v = \sum_{i=1}^{k} r_i v_i, \qquad r_i \in R, v_i \in S.$$

Em geral, tal combinação não é única.

Um conjunto $B \subseteq M$, com $B \neq \emptyset$, é uma **base** de M se todo elemento de M pode ser escrito unicamente como uma combinação linear finita de elementos de B com coeficientes em R. Equivalentemente, $B \subseteq M$ é uma base se:

- B é um conjunto gerador para M;
- B é linearmente independente, isto é, para $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ elementos distintos de B se $r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 + \cdots + r_ne_n = 0_M$ então $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 0_R$, onde $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são elementos de R, 0_M é o zero de M e 0_R é o zero de R.

1. Um R-módulo M é **finitamente gerado** se admite um conjunto gerador com finitos elementos.
2. Um módulo é chamado de **módulo cíclico** se for gerado por um elemento.
3. Um R-módulo é **livre** se possui uma base.

a. Todo espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-módulo livre.

b. O grupo abeliano $\mathbb{Z}_n$, visto como um $\mathbb{Z}$-módulo, não é livre, pois não existem conjuntos linearmente independentes em $\mathbb{Z}_n$. De fato, dado $a \in \mathbb{Z}_n$, existe um inteiro não nulo b tal que $ba = 0$.

c. Qualquer anel R associativo com unidade 1 é um R-módulo livre com base $\{1\}$. Os submódulos coincidem com os ideais de R. Em particular, um submódulo pode não ser livre, e mesmo sendo livre pode ter uma base de cardinalidade maior que 1.

d. O grupo abeliano

$$\mathbb{Z}^k \equiv \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{k-\text{vezes}}$$

é livre. Uma base é dada por $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$, onde $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$.

e. A soma direta $\bigoplus_{i \in I} M_i$ de R-módulos livres é livre.

f. $\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado por $\{1\}$, mas não é livre, pois $1+1=0$. Mais geralmente, $\mathbb{Z}_n$ não é um módulo livre, quando visto como $\mathbb{Z}$-módulo.

g. O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5 \times 8\mathbb{Z}$ é finitamente gerado, mas não é livre.

Dado um R-módulo M, o conjunto

$$\operatorname{Anl}(M) \coloneqq \{a \in R \mid am = 0, \forall m \in M\}$$

é chamado de **anulador** do módulo M. De forma análoga, definimos o anulador de um subconjunto de M. Quando $\operatorname{Anl}(M) = \{0\}$, dizemos que M é R-**módulo fiel**.

Exemplo 7.1.

Um ideal à esquerda I de um anel R é um R-módulo livre, se, e somente se, I é um ideal principal e um gerador a de I é tal que $\operatorname{Anl}(a) = 0$.

◁

Seja M um R-módulo. Um elemento $m \in M$ é **livre** se $\operatorname{Anl}(m) = \{0\}$. Caso contrário, dizemos que m é um **elemento de torção**. Em outras palavras, um elemento $m \in M$ é de torção se, e somente se, existe $a \in R$ com $a \neq 0$ tal que $am = 0$.

Seja M um R-módulo. Dizemos que M é **livre de torção** se todos os seus elementos não nulos são livres. Dizemos que M é um módulo com **torção** se contém algum elemento de torção. Dizemos que M é um módulo de **torção** se todos os elementos de M são de torção.

a. Espaços vetoriais são módulos sem torção.

b. Se M é um módulo livre sobre um anel de integridade, então M é sem torção.

c. Todo grupo abeliano finito é um $\mathbb{Z}$-módulo de torção.

d. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m$ é um $\mathbb{Z}$-módulo com torção, mas não é de torção.

e. R é um R-módulo sem torção se, e somente se, R é um anel de integridade.

Módulo livre gerado por X. Dado um conjunto arbitrário X, o R-módulo livre gerado por X, e denotado por $R[X]$, é definido por

$$R[X] := \bigoplus_{x \in X} R,$$

i.e. para cada $x \in X$ associamos uma cópia de R.

Os elementos de $R[X]$ são as sequências $(r_x)_{x \in X}$, onde $r_x \neq 0$ para uma quantidade finita de x. É costume representar os elementos de $R[X]$ por séries formais $\sum_{x \in X} r_x$.

Note ainda que o módulo $R[X]$ é de fato um módulo livre, pois tem uma base evidente: $\{e_x \mid x \in X\}$ onde cada $e_x = (r_y)_{y \in X}$ é definido por

$$\begin{cases} 1, & \text{se } y = x \\ 0, & \text{se } y \neq x \end{cases}.$$

Os módulos livres gerados por um conjunto descrevem, a menos de isomorfismo, todos os módulos livres:

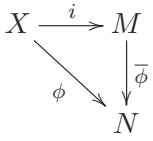
Seja R um anel associativo com unidade. As seguintes afirmações são equivalentes para qualquer R-módulo M:

1. M é livre.

2. Existe uma família de submódulos cíclicos $\{N_i\}_{i \in I}$ de M, com $N_i \cong R$, tais que $M \cong \bigoplus_{i \in I} N_i$.

3. Existe um conjunto $X \neq \emptyset$ tal que $M \cong \bigoplus_{x \in X} R$.

4. Existe um conjunto $X \neq \emptyset$ e uma função $i : X \to M$ com a seguinte propriedade universal: Para todo R-módulo N e qualquer função $\phi : X \to N$, existe um único homomorfismo de R-módulos $\overline{\phi} : M \to N$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:



Segue da proposição acima que um homomorfismo de R-módulos $f : M \to N$, em que M é livre, é completamente determinado pelos valores de f numa base de M.

Seja R um anel comutativo com unidade. Então

1. $\bigoplus_{x \in X} R \cong \bigoplus_{y \in Y} R$ se, e somente se, as cardinalidades dos conjuntos X e Y são iguais.

2. Se F é um módulo livre então as cardinalidades de duas bases são iguais. A cardinalidade de uma base de F é denominada de **posto** de F.

Importância do anel na definição de módulo

Antes de continuarmos, precisamos fazer algumas observações de como as propriedades dos módulos dependem dos anéis sobre os quais estes estão definidos e fazer algumas comparações com o caso mais bem comportado, no qual o anel é um corpo, e os módulos são espaços vetoriais.

Se o anel R for um domínio de integridade, sempre que os elementos $v_1, \ldots, v_n$ forem linearmente independentes sobre R, também serão $rv_1, \ldots, rv_n$ para qualquer $r \in R$ diferente de zero. Isso falha quando R não é um domínio integral.

Quando R é um domínio de ideais principais, ou seja, quando todos os seus ideais são gerados por um único elemento, os R-módulos são razoavelmente bem comportados. Por exemplo, em geral, um módulo pode ter uma base, mas um ou mais de seus submódulos não. Porém, se R for um domínio de ideais principais isso não acontece.

No entanto, mesmo quando R é um domínio de ideais principais, R-módulos são menos bem comportados do que espaços vetoriais. Por exemplo, existem módulos sobre um domínio de ideais principais que não possui nenhum elemento linearmente independente. Claro, esses módulos não podem ter uma base.

De modo geral, apresentamos uma lista comparativas de algumas das propriedades dos módulos e espaços vetoriais que enfatizam as diferenças entre ambos.

- Existem módulos sem elementos linearmente independentes e, portanto, sem base.

- Um submódulo de um módulo finitamente gerado não precisa ser finitamente gerado.
- Um submódulo de um módulo não precisa ter um complemento.
- Um conjunto gerador minimal ou um conjunto linearmente independente maximal não é necessariamente uma base.
- Um conjunto gerador não contém necessariamente uma base. Um conjunto linearmente independente nem sempre pode ser estendido para uma base.
- Existem módulos livres com submódulos que não são livres.

1. Considere $\mathbb{Z}_6$ como $\mathbb{Z}_6$-módulo. Veja que $\mathbb{Z}_6$ é livre com base $\{\overline{1}\}$, mas o submódulo $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ de $\mathbb{Z}_6$ não é livre, pois todo subconjunto unitário é linearmente dependente. Em particular, o $\mathbb{Z}_6$-módulo $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ não possui base.
2. Considere $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Veja que $\{2, 3\}$ gera $\mathbb{Z}$, no entanto $\{2, 3\}$ não contém uma base.
3. Considerando ainda o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$, veja que este é livre e o conjunto $\{2\}$ é linearmente independente. Entretanto, esse conjunto não é e não pode ser ampliado a uma base pois todo conjunto com dois ou mais elementos do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ é linearmente dependente.
4. Como exemplo de módulo livre com submódulo que não é livre, considere o anel $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ de todos os polinômios em variáveis contavéis. O próprio R é um R-módulo finitamente gerado, com $\{1\}$ como conjunto gerador. Agora, considere o submódulo K consistindo de todos polinômios com o termo constante zero. Como todo polinômio contém apenas um número finito de termos cujos coeficientes são diferentes de zero, o R-módulo K não é finitamente gerado.

Teoremas de Estrutura

Um **domínio de integridade** é um anel comutativo no qual o produto de quaisquer dois elementos diferentes de zero é diferente de zero. Um **domínio de ideais**

principais, ou DIP, é um domínio de integridade no qual todo ideal é principal, ou seja, pode ser gerado por um único elemento.

Estrutura de Módulos finitamente gerados sobre um DIP. Sejam R um domínio de ideais principais e M um R-módulo finitamente gerado. Então

$$M \cong \underbrace{R \oplus R \oplus \cdots \oplus R}_{r \text{ cópias}} \oplus R/\langle q_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle q_\ell \rangle \ ,$$

para algum inteiro $r \geq 0$ e elementos $q_1, \ldots, q_\ell \in R$ diferentes de $0, 1$ tais que $q_1 | q_2 | \ldots | q_\ell$ (i.e. q_1 divide q_2, q_2 divide q_3, etc.). O inteiro r é único e os elementos q_i são únicos a menos de multiplicação por uma unidade do anel.

Os elementos $q_1, \ldots, q_\ell \in R$ que aparecem na decomposição de M, no Teorema 7.1, chamam-se fatores invariantes de M e o inteiro r é chamado de **posto livre** de M. Além disso, $R^r = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ é a parte livre de M e $R/\langle q_1 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle q_\ell \rangle$ é a parte de torção.

Seja R é um DIP então todo R-módulo M finitamente gerado é livre de torção se, e somente se, M é livre.

O Teorema de Estrutura para módulos sobre um domínio de ideais principais (DIP) apresenta uma interessante aplicação no estudo dos grupos abelianos, uma vez que que todo grupo abeliano pode ser considerado um $\mathbb{Z}$-módulo de forma natural, e $\mathbb{Z}$ é um DIP. Mais especificamente, todo grupo abeliano finitamente gerado é isomorfo a uma soma direita de subgrupos cíclicos e um grupo abeliano livre.

Estrutura de grupos abelianos finitamente gerados. Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Então, G pode ser escrito de forma única como

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ cópias}} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_\ell} \ ,$$

para inteiros $r \geq 0$ e $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{Z}$ tais que $n_j \geq 2$, para todo j, e $n_i | n_{i+1}$, para $1 \leq i \leq \ell - 1$. Os inteiros $n, n_1, \ldots, n_\ell$ são unicamente determinados pelas condições dadas.

O inteiro r no Teorema 7.1 é o **posto** da parte livre de G, e os números $n_1, \ldots, n_\ell$ chamam-se **coeficientes de torção** de G.

Através do Teorema de Estrutura de Módulos finitamente gerados sobre um DIP podemos recuperar uma série de resultados sobre a estrutura de operadores lineares. Seja T um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita V

sobre o corpo $\mathbb{K}$. O espaço vetorial V pode ser visto como um módulo gerado finitamente sobre o anel $\mathbb{K}[T]$ dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ avaliados em T. Então o Teorema de Estrutura de Módulos finitamente gerados sobre um DIP permite obter, por exemplo, a forma canônica racional e a forma canônica de Jordan (quando o corpo é algebricamente fechado). Para maiores detalhes consulte (Roman; Axler; Gehring, 2005).

Produto Tensorial de R-módulos

Uma outra operação entre módulos que tem papel fundamental é o produto tensorial. Para definir tal operação, precisamos da seguinte definição.

Sejam A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Seja H um grupo abeliano com operação $+$. Dizemos que uma aplicação $f : A \times B \to H$ é **R-biaditiva** se

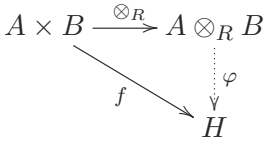
- $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;
- $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$';
- $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Dados A um R-módulos à direita e B um R-módulos à esquerda, queremos construir um $\mathbb{Z}$-módulo, denotado por $A \otimes_R B$ com a propriedade de que, grosso modo, cada aplicação R-biaditiva $f : A \times B \to H$ está em uma correspondência biunívoca natural com um $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\varphi : A \otimes_R B \to H$. Desse modo, transformamos uma aplicação mais complicada (biaditiva) numa mais simples (homomorfismo) pagando o preço de complicar o domínio no qual a função está definido.

Essa construção, que veremos a seguir, fornece uma nova forma de construir módulos a partir de módulos pré-existentes.

Sejam A e B R-módulos à direita e à esquerda, respectivamente. Um **produto tensorial** de A e B sobre R, denotado por $A \otimes_R B$, é um $\mathbb{Z}$-módulo juntamente com uma aplicação R-biaditiva $\otimes : A \times B \to A \otimes_R B$ que satisfazem a seguinte propriedade universal: para todo $\mathbb{Z}$-módulo H e para toda aplicação R-biaditiva $f : A \times B \to H$, existe um único homomorfismo $\varphi : A \otimes_R B \to H$ tal que

$\varphi \circ \otimes = f$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:



Dado um elemento $(a, b) \in A \times B$, escrevemos $\otimes_R(a, b)$ por $a \otimes_R b$, e lemos como "produto tensorial de a e b". Quando claro pelo contexto, omitiremos o subscrito R no símbolo do tensor.

Pode-se mostrar que o produto tensorial sempre existe e é único, a menos de isomorfismos de grupos abelianos. Além disso, todo elemento de $A \otimes_R B$ pode ser escrito, de forma não única, como

$$\sum_i a_i \otimes b_i \ , \quad a_i \in A, \ b_i \in B \ .$$

Em outras palavras, a imagem de $\otimes_R$ gera $A \otimes_R B$.

Sejam $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ homomorfismos de R-módulos. Então existe um único homomorfismo $\theta : A \otimes_R B \to A' \otimes_R B'$ tal que $\theta(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, para todo $a \in A$ e $b \in B$. Nesse caso, denotamos θ por $f \otimes g$.

Sejam A, B e C R-módulos. Então, existem isomorfismos tais que

a. $A \otimes B \cong B \otimes A$ (comutatividade);

b. $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$ (associatividade);

c. $R \otimes A \cong A$;

d. $(A \oplus B) \otimes C \cong A \otimes C \oplus B \otimes C$ (o produto tensorial distribui sobre a soma direta).

7.2. Sequências Exatas

Ao longo desse capítulo, R denotará um anel associativo com unidade em que $1 \neq 0$. Se $1 = 0$, então R deve ser o anel zero contendo um único elemento. Além disso, frequentemente empregaremos os seguintes abusos de linguagem: abreviaremos "R-módulo à esquerda" para apenas "módulo" e "R-homomorfismo" (resp., aplicação R-linear) para apenas "homomorfismo" (resp., aplicação).

A noção de sequência exata é uma linguagem que permite expressar certas relações entre homomorfismos por meio de diagramas.

Dada uma sequência de R-módulos à esquerda e homomorfismos de R-módulos

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \,, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{7.1}$$

diz-se que a sequência é **exata** em M_i se $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i+1}$. Uma sequência é dita uma **sequência exata** se for exata em M_n, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma sequência exata de R-módulos do tipo

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{7.2}$$

é chamada de **sequência exata curta**. Equivalentemente, a sequência curta em (7.2) é exata se, e somente se,

a. $\operatorname{im} f = \ker g$;

b. f é injetora;

c. g é sobrejetora.

Uma sequência exata geral, como em (7.1), às vezes é chamada de **sequência exata longa**, para distinguir do caso especial de uma sequência exata curta.

a. Sejam B um R-módulo e A um R-submódulo de B, então a sequência

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B/A \to 0 \,,$$

em que i é a inclusão e p é a projeção, é uma sequência exata curta.

b. Considere a sequência de grupos abelianos

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

em que $2\times$ denota o homomorfismo que leva cada inteiro a no inteiro $2a \in \mathbb{Z}$ e o homomorfismo p leva cada inteiro a na sua classe de equivalência b mod 2, i.e., $b \equiv a (mod\, 2)$. Essa é uma sequência exata, pois $2\times$ é injetor, p é sobrejetor e a imagem de $2\times$ coincide com núcleo de p.

c. **Interseção e soma de módulos.** Sejam I e J dois ideais do anel R. Considere os homomorfismos $f : I \cap J \to I \oplus J$, definido por $x \mapsto (x, x)$, e $g : I \oplus J \to I + J$, definido por $(x, y) \mapsto x - y$. Então

$$0 \to I \cap J \xrightarrow{f} I \oplus J \xrightarrow{g} I + J \to 0,$$

é uma sequência exata curta de R-módulos. De fato, temos que $\ker f = \{x \in I \cap J : f(x) = (x, x) = (0, 0)\} = \{0\}$, $\operatorname{im} f = \{(x, x) \in I \oplus J, x \in I \cap J\} = \ker g$ e $\operatorname{im} g = \{x - y \in I + J : x \in I, y \in J\} = I + J$.

Dada uma sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, temos que:

- f é injetor, assim $A \cong A/\ker f \cong \operatorname{im} f$;
- g é sobrejetor, daí $C = \operatorname{im} g \cong B/\ker g$;
- $C \cong \dfrac{B}{\operatorname{im} f}$.

Em outras palavras, a menos de isomorfismo, a sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, é a sequência

$$0 \to f(A) \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} \frac{B}{f(A)} \to 0,$$

em que i e p são as respectivas aplicações de inclusão e projeção.

Se diz que uma sequência exata curta

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

cinde (ou ainda que é uma **sequência exata cindida**) se existe um homomorfismo de R-módulos $u : C \to B$ tal que $g \circ u$ é o homomorfismo identidade em C, i.e. $g \circ u = \mathrm{id}_C$.

Seja $0 \to A \to B \to C \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Se C é livre, então a sequência cinde.

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma base para C. Defina um homomorfismo de R-módulos $u : C \to B$ por $u(e_\lambda) = b_\lambda$, onde $b_\lambda \in B$ é um elemento qualquer tal que $g(b_\lambda) = e_\lambda$. (Tal elemento existe, pois g é sobrejetor.) Então, $g \circ u(e_\lambda) = e_\lambda$, ou seja, $g \circ u = \mathrm{id}_C$, portanto, a sequência exata é cindida. ∎

Lema 7.1 — Cisão

Dada uma sequência exata curta

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0,$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

a. Existe um homomorfismo de R-módulos $t : B \to A$ tal que $t \circ f = \mathrm{id}_A$.

b. Existe um homomorfismo de R-módulos $u : C \to B$ tal que $g \circ u = \mathrm{id}_C$.

c. Existe um isomorfismo $h : B \to A \oplus C$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_A} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus C & \xrightarrow{p_C} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demonstração. Denote por i_C a inclusão de C em $A \oplus C$ e por p_A é a projeção de $A \oplus C$ em A.

c ⇒ a Basta definir $t = p_A \circ h$. Assim, $t \circ f = (p_A \circ h) \circ f = p_A \circ (h \circ f) = p_A \circ i_A = \mathrm{id}_A$.

c ⇒ b Basta definir $u = h^{-1} \circ i_C$. Assim $g \circ u = g \circ (h^{-1} \circ i_C) = (g \circ h^{-1}) \circ i_C = p_C \circ i_C = \mathrm{id}_C$.

a ⇒ c Primeiramente vamos provar que

$$B = \ker t \oplus \operatorname{im} f.$$

Vejamos que $B \subseteq \ker t + \operatorname{im} f$. Dado $b \in B$, podemos escrever $b = (b - f(t(b))) +$

$f(t(b))$, com $f(t(b)) \in \operatorname{im} f$ e $b - f(t(b)) \in \ker t$, pois

$$t(b - f(t(b))) = t(b) - t(f(t(b))) = t(b) - \mathrm{id}_A(t(b)) = t(b) - t(b) = 0.$$

Logo $B = \ker t + \operatorname{im} f$, dado que $\ker t + \operatorname{im} f \subseteq B$, por definição de t e f. Agora, basta provar que $\ker t \cap \operatorname{im} f = \{0\}$. Dado $d \in \ker t \cap \operatorname{im} f$, temos que $t(d) = 0$ e $d = f(a)$, para algum $a \in A$. Mas $t(f(a)) = t(d) = 0$ e $t(f(a)) = \mathrm{id}_A(a) = a$. Logo $a = 0$ e $d = 0$. Portanto, $B = \ker t \oplus \operatorname{im} f$.

Para concluir a prova, basta mostramos que $\ker t \cong C$ e $\operatorname{im} f \cong A$. Claramente, $\operatorname{im} f$ é isomorfo a A, pois pela exatidão de $0 \to A \xrightarrow{f} B$, f é injetora ($\ker f = 0$), e daí temos $A \cong A/\ker f \cong \operatorname{im} f$, pelo Teorema do Isomorfismo. Provemos que $\ker t \cong C$. Como, $B = \ker t \oplus \operatorname{im} f$, dado $b \in B$, $b = f(a) + k$, para algum $a \in A$ e $k \in \ker t$. Sendo g é sobrejetor, para todo $c \in C$, existe $b = f(a) + k$ tal que $g(f(a) + k) = c$, daí $c = g(f(a)) + g(k) = g(k)$, pois $\ker g = \operatorname{im} f$. Assim, para todo $c \in C$, existe $k \in \ker t$, tal que $g(k) = c$. Logo, $g(\ker t) = C$. Se $g(k) = 0$ então $k \in \operatorname{im} f$ (por exatidão), e assim $k \in \ker t \cap \operatorname{im} f \Rightarrow k = 0$. Logo, a restrição $g|_{\ker t} : \ker t \to C$ é um isomorfismo. Finalmente, concluímos que $B = \ker t \oplus \operatorname{im} f \cong A \oplus C$.

b $\Rightarrow$ **c** O argumento é similar a implicação anterior. Vamos provar primeiramente que $B = \ker g \oplus \operatorname{im} u$. Claramente, $\ker g + \operatorname{im} u \subseteq B$, vejamos que $B \subseteq \ker g + \operatorname{im} u$. Com efeito, dado $b \in B$, podemos escrever $b = (b - u(g(b))) + u(g(b))$, com $u(g(b)) \in \operatorname{im} u$ e $b - u(g(b)) \in \ker g$, pois

$$g(b - u(g(b))) = g(b) - gug(b) = g(b) - \mathrm{id}_C(g(b)) = g(b) - g(b) = 0.$$

Logo, $B = \ker g + \operatorname{im} u$. Agora, basta provar que $\ker g \cap \operatorname{im} u = \{0\}$. Dado $d \in \ker g \cap \operatorname{im} u$, temos que $g(d) = 0$ e $d = u(c)$, para algum $c \in C$. Mas $g(u(c)) = g(d) = 0$ e $g(u(c)) = \mathrm{id}_C(c) = c$. Segue que $c = 0$ e $d = 0$. Portanto, $B = \ker g \oplus \operatorname{im} u$. Por exatidão da sequência, temos $\operatorname{im} f = \ker g$ e como f é injetor, $\operatorname{im} f \cong A$. Logo, $A \cong \ker g$. Como $\mathrm{id}_C = g \circ u$ é uma bijeção, u é necessariamente injetor, logo $\operatorname{im} u \cong C$. Portanto, $B = \ker g \oplus \operatorname{im} u \cong A \oplus C$. ■

O Lema 7.1 fornece uma caracterização para as sequências exatas curtas que cindem como sendo as que cumprem qualquer uma das três, e portanto as três, condições dadas no lema.

É comum indicar uma sequência exata cindida e as aplicações t e u por meio do diagrama

$$0 \longrightarrow A \underset{t}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{u}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0\,.$$

Dizemos que u (resp., t) é um **homomorfismo de cisão** para g (resp., f).

Exemplo 7.2 — Sequência exata que não cinde.

Fixado $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$, considere a sequência de grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos)

$$0 \longrightarrow m\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

em que i é a inclusão e π é a projeção tal que $\pi(n) = n \bmod m$. Claramente i é injetora e π é sobrejetora. Além disso, $\operatorname{im} i = \ker \pi$. Logo, a sequência é de fato exata. No entanto, qualquer homomorfismo sobrejetor $p : \mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ deveria mandar 1 em m, e portanto $p \circ i \neq \mathrm{id}_{m\mathbb{Z}}$.

◁

7.3. Funtores $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ e $A \otimes \bullet$

Seja R um anel associativo com unidade. Denote por ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ a **categoria de R-módulos à esquerda**, cujos objetos são R-módulos à esquerda, os morfismos são os homomorfismo de R-módulos e a composição é dada pela composição de homomorfismos.

Nessa seção, vamos definir funtores $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ e $A \otimes \bullet$ da categoria de R-módulos à esquerda ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ para a categoria de grupos abelianos $\mathbf{Ab}$.

Dado um anel associativo com unidade R e um R-módulo à esquerda A, o funtor

$$F = \mathrm{Hom}_R(A, \bullet) : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

da categoria de R-módulos à esquerda para a categoria de grupos abelianos é definido da seguinte forma:

1. a cada R-módulo à esquerda $B \in \mathrm{ob}({}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod})$, F associa o grupo abeliano $FB = \mathrm{Hom}_R(A, B)$ de todos os homomorfismos de R-módulos de A para B;

2. a cada homomorfismo de R-módulo $h : B \to C$, F associa um homomorfismo $Fh : \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, C)$ dado por $g \mapsto h \circ g$, i.e. $Fh \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(F(B), F(C))$.

Dado um anel associativo com unidade R e um R-módulo à esquerda A, o funtor contravariante

$$F = \mathrm{Hom}_R(\bullet, A) : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

da categoria de R-módulos à esquerda para a categoria de grupos abelianos é definido da seguinte forma:

1. a cada R-módulo à esquerda $B \in \mathrm{ob}({}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod})$, F associa o grupo abeliano $FB = \mathrm{Hom}_R(B, A)$ de todos os homomorfismos de R-módulos de B para A;

2. a cada homomorfismo de R-módulo $h : B \to C$, F associa um homomorfismo $Fh : \mathrm{Hom}_R(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B, A)$ dado por $g \mapsto g \circ h$, i.e. $Fh \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(F(C), F(B))$.

Sejam R um anel associativo com unidade e A um R-módulo. Seja $g : B \to C$ é um homomorfismo de R-módulos, valem

a. se g é um isomorfismo, então também $\mathrm{Hom}_R(g, A)$ (resp., $\mathrm{Hom}_R(A, g)$) é um isomorfismo;

b. se g é nulo, então também $\mathrm{Hom}_R(g, A)$ (resp., $\mathrm{Hom}_R(A, g)$) é nulo;

Demonstração. A prova é imediata e é deixada como exercício para o leitor. ∎

Note que $\mathrm{Hom}(\bullet, A)$, $\mathrm{Hom}(A, \bullet)$ são funtores aditivos.

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor aditivo $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito um

a. **funtor exato** se, para qualquer sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $0 \to FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \to 0$ é exata em $\mathscr{D}$;

b. **funtor exato à esquerda** se, para qualquer sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $0 \to FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$ é exata em $\mathscr{D}$;

c. **funtor exato à direita** se, para qualquer sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \to 0$ é exata em $\mathscr{D}$.

Claramente, um funtor exato à esquerda que preserva epimorfismo é exato; e um funtor exato à direita que preserva monomorfismo é exato.

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor contravariante aditivo $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é dito

a. **exato** se, para qualquer sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $0 \to FC \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Ff} FA \to 0$ é exata em $\mathscr{D}$;

b. **exato à esquerda** se, para qualquer sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $0 \to FC \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Ff} FA$ é exata em $\mathscr{D}$;

c. **exato à direita** se, para qualquer sequência exata curta $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ em $\mathscr{C}$, a sequência $FC \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Ff} FA \to 0$ é exata em $\mathscr{D}$.

Em outros termos, um funtor contravariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ é exato à esquerda (resp. exato à direito, resp. exato) se o funtor covariante correspondente $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ é exato à esquerda (resp. exato à direito, resp. exato).

Sejam R um anel associativo com unidade e M um R-módulo à esquerda. Então, os funtores $F = \mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ e $G = \mathrm{Hom}_R(\bullet, M)$ são exatos à esquerda.

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ é um funtor exato à esquerda. Para isso, dada uma sequência exata curta

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{7.3}$$

em ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, precisamos mostrar que a sequência

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{Ff} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{Fg} \mathrm{Hom}_R(M, C) \to 0 \tag{7.4}$$

é exata em $\mathrm{Hom}_R(M, A)$ e $\mathrm{Hom}_R(M, B)$. Faremos isso em três etapas:

(a) $\underline{Ff \text{ é injetor:}}$ Suponha que $(Ff)(\alpha) = f\alpha = 0$. Como f é injetor (pela exatidão de (7.3)), então $\alpha = 0$, segue que Ff é injetor.

(b) $\underline{\mathrm{im}\, Ff \subseteq \ker Fg\text{:}}$ Se $\beta \in \mathrm{im}\, Ff$, então $\beta = f\alpha$, para algum $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$. Pela exatidão de (7.3), $\mathrm{im}\, f \subseteq \ker g$, assim $(Fg)(\beta) = g\beta = gf\alpha = 0\alpha = 0$. Portanto $\beta \in \ker Fg$.

(c) $\underline{\ker Fg \subseteq \mathrm{im}\, Ff\text{:}}$ Se $\beta \in \mathrm{Hom}_R(M, B)$ e $\beta \in \ker Fg$, então $g\beta = 0$. Como $\beta(y) \in \ker g = \mathrm{im}\, f$, para cada $y \in M$, $\beta(y) = f(x)$ para algum $x \in A$. Defina

um homomorfismo $\alpha : M \to A$ por $\alpha(y) = x \in A$. Note que x é único, dado que f é injetor, logo $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$. Portanto, $\beta = f\alpha \in \mathrm{im}\, Ff$.

Segue que o funtor $\mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ é exato à esquerda.

Deixamos a cargo do leitor a prova de que o funtor contravariante $G = \mathrm{Hom}_R(\bullet, M)$ é exato à esquerda. ∎

Sejam R um anel associativo com unidade e M um R-módulo à esquerda. Se M é livre, então $F = \mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ e $G = \mathrm{Hom}_R(\bullet, M)$ são funtores exatos.

Demonstração. Pela Proposição 7.3, $F = \mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ é exato à esquerda. Logo, precisamos mostrar que a sequência em (7.4) é exata em $\mathrm{Hom}_R(M, C)$. Basta mostrar que F preserva epimorfismos. Fixado $g : B \to C$ um epimorfismo, vamos prova que $Fg : \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C)$ é sobrejetor. Dado $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$, vamos definir um homomorfismo $\beta \in \mathrm{Hom}_R(M, B)$ tal que $Fg(\beta) = g \circ \beta = \gamma$. Para isso, fixe $\mathcal{B}$ uma base de M, para cada $b \in \mathcal{B}$, tome $\beta(b) \in g^{-1}(\gamma(b))$. Pela Observação 7.1 e pela sobrejetividade de g, β está bem definido.

Deixamos a cargo do leitor a prova de que $\mathrm{Hom}_R(\bullet, M)$ é exato quando M é livre. ∎

Sejam R um anel associativo com unidade, M um R-módulo à esquerda e os funtores $F = \mathrm{Hom}_R(M, \bullet)$ e $G = \mathrm{Hom}_R(\bullet, M)$. Suponha que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta cindida de R-módulos. Então, temos as sequências exatas cindidas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{Ff} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{Fg} \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow 0;$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{Gg} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{Gf} \mathrm{Hom}_R(A, M) \longrightarrow 0.$$

A prova será deixada como exercício para o leitor. (Veja Exercício 77.)

O produto tensorial entre R-módulos dá origem a um funtor da categoria de R-módulos para a categoria de grupos abelianos.

Dado um anel associativo com unidade R e um R-módulo à direita A, o funtor

$$F = A \otimes_R \bullet : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

da categoria de R-módulos à esquerda para a categoria de grupos abelianos é definido da seguinte forma:

1. a cada R-módulos à esquerda $B \in \mathrm{ob}(_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod})$, F associa o grupo abeliano $FA = A \otimes_R B$;

2. a cada homomorfismo de R-módulo $h : B \to C$, F associa o homomorfismo $Fh : A \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R C$ dado por $F(h) = id_A \otimes h$.

Analogamente, podemos definir o funtor $G = \bullet \otimes_R A : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ da categoria de R-módulos à direita para a categoria de grupos abelianos.

Sejam R um anel associativo com unidade, M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Então, os funtores $F = M \otimes_R \bullet$ e $G = \bullet \otimes_R N$ são exatos à direta.

Demonstração. Vamos provar que $M \otimes_R \bullet$ é exato à direita. Dada uma sequência exata $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$, precisamos mostrar que

$$M \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} M \otimes B \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\beta} M \otimes C \to 0$$

é exato.

(a) $\underline{\mathrm{im}\ \mathrm{id}\otimes\alpha \subseteq \ker \mathrm{id}\otimes\beta}$: De fato, $(\mathrm{id}\otimes\beta)(\mathrm{id}\otimes\alpha) = \mathrm{id}\otimes\beta\alpha = \mathrm{id}\otimes 0 = 0$.

(b) $\underline{\ker \mathrm{id}\otimes\beta \subset \mathrm{im}\ \mathrm{id}\otimes\alpha}$: Se $E = \mathrm{im}\,(\mathrm{id}\otimes\alpha)$, então $\mathrm{id}\otimes\beta$ induz a aplicação $\overline{\beta} : (M \otimes B)/E \to M \otimes C$ dada por $m \otimes b + E \mapsto m \otimes \beta b$ (pois $E \subset \ker \mathrm{id}\otimes\beta$, por (a)). É fácil ver que $\mathrm{id}\otimes\beta = \overline{\beta}\pi$, onde $\pi : M \otimes B \to (M \otimes B)/E$ é a projeção natural. Suponha que mostramos que $\overline{\beta}$ é um isomorfismo. Então

$$\ker \mathrm{id}\otimes\beta = \ker \overline{\beta}\pi = \ker \pi = E = \mathrm{im}\ \mathrm{id}\otimes\alpha$$

e a prova termina. Podemos construir a aplicação $M\otimes C \to (M\otimes B)/E$ inversa de $\overline{\beta}$. A aplicação $f : M \times C \to (M \otimes B)/E$ dada por

$$f(m, c) = m \otimes b + E, \qquad \text{onde} \qquad \beta b = c$$

está bem definida: tal elemento b existe pois β é sobrejetor; se $\beta b' = c = \beta b$, então $\beta\,(b' - b) = 0$ e existe um elemento $a \in A$ com $\alpha a = b' - b$; segue que

$$m \otimes b' - m \otimes b = m \otimes \big(b' - b\big) = (\mathrm{id}\otimes\alpha)(m \otimes a) \in \mathrm{im}\ \mathrm{id}\otimes\alpha = E.$$

Como f é biaditivo, a propriedade universal do produto tensorial fornece um mapa $\overline{f} : M \otimes C \to (M \otimes B)/E$ com $\overline{f}(m \otimes c) = m \otimes b + E$. Claramente, $\overline{f}$ e $\overline{\beta}$ são funções inversas.

(c) $\mathrm{id} \otimes \beta$ é sobrejetor: Seja $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$. Como β é sobrejetor, então existem $b_i \in B$ com $\beta b_i = c_i$, para todo i. Daí $\mathrm{id} \otimes \beta \left(\sum m_i \otimes b_i\right) = \sum m_i \otimes c_i$.

De forma análoga, prova-se que o funtor $\bullet \otimes_R N$ é exato à direita. ∎

O funtor $A \otimes_R \bullet$ pode não ser exato à esquerda. Por exemplo, considere a sequência

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

em que $2\times$ denota o homomorfismo que leva cada inteiro a no inteiro $2a \in \mathbb{Z}$ e p é o homomorfismo leva cada inteiro a na sua classe de equivalência $\mod 2$. Aplicando o funtor $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} -$, temos a sequência

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2} \otimes 2\times} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2} \otimes p} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Essa sequência não é exata à esquerda, pois $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2} \otimes 2\times$ não é injetor, de fato, cada elemento $\overline{a} \otimes b \in \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ é enviado a $\overline{a} \otimes 2b = 2\overline{a} \otimes b = \overline{0} \otimes b = 0$.

Seja M um R-módulo à direita e

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta cindida de R-módulos. Então, a sequência induzida

$$0 \longrightarrow M \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \alpha} M \otimes B \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \beta} M \otimes C \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta cindida de R-módulos.

Demonstração. Em virtude da Proposição 7.3 e usando o fato de que a sequência dada cinde, basta mostrar que $\mathrm{id} \otimes \alpha$ é injetora. Para isso, seja h um homomorfismo de cisão para α e defina a aplicação $\psi : M \times B \to M \otimes A$ por $\psi(m, a) = m \otimes h(a)$. É fácil ver que ψ é uma aplicação R-biaditiva, logo existe um homomorfismo $\phi : M \otimes B \to M \otimes A$ tal que $\phi(m \otimes a) = m \otimes h(a)$, para todo $m \in M$ e todo $a \in A$. Agora, dado qualquer $m \in M$ e qualquer $a' \in A$, temos

$$(\phi \circ \mathrm{id} \otimes \alpha)\left(m \otimes a'\right) = \phi\left(m \otimes \alpha\left(a'\right)\right) = m \otimes h\left[\alpha\left(a'\right)\right] = m \otimes a'.$$

Assim, como $M \otimes A$ é gerado pelos elementos da forma $m \otimes a'$, deduzimos que $\phi \circ \mathrm{id} \otimes \alpha$ é a aplicação identidade em $M \otimes A$, e $\mathrm{id} \otimes \alpha$ é injetora. ∎

7.4. Complexos de Cadeias e sua Homologia

Um **complexo de cadeias** (A, d) é uma sequência de R-módulos e homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots, \tag{7.5}$$

tais que $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (ou equivalentemente, $\operatorname{im} d_{n+1} \subseteq \ker d_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$).

A propriedade $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, também pode ser reescrita, suprimindo os subíndices, da seguinte maneira: $d \circ d = d^2 = 0$.

Por outro lado, às vezes queremos explicitar as sequências de módulos e homomorfimos que compõem o complexo de cadeias, daí usaremos a notação $(A_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

a. Exemplos clássicos de complexos de cadeias são o complexo de cadeias singulares de um espaço topológico e o complexo de de Rham de uma variedade suave, abordados nos próximos capítulos.

b. Toda sequência exata de R-módulos é um complexo de cadeias, já que $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$.

c. Dados complexos de cadeias (A, d) e (B, d'), a sequência de R-módulos e homomorfismos $(A \oplus B, d \oplus d')$, cujos termos são dados por $\{A_n \oplus B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\{d_n \oplus d'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, forma um complexo de cadeias.

d. Seja (A_n, d_n) um complexo de cadeias e seja M um R-módulo. Aplicando o funtor $\operatorname{Hom}_R(M, \bullet)$, obtemos um complexo de cadeias $(\operatorname{Hom}_R(M, A_n), \operatorname{Hom}_R(M, d_n))$ de grupos abelianos.

Em outros termos, um complexo de cadeias (A, d) é um R-módulo $\mathbb{Z}$-graduado

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$$

munido de um homomorfismo de R-módulos $d : A \to A$ que satisfaz $d(A_n) \subseteq A_{n-1}$ e $d \circ d = 0$. Denotando a restrição de d a A_n por d_n, obtemos a sequência em (7.5).

Seja (A, d) um complexo de cadeias de R-módulos.

1. O homomorfismo d é chamado de **operador bordo** ou **diferencial** do complexo. O homomorfismo d_n é chamado de n**-ésimo operador bordo** ou **diferencial de dimensão** n.

2. Os elementos de A_n são chamados de n**-cadeias**.

3. O kernel $Z_n(A)$ do operador bordo $d_n : A_n \to A_{n-1}$, i.e., $Z_n(A) \coloneqq \ker d_n$, é dito **módulo dos** n**-ciclos**. Um elemento de $Z_n(A)$ é chamado de n**-ciclo** ou ciclo n-dimensional.

4. A imagem $B_n(A)$ do operador bordo $d_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$, i.e., $B_n(A) \coloneqq \operatorname{im} d_{n+1}$, é dito **módulo dos** n**-bordos**. Um elemento de $B_n(A)$ é chamado de n**-bordo** ou bordo n-dimensional.

Dado um complexo de cadeias (A, d), como a diferencial d satisfaz $d^2 = 0$, temos que todo n-bordo é um n-ciclo, daí,

$$0 \subseteq B_n(A) \subseteq Z_n(A) \subseteq A_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, o módulo quociente $Z_n(A)/B_n(A)$ está bem definido. Esse fato possibilita a definição dos módulos de homologia associados a um complexo de cadeias.

Seja (A, d) um complexo de cadeias de R-módulos. O **módulo de homologia** $H_n(A)$ de dimensão n do complexo (A, d), com coeficientes em R, é definido por

$$H_n(A) \coloneqq \frac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}} = \frac{Z_n(A)}{B_n(A)} ,$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H_* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(A)$$

é chamada de **homologia** de (A, d).

Os elementos de $H_n(A)$ são as *classes de homologia*

$$[z] = z + B_n(A) = \{z + d_{n+1}(x) \mid x \in A_{n+1}\}$$

dos ciclos $z \in Z_n(A)$. Se z e z' são n-ciclos, temos que $[z] = [z']$ se, e somente se, $z' - z = d_{n+1}(x)$, para algum $x \in A_{n+1}$. Nesse caso, dizemos que z e z' são **ciclos homólogos**.

a. A sequência
$$\cdots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \to 0 \cdots$$
forma um complexo de cadeias com exatamente dois módulos de homologia não nulos, ambos isomorfos a $\mathbb{Z}$.

Mais geralmente, se todas as diferenciais d_n em um complexo de cadeias (A, d) são nulas, então $H_n(A) \cong A_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

b. O complexo de cadeias
$$\cdots 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to 0 \to 0 \cdots$$
é exato. Todos os módulos de homologia são triviais.

c. Considere o complexo de cadeias
$$\cdots 0 \to A_1 = \mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} A_0 = \mathbb{Z} \to 0 \to 0 \cdots,$$
em que $2\times$ denota a multiplicação por 2. Os módulos de homologia de (A, d) são $H_0(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $H_n(A) = 0$, para $n \neq 0$.

d. Considere o complexo de cadeias
$$\cdots 0 \longrightarrow A_1 = \mathbb{Z} \longrightarrow A_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \cdots.$$
Os módulos de homologia de (A, d) são $H_1(A) = 2\mathbb{Z}$ e $H_n(A) = 0$, para $n \neq 1$.

e. Dada uma sequência exata (A, d) de R-módulos, em particular (A, d) é um complexo de cadeias, os grupos de homologia de (A, d) são triviais, pois pela exatidão da sequência $\ker d_n = \operatorname{im} d_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Como os grupos de homologia de uma sequência exata são triviais, podemos grosseiramente ver os grupos de homologia de um complexo de cadeias (A, d) como uma "medida" do quanto um complexo de cadeias não é exato.

Um complexo de cadeias (A, d) é chamado de **acíclico** se os módulos de homologia são triviais, i.e. $H_n(A) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Assim, temos que (A, d) é um complexo de cadeias é acíclico se, e somente se, é uma sequência exata.

Um complexo de cadeias (A, d) é chamado de

- **limitado superiormente** se existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $A_k = 0$ para todo $k > k_0$;
- **limitado inferiormente** se existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $A_k = 0$ para todo $k < k_0$;
- **limitado** se é simultaneamente limitado superiormente e limitado inferiormente.

Frequentemente, consideramos também complexos de cadeias graduados em $\mathbb{N}$ (ou graduados não negativamente) que podem ser identificados com os complexos $\mathbb{Z}$-graduados para os quais $A_n = 0$ quando $n < 0$.

Subcomplexos e Complexo Quociente Dado um complexo de cadeias (A, d), dizemos que (A', d') é um **subcomplexo de cadeias** de (A, d) se, para todo $n \in \mathbb{Z}$, A'_n é um submódulo de A_n e $d'_n = d_n|_{A'_n}$.

Dado um subcomplexo (A', d') de um complexo de cadeias (A, d), podemos definir o **complexo quociente** $(A/A', \overline{d})$ como sendo

$$\cdots \to A_{n+1}/A'_{n+1} \xrightarrow{\overline{d}_{n+1}} A_n/A'_n \xrightarrow{\overline{d}_n} A_{n-1}/A'_{n-1} \to \cdots$$

em que $\overline{d}_n$ é dado por

$$\overline{d}_n(a_n + A'_n) \coloneqq d_n(a_n) + A'_{n-1}.$$

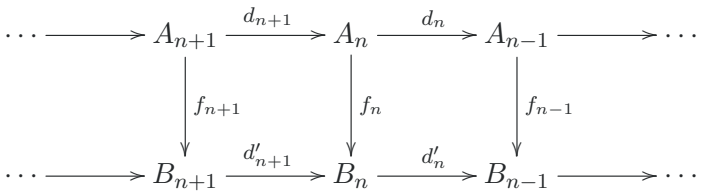
É fácil ver que a definição de $\overline{d}_n$ não depende da escolha de a_n e $\overline{d}_n \circ \overline{d}_{n+1} = 0$. Logo, a sequência $(A/A', \overline{d})$ é um complexo de cadeias, chamado de **quociente** de (A, d) por (A', d').

Dado um subcomplexo de cadeias (A', d') de um complexo (A, d), o **complexo quociente** de (A, d) por (A', d') é definido como sendo o complexo de cadeias $(A/A', \overline{d})$.

7.5. Aplicações de Cadeias

Dados (A, d) e (B, d') complexos de cadeias, uma **aplicação de cadeias** $f : A \to B$ é uma sequência de homomorfismos $f_n : A_n \to B_n$, com $n \in \mathbb{Z}$, de forma

que o seguinte diagrama é comutativo:



ou seja, $f_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ f_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Em outras palavras, uma aplicação de cadeias é um morfismo graduado $f : A \to B$ de grau zero tal que $f \circ d = d \circ f$.

Exemplo 7.3.

Considere um complexo de cadeias (A, d) e um subcomplexo (A', d'). A aplicação de inclusão $i : A' \hookrightarrow A$ e a aplicação de projeção $p : A \to A/A'$ são exemplos de aplicações de cadeias.

◁

Sejam (A, d) e (B, d') complexos de cadeias. Se $f : A \to B$ é uma aplicação de cadeias, então f induz um homomorfismo graduado $f_* = \{f_{*,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de grau zero entre os módulos de homologia de (A, d) e (B, d'):

$$f_{*,n} : H_n(A) \longrightarrow H_n(B)$$

definido por $f_{*,n}([x]_A) := [f_n(x)]_B$ e chamado de **homomorfismo induzido** por f. Portanto, temos um homomorfismo entre as homologias $f_* : H_*(A) \longrightarrow H_*(B)$.

Demonstração. Dado $x \in Z_n(A)$, temos que

$$d'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0) = 0,$$

logo $f_n(x) \in Z_n(B)$. Portanto, $f_n : A_n \to B_n$ transforma n-ciclo de (A, d) em n-ciclo de (B, d'). Por outro lado, se $x \in B_n(A)$, digamos $x = d_{n+1}(y)$ com $y \in A_{n+1}$, então

$$f_n(x) = f_n(d_{n+1}(y)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(y)),$$

logo, $f_n(x) \in B_n(B)$. Portanto, $f_n : A_n \to B_n$ transforma n-bordo de (A, d) em n-bordo de (B, d'). Provamos que $f_n(Z_n(A)) \subseteq Z_n(B)$ e $f_n(B_n(A)) \subseteq B_n(B)$.

Para concluir que f_* está bem definido, vamos mostrar que não depende da escolha do representante da classe de homologia. Dados $[x_1], [x_2] \in H_n(A)$, se $[x_1] = [x_2]$, então $x_2 = x_1 + d_{n+1}(y)$, para algum $y \in A_{n+1}$. Daí,

$$f_n(x_2) = f_n(x_1 + d_{n+1}(y)) = f_n(x_1) + d'_{n+1}\left(f_{n+1}(y)\right),$$

de modo que $[f_n(x_2)] = [f_n(x_1)]$.

Mostramos que $f_{*,n}([x]_A) \coloneqq [f_n(x)]_B$ está bem definido. Segue direto da definição de $f_{*,n}$ que este é de fato um homomorfismo. ∎

Frequentemente, escrevemos apenas $f_* : H_n(A) \to H_n(B)$.

Sejam (A, d_A), (B, d_C) e (C, d_c) complexos de cadeias de R-módulos.

a. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são aplicações de cadeias, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

b. Se $\mathrm{id} : A \to A$ é a identidade, então id_* é a identidade.

c. Se uma aplicação de cadeias $f : A \to B$ admite inversa $g : B \to A$, então f_* é invertível e $(f_*)^{-1} = g_*$.

Demonstração. As propriedades funtoriais de f_* seguem imediatamente da definição.

a. Dado $x \in Z_n(A)$, temos

$$(g\circ f)_{*,n}[x]_A = [(g_n \circ f_n)x]_C = [(g_n(f_n(x))]_C = g_{*,n}\left([f_n(x)]_B\right) = g_{*,n}\circ f_{*,n}[x]_A.$$

b. Dado $x \in Z_n(A)$, temos $\mathrm{id}_{*,n}\left([x]_A\right) = [\mathrm{id}_n(x)]_A = [x]_A$.

c. Segue diretamente dos itens anteriores. Deixamos a cargo do leitor.

∎

Retomando o Exemplo 7.3, vale ressaltar que embora a inclusão i seja injetora e a projeção p seja sobrejetora, tais propriedades não são necessariamente herdadas pelos homomorfismos induzidos $i_* : H_*(A') \to H_*(A)$ e $p_* : H_*(A) \to H_*(A/A')$, respectivamente.

Sejam (A, d) e (B, d') complexos de cadeias. Dada uma aplicação de cadeias $f : A \to B$, dizemos que

a. f é um **isomorfimo** entre (A, d) e (B, d') se f_n é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, e dizemos que (A, d) e (B, d') são **isomorfos**;

b. f é um **quase-isomorfimo** se os homomorfismos induzido $f_{*,n}$ são todos isomorfismos, e dizemos que (A, d) é **quase-isomorfo** a (B, d') .

Claramente, toda aplicação de cadeias que é um isomorfismo de complexos de cadeias é também um quase-isomorfismo.

O próximo exemplo mostra que "quase-isomorfismo" não é uma relação simétrica.

Exemplo 7.4.

Considere os complexos de cadeias (A, d) e (B, d') e a aplicação de cadeias $f : A \to B$ dados pelo diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\times} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \cdots \end{array}$$

em que $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ é a projeção natural. Ambos os complexos de cadeias têm módulo de homologia não trivial apenas na dimensão 0, $H_0(A) \cong \mathbb{Z}_2 \cong H_0(B)$. Além disso, f induz um isomorfismo em homologia, logo f é um quase-isomorfismo. Assim, (A, d) é quase-isomorfo a (B, d'). No entanto, não existe um quase-isomorfismo de (B, d') para (A, d), pois o único homomorfismo de grupos de $\mathbb{Z}_2$ para $\mathbb{Z}$ é o trivial, o qual não induz um isomorfismo em homologia.

◁

Funtorialidade A Homologia H_n é um funtor!

Dado um anel associativo com unidade R, a coleção de complexos de cadeias de R-módulos e aplicações de cadeias entre eles forma uma categoria, a **categoria de complexos de R-módulos**, denotada por ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Comp}$, que tem como objetos os complexos de cadeias e como morfismos as aplicações de cadeias.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, a homologia H_n pode ser vista como um funtor covariante da categoria de complexos de cadeias na categoria de R-módulos à esquerda,

$$H_n : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Comp} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod},$$

definido da seguinte forma:

- para cada $(A, d) \in \mathrm{ob}(_{\mathbf{R}}\mathbf{Comp})$, temos $H_n(A) = \dfrac{\ker d_n}{\mathrm{im}\, d_{n+1}}$;
- para cada aplicação de cadeias $f : A \to B$, temos $H_n(f) : H_n(A) \to H_n(B)$ dado por

$$z + B_n(A) \longmapsto f_n(z) + B_n(B) \tag{7.6}$$

ou seja, $H_n(f)$ é o n-ésimo homomorfismo induzido por f, $f_{*,n}$.

Pela Proposição 7.5, temos que $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ e $H_n(\mathrm{id})$ é a identidade. Segue que H_n é de fato um funtor.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H_n : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Comp} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ é um funtor aditivo.

Embora o funtor H_n não seja exato à esquerda nem exato à direita, na Seção 7.7 mostraremos que a partir de uma sequência exata curta de complexos de cadeias podemos obter uma sequência longa exata em homologia.

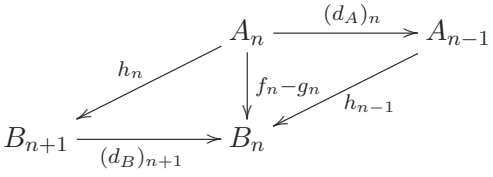
7.6. Homotopia de Cadeias

Uma homotopia de cadeias fornece uma maneira de relacionar duas aplicações de cadeias que induzem o mesmo mapa em homologia, mesmo que as aplicações possam ser diferentes. Ao longo deste livro, veremos diversas situações em que o conceito de homotopia de cadeias é útil.

Sejam (A, d_A) e (B, d_B) complexos de cadeias e $f, g : A \to B$ aplicações de cadeias. Uma **homotopia de cadeias** entre f e g é uma sequência de homomorfismos de R-módulos $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $h_n : A_n \to B_{n+1}$ tal que

$$(d_B)_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ (d_A)_n = f_n - g_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nesse caso, dizemos que f e g são **homotópicas** e denotamos por $f \simeq g$. Esquematicamente, temos o diagrama (não comutativo)



Suprimindo os subíndices, h é uma homotopia de cadeias entre f e g, se

$$d_B \circ h + h \circ d_A = f - g.$$

O próximo resultado mostra o valor da definição anterior. Sejam $f, g : A \to B$ aplicações de cadeias entre os complexos de cadeias (A, d_A) e (B, d_B). Se f e g são homotópicas, então os homomorfismos induzidos em homologia coincidem, i.e. $f_* = g_*$.

Demonstração. Dada uma classe de homologia $[a] \in H_n(A)$, com a um n-ciclo em $Z_n(A)$, i.e. $(d_A)_n(a) = 0$, temos

$$\begin{aligned}(f_{*,n} - g_{*,n})([a]) = [f_n(a) - g_n(a)] \;&=\; [(d_B)_{n+1} \circ h_n(a) + h_{n-1} \circ (d_A)_n(a)] \\ &= [(d_B)_{n+1} \circ h_n(a)] \;=\; 0,\end{aligned}$$

pois $(d_B)_{n+1} \circ h_n(a)$ é um bordo em $B_n(B)$. ∎

O leitor pode verificar que a homotopia entre aplicações de cadeias é uma relação de equivalência.

Sejam (A, d_A) e (B, d_B) complexos de cadeias. Uma aplicação de cadeias $f : A \to B$ é dita uma **equivalência homotópica** se existe uma aplicação de cadeias $g : B \to A$ tal que

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_B \qquad \text{e} \qquad g \circ f \simeq \mathrm{id}_A\,.$$

Nesse caso, g é chamada de **inversa homotópica** e dizemos que os complexos (A, d_A) e (B, d_B) são **homotopicamente equivalentes**, ou ainda, possuem o mesmo **tipo de homotopia**.

Sejam (A, d_A) e (B, d_B) complexos de cadeias. Se $f : A \to B$ é uma equivalência homotópica, então $f_{*,n} : H_n(A) \to H_n(B)$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $g : B \to A$ uma inversa homotópica para f. Pela Proposição 7.5,

$$f_{*,n} \circ g_{*,n} = (f \circ g)_{*,n} = \mathrm{id}\,.$$

Analogamente,

$$g_{*,n} \circ f_{*,n} = (g \circ f)_{*,n} = \mathrm{id}\,.$$

Portanto, $g_{*,n} = (f_{*,n})^{-1}$ e $f_{*,n}$ é um isomorfismo. ∎

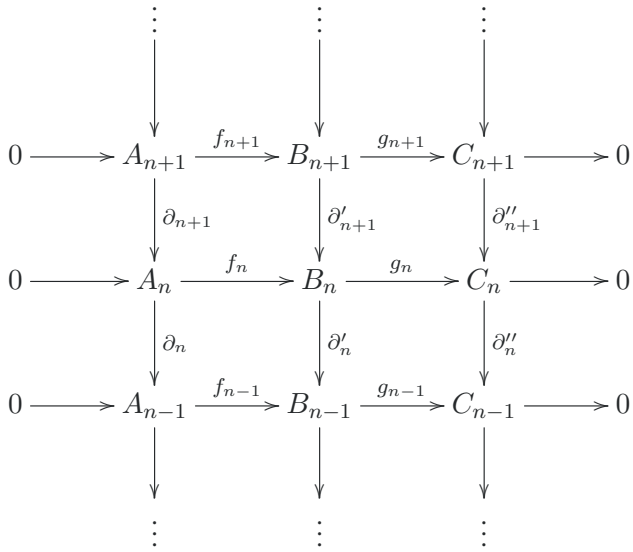
Se A e B são complexos homotopicamente equivalentes, então $H_*(A) \cong H_*(B)$.

7.7. Sequência Exata Longa em Homologia

Nessa seção, abordamos alguns dos teoremas fundamentais da Álgebra Homológica.

A característica que torna os complexos de cadeias tão especiais do ponto de vista computacional é a existência de sequências exatas longas em homologia.

Sejam A, B e C complexos de cadeias e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ aplicações de cadeias. Uma sequência de complexos de cadeias $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ é dita **exata** se os complexos respeitam o seguinte diagrama comutativo:



onde cada linha $0 \to A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \to 0$ é uma sequência exata para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todas as colunas são complexos de cadeias.

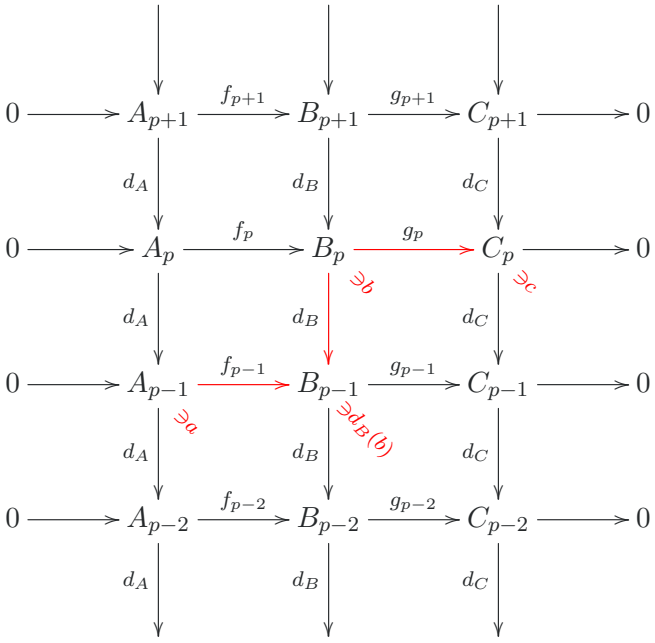
Lema do Zig-Zag. Seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeias (A, d_A), (B, d_B) e (C, d_C). Então existe um homomorfismo graduado $\partial_* = \{\partial_{*,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com

$$\partial_{*,n} : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$$

de modo que a sequência a seguir é uma sequência exata longa:

$$\begin{array}{l} \cdots \\ \to H_{p+1}(A) \xrightarrow{f_{*,p+1}} H_{p+1}(B) \xrightarrow{g_{*,p+1}} H_{p+1}(C) \xrightarrow{\partial_{*,p+1}} \\ \to H_p(A) \xrightarrow{f_{*,p}} H_p(B) \xrightarrow{g_{*,p}} H_p(C) \xrightarrow{\partial_{*,p}} \\ \to H_{p-1}(A) \xrightarrow{f_{*,p-1}} H_{p-1}(B) \xrightarrow{g_{*,p-1}} H_{p-1}(C) \xrightarrow{\partial_{*,p-1}} \\ \to \cdots \end{array} \tag{7.7}$$

Demonstração. Os homomorfismos $\partial_{*,n}$ são definidos usando um argumento padrão de busca no diagrama. Por hipótese, temos o seguinte diagrama comutativo em que as linhas são exatas:



(7.8)

Dada uma classe $[c] \in H_p(C)$, como $c \in C_p$ é um ciclo, temos $d_C(c) = 0$. Para definir $\partial_{*,p}([c])$, tomemos um elemento qualquer $b \in B_p$ tal que $g_p(b) = c$; aplicando d_B em b, obtemos $d_B(b) \in B_{p-1}$ e então "puxamos" $d_B(b)$ de volta para A_{p-1} aplicando $(f_{p-1})^{-1}$ e obtemos $a = (f_{p-1})^{-1}(d_B(b))$. Então, definimos

$$\partial_{*,p}([c]) \coloneqq [a].$$

Para mostrar que $\partial_{*,p}$ está bem definida, devemos verificar a validade das seguintes afirmações:

a. Para qualquer $c \in C_p$ tal que $d_C(c) = 0$ e qualquer $b \in B_p$ tal que $g_p(b) = c$, temos $d_B(b) \in \operatorname{im} f_{p-1}$. Isso garante que $a = (f_{p-1})^{-1}(d_B(b))$ está bem definido dado que f_{p-1} é injetivo.

b. O elemento $a \in A_{p-1}$ é um ciclo; mais precisamente, se $f_{p-1}(a) = d_B(b)$ para algum $b \in B_p$, então $d_A(a) = 0$.

c. A classe de homologia $[a]$ não depende da escolha de $b \in (g_p)^{-1}(c)$; isto é, para

quaisquer $b_1, b_2 \in B_p$ e quaisquer $a_1, a_2 \in A_{p-1}$, se $g_p(b_1) = g_p(b_2) = c$ e $f_{p-1}(a_1) = d_B(b_1)$, $f_{p-1}(a_2) = d_B(b_2)$, então $[a_1] = [a_2]$.

d. A classe de homologia $[a]$ não depende da escolha do ciclo c na classe de homologia $[c]$. Como $\partial_{*,p}$ é linear, basta mostrar que se c é um bordo em C_p, então para qualquer b tal que $g_p(b) = c$ e qualquer $a \in A_{p-1}$ tal que $f_{p-1}(a) = d_B(b)$, tem-se $[a] = 0$.

Recorreremos sempre ao fato de que f e g são aplicações de cadeias, e assim todos os quadrados do diagrama (7.8) comutam. A seguir, demonstraremos cada uma dessas afirmações.

(a) Como $\operatorname{im} f_{p-1} = \ker g_{p-1}$, é suficiente mostrar que $g_{p-1}(d_B(b)) = 0$. No entanto, como o quadrado central direito em (7.8) comuta e $d_C(c) = 0$ (pois c é ciclo), temos

$$g_{p-1}(d_B(b)) = d_C(g_p(b)) = d_C(c) = 0.$$

(b) Como f_{p-2} é injetivo, $d_A(a) = 0$ se, e somente se, $f_{p-2} \circ d_A(a) = 0$. Como o quadrado inferior esquerdo em (7.8) comuta

$$f_{p-2} \circ d_A(a) = d_B \circ f_{p-1}(a) = d_B \circ d_B(b) = 0.$$

Segue que $d_A(a) = 0$.

(c) Assuma que $g_p(b_1) = g_p(b_2) = c$. Então $g_p(b_1 - b_2) = 0$, e como $\operatorname{im} f_p = \ker g_p$, existe algum $\overline{a} \in A_p$ tal que $b_1 - b_2 = f_p(\overline{a})$. Recorrendo ao fato de que o quadrado central esquerdo em (7.8) comuta, temos que

$$\begin{aligned} f_{p-1}(a_1 - a_2) &= f_{p-1}(a_1) - f_{p-1}(a_2) \\ &= d_B(b_1) - d_B(b_2) \;=\; d_B(b_1 - b_2) \\ &= d_B(f_p(\overline{a})) \;=\; f_{p-1}(d_A(\overline{a})). \end{aligned}$$

Pela injetividade de f_{p-1}, temos que $a_1 - a_2 = d_A(\overline{a})$, o que implica que $[a_1] = [a_2]$.

(d) Seja $c \in C_p$ um bordo, ou seja, $c = d_C(\overline{c})$ para algum $\overline{c} \in C_{p+1}$. Como g_{p+1} é sobrejetivo, existe $b_1 \in B_{p+1}$ tal que $g_{p+1}(b_1) = \overline{c}$, e como o quadrado superior direito em (7.8) comuta, i.e. $d_C \circ g_{p+1} = g_p \circ d_B$, temos

$$c = d_C(\overline{c}) = d_C(g_{p+1}(b_1)) = g_p(d_B(b_1)).$$

Por (c), para computar a classe de homologia $[a]$ tal que $\partial_{*,p}([c]) = [a]$, podemos tomar qualquer $b \in B_p$ tal que $g_p(b) = c$, e como $c = g_p(d_B(b_1))$, podemos escolher $b = d_B(b_1)$ e assim obtemos

$$d_B(b) = d_B(d_B(b_1)) = 0.$$

Como f_{p-1} é injetivo, se $a \in A_{p-1}$ é o único elemento tal que $f_{p-1}(a) = d_B(b) = 0$, então $a = 0$, assim $[a] = 0$, como queríamos provar.

Portanto, o homomorfismo graduado $\partial_* : H_*(C) \to H_{*-1}(A)$ está bem definido.

Agora, vamos mostrar que a sequência em (7.7) é exata. Precisamos mostrar que

$$\operatorname{im} f_{*,p} = \ker g_{*,p}\,, \quad \operatorname{im} g_{*,p} = \ker \partial_{*,p} \quad \text{e} \quad \operatorname{im} \partial_{*,p} = \ker f_{*,p-1},$$

para cada $p \in \mathbb{Z}$. Portanto, temos que verificar seis inclusões:

- $\operatorname{im} f_{*,p} \subseteq \ker g_{*,p}$:

  Pela Proposição 7.5 e pela exatidão das linhas no diagrama (7.8),

  $$g_{*,p} \circ f_{*,p} = (g \circ f)_{*,p} = 0_* = 0.$$

  Segue que $\operatorname{im} f_{*,p} \subseteq \ker g_{*,p}$.

- $\ker g_{*,p} \subseteq \operatorname{im} f_{*,p}$:

  Seja $[b] \in H_p(B)$ tal que $g_{*,p}([b]) = [g_p(b)] = 0$. Então $g_p(b) = d_C(c)$ para algum $c \in C_{p+1}$ e como g_{p+1} é sobrejetor, existe $b' \in B_{p+1}$ tal que $g_{p+1}(b') = c$. Pela pela comutatividade do quadrado superior direito em (7.8),

  $$g_p(b) = d_C(c) = d_C(g_{p+1}(b')) = g_p(d_B(b')),$$

  e $g_p(b - d_B(b')) = 0$. Pela exatidão das linhas, existe $a \in A_p$ tal que $f_p(a) = b - d_B(b')$. Veja que a é um p-ciclo, pois

  $$f_{p-1}(d_A(a)) = d_B(f_p(a)) = d_B(b - d_B(b')) = d_B(b) - d_B(d_B(b')) = 0,$$

  a última igualdade segue pois b é um ciclo. Como f_{p-1} é injetor, $d_A(a) = 0$. Portanto,

  $$f_{*,p}([a]) = [f_p(a)] = [b - d_B(b')] = [b].$$

  Segue que $\ker g_{*,p} \subseteq \operatorname{im} f_{*,p}$.

- $\operatorname{im} g_{*,p} \subseteq \ker \partial_{*,p}$:

  Fixado uma classe de homologia $[b] \in H_p(B)$ em que b é um p-ciclo, temos $b \in B_p$ tal que $d_B(b) = 0$. Como $g_{*,p}(b) = [g_p(b)]$, se escrevermos $c = g_p(b)$, então $d_C(c) = d_C \circ g_p(b) = g_{p-1} \circ d_B(b) = 0$ e c é ciclo em C_p. Pela definição de $\partial_{*,p}$, temos

  $$\partial_{*,p}(g_{*,p}([b])) = \partial_{*,p}([c]) = [(f_{p-1})^{-1}(d_B(b))] = [(f_{p-1})^{-1}(0)] = 0.$$

  Assim, $\operatorname{im} g_{*,p} \subseteq \ker \partial_{*,p}$.

- $\ker \partial_{*,p} \subseteq \operatorname{im} g_{*,p}$:

  Assuma que $\partial_{*,p}([c]) = 0$, para algum $c \in C_p$ tal que $d_C(c) = 0$. Por definição de $\partial_{*,p}$, temos que $\partial_{*,p}([c]) = [a]$, em que $a \in A_{p-1}$ é dado por $f_{p-1}(a) = d_B(b)$ para um $b \in B_p$ fixado tal que $g_p(b) = c$. Como $[a] = 0$, o elemento a deve ser um bordo, o que implica que $a = d_A(a_1)$ para algum $a_1 \in A_p$. Então, pela comutatividade do quadrado central esquerdo em (7.8), temos

  $$d_B(b) = f_{p-1}(a) = f_{p-1}(d_A(a_1)) = d_B(f_p(a_1)).$$

  Daí, $d_B(b - f_p(a_1)) = 0$, isso significa que $b - f_p(a_1)$ é um ciclo em B_p. Como $\operatorname{im} f_p = \ker g_p$, temos $g_p \circ f_p = 0$, o que implica que

  $$c = g_p(b) = g_p(b - f_p(a_1)).$$

  Assim, segue que $g_{*,p}([b - f_p(a_1)]) = [c]$, provando que $\ker \partial_{*,p} \subseteq \operatorname{im} g_{*,p}$.

- $\operatorname{im} \partial_{*,p} \subseteq \ker f_{*,p-1}$:

  Considere um classe qualquer $[c] \in H_p(C)$ com $\partial_{*,p}([c]) = [a]$, em que $f_{p-1}(a) = d_B(b)$ para algum $b \in B_p$ tal que $g_p(b) = c$. Como $d_B(b)$ é um bordo, temos que

  $$f_{*,p-1}(\partial_{*,p}([c])) = f_{*,p-1}([a]) = [f_{p-1}(a)] = [d_B(b)] = 0,$$

  e assim $\operatorname{im} \partial_{*,p} \subseteq \ker f_{*,p-1}$.

- $\ker f_{*,p-1} \subseteq \operatorname{im} \partial_{*,p}$:

  Assuma que $f_{*,p-1}([a]) = 0$, para algum $a \in A_{p-1}$ com $d_A(a) = 0$, logo $f_{p-1}(a)$ é um bordo em B_{p-1}, i.e. $f_{p-1}(a) = d_B(b)$ para algum $b \in B_p$. Dado

que $\operatorname{im} f_{p-1} = \ker g_{p-1}$, temos que $g_{p-1} \circ f_{p-1} = 0$, então pela comutatividade do quadrado direito central em (7.8)

$$d_C(g_p(b)) = g_{p-1}(d_B(b)) = g_{p-1}(f_{p-1}(a)) = 0.$$

O que significa que $g_p(b)$ é um ciclo em C_p, e como $f_{p-1}(a) = d_B(b)$, pela definição de $\partial_{*,p}$, temos

$$\partial_{*,p}([g_p(b)]) = [a],$$

mostrando que $\ker f_{*,p-1} \subseteq \operatorname{im} \partial_{*,p}$.

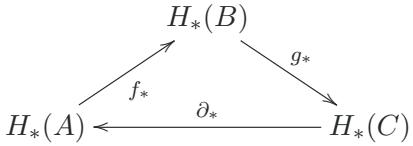
Com isso, finalizamos a demonstração do teorema. ∎

a. Às vezes é conveniente escrever $\partial_{*,p}([c]) = [f_{p-1}^{-1} d_B g_p^{-1}(c)]$. Evidentemente, os homomorfismos f_p e g_p não são bijetores, porém a classe de homologia $\partial_{*,p}[([c])]$ está bem definida por essa fórmula, como acabamos de provar na demonstração do teorema anterior.

b. O homomorfismo ∂_* é chamado de **homomorfismo de conexão**.

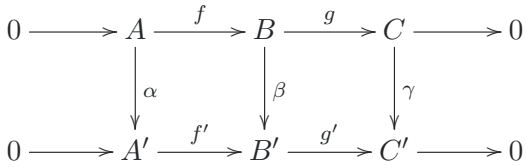
c. A sequência (7.7) é chamada de **sequência exata longa em homologia** associada à sequência exata $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ de complexos de cadeias.

Os dados da sequência exata longa em homologia (7.7) são às vezes expressos pela forma mnemônica:



que é chamado de *triângulo exato*.

Naturalidade **Naturalidade de ∂_*.** Considere o seguinte diagrama comutativo de complexos de cadeias com linhas exatas:



Então, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(B) & \xrightarrow{g_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(A') & \xrightarrow{{f'}_*} & H_n(B') & \xrightarrow{{g'}_*} & H_n(C') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A') & \xrightarrow{{f'}_*} & H_{n-1}(B') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Demonstração. Os primeiros dois quadrados comutam pois H_n é um funtor, $\beta \circ f = f' \circ \alpha$ e $\gamma \circ g = g' \circ \beta$. Logo, $\beta_* \circ f_* = f'_* \circ \alpha_*$ e $\gamma_* \circ g_* = g'_* \circ \beta_*$. Para provar a comutatividade do quadrado envolvendo o homomorfismo de conexão, i.e. $\alpha_* \circ \partial_* = \partial_* \circ \gamma_*$, escrevendo $\partial_*[c] = [f^{-1} d_B g^{-1} c]$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_* \partial_*[c] = \alpha_*[f^{-1} d_B g^{-1} c] &= [\alpha f^{-1} d_B g^{-1} c] = [{f'}^{-1} \beta d_B g^{-1} c] \\
&= [{f'}^{-1} d_{B'} \beta g^{-1} c] = [{f'}^{-1} d_{B'} {g'}^{-1} \gamma c] = \partial_* \gamma_*[c].
\end{aligned}$$

Segue a comutatividade do diagrama de sequências exatas longas em homologia. ∎

Pensando puramente na linguagem categórica, a sequência exata longa em homologia pode ser pensada como um funtor que leva uma sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

em uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots.$$

Mais especificamente, denote por **SEC** a categoria cujos objetos são sequências exatas curtas de complexos de cadeias de R-módulos. Os morfismos são formados por ternas (α, β, γ) de aplicações de cadeias que fazem os diagramas abaixo comutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{7.9}$$

Similarmente, considere ainda a categoria **SEL** de sequências exatas longas. A sequência exata longa em homologia é um funtor de **SEC** para **SEL** que a cada

sequência exata curta de complexos de cadeias associa a sequência exata longa em homologia, e para cada morfismo (α, β, γ) como em (7.9) em **SEC** associa a terna $(\alpha_*, \beta_*, \gamma_*)$ que faz o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(B) & \xrightarrow{g_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(A') & \xrightarrow{{f'}_*} & H_n(B') & \xrightarrow{{g'}_*} & H_n(C') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A') & \xrightarrow{{f'}_*} & H_{n-1}(B') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Lema da Cobra

Lema 7.2 — Lema da Cobra

Considere o diagrama comutativo de R-módulos da forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' & &
\end{array}$$

Se as linhas são exatas, então existe uma sequência exata

$$\ker(\alpha) \xrightarrow{\overline{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\overline{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{coker}(\gamma).$$

Além disso, se f é injetivo, $\overline{f}$ também é injetivo; se g' é sobrejetivo, $\overline{g'}$ também é sobrejetivo.

Demonstração. Defina os mapas $\overline{f} : \ker(\alpha) \to \ker(\beta)$ e $\overline{g} : \ker(\beta) \to \ker(\gamma)$ por

$$\overline{f} \coloneqq f|_{\ker \alpha} \qquad \text{e} \qquad \overline{g} \coloneqq g|_{\ker \beta}.$$

A aplicação $\overline{f}$ está bem definida, pois se $m \in \ker \alpha$, então $\beta(f(m)) = f'(\alpha(m)) = 0$ (pela comutatividade do diagrama), e assim $f(m) \in \ker \beta$. Similarmente, $\overline{g}$ está bem definido, pois se $m \in \ker \beta$, então $\gamma(g(m)) = g'(\beta(m)) = 0$, e assim $g(m) \in \ker \gamma$.

Agora, defina os mapas $\overline{f'} : \operatorname{coker}(\alpha) \to \operatorname{coker}(\beta)$ e $\overline{g'} : \operatorname{coker} \beta \to \operatorname{coker}(\gamma)$ por

$$\overline{f'}(m + \operatorname{im} \alpha) \coloneqq f'(m) + \operatorname{im} \beta \qquad \text{e} \qquad \overline{g'}(n + \operatorname{im} \beta) \coloneqq g'(n) + \operatorname{im} \gamma.$$

A aplicação $\overline{f'}$ está bem definida, dado que se $m + \operatorname{im}\alpha = m' + \operatorname{im}\alpha$, então $m - m' = \alpha(x)$, para algum $x \in M$. Daí, $f'(m - m') = f'(\alpha(x)) = \beta(f(x)) \in \operatorname{im}\beta$, logo $f'(m) + \operatorname{im}\beta = f'(m') + \operatorname{im}\beta$. De forma similar, $\overline{g'}$ também está bem definido, pois se $n + \operatorname{im}\beta = n' + \operatorname{im}\beta$, então $n - n' = \beta(y), y \in N$, e assim $g'(n - n') = g'(\beta(y)) = \gamma(g(y)) \in \operatorname{im}\gamma$, o que implica que $\overline{g'}(n + \operatorname{im}\beta) = \overline{g'}(n' + \operatorname{im}\beta)$.

A aplicação δ é o homomorfismo de conexão definido no Lema do Zig-Zag (Teorema 7.7), i.e. dado $c \in \ker(\gamma)$, $\delta(c) \coloneqq (f')^{-1}(\beta(g^{-1}(c))) + \operatorname{im}\alpha$, e está bem definido como provado anteriormente. Agora, mostraremos que a sequência é exata em todos seus pontos.

- Exatidão em $\ker(\beta)$: A composição $\overline{g} \circ \overline{f}$ é nula, pois $g \circ f = 0$ (assim $\operatorname{im}\overline{f} \subseteq \ker\overline{g}$). Reciprocamente, suponha que $n \in \ker\beta$ com $\overline{g}(n) = 0$. Como $g(n) = 0$, então $n \in \operatorname{im} f$ e assim $n = f(m)$, para algum $m \in M$. Basta mostrar que $m \in \ker\alpha$ para concluir que $n \in \operatorname{im}\overline{f}$. Temos que $f'(\alpha(m)) = \beta(f(m)) = \beta(n) = 0$, dado que $n \in \ker\beta$. Como f' é injetor, então $\alpha(m) = 0$ e assim $m \in \ker\alpha$, e $n = \overline{f}(m) \in \operatorname{im}\overline{f}$.

- Exatidão em $\ker(\gamma)$: Seja $n \in \ker\beta$. Para calcularmos $\delta(\overline{g}(n))$, tome n como o levantamento de $g(n)$. Como $\beta(n) = 0$, temos que $\beta(n) = f'(0)$, então $\delta(\overline{g}(n)) = 0 + \operatorname{im}\alpha$. Assim $\delta \circ \overline{g} = 0$. Reciprocamente, suponha que $p \in \ker\gamma$ também está em $\ker\delta$. Escrevendo $p = g(n)$ (que está bem definido dado que g é sobrejetor), temos que $\beta(n) = f'(m)$, com $m \in \operatorname{im}\alpha$. Escreva $m = \alpha(x)$, para algum $x \in M$. Então $\beta(f(x)) = f'(\alpha(x)) = \beta(n)$. Assim $n - f(x) \in \ker\beta$. Além disso,$\overline{g}(n - f(x)) = g(n) - gf(x) = g(n) = p$, então $p \in \operatorname{im}\overline{g}$. Portanto, $\ker\delta = \operatorname{im}\overline{g}$.

- Exatidão em $\operatorname{coker}(\alpha)$: Seja $p \in \ker\gamma$. Escreva $p = g(n)$ e $\beta(n) = f'(m)$, tal que $\delta(p) = m + \operatorname{im}\alpha$. Então $\overline{f'}(\delta(p)) = f'(m) + \operatorname{im}\beta = 0$, dado que $f'(m) = \beta(n) \in \operatorname{im}\beta$. Reciprocamente, suponha que $m + \operatorname{im}\alpha \in \ker\overline{f'}$. Então $f'(m) \in \operatorname{im}\beta$, logo $\exists n \in N$ tal que $f'(m) = \beta(n)$. Seja $p = g(n)$. Então $\gamma(g(n)) = g'(\beta(n)) = g'(f'(m)) = 0$. Portanto, $p \in \ker\gamma$, e $\delta(p) = m + \operatorname{im}\alpha$ pela construção de δ.

- Exatidão em $\operatorname{coker}(\beta)$: A composição $\overline{g'} \circ \overline{f'}$ será 0 pois $g' \circ f' = 0$. Reciprocamente, seja $n + \operatorname{im}\beta \in \ker\overline{g'}$. Então $g'(n) \in \operatorname{im}\gamma \Rightarrow g'(n) = \gamma(p)$, para

algum $p \in P$. Escolha $x \in N$ tal que $g(x) = p$. Podemos substituir n por $n - \beta(x)$ sem alterar o coset $n + \operatorname{im}\beta$. Mas $g'(n - \beta(x)) = g'(n) - g'(\beta(x)) = g'(n) - \gamma(g(x)) = g'(n) - \gamma(p) = 0$. Portanto, podemos assumir que $g'(n) = 0$. Então $n \in \ker g' = \operatorname{im} f'$, e assim $n = f'(m)$, para algum $m \in M'$. Logo, $n + \operatorname{im}\beta = \overline{f'}(m + \operatorname{im}\alpha)$ e $n + \operatorname{im}\beta \in \operatorname{im}\overline{f'}$.

Segue a exatidão da sequência.

Por fim, assuma que f é injetor. Como $\overline{f} = f|_{\ker\alpha}$, então $\overline{f}$ também é injetor. Agora, assuma que g' é sobrejetor. Dado $p + \operatorname{im}\gamma \in \operatorname{coker}(\gamma)$, escreva $p = g(n)$, para algum $n \in N'$. Daí, $p + \operatorname{im}\gamma = \overline{g'}(n + \operatorname{im}\beta)$ e segue a sobrejetividade de $\overline{g'}$. ∎

Considere o diagrama comutativo de R-módulos com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

existe uma sequência exata

$$0 \to \ker(\alpha) \xrightarrow{\overline{f}} \ker(\beta) \xrightarrow{\overline{g}} \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{coker}(\gamma) \to 0.$$

O termo "cobra", no Lema da Cobra, vem do seguinte diagrama visual:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker(\alpha) & \xrightarrow{\overline{f}} & \ker(\beta) & \xrightarrow{\overline{g}} & \ker(\gamma) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & P' & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \operatorname{coker}(\alpha) & \xrightarrow{\overline{f'}} & \operatorname{coker}(\beta) & \xrightarrow{\overline{g'}} & \operatorname{coker}(\gamma) & & & & \end{array}$$

com δ conectando $\ker(\gamma)$ a $\operatorname{coker}(\alpha)$ pela direita e pela esquerda.

Lema de Mayer-Vietoris

Lema 7.3 — Mayer-Vietoris

Seja

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C_{n-1} \longrightarrow \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{n-1}} \\
\cdots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{f'_n} & B'_n & \xrightarrow{g'_n} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & A'_{n-1} & \xrightarrow{f'_{n-1}} & B'_{n-1} & \xrightarrow{g'_{n-1}} & C'_{n-1} \longrightarrow
\end{array}$$

um diagrama comutativo de R-módulos com linhas exatas. Se γ_n é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, então existe uma sequência exata

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{\alpha_n \oplus f_n} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{f'_n - \beta_n} B'_n \xrightarrow{\partial_n \gamma_n^{-1} g'_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1} \oplus f_{n-1}} A'_{n-1} \oplus B_{n-1}$$

Demonstração. A aplicação $A_n \to A'_n \oplus B_n$ é definida por $a \mapsto (\alpha_n(a), f_n(a))$ e a aplicação $A'_n \oplus B_n \to B'_n$ é definida por $(a', b) \mapsto f'_n(a') - \beta_n(b)$. Os detalhes é deixado para o leitor verificar. ∎

Esse lema é bastante útil em Topologia Algébrica, como veremos no Capítulo 10.

7.8. Homologia Relativa

Um dos exemplos importantes de sequência exata longa em homologia surge quando consideramos um subcomplexo $(A', d_{A'})$ de um complexo de cadeias (A, d). Relembre que nesse caso, podemos considerar o complexo quociente $(\overline{A}, \overline{d})$ dado por

$$\overline{A}_n = A_n / A'_n \qquad \text{e} \qquad \overline{d}_n(a + A'_n) \coloneqq d_n(a) + A'_{n-1},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Os módulos de homologia do complexo quociente $(\overline{A}, \overline{d})$, i.e. $H_*(\overline{A}) = H_*(A/A')$, são chamados de **módulos de homologia relativa** do par (A, A'). Elementos de $H_n(A/A')$ são representados por **ciclos relativos**, ou seja, n-cadeias

$a \in A_n$ tais que

$$d_n(a) \in A'_{n-1}.$$

Um ciclo relativo a é trivial em $H_n(A/A')$ se, e somente se, a é um **bordo relativo**, i.e.

$$a = d_{n+1}(b) + a',$$

para algum $b \in A_{n+1}$ e para algum $a' \in A'_n$.

Os complexos de cadeias $(A', d_{A'})$ e (A, d) formam uma sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/A' \to 0,$$

em que i é a inclusão e π a projeção. Pelo Lema do Zig-Zag (Teorema 7.7), existe uma sequência exata longa em homologia

$$\cdots \to H_p(A') \xrightarrow{i_*} H_p(A) \xrightarrow{\pi_*} H_p(A/A') \xrightarrow{\partial_{*,p}} H_{p-1}(A') \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(A) \to \cdots$$

chamada de **sequência exata longa do par** (A, A').

No contexto de homologia relativa, podemos simplificar a fórmula para o homomorfismo de conexão ∂_*. Para ver isso, denote por $\langle\ \rangle$ uma classe de equivalência do quociente A/A' e denotando por $[\ ]$ uma classe de equivalência em homologia (como de costume). Se a é um n-ciclo relativo que representa uma classe de homologia em $H_n(A/A')$, então $d_n(a) \in A'_{n-1}$, como vimos acima, e obviamente $d_n(a) \in Z_{n-1}(A')$, logo representa uma classe de homologia em $H_{n-1}(A')$. Assim,

$$\partial_{*,n}\left[\langle a\rangle\right] = \left[i_{n-1}^{-1} d_n \pi_n^{-1} \langle a\rangle\right] = \left[i_{n-1}^{-1} d_n(a)\right] = \left[d_n(a)\right].$$

Em resumo,

$$\partial_{*,n}\left[\langle a_n\rangle\right] = \left[d_n(a_n)\right].$$

7.9. Complexo de Cocadeias e Cohomologia

O funtor Hom nos permite dualizar o conceito de homologia, obtendo a teoria de cohomologia. Os módulos de cohomologia $H^n(C) = \mathrm{Hom}(H_n(C), \bullet)$ satisfazem os mesmos axiomas da teoria de homologia. A principal diferença é que o funtor

H_* é covariante, enquanto que o funtor H^* é contravariante, ou seja, as setas em um tem direções reversas no outro. A contravariância do funtor H^* nos permite definir uma estrutura adicional de anel nos módulos de cohomologia, isto é, um produto natural não trivial, chamado o produto cup, como veremos no Capítulo 13.

Um **complexo de cocadeias** (A, δ) é uma sequência de R-módulos e homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} A_n \xrightarrow{\delta^n} A_{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots , \tag{7.10}$$

tais que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (ou equivalentemente, $\operatorname{im} \delta^n \subseteq \ker \delta^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$).

A propriedade $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, também pode ser reescrita, suprimindo os subíndices, da seguinte maneira $\delta \circ \delta = \delta^2 = 0$.

a. Exemplos clássicos de complexos de cocadeias são o complexo de cocadeias singulares de um espaço topológico e o complexo de de Rham de uma variedade suave, abordados nos próximos capítulos.

b. Toda sequência exata (A, d) de R-módulos é um complexo de cocadeias, já que $\operatorname{im} d_{n+1} = \ker d_n$ (renomeando os índices).

Em outros termos, um complexo de cocadeias (A, δ) é um R-módulo $\mathbb{Z}$-graduado

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

munido de um homomorfismo de R-módulos $\delta : A \to A$ que satisfaz $\delta(A_n) \subseteq A_{n+1}$ e $\delta \circ \delta = 0$. Denotando a restrição de δ a A_n por δ^n, obtemos a sequência em (7.10).

Seja (A, δ) um complexo de cocadeias.

1. O homomorfismo δ é chamado de **operador de cobordo** ou **diferencial** do complexo. O homomorfismo δ^n é chamado de n**-ésimo operador de cobordo** ou **diferencial de dimensão** n.

2. Os elementos de A_n são chamados de n**-cocadeias**.

3. O kernel $Z^n(A)$ do operador de cobordo $\delta^n : A_n \to A_{n+1}$, i.e., $Z^n(A) \coloneqq \ker \delta^n$, é dito **módulo dos n-cociclos**. Um elemento de $Z^n(A)$ é chamado de **n-cociclo** ou cociclo n-dimensional.

4. A imagem $B^n(A)$ do operador de cobordo $\partial^{n-1} : A_{n-1} \to A_n$, i.e., $B^n(A) \coloneqq \operatorname{im} \delta^{n-1}$, é dito **módulo dos n-cobordos**. Um elemento de $B^n(A)$ é chamado de **n-cobordo** ou cobordo n-dimensional.

As noções e os fatos relativos à cohomologia são análogos àqueles que já estabelecidos para homologia, levando em conta apenas que o operador de cobordo $\delta : A_n \to A_{n+1}$ aumenta a dimensão enquanto que o operador bordo $d : A_n \to A_{n-1}$ diminui.

Dado um complexo de cocadeias (A, δ), como a diferencial δ satisfaz $\delta^2 = 0$, temos que todo n-cobordo é um n-cociclo, daí,

$$0 \subseteq B^n(A) \subseteq Z^n(A) \subseteq A_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, o módulo quociente $Z^n(A)/B^n(A)$ está bem definido. Esse fato possibilita a definição dos módulos de cohomologia associados a um complexo de cocadeia.

Seja (A, δ) um complexo de cocadeias de R-módulos. O n-ésimo **módulo de cohomologia** $H^n(A)$ de (A, δ), com coeficientes em R, é definido por

$$H^n(A) \coloneqq \frac{\ker \delta^n}{\operatorname{im} \delta^{n-1}} = \frac{Z^n(A)}{B^n(A)},$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(A)$$

é chamada de **cohomologia** de (A, δ).

Os elementos de $H^n(A)$ são as *classes de cohomologia*

$$[z] = z + B^n(A) = \{z + \delta^{n-1}(x) \mid x \in A_{n-1}\}$$

dos cociclos $z \in Z_n(A)$. Se z e z' são n-cociclos, temos que $[z] = [z']$ se, e somente se, $z' - z = \delta^{n-1}(x)$, para algum $x \in A_{n-1}$. Nesse caso, dizemos que z e z' são **cociclos cohomólogos**.

Dados (A, δ) e (B, δ') complexos de cocadeias, um **aplicação de cocadeias** $f : A \to B$ é uma sequência de homomorfismos $f^n : A_n \to B_n$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & A_n & \xrightarrow{\delta^n} & A_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{n-1} & \xrightarrow{(\delta')^{n-1}} & B_n & \xrightarrow{(\delta')^n} & B_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

ou seja, $f^{n+1} \circ \delta^n = (\delta')^n \circ f^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Em outras palavras, uma aplicação de cocadeias é um morfismo graduado $f : A \to B$ de grau zero tal que $f \circ \delta = \delta' \circ f$.

Sejam (A, δ) e (B, δ') complexos de cocadeias. Se $f : A \to B$ é uma aplicação de cocadeias, então f induz um homomorfismo graduado $f^* = \{f^{*,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de grau zero entre os módulos de cohomologia de (A, δ) e (B, δ')

$$f^{*,n} : H^n(A) \longrightarrow H^n(B)$$

definido por $f^{*,n}([x]_A) \coloneqq [f^n(x)]_B$ e chamado de **homomorfismo induzido** por f. Portanto, temos um homomorfismo entre as cohomologias $f^* : H^*(A) \longrightarrow H^*(B)$.

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 7.5. ∎

Sejam (A, δ_A) e (B, δ_B) complexos de cocadeias e $f, g : A \to B$ aplicações de cocadeias. Uma **homotopia de cocadeias** entre f e g é uma sequência de homomorfismos de R-módulos $h = \{h^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ com $h^n : A_n \to B_{n-1}$ tal que

$$(\delta_B)^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ (\delta_A)^n = f^n - g^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nesse caso, dizemos que f e g são **homotópicas** e denotamos por $f \simeq g$. Esquematicamente, temos o diagrama (não comutativo)

$$\begin{array}{ccccc} & & A_n & \xrightarrow{(\delta_A)^n} & A_{n+1} \\ & \swarrow^{h^n} & \downarrow{\scriptstyle f^n - g^n} & \swarrow_{h^{n+1}} & \\ B_{n-1} & \xrightarrow[(\delta_B)^{n-1}]{} & B_n & & \end{array}$$

Suprimindo os subíndices, h é uma homotopia de cadeias entre f e g, se

$$\delta_B \circ h + h \circ \delta_A = f - g.$$

Sejam $f, g : A \to B$ aplicações de cocadeias entre os complexos de cocadeias (A, δ_A) e (B, δ_B). Se f e g são homotópicas, então os homomorfismos induzidos em cohomologia coincidem, i.e. $f^* = g^*$.

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 7.6. ∎

Como já é de se esperar, temos a versão do Lema do Zig-Zag para cohomologia.

Lema do Zig-Zag. Seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de complexos de cocadeias (A, δ_A), (B, δ_B) e (C, δ_C). Então, existe um homomorfismo graduado $\delta^{*,n} : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, de modo que a sequência abaixo é exata.

$$\cdots \to H^{p-1}(A) \xrightarrow{f^{*,p-1}} H^{p-1}(B) \xrightarrow{g^{*,p-1}} H^{p-1}(C) \xrightarrow{\delta^{*,p-1}} H^p(A) \xrightarrow{f^{*,p}} H^p(B) \xrightarrow{g^{*,p}} H^p(C) \xrightarrow{\delta^{*,p}} H^{p+1}(A) \xrightarrow{f^{*,p+1}} H^{p+1}(B) \xrightarrow{g^{*,p+1}} H^{p+1}(C) \xrightarrow{\delta^{*,p+1}} \cdots$$

Demonstração. A demonstração segue os mesmo passos feito na demonstração do Lema do Zig-Zag para homologia (Teorema 7.7). ∎

Cohomologia de um complexo de cadeias

Dado um complexo de cadeias $\mathcal{A} = (A_n, d_n)$, formado por R-módulos, podemos construir um complexo de cocadeias, como descrito a seguir. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, tome

$$C_n \coloneqq \mathrm{Hom}_R(A_n; R),$$

o módulo dual de A_n, cujos elementos são os homomorfismos $u : A_n \to R$. O operador de cobordo $\delta = \delta^n : C_n \to C_{n+1}$ é o adjunto do operador de bordo $d_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$. Mais especificamente, se $f \in C_n$, então $\delta^n(f) \in C_{n+1}$ é o homomorfismo de R-módulos definido por

$$(\delta^n f)(x) \coloneqq f(d_{n+1}(x)) \qquad \begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & A_n \\ & \searrow^{\delta^n f} & \downarrow f \\ & & R\,. \end{array}$$

para toda cadeia $x \in A_{n+1}$. Logo, obtemos o complexo de cocadeias $\mathcal{C}^* = (C_n, \delta^n)$, cujos grupos de cohomologia $H^n(\mathcal{C}^*)$ são chamados os grupos de cohomologia do complexo de cadeias $\mathcal{A}$.

Se escrevermos $\langle g, y\rangle = g(y)$ para a avaliação da n-cocadeia $g \in C_n$ na n-cadeia $y \in A_n$, temos:

$$\langle \delta^n f,\ x\rangle = \langle f,\ d_{n+1}x\rangle,$$

ou seja, definimos δ^n como a transformação adjunta de d_{n+1}.

Pela construção anterior, dado um complexo de cadeias de R-módulos

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots,$$

dualizamos esse complexo aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$, obtendo assim o complexo de cocadeias

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C_n \xrightarrow{\delta^n} C_{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots,$$

em que $C_n = \mathrm{Hom}_R(A_n; R)$ e $\delta^n = \mathrm{Hom}_R(d_{n+1}; R)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma forma mais visual para esta dualizada é obtida escrevendo o complexo de cadeias da seguinte forma:

$$\cdots \xleftarrow{d_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} A_{n+1} \xleftarrow{d_{n-1}} \cdots,$$

daí a sequência dual é

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} \mathrm{Hom}_R(A_{n-1}; R) \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Hom}_R(A_n; R) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Hom}_R(A_{n+1}; R) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots,$$

em que $\delta^n = \mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, R)$, para to $n \in \mathbb{Z}$.

Funtorialidade A cohomologia H^n é um funtor!

Dado um anel associativo com unidade R, a coleção de complexos de cocadeias de R-módulos e aplicações de cocadeias entre eles forma uma categoria, a **categoria de complexos de cocadeias de R-módulos**, denotada por $_{\mathbf{R}}\mathbf{CompCo}$, que tem como objetos os complexos de cocadeias e como morfismos as aplicações de cocadeias.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, a cohomologia H^n pode ser vista como um funtor covariante da categoria de complexos de cocadeias na categoria de R-módulos à esquerda,

$$H^n : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{CompCo} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod},$$

definido da seguinte forma:

- para cada $(A, d) \in \mathrm{ob}({}_{\mathbf{R}}\mathbf{CompCo})$, temos $= H^n(A) = \dfrac{\ker \delta^n}{\mathrm{im}\, \delta^{n-1}}$;
- para cada aplicação de cocadeias $f : A \to B$, temos $H^n(f) : H^n(A) \to H^n(B)$ dado por

$$z + B^n(A) \longmapsto f^n(z) + B^n(B).$$

ou seja, $H^n(f)$ é o n-ésimo homomorfismo induzido por f, $f^{*,n}$.

Observamos que, nesse contexto, a cohomologia é um funtor covariante, a cohomologia será um funtor contravariante a partir dos espaços topológicos, pois as cocadeias formarão um funtor contravariante.

Exercícios

Ex. 72 — Sejam A, B, C três R-módulos. Mostre as seguintes afirmações:

1. Se $0 \to A \xrightarrow{f} B$ é exata, então f é um monomorfismo.
2. Se $B \xrightarrow{g} C$ é exata, então g é um epimorfismo.
3. Se $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ é exata, então f é um isomorfismo.

Ex. 73 — Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ é exata com f epimorfismo e g monomorfismo, então $B = 0$.

Ex. 74 — Seja $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \to A_3 \xrightarrow{g} A_4$ uma sequência exata de R-módulos. Mostre que f é um epimorfismo se, e somente se, g é um monomorfismo.

Ex. 75 — Seja $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \to A_3 \xrightarrow{g} A_4 \xrightarrow{g} A_5$ uma sequência exata de R-módulos. Mostre que se f é um epimorfismo e g é um monomorfismo, então $A_3 = 0$.

Ex. 76 — Dado um homomorfismo $f : M \to N$ de R-módulos, mostre que existe uma sequência exata da forma:

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f \to 0 \,.$$

Ex. 77 — Seja M um R-módulo fixado. Seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Assuma que essa sequência cinde.

1. Mostre que

   $$0 \to \operatorname{Hom}(M, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(M,f)} \operatorname{Hom}(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(M,g)} \operatorname{Hom}(M, C) \to 0$$

   é uma sequência exata cindida.
2. Mostre que

   $$0 \to \operatorname{Hom}(C, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(g,M)} \operatorname{Hom}(B, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(f,M)} \operatorname{Hom}(A, M) \to 0$$

   é uma sequência exata cindida.

Ex. 78 — Sejam M um R-módulo fixado e $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Se C é um R-módulo livre, então

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(M,f)} \operatorname{Hom}(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(M,g)} \operatorname{Hom}(M, C) \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(g,M)} \operatorname{Hom}(B, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(f,M)} \operatorname{Hom}(A, M) \to 0$$

são sequências exatas cindidas.

Ex. 79 — Seja $A_* = (A_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ um complexo de cadeias de R-módulos e homomorfimos. Mostre as afirmações a seguir.

1. Se F é um funtor (covariante) então $F(A_*) = (F(A_n), F(d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ é um complexo de cadeias. (Em particular, se A_* é uma sequência exata, então $F(A_*)$ é um complexo de cadeias, não necessariamente exato.)

2. Se F é um funtor contravariante então

$$\cdots \to F(A_{n-1}) \xrightarrow{Fd_n} F(A_n) \xrightarrow{Fd_{n+1}} F(A_{n+1}) \to \cdots$$

é um complexo de cadeias. Observe que nessa sequência os índices não decrescem, para escrever tal sequência no formato padrão, podemos definir $B_{-n} = F(A_n)$ e $D_{-n+1} = F_{d_n}$. Com essa convenção, a sequência fica:

$$\cdots \to B_{-n+1} \xrightarrow{D_{-n+1}} B_{-n} \xrightarrow{D_{-n}} B_{-n-1} \to \cdots$$

Ex. 80 — Sejam A e B complexos de cadeias de R-módulos e $f, g : A \to B$ aplicações de cadeias homotópicas. Se $F : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ é um functor aditivo, então $Ff, Fg : FA \to FB$ são homotópicas.

Ex. 81 — Seja $A_* = (A_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ um complexo de cadeias de R-módulos e homomorfimos.

1. Seja $F : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ um funtor (covariante) exato. Prove que

$$H_n(FA_*) \cong FH_n(A_*),$$

em que $F(A_*)$ é o complexo definido no Exercício 79.

2. Seja $F : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ um funtor contravariante exato. Prove que

$$H_{-n}(FA_*) \cong FH_n(A_*),$$

em que $F(A_*)$ é o complexo definido no Exercício 79.

Ex. 82 — Mostre que um complexo de cadeias (A, d) de R-módulos é uma sequência exata se, e somente se, $H_n(A) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 83 — Considere o $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-módulo graduado e o homomorfismo graduado

$$A_n = \begin{cases} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases} \qquad d_n(x) = \begin{cases} 4x(\mod 8), & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$$

1. Mostre que (A_n, d_n) é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$-módulos.
2. Calcule os módulos de homologia de (A_n, d_n).

Ex. 84 — Sejam (A, d) e (B, d') complexos de cadeias de R-módulos. Seja $f = \{f_i\}_{n\in\mathbb{Z}} : A \to B$ uma aplicação de cadeias. Mostre as afirmações abaixo.

1. o kernel de f é um subcomplexo de (A, d) definido por $(\ker f_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, em que $\partial_n = d_n|_{\ker f_n}$;
2. a imagem de f é um subcomplexo de (B, d') definido por $(\operatorname{im} f_n, \partial'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, em que $\partial'_n = d'_n|_{\operatorname{im} f_n}$;

Ex. 85 — Dada uma sequência $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ de complexos de cadeias, mostre que essa sequência é exata em B se, e somente se, os complexos $\operatorname{im} f$ e $\ker g$ coincidem, i.e. $\operatorname{im} f = \ker g$.

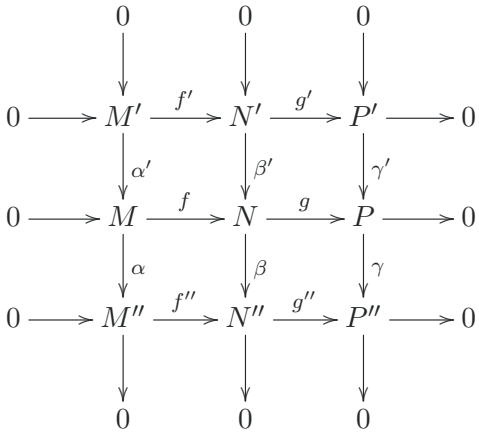
Ex. 86 — (Lema dos Cinco) Considere o seguinte diagrama comutativo de módulos:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{j} & E \\ \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ A' & \xrightarrow[r]{} & B' & \xrightarrow[s]{} & C' & \xrightarrow[t]{} & D' & \xrightarrow[u]{} & E' \end{array}$$

Prove que se as linhas são exatas, m e p são isomorfismos, l é um epimorfismo e q é um monomorfismo, então n também é um isomorfismo.

Ex. 87 — Seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeias (A, d_A), (B, d_B) e (C, d_C). Mostre que se (A, d_A) e (C, d_C) são acíclicos, então (B, d_B) também é acíclico.

Ex. 88 — (Lema 3×3) Seja



Um diagrama comutativo de R-módulos com colunas exatas.

1. Mostre que se as duas primeiras linhas são exatas, então a terceira linha é exata;
2. Mostre que se as duas últimas linhas são exatas, então a primeira linha é exata;
3. Mostre que se a primeira e a terceira linhas são exatas e $g \circ f = 0$, então a segunda linha é exata.

Ex. 89 — Seja

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots$$

um complexo. Defina $\widetilde{C}_n = C_n \oplus C_{n+1}$ e defina $\widetilde{\partial}_n : \widetilde{C}_n \to \widetilde{C}_{n-1}$ pela fórmula $\widetilde{\partial}_n (c, c') = (\partial_n c, \partial_{n+1} c' + (-1)^n c)\,, c \in C_n, c' \in C_{n+1}$. Prove que

$$\ldots \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n+2}} \widetilde{C}_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n+1}} \widetilde{C}_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} \widetilde{C}_{n-1} \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n-1}} \ldots$$

é um complexo e que a homologia deste complexo é trivial $\left(\widetilde{H}_n = 0 \text{ para todo } n\right)$.

8 Complexos Simpliciais e $\triangle$-Complexos

8.1. Complexos Simpliciais

Intuitivamente, um *complexo simplicial* é um objeto combinatório que descreve como construir um espaço a partir de blocos básicos, chamados *simplexos*. Os blocos básicos devem ser "colados" de forma adequada, basicamente eles devem ser colados ao longo de suas faces. Tais blocos básicos, os simplexos, são generalizações de triângulos, ou seja, pontos, segmentos, triângulos, tetraedros, etc. Nessa seção, iremos formalizar esses conceitos.

Um conjunto $\{v_0, \ldots, v_n\}$ de pontos de $\mathbb{R}^m$ é dito **geometricamente independente** se o conjunto de vetores $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ é linearmente independente. Por exemplo, dois pontos distintos em $\mathbb{R}^m$ formam um conjunto geometricamente independente, da mesma forma que três pontos não-colineares, quatro pontos não-coplanares, e assim por diante. O número máximo de pontos geometricamente independentes em $\mathbb{R}^m$ é $m + 1$.

Relembre que um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ é *convexo* se, dados $x, y \in A$, temos $tx + (1 - ty) \in A$, para todo $t \in [0, 1]$. É fácil ver que a interseção arbitrária de conjuntos convexos é convexo. Além disso, **fecho convexo** de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ é a intersecção de todos os conjuntos convexos contendo A.

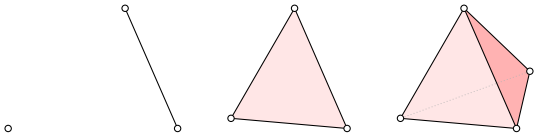
Dado um conjunto $\{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ geometricamente independente, o n-**simplexo** (geométrico) gerado por $v_0, \ldots, v_n$ é o fecho convexo de $\{v_0, \ldots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^m$ que será denotado por $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$.

De maneira equivalente, podemos definir um n-**simplexo** como o menor con-

junto convexo de $\mathbb{R}^m$ contendo $n+1$ pontos $v_0, \ldots, v_n$ que não estão contidos num hiperplano de dimensão menor que n.

Exemplo 8.1 — Simplexos são tetraedros generalizados..

Os exemplos de simplexos de baixa dimensão são bastante familiares: para $n = 1$, o 1-simplexo $[v_0, v_1]$ é o segmento de reta unindo v_0 a v_1; para $n = 2$, o 2-simplexo $[v_0, v_1, v_2]$ é o triângulo com vértices v_0, v_1 e v_2; e para $n = 3$, o 3-simplexo $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ é o tetraedro com vértices v_0 , v_1 , v_2 e v_3. A definição faz sentido mesmo para $n = 0$, o conjunto formado por um ponto v_0 é 0-simplexo gerado por v_0.



◁

Seja $\{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$. São equivalentes:

a. $\{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ é geometricamente independente;

b. se $\sum_{i=0}^{n} s_i v_i = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ e $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n} t_i$, então $s_i = t_i$, para todo $i = 0, \ldots, n$.

Demonstração.

a $\Rightarrow$ **b** Se $\sum_{i=0}^{n} s_i v_i = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ e $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n} t_i$, então

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (s_i - t_i) v_i = \sum_{i=0}^{n} (s_i - t_i) v_i - \left(\sum_{i=0}^{n} (s_i - t_i) \right) v_0 = \sum_{i=1}^{n} (s_i - t_i)(v_i - v_0).$$

Pela independência linear dos vetores $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$, segue que $s_i = t_i$, para todo $i = 1, \cdots, n$. Além disso, como $\sum_{i=0}^{n} s_i = \sum_{i=0}^{n} t_i$, segue que $s_0 = t_0$.

b $\Rightarrow$ **a** Se $\sum_{i=1}^{n} t_i (v_i - v_0) = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} t_i v_i = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right) v_0$. Daí, por hipótese, todos os coeficientes devem ser nulos, i.e., $t_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ é linearmente independentes. ■

A proposição a seguir fornece uma descrição analítica de simplexos.

O n-simplexo gerado por $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ coincide com o conjunto

$$[v_0, v_1, \ldots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \;\middle|\; t_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Além disso, todo ponto $s \in [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ tem uma representação única na forma

$$s = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i,$$

em que $t_i \geq 0$, para todo i, e $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$. Nesse caso, dizemos que $(t_0, \ldots, t_n)$ são as **coordenadas baricêntricas** do ponto s.

Demonstração. Como o conjunto dado é convexo e $[v_0, \ldots, v_n]$ é o menor convexo contendo os pontos $v_0, \ldots, v_n$, basta verificar que todo conjunto convexo contendo os vértices $v_0, \ldots, v_n$ contém os elementos da forma $\sum_{i=0}^{n} t_i v_i$. O que pode ser feito por indução em n. Deixamos os detalhes à cargo do leitor. ∎

Seja $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$ o n-simplexo em $\mathbb{R}^m$ gerado pelos $(n+1)$-pontos $v_0, \ldots, v_n$.

a. Dizemos que $v_0, \ldots, v_n$ são os **vértices** de σ e que n é a **dimensão** de σ.

b. Se todas as coordenadas baricêntricas de um ponto $s \in \sigma$ são positivas, dizemos que s é um **ponto interior** de σ.

c. O conjunto de todos os pontos interiores de σ é convexo e é chamado de **simplexo aberto** e denotado por $\mathring{\sigma}$.

d. Um ponto de σ que não é ponto interior é chamado de **ponto de bordo**. Ou seja, os pontos de bordo são aqueles que possuem ao menos uma coordenada baricêntrica nula.

e. O conjunto formado por todos os pontos de bordo de σ é chamado de **fronteira** ou **bordo** de σ e é denotado por $\partial\sigma$.

Assim, o simplexo aberto é dado por $\mathring{\sigma} = \sigma - \partial\sigma$.

As denominações de ponto interior, simplexo aberto, ponto de bordo, etc, têm significado referentes ao simplexo e não ao espaço euclidiano que o contém.

Pode ser provado que existe um homeomorfismo de um n-simplexo σ para a bola fechada n-dimensional $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$ que leva o bordo $\partial\sigma$ de σ na esfera unitária S^{n-1}.

O n-**simplexo canônico** Δ^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ é o simplexo gerado pelos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ e é descrito por

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ e } t_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\}.$$

Em outros termos, $\Delta^n := [e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}]$.

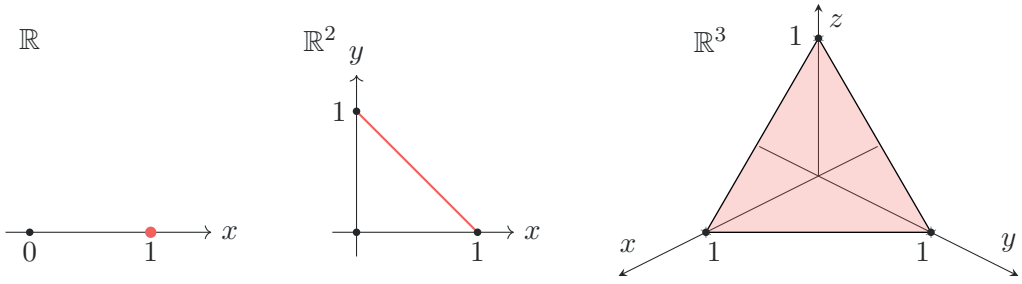


Figura 8.1.: Simplexo padrão Δ^n em $\mathbb{R}^{n+1}$, para $n = 0, 1, 2$.

Seja $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$ o n-simplexo gerado pelos pontos $v_0, \ldots, v_n$. Fixado um subconjunto $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\} \subset \{v_0, \ldots, v_n\}$, em que $0 \leq k \leq n$, o k-simplexo $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ é chamado de **face** de σ. Dizemos também que $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ é uma k-face ou ainda uma face k-dimensional.

Exemplo 8.2 — Face de bordo.

Dado um n-simplexo $[v_0, \ldots, v_n]$, a remoção de um dos $n+1$ vértices dele faz com que o conjunto remanescente de n vértices gere um $(n-1)$-simplexo, que são as faces $(n-1)$-dimensionais de $[v_0, \ldots, v_n]$. Tais faces são chamadas de **faces de bordo**. Um simplexo possui $n+1$ faces $(n-1)$-dimensional, ou faces de bordo. Assim, a i-**ésima face** do simplexo $[v_0, \ldots, v_n]$ é o simplexo $[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n]$, onde o símbolo $\wedge$ sobre v_i significa que o vértice v_i foi deletado da sequência $v_0, \ldots, v_n$. Também dizemos que o $(n-1)$-simplexo $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]$ é a **face oposta ao**

vértice v_i.

◁

Note que a união de todas as faces de um n-simplexo σ corresponde ao bordo de σ. Ou ainda, a união de todas as faces $(n-1)$-dimensionais de σ correspondem ao bordo de σ.

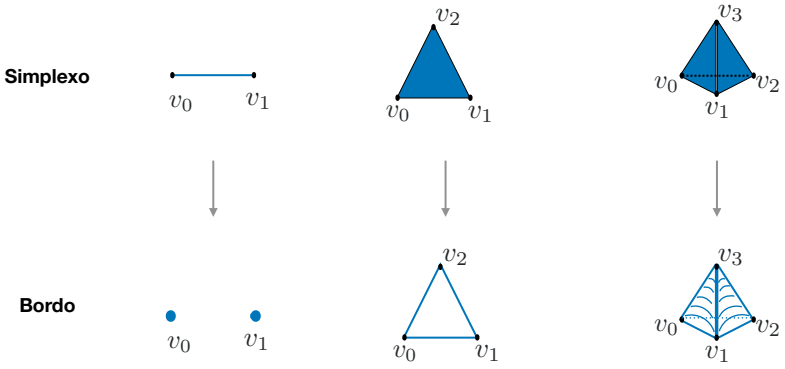


Figura 8.2.: Simplexos e seus bordos, para $n = 0, 1, 2$.

O conjunto vazio $\emptyset$ é considerado uma face de qualquer simplexo. Um 0-simplexo consiste de um conjunto unitário $[v_0]$, o bordo de um 0-simplexo é o conjunto vazio, i.e. $\partial[v_0] = \emptyset$ e o interior de $[v_0]$ é ele próprio, i.e. $\overset{\circ}{[v_0]} = [v_0]$.

Vale ressaltar que um simplexo σ é um conjunto convexo, conexo por caminhos, compacto e fechado. O interior de um simplexo $\mathring{\sigma}$, ou o simplexo aberto, é convexo, conexo por caminhos, aberto e σ é o fecho de $\mathring{\sigma}$.

Orientação

Para efeito de homologia, será conveniente estabelecer uma ordem nos vértices de um simplexo, de modo que em geral, quando falarmos n-simplexos estaremos considerando de fato n-simplexos com uma ordenação pré-fixada de seus vértices.

Dado um n-simplexo σ gerado pelos pontos $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, duas ordenações de seus vértices são equivalentes se diferem uma da outra por uma permutação par. Se $n > 0$, as possíveis ordenações dos vértices de σ são particionadas em duas classes de equivalências. Cada uma delas é chamada de **orientação** de σ. Se $n = 0$, então existe apenas uma classe e, por convenção, uma orientação em um 0-simplexo é a escolha de um sinal $+$ ou $-$.

Um n-**simplexo orientado** é um n-simplexo com uma orientação especificada.

A partir de agora, denotaremos o n-simplexo σ gerado pelos vértices $v_0, \ldots, v_n$ com orientação dada pela ordenação $(v_0, \ldots, v_n)$ por $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$. Este mesmo simplexo munido da orientação oposta é denotado por $-\sigma$. Frequentemente usaremos a notação σ para denotar um simplexo ou um simplexo orientado quando o contexto deixar claro o significado.

Exemplo 8.3.

Na Figura 8.3, apresentamos alguns exemplos de simplexos orientados, em dimensões visíveis, bem como uma ideia geométrica de orientação. É comum pensar na orientação de um 1-simplexo como sendo uma seta sobre ele, por exemplo, o 1-simplexo orientado $[v_0, v_1]$ na Figura 8.3, tem sua orientação representada por uma seta que vai de v_0 para v_1. Uma orientação em um 2-simplexo pode ser representada por uma "seta circular", por exemplo, o 2-simplexo orientado $[v_0, v_1, v_2]$ pode ser representado por uma seta que vai de v_0 para v_1 em seguida para v_2, i.e. "seta circular" no sentido anti-horário. O leitor pode verificar que os 2-simplexos orientados $[v_2, v_0, v_1]$ e $[v_1, v_2, v_0]$ são indicados pela mesma seta no sentido anti-horário. Uma "seta circular" no sentido horário indica o mesmo simplexo geométrico com orientação oposta.

◁

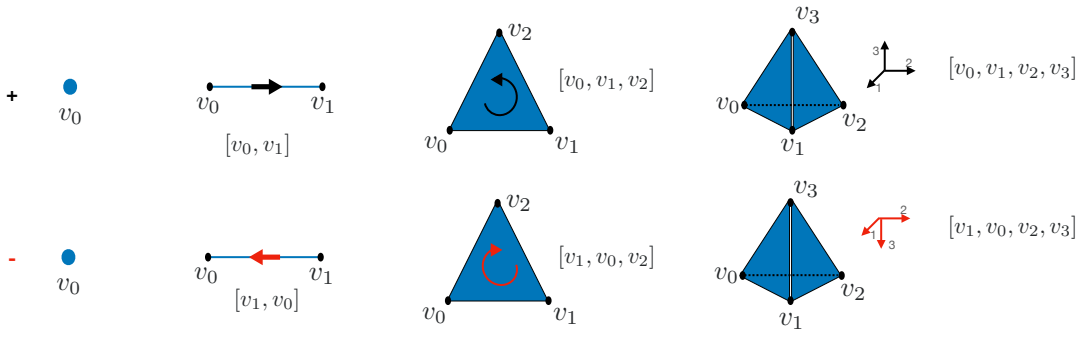


Figura 8.3.: Simplexos orientados; orientações opostas

Estes exemplos mostram que nossa definição de orientação para simplexos concorda com a noção geométrica intuitiva de orientação vinda de geometria analítica.

A ordenação de um n-simplexo induz uma orientação em cada uma de suas faces $(n-1)$-dimensionais. Mais especificamente, dado o simplexo orientado $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$, relembre que a i-face (face oposta ao vértice v_i) é o $(n-1)$-simplexo $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]$. Definimos a **orientação induzida** por σ na i-face de bordo por $\sigma_{(i)} = (-1)^i[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]$.

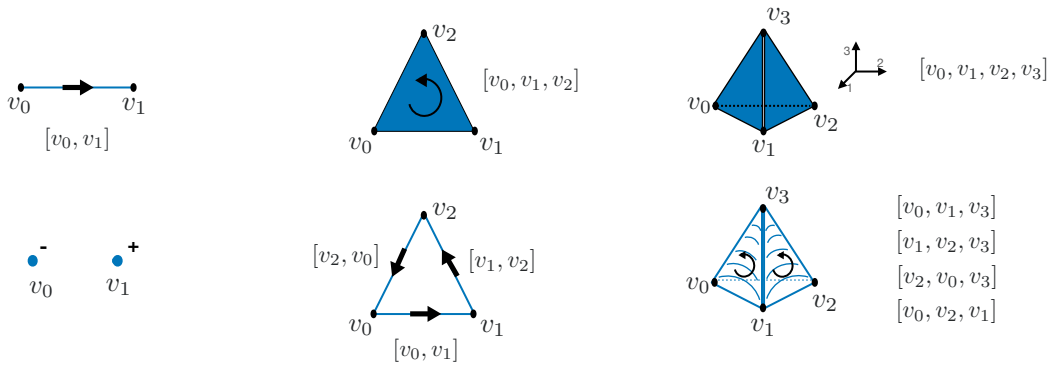


Figura 8.4.: Orientações induzidas nas faces de um simplexo orientado

Quando orientamos um simplexo n-dimensional, suas faces de dimensão $n-1$ herdam as orientações induzidas. No entanto, o mesmo não ocorre com as faces de dimensão $n-2$, como veremos no próximo resultado.

Seja $\sigma = [v_1, \ldots, v_n]$ um n-simplexo orientado. Toda face τ $(n-2)$-dimensional de σ pertence a duas faces de dimensão $n-1$, as quais, com as orientações induzidas por σ, induzem orientações opostas em τ.

Demonstração. Seja u uma face de σ obtida ao deletar os vértices v_i, v_j, com $i < j$. As faces $(n-1)$-dimensionais de σ que contêm u e com as orientações induzidas são:

$$\sigma_{(i)} = (-1)^i[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n] \quad \text{e} \quad \sigma_{(j)} = (-1)^j[v_0, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_n].$$

As orientações que $\sigma_{(i)}$ e $\sigma_{(j)}$ induzem em u são, respectivamente,

$$(\sigma_{(i)})_j = (-1)^{i+j-1}[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_n] \quad \text{e} \quad (\sigma_{(j)})_i = (-1)^{i+j}[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots,$$

que correspondem a orientações oposta em u. ∎

Especificando uma ordenação dos vértices de um simplexo, induzimos um homeomorfismo canônico do n-simplexo canônico Δ^n para um n-simplexo qualquer $[v_0, \ldots, v_n]$, preservando a ordem dos vértices. De fato, $f : \Delta^n \to [v_0, \ldots, v_n]$ dado por

$$(t_0, \ldots, t_1) \mapsto \sum_i t_i v_i$$

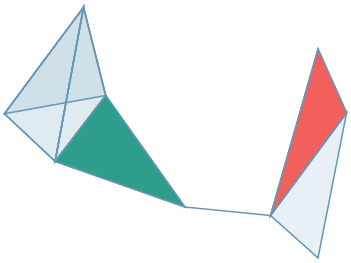
é um homeomorfismo linear.

Complexo Simplicial

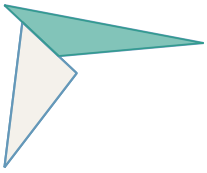
Como vimos, simplexos possuem formas bem determinadas. Para construir espaços com formas mais complicadas, precisamos "combinar" simplexos.

Um **complexo simplicial** (geométrico) K em $\mathbb{R}^N$ consiste numa coleção de simplexos em $\mathbb{R}^N$, possivelmente de diferentes dimensões, satisfazendo as seguintes condições:

1. toda face de um simplexo de K está em K;
2. a interseção de quaisquer dois simplexos em K corresponde a uma face de cada um deles.



(a) Complexo Simplicial



(b) Não é complexo simplicial

Um complexo simplicial K em $\mathbb{R}^N$ é **localmente finito** se todo ponto de $\mathbb{R}^N$ tem uma vizinhança que intercepta apenas um número finito de simplexos de K. Um complexo simplicial K é **finito** se K é uma coleção finita de simplexos.

Claramente, todo complexo simplicial formado por uma coleção finita de simplexos é localmente finito.

O resultado a seguir nos permite verificar mais facilmente quando uma coleção de simplexos constitui um complexo simplicial.

Lema 8.1

Seja K uma coleção de simplexos em $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a condição: toda face de um simplexo de K está em K. Então, as afirmações abaixo são equivalentes:

1. A interseção de quaisquer dois simplexos em K corresponde a uma face de cada um deles.
2. Cada par de simplexos distintos $\sigma_i, \sigma_j \in K$ tem interiores disjuntos.

Demonstração.
1 $\Rightarrow$ **2** Sejam $\sigma_i, \sigma_j \in K$ tais que $\mathring{\sigma_i} \cap \mathring{\sigma_j} \neq \emptyset$. Por hipótese, $\tau = \sigma_i \cap \sigma_j$ é uma face em comum entre σ_i e σ_j. Se $\tau \neq \sigma_i$, então τ não pode conter nenhum ponto do interior de σ_i, logo $\tau = \sigma_i$. Pelo mesmo argumento, $\tau = \sigma_j$. Logo, $\sigma_i = \sigma_j$.
2 $\Rightarrow$ **1** Sejam $\sigma_i, \sigma_j \in K$ tais que $\sigma_i \neq \sigma_j$ e $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$. Por hipótese, os interiores de σ_i e σ_j são disjuntos, logo σ_i e σ_j se intersectam apenas ao longo de suas fronteiras. Se esta interseção não contém nenhum vértice em comum entre σ_i e σ_j, então qualquer ponto p da interseção pertenceria ao interior de duas faces distintas de σ_i e σ_j, mas isso é impossível pois qualquer face de um simplexo de K é um simplexo de K e simplexos distintos tem interiores distintos. Portanto, a interseção $\sigma_i \cap \sigma_j$ contém vértices comuns a esses simplexos. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ os vértices de σ_i que estão também em σ_j, de modo que por definição $[v_1, \ldots, v_n]$ é uma face de σ_i. Afirmamos que

$$[v_1, \ldots, v_n] = \sigma_i \cap \sigma_j.$$

De fato, $[v_1, \ldots, v_n] \subset \sigma_i \cap \sigma_j$, pois a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo e $v_1, \ldots, v_n$ são vértices de σ_i e σ_j. Reciprocamente, seja $p \in \sigma_i \cap \sigma_j$ com $p \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$. Como σ_i e σ_j se intersectam apenas ao longo de suas fronteiras, temos que $p \in \mathring{\tau_i} \cap \mathring{\tau_j}$, onde τ_i é uma face de σ_i e τ_j é uma face de σ_j (note que p não pode estar no interior de uma face de σ_i e ser um vértice de σ_j pois violaria a condição de simplexos distintos terem interiores disjuntos). Segue da hipótese que $\tau_i = \tau_j$. Em particular, os vértices de $\tau_i \subset \sigma_i$ também estão em σ_j, logo eles são elementos do conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$, donde τ_i é uma face de $[v_1, \ldots, v_n]$. Assim, $p \in [v_1, \ldots, v_n]$ e, portanto, $\sigma_i \cap \sigma_j \subset [v_1, \ldots, v_n]$. ∎

Exemplo 8.4.

Seja $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$ um n-simplexo em $\mathbb{R}^N$. A coleção formada por todas as faces de σ forma um complexo simplicial. De fato, faces diferentes têm interiores disjuntos.

◁

Seja K um complexo simplicial. Um **subcomplexo simplicial** L de K é uma subcoleção de simplexos de K que é um complexo simplicial. Dado $\ell \geq 0$, definimos o ℓ**-esqueleto** de K, e denotamos por K^ℓ, o subcomplexo simplicial formado por todos os simplexos de K de dimensão menor ou igual a ℓ. Os pontos do 0-esqueleto K^0 são chamados de **vértices** de K.

Dado um complexo simplicial K, a união de todos os simplexos que formam K é denotada por $|K|$ e é chamada de **polítopo** de K.

Assim, K é uma coleção de simplexos de $\mathbb{R}^N$ e $|K|$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^N$.

Um **poliedro** é o polítopo de um complexo simplicial finito.

Considerando cada simplexo com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}^N$, podemos munir $|K|$ com uma topologia natural da seguinte forma: um subconjunto $A \subseteq |K|$ é fechado se, e somente se, $A \cap \sigma$ é fechado em σ, para todo $\sigma \in K$. É fácil verificar que isso define uma topologia em $|K|$.

Lema 8.2

Seja K um complexo simplicial em $\mathbb{R}^N$.

1. A topologia de $|K|$ é mais fina que a sua topologia como subespaço topológico de $\mathbb{R}^N$.
2. Quando K é um complexo simplicial finito, essas topologias coincidem.

Demonstração.

1. Com efeito, se $A \subseteq |K|$ é fechado na topologia de subespaço, então $A = F \cap |K|$ para algum fechado $F \subseteq \mathbb{R}^N$. Logo, $F \cap \sigma$ é fechado para todo $\sigma \in K$, $F \cap |K| = A$ é fechado na topologia de $|K|$, por definição.

2. De fato, suponha que K é finito e A é fechado em $|K|$. Então, $A \cap \sigma$ é fechado em σ. Como A é a união de finitos conjuntos da forma $A \cap \sigma$, segue que A é fechado em $\mathbb{R}^N$.

■

Propriedades Topológicas. Seja K um complexo simplicial.

1. Se L é um subcomplexo de K, então $|L|$ é um subespaço fechado de $|K|$. Em , particular, se $\sigma \in K$, então σ é um subespaço fechado de $|K|$.

2. Seja X um espaço topológico. Uma aplicação $f : |K| \to X$ é contínua se, e somente se, $f|_\sigma$ é contínua para todo $\sigma \in K$.

3. $|K|$ é um espaço de Hausdorff.

4. Se K é um complexo simplicial finito, então $|K|$ é compacto.

5. K é localmente finito se, e somente se, $|K|$ é localmente compacto.

   A prova dessa proposição pode ser encontrada em (Munkres, 2018).

Complexo Simplicial Abstrato

Observamos que muitas vezes estaremos interessados num complexo simplicial geométrico a menos de homeomorfismo e principalmente estaremos interessados na sua informação combinatória, caso no qual se tende a ignorar o encaixe preciso no espaço euclidiano. Este será o sentido no qual geralmente pensaremos em complexos simpliciais.

Então, de modo mais informal, pensamos num complexo simplicial K como composto de simplexos de várias dimensões, colados ao longo de faces comuns (ver Figura 8.6). A descrição mais eficiente, contendo todas as informações relevantes, vem de rotular os vértices (os 0-simplexos) e então especificar quais con-

juntos de vértices juntos constituem os vértices de simplexos de dimensão superior. Se a coleção de vértices for enumerável, podemos rotulá-los $v_0, v_1, v_2, \ldots$, embora essa suposição não seja estritamente necessária - poderíamos rotular por $\{v_i\}_{i\in I}$ para qualquer conjunto de indexação I. Então, se alguma coleção de vértices $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}\}$ constitui os vértices de um simplexo, podemos rotular esse simplexo como $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}]$.

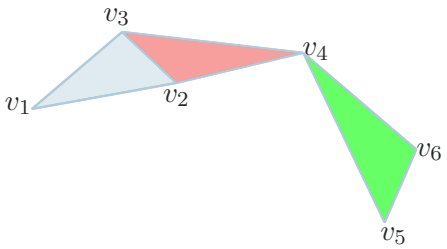


Figura 8.6.: Complexo simplicial K. Observe que $[v_1, v_2, v_3]$ é um simplexo em K, mas $[v_1, v_2, v_5]$ não é.

Exemplo 8.5.

Se K é um complexo simplicial e $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}]$ é um simplexo de K, então qualquer subconjunto de $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\}$ é uma face desse simplexo e, portanto, um simplexo de K.

◁

Uma boa maneira de organizar a informação combinatória envolvida num complexo é considerar o ℓ-esqueleto K^ℓ, $k = 0, 1, \ldots$, de um complexo simplicial de modo que $K^\ell \setminus K^{\ell-1}$ seja o conjunto de todos os ℓ-simplexos de K. Observe que, tendo rotulado nossos vértices de forma que $K^0 = \{v_i\}_{i\in I}$, podemos pensar em cada elemento de K^ℓ como um certo subconjunto de K^0 de cardinalidade no máximo $\ell + 1$. Um subconjunto $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_\ell}\} \subset K^0$ é um *elemento* de $K^\ell \setminus K^{\ell-1}$ precisamente se $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_\ell}]$ é um simplexo ℓ-dimensional de K.

Para descrever um complexo simplicial geométrico dado seu conjunto de vértices, basta saber quais conjuntos de vértices $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_\ell}\}$ correspondem aos simplexos $[v_{i_0}, \ldots, v_{i_\ell}]$ do complexo simplicial. Reduzindo a esta informação (que é puramente combinatória) nos leva à noção de um *complexo simplicial abstrato*.

Um **complexo simplicial abstrato** X consiste num conjunto de "vértices" X^0 juntamente com um conjunto X^k, para cada inteiro k, formado por subconjuntos[1] de X^0 de cardinalidade $k+1$, satisfazendo a seguinte condição: se $j < k$, qualquer subconjunto com $(j+1)$ elementos de X^k é um elemento de X^j.

Cada elemento de X^k é um **k-simplexo abstrato**, e o último requisito da definição apenas garante que toda face de um simplexo abstrato num complexo simplicial abstrato também é um simplexo do complexo simplicial.

Um complexo simplicial abstrato é dito **localmente finito** se cada um de seus vértices pertence a apenas um número finito de simplexos. Nesse texto, estaremos interessados apenas nesse caso.

Exemplo 8.6.

Seja $X^0 = \{1,2,3,4,5,6\}$. A coleção dada por $X = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\},\{2,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{2,3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{4,6\},\{4,5,6\}\}$ é um complexo simplicial abstrato. Nesse caso, temos três simplexos bidimensionais $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$ e $\{4,5,6\}$ que foram colocados por uma aresta e um vértice, como na Figura 8.6.

◁

Assim, um complexo simplicial abstrato tem exatamente a mesma informação combinatória que um complexo simplicial geométrico. Perdemos informações geométricas sobre o tamanho de um simplexo, como ele está inserido no espaço euclidiano, etc., mas conservamos todas as informações necessárias para reconstruir o complexo a menos de homeomorfismo. É claro que, um complexo simplicial geométrico produz um complexo simplicial abstrato. Mas, inversamente, podemos recuperar um complexo simplicial geométrico (a menos de homeomorfismo) a partir de um complexo simplicial abstrato atribuindo a cada elemento de X^0 um ponto distinto e a cada simplexo abstrato $[v_{i_0},\ldots,v_{i_k}]$ um k-simplexo geométrico gerado pelos vértices apropriados e "colando" esses simplexos por meio da topologia quociente. Este processo pode ser realizado de forma concreta geometricamente, escolhendo pontos específicos (e geometricamente independentes) dentro de um espaço euclidiano apropriado, ou, de outro modo, de forma puramente topológica, construindo o espaço topológico como colagens de simplexos padrões representativos dos simplexos do complexo simplicial abstrato.

[1] Não necessariamente todos eles!

Vale a pena notar separadamente o ponto importante de que, assim como para um complexo simplicial geométrico, um simplexo num complexo simplicial abstrato é completamente determinado por sua coleção de vértices.

Triangularização de Variedades

Dado um complexo simplicial K em $\mathbb{R}^n$, consideraremos o espaço $|K|$ com a topologia induzida pela topologia de $\mathbb{R}^n$.

Uma **triangularização** (ou **triangulação**) de um espaço topológico X consiste em um complexo simplicial K e um homeomorfismo $f : |K| \to X$, em que $|K|$ é o polítopo de K. Dizemos que um espaço topológico X é **triangularizável** se existe uma triangulação para X.

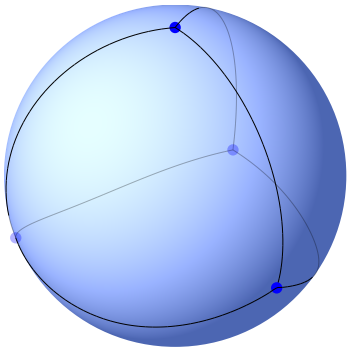


Figura 8.7.: Triangularização da Esfera.

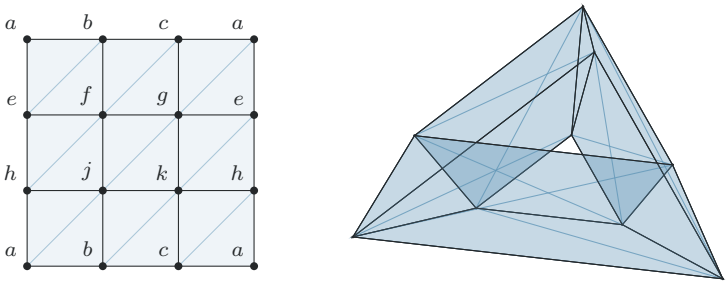


Figura 8.8.: Triangularização do Toro.

Os espaços topológicos não admitem necessariamente uma triangulação e se o fazem, essa triangularização não é necessariamente única.

Mesmo quando restringimos ao caso das variedades topológicas temos que as variedades topológicas de dimensão menor ou igual a 3 são sempre trianguláveis, mas existem variedades não triangularizáveis em todas as dimensões maiores que três. Porém, qualquer variedade suave pode ser triangularizada. Para a demonstração desse fato veja (Munkres, 2016).

Soma conexa de duas variedades triangularizáveis Sejam M_1 e M_2 duas variedades triangularizáveis, então a sua soma conexa é triangularizável pela soma conexa de suas triangularizações, que definimos do seguinte modo.

Sejam K_1 e K_2 dois complexos simpliciais que são triangularizações das variedades M_1 e M_2. Um complexo simplicial L tal que $|L|$ é a triangularização da soma conexa $M_1 \# M_2$ pode ser obtido da seguinte maneira: escolha dois n-simplexos $\sigma_1 \in K_1$ e $\sigma_2 \in K_2$. Seja $L_i = K_i - \text{int}(\sigma_i)$ e seja L obtido tomando a união disjunta de L_1 e L_2 e identificando $\partial\sigma_1$ com $\partial\sigma_2$. Assim, $L = L_1 \cup L_2$ e $L_0 = L_1 \cap L_2$ é isomorfo ao bordo de um n-simplexo. Nesse caso escrevemos $L = K_1 \# K_2$.

8.2. Δ-complexos

Uma estrutura de **Δ-complexo** num espaço topológico X é uma coleção de aplicações

$$\{\sigma_\alpha : \Delta^n \to X\},$$

com $n \geq 0$, dependendo do índice α satisfazendo:

1. a restrição $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ é injetora;
2. cada ponto $x \in X$ é a imagem de exatamente uma restrição $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$;
3. a restrição de σ_α a uma $(n-1)$-face qualquer de Δ^n é uma das aplicações $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$, quando identificamos cada $(n-1)$-face de Δ^n com Δ^{n-1} pelo homeomorfismo linear entre elas que preserva a ordenação dos vértices;
4. um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se, $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ é aberto em Δ^n para todo σ_α.

Dizemos que a aplicação $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ é um n-**simplexo** do Δ-complexo X.

A propriedade 3 faz com que $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ seja um homeomorfismo sobrejetor na sua imagem, logo a imagem é um simplexo aberto em X.

Um Δ-complexo X vem com uma filtração por esqueletos $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^k \subseteq \cdots \subseteq X$, onde o k-esqueleto X^k é a união de todas as imagens de simplexos de dimensão no máximo k.

Seja X um Δ-complexo. Dizemos que:

1. X é k-**dimensional** se $X^k = X$ e $X^{k-1} \neq X$, e X é **infinito dimensional** se tal k não existir;

2. X é do **tipo finito** se, para cada $k \geq 0$, X possui apenas um número finito de k-simplexos;

3. X é **finito** se possuir apenas um número finito de simplexos.

A partir da Definição 8.2, podemos entender X como o espaço quociente de uma coleção de simplexos disjuntos $\{\Delta^n_\alpha\}_\alpha$ tal que, para cada $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$, o espaço quociente é obtido identificando-se cada $(n-1)$-face de Δ^n_α com Δ^{n-1}_β correspondente à restrição σ_β de σ_α na face em questão, como exige a terceira propriedade da definição acima.

Podemos entender um Δ-complexo fazendo a construção de maneira indutiva: começamos com um conjunto discreto de vértices, depois colamos arestas, em seguida triângulos e assim progressivamente, satisfazendo as propriedades especificadas acima, i.e., tomando cuidado com a forma em que as colagens são feitas. Sob um ponto de vista mais combinatório, definimos um Δ-complexo como uma coleção de n-simplexos Δ^n_α variando n junto com uma função associando a cada face do n-simplexo um $(n-1)$-simplexo Δ^{n-1}_β (que satisfaz a propriedade do mapeamento como em 3). Essa identificação é feita através do homeomorfismo linear canônico preservando a ordem dos vértices.

Complexos simpliciais são Δ-complexos que satisfazem algumas restrições adicionais. Primeiro, em um complexos simplicial, é necessário mapear diferentes faces de Δ^n para diferentes simplexos, além disso, não é permitido adicionar dois n-simplexos diferentes com o mesmo conjunto de vértices, de modo que um simplexo em um complexo simplicial é determinado exclusivamente por seu conjunto de vértices (que, pelo primeiro requisito, pode-se mostrar são todos distintos).

Por outro lado um Δ-complexo é uma união de simplexos que são colados apenas colando suas faces da maneira linear "óbvia". Observe, no entanto, que algumas faces de um único simplexo podem ficar coladas umas às outras: a restrição sobre como as colagens acontecem aplicam-se apenas a cada face de Δ^n separadamente. Assim, por exemplo, começando com um único vértice v_0, podemos adicionar uma aresta ℓ cujos vértices de bordo são o único vértice com o qual começamos (isso fornece um círculo). Em seguida, podemos adicionar um triângulo de modo que cada um de seus três lados seja igual à aresta ℓ. (Esse processo fornece um espaço que não pode ser mergulhar em $\mathbb{R}^3$ e é bastante difícil de visualizar!)

Exemplo 8.7.

Sejam $\mathbb{S}^2$ a esfera bidimensional e w_1, w_2, w_3 pontos distintos do equador, como na Figura 8.9. Considere $\sigma_1 : [v_1, v_2, v_3] \to \mathbb{S}^2$ um homeomofismo que mapeia o simplexo $[v_1, v_2, v_3]$ na metade superior da esfera de modo que $[v_i, v_j]$ é mapeado no arco $[w_i, w_j]$ do equador e $\sigma_2 : [v_1, v_2, v_3] \to \mathbb{S}^2$ um homeomofismo que mapeia o simplexo $[v_1, v_2, v_3]$ na metade inferior da esfera mapeando $[v_i, v_j]$ no arco $[w_i, w_j]$ do equador. Essa é uma estrutura de Δ-complexo na esfera. Nesse exemplo, os dois simplexos são colados por três faces, o que não poderia ocorrer num complexo simplicial.

◁

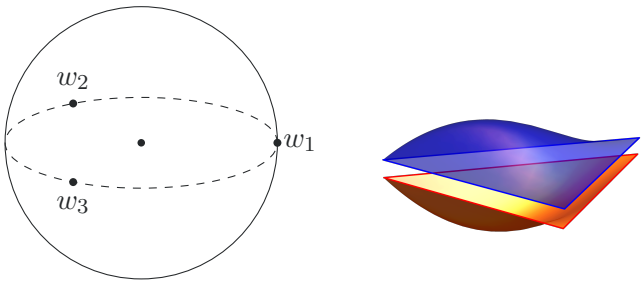
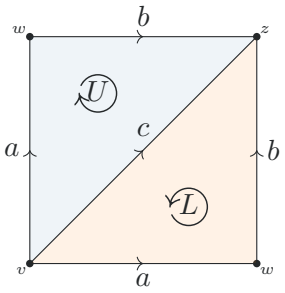


Figura 8.9.: Estrutura de Δ-complexo na esfera S^2

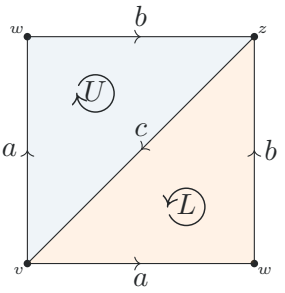
Exemplo 8.8.

A estrutura de Δ-complexo na esfera descrita anteriormente pode ser representada através do diagrama planar apresentado na Figura 8.10a.

◁



(a) Uma estrutura de Δ-complexo na esfera.



(b) Não é uma estrutura de Δ-complexo na esfera, pois as orientações nas arestas não correspondem à ordenação de seus vértices de acordo com a ordem dos vértices das faces.

Figura 8.10.

Exemplo 8.9 — Estrutura de Δ-complexo no toro.

O Toro $\mathbb{T}^2$ admite uma estrutura de Δ-complexo composta por um 0-simplexo v, três 1-simplexos a, b e c, e dois 2-simplexos U e L orientados como no diagrama planar na Figura 8.11.

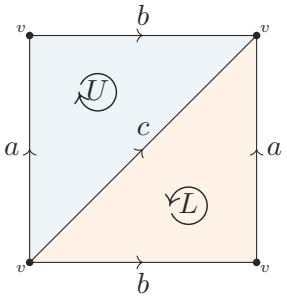


Figura 8.11.: Uma estrutura de Δ-complexo no toro.

◁

Exemplo 8.10 — Estrutura de Δ-complexo no plano projetivo.

O plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ admite uma estrutura de Δ-complexo constituída de dois 0-simplexos v e w, três 1-simplexos a, b e c, e dois 2-simplexos U e L, orientados conforme o diagrama planar na Figura 8.12.

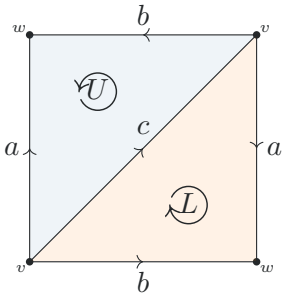


Figura 8.12.: Uma estrutura de Δ-complexo no plano projetivo real.

◁

Exemplo 8.11 — Estrutura de Δ-complexo na garrafa de Klein.

A garrafa de Klein $\mathbb{RP}^2$ admite uma estrutura de Δ-complexo constituída de um 0-simplexos v, três 1-simplexos a, b e c, e dois 2-simplexos U e L, orientados conforme o diagrama planar na Figura 8.13.

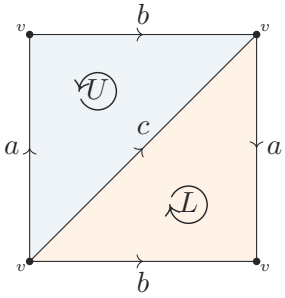


Figura 8.13.: Uma estrutura de Δ-complexo na Garrafa de Klein.

◁

Pode-se mostrar que qualquer Δ-complexo pode ser subdividido para se tornar um complexo simplicial. Em particular, todo Δ-complexo é homeomorfo a um complexo simplicial. Para mais detalhes, veja (Munkres, 2018).

Exercícios

Ex. 90 — Seja K um complexo simplicial e $|K|$ o polítopo de K. Dado um espaço topológico X, mostre que uma função $f : |K| \to X$ é contínua se, e somente se, $f|_{K^n} : |K^n| \to X$ é contínua para todo n.

Ex. 91 — Se K é um complexo simplicial finito, então $|K|$ é compacto. Reciprocamente, se $A \subset |K|$ é compacto, então $A \subseteq |L|$ para algum subcomplexo finito L de K.

Ex. 92 — Sejam X e Y são complexos simpliciais com um ponto marcado.

1. Supondo que o ponto marcado em ambos os complexos é um 0-simplexo construa uma estrutura simplicial em $X \vee Y$
2. Se o ponto marcado em X não é um 0-simplexo, ele está no interior de um n-simplexo. Mostre que é possível dividir esse simplexo de modo que o ponto esteja em um 0-simplexo. Conclua que é sempre possível dar uma estrutura de complexo simplicial a $X \vee Y$

Ex. 93 —

1. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{U_v : v \in V\}$ uma coleção finita de conjuntos abertos cuja união é o espaço X. Defina um complexo simplicial, chamado de **nervo** de $\mathcal{U}$ e denotado $N(\mathcal{U})$, tomando como vértices os elementos de $\mathcal{U}$, e definindo os k-simplexos como os subconjuntos $S = \{U_{v_0}, \ldots, U_{v_k}\}$ de $\mathcal{U}$ tais que a interseção $U_{v_0} \cap \cdots \cap U_{v_k}$ não é vazio. Mostre que, de fato, $N(\mathcal{U})$ é um complexo simplicial.
2. Por sua vez, se K é qualquer complexo simplicial e v é um vértice de K, defina um conjunto aberto $St(v)$ em $|K|$, chamado de **estrela** de v, como a união dos interiores dos simplexos que contêm v, ou seja, $St(v)$ é o complemento em $|K|$ da união desses $|\sigma|$ para o qual σ não contém v. Mostre que os conjuntos abertos $\{St(v) : v \in V\}$ formam uma cobertura aberta

de $|K|$, e que o nervo desta cobertura é o mesmo que K.

Ex. 94 — Que espaço familiar é o quociente do Δ-complexo obtido de um 2-simplexo $[v_0, v_1, v_2]$ obtido pela identificação das arestas $[v_0, v_1]$ e $[v_1, v_2]$, preservando a ordem dos vértices?

Ex. 95 — Construa uma estrutura de Δ-complexo para o toro tridimensional $\mathbb{T}^3$.

Ex. 96 — Prove que se um espaço topológico X admite uma estrutura de Δ-complexo, então X é um espaço de Hausdorff.

Ex. 97 — Mostre que uma garrafa de Klein é o retrato de deformação do Δ-complexo obtido de Δ^3 realizando as identificações de arestas $[v_0, v_1] \sim [v_1, v_3]$ e $[v_0, v_2] \sim [v_2, v_3]$. Encontre outros pares de identificações de arestas que produzem deformação de Δ-complexos retraindo sobre um toro, uma 2-esfera e $\mathbb{RP}^2$.

9 Homologia e Cohomologia Simplicial

Como dito anteriormente, um dos nossos objetivos nesse livro, é estudar invariantes topológico-algébricos dados na forma de números, grupos, anéis, módulos e outras estruturas algébricas que são invariantes sob homeomorfismos. A ideia é que dois espaços topológicos que não possuem o mesmo invariante algébrico não podem ser homeomorfos.

Como vimos na Seção 8.1, simplexos são essencialmente triângulos n-dimensionais (em dimensões visualizáveis, pontos, intervalos, triângulos, tetraedros). Um complexo simplicial consiste numa coleções de simplexos "colados" de forma adequada, assim são polígonos n-dimensionais formados por simplexos (por exemplo, conjuntos de pontos, curvas poligonais, polígonos, poliedros e uniões destes). Espaços topológicos importantes, tais como a esfera, o toro, o plano projetivo e a garrafa de Klein, assim como outras variedades triangularizáveis, podem ser vistos como complexos simpliciais.

Nesse capítulo, começaremos a tratar de uma nova família de invariantes: os grupos de homologia, especificamente discutiremos a Homologia Simplicial de um Δ-complexo. Nosso objetivo principal nesta parte será tratar da Homologia Singular que ao contrário da Homologia Simplicial está bem definida para qualquer espaço topológico. No entanto, a Homologia Simplicial serve como um protótipo para a Homologia Singular, sendo mais fácil de definir e calcular. Em contrapartida, é difícil demonstrar que a Homologia Simplicial é um invariante topológico. Nesse sentindo, mostraremos no Capítulo 10, que essas duas homologias coincidem para Δ-complexos, e em particular, para complexos simpliciais.

9.1. Grupos de Homologia Simplicial

Tradicionalmente, a homologia simplicial é definida para complexos simpliciais, que constituem um caso particular de Δ-complexos em que cada simplexo é unicamente determinado pelo seu conjunto de vértices. Nesse livro, vamos definir homologia simplicial no contexto mais geral de Δ-complexos.

O objetivo agora é definir os grupos de homologia simplicial de um Δ-complexo de X, em que X é um espaço topológico.

Recorde que uma orientação em um n-simplexo σ é a escolha de uma ordenação para seus vértices. A partir de agora, vamos assumir que cada face de σ está munida da orientação dada pela ordenação de seus vértices de acordo com a ordem estabelecida para os vértices de σ.

Seja X um espaço topológico com uma estrutura de Δ-complexo. Uma **n-cadeia simplicial** é uma combinação linear formal com coeficientes em $\mathbb{Z}$ de n-simplexos σ_α^n, ou seja,

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n,$$

em que $\lambda_\alpha \in \mathbb{Z}$. O n-ésimo **grupo de cadeias simpliciais** $C_n^\Delta(X)$ é o grupo livre que consiste em todas as n-cadeias simpliciais. Equivalentemente, $C_n^\Delta(X)$ é o grupo abeliano livre gerado pelos n-simplexos simpliciais $\{\sigma_\alpha^n : \Delta^n \to X\}$. Definimos $C_n^\Delta(X) = 0$, para $n < 0$.

O **homomorfismo de bordo** (também conhecido por **diferencial**)

$$\partial_n : C_n^\Delta(X) \to C_{n-1}^\Delta(X) \,,$$

para $n \geq 1$, é definido na base por

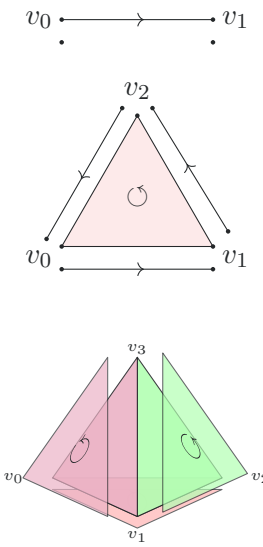
$$\partial_n(\sigma_\alpha^n) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_\alpha^n|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_n]}$$

e estendendo por linearidade a toda n-cadeia simplicial, o que está bem definido pois os grupos de cadeias simpliciais são livres. Para $n \leq 0$, defina $\partial_n = 0$.

É comum omitirmos o subíndice de ∂_n e escrevermos apenas $\partial : C_n^\Delta(X) \to C_{n-1}^\Delta(X)$.

Finalmente, definimos $C_*^\Delta(X)$ como o módulo graduado obtido pela soma direta

$$C_*^\Delta(X) \coloneqq \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} C_p^\Delta(X) \,.$$



$$\partial\sigma = \sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]}$$

$$\partial\sigma = \sigma|_{[v_1,v_2]} - \sigma|_{[v_0,v_2]} + \sigma|_{[v_0,v_1]}$$

$$\partial\sigma = \sigma|_{[v_1,v_2,v_3]} - \sigma|_{[v_0,v_2,v_3]} + \sigma|_{[v_0,v_1,v_3]} - \sigma|_{[v_0,v_1,v_2]}$$

Figura 9.1.: O homomorfismo de bordo avaliado em alguns simplexos.

A importância dos sinais na definição do homomorfismo de bordo vêm do próximo resultado.

Lema 9.1

Dado um Δ-complexo X, o homomorfismo de bordo satisfaz:

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \,,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Basta mostrar que $\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma^n_\alpha) = 0$, para todo elemento da base

de $C_n^\Delta(X)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma_\alpha^n) &= \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_\alpha^n|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_n]}\right)\\ &= \sum_{j<i}(-1)^i(-1)^j\sigma_\alpha^n|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_j},\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_n]}\\ &\quad+\sum_{j>i}(-1)^i(-1)^{j-1}\sigma_\alpha^n|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,\widehat{v_j},\ldots,v_n]}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Veja que os dois últimos somatórios se cancelam, dado que depois de trocar i e j no segundo somatório ele se torna o negativo do primeiro somatório. ■

O Lema 9.1 garante que o par $(C_*^\Delta(X), \partial_*)$ forma um complexo de cadeias no sentindo algébrico, o qual chamamos de **complexo de cadeias simpliciais de** X. A situação algébrica que possuímos agora é uma sequência de homomorfismos entre grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos)

$$\cdots \to C_{n+1}^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta(X) \to \cdots \to C_1^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

com $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ para cada n, e assim temos um complexo de cadeias. Assim, as noções estudadas no Capítulo 7 se aplicam a este complexo de cadeias.

Dado um espaço topológico X com uma estrutura de Δ-complexo:

1. o kernel $Z_n^\Delta(X)$ do operador bordo $\partial_n : C_n^\Delta(X) \to C_{n-1}^\Delta(X)$ i.e.,

   $$Z_n^\Delta(X) \coloneqq \ker \partial_n,$$

   é dito **grupo dos n-ciclos**. Um elemento de $Z_n^\Delta(X)$ é chamado de **n-ciclo** ou ciclo n-dimensional.

2. A imagem $B_n^\Delta(X)$ do operador bordo $\partial_{n+1} : C_{n+1}^\Delta(X) \to C_n^\Delta(X)$, i.e.,

   $$B_n^\Delta(X) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{n+1},$$

   é dito **grupo dos n-bordos**. Um elemento de $B_n^\Delta(X)$ é chamado de **n-bordo** ou bordo n-dimensional.

Veja que quando $n = 0$, toda 0-cadeia é um 0-ciclo, pois por definição $\partial_0 = 0$.

Da mesma forma que observamos para complexos de R-módulos, na Seção 7.4, temos que todo n-bordo é um n-ciclo, pois $\partial_{n-1}\partial_n = 0$, assim

$$0 \subseteq B_n^\Delta(X) \subseteq Z_n^\Delta(X) \subseteq C_n^\Delta(X),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, o módulo quociente $Z_n(A)/B_n(A)$ está bem definido, o que possibilita a definição dos módulos de homologia simplicial.

Dado um espaço topológico X com uma estrutura de Δ-complexo, o **grupo de homologia** $H_n^\Delta(X)$ de dimensão n do Δ-complexo X é definido por

$$H_n^\Delta(X) \coloneqq \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} = \frac{Z_n^\Delta(X)}{B_n^\Delta(X)},$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H_*^\Delta(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n^\Delta(X)$$

é chamada de **homologia simplicial** do Δ-complexo X.

De fato, o grupo de homologia $H_n^\Delta(X)$ é o n-ésimo $\mathbb{Z}$-módulo de homologia do complexo de cadeias $(C_*^\Delta(X), \partial_*)$.

Relembre que os elementos de $H_n^\Delta(X)$ são as *classes de homologia*

$$[z] = z + B_n^\Delta(X) = \{z + d_{n+1}(x) \mid x \in C_{n+1}^\Delta(X)\}$$

dos ciclos $z \in Z_n^\Delta(X)$. Além disso, se z e z' são n-ciclos, temos que $[z] = [z']$ se, e somente se, $z' - z = d_{n+1}(x)$, para algum $x \in C_{n+1}^\Delta(X)$. Nesse caso, dizemos que z e z' são **ciclos homólogos**.

Veja que uma classe de homologia n-dimensional não trivial de X é representada por um n-ciclo que não é bordo de um $(n+1)$-cadeia. Dois n-ciclos representam a mesma classe de homologia se eles diferem por um n-bordo.

Exemplo 9.1 — Grupos de homologia de $\mathbb{S}^1$.

Considere a 1-esfera $\mathbb{S}^1$ com a estrutura de Δ-complexo dada por: um 0-simplexo, denotado por v, e um 1-simplexo, denotado por e e colado a v no dois extremos. Assim, $C_0^\Delta(X) = \mathbb{Z}[v]$ e $C_1^\Delta(X) = \mathbb{Z}[e]$, todos os demais grupos de cadeias simpliciais são nulos. O complexo de cadeias $(C_*^\Delta(X), \partial_*)$ é da forma

$$\ldots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}[e] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[v] \xrightarrow{\partial_0} 0 \,,$$

em que $\partial_1(e) = v - v = 0$. Portanto, todas as diferenciais são triviais, o que implica que os grupos de homologia coincidem com os grupos de cadeias simpliciais, i.e.

$$H_n^\Delta(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases} .$$

◁

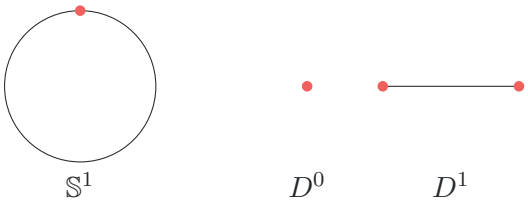


Figura 9.2.: Estrutura de Δ-complexo de $\mathbb{S}^1$

Esse resultado já era esperado, pois pelo Exemplo 7.4, se um complexo de cadeias tem todas as diferencias triviais, então os módulos de homologia coincidem com os módulos de cadeias.

Exemplo 9.2 — Grupos de Homologia de $\mathbb{T}^2$.

Como vimos no Exemplo 8.9, o Toro $\mathbb{T}^2$ admite uma estrutura de Δ-complexo composta por um 0-simplexo v, três 1-simplexos a, b e c, e dois 2-simplexos U e L orientados como no diagrama planar na Figura 9.3.

O complexo de cadeias singulares de $\mathbb{T}^2$ tem a forma:

$$0 \to C_2^\Delta(\mathbb{T}^2) \to C_1^\Delta(\mathbb{T}^2) \to C_0^\Delta(\mathbb{T}^2) \to 0 \,,$$

que é equivalente, em termos de geradores, a

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[U, L] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[a, b, c] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[v] \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

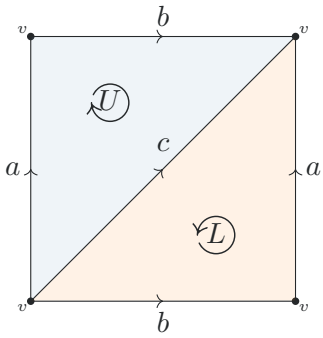


Figura 9.3.: Uma estrutura de Δ-complexo no toro.

Vamos calcular os homomorfismos de bordo. Primeiramente, como o operador ∂_0 é trivial, então $\ker \partial_0 = \mathbb{Z}[v]$. Note que $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$. Portanto, $\operatorname{im} \partial_1 = 0$. Assim,

$$H_0^\Delta(\mathbb{T}^2) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\{0\}} \cong \mathbb{Z}\,.$$

Como o operador ∂_1 é nulo, então $\ker \partial_1 = \mathbb{Z}[a, b, c]$. Consideremos uma mudança de geradores de a, b, c para $\{a,\ b,\ a{+}b{-}c\}$, temos $\ker \partial_1 = \mathbb{Z}[a,\ b,\ a{+}b{-}c]$. Por outro lado, $\partial_2(U) = \partial_2(L) = a + b - c$, ou seja, $\operatorname{im} \partial_2 = \mathbb{Z}[a + b - c]$. Logo,

$$H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{im} \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}[a,\ b,\ a + b - c]}{\mathbb{Z}[a + b - c]} = \mathbb{Z}[a,\ b] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como não há 3-simplexos, temos que $\operatorname{im} \partial_3 = 0$. Para calcular o terceiro grupo de homologia, resta encontrar o núcleo de ∂_2. Veja que:

$$\begin{aligned} \partial_2(\lambda_1 U + \lambda_2 L) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1(a + b - c) + \lambda_2(a + b - c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 U - \lambda_1 L \in \ker \partial_2. \end{aligned}$$

Assim, $\ker \partial_2$ é um grupo cíclico infinito gerado por $U - L$, ou seja,

$$H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{im} \partial_3} = \frac{\mathbb{Z}[U - L]}{\{0\}} \cong \mathbb{Z}.$$

Resumindo,

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases} .$$

◁

Exemplo 9.3 — Grupos de Homologia de $\mathbb{RP}^2$.

Como vimos no Exemplo 8.10, o plano projetivo $\mathbb{RP}^2$ admite uma estrutura de Δ-complexo constituída de dois 0-simplexos v e w, três 1-simplexos a, b e c, e dois 2-simplexos U e L, orientados conforme o diagrama planar na Figura 9.4.

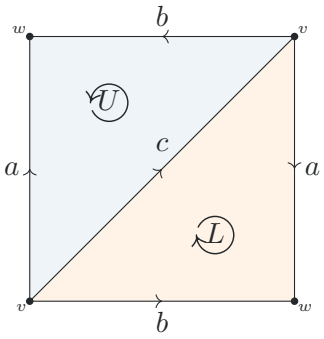


Figura 9.4.: Uma estrutura de Δ-complexo no plano projetivo real.

O complexo de cadeias simpliciais de $\mathbb{RP}^2$ tem a forma:

$$0 \to C_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) \to C_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) \to C_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) \to 0 ,$$

que é equivalente, em termos de geradores, a

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[U, L] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[a, b, c] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[v, w] \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Como o operador ∂_0 é trivial, então $\ker \partial_0 = \mathbb{Z}[v, w]$. Além disso, $\partial_1(a) = \partial_1(b) = w - v$ e $\partial_1(c) = v - v = 0$. Portanto, $\operatorname{im} \partial_1 = \mathbb{Z}[w - v]$. Fazendo a mudança de geradores $\{v, w\}$ para $\{v, w - v\}$, temos

$$H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{im} \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}[v, w - v]}{\mathbb{Z}[w - v]} \cong \mathbb{Z} .$$

Calculando $\ker \partial_1$:

$$\begin{aligned}\partial_1(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1\partial_1(a) + \lambda_2\partial_1(b) + \lambda_3\partial_1(c) = 0\\ &\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)(w - v) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2\\ &\Leftrightarrow \ker\partial_1 = \mathbb{Z}[a-b, c].\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de geradores, $\ker \partial_1 = \mathbb{Z}[a-b+c, c]$. Agora, vamos calcular a imagem de ∂_2. Veja que $\partial_2(U) = -a + b + c$ e $\partial_2(L) = a - b + c$. Por uma mudança de geradores, $\operatorname{im}\partial_2 = \mathbb{Z}[a - b + c, 2c]$. Assim,

$$H_1^{\Delta}(\mathbb{RP}^2) = \frac{\ker\partial_1}{\operatorname{im}\partial_2} = \frac{\mathbb{Z}[a-b+c,\ c]}{\mathbb{Z}[a-b+c,\ 2c]} = \frac{\mathbb{Z}[c]}{\mathbb{Z}[2c]} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Veja que não existem 3-simplexos e $\ker\partial_2 = 0$, pois ∂_2 é injetora. Daí

$$H_2^{\Delta}(\mathbb{RP}^2) = \frac{\ker\partial_2}{\operatorname{im}\partial_3} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Resumido:

$$H_n^{\Delta}(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0\\ \mathbb{Z}_2, & n = 1\\ 0, & n \geq 2\end{cases}.$$

◁

É importante ressaltar que a homologia simplicial associa os grupos (ou módulos) de homologia aos Δ-complexos (estruturas de Δ-complexos em um espaço topológico) e não a um espaço topológico em si.

Claramente, um espaço topológico X pode admitir mais de uma estrutura de Δ-complexo. A questão natural que surge é se os grupos de homologia simplicial $H_n^{\Delta}(X)$ independem da escolha da estrutura de Δ-complexo em X. Em outras palavras, dois Δ-complexos homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos? Mais geralmente, dois Δ-complexos homotopicamente equivalentes possuem grupos de homologia isomorfos?

O caráter rígido inerente a uma estrutura de Δ-complexo, torna o desenvolvimento da Teoria de Homologia Simplicial mais penosa. Para responder tais questões, vamos primeiramente desenvolver uma teoria mais geral, a teoria de Homologia Singular, que tem a vantagem de estar bem definida para qualquer espaço

topológico e não apenas aos que admitem estruturas de Δ-complexos. Por fim, na Seção 10.8 (Teorema 10.8), mostraremos que os grupos de homologia simplicial e os grupos de homologia singular coincidem para o caso de Δ-complexos e a invariância dos grupos de homologia simplicial segue da invariância do grupos de homologia singular.

Certamente tais perguntas podem ser respondidas de forma direta, sem o uso de homologia singular, como feito no Capítulo 2 de (Munkres, 2018).

Invariância. Dado um espaço topológico que admite estrutura de Δ-complexo, a homologia simplicial de X não depende da escolha da estrutura de Δ-complexo.

Essa propriedade é extremamente relevante, pois torna os grupos de homologia simplicial um objeto algébrico capaz de caracterizar espaços triangularizáveis.

Uma estrutura de Δ-complexo X é **conexo por caminho** se para cada par de vértices (i.e., 0-simplexos) em X existe um caminho formado por um número finito de arestas (i.e., 1-simplexos) ligando um vértice ao outro.

Podemos agora descrever o significado topológico do grupo de homologia de dimensão 0, ou seja, $H_0(X)$.

Homologia de dimensão 0**.** Seja X um espaço topológico munido de uma estrutura de Δ-complexo conexo por caminhos. Então, $H_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstração. Note que um 0-simplexo singular em X pode ser visto como um ponto em X. Feita essa identificação, seja $X^0 = \{v_i\}_{i\in I}$ o conjunto dos 0-simplexos de X (i.e., o conjunto dos vértices). Daí, $C_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}^I$. Além disso, $C_0^\Delta(X) = Z_0^\Delta(X)$. Dados os vértices v_{s_0} e v_s, pela conexidade de X, existem 1-simplexos (arestas) σ_k ligando w_{k-1} a w_k com $w_0 = v_{s_0}$ e $w_k = v_s$. Então,

$$\partial_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k) = v_s - v_{s_0}.$$

Portanto, $v_s - v_{s_0} \in B_0^\Delta(X)$, para todo $s \neq s_0$. Agora, defina o **homomorfismo de aumentação** $f : C_0^\Delta(X) = Z_0^\Delta(X) \to \mathbb{Z}$ por

$$f\left(\sum_{i\in J} \lambda_i v_i\right) \coloneqq \sum_{i\in J} \lambda_i,$$

em que J é um subconjunto finito de I. Então,

$$\ker f = \left\{ \sum_{i\in J} \lambda_i v_i \;\middle|\; J \subset I \text{finito } e \sum_{i\in J} \lambda_i = 0 \right\},$$

que é gerado por $v_s - v_{s_0}$, para $s \neq s_0$. Note que esse elementos também geram $B_0^\Delta(X)$, logo $\ker f = B_0^\Delta(X)$. Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo,

$$H_0^\Delta(X) = \frac{Z_0^\Delta(X)}{B_0^\Delta(X)} \cong \operatorname{im} f = \mathbb{Z}.$$

■

Seja X um Δ-complexo finito com $k \geq 1$ componentes conexas, então

$$H_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}^k.$$

Demonstração. Observe que X pode ser escrito como união de k complexos simpliciais finitos e conexos, digamos $X = \cup_{i=1}^k X_i$. É facil ver que $H_n^\Delta(X) = H_n^\Delta(X_1) \oplus \cdots \oplus H_n^\Delta(X_k)$, para todo $n \geq 0$. E o resultado segue pela proposição anterior. ■

Além disso, note que se X é um Δ-complexo finito, então os grupos de homologia simplicial com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são grupos abelianos finitamente gerados.

Seja X um Δ-complexo finito de dimensão m.

1. $H_n^\Delta(X)$ é um grupo abeliano finitamente gerado, para todo $n \in \mathbb{Z}$;
2. $H_n^\Delta(X) = 0$, para todo $n > m$;
3. $H_m^\Delta(X)$ é um grupo abeliano livre, possivelmente trivial.

Demonstração.

1. Com efeito, como X é um Δ-complexo finito, existem finitos n-simplexos, para cada $n \geq 0$, logo $C_n^\Delta(X)$ é um grupo abeliano livre finitamente gerado (com posto igual à quantidade de n-simplexos em X). Como $Z_n^\Delta(X)$ e $B_n^\Delta(X)$ são subgrupos de $C_n^\Delta(X)$ e subgrupos de grupos livres são livres, então $Z_n^\Delta(X)$ e $B_n^\Delta(X)$ também são grupos abelianos livres finitamente gerados. O grupo quociente $H_n^\Delta(X) = \frac{Z_n^\Delta(X)}{B_n^\Delta(X)}$ é um grupo abeliano finitamente gerado, que pode ser ou não livre.
2. É imediato, pois não existem simplexos de dimensão $q > m$.

3. Como $C^{\Delta}_{m+1}(X) = 0$, temos que $B^{\Delta}_m(X) = 0$, logo $H^{\Delta}_m(X) = Z^{\Delta}_n(X)$. Segue que $H^{\Delta}_m(X)$ é livre, pois é subgrupo de um grupo livre.

■

Pelo Teorema da Estrutura de Grupos Abelianos Finitamente Gerados, os grupos $H^{\Delta}_n(X)$ podem ser escritos por uma soma direta

$$H^{\Delta}_n(X) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta_n \text{ cópias}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_\ell}$$

onde $\mathbb{Z}_{p_i}$ são grupos abelianos cíclicos finitos de ordem p_i, chamados os **coeficientes de torção**. O número natural β_n é chamado de **posto** do grupo $H^{\Delta}_n(X)$ ou **número de Betti** e corresponde ao número de geradores livres de $H^{\Delta}_n(X)$, i.e., geradores de ordem infinita. Resumindo, o grupo de homologia simplicial $H^{\Delta}_n(X)$ pode ser representado pela soma direta de um grupo abeliano livre com um grupo finito, $H^{\Delta}_n(X) \cong \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus T$, em que T é o subgrupo de torção.

É interessante ressaltar que, como consequência do Teorema da Estrutura de Grupos Abelianos Finitamente Gerados (Corolário 7.1), o grupo $H^{\Delta}_n(X)$ é unicamente determinado pelo seu posto e pelos coeficientes de torção.

9.2. Homologia Simplicial com Coeficientes e Homologia Relativa

Na seção anterior, baseamos nossa construção de homologia simplicial no anel $\mathbb{Z}$. No entanto, nem sempre essa é a melhor escolha de coeficientes para se trabalhar. Por exemplo, vimos que $H^{\Delta}_2(\mathbb{RP}^2) \cong 0$, o que pode ser considerado indesejável no sentido de que nossa definição atual de homologia não parece reconhecer o plano projetivo como um objeto bidimensional. Essa informação pode ser recuperada considerando coeficientes em um outro anel.

Além disso, como é de costume em matemática, por vezes queremos desconsiderar explicitamente qualquer informação que não seja de interesse para o problema em questão. Por exemplo, podemos querer apenas capturar propriedades topológicas de um Δ-complexo, que ainda não foram estudados por um determinado subcomplexo.

Nessa seção, consideramos um Δ-complexo X juntamente com um subcomplexo $A \subset X$, e vamos introduzir os grupos de homologia simplicial relativa $H_n^\Delta(X, A; R)$ com coeficientes em um anel comutativo R de tal forma que se $A = \emptyset$ e $R = \mathbb{Z}$, recuperamos a definição de homologia simplicial, i.e., $H_n^\Delta(X, A; R) = H_n^\Delta(X)$.

Homologia Simplicial com Coeficientes em R

Na seção anterior, definimos cadeias simpliciais com coeficientes inteiros. Podemos definir, de forma mais geral, cadeias simpliciais com coeficientes em um anel comutativo com unidade.

Seja R um anel comutativo com unidade 1. Uma n-cadeia simplicial com coeficientes em R é uma combinação linear formal

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \sigma_\alpha^n$$

de n-simplexos σ_α^n e coeficientes λ_α em R.

O n-ésimo **módulo de cadeias simplicial** $C_n^\Delta(X; R)$ **com coeficientes em** R é o R-módulo livre com base $\{\sigma_\alpha^n : \Delta^n \to X\}$ que consiste em todas as n-cadeias simpliciais com coeficientes em R. Definimos $C_n^\Delta(X; R) = 0$, para $n < 0$.

Podemos definir o R-homomorfismo de bordo ∂_n nos geradores como na Definição 9.1 e estender para todas as cadeias por linearidade. O Lema 9.1 continua valendo, i.e., $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Assim, $(C_*^\Delta(X; R), \partial_*)$ é um complexo de cadeias, chamado de **complexo de cadeias simpliciais com coeficientes em** R. Os módulos de homologia desse complexo são chamados de módulos de homologia simplicial do Δ-complexo X.

Seja Xum espaço topológico com uma estrutura de Δ-complexo. O n-ésimo **módulo de homologia simplicial** $H_*^\Delta(X; R)$ de dimensão n do Δ-complexo X é definido por

$$H_*^\Delta(X; R) \coloneqq \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H_*^\Delta(X; R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n^\Delta(X; R)$$

é chamada de **homologia simplicial com coeficientes em** R do Δ-complexo X.

O exemplo a seguir, mostra que às vezes a escolha do anel R é relevante para se obter mais informações topológicas sobre o espaço em questão.

Exemplo 9.4.

Retomando o Exemplo 9.3, vimos que a diferencial $\partial_2 : C_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\partial_2} C_1^\Delta(\mathbb{RP}^2)$ tem a forma

$$\mathbb{Z}[U, L] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}[a, b, c] \ .$$

Considerando cadeias simpliciais com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, i.e., se trocamos o anel $\mathbb{Z}$ por $R = \mathbb{Z}_2$, a igualdade $-1 = 1$, implica que a diferencial $\partial_2 : C_2^\Delta(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_2} C_1^\Delta(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}_2)$ tem a forma

$$\mathbb{Z}_2[U, L] \xrightarrow{\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & +1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}_2[a, b, c] \ .$$

Daí, $\operatorname{im} \partial_2$ tem posto igual a 1, e pelo Teorema do Núcleo e Imagem, $\ker \partial_2$ também tem posto 1. Segue que

$$H_2^\Delta(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

◁

Homologia Simplicial Relativa

Primeiramente, vamos definir formalmente o que entendemos por subcomplexo.

Dado um Δ-complexo X, um **sub-Δ-complexo** (ou **subcomplexo**) é um subespaço $A \subseteq X$ dado pela união de simplexos em X. O par (X, A) é chamado de **Δ-par**.

Dado um subcomplexo $A \subseteq X$, o complexo $(C_*^\Delta(A; R), \partial_*^A)$ está bem definido. Agora, podemos proceder como na Seção 7.8, para construir os módulos de homologia simplicial relativa. Mais especificamente, dado (X, A) um Δ-par, considere o módulo quociente

$$C_n^\Delta(X, A; R) := \frac{C_n^\Delta(X; R)}{C_n^\Delta(A; R)}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Note que as n-cadeias de $C_*^\Delta(A; R)$ são triviais em $C_n^\Delta(X, A; R)$ e a diferencial em $C_n^\Delta(X; R)$ satisfaz $\partial_n(C_n^\Delta(A; R)) \subseteq C_{n-1}^\Delta(A; R)$. Portanto,

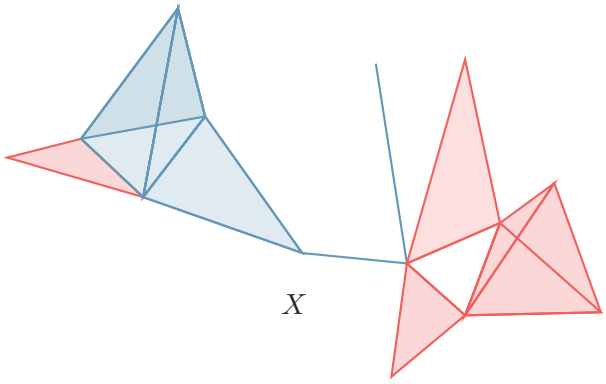


Figura 9.5.: Em vermelho e em azul subcomplexos de X.

temos um homomorfismos de R-módulos

$$\overline{\partial}_n : C_n^\Delta(X, A; R) \to C_{n-1}^\Delta(X, A; R)$$

e que ainda satisfaz $\overline{\partial}_{n-1} \circ \overline{\partial}_n = 0$. Por fim, obtemos um complexo de cadeias $(C_*^\Delta(X, A; R), \overline{\partial}_*)$, o complexo quociente de $(C_*^\Delta(X; R), \partial_*)$ por $(C_*^\Delta(A; R), \partial_*^A)$, chamado de **complexo simplicial relativo com coeficientes em** R.

Cada elementos de $C_n^\Delta(X, A; R)$ é chamado de uma n**-cadeia relativa**. Uma n-cadeia relativa $[a] = a + C_n^\Delta(A; R)$ é dita ser um n**-ciclo relativo** se $\overline{\partial}_n([a]) = 0$, i.e.

$$\partial_n(a) \in C_{n-1}^\Delta(A; R).$$

O R-módulo dos n-ciclos relativos é denotado por $Z_n^\Delta(X, A; R) = \ker \overline{\partial}_n$. Uma n-cadeia relativa $[a] = a + C_n^\Delta(A; R)$ é dita um n**-bordo relativo** se existe $b \in C_{n+1}^\Delta(X; R)$ tal que $\partial_{n+1}([b]) = [a]$, ou seja, $a = d_{n+1}(b) + a'$ para algum $a' \in C_n^\Delta(A; R)$. O R-módulo dos n-bordos é denotado por $B_n^\Delta(X, A; R) = \operatorname{im} \overline{\partial}_{n+1}$.

Seja (X, A) um Δ-par. O n-ésimo módulo de homologia do complexo simplicial $(C_*^\Delta(X, A; R), \overline{\partial})$ é chamado de **módulo de homologia simplicial relativa com coeficientes em** R e é denotado por $H_*^\Delta(X, A; R)$. Em outros termos,

$$H_*^\Delta(X, A; R) := \frac{\ker \overline{\partial}_n}{\operatorname{im} \overline{\partial}_{n+1}} = \frac{Z_n^\Delta(X, A; R)}{B_n^\Delta(X, A; R)}.$$

Dois n-ciclos relativos $[a_1], [a_2]$ são **relativamente homólogos** se $[a_1 - a_2]$ é

um bordo relativo, ou seja, se $a_1 = a_2 + d_{n+1}(b) + c$ para algum $b \in C_n^\Delta(A; R)$ e $b \in C_{n+1}^\Delta(X; R)$.

Grosso modo, a ideia intuitiva por trás da homologia relativa é de que $H_*^\Delta(X, A; R)$ é "homologia de X módulo A". Esta intuição será formalizada posteriormente na Proposição 10.3 que afirma que, sob algumas condições, a homologia relativa de X em relação à A é isomorfa à homologia reduzida do quociente X/A.

Quando $A = \emptyset$, usaremos as notações

$$C_n^\Delta(X; R) \coloneqq C_n^\Delta(X, \emptyset; R) \qquad \text{e} \qquad H_*^\Delta(X, R) \coloneqq H_*^\Delta(X, \emptyset; R),$$

e assim, recuperamos as definições da seção anterior para o caso em que $R = \mathbb{Z}$.

No próximo exemplo, vamos considerar o caso especial de Δ-complexo dado por um complexo simplicial.

Considere o complexo simplicial K na Figura 9.6 cuja realização geométrica é um quadrado. Seja L o subcomplexo cuja realização geométrica é dada pelo bordo do quadrado. Queremos calcular os módulos de homologia relativa $H_*(K, L; R)$.

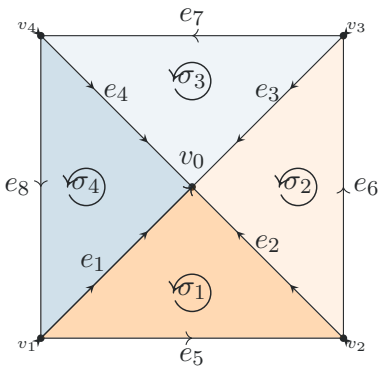


Figura 9.6.: Complexo simplicial

Primeiramente, dada uma 2-cadeia $\sigma = \sum_{i=1}^4 r_i\sigma_i \in C_2^\Delta(K; R)$, em que $r_i \in R$ para $i = 1, \ldots, 4$, seu bordo é dado por

$$\partial_2(\sigma) = (r_4 - r_1)e_1 + (r_1 - r_2)e_2 + (r_2 - r_3)e_3 + (r_3 - r_4)e_4 + \sum_{i=5}^{8} r_{i-4}e_i.$$

Logo, a 2-cadeia σ representa um ciclo relativo de K módulo L se, e somente se, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$. E $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$ representa um gerador para o módulo

dos 2-ciclos relativos $Z_2^\Delta(K, L; R)$. Como não existe 3-simplexo, não há 2-bordos relativos. Assim,

$$H_2^\Delta(K, L; R) \cong R.$$

Agora, dada uma 1-cadeia $c = \sum_{i=1}^{8} r_i e_i \in C_1^\Delta(K; R)$, em que $r_i \in R$ para $i = 1, \ldots, 8$, seu bordo é dado por

$$\begin{aligned}\partial_1(c) = {} & (r_8 - r_1 - r_5)v_1 + (r_5 - r_2 - r_6)v_2 \\ & + (r_6 - r_3 - r_7)v_3 + (r_7 - r_4 - r_8)v_4 + (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)v_0.\end{aligned}$$

Logo, a 1-cadeia c representa um ciclo relativo se, e somente se, $r_1+r_2+r_3+r_4 = 0$. Vamos mostrar que qualquer 1-ciclo relativo é também é um 1-bordo relativo. De fato, tomemos $b = r_2\sigma_1 - r_3\sigma_3 + (r_1 + r_2)\sigma_4 \in C_2^\Delta(K; R)$, veja que

$$\partial_2(b) = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 + r_4e_4 + r_2e_5 - r_3e_7 + (r_1 + r_2)e_8.$$

Assim,

$$c = \partial_2(b) + \underbrace{(r_5 - r_2)e_5 + r_6e_6 + (r_7 + r_3)e_7 + (r_8 - r_1 - r_2)e_8}_{\in C_1^\Delta(L;R)},$$

e c representa um 1-bordo relativo. Portanto,

$$H_1^\Delta(K, L; R) = 0.$$

Por fim, temos que o módulos das 0-cadeias relativas é gerado por v_0, i.e. $C_0^\Delta(K, L; R) = R[v_0]$. Como v_0 é um bordo relativo, pois $v_0 = \partial_1(e_1) + v_1$, segue que

$$H_0^\Delta(K, L; R) = 0.$$

Sejam K um complexo simplicial e L um subcomplexo. Se cada componente conexa por caminhos de K contém pelo menos um vértice de L, então $H_0^\Delta(K, L; R) = 0$.

Demonstração. Dado um vértice $v \in K$, seja σ um caminho formado por arestas orientadas ligando v a um vértice $u \in L$. Então, $\partial_1(\sigma) = v - u$. Segue que v é relativamente homólogo a u. Portanto, todo 0-ciclo é um 0-bordo relativo, i.e. $B_0^\Delta(K, L; R) = Z_0^\Delta(K, L; R)$. Segue que $H_0^\Delta(K, L; R) = 0$. ∎

Seja (X, A) um Δ-par. Os complexos de cadeias $(C_*^\Delta(A; R), \partial_*)$ e $(C_*^\Delta(X; R), \partial_*^A)$ formam uma sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \to C_*^\Delta(A; R) \xrightarrow{i} C_*^\Delta(X; R) \xrightarrow{\pi} C_*^\Delta(X, A; R) \to 0 \,,$$

em que i é a inclusão e π a projeção. Pelo Lema do Zig-Zag (Teorema 7.7), existe uma sequência exata longa em homologia associada.

Seja (X, A) um Δ-par. Então existe uma sequência exata longa

$$\begin{array}{l}
\cdots \\
\qquad \xrightarrow{\partial_{*,n+2}} \\
H_{n+1}^\Delta(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n+1}^\Delta(X; R) \xrightarrow{\pi_*} H_{n+1}^\Delta(X, A; R) \\
\qquad \xrightarrow{\partial_{*,n+1}} \\
H_n^\Delta(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n^\Delta(X; R) \xrightarrow{\pi_*} H_n^\Delta(X, A; R) \\
\qquad \xrightarrow{\partial_{*,n}} \\
H_{n-1}^\Delta(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^\Delta(X; R) \xrightarrow{\pi_*} H_{n-1}^\Delta(X, A; R) \\
\qquad \xrightarrow{\partial_{*,n-1}} \\
\cdots
\end{array}$$

chamada de **sequência exata longa do par** (X, A).

A sequência exata longa captura precisamente até que ponto $H_n^\Delta(A; R)$, $H_n^\Delta(X; R)$ e $H_n^\Delta(X, A; R)$ estão relacionados. Nesse sentindo, temos o seguinte corolário:

A homologia simplicial relativa $H_n^\Delta(X, A; R)$ é trivial para todo n se, e somente se, todas as aplicações $H_n^\Delta(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n^\Delta(X; R)$ são isomorfismos.

Demonstração. Primeiramente, notamos que em uma sequência exata, apenas o R-módulo trivial se encaixa entre dois homomorfismos triviais adjacentes.
($\Rightarrow$) Segue diretamente da exatidão da sequência.
($\Leftarrow$) Se todas as aplicações $H_n^\Delta(A;R) \xrightarrow{i_*} H_n^\Delta(X;R)$ são isomorfismos, então π_n e $\partial_{*,n}$ são triviais. Consequentemente, $H_n^\Delta(X,A;R) = 0$, para todo n. ∎

Considere novamente o complexo simplicial K na Figura 9.6, apresentado no Exemplo 9.2 e seja L o subcomplexo dado pelo bordo do quadrado. Vamos calcular a homologia relativa $H_*(K,L;R)$ utilizando a sequência exata longa do par (K,L). Uma parte dessa sequência é

$$H_2^\Delta(K;R) \to H_2^\Delta(K,L;R) \xrightarrow{\partial_{*,2}} H_1^\Delta(L;R) \to H_1^\Delta(K;R).$$

Como K não possui 2-ciclos, temos $H_2^\Delta(K;R) = 0$. O módulo das 1-cadeias é gerado pelos simplexos

$$e_5 + e_2 - e_1, \quad e_6 + e_3 - e_2, \quad e_7 + e_4 - e_3, \quad e_8 + e_1 - e_4,$$

que são bordos de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, respectivamente. Logo, $H_1^\Delta(K;R) = 0$. Observe ainda que $H_1^\Delta(L;R) \cong R$. Pela exatidão da sequência, segue que $\partial_{*,2}$ é um isomorfismo e $H_2^\Delta(K,L;R) \cong R$, como já era esperado.

Agora, considere a seguinte parte da sequência exata longa do par (K,L):

$$H_1^\Delta(K;R) \to H_1^\Delta(K,L;R) \xrightarrow{\partial_{*,1}} H_0^\Delta(L;R) \to H_0^\Delta(K;R) \to H_0^\Delta(K,L;R).$$

Sabemos que $H_1^\Delta(K;R) = 0$. Como K e L são conexos por caminho, $H_0^\Delta(L;R) \cong H_0^\Delta(K;R) \cong R$. Pela Proposição 9.2, $H_0^\Delta(K,L;R) = 0$. Pela exatidão da sequência, temos $H_1^\Delta(K,L;R) = 0$.

Considere o complexo simplicial K na Figura cuja realização geométrica é um anel. Seja L o subcomplexo cuja realização geométrica é dada pelos bordos do anel. Consideramos os simplexos orientados como na Figura 9.7. Queremos calcular os módulos de homologia relativa $H_*(K,L)$ para o anel $R = \mathbb{Z}$.

Para isso, considere a seguinte parte da sequência exata longa do par (K,L):

$$H_2^\Delta(K) \to H_2^\Delta(K,L) \xrightarrow{\partial_{*,2}} H_1^\Delta(L) \xrightarrow{i_{*,1}} H_1^\Delta(K) \xrightarrow{\pi_{*,1}} H_1^\Delta(K,L) \xrightarrow{\partial_{*,1}} H_0^\Delta(L) \to H_0^\Delta(K)$$

Usando o Corolário 9.1 e a Proposição 9.2, temos que

$$H_0^\Delta(L) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\,, \qquad H_0^\Delta(K) \cong \mathbb{Z} \qquad H_0^\Delta(K,L) = 0.$$

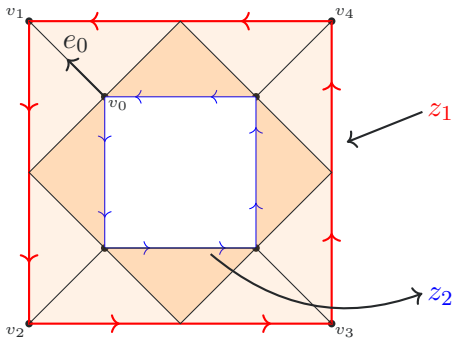


Figura 9.7.: Complexo simplicial cuja realização geométrica é um anel.

Como K não possui 2-ciclos, temos $H_2^\Delta(K) = 0$. Além disso, $H_1^\Delta(K) \cong \mathbb{Z}$ é um grupo cíclico infinito gerado pela classe do 1-ciclo z_1, ou ainda do 1-ciclo z_2, que são ciclos homólogos, veja a Figura 9.7. Por sua vez, $H_1^\Delta(L) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e possui como base as classes dos 1-ciclos z_1 e z_2. Substituindo tais informações na sequência exata longa do par (K, L), temos:

$$0 \to H_2^\Delta(K, L) \xrightarrow{\partial_{*,2}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*,1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_{*,1}} H_1^\Delta(K, L) \xrightarrow{\partial_{*,1}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*,0}} \mathbb{Z} \to 0.$$

Para encontrar os grupos de homologia relativa, vamos analisar os mapas i_*, π_* e ∂_*.

Como $i : L \to K$ é a inclusão, temos que $i_{*,1}[z_1] = [z_1]$ e $i_{*,1}[z_2] = [z_2]$. Mas z_1 e z_2 são ciclos homólogos em K. Segue que $i_{*,1}$ é sobrejetor e seu kernel é dado por $\ker i_{*,1} = \mathbb{Z}[z_1 - z_2] \cong \mathbb{Z}$. Já o homomorfismo de conexão $\partial_{*,2}$ tem kernel trivial e $\operatorname{im} \partial_{*,2} = \mathbb{Z}[z_1 - z_2]$. Assim, $H_2^\Delta(K, L) \cong \mathbb{Z}$ e é gerado pelo 2-ciclo relativo dado pela soma de todos os 2-simplexos em K com orientação anti-horária.

Já $\pi_{*,1} : H_1^\Delta(K) \to H_1^\Delta(K, L)$ é o homomorfismo trivial. Portanto, $\ker \partial_{*,1} = 0$.

Os 0-simplexos v_0 e v_1 formam uma base para $H_0^\Delta(L)$, e o 0-simplexo v_0 é uma base para $H_0^\Delta(K)$. Veja que $i_{*,1}$ mapea os dois geradores em $[v_0]$ e $[v_1]$ no gerador $[v_0]$. Assim, $\ker i_{*,1} = \mathbb{Z}[v_1 - v_0]$. Segue que $H_1^\Delta(K, L) \cong \mathbb{Z}$ e é gerador pelo 1-ciclo relativo e_0.

9.3. Característica de Euler-Poincaré de um Complexo Simplicial

Um dos invariantes topológicos mais elegantes e simples associado a um espaço é a característica de Euler-Poincaré, que é considerada uma das primeiras manifestações dos conceitos da Topologia Algébrica na história da matemática.

A característica de Euler χ foi originalmente definida para poliedros segundo a fórmula

$$\chi = V - E + F,$$

em que V, E e F são respectivamente os números de vértices, arestas e faces do poliedro dado.

Se o poliedro for convexo, ou de modo geral, uma triangulação qualquer de $\mathbb{S}^2$, temos a relação clássica conhecida como fórmula de Euler:

$$V - E + F = 2.$$

Esta fórmula é o ingrediente chave para mostrar que os cinco sólidos platônicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) são os únicos sólidos regulares em $\mathbb{R}^3$.

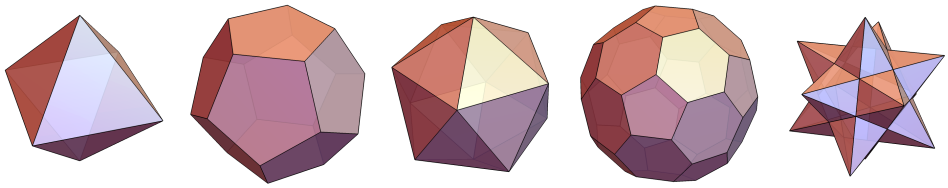


Figura 9.8.: Sólidos cujas faces podem ser divididas de modo a serem uma triangulação da esfera $\mathbb{S}^2$ e para os quais $V - E + F = 2$.

Um de seus primeiros enunciados apareceu em 1537 num trabalho de Francesco Maurolico. Em 1675, Descartes apresentou alguns resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula como consequência imediata. Mas Descartes não parece ter descoberto o fato. A relação reapareceu posteriormente, em 1758, nos trabalhos de Leonhard Euler, que deu nome ao conceito. As demonstrações fornecidas por Euler da relação $V-E+F = 2$ são consideradas incompletas. Os detalhes podem,

no entanto, ser facilmente preenchidos de modo a produzir uma demonstração correta.

Em 1895, Henri Poincaré no trabalho seminal "Analysis Situs", que é considerado o trabalho inaugural da topologia algébrica, demonstrou uma relação entre a característica de Euler e os números de Betti de um espaço, generalizando a característica de Euler para variedades arbitrárias. Este trabalho traz como consequência que o número de Euler é um invariante topológico. É esse o resultado principal que provaremos nesta seção.

Não podemos deixar de destacar a importância do Analysis Situs e seus suplementos. Nestes trabalhos Poincaré introduziu os conceitos de grupo fundamental e homologia simplicial, forneceu uma formulação inicial do Teorema da Dualidade de Poincaré, introduziu, como já observamos, a característica de Euler-Poincaré para variedades e apresentou diversas conjecturas importantes, incluindo a célebre conjectura de Poincaré, provada em 2003. Também foi nesse artigo que foi cunhado o termo "homeomorfismo".

Vale também destacar que nos primórdios da topologia algébrica (entre o final da década de 1890 e o início da década de 1930), os grupos de homologia não haviam sido definidos e as pessoas trabalhavam com os números de Betti e coeficientes de torção. Emmy Noether desempenhou um papel crucial na introdução na linguagem de grupos na Álgebra Homológica e consequentemente na formulação do conceito grupos de homologia.

A seguir, vamos generalizar a fórmula de Euler para um complexo simplicial qualquer.

Dado um complexo simplicial finito K de dimensão m, seja c_p o número de p-simplexos em K. Definimos a **característica de Euler-Poincaré** $\chi(X)$ de K como sendo

$$\chi(K) \coloneqq \sum_{i=0}^{m} (-1)^i c_i \, .$$

Para um complexo simplicial K finito, definimos o i-ésimo **número de Betti** de K por:

$$\beta_i(K) \coloneqq \operatorname{posto}\left(H_i^{\Delta}(K)\right),$$

i.e., o posto do i-ésimo grupo de homologia simplicial de K.

Claramente, se $H_i^\Delta(K)$ é trivial, então $\beta_i(K) = 0$. No entanto, $\beta_i(K) = 0$ não implica que $H_i^\Delta(K)$ é trivial, pois $H_i^\Delta(K)$ pode ser o produto de grupos cíclicos finitos.

O próximo resultado relaciona a característica de Euler-Poincaré de K com os módulos de homologia simplicial de K, mais especificamente com os números de Betti.

Euler-Poincaré. Dado um complexo simplicial finito K de dimensão m, temos que

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \beta_i(K).$$

Ou seja, a característica de Euler-Poincaré de um complexo simplicial K é igual à soma alternada dos números de Betti de K.

O Teorema de Euler-Poincaré mostra que os grupos de homologia simplicial determinam a característica de Euler-Poincaré de um complexo simplicial.

Para provar esse resultado vamos precisar da seguinte proposição:

Dada uma sequência exata curta de grupos abelianos e homomorfismos

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0\,,$$

se F tem posto finito, então

$$\text{posto}\,(F) = \text{posto}\,(E) + \text{posto}\,(G).$$

Em particular, se G é um grupo abeliano com posto finito, e se H é um subgrupo de G, então

$$\text{posto}\,(G) = \text{posto}\,(H) + \text{posto}\,(G/H).$$

Demonstração do Teorema 9.3: Por definição, $C_i^\Delta(K)$ é um grupo abeliano livre gerado pelos i-simplexos, logo $C_i^\Delta(K)$ tem posto igual a c_i. Como $H_i^\Delta(K) = Z_i^\Delta(K)/B_p^\Delta(K)$, pela Proposição 9.3, temos que

$$\text{posto}\,\left(H_i^\Delta(K)\right) = \text{posto}\,\left(Z_i^\Delta(K)\right) - \text{posto}\,\left(B_i^\Delta(K)\right).$$

Considere a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Z_i^\Delta(K) \longrightarrow C_i^\Delta(K) \xrightarrow{\partial_i} B_{i-1}^\Delta(K) \longrightarrow 0,$$

aplicando novamente a Proposição 9.3, temos

$$c_i = \text{posto}\left(C_i^\Delta(K)\right) = \text{posto}\left(Z_i^\Delta(K)\right) + \text{posto}\left(B_{i-1}^\Delta(K)\right).$$

Segue que

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i c_i \\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\left(\text{posto}\left(Z_i^\Delta(K)\right) + \text{posto}\left(B_{i-1}^\Delta(K)\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\text{posto}\left(Z_i^\Delta(K)\right) + \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\text{posto}\left(B_{i-1}^\Delta(K)\right)\end{aligned}$$

Agora, como não existem $(m+1)$-simplexos, $B_m^\Delta(K) = 0$; e por definição $B_{-1}^\Delta(K) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\text{posto}\left(Z_i^\Delta(K)\right) + \sum_{i=0}^{m}(-1)^{i+1}\text{posto}\left(B_i^\Delta(K)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\left(\text{posto}\left(Z_i^\Delta(K)\right) - \text{posto}\left(B_i^\Delta(K)\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\text{posto}\left(H_i^\Delta(K)\right) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\beta_i(K).\end{aligned}$$

□

Provamos um resultado mais geral. Dado um complexo de cadeias limitado

$$0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

em que C_i é um grupo abeliano finitamente gerado de posto c_i, então

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i c_i = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\text{posto}\left(H_i(C_*)\right).$$

Um corolário importante a ser mencionado é que se K e K' são triangulações finitas de um mesmo espaço topológico X, então pela invariância topológica da homologia simplicial, $H_i^\Delta(K) \cong H_i^\Delta(K')$, para todo $i \geq 0$, e a característica de Euler-Poincaré realmente depende apenas da topologia do espaço $X = |K|$, e não

da triangulação K de X. Em outras palavras, a característica de Euler-Poincaré de um espaço triangularizável (ou um poliedro compacto) é um invariante topológico.

Uma consequência da Observação 9.3 é que podemos facilmente generalizar o Teorema de Euler-Poincaré para outras teorias de homologia, e em particular, o resultado permanece válido se considerarmos que X é espaço munido de uma estrutura de Δ-complexo.

A característica de Euler-Poincaré é um dos principais ingredientes na classificação de superfícies compactas S. Nesse caso, $\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2$, onde c_0 é o número de vértices, c_1 o número de arestas e c_2 o número de triângulos em uma triangularização K da superfície S. Além disso, podemos mostrar que uma superfície triangulável K é orientável se, e somente se, $H_2^{\Delta}(K) = \mathbb{Z}$; e K é não orientável se, e somente se, $H_2^{\Delta}(K) = 0$. Assim, a noção de orientabilidade de uma superfície é também capturada pelos grupos de homologia simplicial.

Exemplo 9.5.

Voltando às triangulações da esfera, do toro, do espaço projetivo e da garrafa de Klein, podemos calcular suas características de Euler-Poincaré, obtendo os valores na Tabela 9.1.

Superfície	$\chi(S)$
Esfera	2
Toro	0
Plano projetivo	1
Garrafa de Klein	0

Tabela 9.1.: Característica de Euler-Poincaré.

◁

A caraterística de Euler está relacionada com um outro invariante de superfícies fechadas S, o gênero da superfície. Relembre que se S é uma superfície fechada orientável, então o gênero de S é dado pelo número de toros na decomposição em somas conexas de S. Já no caso não orientável, o gênero é dado pelo número de planos projetivos na decomposição em somas conexas de S. A caraterística

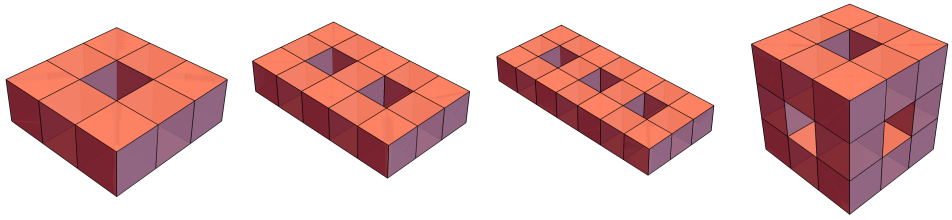


Figura 9.9.: Sólidos para os quais não é válido $V - E + F = 2$.

de Euler de uma superfície fechada S pode ser calculada a partir do gênero da superfície, como estabelecido na proposição a seguir.

Seja S uma superfície fechada. Então

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g\,, & \text{se } S \text{ é orientável} \\ 2 - g\,, & \text{se } S \text{ não é orientável} \end{cases}$$

A demonstração desse resultado é deixada como exercício, veja Exercício 107.

9.4. Cohomologia Simplicial

Conforme vimos no Seção 7.9, podemos considerar o complexo de cocadeias simpliciais associado ao complexo de cadeias simpliciais $(C_*^\Delta(X), \partial_*)$ de um Δ-complexo X.

Seja X um Δ-complexo e R um anel comutativo com unidade. Considere o complexo de cadeias simpliciais $(C_*^\Delta(X;R), \partial_*)$ de X com coeficientes em R

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}^\Delta(X;R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^\Delta(X;R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta(X;R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots\,.$$

Dualizando esse complexo aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$ e observando que os módulos em consideração são livres, obtemos o complexo de cocadeias simpliciais

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C_\Delta^{n-1}(X;R) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C_\Delta^n(X;R) \xrightarrow{\delta^n} C_\Delta^{n+1}(X;R) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots\,,$$

em que $C_\Delta^n(X;R) = \mathrm{Hom}_R(C_n^\Delta(X;R), R)$ e δ^n é o operador adjunto de ∂_{n+1}, i.e., $\delta^n = \mathrm{Hom}_R(\partial_{n+1}, R)$, mais explicitamente

$$\delta^n(f) \coloneqq f \circ \partial_{n+1}$$

para toda cocadeia $f \in C^n_\Delta(X;R)$.

Dado um Δ-complexo X, o complexo de cocadeias $(C^*_\Delta(X;R), \delta^*)$ é chamado de **complexo de codadeias simpliciais** de X com coeficientes em R.

Seja X um Δ-complexo.

1. O kernel $Z^n_\Delta(X;R)$ do operador de cobordo $\delta^n : C^n_\Delta(X;R) \to C^{n+1}_\Delta(X;R)$, é dito **módulo dos n-cociclos simpliciais**. . Um elemento de $Z^n_\Delta(X;R)$ é chamado de n-cociclo simplicial ou cociclo simplicial n-dimensional.

2. A imagem $B^n_\Delta(X;R)$ do operador de cobordo $\delta^{n-1} : C^{n-1}_\Delta(X;R) \to C^n_\Delta(X;R)$ é dito **módulo dos n-cobordos simpliciais**. Um elemento de $B^n(X;R)$ é chamado de n-cobordo simplicial ou cobordo simplicial n-dimensional.

Claramente,

$$0 \subseteq B^n_\Delta(X;R) \subseteq Z^n_\Delta(X;R) \subseteq C^n_\Delta(X;R),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, o módulo quociente $Z^n_\Delta(X;R)/B^n_\Delta(X;R)$ está bem definido.

Seja X um Δ-complexo e R um anel comutativo com unidade. O n-ésimo **módulo de cohomologia simplicial** $H^n_\Delta(X;R)$ com coeficientes em R de X é definido por

$$H^n_\Delta(X;R) \coloneqq \frac{Z^n_\Delta(X;R)}{B^n_\Delta(X;R)} = \frac{\ker \delta^n}{\operatorname{im} \delta^{n-1}},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H^*_\Delta(X;R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n_\Delta(X;R)$$

é chamada de **cohomologia simplicial com coeficientes em** R do Δ-complexo X.

A definição de cohomologia simplicial é totalmente algébrica por natureza. No entanto, é possível estabelecer uma relação geométrica para os módulos de cocadeias e de cohomologia. Na Seção 9.6, abordamos de forma mais profunda a intuição geométrica sobre cohomologia simplicial. Por hora, vejamos o seguinte.

Dado um Δ-complexo X com complexo de cadeias simpliciais $(C^\Delta_*(X;R), \partial^*)$, relembre que o módulo dos n-simplexos simpliciais é o módulo livre com base

$\{\sigma_\alpha : \Delta^n \to X\}_{\alpha\in\Lambda}$, que consiste de todos os n-simplexos simpliciais em X. Assim, um elemento $c \in C_n^\Delta(X;R)$ é representado como combinação linear da base, i.e. $c = \sum_{\alpha\in\Lambda} r_\alpha\sigma_\alpha$, com $r_\alpha \in R$.

Denote por σ_α^* a cocadeia elementar em $C_\Delta^n(X;R)$ cujos valores nos elementos da base são dados por

$$\sigma_\alpha^*(\sigma_\beta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Assim, dado $r \in R$, $r\sigma_\alpha^*$ denota a cocadeia dada por

$$r\sigma_\alpha^*(\sigma_\beta) = \begin{cases} r, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Usando essa notação, podemos representar uma n-cocadeia simplicial $\varphi \in C_\Delta^n(X;R)$ por uma soma formal

$$\varphi = \sum_{\alpha\in\Lambda} r_\alpha\sigma_\alpha^*. \tag{9.1}$$

Note que não há exigência de que tal soma seja finita. De fato, um elemento $\varphi \in C_\Delta^n(X;R)$ é determinado pelo valor r_α que assume em cada elemento da base $\{\sigma_\alpha : \Delta^n \to X\}_{\alpha\in\Lambda}$, e não há nenhuma exigência de que φ não se anule apenas em uma quantidade finita de elementos da base.

A representação em (9.1) é justificada pelo seguinte homomorfismo de R-módulos:

$$C_\Delta^n(X;R) = \mathrm{Hom}_R(C_n^\Delta(X;R),R) = \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_\alpha R[\sigma_\alpha], R\right) \cong \prod_\alpha \mathrm{Hom}_R(R[\sigma_\alpha],R)$$

em que usamos o fato de que $C_n^\Delta(X;R) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R[\sigma_\alpha]$. Por meio desse isomorfismo, uma cocadeia $\varphi \in C_\Delta^n(X;R)$ corresponde ao elemento $(r_\alpha\sigma_\alpha^*)_{\alpha\in\Lambda}$ do produto direto, que pode ser representando pela notação de soma formal como $\sum_{\alpha\in\Lambda} r_\alpha\sigma_\alpha^*$.

Essa notação é conveniente especialmente quando vamos calcular o operador de cobordo, pois como o leitor pode verificar, temos que

$$\delta^n(\varphi) = \sum_\alpha r_\alpha\delta^n(\sigma_\alpha^*).$$

Logo, para calcular $\delta^n(\varphi)$ é suficiente calcular $\delta^n(\sigma_\alpha^*)$ para cada n-simplexo simplicial em X. Mas, veja que

$$\delta^n(\sigma_\alpha^*) = \sum_{\tau_j} \varepsilon_j \tau_j^*, \tag{9.2}$$

em que a soma percorre todos os $(n+1)$-simplexos simpliciais que possuem σ_α como face de bordo e ε_j é igual a ± 1 de acordo com o sinal que aparece em σ_α na expressão $\partial_{n+1}(\tau_j)$, em outras palavras ε_j é igual a 1 se a orientação induzida por τ_j na face σ_α coincide com a orientação fixada nesse simplexo, caso contrário, ε_j é igual a -1.

Nos próximos exemplos, vamos usar essa notação para descrever os módulos de cocadeias de um complexo simplicial.

Exemplo 9.6.

Nesse exemplo, iremos calcular os grupos de cohomologia para o Δ-complexo X apresentado na Figura 9.10.

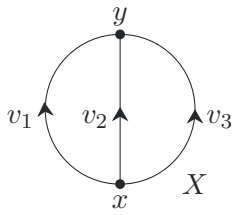


Figura 9.10.: Δ-complexo X.

Nesse caso, temos que $C_0^\Delta(X) = R[x, y]$ e $C_1^\Delta(X) = R[v_1, v_2, v_3]$. Logo, $C_\Delta^0(X) = R[x^*, y^*]$ e $C_\Delta^1(X) = R[v_1^*, v_2^*, v_3^*]$. Agora, vamos calcular o operador de cobordo:

$$(\delta^0 x^*)(v_1) = x^*(\delta_1 v_1) = x^*(y - x) = -1 \qquad (\delta^0 y^*)(v_1) = y^*(\delta_1 v_1) = y^*(y - x) = 1$$
$$(\delta^0 x^*)(v_2) = y^*(\delta_1 v_2) = x^*(y - x) = -1 \qquad (\delta^0 y^*)(v_2) = y^*(\delta_1 v_2) = y^*(y - x) = 1$$
$$(\delta^0 x^*)(v_3) = y^*(\delta_1 v_3) = x^*(y - x) = -1 \qquad (\delta^0 y^*)(v_3) = y^*(\delta_1 v_3) = y^*(y - x) = 1$$
$$\text{e logo} \quad \delta^0 x^* = -(v_1^* + v_2^* + v_3^*) \qquad \text{e } \delta^0 y^* = v_1^* + v_2^* + v_3^*$$

Assim, temos que $\operatorname{im} \delta^0 = R[v_1^* + v_2^* + v_3^*]$ e $\ker \delta^0 = R[y^* + x^*]$. Observando que

$R[v_1^*, v_2^*, v_3^*] = R[v_1^*, v_2^*, v_1^* + v_2^* + v_3^*]$ e que $R[x^*, y^*] = R[x^*, x^* + y^*]$, temos

$$H^1_\Delta(X; R) = \frac{\ker \delta^1}{\operatorname{im} \delta^0} \cong R \times R$$

$$H^0_\Delta(X; R) = \frac{\ker \delta^0}{\operatorname{im} \delta^{-1}} \cong R.$$

◁

Exemplo 9.7.

Considere o complexo simplicial K dado na Figura 9.11 que é composto por quatro vértices $\{v_i\}_{i=0}^3$, cinco 1-simplexos $\{e_i\}_{i=1}^5$ e dois 2-simplexos σ_1, σ_2, orientados como mostrado na Figura.

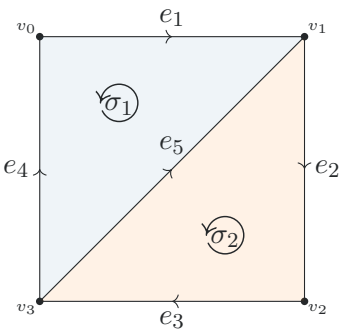


Figura 9.11.: Complexo simplicial

Utilizando a expressão em (??), podemos calcular o operador de cobordo nas cocadeias que formam as bases do módulos $C^*_\Delta(K; R)$:

$$\delta^1(e_5^*) = \sigma_1^* - \sigma_2^*\,, \qquad \delta^1(e_1^*) = -\sigma_1^* = \delta^1(e_4^*)\,, \qquad \delta^1(e_3^*) = -\sigma_2^* = \delta^1(e_2^*)$$

$$\delta^0(v_0^*) = e_4^* - e_1^*\,, \quad \delta^0(v_1^*) = e_1^* + e_5^* - e_2^*\,, \quad \delta^0(v_2^*) = e_2^* - e_3^*\,, \quad \delta^0(v_3^*) = e_3^* - e_4^* - e_5^*\,,$$

Como não exitem 3-simplexos em K, segue que σ_1^* e σ_2^* são 2-cociclos. Daí, $Z^2_\Delta(K; R)$ é gerado por σ_1^* e σ_2^*. Além disso, pelas contas acima, σ_1^* e σ_2^* são 2-cobordos. Logo, o módulo de cohomologia de dimensão 2 é trivial, i.e.

$$H^2_\Delta(K; R) = 0.$$

Uma 0-cocadeia $\varphi = \sum_{i=0}^{3} r_i v_i^*$ é um cociclo se $\delta^0(\varphi) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned}\delta^0(\varphi) &= r_0(e_4^* - e_1^*) + r_1(e_1^* + e_5^* - e_2^*) + r_2(e_2^* - e_3^*) + r_3(e_3^* - e_4^* - e_5^*) \\ &= (r_1 - r_0)e_1^* + (r_2 - r_1)e_2^* + (r_3 - r_2)e_3^* + (r_0 - r_3)e_4^* + (r_1 - r_3)e_5^*.\end{aligned}$$

Logo, uma 0-cocadeia $\varphi = \sum_{i=0}^{3} r_i v_i^*$ é um 0-cociclo se, e somente se, $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$. Segue que $e_1^* + e_2^* + e_3^* + e_4^* + e_5^*$ é um gerador para $Z_\Delta^0(K; R)$. Além disso, $e_1^* + e_2^* + e_3^* + e_4^* + e_5^*$ não é um cobordo, pois não há cocadeias de dimensão -1. Assim,

$$H_\Delta^0(K; R) \cong R.$$

Dada uma 1-cocadeia $\varphi = \sum_{i=1}^{5} r_i e_i^*$, temos que

$$\delta^1(\varphi) = (r_5 - r_1 - r_4)\sigma_1^* + (-r_2 - r_3 - r_5)\sigma_2^*.$$

Assim, φ é um 1-cociclo quando $\delta^0(\varphi) = 0$, o que ocorre se, e somente se, $r_5 = r_1 + r_4$ e $r_5 = -r_2 - r_3$. Por outro lado, todo 1-cociclo é um cobordo, já que $r_4 v_0^* + r_5 v_1^* - r_3 v_2^*$ tem φ como cobordo. Assim,

$$H_\Delta^1(K; R) = 0.$$

◁

9.5. Cohomologia Simplicial Relativa

Assim como a homologia simplicial, também existe uma versão de homologia simplicial relativa para complexos de cocadeias.

Sejam X um Δ-complexo, L um subcomplexo de X e R um anel comutativo com unidade. Considere o complexo de cadeias simpliciais relativas $(C_*^\Delta(X, L; R), \partial_*)$ com coeficientes em R

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}^\Delta(X, L; R) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^\Delta(X, L; R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta(X, L; R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots,$$

em que $C_n^\Delta(X, L; R) = C_n^\Delta(X; R)/C_n^\Delta(L; R)$. Dualizamos esse complexo aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$, obtendo assim o complexo de cocadeias simpliciais

relativas

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C_\Delta^{n-1}(X, L; R) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C_\Delta^n(X, L; R) \xrightarrow{\delta^n} C_\Delta^{n+1}(X, L; R) \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots ,$$

em que $C_\Delta^n(X, L; R) = \mathrm{Hom}_R(C_n^\Delta(X, L; R), R)$ e δ^n é o operador adjunto de ∂_{n+1}, i.e., $\delta^n = \mathrm{Hom}_R(\partial_{n+1}, R)$, mais explicitamente

$$\delta^n(f) = f \circ \partial_{n+1},$$

para toda cocadeia $f \in C_\Delta^n(X, L; R)$.

O n-ésimo módulo de cohomologia do complexo $(C_\Delta^*(X, L; R), \delta^*)$ é chamado de n-ésimo **módulo de cohomologia simplicial relativa do par** (X, L).

Agora, para obtermos uma versão do Teorema 7.9, i.e., uma sequência exata longa em cohomologia, podemos dualizar a sequência exata curta de complexos de cadeias:

$$0 \to C_*^\Delta(L; R) \xrightarrow{i} C_*^\Delta(X; R) \xrightarrow{j} C_n^\Delta(X, L; R) \to 0$$

aplicando o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$, obtemos a sequência de complexos de cocadeias simpliciais

$$0 \to C_\Delta^*(X, L; R) \xrightarrow{j^T} C_*^\Delta(X; R) \xrightarrow{i^T} C_n^\Delta(L; R) \to 0 ,$$

em que i^T e j^T denotam os morfismos duais, i.e., $i^T = \mathrm{Hom}_R(i, R)$ e $j^T = \mathrm{Hom}_R(j, R)$. Como $C_n^\Delta(X, L; R)$ é um módulo livre para todo $n \in \mathbb{Z}$, essa sequência é exata. Pelo Teorema 7.9, existe uma sequência exata longa em cohomologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{*,n-1}} H_\Delta^{n-2}(X, L; R) \xrightarrow{j^*} H_\Delta^{n-1}(X; R) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{n-1}(L; R) \xrightarrow{\delta^{*,n-1}} H_\Delta^n(X, L; R) \xrightarrow{j^*} H_\Delta^n(X; R) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^n(X, L; R) \xrightarrow{\delta^{*,n}} H_\Delta^{n+1}(X, L; R) \xrightarrow{j^*} H_\Delta^{n+1}(X; R) \xrightarrow{i^*} H_\Delta^{n+1}(L; R) \xrightarrow{\delta^{*,n+1}} \cdots$$

Exemplo 9.8.

Seja M a faixa de Möbius e ∂M sua fronteira. Podemos considere uma estrutura de Δ-complexo em M como ilustrados na Figura 9.12. Nesse exemplo, vamos calcular os grupos de cohomologia do Δ-par $(M, \partial M)$ e de M com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

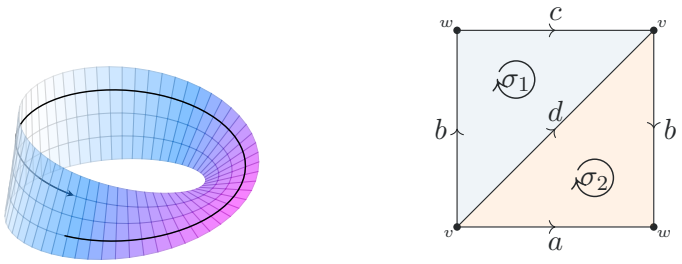


Figura 9.12.: Faixa de Möbius e uma estrutura de Δ-complexo

Usaremos a notação estabelecida em (9.1).

Primeiramente, veja que as 2-cocadeias σ_1^* e σ_2^* são trivialmente 2-cociclos, pois não há 3-simplexos em M. Logo, σ_1^* e σ_2^* formam uma base para $Z^2_\Delta(M, \partial M)$, o grupos dos 2-cociclos relativos. Já as 1-cocadeias b^* e d^* formam uma base para $C^1_\Delta(M, \partial M)$, o grupo das 1-cocadeias relativas, pois os outros 1-simplexos fazem parte do bordo de M. Aplicando o operador de cobordo nos gerados de $C^1_\Delta(M, \partial M)$, temos

$$\delta^1(b) = \sigma_1^* + \sigma_2^* \qquad \text{e} \qquad \delta^1(d) = \sigma_2^* - \sigma_2^*.$$

Assim,

$$H^2_\Delta(M, \partial M) = \frac{Z^2_\Delta(M, \partial M)}{B^2_\Delta(M, \partial M)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_1^*, \sigma_2^*]}{\mathbb{Z}[\sigma_1^* + \sigma_2^*, \sigma_2^* - \sigma_2^*]} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_2^*, \sigma_2^* - \sigma_1^*]}{\mathbb{Z}[2\sigma_2^*, \sigma_2^* - \sigma_2^*]} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Além disso, segue que não existem 1-cociclos relativos e $Z^1_\Delta(M, \partial M) = 0$. Logo,

$$H^1_\Delta(M, \partial M) = 0.$$

O grupo das 0-cocadeias é gerado por v e w. Aplicando o operador de cobordo em tais geradores, temos

$$\delta^0(v^*) = -2b^* - a^* + c^* \qquad \text{e} \qquad \delta^0(w^*) = 2b^* + a^* - c^*.$$

Assim, $Z^0_\Delta(M, \partial M)$ é gerado por $v^* - w^*$, logo

$$H^0_\Delta(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}.$$

Agora, para calcular os grupos de cohomologia da faixa de Möbius M, vamos analisar a sequência longa exata do par $(M, \partial M)$:

$$H^1_\Delta(M, \partial M) \to H^1_\Delta(M) \to H^1_\Delta(\partial M) \xrightarrow{\delta^{*,1}} H^2_\Delta(M, \partial M) \to H^2_\Delta(M) \to H^2_\Delta(\partial M).$$

Como ∂M é um círculo, é fácil ver que

$$H^n_\Delta(\partial M) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1, 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Por essa observação e pelos cálculos anteriores, a sequência longa exata do par $(M, \partial M)$ é dada por

$$0 \to H^1_\Delta(M) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^{*,1}} \mathbb{Z}_2 \to H^2_\Delta(M) \to 0.$$

Um gerador para $H^1_\Delta(\partial M)$ é a^*. Como $\delta^1(a^*) = -\sigma_2^*$, segue que $\delta^{*,1}$ é sobrejetor. Portanto, $H^2_\Delta(M) = 0$ e $H^1_\Delta(M) \cong \mathbb{Z}$.

◁

9.6. Intuições sobre Cohomologia Simplicial

Seja X um Δ-complexo e R um anel comutativo com unidade. O grupo $C_p(X; R)$ de p-cadeias é um módulo abeliano livre com um conjunto de geradores obtido orientando os p-simplexos de X arbitrariamente e usando as cadeias elementares correspondentes como base.

Seja $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in J}$ esta coleção de simplexos orientados. Os elementos de $C_p(X; R)$ são representados como combinações lineares finitas $\sum r_\alpha \sigma_\alpha$ das cadeias elementares σ_α.

Um elemento φ^p de $C^p(X; R) = \mathrm{Hom}\,(C_p(X; R), R)$ é determinado por seu valor g_α em cada simplexo básico σ_α, e esses valores podem ser atribuídos arbitrariamente. Não há, no entanto, nenhuma exigência de que φ^p se anulem em todos, exceto um número finito, de σ_α's.

Suponha que σ_α^* represente a cocadeia elementar, com coeficientes em R, cujo valor é 1 no elemento σ_α e 0 em todos os outros elementos base. Dado $g_\alpha \in R$, denotamos por $g_\alpha\sigma_\alpha^*$ a cocadeia cujo valor é g_α em σ_α e é 0 em todos os outros elementos de base. Usando esta notação, frequentemente representamos φ^p pela soma formal (possivelmente infinita)

$$\varphi^p = \sum g_a \sigma_\alpha^*.$$

Nessa base, o operador de cobordo δ pode ser escrito como

$$\delta\varphi^p = \sum g_\alpha \left(\delta\sigma_\alpha^*\right).$$

O conjunto dos simplexos σ para os quais $\varphi^p(\sigma) \neq 0$ é dito **suporte da cocadeia**. Como já observamos esse suporte não precisa ser finito, portanto, não precisa ser compacto, mas para desenvolvermos a intuição geométrica, trabalharemos nos casos em que isso ocorre. No caso em que o suporte de φ^p é compacto o mesmo ocorre com $\delta\varphi^p$.

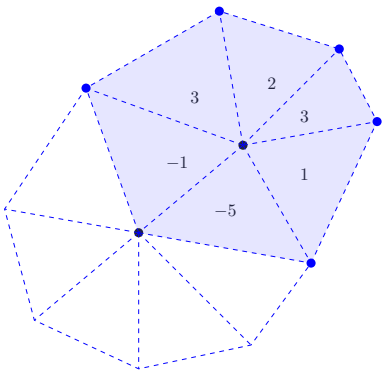


Figura 9.13.: Suporte de uma cocadeia.

Caso unidimensional: Começaremos interpretando primeiramente o caso mais simples no qual X é um Δ-complexo unidimensional, ou seja, um grafo orientado.

Para um anel R, o R-módulo das 0-cocadeias simplicias $C^0(X;R)$ é exatamente o conjunto de todas as funções dos vértices de X a R. Da mesma forma, o R-módulo das 1-cocadeias simplicias $C^1(X;R)$ é o conjunto de todas as funções atribuindo um elemento de R a cada aresta de X.

O homomorfismo de cobordo $\delta : C^0(X;R) \to C^1(X;R)$ envia $\varphi \in C^0(X;R)$ para a função $\delta\varphi \in C^1(X;R)$ cujo valor em um 1-simplexo orientado $[v_i, v_j]$ é a diferença $\varphi(v_j) - \varphi(v_i)$.

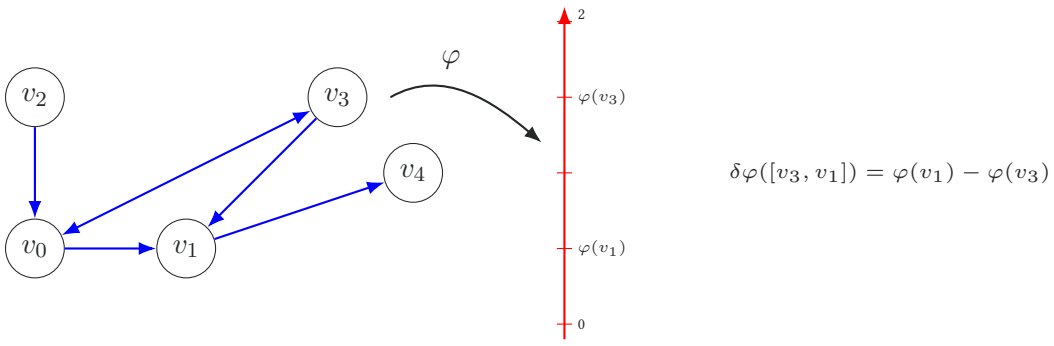


Figura 9.14.: Grafo orientado X destacando $\varphi \in C^0(X;R)$.

Podemos pensar na função φ como a "altura" dos vértices e, nesse caso, $\delta\varphi$ mede a mudança de altura entre o ponto inicial e o ponto final de uma aresta.

Para o caso unidimensional, o complexo de cocadeias simpliciais é da forma

$$0 \longrightarrow C^0(X;R) \xrightarrow{\delta} C^1(X;R) \longrightarrow 0$$

e os grupos de homologia são dados por

$$H^0(X;R) = \ker\delta \subseteq C^0(X;R) \quad \text{e} \quad H^1(X;R) = C^1(X;R)/\operatorname{im}\delta.$$

Podemos descrever o grupo $H^0(X;R)$ da seguinte forma. Uma função $\varphi \in C^0(X;R)$ satisfaz $\delta\varphi = 0$ se, e somente se, φ assume o mesmo valor em ambas as extremidades de cada aresta de X. Isso equivale a dizer que φ é constante em cada componente conexa por caminho de X. Então $H^0(X;R)$ é o grupo de todas as funções do conjunto de componentes de X a R. Ou seja, é um produto direto de cópias de R, uma para cada componente de X.

O grupo de cohomologia $H^1(X;R) = C^1(X;R)/\operatorname{im}\delta$ será trivial se a equação $\delta\varphi = \psi$ possuir uma solução $\varphi \in C^0(X;R)$ para cada $\psi \in C^1(X;R)$. Resolver esta equação significa decidir se dada uma especificação de variação de altura ψ em cada aresta de X determina uma função (altura) $\varphi \in C^0(X;R)$. Esse problema

é análogo ao problema de encontrar uma função com uma derivada especificada, com o operador de diferença δ desempenhando o papel de diferenciação. Como no cálculo, se existe uma solução de $\delta\varphi = \psi$, ela será única a menos da soma um elemento do kernel de δ, ou seja, uma função que é constante em cada componente de X.

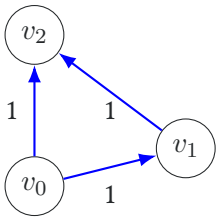
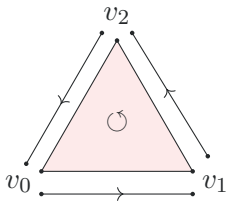


Figura 9.15.: Não existe uma função altura φ compatível com as variações de altura ψ dadas no grafo. Assim, ψ não é cobordo.

Caso bidimensional: Seja X um Δ-complexo bidimensional. Como no caso anterior, os módulos de cocadeias simpliciais $C^0(X;R)$ e $C^1(X;R)$ são dados, respectivamente, pelos conjuntos de funções dos vértices e das arestas de X para o anel R. Já o módulo das 2-cocadeias simpliciais $C^2(X;R)$ é o conjunto das funções dos 2-simplexos de X a R. O homomorfismo de cobordo $\delta : C^1(X;R) \to C^2(X;R)$ é definido por $\delta\psi\left([v_0,v_1,v_2]\right) = \psi\left([v_0,v_1]\right) - \psi\left([v_0,v_2]\right) + \psi\left([v_1,v_2]\right)$, uma soma com sinal dos valores de ψ nas três arestas no bordo de $[v_0,v_1,v_2]$, (assim como $\delta\varphi\left([v_0,v_1]\right)$ para $\varphi \in C^0(X;R)$ é uma soma com sinal dos valores de φ no bordo de $[v_0,v_1]$).



$$\delta\psi[v_0,v_1,v_2] = \psi[v_1,v_2] - \psi[v_0,v_2] + \psi[v_0,v_1]$$

O morfismo de cobordo $\delta : C^1(X;R) \to C^2(X;R)$ pode ser visto de vários pontos de vista diferentes. Talvez o mais simples seja a observação de que $\delta\psi = 0$ se, e somente se, ψ satisfaz a propriedade de aditividade

$$\psi\left([v_0,v_2]\right) = \psi\left([v_0,v_1]\right) + \psi\left([v_1,v_2]\right),$$

na qual a aresta $[v_0, v_2]$ pode ser vista como a soma das arestas $[v_0, v_1]$ e $[v_1, v_2]$. Assim, $\delta\psi$ mede o desvio de ψ de ser uma função aditiva.

Podemos fornecer uma interpretação geométrica da condição $\delta\psi = 0$ quando X é uma superfície e o anel R é $\mathbb{Z}_2$. Nesse caso, a condição $\delta\psi = 0$ significa que o número de vezes que ψ assume o valor 1 nas bordas de cada 2-simplexo é par, logo é 0 ou 2. Um 1-cociclo, portanto, se parece com uma cerca de estacas e podemos desenhar curvas fechadas de modo que a cada aresta seja atribuído o valor 1 se ela cruzar a curva. Vale ressaltar que como ψ assume o valor 1 em duas arestas estas cercas se estendem até se fecharem ou encontrarem uma borda. Uma 1-cadeia é, portanto, levada para a paridade do número de vezes que cruza essa curva. Resumindo, isso significa que podemos associar a cada ψ uma coleção C_ψ de curvas disjuntas em X cruzando as arestas transversalmente, tal que o número de interseções de C_ψ com cada aresta é igual ao valor de ψ nessa aresta. Se $\psi = \delta\varphi$ para algum φ, então as curvas de C_ψ dividem X em duas regiões X_0 e X_1 onde o subscrito indica o valor de φ em todos os vértices da região. Veja a Figura 9.16.

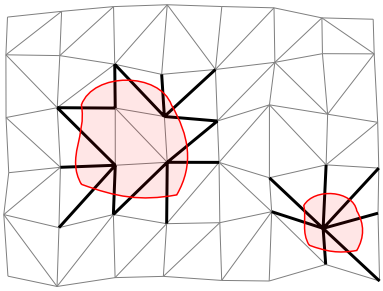


Figura 9.16.: Um 1-cociclo com as curvas C_ψ. Em vermelho a região X_1

Cohomologia do Anel Circular.

Para ter uma ideia melhor da cohomologia, vamos considerar a triangulação do anel circular A apresentado na Figura 9.17 e calcular os grupos de cohomologia desse espaço. A 0-cocadeia que leva cada vértice para 1 é um 0-cociclo porque cada aresta tem exatamente dois vértices, o que implica que o cobordo dessa 0-cocadeia é o homomorfismo zero. Este é o único 0-cociclo não trivial e, como por razões dimensionais não existem 0-cobordos não triviais, isso implica que $H_0(A; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Por outro lado, ao consideramos uma 1-cocadeia $\psi : C_1(A; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, seu

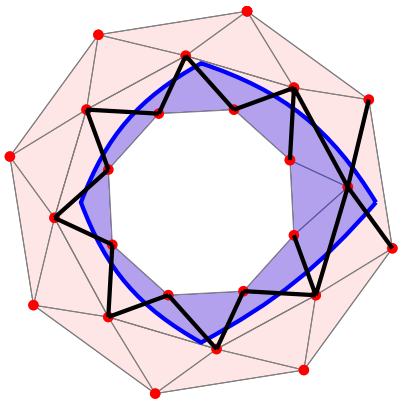


Figura 9.17.: Anel circular. O 1-cociclo é desenhado destacando as arestas nas quais vale 1 (em projetado). Todos eles cruzam a curva fechada "dual" em azul. O 1-cociclo é um 1-cobordo porque é o cobordo da 0-cocadeia que vale 1 para os vértice que estão dentro da curva fechada e 0 caso contrário.

cobordo é a 2-cadeia $\delta\psi : C_2(A;\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ que atribui a cada triângulo o valor 1 se for a coface de um número ímpar de arestas que são levadas a 1 por ψ. Portanto, ψ é um 1-cociclo se todo triângulo é incidente a um número par de arestas que é levado no 1. Observamos novamente que um 1-cociclo, portanto, se parece com uma cerca de estacas, como apresentado na Figura 9.17.

Podemos desenhar uma curva fechada de modo que a cada aresta seja atribuído o valor 1 se ela cruzar a curva. Uma 1-cadeia é, portanto, levada para a paridade do número de vezes que cruza essa curva. Se a 1-cadeia é um 1-ciclo, esse número é necessariamente par. O 1-cociclo na Figura 9.17 também é um 1-cobordo porque é o cobordo da 0-cocadeia que é a função que vale 1 nos vértices em uma das componentes delimitada pela curva fechada e 0 na outra componente.

Um 1-cociclo que não é a imagem de um 0-cocadeia é uma cerca que começa com uma borda externa e termina com uma borda interna como na Figura 9.18.

Neste caso, a equação $\psi = \delta\varphi$ obviamente não tem solução, embora $\delta\psi = 0$ pois o 1-cociclo não é um 1-cobordo porque como em cada aresta do cociclo o valor é 1 e logo o valor nos respectivos vértices devem ser 0 e 1. Logo deveríamos ter uma função que vale 0 ou 1 em cada lado da curva em azul mas essa curva não divide o anel circular em duas componentes X_0 e X_1.

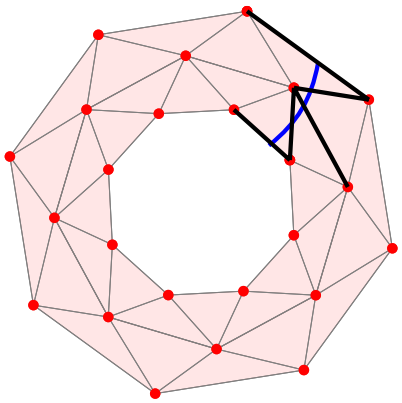


Figura 9.18.: Anel circular. O 1-cociclo é desenhado destacando as arestas nas quais vale 1 (em preto). Todos eles cruzam a curva fechada "dual" em azul. O 1-cociclo não é um 1-cobordo porque como em cada aresta o valor é 1 os respectivos vértices devem ser 0 e 1 e logo deveríamos ter uma função que vale 0 ou 1 em cada lado da curva em azul mas essa curva não divide o anel circular em duas componentes.

Observamos que duas dessas curvas separam o anel circular em duas componentes e assim são cohomólogas pois são cobordos da função que atribui 1 a uma dessas componentes e 0 a outra. Como este é o único tipo de curva que não é cobordo, o primeiro grupo de cohomologia, $H_1(A;\mathbb{Z}_2)$, é $\mathbb{Z}_2$. Por razões dimensionais, cada 2-cocadeias do anel também é um 2-cociclo. Por outro lado, toda coleção de triângulos é limitada por uma coleção de curvas fechadas, então podemos construir uma cerca dupla, uma 1-cocadeia que também é um 1-cobordo. Consequentemente temos que o segundo grupo de cohomologia, $H_2(A;\mathbb{Z}_2)$ é 0. Observe que esses grupos são os mesmos que os grupos de homologia correspondentes. Isto não é uma coincidência.

Quando $R = \mathbb{Z}$ temos uma descrição geométrica similar.

Seja $\psi : C_1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ uma 1-cocadeia. Seu cobordo é a 2-cadeia $\delta\psi : C_2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ que atribui a cada triângulo o valor inteiro

$$\delta\psi\left([v_0,v_1,v_2]\right) = \psi\left([v_0,v_1]\right) - \psi\left([v_0,v_2]\right) + \psi\left([v_1,v_2]\right).$$

Nesse caso, a condição $\delta\psi = 0$ significa que a soma dos valores que ψ assume

nos bordos é 0, considerando a orientação. Podemos desenhar curvas fechadas C_ψ orientadas de modo que a cada aresta seja atribuída a soma orientada dos valores das curvas que intersectam a aresta de acordo com o sinal do valor de ψ na aresta.

As curvas podem ser orientadas em sentido horário e anti-horário. Dizemos que a orientação da curva concorda com a de uma aresta se a aresta atravessa a curvas da esquerda para a direita.

A coleção resultante C_ψ de curvas disjuntas em X pode ser considerada como "curvas de nível" para uma função φ com $\delta\varphi = \psi$, se tal função existir. O valor de φ muda em 1 ou -1 cada vez que uma curva de C_ψ é cruzada.

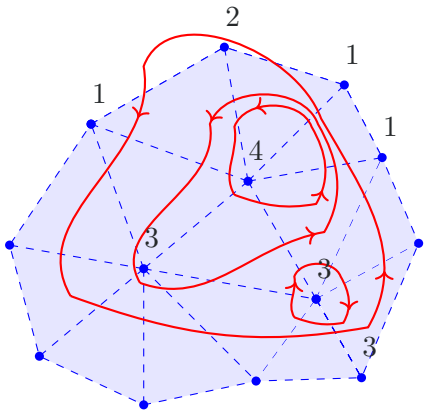
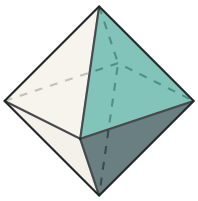


Figura 9.19.: Curvas C_ψ representando um 1-cociclo.

Exercícios

Ex. 98 — Construa uma estrutura de Δ-complexo na garrafa de Klein $\mathbb{K}$ e use-a para calcular os grupos de homologia simpliciais de $\mathbb{K}$.

Ex. 99 — O diagrama abaixo mostra um octaedro X homeomorfo à esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$.



1. Construa uma estrutura de Δ-complexo em $\mathbb{S}^2$ usando oito 2-simplexos como mostrado, e calcule $H_1^\Delta\left(\mathbb{S}^2\right)$ usando essa estrutura simplicial.
2. Defina uma relação de equivalência $\sim$ em X que corresponda à identificação antipodal em $\mathbb{S}^2$.
3. Mostre que a estrutura de Δ-complexo definida no item a), com a escolha correta de orientação, define uma estrutura de Δ-complexo no quociente por $\sim$ em $\mathbb{RP}^2$.
4. Calcule $H_1^\Delta\left(\mathbb{RP}^2\right)$ usando o complexo de cadeias obtida no item 3.

Ex. 100 — Calcule os grupos de homologia simplicial de $\mathbb{S}^1$ com a estrutura de Δ-complexo tendo n vértices e n arestas, todas as arestas sendo orientadas na mesma direção ao redor do círculo.

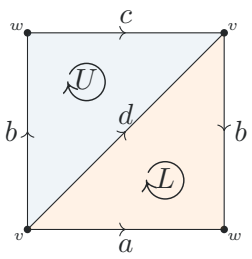
Ex. 101 — Calcule os grupos de homologia simplicial do paraquedas triangular obtido de Δ^2 identificando seus três vértices num único ponto.

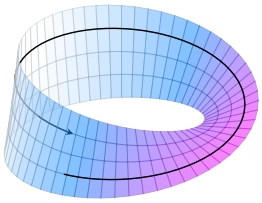
Ex. 102 — Calcule os grupos de homologia simplicial do Δ-complexo obtido de $n+1$ 2-simplexos $\Delta_0^2, \cdots, \Delta_n^2$ identificando todas as três arestas de Δ_0^2 para uma única aresta, e para $i > 0$ identificando as arestas $[v_0, v_1]$ e $[v_1, v_2]$ de Δ_i^2 numa única aresta e a aresta $[v_0, v_2]$ à aresta $[v_0, v_1]$ de Δ_{i-1}^2.

Ex. 103 — Encontre uma maneira de identificar pares de faces de Δ^3 de modo a munir a esfera em $\mathbb{S}^3$ de uma estrutura de Δ-complexo tendo um único 3-simplexo e calcule os grupos de homologia simplicial desse Δ-complexo.

Ex. 104 — Considerando Δ^n como um Δ-complexo da maneira natural, mostre que se um subcomplexo $X \subset \Delta_n$ tem $H_{n-1}^\Delta(X) \neq 0$ então $X = \partial\Delta_n$.

Ex. 105 — Calcule os grupos de homologia $H_*^\Delta(\mathbb{M})$, $H_*^\Delta(\partial\mathbb{M})$ e $H_*^\Delta(\mathbb{M}, \partial\mathbb{M})$, em que M é a faixa de Möbius e ∂M é sua fronteira.





Ex. 106 — (**Princípio de Inclusão-Exclusão**) Mostre que, se K é um complexo simplicial finito e K_1 e K_2 são dois subcomplexos de K tais que $K = K_1 \cup K_2$, então,

$$\chi(K) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2)\,.$$

Ex. 107 — Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas e $S_1 \# S_2$ a soma conexa dessas superfícies (veja Definição 8.1).

1. Calcule a característica de Euler-Poincaré para a superfície homeomorfa a $S_1 \# S_2$.
2. Mostre que a característica de Euler-Poincaré de uma superfície fechada S de gênero g é

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g\,, & \text{se } S \text{ é orientável} \\ 2 - g\,, & \text{se } S \text{ não é orientável} \end{cases}$$

Ex. 108 — O objetivo desse exercício é provar o **Teorema de Mayer-Vietoris**. Sejam K, L, M, N complexos simpliciais com $K = M \cup N$ e $L = M \cap N$. Dessa forma, temos as seguintes aplicações de inclusão:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\;i\;} & M \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ N & \xrightarrow{\;l\;} & K \end{array}$$

1. Prove que

$$0 \longrightarrow C_n^\Delta(L,R) \xrightarrow{(i_n, j_n)} C_n^\Delta(M,R) \oplus C_n^\Delta(N) \xrightarrow{k_n - l_n} C_n^\Delta(K,R) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta.

2. Conclua que existe um homomorfismo natural $\partial_* : H_n^\Delta(K) \to H_{n-1}^\Delta(L)$ que fornece a seguinte sequência exata longa:

$$\cdots \longrightarrow H_n^\Delta(L,R) \xrightarrow{(i,j)_*} H_n^\Delta(M,R) \oplus H_n^\Delta(N,R) \xrightarrow{k_*-l_*} H_n^\Delta(K,R) \longrightarrow H_{n-1}^\Delta(L,R) \xrightarrow{(i,j)_*} H_{n-1}^\Delta(M,R) \oplus H_{n-1}^\Delta(N,R) \xrightarrow{k_*-l_*} H_{n-1}^\Delta(K,R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0^\Delta(M,R) \oplus H_0^\Delta(N,R) \xrightarrow{k_*-l_*} H_0^\Delta(K,R) \longrightarrow 0$$

Ex. 109 — Sejam K_1 e K_2 dois complexos simpliciais que são triangularizações de superfícies fechadas e conexas M_1 e M_2. No que se segue, usaremos a notação da Definição 8.1.

1. Mostre que $c \in C(K_i; \mathbb{Z}_2)$ definido como a soma de todos os 2-simplexos de K_i é um ciclo.
2. Mostre que esse é o único ciclo de M. Esse ciclo é dito **ciclo fundamental** de M.

   Dica: Para isso, seja $z = \sum \lambda_i t_i$ outro ciclo em $C(K_i; \mathbb{Z}_2)$ e seja t_i um dos 2-simplexos de z com $\lambda_i \neq 0$ e observe que dado qualquer outro simplexo t' existe um caminho de 2-simplexos entre eles.
3. Mostre, usando um argumento similar ao anterior, que $H_2^\Delta(L_i; \mathbb{Z}_2) = 0$. Interprete esse fato.
4. Observe que
$$H_0^\Delta(L_i; \mathbb{Z}_2) = H_0^\Delta(K_i; \mathbb{Z}_2).$$
5. Usando a sequência de Mayer-Vietoris, conclua que $H_1^\Delta(L_i; \mathbb{Z}_2) = H_1^\Delta(K_i; \mathbb{Z}_2)$.
6. Observe que
$$H_2^\Delta(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}_2) = H_0^\Delta(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

7. Conclua que
$$H_1^\Delta(M_1 \# M_2; \mathbb{Z}_2) = H_1^\Delta(M_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H_i^\Delta(M_2; \mathbb{Z}_2).$$
8. Calcule os grupos de homologia simplicial sobre $\mathbb{Z}_2$ da superfície Σ_g de gênero g.

Ex. 110 — Se $0 \to A_n \xrightarrow{a_n} A_{n-1} \to \cdots \to A_1 \xrightarrow{a_1} A_0 \to 0$ é uma sequência exata de grupos abelianos finitamente gerados, então
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{posto} A_i = 0.$$
Dica: Considere as sequências $0 \to A_n \to A_{n-1} \to A_{n-1}/A_n$ e $\ker a_{n-1} \to A_{n-2} \to \cdots \to A_1 \to A_0 \to 0$.

Ex. 111 — Seja $s : |K| \to |L|$ uma aplicação simplicial, i.e., uma aplicação que envia vértices de K para vértices de L e que envia simplexos de K linearmente para simplexos de L. Defina os homomorfismos $s_q : C_q^\Delta(K) \to C_q^\Delta(L)$ como segue. Dado um simplexo $\sigma = [v_0, \ldots, v_q]$ de K, defina $s_q(\sigma)$ como o simplexo $[s(v_0), \ldots, s(v_q)]$ se os vértices $s(v_0), \ldots, s(v_q)$ forem todos distintos, e $s_q(\sigma) = 0$, caso contrário.

1. Mostre que $\partial s_q = s_{q-1}\partial$ e, consequentemente, que a coleção $\{s_q\}$ é um homomorfismo de cadeia.
2. Deduza que $\{s_q\}$ induz homomorfismos $s_* : H_q^\Delta(K) \to H_q^\Delta(L)$.

Ex. 112 — Calcule os grupos de cohomologia do toro usando a estrutura de Δ-complexo apresentada na Figura 8.11.

Ex. 113 — Considerando uma cocadeia $\varphi \in C^1(X; R)$ como uma função de caminhos em X à R, mostre que se φ é um cociclo, então:

1. $\varphi(f * g) = \varphi(f) + \varphi(g)$;
2. φ assume o valor 0 em caminhos constantes;
3. $\varphi(f) = \varphi(g)$ se $f \simeq g$;
4. φ é um cobordo se $\varphi(f)$ depende apenas das extremidades de f, para todo f.

Ex. 114 — O que acontece se definirmos os grupos de homologia $h_n(X;R)$ como os grupos de homologia do complexo de cadeias

$$\cdots \to \mathrm{Hom}\left(R, C_n^{\Delta}(X)\right) \to \mathrm{Hom}\left(R, C_{n-1}^{\Delta}(X)\right) \to \cdots ?$$

Mais especificamente, quais são os grupos $h_n(X;R)$ quando $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Q}$?

10 Homologia Singular

No capítulo anterior, construímos os grupos de homologia de um Δ-complexo através da homologia simplicial. Neste capítulo, queremos construir os grupos de homologia de um espaço topológico X. Queremos que essa construção seja funtorial — envolvendo nenhuma escolha arbitrária — e assim a solução é considerar todos os simplexos possíveis. Em outras palavras, o enésimo módulo de cadeias deve ser o R-módulo de todos as aplicações contínuas $\sigma : \Delta_n \to X$. Como aplicações contínuas podem ser muito irregulares e, portanto, a imagem do simplexo pode ser comprimida e distorcida de várias maneiras temos a explicação para o adjetivo singular.

Do ponto de vista histórico a noção de simplexo singular foi introduzida por Lefschetz em 1933. As definições de Lefschetz, no entanto, tinham alguns defeitos decorrentes da escolha das relações de equivalências. Foi apenas em 1943 que as definições de Lefschetz foram ligeiramente modificadas por Eilenberg para superar esses defeitos, dando origem à Teoria da Homologia Singular.

A construção da homologia singular é mais abstrata que a da homologia simplicial, mas, como veremos, em muitos casos é mais fácil e direto demonstrar os resultados usando homologia singular, pois esta teoria é naturalmente mais compatível com as ideias topológicas. Por outro lado, a homologia simplicial possui uma descrição geométrica concreta e intuitiva e em exemplos concretos é mais simples calcular os grupos de homologia usando as ideias de homologia simplicial. No final desse capítulo, provaremos a equivalência dessas teorias para Δ-complexos.

10.1. Homologia Singular

Seja X um espaço topológico, um p-**simplexo singular** (em X) é uma função contínua

$$\sigma : \Delta^p \to X \ , \qquad \text{para } p \geq 0.$$

Denotaremos o conjunto de todas os p-simplexos singulares em X por $S_{\Delta^p}(X)$.

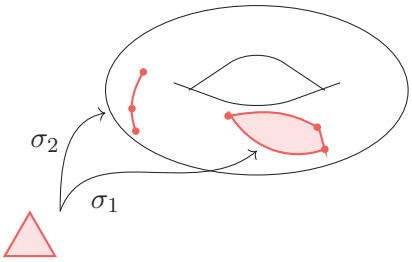


Figura 10.1.: Dois simplexos singulares

Note que como Δ^p é um espaço conexo por caminhos e compacto, a imagem $\sigma(\Delta^p)$ em X deve ser compacta e conexa por caminho e, assim, um 1-simplexo singular em X é simplesmente um caminho em X, enquanto que um 0-simplexo singular em X é apenas um ponto.

Se $p \geq 1$, a i-ésima **face** (de bordo) do p-simplexo singular σ é o $(p-1)$-simplexo singular dado pela restrição

$$\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p]} : [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p] \to X, \ 0 \leq i \leq p.$$

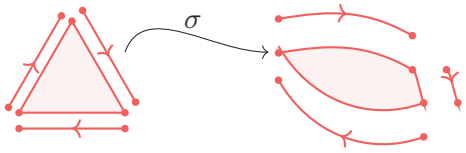


Figura 10.2.: Faces de um simplexo.

Seja X é um espaço topológico X e R um anel comutativo com unidade, uma p-cadeia singular com coeficientes em R é uma combinação linear formal

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma_i$$

de p-simplexos singulares σ_i com coeficientes $\lambda_i \in R$. O **módulo de cadeias singulares** $S_p(X;R)$ é o R-módulo livre que consiste em todas as p-cadeias singulares geradas pelo conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ dos p-simplexos singulares. Definimos $S_p(X;R) = 0$, para $p < 0$.

Se $p \geq 1$, dado um p-simplexo singular σ, o **bordo** $\partial\sigma$ é a $(p-1)$-cadeia singular dada por

$$\partial\sigma \coloneqq \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p]} .$$

Estendendo a aplicação ∂ para $S_p(X;R)$ por linearidade, dado que $S_p(X;R)$ é um módulo livre, obtemos o **homomorfismo de bordo**

$$\partial : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R) .$$

Para $p \leq 0$, definimos $\partial : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R)$ por $\partial = 0$.

Para um espaço típico X, como por exemplo uma variedade de dimensão maior que 0, o módulo de cadeias singulares $S_p(X;R)$ será gerado por um conjunto não enumerável e o mesmo acontecerá com os submódulo de ciclos e bordo.

Quando queremos ser muito precisos, escrevemos $\partial_p : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R)$.

Finalmente, definimos $S_*(X;R)$ como o módulo graduado obtido pela soma direta

$$S_*(X;R) = \bigoplus_{p\geq 0} S_p(X;R) .$$

Podemos estender o morfismo de bordo para a álgebra graduada obtendo um morfismo $\partial : S_*(X;R) \to S_*(X;R)$.

Se X é um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade, o morfismo de bordo $\partial : S_*(X;R) \to S_*(X;R)$ satisfaz

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Demonstração. Temos que

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \partial_{n-1}\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n]}\right)$$
$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \partial_{n-1}\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n]}\right).$$

Podemos reescrever a última soma como:

$$= \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j \sigma|_{[v_0,\cdots,\widehat{v_j},\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n]} + \sum_{j>i} (-1)^i(-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0,\cdots,\widehat{v_i},\cdots,\widehat{v_j},\cdots,v_n]}.$$

Comutando os índices i e j no segundo somatório:

$$= \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j \sigma|_{[v_0,\cdots,\widehat{v_j},\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n]} + \sum_{j<i} (-1)^i(-1)^j(-1) \sigma|_{[v_0,\cdots,\widehat{v_j},\cdots,\widehat{v_i},\cdots,v_n]} = 0.$$

■

A partir dos morfismos de bordo $\partial_p : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R)$ podemos obter o seguinte complexo de cadeias

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X;R) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X;R) \xrightarrow{\partial_{p-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X;R) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Dado um espaço espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R definimos:

1. O kernel $Z_p(X;R)$ do operador bordo $\partial_p : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R)$, i.e.,

   $$Z_p(X;R) \coloneqq \ker \partial_p$$

   é dito **módulo dos p-ciclos singulares**. Um elemento de $Z_p(X;R)$ às vezes é denominado de n-cadeia singular fechada.

2. A imagem $B_p(X;R)$ do operador bordo $\partial_{p+1} : S_{p+1}(X;R) \to S_p(X;R)$, i.e.,

   $$B_p(X;R) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{p+1}$$

   é dito **módulo dos p-bordos singulares**.

No caso especial $p = 0$, temos $Z_p(X;R) = S_0(X;R)$, ou seja, toda 0-cadeia é, por definição, também um 0-ciclo.

Um fato de suma importância, decorrente de $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$ é que $B_p(X;R)$ é um submódulo de $Z_p(X;R)$, o que nos permite definir os grupos de homologia.

Sejam X um espaço topológico X e R um anel comutativo com unidade, para qualquer $p \geq 0$ o p-ésimo **módulo de homologia singular** $H_p^{\mathrm{Sg}}(X;R)$ é definido por

$$H_p^{\mathrm{Sg}}(X;R) := \frac{\ker \partial_p}{\operatorname{im} \partial_{p+1}} = \frac{Z_p(X;R)}{B_p(X;R)}$$

e convencionamos $H_p^{\mathrm{Sg}}(X;R) = 0$, para $p < 0$.

Os R-módulos $H_p^{\mathrm{Sg}}(X;R)$ serão na maioria das vezes denominados de **grupos de homologia**, seguindo a prática comum. Quando não houver chance de confusão escreveremos $H_p(X;R)$ para denotar o grupo de homologia singular $H_p^{\mathrm{Sg}}(X;R)$.

Dado um espaço topológico, podemos associar a ele um módulo que é obtido tomando os ciclos singulares em uma dimensão (que podem ser geometricamente interessantes) e quocientando aqueles que são geometricamente desinteressantes. O resultado desse quociente nos fornece por definição a homologia singular do espaço nessa dimensão.

Dados dois p-ciclos singulares $z_1, z_2 \in Z_p(X;R)$ que representam a mesma classe de homologia, ou seja, sua diferença é um bordo, são chamados de **homólogos**. Esse fato será denotado por: $[z_1] = [z_2] \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in B_p(X;R)$. Por exemplo, um ciclo z é um bordo se, e somente se, $[z] = [0]$.

Exemplo 10.1 — Axioma de Dimensão.

Seja $X = \{x\}$ o espaço com um único ponto. Vamos determinar $S_p(X;R)$, para todo $p > 0$. Para cada p, há apenas um p-simplexo singular $\sigma_p : \Delta^p \to X$ que é a aplicação constante levando todo Δ^p ao ponto x. Portanto, $S_p(X;R) = R[\sigma_p]$, onde σ_p denota a aplicação constante.

Observe que $\partial(\sigma_1) = \sigma_0 - \sigma_0 = 0, \partial(\sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_1 + \sigma_1 = \sigma_1$ e de forma mais geral, temos

$$\partial(\sigma_p) = \begin{cases} \sigma_{p-1}\ , & \text{se } p \text{ é par maior que zero} \\ 0\ , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, temos o complexo de cadeias singulares

$$\cdots \xrightarrow{0} R[\sigma_4] \xrightarrow{\partial_4} R[\sigma_3] \xrightarrow{0} R[\sigma_2] \xrightarrow{\partial_2} R[\sigma_1] \xrightarrow{0} R[\sigma_0] \xrightarrow{0} 0 \,.$$

Logo,

$$H_p(X;R) = \begin{cases} R\,, & \text{se } p = 0 \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

◁

De modo geral, podemos ver uma 0-cadeia singular como uma combinação linear $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ de pontos $x_i \in X$. Quando X é conexo por caminhos, é fácil ver que uma 0-cadeia singular é o bordo de uma 1-cadeia singular se, e somente se, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$. Para ver isso, seja x_0 um ponto em X e seja σ_i um caminho ligando x_0 a x_i, para cada $i = 1, \ldots, m$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i - x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial \sigma_i \\ &= \partial \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma_i \right). \end{aligned}$$

A volta é imediata. Assim, descobrimos que $B_0(X;R)$ consiste em todas aquelas 0-cadeias $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ que possuem a propriedade de que a soma de seus coeficientes no anel R é zero.

Agora, definimos o homomorfismo $\epsilon : S_0(X;R) \to R$, denominado de aplicação de aumento,

$$\epsilon \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

A aplicação ϵ é claramente sobrejetora e seu kernel é $B_0(X;R)$, logo

$$H_0(X;R) = \frac{Z_0(X;R)}{B_0(X;R)} = \frac{S_0(X;R)}{\ker \epsilon} \cong R.$$

Logo, temos o seguinte resultado:

O espaço topológico X é conexo por caminhos se, e somente se,

$$H_0(X;R) = R.$$

De forma mais geral, temos a seguinte proposição:

Sejam X um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade e seja $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ a coleção de componentes conexas por caminhos de X. Então:

1. Se σ_α é um 0-simplexo singular cuja imagem está em X_α, para cada $\alpha \in I$, então as classes de homologia $[\sigma_\alpha]$ formam uma base de $H_0(X;R)$, ou seja, é o R-módulo livre:
$$H_0(X;R) = \bigoplus_{\alpha\in I} R.$$
2. A homologia singular é aditiva, ou seja, existe um isomorfismo natural
$$H_p(X;R) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} H_p(X_\alpha;R).$$

A demonstração da proposição anterior é bem direta e é consequência da conexidade por caminhos de Δ^p, dessa forma qualquer p-simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to X$ é um simplexo singular em X_α, para algum $\alpha \in I$, e a demonstração segue. Como consequência da proposição anterior, temos que em diversas situações podemos restringir a atenção aos espaços conexos por caminhos.

Homologia Reduzida A **homologia reduzida singular** é uma pequena modificação da homologia singular motivada pela intuição de que todos os grupos de homologia de um ponto devem ser iguais a zero. Essa modificação torna mais concisas algumas afirmações e elimina muitos casos excepcionais.

Como vimos, associado a um espaço conexo X temos uma aplicação natural ϵ, dita aplicação de aumento. Como $S_0(X;R)$ é gerado livremente pelos 0-simplexos singulares em X, um elemento deste grupo é apenas uma soma formal de pontos em X. Enviando cada ponto de X para $1 \in R$, e então tomando a extensão linear, que existe e é única pela Observação 7.1, temos a aplicação de aumento $\epsilon : S_0(X;R) \to R$ dada por $\epsilon\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i$.

Para definir a homologia reduzida, começamos com o complexo de cadeias aumentado

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X;R) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X;R) \xrightarrow{\partial_{p-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X;R) \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow$$

Definimos os **grupos de homologia reduzida** por $\widetilde{H}_n(X;R) = \ker(\partial_n)/\mathrm{im}\,(\partial_{n+1})$, para $n > 0$, e $\widetilde{H}_0(X;R) = \ker(\epsilon)/\mathrm{im}\,(\partial_1)$.

Vamos mostrar que $H_0(X;R) = \widetilde{H}_0(X;R) \oplus R$, já que evidentemente $H_n(X;R) = \widetilde{H}_n(X;R)$, para todo n positivo.

Como $\epsilon \circ \partial_1 = 0$, então $\mathrm{im}\,\partial_1 \subseteq \ker\epsilon$. Por definição, $H_0(X;R) = S_0(X;R)/\mathrm{im}\,\partial_1$. O módulo $S_0(X;R)$ é um R-módulo livre isomorfo à soma direta $\bigoplus_{\sigma \in S_{\Delta^0}(X;R)} R$ com uma cópia de R para cada $\sigma \in S_{\Delta^0}(X;R)$, então escolhendo uma das cópias de R, podemos definir um morfismo injetivo R-linear $s : R \to S_0(X;R)$ tal que $\epsilon \circ s = \mathrm{id}$, e obtemos a seguinte sequência exata curta cindida:

$$0 \longrightarrow \ker\epsilon \longrightarrow S_0(X;R) \underset{s}{\overset{\epsilon}{\rightleftarrows}} R \longrightarrow 0.$$

Desta forma, $S_0(X;R) \cong \ker\epsilon \oplus R$ e como $\mathrm{im}\,\partial_1 \subseteq \ker\epsilon$, obtemos

$$S_0(X;R)/\mathrm{im}\,\partial_1 \cong (\ker\epsilon/\mathrm{im}\,\partial_1) \oplus R,$$

o que nos fornece

$$H_0(X;R) = \widetilde{H}_0(X;R) \oplus R.$$

Diremos que um espaço topológico X é **acíclico** se seus grupos de homologia singular com coeficientes inteiros em todas as dimensões são isomorfos aos correspondentes grupos de homologia de um ponto. Ou seja, se

$$\widetilde{H}_p(X;\mathbb{Z}) = 0, \quad \forall p \geq 0.$$

Em outras palavras, X é acíclico se o complexo de cadeias aumentado é um complexo acíclico.

Vamos agora mostrar alguns exemplos de espaços acíclicos: os domínios estrelados em $\mathbb{R}^n$.

Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito um domínio **estrelado** se existe $x_0 \in S$ tal que para todo $x \in S$, com $x \neq x_0$, tal que o segmento de reta ligando x_0 a x está

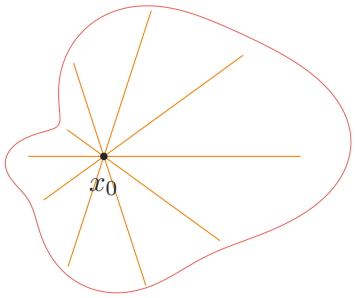


Figura 10.3.: Conjunto Estrelado

contido em S. Nesse caso, dizemos que S é um domínio estrelado em relação a x_0.

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um domínio estrelado em relação a x_0, definimos a **operação de colchete** de cadeias singulares em S da seguinte forma: dado $\sigma : \Delta^p = [v_0, v_1, \ldots, v_p] \to X$ um p-simplexo singular, definimos o $(p+1)$-simplexo singular $[\sigma, x_0]$ por

$$\begin{aligned} [\sigma, x_0] : \quad & \Delta^{p+1} \to S \\ (1-t)x + tv_{p+1} \mapsto\ & (1-t)\sigma(x) + tx_0 \qquad 0 \leq < t \leq 1 \end{aligned}$$

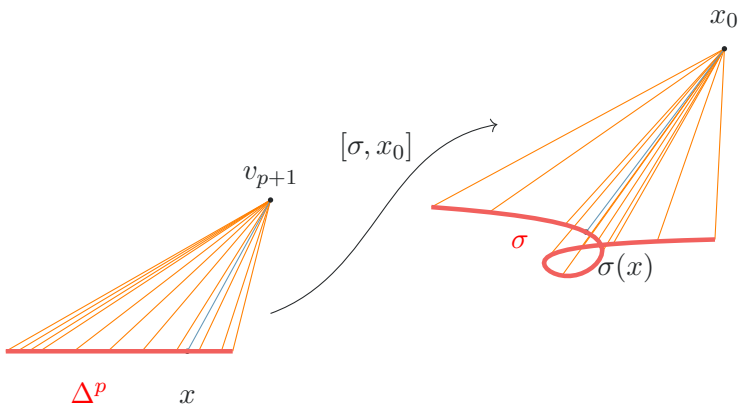
onde usamos o fato que um ponto em $\Delta^{p+1} = [v_0, v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}]$ pode ser escrito como $(1-t)x + tv_{p+1}$ com $x \in [v_0, v_1, \ldots, v_p]$ pois Δ^{p+1} é o fecho convexo de $\{v_0, v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}\}$.

O próximo lema mostra como a operação de colchete interage com o operador bordo.

Lema 10.1

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um domínio estrelado em relação a x_0 e seja $\sigma : \Delta^p = [v_0, v_1, \ldots, v_p] \to X$ um p-simplexo singular. Então

$$\partial[\sigma, x_0] = \begin{cases} [\partial\sigma, x_0] + (-1)^{p+1}\sigma\ , & \text{se } p > 0 \\ \sigma_{x_0} - \sigma\ , & \text{se } p = 0 \end{cases}$$



onde σ_{x_0} é o 0-simplexo singular que leva Δ^0 para x_0.

Demonstração. Se σ é um 0-simplexo singular, então $[\sigma, x_0]$ leva o segmento $[v_0, v_1]$ ao segmento ligando $\sigma(v_0)$ a x_0. Logo, $\partial[\sigma, x_0] = \sigma_{x_0} - \sigma$.

Se $p > 0$, inicialmente observamos que

$$[\sigma, x_0]|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p,v_{p+1}]} = [\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p]}, x_0] \tag{10.1}$$

$$[\sigma, x_0]|_{[v_0,\ldots,v_i,\ldots,v_p,\widehat{v_{p+1}}]} = \sigma \tag{10.2}$$

Vamos provar a Equação 10.1 e deixaremos a Equação 10.2 como exercício. Para isso, recordamos que $[\sigma, x_0]|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p,v_{p+1}]}$ mapeia $(1-t)x + tv_{p+1} \mapsto (1-t)\sigma(x) + tx_0$ com $x \in [v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_p]$, que é exatamente a definição

$[\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p]}, x_0]$. Logo, temos

$$\begin{aligned}
\partial[\sigma, x_0] &= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i[\sigma, x_0]|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p,v_{p+1}]} \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i[\sigma, x_0]|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p,v_{p+1}]} + (-1)^{p+1}[\sigma, x_0]|_{[v_0,\ldots,v_i,\ldots,v_p,\widehat{v_{p+1}}]} \\
&= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left[\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p]}, x_0\right] + (-1)^{p+1}\sigma \\
&= \left[\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_p]}, x_0\right] + (-1)^{p+1}\sigma \\
&= [\partial\sigma, x_0] + (-1)^{p+1}\sigma.
\end{aligned}$$

■

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio estrelado em relação a x_0, então S é acíclico na homologia singular, isto é:

$$H_p(S; R) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } p \geq 1 \\ R\,, & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

Demonstração. Claramente, um domínio estrelado é conexo por caminhos, daí $H_0(S; R) = R$. Para mostrar que $H_p(S; R) = 0$, para $p > 0$, seja σ um p-ciclo singular, então pelo Lema 10.1 temos que:

$$\partial[\sigma, x_0] = [\partial\sigma, x_0] + (-1)^{p+1}\sigma = (-1)^{p+1}\sigma.$$

Logo, σ é o bordo de uma $(p+1)$-cadeia. ■

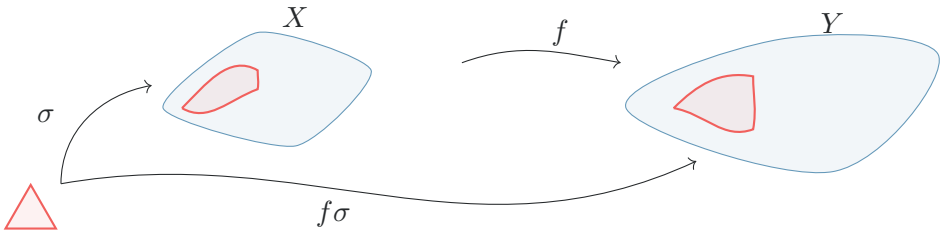
Os grupos de homologia singular de $\mathbb{R}^n$ são dados por

$$H_p(\mathbb{R}^n; R) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } p \geq 1 \\ R\,, & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

Todo simplexo é acíclico na homologia singular.

Invariância por homeomorfismo Vamos provar agora o caráter funtorial dos grupos de homologia.

Se X e Y são dois espaços topológicos e se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre eles, então existem homomorfismos $f_{*,p} : H_p(X;R) \to H_p(Y;R)$, para todos $p \geq 0$.



Demonstração. Para provar a proposição, mostraremos que existe uma aplicação de cadeias entre os complexos de cadeias associados a X e a Y. Dado um p-simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to X$, obtemos um p-simplexo singular $f\sigma : \Delta^p \to Y$ obtido pela composição com f, isto é $f\sigma = f \circ \sigma$. Como $S_p(X;R)$ é gerado livremente por $S_{\Delta^p}(X;R)$, a aplicação $\sigma \mapsto f\sigma$ de $S_{\Delta^p}(X;R)$ para $S_p(Y;R)$ se estende unicamente a um homomorfismo $f_{\sharp,p} : S_p(X;R) \to S_p(Y;R)$.

Dessa forma, temos que o seguinte diagrama é comutativo (vide Exercício 117)

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & S_{p+1}(X;R) & \xrightarrow{\partial^X_{p+1}} & S_p(X;R) & & \longrightarrow \\ & \downarrow{\scriptstyle f_{\sharp,p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\sharp,p}} & & \\ \longrightarrow & S_{p+1}(Y;R) & \xrightarrow[\partial^Y_{p+1}]{} & S_p(Y;R) & \longrightarrow & \end{array}$$

o que significa que as aplicações $f_{\sharp,p} : S_p(X;R) \to S_p(Y;R)$ formam uma aplicação de cadeias. Pela Proposição 7.5, obtemos homomorfismos $f^*_{\sharp,p} : H_p(X;R) \to H_p(Y;R)$ para todos p, que denotamos por $f_{*,p}$ ou simplesmente f_*. ∎

Se os espaços X e Y são homeomorfos, então os grupos de homologia de X e Y são isomorfos.

Ou seja, os grupos de homologia são invariantes topológicos. Esse teorema nos fornece um modo de demonstrar que alguns espaços não são homeomorfos: se

para algum p os grupos de homologia $H_p(X;R)$ e $H_p(Y;R)$ não são isomorfos, então X e Y não são homeomorfos.

Dessa forma, o grupo de homologia singular é um **funtor**. De modo mais preciso, temos o funtor $H(\bullet;R)$:

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{H(\bullet;R)} {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & \longmapsto & H(X;R) & \ni & [\sigma] \\ & \overset{\sigma}{\nearrow} & \Big\downarrow f \text{ cont.} & & \Big\downarrow f_* \text{ homom.} & & \Big\downarrow \\ \Delta & & & & & & \\ & \underset{f\circ\sigma}{\searrow} & & & & & \\ & & Y & \longmapsto & H(Y;R) & \ni & [f\circ\sigma] \end{array}$$

Note que denotamos por f_* o homomorfismo de grupo que é a imagem de uma aplicação contínua f pelo funtor $H(\bullet;R)$ definida como segue:

$$f_* : [\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$$

Provaremos a seguir um resultado um pouco mais forte: se dois espaços X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então X e Y possuem grupos de homologia isomorfos.

10.2. Invariância Homotópica

Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ duas aplicações contínuas. Se f e g são homotópicas, então as aplicações de cadeias $f_\sharp, g_\sharp : S_*(X;R) \to S_*(Y;R)$ são homotópicas.

Demonstração. Sejam $H : X \times I \mapsto Y$ uma homotopia de f para g e $\sigma : \Delta^p \mapsto X$ um simplexo singular, temos a composição

$$\Delta^p \times I \xrightarrow{\sigma\times \mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

dada por $H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) : \Delta^p \times I \mapsto X \times I \mapsto Y$, onde id é a função identidade. Veja a Figura 10.5.

A demonstração é feita subdividindo o prisma $\Delta^p \times I$ em simplexos, como na Figura 10.4. Sejam $\Delta^p \times 0 = [v_0, \ldots, v_p]$ e $\Delta^p \times 1 = [w_0, \ldots, w_p]$, onde v_i, w_i possuem a mesma imagem na projeção $\pi : \Delta^p \times I \mapsto \Delta^p$. Faremos as divisões em p-simplexos da seguinte forma. Começaremos com $[v_0, \ldots, v_p]$, depois tomamos $[v_0, \ldots, v_{p-1}, w_p]$, e $[v_0, \ldots, w_{p-1}, w_p]$ e assim por diante, isto é, seguindo a sequência $[v_0, \ldots, v_i, w_{i+1}, \ldots, w_p]$.

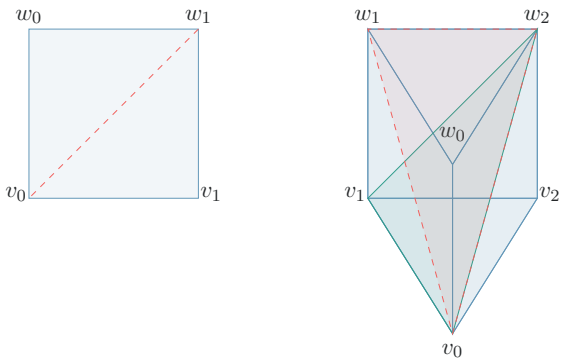


Figura 10.4.: Prismas para $\Delta^1 \times I$ e $\Delta^2 \times I$

A região entre dois p-simplexos $[v_0, \ldots, v_i, w_{i+1}, \ldots, w_p]$ e $[v_0, \ldots, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_p]$ é o $(p+1)$-simplexo:

$$[v_0, \ldots, v_i, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_p]$$

Sendo assim, $\Delta^p \times I$ é a união dos $(p+1)$-simplexos

$$\Delta^p \times I = \bigcup_{i=0}^{n} [v_0, \ldots, v_i, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_p]$$

tais que suas intersecções são os n-simplexos anteriores.

Motivado pelo apresentado anteriormente, podemos definir um operador prisma $P : S_p(X; R) \mapsto S_{p+1}(Y; R)$ como:

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots w_p]}$$

que geometricamente, pode ser pensado como subdividir o prisma "$\Delta^p \times I$ " em $(p+1)$ simplexos

Vamos mostrar que o operador prisma satisfaz a relação $\partial P = g_\sharp - f_\sharp - P\partial$ e logo é uma homotopia de cadeias. Geometricamente, essa fórmula afirma que o bordo da cadeia singular do prisma $P(\sigma)$ consiste no simplexo superior $g\sigma$, no simplexo inferior $f\sigma$ e nas paredes verticais $P(\partial\sigma)$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}\partial P(\sigma) = &\sum_{j\leq i}(-1)^i(-1)^j H\circ(\sigma\times \mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_j,\ldots,v_i,w_i,\ldots,w_p]}\\ &+\sum_{j\geq i}(-1)^i(-1)^{j+1} H\circ(\sigma\times \mathrm{id})|_{[v_0,\ldots,v_i,w_i,\ldots,\widehat{w}_j,\ldots,w_p]}\end{aligned}$$

Os termos em que $i = j$ se cancelam, com exceção do primeiro e último, que são justamente $g_\sharp(\sigma)$ e $-f_\sharp(\sigma)$: pois

$$\begin{aligned}H\circ(\sigma\times \mathrm{id})|_{[\widehat{v}_0,w_0,\cdots,w_n]} &= g\circ\sigma = g_\sharp(\sigma),\ \text{e}\\ -H\circ(\sigma\times \mathrm{id})|_{[v_0,\cdots,v_n,\widehat{w}_n]} &= -f\circ\sigma = -f_\sharp(\sigma).\end{aligned}$$

Os demais termos, com $i \neq j$, serão $-P\partial(\sigma)$ pois

$$\begin{aligned}P\partial(\sigma) &= P\left(\sum_j(-1)^j\sigma|_{[v_0,\ldots\widehat{v}_j,\ldots,v_n]}\right)\\ &=\sum_j(-1)^j P(\sigma|_{[v_0,\ldots\widehat{v}_j,\ldots,v_n]})\\ &=\sum_{i<j}(-1)^i(-1)^j H\circ(\sigma\times \mathrm{id})|_{[v_0,\cdots,v_i,w_i,\cdots,\widehat{w}_j,\cdots,w_n]}\\ &+\sum_{i>j}(-1)^{i-1}(-1)^j H\circ(\sigma\times \mathrm{id})|_{[v_0,\cdots,\widehat{v}_j,\cdots,v_i,w_i,\cdots,w_n]}.\end{aligned}$$

Logo, $\partial P = g_\sharp - f_\sharp - P\partial$.

■

Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ duas funções contínuas. Se f e g são homotópicas e $f_{*,p}, g_{*,p} : H_p(X;R) \to H_p(Y;R)$ são os homomorfismos induzidos, então $f_{*,p} = g_*$ para todo $p \geq 0$.

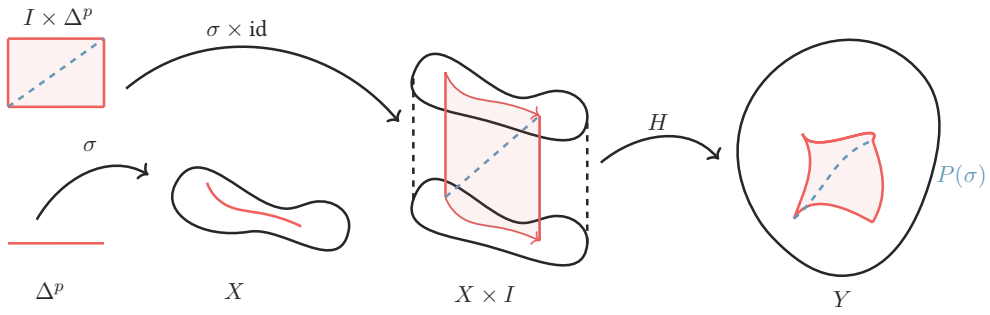


Figura 10.5.: Construção do Prisma

Demonstração. Pela Proposição 10.2, existe uma homotopia de cadeias entre $f_\sharp : S_*(X;R) \to S_*(Y;R)$ e $g_\sharp : S_*(X;R) \to S_*(Y;R)$, e pela Proposição 7.6, os homomorfismos induzidos $f_{*,p}, g_{*,p} : H_p(X;R) \to H_p(Y;R)$ são idênticos. ∎

Invariância por Homotopia. Se X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então os grupos de homologia $H_p(X;R)$ e $H_p(Y;R)$ são isomorfos para todos $p \geq 0$,

Demonstração. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ forem duas aplicações que tornam os espaços X e Y homotópicos, temos $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ e $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, e portanto,

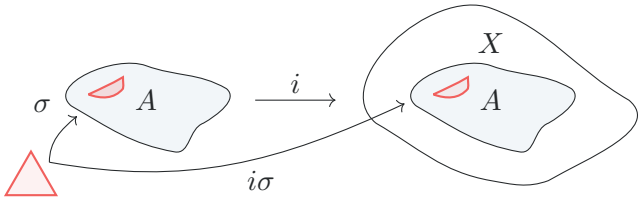
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* = \mathrm{id}_* \quad \text{e}$$
$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_* = \mathrm{id}_*$$

e logo a aplicação $f_{*,p} : H_p(X;R) \to H_p(Y;R)$ é um isomorfismo com inversa $g_{*,p}$. ∎

10.3. Homologia Singular Relativa

Vamos considerar um **par topológico** (X, A), ou seja, um espaço topológico X juntamente com um subespaço $A \subseteq X$ e denotar a inclusão do subespaço por $i : A \to X$. Cada simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to A$ produz um simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to X$ compondo σ com a aplicação de inclusão de A em X, então o complexo singular $S_*(A;R)$ é um subcomplexo do complexo singular

$S_*(X;R)$. É imediato que a aplicação de complexos de cadeias singulares induzida $i_* : S(A;R) \to S(X;R)$ é injetora e, portanto, podemos considerar o complexo quociente $S(X,A;R) = S(X;R)/S(A;R)$. Para sermos completamente precisos, devemos tomar o quociente pelo subcomplexo $i_*(S(A;R)) \subseteq S(X;R)$, mas nos permitimos identificar os complexos isomorfos $S(A;R)$ e $i_*(S(A;R))$.



Seja $S_p(X,A;R)$ o módulo quociente

$$S_p(X,A;R) = S_p(X;R)/S_p(A;R)$$

e seja $S_*(X,A;R)$ o módulo graduado correspondente obtido pela soma direta de $S_p(X,A;R)$. O morfismo de bordo $\partial_p^X : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R)$ do complexo original $S_*(X;R)$ restringe-se ao morfismo de bordo $\partial_p^A : S_p(A;R) \to S_{p-1}(A;R)$ do complexo $S_*(A;R)$, então a aplicação quociente $\partial_p : S_p(X,A;R) \to S_{p-1}(X,A;R)$ induzida por ∂_p^X e dada por

$$\partial_p(\sigma + S_p(A;R)) = \partial_{X,p}(\sigma) + S_{p-1}(A;R)$$

para cada p-simplexo singular σ é o morfismo de bordo para o complexo de cadeias $S_*(X,A;R)$. O complexo de cadeias $S_*(X,A;R)$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X,A;R) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X,A;R) \xrightarrow{\partial_{p-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X,A;R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X,A;R)$$

é chamado de complexo de cadeias singulares do par $(X,\ A)$.

Dado um par (X,A), onde A é um subespaço de X, os grupos singulares de homologia relativa $H_p(X,A;R)$ de (X,A) são definidos por

$$H_p(X,A;R) \coloneqq H_p(S_p(X,A;R) = H_p(S_*(X;R)/S_*(A;R)) \ .$$

Se temos um par topológico (X,A), então existe uma sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow S(A;R) \xrightarrow{i} S(X;R) \xrightarrow{j} S(X,\ A;R) \longrightarrow 0$$

na qual o segundo morfismo é a aplicação de inclusão e o terceiro morfismo é a aplicação quociente. Portanto, podemos aplicar o Lema do Zig-Zag 7.7 a esta sequência exata curta e obter a seguinte proposição:

Seja um par topológico (X, A). Então existem os homomorfismos de conexão

$$\partial_{*,n} : H_n(X, A; R) \to H_{n-1}(A; R) \ , \ n \geq 1,$$

de modo que a seguinte sequência é exata

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{\partial_{*,3}} \\ H_2(A;R) \xrightarrow{i_*} H_2(X;R) \xrightarrow{j_*} H_2(X,A;R) \xrightarrow{\partial_{*,2}} \\ H_1(A;R) \xrightarrow{i_*} H_1(X;R) \xrightarrow{j_*} H_1(X,A;R) \xrightarrow{\partial_{*,1}} \\ H_0(A;R) \xrightarrow{i_*} H_0(X;R) \xrightarrow{j_*} H_0(X,A;R) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Esta é a sequência exata longa de homologia associada ao par topológico (X, A).

É possível descrever explicitamente os morfismos de bordo ∂_*: para cada ciclo relativo c, temos

$$\partial_{*,p}([c]) = [\partial_p(c)].$$

Observamos que existe uma sequência exata longa, completamente análoga, de grupos de homologia reduzida para um par (X, A) com $A \neq \emptyset$.

Sejam X um espaço, A um subespaço e $i : A \to X$ a inclusão.

1. A homologia do espaço vazio é trivial em todas as dimensões. Dessa forma a inclusão $j : \emptyset \to X$ induz isomorfismos

$$H_n(X; R) \cong H_n(X, \emptyset; R) \ , \ n \geq 0.$$

2. A inclusão i induz isomorfismos nos grupos de homologia $i_* : H_n(A; R) \cong H_n(X; R), n \geq 0$, se, e somente se, todos os grupos de homologia relativa $H_n(X, A)$ para $n \geq 0$ se anularem, ou seja, $H_n(X, A; R) \cong 0$. Em particular, os grupos de homologia $H_n(X, X; R)$ se anulam para $n \geq 0$.

Dizemos que (X, A) é um **bom par**, se $A \subset X$ é um subespaço fechado não vazio que é um retrato de deformação de alguma vizinhança em X.

Bom Par. Se (X, A) é um bom par, então a aplicação quociente $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ induz um isomorfismo $q_{*,n} : H_n(X, A; R) \to H_n(X/A, A/A; R) \cong \widetilde{H}_n(X/A; R)$ para todo n. Essa proposição será demonstrada na Seção 10.5.

Das Proposições 10.3 e de 10.3, segue o seguinte resultado.

Se (X, A) é um bom par, então a seguinte sequência é exata

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{*,3}} \widetilde{H}_2(A; R) \longrightarrow \widetilde{H}_2(X; R) \longrightarrow \widetilde{H}_2(X/A; R) \xrightarrow{\partial_{*,2}} \widetilde{H}_1(A; R) \longrightarrow \widetilde{H}_1(X; R) \longrightarrow \widetilde{H}_1(X/A; R) \xrightarrow{\partial_{*,1}} \widetilde{H}_0(A; R) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X; R) \longrightarrow \widetilde{H}_0(X/A; R) \longrightarrow 0$$

Sejam X um CW-complexo e A um subcomplexo de X, então $(X,\ A)$ é um bom par.

Exemplo 10.2.

Os grupos de homologia singular reduzida da esfera n-dimensional são:

$$\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n; R) \cong \begin{cases} R, & p = n \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases} \tag{10.3}$$

Para $n = 0$ o resultado é imediato. Para demonstrar o resultado para $n > 0$, considere o par $(X, A) = (\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$, logo $X/A = \mathbb{S}^n$. Como $\mathbb{D}^n$ é contrátil,

temos que $\widetilde{H}_p(\mathbb{D}^n; R) = 0$, para todo $p \geq 0$, e logo temos

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & & & & \\ & & & \searrow^{\partial_{*,3}} & & & \\ \to & \widetilde{H}_2(\mathbb{S}^{n-1}; R) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_2(\mathbb{S}^n; R) & \searrow^{\partial_{*,2}} \\ \to & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^{n-1}; R) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^n; R) & \searrow^{\partial_{*,1}} \\ \to & \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^{n-1}; R) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \widetilde{H}_0(\mathbb{S}^n; R) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Logo, $\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^n; R) = 0$ e $\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n; R) \cong \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R)$, para $p > 0$, de onde segue o resultado.

◁

O exemplo anterior garante que esferas de dimensões diferentes não são homeomorfas, e mais ainda, não possuem o mesmo tipo de homotopia.

Vamos calcular a homologia relativa $H_n(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0)$.

A esfera $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$ pode ser vista como dois pontos antípodas em $\mathbb{S}^2$. Podemos então usar a sequência exata longa de homologia relativa para o par $(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0)$ obtendo

$$\cdots \to H_i(\mathbb{S}^0) \to H_i(\mathbb{S}^2) \to H_i(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \to H_{i-1}(\mathbb{S}^0) \to H_{i-1}(\mathbb{S}^2) \to \cdots$$

Se $i \geq 2$, então $H_i(\mathbb{S}^0) = H_{i-1}(\mathbb{S}^0) = 0$, e logo $H_i(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \cong H_i(\mathbb{S}^2)$.

Agora para os termos $i = 0, 1$, observamos que $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $H_0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ e a aplicação $i_* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é sobrejetiva, pois a inclusão $i : \mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^2$ é sobrejetiva nas componentes conexas por caminho. Portanto, a sequência exata se resume a

$$0 \to H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \to 0$$

Além disso, como i_* é sobrejetiva, j é a aplicação nula e $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \cong 0$, e a aplicação se reduz a

$$0 \to H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \to 0$$

De onde temos que $\mathbb{Z} \oplus H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. E consequentemente

$$H_i(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1, 2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sequência Exata Longa de uma Tripla Uma generalização simples da sequência exata longa de um par (X, A) é a sequência exata longa de uma tripla (X, A, B), onde $B \subset A \subset X$:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B; R) \longrightarrow H_n(X, B; R) \longrightarrow H_n(X, A; R) \longrightarrow H_{n-1}(A, B; R) \longrightarrow \cdots$$

Esta é a sequência exata longa de grupos de homologia associada à sequência exata curta de complexos de cadeias formados pelas sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow S_n(A, B; R) \longrightarrow S_n(X, B; R) \longrightarrow S_n(X, A; R) \longrightarrow 0$$

Tomando B como um ponto, a sequência exata longa da tripla (X, A, B) torna-se a sequência exata longa de homologia reduzida para o par (X, A).

10.4. Primeiro Grupo de Homologia e o Grupo Fundamental

Há uma conexão estreita entre $H_1(X; \mathbb{Z})$ e $\pi_1(X, x_0)$, decorrente do fato de que se γ é um caminho fechado em X, então o 1-simplexo singular correspondente é um ciclo no complexo de cadeias singulares $S_*(X; \mathbb{Z})$. Além disso, observe que um caminho constante $\gamma(t) = x_0$ em X não é apenas um ciclo, mas um bordo. Para ver isso, considere o 2-simplexo $\sigma_2 : \Delta^2 \to X$ que mapeia Δ^2 no ponto x_0. Então, como as três faces de σ_2 são iguais a γ, temos

$$\partial\sigma_2 = \gamma - \gamma + \gamma = \gamma.$$

Lema 10.2

Se γ e γ' são caminhos homotópicos com extremidades fixas, i.e., $\gamma \underset{\text{e.f.}}{\simeq} \gamma'$, então $\gamma - \gamma'$ é um bordo.

Demonstração. Considere uma homotopia $H : I \times I \to X$ de γ em γ' com extremos fixos. Subdividindo o quadrado $I \times I$ em dois triângulos $[v_0,\ v_1,\ v_2]$ e $[v_0,\ v_3,\ v_2]$ temos um par de 2-simplexos singulares $\sigma_1 = H|_{[v_0,\, v_1,\, v_2]}$ e $\sigma_2 = H|_{[v_0,\, v_3,\, v_2]}$ em X, conforme mostrado na Figura 10.6.

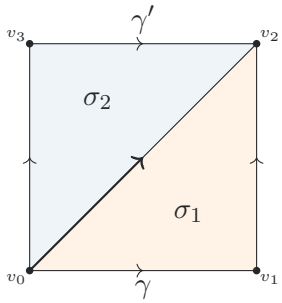


Figura 10.6.: Homotopia $H : I \times I \to X$ de γ em γ'.

Quando calculamos $\partial(\sigma_1 - \sigma_2)$, as duas restrições de H à diagonal do quadrado se cancelam, deixando $\gamma - \gamma'$ e dois 1-simplexos singulares constantes provenientes da imagem da restrição de H às bordas esquerda e direita do quadrado, que como já observamos são bordos. Logo, $\gamma - \gamma'$ também é um bordo. ∎

Em vista do lema anterior, temos uma função $h : \pi_1(X,\ x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ enviando a classe de homotopia de $\{\gamma\}$ para a classe de homologia do 1-ciclo $[\gamma]$. Vamos provar que essa função é um homomorfismo.

Lema 10.3

Se $\gamma : x_0 \to x_1$ e $\gamma' : x_1 \to x_2$ são caminhos, então a 1-cadeia $\gamma * \gamma' - \gamma - \gamma'$ é um bordo em X.

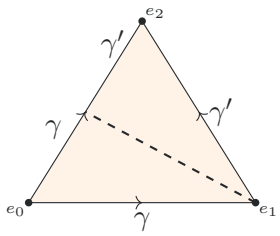


Figura 10.7.: $\sigma : [e_0, e_1, e_2] \to X$

Demonstração. Seja $\sigma : [e_0, e_1, e_2] \to X$ definida como:

- γ na aresta $[e_0, e_1]$,
- γ' na aresta $[e_1, e_2]$,
- e constante nas retas paralelas à reta que une e_1 com o ponto médio de $[e_0, e_2]$,

como ilustrado na Figura 10.7. Logo, σ restrito a $[e_0, e_2]$ é o caminho produto $\gamma * \gamma'$. Consequentemente,

$$\partial(\sigma) = \gamma + \gamma' - (\gamma * \gamma').$$

■

Logo a função $h : \pi_1(X,\ x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ é um homomorfismo. Como $H_1(X;\mathbb{Z})$ é um grupo abeliano, temos que h leva o subgrupo comutador

$$[\pi_1, \pi_1] \coloneqq [\pi_1(X,\ x_0), \pi_1(X,\ x_0)]$$

para zero, e assim obtemos o homomorfismo induzido

$$\overline{h} : \frac{\pi_1(X,\ x_0)}{[\pi_1, \pi_1]} \to H_1(X;\mathbb{Z}).$$

Poincaré-Hurewicz. Se o espaço topológico X é conexo por caminhos, então o homomorfismo $h : \pi_1(X,\ x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$ é sobrejetivo e o seu kernel é o subgrupo comutador $[\pi_1(X,\ x_0), \pi_1(X,\ x_0)]$, e consequentemente h induz um isomorfismo da abelianização de $\pi_1(X, x_0)$ em $H_1(X)$. Temos que mostrar que a aplicação h é sobrejetora e que seu kernel é $[\pi_1, \pi_1]$. Faremos isso construindo um homomorfismo

$$H_1(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}$$

que será o inverso de $\overline{h}$.

Para cada $x \in X$, fixemos um caminho γ_x ligando x_0 a x. Se $\sigma : \Delta^1 \to X$ é um 1-simplexo singular, definimos

$$g_\gamma(\sigma) = \{\gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \gamma_{\sigma(1)}^{-1}\} \in \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}.$$

Por extensão linear, obtemos um homomorfismo

$$g_\gamma : S_1(X; \mathbb{Z}) \to \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}.$$

Essa aplicação depende, em geral, da escolha da família (γ_x), mas sua restrição a $Z_1(X; \mathbb{Z})$ não. De fato, se $(\mu_x)_{x \in X}$ é outra escolha e g_μ é a aplicação correspondente, então, para cada 1-simplexo singular σ,

$$g_\mu(\sigma) = u(\sigma(0))\, g_\gamma(\sigma)\, u(\sigma(1))^{-1}, \qquad u(x) = \{\mu_x * \gamma_x^{-1}\}.$$

Logo, se

$$z = n_1\sigma_1 + \cdots + n_k\sigma_k \in Z_1(X; \mathbb{Z}),$$

como g_μ e g_γ são homomorfismos e $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1, \pi_1]$ é abeliano, temos

$$\begin{aligned} g_\mu(z) &= g_\mu(\sigma_1)^{n_1} \cdots g_\mu(\sigma_k)^{n_k} \\ &= u(\sigma_1(0))^{n_1} \cdots u(\sigma_k(0))^{n_k}\, g_\gamma(\sigma_1)^{n_1} \cdots g_\gamma(\sigma_k)^{n_k}\, u(\sigma_1(1))^{-n_1} \cdots u(\sigma_k(1))^{-n_k}. \end{aligned}$$

Mas

$$\partial z = \sum_{i=1}^{k} n_i\, \partial\sigma_i = \sum_{i=1}^{k} n_i\big(\sigma_i(1) - \sigma_i(0)\big) = 0.$$

Como $S_0(X; \mathbb{Z})$ é o grupo abeliano livre gerado pelos pontos de X, segue que, para cada $x \in X$, o coeficiente de x nessa soma é nulo. Portanto,

$$\sum_{\sigma_i(1)=x} n_i - \sum_{\sigma_i(0)=x} n_i = 0,$$

isto é,

$$\sum_{\sigma_i(1)=x} n_i = \sum_{\sigma_i(0)=x} n_i \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Agora, no produto

$$u(\sigma_1(0))^{n_1} \cdots u(\sigma_k(0))^{n_k}\, u(\sigma_1(1))^{-n_1} \cdots u(\sigma_k(1))^{-n_k},$$

podemos agrupar os fatores correspondentes a um mesmo vértice x, pois $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1, \pi_1]$ é abeliano. A contribuição total de $u(x)$ é então

$$u(x)^{\sum_{\sigma_i(0)=x} n_i - \sum_{\sigma_i(1)=x} n_i} = u(x)^0 = 1.$$

Logo, todo esse produto é igual a 1, e portanto

$$u(\sigma_1(0))^{n_1} \cdots u(\sigma_k(0))^{n_k} = u(\sigma_1(1))^{n_1} \cdots u(\sigma_k(1))^{n_k}.$$

Portanto $g_\mu(z) = g_\gamma(z)$.

Pela independência demonstrada acima, podemos denotar por

$$g : Z_1(X; \mathbb{Z}) \to \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}$$

a restrição comum das aplicações g_γ a $Z_1(X; \mathbb{Z})$. Resta agora mostrar que g leva $B_1(X; \mathbb{Z})$ no elemento trivial de

$$\frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}.$$

Uma vez feito isso, g induzirá um homomorfismo

$$\overline{g} : H_1(X; \mathbb{Z}) \to \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}.$$

Lema 10.4

$$g(B_1(X; \mathbb{Z})) = \{1\}.$$

Demonstração. Como $B_1(X; \mathbb{Z})$ é gerado por todos os elementos do tipo $\partial(\sigma)$, onde $\sigma : \Delta^2 \to X$ é um 2-simplexo singular, basta provar que, neste caso, $g(\partial(\sigma))$ é o elemento identidade.

Sejam $v_i = \sigma(e_i)$, para $i = 0, 1, 2$,

$$a = \sigma|_{[e_0, e_1]}, \qquad b = \sigma|_{[e_1, e_2]}, \qquad c' = \sigma|_{[e_0, e_2]},$$

e seja $c = (c')^{-1}$, conforme representado na Figura 10.8. Como $\partial\sigma = a + b - c' \in$

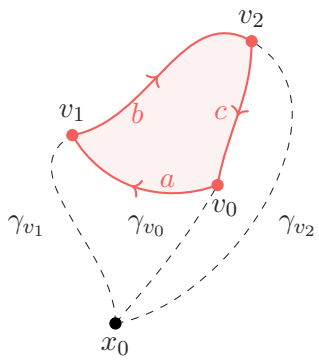


Figura 10.8.

$Z_1(X;\mathbb{Z})$, temos $g(\partial\sigma) = g_\gamma(a+b-c')$. Assim,

$$\begin{aligned} g(\partial\sigma) &= g_\gamma(a+b-c') \\ &= g_\gamma(a)\cdot g_\gamma(b)\cdot g_\gamma(c')^{-1} \\ &= \{(\gamma_{v_0} * a * \gamma_{v_1}^{-1}) * (\gamma_{v_1} * b * \gamma_{v_2}^{-1}) * (\gamma_{v_0} * c' * \gamma_{v_2}^{-1})^{-1}\} \\ &= \{\gamma_{v_0} * a * b * c * \gamma_{v_0}^{-1}\}. \end{aligned}$$

Finalmente, como o caminho fechado $a * b * c$ é homotópico ao caminho constante baseado em v_0, temos que o caminho fechado entre chaves é homotópico ao caminho constante baseado em x_0. Logo, $g(\partial\sigma) = 1$. ∎

Precisamos de mais uma notação. Por linearidade, a aplicação $x \mapsto \gamma_x$ induz um homomorfismo

$$\gamma : S_0(X;\mathbb{Z}) \to S_1(X;\mathbb{Z}),$$

e escreveremos

$$\gamma_{\sum n_i x_i} \coloneqq \sum n_i\, \gamma_{x_i}.$$

Se σ é uma 1-cadeia em X, então

$$\overline{h}\, g_\gamma(\sigma) = [\,\sigma - \gamma_{\partial\sigma}\,].$$

Em particular, se σ é um ciclo, então

$$\overline{h}\, g(\sigma) = [\sigma].$$

Demonstração. Para um 1-simplexo singular σ, temos

$$g_\gamma(\sigma) = \{\gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \gamma_{\sigma(1)}^{-1}\}.$$

Pela definição de $\overline{h}$,

$$\overline{h}\, g_\gamma(\sigma) = [\gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \gamma_{\sigma(1)}^{-1}].$$

Pelo Lema 10.3,

$$[\gamma_{\sigma(0)} * \sigma * \gamma_{\sigma(1)}^{-1}] = [\gamma_{\sigma(0)} + \sigma + \gamma_{\sigma(1)}^{-1}].$$

Portanto,

$$\overline{h}\, g_\gamma(\sigma) = [\gamma_{\sigma(0)} + \sigma - \gamma_{\sigma(1)}] = [\sigma - \gamma_{\partial\sigma}].$$

Por linearidade, a igualdade vale para toda 1-cadeia σ. Se σ é um ciclo, então $\partial\sigma = 0$, e portanto $\overline{h}\, g(\sigma) = [\sigma]$. ∎

Demonstração do Teorema de Poincaré-Hurewicz Já demonstramos que a aplicação

$$\overline{h} : \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

definida anteriormente é um homomorfismo. Como $g(B_1(X; \mathbb{Z})) = \{1\}$, a aplicação g induz um homomorfismo

$$\overline{g} : H_1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \frac{\pi_1(X, x_0)}{[\pi_1, \pi_1]}$$

colocando $\overline{g}([z]) = g(z)$. Além disso, para cada classe de laços $\{\alpha\}$ baseada em x_0, temos

$$\overline{g}\,\overline{h}(\{\alpha\}) = \overline{g}([\alpha]) = \{\gamma_{x_0} * \alpha * \gamma_{x_0}^{-1}\} = \{\alpha\},$$

pois classes conjugadas coincidem na abelianização $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1, \pi_1]$. Reciprocamente, para cada $[z] \in H_1(X; \mathbb{Z})$, a proposição anterior mostra que

$$\overline{h}\,\overline{g}([z]) = \overline{h}(g(z)) = [z].$$

□

10.5. Propriedade de Excisão e Sequência de Mayer-Vietoris

Nesta seção, vamos apresentar a propriedade de excisão para a homologia singular, que é uma das principais características da homologia singular e que nos permite calcular de modo efetivo a homologia. A demonstração da propriedade de excisão depende do Princípio da Localidade que será apresentado na próxima seção, vamos nos concentrar aqui em algumas consequências e aplicações. Em particular, vamos deduzir a sequência de Mayer-Vietoris e, em seguida, calcular os grupos de homologia das esferas.

Queremos definir o conceito de simplexos singulares pequeno (ou local). Se estivéssemos num espaço métrico poderíamos usar o conceito de diâmetro do simplexo, não estando, definimos um simplexo singular como pequeno se ele estiver contido numa cobertura aberta dada.

Seja X um espaço topológico, para qualquer família $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X que formam uma cobertura aberta de X, dizemos que um p-simplexo singular $\sigma : \Delta^p \to X$ é $\mathcal{U}$-**pequeno** se sua imagem estiver contida em algum U_i. O submódulo $S_p^{\mathcal{U}}(X;R)$ de $S_p(X;R)$ consiste em todas as p-cadeias singulares $\sum \lambda_k\sigma_k$ tal que cada p-simplexo σ_k é $\mathcal{U}$-pequeno.

O morfismo de bordo $\partial_p : S_p(X;R) \to S_{p-1}(X;R)$ leva $S_p^{\mathcal{U}}(X;R)$ em $S_{p-1}^{\mathcal{U}}(X;R)$ e, dessa forma, $S^{\mathcal{U}}(X;R)$ é um complexo de cadeias. Os módulos de homologia do complexo $S^{\mathcal{U}}(X;R)$ são denotados por $H_p^{\mathcal{U}}(X;R)$.

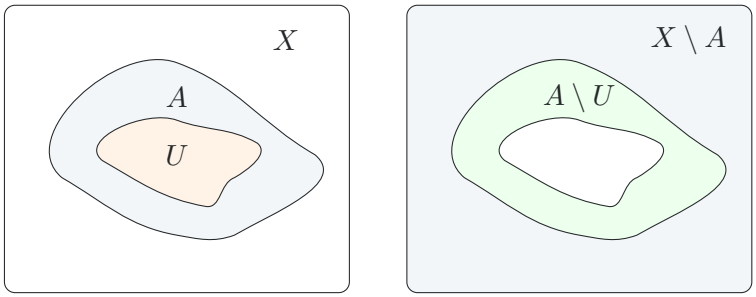
Princípio da Localidade. Seja X um espaço topológico, para qualquer família $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos que formam uma cobertura aberta de X, as inclusões $\iota_p : S_p^{\mathcal{U}}(X;R) \to S_p(X;R)$ induzem uma equivalência homotópica de cadeia; ou seja, existe uma família de morfismos de cadeias $\rho_p : S_p(X;R) \to S_p^{\mathcal{U}}(X;R)$ tal que $\rho \circ \iota$ é homotópica à aplicação identidade de $S^{\mathcal{U}}(X;R)$ e $\iota \circ \rho$ é homotópica a aplicação identidade de $S_*(X;R)$. Como consequência, temos os isomorfismos $H_p^{\mathcal{U}}(X;R) \cong H_p(X;R)$, para todo $p \geq 0$.

A prova do Princípio da Localidade, apesar de intuitivamente simples, é longa e com passagens técnicas e é feita através da construção da subdivisão baricêntrica e será feita na próxima seção.

de Excisão. Seja X um espaço topológico e $U \subset A \subset X$ um subespaço tal que $\operatorname{cl} U \subset \operatorname{int} A$. Então a inclusão $(X\backslash U,\ A\backslash U) \to (X,\ A)$ induz isomorfismos nos

grupos de homologia relativos:

$$H_n(X \setminus U,\ A \setminus U; R) \cong H_n(X,\ A; R)\ ,\ n \geq 0. \tag{10.4}$$



Este teorema pode ser reformulado do seguinte modo.

de Excisão. Sejam X um espaço topológico e subespaços $X_1, X_2 \subseteq X$ tais que $\operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2 = X$. Então a inclusão $(X_1,\ X_1 \cap X_2) \to (X,\ X_2)$ induz isomorfismos em todos os grupos de homologia relativa:

$$H_n(X_1,\ X_1 \cap X_2; R) \cong H_n(X,\ X_2; R)\ ,\ n \geq 0.$$

Os Teoremas 10.5 e 10.5 são equivalentes, o que pode ser visto fazendo $A = X_2$ e $U = X \setminus X_1$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que X_1 e X_2 são conjuntos abertos e que $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$. Para simplificar a notação, omitiremos o anel R.

Queremos mostrar que $S_*(X_1, X_1 \cap X_2) \to S_*(X, X_2)$ induz isomorfismos nos grupos de homologia.

Considere o seguinte diagrama formado por sequências exatas curtas de complexos de cadeias

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_*(X_2) & \longrightarrow & S_*^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(X_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_*(X_2) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(X, X_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

A morfismo vertical do meio induz um isomorfismo de homologia pelo Princípio da Localidade, então temos, pela Sequência Exata Longa de Homologia:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_n(X_2) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(X_2)) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) & \\
& \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H_n(X_2) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) &
\end{array}$$

logo, pelo Lema dos Cinco (veja Exercício 86), temos que $H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(X_2)) \cong H_n(X, X_2)$.

Mas $S_n^{\mathcal{U}}(X) = S_n(X_2) + S_n(X_1)$, e assim

$$\frac{S_n(X_1)}{S_n(X_2 \cap X_1)} = \frac{S_n(X_1)}{S_n(X_2) \cap S_n(X_1)} \cong \frac{S_n(X_2) + S_n(X_1)}{S_n(X_2)} = \frac{S_n^{\mathcal{U}}(X)}{S_n(X_2)},$$

onde usamos o terceiro Teorema do Isomorfismo. Logo,

$$H_n(X, X_2) \cong H_n(S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(X_2)) \cong H_n(X_1, X_1 \cap X_2).$$

■

O Princípio da Localidade fornece uma prova simples da sequência de Mayer-Vietoris em homologia singular.

Sequência de Mayer-Vietoris na Homologia Singular.
Sejam X um espaço topológico e subconjuntos A, B de X tais que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$, então existe uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_p(A \cap B; R) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(A; R) \oplus H_p(B; R) \xrightarrow{\psi_*} H_p(X; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A \cap B; R$$

onde as aplicações φ e ψ são definidas por

$$\varphi_*(\gamma) = (i_*(\gamma),\ -j_*(\gamma))$$
$$\psi_*(\alpha,\ \beta) = k_*(\alpha) + l_*(\beta)\ ,$$

e onde i, j, k, l são as aplicações de inclusão mostradas no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
A \cap B & \xrightarrow{\ i\ } & A \\
{\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\
B & \xrightarrow{\ l\ } & X.
\end{array}$$

Se $A \cap B \neq \emptyset$, existe uma sequência similar em homologia reduzida.

Demonstração. Definimos uma sequência

$$0 \longrightarrow S_p(A \cap B; R) \xrightarrow{\varphi} S_p(A; R) \oplus S_p(B; R) \xrightarrow{\psi} S_p(A; R) + S_p(B; R) \longrightarrow 0$$

para todo $p \geq 0$, onde φ e ψ são definidas como

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= (i_\#(\sigma),\ -j_\#(\sigma)) \\ \psi(\alpha,\ \beta) &= k_\#(\alpha) + l_\#(\beta)\ . \end{aligned}$$

Observe que $\psi \circ \varphi = 0$. A aplicação φ é injetora, enquanto ψ é sobrejetora. Temos $\operatorname{im}\varphi \subseteq \ker\psi$, pois $\psi\circ\varphi = 0$. O kernel de ψ consiste em todas as cadeias da forma $(\sigma,\ -\sigma)$, onde $\sigma \in S(A; R)$ e $-\sigma \in S(B; R)$, pois dessa forma $\sigma \in S_p(A \cap B; R)$, por outro lado temos que $\varphi(\sigma) = (\sigma,\ -\sigma)$, o que mostra que $\ker\psi \subseteq \operatorname{im}\varphi$. Portanto, a sequência é exata e temos uma sequência exata curta de complexos de cadeias.

$$0 \longrightarrow S_*(A \cap B; R) \xrightarrow{\varphi} S_*(A; R) \oplus S_*(B; R) \xrightarrow{\psi} S_*(A; R) + S_*(B; R) \longrightarrow 0.$$

E logo temos a seguinte sequência exata longa em homologia

$$\cdots \longrightarrow H_p(A \cap B; R) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(A; R) \oplus H_p(B; R) \xrightarrow{\psi_*} H_p(S_*(A; R) + S_*(B; R) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A \cap B; R) \longrightarrow \cdots$$

No entanto, como $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$, a Proposição 10.5 implica que

$$H_p(S_*(A; R) + S_*(B; R)) \cong H_p(X)\ ,$$

e obtemos a sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_p(A \cap B; R) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(A; R) \oplus H_p(B; R) \xrightarrow{\psi_*} H_p(X; R) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A \cap B; R) \longrightarrow \cdots\ ,$$

como desejado.

Um argumento semelhante se aplica à homologia reduzida. ∎

O morfismo de conexão $\partial_* : H_n(X;R) \to H_{n-1}(A \cap B;R)$ possui a seguinte descrição: dada uma classe $\alpha \in H_n(X)$, esta pode ser representada por um ciclo $z = x+y$ de cadeias x, y em A e B, respectivamente, satisfazendo $\partial z = \partial(x+y) = 0$ e o elemento $\partial_*\alpha H_{n-1}(A \cap B)$ é representado pelo ciclo $\partial x = -\partial y$.

O Teorema de Mayer-Vietoris permite cálculos indutivos de grupos de homologia. Ilustraremos esse fato calculando os grupos de homologia das esferas.

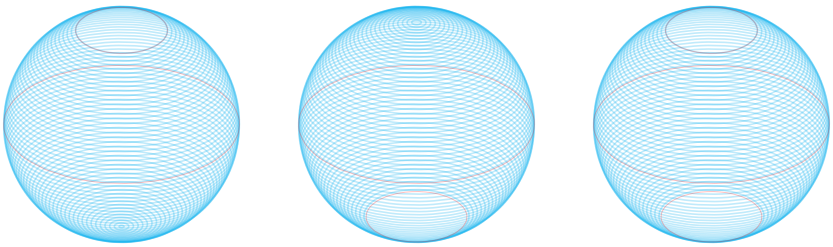
Os grupos de homologia singular da esfera $\mathbb{S}^m$, com $m \geq 0$, são dados por:

$$\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^m;R) \cong \begin{cases} R, & n = m \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O que pode ser reescrito como:

$$H_n(\mathbb{S}^0;R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$H_n(\mathbb{S}^m;R) \cong \begin{cases} R, & n = 0 \\ R, & n = m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \text{se } m > 0$$



X^+ X^- $X^+ \cap X^-$

Demonstração. Como $\mathbb{S}^0$ é a união disjunta de dois pontos, já calculamos seus grupos de homologia. Além disso, como todas as esferas restantes são conexas por caminho, já conhecemos todos os grupos de homologia zero dimensional.

Para $n \geq 1$ consideramos a decomposição $\mathbb{S}^m = X^+ \cup X^-$ sendo X^+ e X^- a esfera menos o polo norte e sul respectivamente, a parte interessante da sequência de Mayer-Vietoris, omitindo o anel R por brevidade, é:

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_n(X^+) \oplus \widetilde{H}_n(X^-) \longrightarrow \widetilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(X^+) \oplus \widetilde{H}_{n-1}($$

Como X^+ e X^- são contráteis e $X^+ \cap X^- \simeq \mathbb{S}^{m-1}$, obtemos um isomorfismo $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^m) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1})$. A hipótese indutiva nos permite concluir a demonstração. A elegância desse cálculo está em termos usado a homologia reduzida, o que permitiu a redução do número de casos. ■

1. Para $m \neq n$, as esferas $\mathbb{S}^m$ e $\mathbb{S}^n$ não possuem o mesmo tipo de homotopia.
2. Para $m \geq 0$, a esfera $\mathbb{S}^m$ não é contrátil.

Exemplo 10.3 — Grupos de Homologia do 8.

Seja X a figura do "oito" representada na Figura 10.9. Seja A o subconjunto obtido excluindo o ponto mais à esquerda e B o subconjunto obtido excluindo o ponto mais à direita. Então A e B são ambos homotopicamente equivalentes a $\mathbb{S}^1$, en-

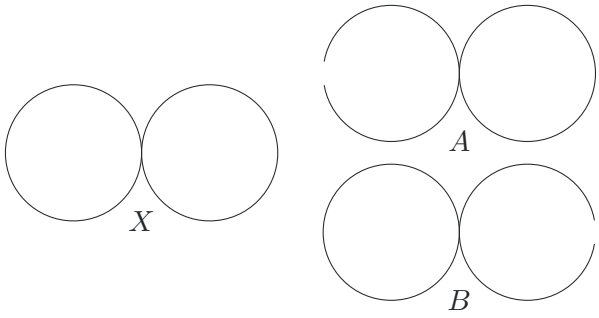


Figura 10.9.: Oito

quanto sua interseção $A \cap B$ é homotopicamente equivalente a um único ponto $*$. Portanto, temos a seguinte sequência de Mayer-Vietoris para X

$$\cdots \longrightarrow H_p(*;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \oplus H_p(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi_*} H_p(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*}$$

$$\cdots \longrightarrow H_1(*;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \oplus H_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi_*} H_1(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*}$$

$$H_0(*;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \oplus H_0(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi_*} H_0(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Usando as informações sobre as homologias de $\mathbb{S}^1$ e $*$, temos:

$$0 \to H_p(X;\mathbb{Z}) \to 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$\longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Logo, $H_n(X) = 0$, para $n > 1$.

Vamos provar que $H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Para isso, considere a sequência exata

$$0 \xrightarrow{a_6} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{a_5} H_1(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{a_4} \mathbb{Z} \xrightarrow{a_3} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{a_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{a_1} 0. \qquad (10.5)$$

Como $\operatorname{im} a_2 = \ker a_1 = \mathbb{Z}$, temos que a_2 é sobrejetiva, logo,

$$\frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\ker a_2} \cong \operatorname{im} a_2 = \mathbb{Z}.$$

Como qualquer subgrupo de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ é da forma $(m\mathbb{Z})\oplus(n\mathbb{Z})$, o quociente $\frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\ker a_2}$ é da forma $\mathbb{Z}/(m)\oplus\mathbb{Z}/(n)$, onde m, n podem ser zero e convencionamos $\mathbb{Z}/(0) = \mathbb{Z}$. Logo, ou $\ker a_2 = \mathbb{Z}\oplus 0$ ou $\ker a_2 = 0\oplus\mathbb{Z}$, assim $\operatorname{im} a_3 = \mathbb{Z}\oplus 0$ ou $\operatorname{im} a_3 = 0\oplus\mathbb{Z}$. Portanto, $\ker a_3 = 0$ e a_4 é a aplicação nula, o que implica que a_5 é um isomorfismo.

Outro modo de lidar com a sequência da Equação 10.5 é olhar para a aplicação a_3. Se $a_3 = 0$ temos que

$$0 \xrightarrow{a_3} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{a_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{a_1} 0\ .$$

o que gera um absurdo. Logo $a_3 \neq 0$ e assim a_3 é injetiva e logo $\ker a_3 = 0$ e consequentemente $\operatorname{im} a_4 = 0$ e logo temos

$$0 \xrightarrow{a_6} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{a_5} H_1(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{a_4} 0$$

o que implica que a_5 é um isomorfismo

Finalmente, vale a pena observar que o cálculo é bem mais simples se utilizarmos a homologia reduzida. Nesse caso teríamos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{H}_1(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

e assim $H_1(X;\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_1(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

◁

Exemplo 10.4 — Garrafa de Klein.

Para o cálculo dos grupos de homologia da garrafa de Klein, usaremos a decomposição de $\mathbb{K}$ como a união de duas faixas de Möbius A e B coladas ao longo do seu bordo, que é um círculo, conforme apresentado nas Figuras 10.10 e 10.11. Assim, A,

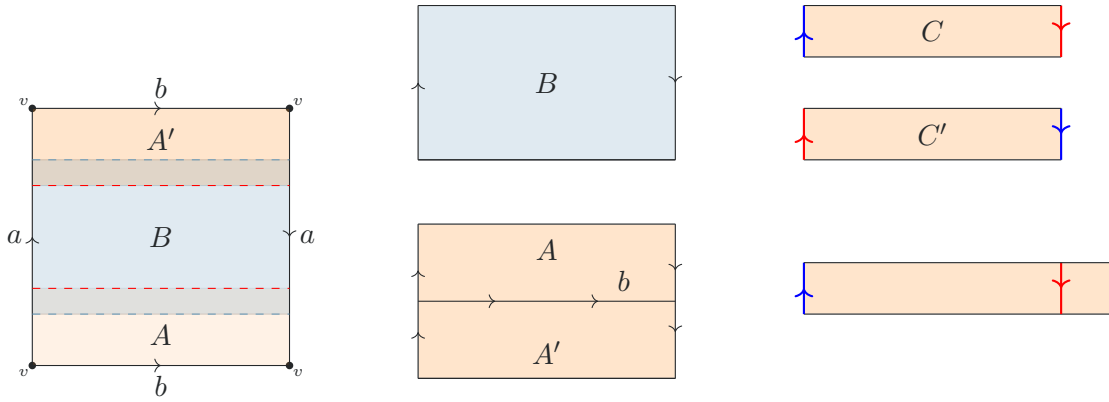


Figura 10.10.: Decomposição da Garrafa de Klein como duas faixas de Möbius (B e $A' \cup A$) que se intersectam em C e C' que se colam num círculo.

B e sua interseção $A \cap B$ são homotopicamente equivalentes a círculos, portanto a parte não trivial da sequência de Mayer-Vietoris produz

$$0 \to \widetilde{H}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \widetilde{H}_1(\mathbb{K}) \to 0$$

e a parte trivial implica que a homologia de $\mathbb{K}$ se anula para dimensões maiores que 2.

A aplicação α envia 1 para $(2, -2)$, já que o círculo que forma o bordo de uma faixa de Möbius envolve duas vezes o círculo central e $\varphi(\sigma) = (i_\#(\sigma),\ -j_\#(\sigma))$. Em particular, α é injetora, logo a homologia da dimensão 2 também se anula.

Temos ainda que $\operatorname{im}\alpha = (2\mathbb{Z}, -2\mathbb{Z}) = \ker\beta$ e $\operatorname{im}\beta = \widetilde{H}_1(\mathbb{K})$. logo

$$\widetilde{H}_n(\mathbb{K}) = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{(2\mathbb{Z}, -2\mathbb{Z})}$$

Finalmente, escolhendo $(1, 0)$ e $(1, -1)$ como base para $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, segue que $\widetilde{H}_n(\mathbb{K}) =$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e assim

$$\widetilde{H}_n(\mathbb{K}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

◁

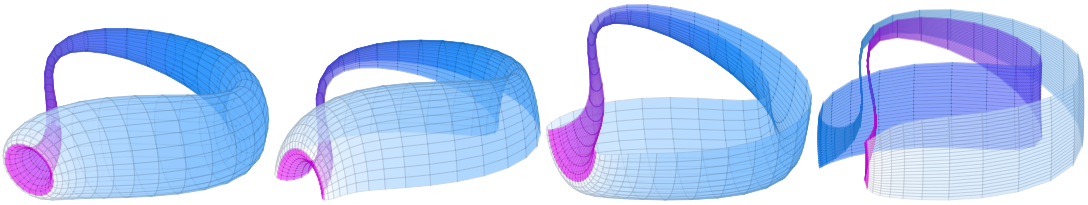


Figura 10.11.: Decomposição da garrafa de Klein $\mathbb{K}$ como a união de duas faixas de Möbius A e B coladas ao longo de seu bordo

Relembre que (X, A) é um bom par, se $A \subset X$ é um subespaço fechado não vazio que é um retrato de deformação de alguma vizinhança em X, veja a Definição 10.3.

Se (X, A) é um bom par, então a aplicação quociente $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ induz um isomorfismo $q_* : H_n(X, A; R) \to H_n(X/A, A/A; R) \cong \widetilde{H}_n(X/A; R)$, para todo n.

Demonstração. Dada uma vizinhança V de A em X tal que A é um retrato de deformação de V, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A; R) & \longrightarrow & H_n(X, V; R) & \longleftarrow & H_n(X - A, V - A; R) \\ \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} & & \downarrow{\scriptstyle q_*} \\ H_n(X/A, A/A; R) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A; R) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A; R) \end{array}$$

Se considerarmos a sequência exata longa da tripla (X, V, A)

$$\cdots \longrightarrow H_n(V, A; R) \longrightarrow H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(X, V; R) \longrightarrow H_{n-1}(V, A; R) \longrightarrow \cdots$$

temos que os grupos $H_n(V, A)$ são zero para todo n, porque um retrato de deformação de V sobre A fornece uma equivalência homotópica de pares $(V, A) \cong (A, A)$

e $H_n(A, A) = 0$, o que implica que a seta horizontal superior esquerda é um isomorfismo: $H_n(X, A; R) \cong H_n(X, V; R)$. O mesmo argumento para V/A e A/A mostra que a seta horizontal inferior esquerda também é um isomorfismo. Os outros dois morfismos horizontais são isomorfismos diretamente da propriedade de excisão. A aplicação vertical à direita $q*$ é um isomorfismo já que q se restringe a um homeomorfismo no complemento de A. Finalmente, segue da comutatividade do diagrama que o q_* do lado esquerdo é um isomorfismo. ■

Para a união por um ponto $\bigvee_\alpha X_\alpha$, as inclusões $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ induzem o isomorfismo

$$\oplus_\alpha i_{\alpha *} : \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n\left(X_\alpha\right) \to \widetilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right),$$

se a união por um ponto for feita em pontos base $x_\alpha \in X_\alpha$ de forma que os pares (X_α, x_α) sejam bons. A demonstração é direta e será deixada como exercício.

10.6. Limites Diretos e Axioma de Suporte Compacto

Limites Diretos Um conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{I}, \leq)$ é **dirigido** se para todo $i, j \in \mathscr{I}$ existe $k \in \mathscr{I}$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.

1. Números naturais $\mathbb{N}$ com a ordem parcial $\leq$ usual.
2. Números naturais positivos, com a ordem: $i \leq j$ se $i \mid j$. Esse conjunto é dirigido pois $i, j \mid (ij)$.
3. Se x_0 é um número real, então o conjunto $I = \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ pode ser transformado em um conjunto direcionado definindo $a \leq_I b$ se $|a - x_0| \geq |b - x_0|$. Portanto, os elementos "maiores" estão mais próximos de x_0.
4. Se X é um espaço e A um subespaço, podemos considerar o conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{U}_A$ cujos elementos são os subconjuntos abertos de X contendo A, ordenados dizendo que $U \leq V$ se $U \supseteq V$. Esse conjunto é dirigido porque a interseção de dois conjuntos abertos é aberto.

Seja $\mathscr{I}$ um conjunto dirigido. Um **sistema dirigido** por $\mathscr{I}$ em uma categoria $\mathscr{C}$ é um funtor $\mathscr{I} \to \mathscr{C}$. Isso significa que para cada $i \in \mathscr{I}$ associamos um objeto $X_i \in \mathscr{C}$, e para cada $i \leq j$ atribuímos uma aplicação $f_{i,j} : X_i \to X_j$, de tal forma que $f_{i,i} = \mathrm{id}_{X_i}$ e se $i \leq j \leq k$ então $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$.

Exemplo 10.5.

Se $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, \leq)$, então temos um "diagrama linear"

$$X_0 \xrightarrow{f_{0,1}} X_1 \xrightarrow{f_{1,2}} X_2 \to \cdots .$$

◁

Exemplo 10.6.

Suponha que $\mathscr{I} = (\mathbb{N}_{>0}, |)$, ou seja, o segundo exemplo acima. Você pode considerar $\mathscr{I} \to \mathbf{Ab}$, digamos atribuindo a cada i os inteiros $\mathbb{Z}$ e $f_{i,j} : \mathbb{Z} \xrightarrow{j/i} \mathbb{Z}$.

◁

Exemplo 10.7 — Sistemas Constantes.

Seja $\mathscr{I}$ qualquer conjunto dirigido e $\mathscr{C}$ qualquer categoria. Um objeto $A \in \mathscr{C}$ determina um conjunto $\mathscr{I}$ dirigido, ou seja, o funtor constante $c_A : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$.

◁

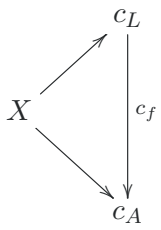
Para comparar sistemas, precisamos de morfismos. Observamos que sistemas dirigidos em $\mathscr{C}$ são functores $\mathscr{I} \to \mathscr{C}$. Eles estão relacionados por transformações naturais, e esses são os morfismos na categoria de sistemas dirigidos $\mathscr{I}$. Ou seja, um morfismo é uma escolha da aplicação $g_i : X_i \to Y_i$, para cada $i \in \mathscr{I}$, tal que

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & X_j \\ {\scriptstyle g_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_j} \\ Y_i & \longrightarrow & Y_j \end{array}$$

comuta para todo $i \leq j$.

Seja $X : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ um sistema dirigido. O **limite direto** de X é um objeto L e uma aplicação $X \to c_L$ que é inicial entre as aplicações para sistemas constantes. Isso significa que dado qualquer outra aplicação para um sistema constante,

digamos $X \to c_A$, existe uma aplicação única $f : L \to A$ tal que



comuta.

Esta é uma propriedade universal.

É fácil ver que quaisquer dois limites diretos são canonicamente isomorfos; mas um sistema dirigido pode não ter um limite direto. A existência depende fortemente da categoria em consideração.

O limite direto de

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \xrightarrow{4} \cdots$$

na categoria dos grupos abelianos é $\mathbb{Q}$.

Podemos reescrever o acima como um sistema isomorfo composto de inclusões de subgrupos de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \frac{1}{1}\mathbb{Z} \hookrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z} \hookrightarrow \frac{1}{3!}\mathbb{Z} \hookrightarrow \cdots .$$

Observe os diagramas comutativos que mostram que esse sistema é isomorfo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad n \quad} & \mathbb{Z} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \frac{1}{(n-1)!}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \frac{1}{(n)!}} \\ \dfrac{1}{(n-1)!}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \dfrac{1}{n!}\mathbb{Z} \end{array}$$

Neste ponto o limite direto é a união dos subgrupos ascendentes, que dará o subgrupo de racionais.

Construção de Limites Diretos Limites diretos podem ser construídos a partir de coprodutos e quocientes. Suponha que $X : \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ seja um sistema dirigido.

Para construir o limite direto, comece formando (se possível) o coproduto sobre os elementos de $\mathscr{I}$,

$$\coprod_{i\in\mathscr{I}} X_i.$$

e munindo de uma certa relação de equivalência $\sim$:

$$\varinjlim A_i = \bigsqcup_i A_i \Big/ \sim .$$

Onde , se $x_i \in A_i$ e $x_j \in A_j$, então $x_i \sim x_j$ se, e somente se, houver algum $k \in I$ com $i \leq k$ e $j \leq k$ e tal que $f_{i,k}(x_i) = f_{j,k}(x_j)$. Intuitivamente, dois elementos na união disjunta são equivalentes se, e somente se, eles "eventualmente se tornam iguais" no sistema direto. Uma formulação equivalente que destaca a dualidade ao limite inverso é que um elemento é equivalente a todas as suas imagens sob os mapas do sistema direto, ou seja, $x_i \sim f_{i,j}(x_i)$ sempre que $i \leq j$.

O processo de formação do coproduto e do quociente dependerá da categoria em que você está trabalhando e pode não ser possível. Em conjuntos, o coproduto é uma união disjunta e o quociente forma apenas classes de equivalência. Nos grupos abelianos, o coproduto é a soma direta e para formar o quociente você divide pelo subgrupo gerado pelas diferenças.

A conclusão é que existem limites diretos em $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Ab}$, ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ e muitas outras categorias.

O próximo lema que nos permite identificar quando uma aplicação para um sistema constante é um limite direto.

Seja $X : \mathscr{I} \to \mathbf{Ab}$ (ou ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$). Uma aplicação $f : X \to c_L$ (dada por $f_i : X_i \to L$ para $i \in \mathscr{I}$) é o limite direto se, e somente se,:

1. Para cada $x \in L$, existe um $i \in \mathscr{I}$ e um $x_i \in X_i$ tal que $f_i(x_i) = x$.
2. Seja $x_i \in X_i$ tal que $f_i(x_i) = 0$ in L. Então existe algum $j \geq i$ tal que $f_{ij}(x_i) = 0$ em X_j.

Exemplo 10.8.

Suponha que temos uma sequência crescente de subespaços, $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$. Essa família de conjuntos é um sistema dirigido de espaços, dirigido pelo conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$. É bastante claro que, como conjunto, o limite direto desse sistema é a união dos subespaços. Dizer que X é o limite direto desse sistema dirigido de espaços é dizer primeiro que X é a união dos espaços X_i, e segundo que a topologia em X é determinada pela topologia nos subespaços. Ou seja, é a topologia fraca, caracterizada pela propriedade de que uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a restrição de f a cada X_n é contínua. Isso quer dizer que um subconjunto de X é aberto se, e somente se, sua interseção com cada X_n é aberto em X. Por exemplo, um CW-complexo é o limite direto de seu esqueleto.

◁

O funtor limite direto $\varinjlim_{i \in \mathscr{I}} : \mathrm{Fun}(\mathscr{I}, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ é exato. Em outras palavras, se $X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} Z$ é uma sequência exata de $\mathscr{I}$ sistemas dirigidos, o que significa que em cada índice temos uma sequência exata de grupos abelianos, então $\varinjlim_{i \in \mathscr{I}} X \to \varinjlim_{i \in \mathscr{I}} Y \to \varinjlim_{i \in \mathscr{I}} Z$ é exato.

Demonstração. Como $q \circ p : X \to Z$ é zero, então $\varinjlim_{i \in \mathscr{I}} X \to \varinjlim_{i \in \mathscr{I}} Z$ é a aplicação zero. Seja $y \in \varinjlim_{i \in \mathscr{I}} Y$, e suponha que y corresponda a 0 em $\varinjlim_{i \in \mathscr{I}} Z$. Logo existe i tal que $y = f_i(y_i)$ para algum $y_i \in Y_i$. Então $0 = q(y) = qf_i(y_i) = f_i q(y_i)$ porque q é uma aplicação de sistemas dirigidos.

Isso significa que existe $j \geq i$ tal que $f_{ij} q(y_i) = 0$ em Z_j. Então $q f_{ij} y_i = 0$, novamente porque q é uma aplicação de sistemas dirigidos. Então $f_{ij} y_i$ é um elemento em Y_j que é levado para zero sob q, então existe $x_j \in X_j$ tal que $p(x_j) = f_{ij} y_i$. Então $f_j(x_j) \in \varinjlim_{i \in \mathscr{I}} X$ é levado para y. ■

A exatidão do limite direto tem muitas consequências úteis. Por exemplo:

Seja $i \mapsto C(i)$ um sistema dirigido de complexos em cadeia. Então existe um isomorfismo natural

$$\varinjlim_{i \in \mathscr{I}} H_*(C(i)) \to H_* \left(\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} C(i) \right).$$

Axioma de Suporte Compacto O Axioma de Suporte Compacto, que apresentaremos a seguir, implica que os grupos de homologia $H_p(X, A; R)$ são determinados pelos grupos $H_p(C, D; R)$ onde (C, D) é um par compacto em (X, A), o que significa que $D \subseteq C \subseteq X, D \subseteq A \subseteq X$ onde C é compacto e D é compacto em C.

Sejam $\mathcal{K}(X, A)$ os conjuntos de todos os pares compactos de (X, A) ordenados por inclusão então $\mathcal{K}(X, A)$ é um conjunto dirigido.

Para qualquer par (X, A) de espaços topológicos com $A \subseteq X$, valem as seguintes propriedades:

1. Dada uma classe de homologia $\alpha \in H_p(X, A)$, existe um par compacto (C, D) em (X, A) e uma classe de homologia $\beta \in H_p(C, D; R)$ tal que $i_*(\beta) = \alpha$, onde $i : (C, D) \to (X, A)$ é a inclusão.

2. Seja (C, D) um par compacto em (X, A), e seja $\beta \in H_p(C, D; R)$ uma classe de homologia tal que $i_*(\beta) = 0$. Então existe um par compacto (C', D') tal que $(C, D) \subseteq (C', D') \subseteq (X, A)$ e $j_*(\beta) = 0$, onde $j : (C, D) \to (C', D')$ é a inclusão.

3. O funtor de homologia comuta com limites diretos.

4. O R-módulo $H_p(X, A; R)$ é isomorfo ao limite direto.

$$H_p(X, A; R) \cong \varinjlim_{(C,D)\in\mathcal{K}(X,A)} H_p(C, A; R).$$

Demonstração.

1 Vamos fazer a demonstração no caso em que $A = \emptyset$. Para qualquer p-cadeia singular $c \in S_p(X; R)$ existe um subconjunto compacto C de X tal que $c \in S_p(C; R)$. Se $a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sigma_i \in S_p(X; R)$ é um ciclo representando a classe de homologia α, com $\lambda_i \in R$ e cada σ_i um p-simplexo $\sigma_i : \Delta^p \to X$, como Δ^p é compacto e cada σ_i é contínuo, $C = \sigma_1(\Delta^p) \cup \cdots \cup \sigma_k(\Delta^p)$ é um subconjunto compacto de X e $a \in S_p(C; R)$.

Seja $b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sigma_i' \in S_p(C; R)$ a cadeia p na qual $\sigma_i' : \Delta^p \to C$ é a restrição de σ_i a C. Precisamos verificar se b é um ciclo p. Por definição da inclusão i temos $a = i_\sharp(b)$, e como a é um ciclo p temos

$$i_\sharp \circ \partial(b) = \partial \circ i_\sharp(b) = \partial a = 0.$$

Como i é injetora, $i_\sharp$ também é injetora, portanto $\partial b = 0$, o que significa que $b \in S_p(C; R)$ é de fato um p-ciclo, e se β denota a classe de homologia de b, temos $i_*(\beta) = \alpha$. O argumento acima é facilmente adaptado ao caso em que $A \neq \emptyset$.

2 É consequência do Corolário 10.6.

Se o conjunto X for localmente compacto teremos como consequência que a homologia dos subconjunto de uma união crescente de conjuntos abertos determina a homologia da união.

10.7. Demonstração do Princípio da Localidade

Princípio da Localidade. Seja X um espaço topológico, para qualquer família $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos que formam uma cobertura aberta de X, as inclusões $\iota_p : S_p^{\mathcal{U}}(X; R) \to S_p(X; R)$ induzem uma equivalência homotópica de cadeia; ou seja, existe uma família de morfismos de cadeias $\rho_p : S_p(X; R) \to S_p^{\mathcal{U}}(X; R)$ tal que $\rho \circ \iota$ é homotópica à aplicação identidade de $S^{\mathcal{U}}(X; R)$ e $\iota \circ \rho$ é homotópica a aplicação identidade de $S_*(X; R)$. Como consequência, temos os isomorfismos $H_p^{\mathcal{U}}(X; R) \cong H_p(X; R)$, para todo $p \geq 0$.

A prova da proposição baseia-se na construção de duas aplicações naturais: um morfismo de complexos de cadeias denominado divisão baricêntrica

$$\mathrm{bc} : S_\bullet(X; R) \to S_\bullet(X; R)$$

e uma homotopia de cadeia

$$R : S_\bullet(X; R) \to S_{\bullet+1}(X; R)$$

entre bc e a identidade. Assim, para qualquer $\sigma \in S(X; R)$, queremos ter:

$$\partial R_n(\sigma) + R_{n-1}(\partial\sigma) \;=\; \mathrm{bc}_n(\sigma) - \sigma.$$

Observe que a existência da homotopia de cadeias implica que bc induz a identidade em homologia, ou seja,

$$[\mathrm{bc}_n(\sigma)] \;=\; [\sigma] \in H_n(X)$$

para todo $\sigma \in S_n(X)$ com $\partial\sigma = 0$. Seguirá da construção que:

1. para qualquer $\sigma \in S_n(X;R)$, se aplicarmos bc a σ um número suficientemente grande de vezes, obtemos uma cadeia $\mathcal{U}$-pequena, ou seja, $(\mathrm{bc}_n)^k(\sigma) \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$, para k suficientemente grande.

2. se σ é uma cadeia $\mathcal{U}$-pequena, a cadeia $R_n(\sigma)$ também será uma cadeia $\mathcal{U}$-pequena.

A existência de tais aplicações implicam a Proposição 10.5.

Divisão Baricêntrica

Vamos começar com uma construção preliminar, a construção do **cone**.

Para $\sigma : \Delta^n \to A$ com A um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$, as aplicações lineares $\Delta^n \to A$ geram um subgrupo de $S_n(A;R)$ que denotamos $S_n^L(A;R)$, as cadeias lineares. O morfismo de bordo ∂ leva $S_n^L(A;R)$ a $S_{n-1}^L(A;R)$, e dessa forma as cadeias lineares formam um subcomplexo do complexo de cadeias singular de A.

Podemos designar de maneira inequívoca uma aplicação linear $\sigma : \Delta^n \to A$ por $[v_0, \cdots, v_n]$ onde v_i é a imagem sob σ do i-ésimo vértice de Δ^n.

Feita essas convenções definimos o cone:

$$\mathrm{C}_y(\sigma) = \mathrm{C}_y([v_0, v_1, \ldots, v_n]) = [y, v_0, v_1, \ldots, v_n]$$

A extensão linear de C_y para as cadeias lineares será denotada pela mesma notação:

$$\mathrm{C}_p : S_n^L(A;R) \to S_{n+1}^L(A;R)$$

Temos a seguinte expressão para o bordo do cone:

$$\partial\, \mathrm{C}_p(\sigma) \;=\; \sigma - \mathrm{C}_p(\partial\sigma)\;,\; \sigma \in S_n^L(A;R)$$

Passamos agora à construção das aplicações bc^X e R^X. Para realizar a construção imporemos como condição a naturalidade desses morfismos, ou seja, que os seguintes diagramas comutam para qualquer função contínua $f : X \to Y$:

$$\begin{array}{ccc} S_n(X;R) & \xrightarrow{\mathrm{bc}_n^X} & S_n(X;R) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sharp} \\ S_n(Y;R) & \xrightarrow{\mathrm{bc}_n^Y} & S_n(Y;R) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_n(X;R) & \xrightarrow{R_n^X} & S_{n+1}(X;R) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle f_\sharp} \\ S_n(Y;R) & \xrightarrow{R_n^Y} & S_{n+1}(Y;R) \end{array}$$

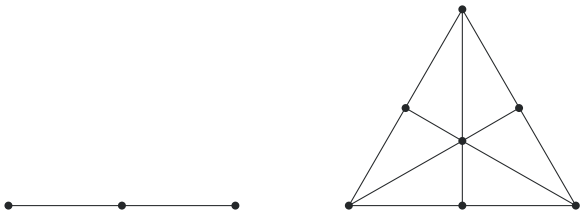


Figura 10.12.: Divisão Baricêntrica

A naturalidade aliada à linearidade dessas aplicações tem como consequência que bc e R são completamente determinados pelo seu efeito nas aplicações identidades $\mathrm{id}_n : \Delta^n \to \Delta^n$.

De fato, dado um gerador $\sigma \in S_n(X;R), \sigma : \Delta^n \to X$, temos:

$$\mathrm{bc}_n^X(\sigma) = \sigma_\sharp(\mathrm{bc}_n^{\Delta^n}(\mathrm{id}_n)) \quad \text{e} \quad R_n^X(\sigma) = \sigma_\sharp(R_n^{\Delta^n}(\mathrm{id}_n)). \tag{10.6}$$

Antes de realizar a construção da divisão baricêntrica, vamos apresentar uma descrição intuitiva. Seja $b_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i$ o baricentro (centro de massa) do n-simplexo $\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n]$. A subdivisão baricêntrica de Δ^n consiste nos simplexos $[b_n, w_1, \ldots, w_n]$, onde $[w_1, \ldots, w_n]$ percorre os $(n-1)$-simplexos obtidas pela subdivisão baricêntrica das $n+1$ faces $[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n]$ de Δ^n. Para concluir a definição indutiva, fixamos que a subdivisão baricêntrica de $[v_0]$ deve ser apenas $[v_0]$. Uma visualização para os simplexos de dimensão baixa é apresentada na Figura 10.12.

Vamos realizar a construção. Faremos a construção para o caso geral $\sigma \in S(X;R)$, já que o caso geral não nos coloca nenhuma dificuldade a mais. Começamos definindo bc_n para todos os espaços X por indução em n. Para $n = 0$, vamos colocar $\mathrm{bc}_0^{\Delta^0}(\mathrm{id}_0) = \mathrm{id}_0$. Isso define $\mathrm{bc}_0^X(\sigma)$ para todos os espaços X e todos os $\sigma \in S_0(X)$. Para a etapa de indução, vamos supor que $\mathrm{bc}_n(\sigma)$ já tenha sido definido para todos os X e todos os σ e definimos

$$\mathrm{bc}_{n+1}^{\Delta^{n+1}}(\mathrm{id}_{n+1}) \coloneqq \mathrm{C}_b(\mathrm{bc}_n^{\Delta^{n+1}}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}))$$

onde $b = b_{n+1}$ é o baricentro de Δ^{n+1}. A naturalidade força a definição de $\mathrm{bc}_{n+1}^X(\sigma)$ para qualquer gerador $\sigma \in S(X;R)$ pelas fórmulas acima, que são estendidas linearmente para $(n+1)$-cadeias arbitrárias.

Com isso, concluímos a definição dos operadores de subdivisão baricêntrica $\mathrm{bc}_n : S_n(X;R) \to S_n(X;R)$.

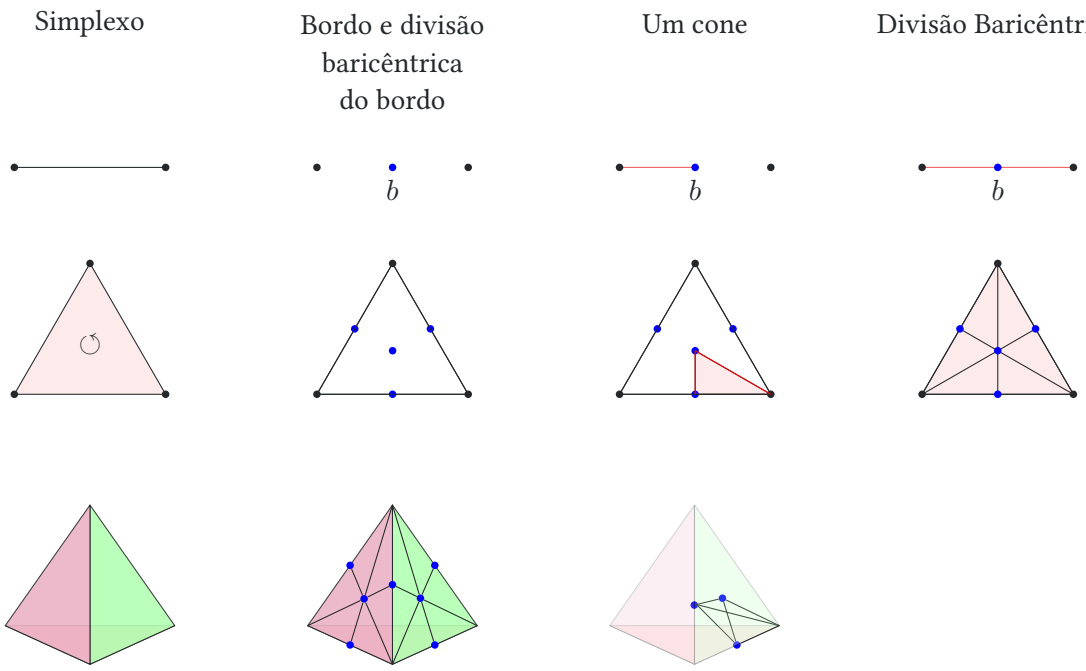


Figura 10.13.: Definição dos operadores de subdivisão baricêntrica

Lema 10.5

As aplicações $\mathrm{bc}_n : S_n(X;R) \to S_n(X;R)$, com $n \geq 0$, definem uma aplicação de cadeias $S(X;R) \to S(X;R)$.

Demonstração. Provaremos que $\partial \circ \mathrm{bc}_n^X(\sigma) = \mathrm{bc}_{n-1}^X \circ \partial(\sigma)$ por indução em n. Antes de prosseguirmos é desejável que você se convença geometricamente da validade desse resultado. Para $n = 0$, a demonstração é direta. Suponha que a fórmula seja válida para todos os X e σ, para um n fixo. Então para $n+1$ temos a seguinte cadeia de identidades onde as três primeiras são dadas por definição e pelo fato de que $\sigma_\sharp$ é uma aplicação de cadeia, a quarta é consequência da fórmula

do bordo cone e a quinta por hipótese de indução:

$$\begin{aligned}
\partial \circ \mathrm{bc}^X_{n+1}(\sigma) &= \partial \circ \sigma_\sharp \circ \mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n+1}(\mathrm{id}_{n+1}) \\
&= \partial \circ \sigma_\sharp \circ \mathrm{C}_b \left(\mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \right) \\
&= \sigma_\sharp \circ \partial \circ \mathrm{C}_b \left(\mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \right) \\
&= \sigma_\sharp \circ \mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \; - \sigma_\sharp \circ \mathrm{C}_b \left(\partial \circ \mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \right) \\
&= \sigma_\sharp \circ \mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \; - \sigma_\sharp \circ \mathrm{C}_b \left(\mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial \circ \partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \right) \\
&= \sigma_\sharp \circ \mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}_{n}(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \\
&= \mathrm{bc}^X_n \circ \sigma_\sharp(\partial\, \mathrm{id}_{n+1}) \\
&= \mathrm{bc}^X_n \circ \partial(\sigma).
\end{aligned}$$

■

O próximo passo é definir as homotopias de cadeias $R^X_n : S_n(X;R) \to S_{n+1}(X;R)$, novamente por indução em n e de tal forma que a fórmula de homotopia $\partial R_n(\sigma) + R_{n-1}(\partial\sigma) = \mathrm{bc}_n(\sigma) - \sigma$ se mantenha. Nesta construção, usamos o chamado método dos *modelos acíclicos*. Para isso, usaremos o fato que espaços contráteis têm grupos de homologia triviais em dimensões positivas, o que se aplica, em particular, aos simplexos. Em dimensão 0, definimos:

$$R^{\Delta^0}_0(\mathrm{id}_0 : \Delta^0 \to \Delta^0) = (\Delta^1 \mapsto \Delta^0) \in S_1(\Delta^0; R).$$

Uma vez que o bordo de $R^{\Delta^0}_0(\mathrm{id}_0)$ é zero, a fórmula de homotopia é satisfeita nesta dimensão. Isso define R^X_0 para todos os espaços X (por meio de 10.6). Para a etapa indutiva, vamos agora supor que R^X_n já foi definido para todos os X, de tal forma que a fórmula de homotopia

$$\partial \circ R^X_n + R^X_{n-1} \circ \partial = \mathrm{bc}_n - \mathrm{id}$$

seja verdadeira para todos os espaços X. Para completar a definição R^X_{n+1} para todos X, basta encontrar um elemento

$$\beta = R^{\Delta^{n+1}}_{n+1}(\mathrm{id}_{n+1}) \in S_{n+2}(\Delta^{n+1}; R) \tag{10.7}$$

que satisfaça a fórmula $\partial\beta + R_n^{\Delta^{n+1}}(\partial\,\mathrm{id}_{n+1}) = \mathrm{bc}_{n+1}^{\Delta^{n+1}}(\mathrm{id}_{n+1}) - \mathrm{id}_{n+1}$, ou seja,

$$\partial\beta = -R_n^{\Delta^{n+1}}(\partial\,\mathrm{id}_{n+1}) + \mathrm{bc}_{n+1}^{\Delta^{n+1}}(\mathrm{id}_{n+1}) - \mathrm{id}_{n+1} \text{ em } S_{n+1}(\Delta^{n+1}; R)\,.$$

Para provar que tal β existe, basta mostrar que o lado direito é um ciclo. Esse é o ponto crucial desse método! Podemos então usar esse $\widetilde{H}_{n+1}(\Delta^{n+1}) \cong 0$ para concluir que este ciclo tem que ser um bordo, ou seja, que tal β existe. O fato do lado direito ser um ciclo decorre do seguinte cálculo usando a fórmula de homotopia na dimensão n e o fato de $\mathrm{bc}^{\Delta^{n+1}}$ ser uma aplicação de cadeias:

$$\partial(-R_n^{\Delta^{n+1}}(\partial\,\mathrm{id}_{n+1}) + \mathrm{bc}_{n+1}^{\Delta^{n+1}}(\mathrm{id}_{n+1}) - \mathrm{id}_{n+1}) \tag{10.8}$$

$$= \left[R_{n-1}^{\Delta^{n+1}}(\partial\partial\,\mathrm{id}_{n+1}) - \mathrm{bc}_n^{\Delta^{n+1}}(\partial\,\mathrm{id}_{n+1}) + \partial\,\mathrm{id}_{n+1}\right] + \partial\,\mathrm{bc}_{n+1}^{\Delta^{n+1}}(\mathrm{id}_{n+1}) - \partial\,\mathrm{id}_{n+1} = 0 \tag{10.9}$$

Assim, podemos encontrar tal β e isso conclui a construção indutiva da homotopia de cadeias natural R^X para todos os X.

Divisão Baricêntrica é $\mathcal{U}$-pequena

Lema 10.6

Seja $\sigma : \Delta^n \to A$ com A um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$ e seja β um n-simplexo da subdivisão baricêntrica de σ. Então

$$\mathrm{diam}(\beta) \leq \frac{n}{n+1} \cdot \mathrm{diam}(\sigma).$$

Demonstração. É evidente que o diâmetro de um simplexo é a distância máxima de quaisquer dois de seus vértices. Se nenhum desses dois vértices de β é o baricentro de σ, então esses pontos estão em uma das faces de σ, e nesse caso, terminamos por indução.

A distância do baricentro b_n de σ a qualquer um dos vértices v ocorrendo em β é máxima se v for um vértice de $\sigma = [v_0, \ldots, v_n]$, digamos $v = v_i$. A reta que passa por v_i e b intercepta a i-ésima face $[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n]$ de σ em seu baricentro $b_i = \frac{1}{n}(v_0 + \cdots + \hat{v_i} + \cdots + v_n)$ e, portanto,

$$b = \frac{n}{n+1} b_i + \frac{1}{n+1} v_i.$$

Logo,

$$\|b - v_i\| = \frac{n}{n+1}\|b_i - v_i\| \leq \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}(\sigma).$$

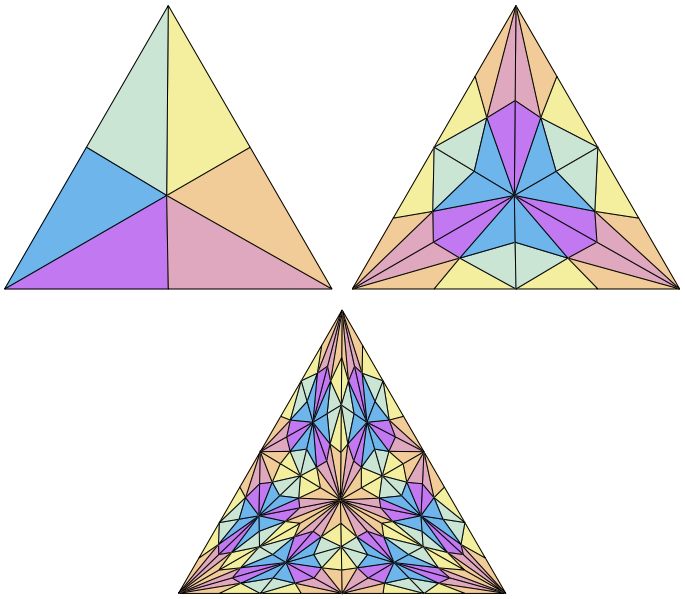


Figura 10.14.: Conforme iteramos a divisão baricêntrica, temos que o diâmetro dos n-simplexos em $B^k(X)_p(\sigma^p)$ tende a 0

Precisaremos do seguinte lema:

Lema 10.7 — Número de Lebesgue

Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma cobertura aberta de X. Então, existe um número real positivo λ tal que todo subconjunto de X de diâmetro menor que λ está inteiramente contido em U_i, para algum i.

Demonstração. Por compacidade podemos assumir que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ é uma cobertura aberta finita do espaço métrico compacto X.

Agora suponha que não exista tal λ. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n um conjunto de diâmetro $< 1/n$ tal que $A_n \notin U_i$ para qualquer i. Escolha $x_n \in A_n$ para cada n e considere x um ponto de acumulação da sequência resultante. Temos que $x \in U_i$, para algum i, então para algum $\lambda > 0, U(x, \lambda) \subset U_i$. Escolha n suficientemente grande de modo que $1/n < \lambda/2$, e seja $m > n$ tal que $x_m \in U(x, \lambda/2)$. Logo $x_m \in A_m$, e consequentemente $A_m \cap U(x, \lambda/2) \neq \varnothing$. Como o diâmetro de A_m é menor que $\lambda/2$ temos que $A_m \subset U(x, \lambda) \subset U_i$, uma contradição. ∎

Qualquer número λ que funcione no lema anterior é chamado de **número de Lebesgue** para a cobertura.

Para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X e para todo $\sigma^p : \Delta^p \to X$, existe um inteiro $k \geq 0$ tal que $\mathrm{bc}^k(\sigma^p)$ é $\mathcal{U}$-pequeno.

Demonstração. Escolha um número de Lebesgue λ associado a a cobertura aberta $\{(\sigma^p)^{-1}(U_i)\}$ do espaço métrico compacto Δ_p. Então, para qualquer inteiro $k \geq 0$ com $(\dfrac{p}{p+1})^k < \lambda$, o diâmetro dos simplexos em $\mathrm{bc}^k(\mathrm{id}_{\Delta_p})$ é limitada por cima por λ e, portanto, $\mathrm{bc}^k(\sigma^p)$ é $\mathcal{U}$-pequeno. ∎

Para terminar a demonstração do Princípio de Localidade precisamos da seguinte observação:

Lema 10.8

Se σ é uma cadeia $\mathcal{U}$-pequena, a cadeia $R_n(\sigma)$ também será uma cadeia $\mathcal{U}$-pequena.

A Equação 10.7 que nos diz que $R_n^{\Delta^n}(\mathrm{id}_n) \in S_{n+1}(\Delta^n; R)$ e assim $R_n^X(\sigma) \in S_{n+1}(\sigma(\Delta^n); R) \subset S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X; R)$.

10.8. Equivalência entre a Homologia Simplicial e Singular

O propósito desta seção é mostrar que as homologias singular e simplicial coincidem em Δ-complexos. Denotaremos por $H^{\Delta}(X, A; R)$ a homologia simplicial e por $H^{\mathrm{Sg}}(X, A; R)$ a homologia singular de X.

Vamos provar primeiramente o caso não relativo $H^{\Delta}(X; R) \cong H^{\mathrm{Sg}}(X; R)$. É fácil ver a existência de um homomorfismo neste caso: já temos uma aplicação $C_n^{\Delta}(X; R) \to S_n(X; R)$ do módulo de cadeias simpliciais para o módulo de cadeias singulares que vê cada simplexo $\sigma : \Delta^n \to X$ da estrutura de Δ-complexo de X como um simplexo singular $\sigma : \Delta^n \to X$. Isso induz uma aplicação $H_n^{\Delta}(X; R) \to H_n^{\mathrm{Sg}}(X; R)$.

Lema 10.9

$H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong R$ e a aplicação identidade $\mathrm{id}_n : \Delta^n \to \Delta^n$ gera um ciclo em $H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$.

Demonstração. Certamente id_n define um ciclo, e claramente gera para $n = 0$. Fazemos uma indução relacionando id_n a id_{n-1} eliminando $\Lambda \subset \Delta^n$, a união de todas as faces $(n-1)$-dimensionais, exceto uma, de Δ^n e considerando a tripla de espaços $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda; R)$. Como $H_i(\Delta^n, \Lambda; R) = 0$ por retrato de deformação, obtemos o isomorfismo

$$H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong H_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\partial\Delta^n, \Lambda; R) \,.$$

Mas $(\partial\Delta^n, \Lambda)$ e $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ são bons pares e, portanto, as homologias relativas são iguais a homologia reduzida dos quocientes, que são homeomorfos. Daí, temos

$$\begin{aligned} H_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\partial\Delta^n, \Lambda; R) &\cong \widetilde{H}_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\partial\Delta^n/\Lambda; R) \\ &\cong \widetilde{H}_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}; R) \\ &\cong H_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}; R) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong H_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}; R) \,.$$

Sob o isomorfismo $H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \to H_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(\partial\Delta^n, \Lambda; R)$ o id_n é enviado para $\partial\,\mathrm{id}_n$ que no complexo relativo é $\pm\,\mathrm{id}_{n-1}$, então vemos que id_n gera se, e somente se, id_{n-1} gera. ∎

Seja X um Δ-complexo. Então, para todo n, os homomorfismos $H_n^{\Delta}(X; R) \to H_n^{\mathrm{Sg}}(X; R)$ são isomorfismos.

Demonstração. Faremos primeiramente o caso absoluto no qual X é um Δ-complexo finito. Seja X^k o k-esqueleto de X, como $X^{k-1} \subset X^k$, temos o seguinte diagrama comutativo de sequências exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}^{\Delta}(X^k, X^{k-1}; R) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^{k-1}; R) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^k; R) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(X \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H_{n+1}^{\mathrm{Sg}}(X^k, X^{k-1}; R) & \longrightarrow & H_n^{\mathrm{Sg}}(X^{k-1}; R) & \longrightarrow & H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k; R) & \longrightarrow & H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k, X^{k-1}; R) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathrm{Sg}}(X
\end{array}$$

Vamos provar que a aplicação do meio do diagrama anterior é um isomorfismo. Para isso provaremos inicialmente que $H_{n+1}^{\Delta}(X^k, X^{k-1}; R) \cong H_{n+1}^{\mathrm{Sg}}(X^k, X^{k-1}; R)$.

Começamos observando que o espaço X^k/X^{k-1} contém apenas simplexos de dimensão k. Portanto, para $n \neq k$, o grupo $C_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}; R)$ é igual a zero. Quando $n = k$, $C_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1})$ é um módulo livre com base os k-simplexos de X.

$$C_n^{\Delta}(X^k, X^{k-1}; R) \cong \begin{cases} \bigoplus\limits_{\sigma_\alpha^k} R[\sigma_\alpha^k]\,, & \text{se } n = k \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como os ciclos Z_n^{Δ} formam um subgrupo em C_n^{Δ}, e o módulo de bordo B_n^{Δ} é vazio temos

$$H_n^{\Delta}(X^k,\ X^{k-1}; R) \cong \begin{cases} \bigoplus\limits_{\sigma_\alpha^k} R[\sigma_\alpha^k]\,, & \text{se } n = k \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para calcular o grupo de homologia singular $H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k,\ X^{k-1})$, observamos que as aplicações características $\Delta^k \to X$ para todos os k-simplexos de X considerados em conjunto nos fornecem uma aplicação contínua:

$$\Phi : \bigsqcup_{\alpha} (\Delta_\alpha^k,\ \partial\Delta_\alpha^k) \to (X^k,\ X^{k-1}).$$

Esta aplicação induz uma aplicação no quociente $\Phi_* : \sqcup_\alpha \Delta^k_\alpha / \sqcup_\alpha \Delta^{k-1}_\alpha \to X^k/X^{k-1}$. Como a aplicação induzida no quociente é contínua, bijetiva e como X^k/X^{k-1} é um espaço Hausdorff e compacto, ela é um homeomorfismo.

Assim, temos

$$\begin{array}{ccc} H_n^{\mathrm{Sg}}(\sqcup_\alpha \Delta^k_\alpha, \sqcup_\alpha \Delta^{k-1}_\alpha) & \longrightarrow & H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k,\ X^{k-1}) \\ \| & & \downarrow \\ \widetilde{H}_n^{\mathrm{Sg}}(\sqcup_\alpha \Delta^k_\alpha / \sqcup_\alpha \Delta^{k-1}_\alpha) & = & \widetilde{H}_n^{\mathrm{Sg}}(X^k/X^{k-1}) \end{array}$$

que mostra que o morfismo superior é um isomorfismo e assim $\bigoplus_\alpha H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^k_\alpha,\ \partial\Delta^k_\alpha) \cong H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k,\ X^{k-1})$. Usando o lema anterior que nos diz que os geradores de $H_n^{\mathrm{Sg}}(\Delta^k,\ \partial\Delta^k)$ são iguais aos geradores da homologia simplicial, obtemos que as aplicações

$$H_n^{\Delta}(X^k,\ X^{k-1}) \to H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k,\ X^{k-1})$$

são isomorfismos.

Usamos a indução para completar o argumento e, portanto, assumimos que a segunda e a quinta setas também são isomorfismos. Podemos então provar que a terceira seta é um isomorfismo usando o Lema dos Cinco e assim $H_n^{\Delta}(X^k; R) \to H_n^{\mathrm{Sg}}(X^k; R)$ deve, portanto, ser um isomorfismo.

Como $H_n^{\Delta}(X) \cong H_n^{\Delta^n}\left(X^k\right)$, para $k > n$, temos

$$H_*^{\Delta}(X) \cong \varinjlim_k H_*^{\Delta}\left(X^k\right).$$

Usando que um simplexo singular $\sigma : \Delta^n \to X$ tem imagem compacta, temos que toda n-cadeia singular em X está em algum k-esqueleto X^k. Isso implica que também temos $H_*^{\mathrm{Sg}}(X) \cong \varinjlim_k H_*^{\mathrm{Sg}}\left(X^k\right)$ do qual concluímos

$$H_*^{\Delta}(X) \cong \varinjlim_k H_*^{\Delta}\left(X^k\right) \cong \varinjlim_k H_*^{\mathrm{Sg}}\left(X^k\right) \cong H_*^{\mathrm{Sg}}(X)$$

e, portanto, o teorema está provado.

Falta demonstrar o caso com $A \neq \emptyset$, mas isso decorre do caso absoluto aplicando o Lema dos Cinco a sequência exata longa de grupos de homologia simplicial e singular para o par (X, A). ∎

Como corolário, temos a invariância da homologia simplicial:

Invariância. Dado um espaço topológico que admite estrutura de Δ-complexo, a homologia simplicial de X não depende da escolha da estrutura de Δ-complexo.

Suponha que o par de espaços (X, A) admita uma estrutura de Δ-par com um número finito de n-simplexos fora de A e assuma que R é um domínio de ideais principais. Então $H_n^{\mathrm{Sg}}(X, A; R)$ é finitamente apresentada.

Demonstração. Sobre um domínio ideal principal, os submódulos de módulos livres de posto finito são livres de posto finito. Por hipótese, temos que $C_n^{\Delta}(X, A; R)$ é livre de posto finito, portanto os submódulos $Z_n^{\Delta}(X, A; R)$ e $B_n^{\Delta}(X, A; R)$ também o são. E assim o resultado segue do Teorema 10.8. ∎

10.9. Homologia com Coeficientes

Nesta seção vamos generalizar o conceito de homologia singular de modo a permitir coeficientes num R-módulo G qualquer. Como as construções envolvidas são extremamente similares ao que já apresentamos apenas esboçaremos boa parte dos argumentos e enunciaremos os principais resultados.

Intuitivamente, uma cadeia com coeficientes em G é uma combinação linear formal

$$c = \sum_{k=1}^{m} \sigma_i g_i,$$

onde os g_i são elementos do módulo G. Uma maneira rigorosa de proceder a construção dessas cadeias é utilizando o produto tensorial, e começamos apresentando a construção para qualquer complexo de cadeias.

Produto Tensorial de Complexos de Cadeias Começaremos pela construção do produto tensorial de complexo de cadeias de R-módulos e da homologia associada.

Sejam G um R-módulo e $\mathcal{C} = (C_p, \partial)$ um complexo de cadeias de R-módulos.

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} C_p \longleftarrow \cdots$$

E associado o complexo obtido tomando o produto tensorial, onde para simplificar a notação, vamos omitir o subscrito R em $\otimes_R$ já Como sempre iremos considerar

tensores sobre o anel R.

$$0 \xleftarrow{\partial_0\otimes\mathrm{id}} C_0 \otimes G \xleftarrow{\partial_1\otimes\mathrm{id}} C_1 \otimes G \cdots \longleftarrow C_{p-1} \otimes G \xleftarrow{\partial_p\otimes\mathrm{id}} C_p \otimes G \longleftarrow \cdots$$

Denotamos o p-ésimo grupo de homologia do complexo de cadeias $\mathcal{C} \otimes G = (C_p \otimes G, \partial \otimes \mathrm{id})$ por $H_p(\mathcal{C}; G)$, e denominamos esse grupo de p-ésimo grupo de homologia de $\mathcal{C}$ com coeficientes em G.

Dado um complexo de cadeias aumentado,

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\epsilon} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{p-1} \xleftarrow{\partial_p} C_p \longleftarrow \cdots$$

então tem-se o complexo de cadeias correspondente obtido de $\mathcal{C} \otimes G$ adicionando $R \otimes G \simeq G$ na dimensão -1, e usando $\epsilon \otimes \mathrm{id}$ como o operador de bordo da dimensão 0 até a dimensão -1.

$$0 \longleftarrow R \otimes G \xleftarrow{\epsilon\otimes\mathrm{id}} C_0 \otimes G \xleftarrow{\partial_1\otimes\mathrm{id}} C_1 \otimes G \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_{p-1} \otimes G \xleftarrow{\partial_p\otimes\mathrm{id}} C_p \otimes G \longleftarrow \cdots$$

Seus grupos de homologia são denotados $\widetilde{H}_p(\mathcal{C}; G)$ e são chamados de **grupos de homologia reduzida** de $\mathcal{C}$ com coeficientes em G.

Se $\phi : \mathcal{C} \to \mathscr{D}$ é uma aplicação de cadeias , então $\phi \otimes \mathrm{id}$ também o é: $\mathcal{C} \otimes G \to \mathcal{D} \otimes G$. O homomorfismo de homologia induzido é por conveniência denotado por

$$\phi_* : H_p(\mathcal{C}; G) \to H_p(\mathcal{D}; G).$$

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são complexos de cadeias aumentado e ϕ preserva a aplicação de aumento, então $\phi \otimes \mathrm{id}$ induz um homomorfismo de homologia reduzida bem como da homologia ordinária.

Se $\phi, \psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ são aplicações de cadeias, e se H é uma homotopia de cadeias entre eles, então $H \otimes \mathrm{id}$ é uma homotopia de cadeias entre $\phi \otimes \mathrm{id}$ e $\psi \otimes \mathrm{id}$. Segue-se que se ϕ e ψ são homotópicas por cadeia, então ϕ_* e ψ_* são iguais como homomorfismos de homologia com coeficientes arbitrários. Segue-se também que se ϕ é uma equivalência de cadeias, então $\phi \otimes \mathrm{id}$ também o é.

Finalmente, suponha que se tenha uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

de complexos de cadeias que se cindem em cada dimensão. Então a sequência obtida tomando o produto tensorial

$$0 \longrightarrow C_p \otimes G \longrightarrow D_p \otimes G \longrightarrow E_p \otimes G \longrightarrow 0$$

é exata. Aplicando o Lema do Zig-Zag, temos a sequência exata longa

$$\ldots \longrightarrow H_p(\mathcal{C};G) \longrightarrow H_p(\mathcal{D};G) \longrightarrow H_p(\mathcal{E};G) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C};G) \longrightarrow \ldots$$

onde ∂_* é induzido por $\partial \otimes \mathrm{id}$.

Homologia Singular com Coeficientes Agora vamos especializar para o complexo de cadeias singulares $(S_*(X;R), \partial_*)$ abaixo

$$0 \xleftarrow{\partial_0} S_0(X;R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X;R) \longleftarrow \cdots \longleftarrow S_{p-1}(X;R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X;R) \longleftarrow \cdots$$

tomando o produto tensorial com G temos o complexo

$$0 \xleftarrow{\partial_0\otimes\mathrm{id}} S_0(X;R)\otimes G \xleftarrow{\partial_1\otimes\mathrm{id}} S_1(X;R)\otimes G \longleftarrow \cdots \longleftarrow S_{p-1}(X;R)\otimes G \xleftarrow{\partial_p\otimes\mathrm{id}} S_p(X;R)$$

O módulo $S_p(X;G)$ de cadeias p singulares com coeficientes em G é definido como o produto tensorial

$$S_p(X;G) \coloneqq S_p(X;R) \otimes_R G$$

Então pela definição $S_p(X;G) = S_p(X;R) \otimes G$, temos o complexo de homologia

$$0 \xleftarrow{\partial_0\otimes\mathrm{id}} S_0(X;G) \xleftarrow{\partial_1\otimes\mathrm{id}} S_1(X;G) \longleftarrow \cdots \longleftarrow S_{p-1}(X;G) \xleftarrow{\partial_p\otimes\mathrm{id}} S_p(X;G) \longleftarrow \cdots$$

denotado $(S_*(X;G), \partial_* \otimes \mathrm{id})$

Observamos que o R-módulo $S_p(X;R)$ é um módulo livre gerado por $S_{\Delta^p}(X)$ e logo temos o isomorfismo

$$S_p(X;G) \cong \bigoplus_{\sigma \in S_{\Delta^p}(X)} G. \tag{10.10}$$

Podemos dar uma descrição relativamente concreta dos elementos de $S_p(X;G)$. A soma direta em 10.10 é o R-módulo de todas as funções $c : S_{\Delta^p}(X) \to G$ que são zero, exceto para um número finito de $\sigma \in S_{\Delta^p}(X)$. Para qualquer $g \neq 0$ e qualquer $\sigma \in S_{\Delta^p}(X)$, se denotamos por σg a função de $S_{\Delta^p}(X)$ a G que tem

o valor 0 para todos os argumentos exceto σ onde seu valor é g, então todo $c \in S_p(X;R)\otimes_R G = S_p(X;G)$ pode ser escrito de forma única como uma soma finita

$$c = \sum_{k=1}^{m} \sigma_i g_i$$

para $\sigma_i \in S_{\Delta^p}(X)$ e $g_i \in G$ diferente de zero.

Seja R um anel comutativo com unidade e G um R-módulo. Os módulos singulares de homologia $H_p(X;G)$ com coeficientes em G são os grupos de homologia do complexo

$$0 \xleftarrow{\partial_0\otimes \mathrm{id}} S_0(X;G) \xleftarrow{\partial_1\otimes \mathrm{id}} S_1(X;G) \longleftarrow \cdots \longleftarrow S_{p-1}(X;G) \xleftarrow{\partial_p\otimes \mathrm{id}} S_p(X;G) \longleftarrow \cdots,$$

ou seja,

$$H_p(X;G) \coloneqq H_p\left(S_*(X;G)\right) \quad p \geq 0.$$

Se $\epsilon : S_0(X;R) \to R$ é aplicação de aumento então obtemos um aplicação de aumento

$$\epsilon \otimes \mathrm{id} : S_0(X;R) \otimes G \to R \otimes G \cong G,$$

ou seja, uma aplicação $\epsilon\otimes\mathrm{id} : S_0(X;G) \to G$, e obtemos um complexo aumentado com G na dimensão -1.

Os grupos de homologia do complexo

$$0 \longleftarrow R \otimes G \xleftarrow{\epsilon\otimes \mathrm{id}} S_0(X;G) \xleftarrow{\partial_1\otimes \mathrm{id}} S_1(X;G) \longleftarrow \cdots \longleftarrow S_{p-1}(X;G) \xleftarrow{\partial_p\otimes \mathrm{id}} S_p(X;G)$$

são denotados $\widetilde{H}_p(X;G)$ e são chamados de **grupos de homologia singular reduzida com coeficientes em** G.

Como na Seção 10.1 podemos escolher uma aplicação injetora $s : R \to S_0(X;R)$ tal que $\epsilon \circ s = \mathrm{id}$, e como $R \otimes G \cong G$ e a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \ker\epsilon \longrightarrow S_0(X;R) \underset{s}{\overset{\epsilon}{\rightleftarrows}} R \longrightarrow 0$$

é cindida, fazendo o produto tensorial com G obtemos a sequência exata curta cindida

$$0 \longrightarrow (\ker\epsilon) \otimes G \longrightarrow S_0(X;R) \otimes G \underset{s\otimes\mathrm{id}}{\overset{\epsilon\otimes\mathrm{id}}{\rightleftarrows}} R \otimes G \cong G \longrightarrow 0;$$

$$S_0(X;G) = S_0(X;R) \otimes G \cong ((\ker \epsilon) \otimes G) \oplus G,$$

e como $H_0(X;G) = S_0(X;G)/\text{im } (\partial_1 \otimes \text{id})$, $\widetilde{H}_0(X;G) = (\ker (\epsilon \otimes \text{id}))/\text{im } (\partial_1 \otimes \text{id}) \cong ((\ker \epsilon) \otimes G)/\text{im } (\partial_1 \otimes \text{id})$, e como $\text{im}\, \partial_1 \subseteq \ker \epsilon$, obtemos

$$S_0(X;G)/\text{im } (\partial_1 \otimes \text{id}) \cong (((\ker \epsilon) \otimes G)/\text{im } (\partial_1 \otimes \text{id})) \oplus G,$$

e consequentemente temos que

$$\begin{aligned} H_0(X;G) &\cong \widetilde{H}_0(X;G) \oplus G \\ H_p(X;G) &\cong \widetilde{H}_p(X;G), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Uma aplicação contínua $f : (X, A) \to (Y, B)$ induz a aplicação de cadeia

$$f_\sharp \otimes \text{id} : S_*(X, A; R) \otimes G \to S_*(Y, B; R) \otimes G$$

que induz um homomorfismo de homologia

$$f_* : H_*(X, A; G) \to H_*(Y, B; G).$$

Homologia Relativa Se A é um subconjunto de X, temos o complexo de cadeias $(S_*(X, A; R), \partial_*)$ abaixo

$$0 \longleftarrow S_0(X, A; R) \xleftarrow{\partial_0} S_1(X, A; R) \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X, A; R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X, A; R) \leftarrow$$

onde $S_p(X, A; R) = S_p(X; R)/S_p(A; R)$, e tomando o produto tensorial com G e definindo

$$S_p(X, A; G) \coloneqq S_p(X, A; R) \otimes G,$$

obtemos o complexo de cadeias $(S_*(X, A; R) \otimes G, \partial_* \otimes G)$

$$0 \longleftarrow S_0(X, A; G) \xleftarrow{\partial_0 \otimes \text{id}} S_1(X, A; G) \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\partial_{p-1} \otimes \text{id}} S_{p-1}(X, A; G) \xleftarrow{\partial_p \otimes \text{id}} S_p(X, A; G) \leftarrow$$

denotado $(S_*(X, A; G), \partial_* \otimes G)$

Seja R um anel comutativo com unidade e G um R-módulo. Para qualquer subconjunto A do espaço X, os módulos de homologia singular relativos $H_p(X, A; G)$ com coeficientes em G são os grupos de homologia do complexo acima; isso é,

$$H_p(X, A; G) \coloneqq H_p\left(S_*(X, A; G)\right) \quad p \geq 0.$$

A partir da sequência exata curta

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow S_p(A;R) \longrightarrow S_p(X;R) \longrightarrow S_p(X,A;R) \longrightarrow 0,$$

e como o módulo $S_p(X,A;R)$ é livre, a sequência anterior é cindida. Portanto, tomando o produto tensorial com G obtemos outra sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_p(A;R)\otimes G \longrightarrow S_p(X;R)\otimes G \longrightarrow S_p(X,A;R)\otimes G \longrightarrow 0;$$

E logo temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow S_p(A;G) \longrightarrow S_p(X;G) \longrightarrow S_p(X,A;G) \longrightarrow 0,$$

E finalmente, associado a sequência exata curta anterior temos uma sequência exata longa de homologia.

Sequência Exata Longa de Homologia Relativa. Para cada par (X,A) de espaços, para qualquer R-módulo G, temos a seguinte sequência exata longa de grupos de homologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{3,p}} H_2(A;G) \longrightarrow H_2(X;G) \longrightarrow H_2(X,\ A;G) \xrightarrow{\delta_{2,p}} H_1(A;G) \longrightarrow H_1(X;G) \longrightarrow H_1(X,\ A;G) \xrightarrow{\delta_{1,p}} H_0(A;G) \longrightarrow H_0(X;G) \longrightarrow H_0(X,\ A;G) \longrightarrow 0$$

Invariância por Homotopia. Dados duas aplicações contínuas $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ se f e g são homotópicas e $H_p(f),H_p(g):H_p(X,A;G)\to H_p(Y,B;G)$ são os homomorfismos induzidos, então $H_p(f)=H_p(g)$ para todo $p\geq 0$.

Como consequência, se (X,A) e (Y,B) são homotopicamente equivalentes, então para qualquer R-módulo G os grupos de homologia $H_p(X,A;G)$ e $H_p(Y,A;G)$ são isomorfos para todo $p\geq 0$.

Mayer-Vietoris. Dados dois espaços topológicos X e Y com $Y\subseteq X$ e dois subconjuntos A,B de X tais que $Y=\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)$, existe uma sequência exata longa de homologia relativa

$$\cdots \longrightarrow H_p(A\cap B;G) \xrightarrow{\varphi_*} H_p(A;G)\oplus H_p(B;G) \xrightarrow{\psi_*} H_p(X;G) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A\cap B;G$$

Axioma da Excisão. Dados subespaços $Z \subseteq A \subseteq X$ tais que o fecho de Z esteja contido no interior de A, então para qualquer R-módulo G a inclusão $(X \setminus Z, A \setminus Z) \longrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos de homologia singular

$$H_p(X \setminus Z, A \setminus Z; G) \cong H_p(X, A; G), \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

Equivalentemente, para quaisquer subespaços $A, B \subseteq X$ cujos interiores cobrem X, a aplicação de inclusão $(B, A \cap B) \longrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos

$$H_p(B, A \cap B; G) \cong H_p(X, A; G), \quad \text{para todos } p \geq 0.$$

Observamos ainda que teorema sobre a homologia de bons pares também é verdadeiro para homologia com coeficientes em G.

A homologia singular relativa com coeficientes em G satisfaz os axiomas da teoria da homologia de Eilenberg e Steenrod.

10.10. Teorema dos Coeficientes Universais

Em uma seção posterior demonstraremos o Teoremas dos Coeficientes Universais para a Homologia que estabelece relações entre grupos de homologia com diferentes coeficientes. Nessa seção apresentaremos um de seus corolários que nos diz que os grupos de homologia singulares com coeficientes em um grupo abeliano G são determinados pelos grupos de homologia singulares com coeficientes inteiros.

Coeficientes Universais para os Grupos de Homologia. Se X é um espaço topológico, A é um subconjunto de X e G um grupo abeliano. Então existe uma sequência exata cindida

$$0 \to H_q(X, A; \mathbb{Z}) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_q(X, A; G) \xrightarrow{\beta} \operatorname{Tor}_1 (H_{q-1}(X, A; G), G) \to 0.$$

A sequência é natural em relação a aplicação $(X, A) \to (Y, B)$. O homomorfismo α envia $[z] \otimes g$ para um ciclo z para a classe de homologia $[z \otimes g]$.

Como consequência temos o seguinte isomorfismo de homologia singular relativa:

$$H_n(X, A; G) \cong (H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G) \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}} (H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G)$$

para todo $n \geq 0$.

O funtor Tor será descrito em detalhes posteriormente. Apresentaremos nessa seção apenas um conjunto de propriedades que no caso em que G é um grupo abeliano finitamente gerado e A é grupo abeliano qualquer, nos permite calcular $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$. É comum descartar o subscrito 1 em $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$. O funtor $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ possui as seguintes propriedades na categoria de grupos abelianos:

1. Uma decomposição de soma direta $A \cong A_1 \oplus A_2$ induz uma decomposição de soma direta $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, G) \cong \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A_1, G) \oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A_2, G)$.
2. $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, B) \cong \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(B, A)$
3. Seja A um grupo abeliano livre. Então $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, G) = 0$.
4. $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) = {}_nG \cong \ker\{G \xrightarrow{n} G\} = \{g \in G \mid ng = 0\} \subset G$.
5. Se G é livre de torção, então $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) = 0$.
6. $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$ com d o máximo divisor comum de m, n.

Exemplo 10.9.

Seja $\mathbb{T}^2$ o toro bidimensional, e $G = \mathbb{Z}_4$. Então:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}_4) &= H_0(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_4 \\ H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}_4) &= \big(H_1(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{Z}_4\big) \oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}\big(H_0(\mathbb{T}^2), \mathbb{Z}_4\big) \\ &= \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}_4 = (\mathbb{Z}_4)^2 \\ H_2(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}_4) &= \big(H_2(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{Z}_4\big) \oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}\big(H_1(\mathbb{T}^2), \mathbb{Z}_4\big) = \mathbb{Z}_4. \end{aligned}$$

◁

Exemplo 10.10.

Seja $\mathbb{K}$ a garrafa de Klein e $G = \mathbb{Z}_4$. Sabendo que $H_1(\mathbb{K}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, e $H_2(\mathbb{K}) = 0$, então:

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{K}; \mathbb{Z}_4) &= (H_2(\mathbb{K}) \otimes \mathbb{Z}_4) \oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_1(\mathbb{K}), \mathbb{Z}_4) \\ &= (0) \oplus \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \\ &= \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_1(\mathbb{K};\mathbb{Z}_4) &= (H_1(\mathbb{K})\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_0(\mathbb{K}),\mathbb{Z}_4)\\
&= ((\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2)\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_4)\\
&= (\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2)\oplus 0\\
&= \mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathbb{K};\mathbb{Z}_4) &= (H_0(\mathbb{K})\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus \operatorname{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{-1}(\mathbb{K}),\mathbb{Z}_4)\\
&= (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4)\oplus 0\\
&= \mathbb{Z}_4
\end{aligned}
$$

◁

10.11. ⋆ Produto Cruzado e o Teorema de Eilenberg-Zilber

Produtos tensoriais de complexos de cadeias Sejam C e D complexos de cadeias. Definimos o complexo produto tensorial como

$$C_*\otimes D_* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (C_*\otimes D_*)_n\,, \qquad (C_*\otimes D_*)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p\otimes D_q$$

onde o morfismo de bordo é definido nos geradores por

$$\partial_\otimes(a\otimes b) \coloneqq \partial a\otimes b + (-1)^p a\otimes \partial b, \quad a\in C_p, b\in D_q$$

e estendido para todo $C_*\otimes D_*$ por bilinearidade.

Eilenberg-Zilber. Existem aplicações de cadeia

$$
\begin{aligned}
&\times : C_*(X)\otimes C_*(Y)\longrightarrow C_*(X\times Y), \quad \text{e}\\
&\theta : C_*(X\times Y)\longrightarrow C_*(X)\otimes C_*(Y)
\end{aligned}
$$

que são únicas a menos de homotopia de cadeias, são naturais em X e Y, e portanto $\theta\circ\times$ e $\times\circ\theta$ são homotópicas por cadeia à identidade.

Produto Cruzado Existe uma aplicação $\times : S_p(X) \times S_q(Y) \to S_{p+q}(X \times Y)$ denominada **produto cruzado**, satisfazendo:

a. Natural, no sentido de que se $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$, e $a \in S_p(X)$ e $b \in S_p(Y)$ então
$$f_*(a) \times g_*(b) = (f \times g)_*(a \times b).$$

b. Bilinear, no sentido de que
$$\begin{aligned} \left(a + a'\right) \times b &= (a \times b) + \left(a' \times b\right) \qquad \text{e} \\ a \times \left(b + b'\right) &= (a \times b) + (a \times b'). \end{aligned}$$

c. Regra de Leibniz, ou seja,
$$\partial(a \times b) = (\partial a) \times b + (-1)^p a \times \partial b.$$

d. Normalizado, no seguinte sentido. Seja $x \in X$ e $y \in Y$. Escreva $j_x : Y \to X \times Y$ para $y \mapsto (x, y)$, e escreva $i_y : X \to X \times Y$ para $x \mapsto (x, y)$. Então temos que

- se $b \in S_q(Y)$, então $c_x^0 \times b = (j_x)_* \, b \in S_q(X \times Y)$,
- se $a \in S_p(X)$, então $a \times c_y^0 = (i_y)_* \, a \in S_p(X \times Y)$.

Demonstração. Vamos usar indução na dimensão da imagem: $p + q$. O axioma da normalização nos fornece os casos iniciais onde $p + q = 0, 1$. Vamos supor que construímos o produto cruzado na dimensão $p + q - 1$. Queremos então definir $\sigma \times \tau$ para $\sigma \in S_p(X)$ e $\tau \in S_q(Y)$.

Observamos que há um exemplo universal de p-simplexo
$$\mathrm{id}_p : \Delta^p \to \Delta^p.$$
É universal no sentido de que qualquer p-simplexo $\sigma : \Delta^p \to X$ pode ser escrito como $\sigma_* \left(\mathrm{id}_p\right)$ onde $\sigma_* : S_{\Delta^p}\left(\Delta^p\right) \to S_{\Delta^p}(X)$ é a aplicação induzida por σ. Para definir $\sigma \times \tau$ em geral, então, basta definir $\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q \in S_{p+q}\left(\Delta^p \times \Delta^q\right)$ Definimos então
$$\sigma \times \tau \coloneqq (\sigma \times \tau)_* \left(\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q\right).$$

Nossa longa lista de axiomas é útil na indução. Por um lado, se $p = 0$ ou $q = 0$, a normalização já nos forneceu a definição. Então agora suponha que p e q sejam positivos. Queremos que o produto cruzado satisfaça a regra de Leibnitz:

$$\partial(\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q) = (\partial \mathrm{id}_p) \times \mathrm{id}_q + (-1)^p \mathrm{id}_p \times \partial \mathrm{id}_q \quad \in S_{p+q-1}(\Delta^p \times \Delta^q)$$

Como $\partial^2 = 0$, uma condição necessária para $\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q$ existir é que satisfaça:

$$\partial((\partial \mathrm{id}_p) \times \mathrm{id}_q + (-1)^p \mathrm{id}_p \times \partial \mathrm{id}_q) = 0.$$

Vamos calcular esse termo, usando a regra de Leibnitz na dimensão $p+q-1$ onde temos pela suposição indutiva:

$$\begin{aligned}\partial((\partial \mathrm{id}_p) \times \mathrm{id}_q + (-1)^p \mathrm{id}_p \times (\partial \mathrm{id}_q)) = \left(\partial^2 \mathrm{id}_p\right) \times \mathrm{id}_q + (-1)^{p-1} (\partial \mathrm{id}_p) \times (\partial \mathrm{id}_q) \\ + (-1)^p (\partial \mathrm{id}_p) \times (\partial \mathrm{id}_q) + (-1)^q \mathrm{id}_p \times \left(\partial^2 \mathrm{id}_q\right) = 0.\end{aligned}$$

O subespaço $\Delta^p \times \Delta^q \subseteq \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$ é convexo e não vazio, e portanto, estrelado. Portanto, sabemos que $H_{p+q-1}(\Delta^p \times \Delta^q) = 0$ e logo todo ciclo é um bordo. Então, escolha qualquer B tal que $\partial B = \partial(\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q) = (\partial \mathrm{id}_p) \times \mathrm{id}_q + (-1)^p \mathrm{id}_p \times \partial \mathrm{id}_q \quad \in S_{p+q-1}(\Delta^p \times \Delta^q)$ e definimos que $\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q \coloneqq B$.

A indução agora está completa. Deixamos ao leitor verificar que essa escolha satisfaz a naturalidade, a bilinearidade e a regra de Leibniz. ∎

O ponto essencial da construção do produto cruzado é que o espaço que suporta o par universal de simplexos, $\Delta^p \times \Delta^q$, é acíclico. A naturalidade transporta o resultado desse fato para a situação geral.

Ressaltamos que produto cruzado que esse procedimento constrói obviamente não é único; depende de da escolha da cadeia $\mathrm{id}_p \times \mathrm{id}_q$ para cada par p, q com $p + q > 1$. Mas destacamos que quaisquer duas escolhas são equivalentes a menos de homotopia de cadeias.

Suponha que temos três complexos de cadeias A_*, B_* e C_*, e suponha que tenhamos aplicações $\times : A_p \times B_q \to C_{p+q}$ que satisfazem a bilinearidade e a fórmula de Leibniz. Esses dados determinam uma aplicação bilinear

$$\times : H_p(A) \times H_q(B) \to H_{p+q}(C).$$

Demonstração. Seja $a \in Z_p(A)$ e $b \in Z_q(B)$. Definimos

$$[a] \times [b] \coloneqq [a \times b]$$

e vamos verificar que essa é a escolha correta. Para começar, $a \times b$ é um ciclo pois

$$d(a \times b) = da \times b + (-1)^p a \times db = 0,$$

porque a e b são ciclos.

Agora precisamos verificar que o produto está bem definido, ou seja que só depende da classe de homologia de $a \times b$. Para isso sejam $a' = a + d\overline{a}$ e $b' = b + d\overline{b}$ nas mesmas classes de homologia. Queremos $[a \times b] = [a' \times b']$. Em outras palavras, precisamos mostrar que $a \times b$ difere de $a' \times b'$ por um bordo. Calculando $a' \times b'$ temos:

$$a' \times b' = (a + d\overline{a}) \times (b + d\overline{b}) = a \times b + a \times d\overline{b} + (d\overline{a}) \times b + (d\overline{a}) \times (d\overline{b}).$$

Observando que $da = 0$ temos

$$d(a \times \overline{b}) = (-1)^p a \times (d\overline{b}).$$

e que $db = 0$ temos

$$d(\overline{a} \times b) = (d\overline{a}) \times b \quad \text{e} \quad d(\overline{a} \times d\overline{b}) = (d\overline{a}) \times (d\overline{b}).$$

Logo

$$a' \times b' - a\times = d\left((-1)^p(a \times \overline{b}) + \overline{a} \times b + \overline{a} \times d\overline{b}\right),$$

e, portanto, são homólogos. A demonstração da bilinearidade é imediata. ∎

Existe uma aplicação

$$\times : H_p(X) \times H_q(Y) \to H_{p+q}(X \times Y)$$

que é natural, bilinear e normalizada.

Exercícios

Ex. 115 — Prove que se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua entre dois espaços conexos por caminhos, então $f_* : H_0(X) \to H_0(Y)$ é um isomorfismo.

Ex. 116 — Calcule $H_0(X, A)$ no caso em que X e A são conexos e no caso geral.

Ex. 117 — Dados espaços topológicos X e Y, e $f : X \to Y$ uma função contínua, mostre que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & S_{p+1}(X;R) & \xrightarrow{\partial^X_{p+1}} & S_p(X;R) & \longrightarrow \\ & \downarrow{\scriptstyle f_{\sharp,p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\sharp,p}} & \\ \longrightarrow & S_{p+1}(Y;R) & \xrightarrow[\partial^Y_{p+1}]{} & S_p(Y;R) & \longrightarrow \end{array}$$

Ex. 118 — Mostre que a homologia singular é aditiva, ou seja, existe um isomorfismo natural

$$H_p(X;R) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_p(X_\alpha;R).$$

Ex. 119 — Construa para um espaço arbitrário X e um ponto arbitrário $x_0 \in X$ um isomorfismo natural $\widetilde{H}_n(X) = H_n(X, x_0)$.

Ex. 120 — Construa a sequência de homologia de um tripla com $B \subset A \subset X$,

$$\cdots \to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to \ldots$$

e prove suas propriedades, incluindo a exatidão. No caso em que A não é vazio, uma combinação deste exercício com o Exercício 116 dá origem a uma sequência de homologia reduzida de um par, com os grupos absolutos H substituídos por $\widetilde{H}$.

Ex. 121 — Calcule os grupos de homologia de um cubo sólido perfurado conforme apresentado na Figura 10.15

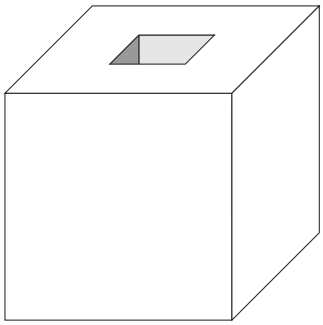


Figura 10.15.

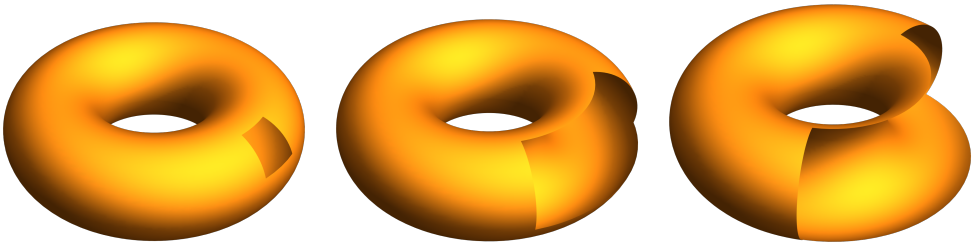
Ex. 122 — Usando a sequência de Mayer-Vietoris ou não, calcule a homologia singular de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

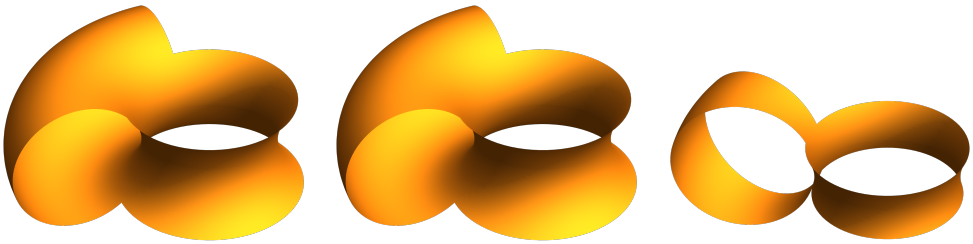
Ex. 123 — Calcule a homologia de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$. Como a homologia muda se excluirmos n pontos distintos de $\mathbb{R}^2$? Qual seria a homologia se excluíssemos n pontos de $\mathbb{R}^m$?

Ex. 124 — Calcule a homologia de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ usando a sequência de Mayer-Vietoris. Que outro espaço (com duas componentes) tem a mesma homologia? Essa outro espaço é do mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$?

Ex. 125 — Calcule a homologia de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ usando a sequência de Mayer-Vietoris.

Ex. 126 — Calcule a homologia de V, o espaço obtido do toro T^2 deletando um pequeno disco fechado.





Ex. 127 — Calcule os grupos de homologia relativa do toro sólido relativo ao seu bordo, isto é, os grupos de homologia relativa $H_\bullet(X, \partial X; R)$, onde $X = D^2 \times S^1$ e $\partial X = S^1 \times S^1$.

Ex. 128 — Use a sequência de Mayer-Vietoris para obter informações sobre a homologia da superfície de gênero dois, apresentada na Figura 10.16
Dica: Os subespaços U e V devem ser homeomorfos ao espaço V do Exercício 126

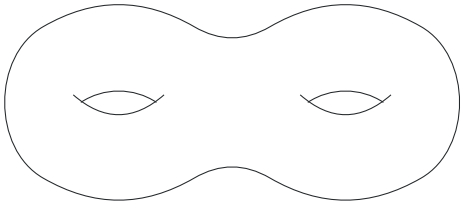


Figura 10.16.: Superfície do gênero dois

Ex. 129 — Use a sequência de Mayer-Vietoris para calcular os grupos de homologia do toro.

Ex. 130 — Mostre que se A é uma retração de X então a aplicação $H_n(A) \to H_n(X)$ induzida pela inclusão $A \subset X$ é injetora.

Ex. 131 — O cone CX sobre um espaço não vazio X é obtido de $[0, 1] \times X$ identificando o subespaço $\{0\} \times X$ a um ponto v, o vértice de CX.

1. Mostre que CX é contrátil.
2. Prove que $H_k(CX, CX \setminus \{v\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(X)$.

Ex. 132 — Prove que $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY, CY)$.

Ex. 133 — Prove que $H_i(X, Y) \cong H_i(X \cup CY)$, para $i \geq 1$.

Ex. 134 — Visualize a primeira subdivisão baricêntrica de Δ^3 e conte o número de 1, 2 e 3-simplexos nela.

Ex. 135 —

1. Mostre que para a união por um ponto $\bigvee_\alpha X_\alpha$, as inclusões $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ induzem o isomorfismo

$$\oplus_\alpha i_{\alpha *} : \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n\left(X_\alpha\right) \to \widetilde{H}_n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right),$$

   se a união por um ponto for feita em pontos base $x_\alpha \in X_\alpha$ de forma que os pares (X_α, x_α) sejam bons.
2. Calcule a homologia do buquê de esferas

$$\bigvee_{i \in I_k} \mathbb{S}^k_i$$

Ex. 136 — Todo grafo tem o tipo de homotopia de um buquê de círculos. Suponha que X seja um grafo, do tipo de homotopia de um buquê de n círculos. Prove que n é um invariante por homotopia de X. Chamamos n de o número Betti de X.

Ex. 137 — Suponha que X é a união de conjuntos abertos $U_0, \ldots, U_n$ tais que todos os grupos de homologia $H_k(Y)$ se anulam para qualquer interseção $Y = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_r}$ desses conjuntos abertos e para todos os $k > 0$. (Essa cobertura aberta $\{U_0, \ldots, U_n\}$ é dita uma cobertura acíclica, neste caso.)

1. Mostre que $H_k(X) = 0$, para $k > n$.
2. Se, além disso, cada interseção Y for conexa por caminhos ou vazia, e $n \geq 1$, mostre que $H_n(X) = 0$.

Ex. 138 — Seja ΣX a suspensão de X.

1. Prove que a projeção $[0, 1] \times X \to [0, 1]$ define uma aplicação contínua $h : \Sigma X \to [0, 1]$.
2. Calcule a homologia de ΣX aplicando Mayer-Vietoris aos conjuntos abertos $h^{-1}(0, 1]$ e $h^{-1}[0, 1)$.

3. Mostre que $H_{k+1}(\Sigma X) \cong H_k(X), k \geq 1$.
4. Mostre que $H_0(X) \cong H_1(\Sigma X) \oplus \mathbb{Z}$.
5. Mostre que $H_0(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}$.

Ex. 139 — Seja $\mathbb{S}^n$ para $n \in \mathbb{N}$ a n-esfera. Prove que $\Sigma\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{S}^{n+1}$ são homeomorfos e calcule os grupos de homologia de $\mathbb{S}^n$ a partir disso.

Ex. 140 — Calcule $H_*(\mathbb{Q})$.

Ex. 141 — (Homologia singular de espaços fracamente contráteis). Um espaço topológico X é fracamente contráctil se existe um $x_0 \in X$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\pi_n(X, x_0)$ tem exatamente um elemento. Equivalentemente, um espaço topológico X é fracamente contráctil se qualquer aplicação contínua de um simplexo é homotopicamente nula.

1. Seja X fracamente contrátil. Mostre que a aplicação constante $X \to \bullet$ induz um isomorfismo $H_*(X; \mathbb{Z}) \to H_*(\bullet; \mathbb{Z})$.
2. O que isso implica para a homologia singular com coeficientes em $\mathbb{Z}$ do círculo de Warsaw W (definido a seguir)?
   O círculo de Warsaw é definido como o subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

   $$W = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) | -1/2\pi < x \leq 1/2\pi, x \neq 0\} \cup \{(0, y) | -1 \leq y \leq 1\} \cup C,$$

   onde C é um arco ligando os pontos $(1/2\pi, 0)$ e $(-1/2\pi, 0)$, disjunto dos outros dois subconjuntos especificados acima, exceto em seus pontos finais, veja Figura 10.17.

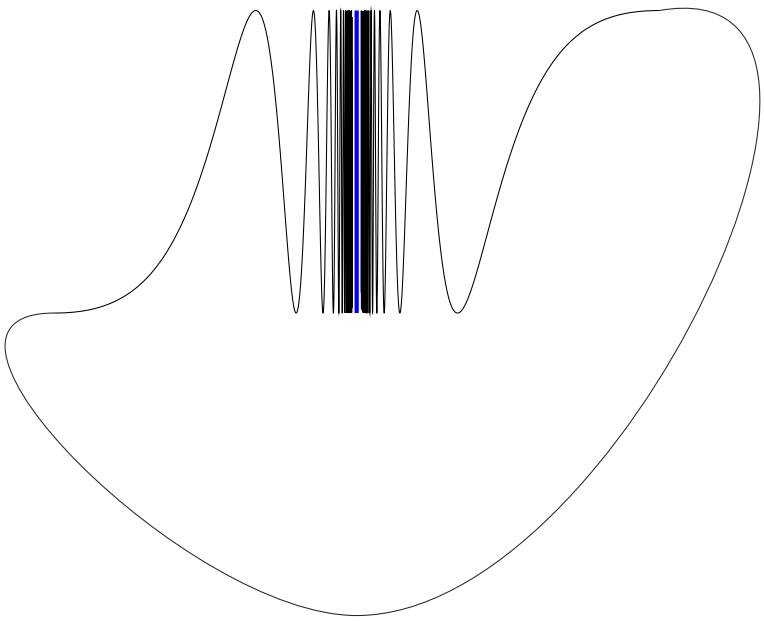


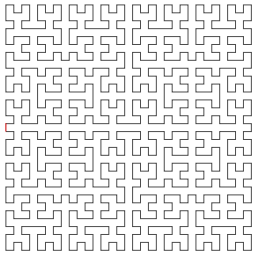
Figura 10.17.: Círculo de Warsaw

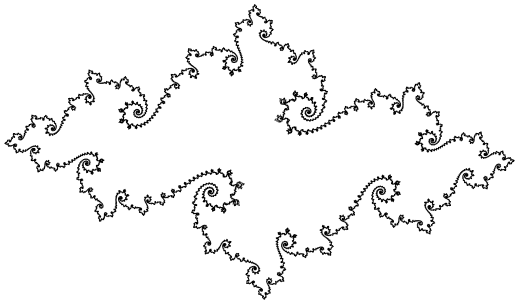
Ex. 142 — Sejam M_1 e M_2 variedades fechadas, conexas e orientáveis. Usando Mayer–Vietoris, mostre que $H_n(M_1 \# M_2) = H_0(M_1 \# M_2) = \mathbb{Z}$, e que $H_i(M_1 \# M_2) = H_i(M_1) \oplus H_i(M_2)$, para $0 < i < n$.

11 Aplicações

11.1. Teorema da Separação de Jordan-Brouwer

O Teorema da Curva de Jordan afirma que uma curva fechada no plano separa o plano em duas partes e está dentre os teoremas que são fáceis de formular e difíceis de provar. Seu enunciado parece óbvio, evidente, quase um axioma. Na verdade, podemos até nos sentir tentados a dizer quando um ponto está do lado de dentro ou do lado de fora da região delimitada por essa curva. Uma maneira popular de fazer isso é usar raios. Escolha um ponto x fora da curva e desenhe um raio, em alguma direção. Se o raio interceptar a curva um número par de vezes, então o ponto está do lado de fora, e se interceptar um número ímpar de vezes, ele está do lado de dentro. Isso parece uma prova, mas não é. O problema é que o raio pode cruzar a curvas infinitas vezes, e dessa forma, não descobrimos nada. De fato, pode ser que todo raio a partir do ponto x intersecte a curva infinitas vezes[1].





No que segue, apresentamos uma demonstração da generalização do Teorema

[1] Na verdade, esse é o caso genérico!

da Curva de Jordan, para dimensões superiores, baseada nos grupos de homologia.

Se A é um subespaço de X, dizemos que A **separa** X se $X \setminus A$ não for conexo.

Lema 11.1

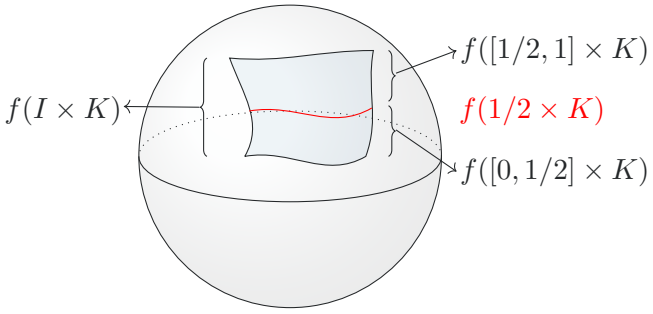
Sejam X um espaço localmente conexo por caminhos e $A \subset X$ um subconjunto fechado. Então, A separa X se, e somente se, $\widetilde{H}_0(X \setminus A) \ncong 0$.

Demonstração. Como $X \setminus A$ é um espaço localmente conexo por caminhos, as componentes conexas e as componentes conexas por caminhos coincidem. Em particular, o grupo $\widetilde{H}_0(X \setminus A)$ se anula se, e somente se, $X \setminus A$ for conexo e, em geral, seu posto é um a menos que o número de componentes conexas de $X \setminus A$. ■

Observamos que, nessa seção, estamos interessados nos casos em que o espaço X é $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{S}^n$, e A é um subconjunto fechado em X e logo estamos nas hipóteses do Lema 11.1.

Seja que K um espaço compacto com a propriedade $\widetilde{H}_* \left(\mathbb{S}^n \setminus f(K)\right) = 0$, para todo mergulho $f : K \to \mathbb{S}^n$. Então, $I \times K$ também tem essa propriedade.

Demonstração. Seja $f : I \times K \to \mathbb{S}^n$ um mergulho e suponha que $0 \neq \alpha \in \widetilde{H}_i \left(\mathbb{S}^n \setminus f(I \times K)\right)$.



Definimos

$$U_0 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \times K\right) \qquad \text{e} \qquad U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times K\right).$$

Logo, temos que

$$U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f(I \times K) \qquad \text{e} \qquad U_0 \cup U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\{1/2\} \times K\right).$$

Pela Sequência Exata de Mayer-Vietoris, temos que:

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{i+1}(U_0 \cup U_1) \longrightarrow \widetilde{H}_i(U_0 \cap U_1) \longrightarrow \widetilde{H}_i(U_0) \oplus \widetilde{H}_i(U_1) \longrightarrow \widetilde{H}_i(U_0 \cup U_1) -$$

O conjunto $U_0 \cup U_1 = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times K\right)$ é acíclico, por hipótese, logo o elemento $0 \neq \alpha \in \widetilde{H}_i(U_0 \cap U_1)$ é levado não trivialmente em pelo menos um dos grupos $\widetilde{H}_i(U_0)$ e $\widetilde{H}_i(U_1)$ e não há perda de generalidade supor que seja para U_0.

Vamos repetir o argumento substituindo o intervalo I por $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Desta forma, obtemos uma sequência de intervalos $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, onde I_k tem comprimento 2^{-k} e aplicações α para $\alpha_k \neq 0$ em $\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(I_k \times K))$. Seja

$$V_k = \mathbb{S}^n \setminus f(I_k \times K).$$

Então, temos que $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ e que $\bigcap I_k = \{x\}$, para algum $x \in I$. Dessa forma

$$\bigcup V_k = \mathbb{S}^n \setminus \bigcap f(I_k \times K) = \mathbb{S}^n \setminus f(\{x\} \times K).$$

Pelo Teorema 10.6, temos $0 \neq \{\alpha_k\} \in \varinjlim \widetilde{H}_i(V_k) = \widetilde{H}_i(\bigcup V_k) = \widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(\{x\} \times K)) = 0$, ou seja, α é levado para $\alpha_k \neq 0$ para todo k e, portanto, deve ser levado para um elemento diferente de zero em $\widetilde{H}_i(\bigcup V_k)$ e assim temos uma contradição.

■

1. Se $f : \mathbb{D}^r \to \mathbb{S}^n$ é uma mergulho, então $\widetilde{H}_*(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^r)) = 0$. Em particular, $\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{D}^r)$ é conexo.

2. Se $f : \mathbb{S}^r \to \mathbb{S}^n$ é uma mergulho, então

$$\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^r)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i = n - r - 1, \\ 0, & \text{para } i \neq n - r - 1. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\widetilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^r)) \cong \widetilde{H}_i\left(\mathbb{S}^{n-r-1}\right).$$

Demonstração. A demonstração do item 1 é imediata para $r = 0$ e por indução, pelo teorema anterior, temos que ela é verdadeira para qualquer r maior que zero.

A demonstração do item 2 também será feita por indução em r. Para $r = 0$, temos

$$\mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{S}^0\right) \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}.$$

Suponha que o resultado vale para $r-1$, ou seja, que $\widetilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{S}^{r-1}\right)\right) \cong \mathbb{Z}$, para $i = n - r$ e é 0, caso contrário. Então, para uma mergulho f de $\mathbb{S}^r$ em $\mathbb{S}^n$, definimos

$$S_+ = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{D}^r_+\right) \quad \text{e} \quad S_- = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{D}^r_-\right),$$

sendo $\mathbb{D}^r_+$ e $\mathbb{D}^r_-$ os hemisférios superior e inferior de $\mathbb{S}^r$, de modo que

$$S_+ \cap S_- = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{S}^r\right) \quad \text{e} \quad S_+ \cup S_- = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{S}^{r-1}\right).$$

Na sequência de Mayer-Vietoris para o par S_+ e S_-,

$$\cdots \to \widetilde{H}_{i+1}\left(S_+\right) \oplus \widetilde{H}_{i+1}\left(S_-\right) \to \widetilde{H}_{i+1}\left(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{r-1})\right) \to \widetilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{S}^r\right)\right) \to \widetilde{H}_i\left(S_+\right) \oplus \widetilde{H}_i\left(S_-\right) \to \cdots$$

os termos de soma direta são 0 pelo item 1. Assim, $\widetilde{H}_{i+1}\left(\mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^{r-1})\right) \cong \widetilde{H}_i\left(\mathbb{S}^n \setminus f\left(\mathbb{S}^r\right)\right)$ o que implica o resultado. ∎

No que segue usaremos a seguinte nomenclatura. Uma **n-célula** é um espaço homeomorfo ao n-disco. Uma **célula** é um espaço que é uma n-célula para algum $n \geq 0$.

Observamos que, sob as hipóteses deste teorema, parece provável que se C_1 e C_2 são as componentes de $\mathbb{S}^n \setminus C$, onde C é o mergulho de uma $(n-1)$-esfera, então os conjuntos $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$ devem ser n-células. Mas isso não é verdade.

Um contra-exemplo é a esfera com chifres de Alexander, representada na Figura 11.2. Este é um objeto construído indutivamente no espaço tridimensional e podendo ser mergulhado na esfera tridimensional. Começamos com uma esfera comum $\mathbb{S}^2$. Em seguida, tomamos dois discos dela e esticamos-os para os "chifres" na esfera. Agora pegamos mais dois discos e use-os para colocar chifres nos chifres de tal forma que os dois pares de chifres pareçam ligados como os elos de uma corrente. Este processo continua ad infinitum. Se feito com cuidado, terminaremos com um homeomorfismo da esfera padrão para uma esfera mergulhada no espaço

tridimensional cujo interior é um disco aberto e cujo complemento não é simplesmente conexo, apesar de possuir os mesmos grupos de homologia que um ponto.

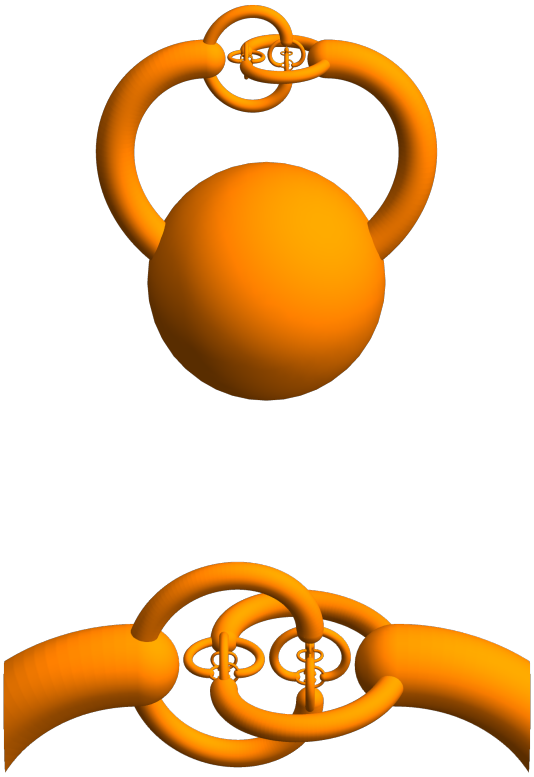


Figura 11.2.: Esfera com "chifres" de Alexander

Também vale destacar que o complemento da imagem de um disco na esfera $\mathbb{S}^n$ não precisa ser contrátil. Um contra-exemplo disso é o "arco selvagem" de Fox e Artin ilustrado na Figura 11.3. Pode-se mostrar que o complemento deste arco em $\mathbb{S}^n$ não é simplesmente conexo.

Teorema de Jordan Generalizado para $\mathbb{S}^n$. Seja C um subconjunto de $\mathbb{S}^n$ homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Então $\mathbb{S}^n \setminus C$ tem precisamente duas componentes conexas



Figura 11.3.: "Arco selvagem" de Fox e Artin

acíclicas, sendo C a fronteira comum.

Demonstração. Aplicando o teorema anterior ao caso $k = n - 1$, vemos que $\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus C) \cong \mathbb{Z}$. e todas as outras homologias são zero. Assim, $\mathbb{S}^n \setminus C$ tem precisamente duas componentes conexas acíclicos, que são abertas em $\mathbb{S}^n$. Então, a fronteira de C_i é o conjunto $\overline{C}_i \setminus C_i$. Precisamos provar que

$$\overline{C}_1 \setminus C_1 = C = \overline{C}_2 \setminus C_2.$$

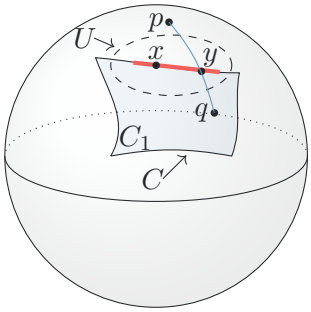
É suficiente demonstrar a primeira dessas igualdades. Como C_2 é aberto, nenhum ponto de C_2 é um ponto de acumulação de C_1 e, portanto, $\overline{C}_1 \setminus C_1 \subset C$. Mostraremos agora que $C \subset \overline{C}_1 \setminus C_1$. Para tanto, sejam $x \in C$ e uma vizinhança U de x, mostraremos que U intersecta o conjunto fechado $\overline{C}_1 \setminus C_1$. Como C é homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$, podemos escrever C como a união de duas $n-1$-células, A_1 e A_2, de modo que A_1 seja pequena o suficiente para estar em U.

Observamos que como A_2 não separa a esfera $\mathbb{S}^n$, podemos escolher um caminho γ em $\mathbb{S}^n \setminus A_2$ ligando um ponto p de C_1 a um ponto q de C_2. Agora, γ deve conter um ponto de $\overline{C}_1 \setminus C_1$, pois caso contrário γ estaria na união dos conjuntos abertos disjuntos C_1 e $\mathbb{S}^n \setminus \overline{C}_1$ e conteria um ponto de cada um deles, o que contradiz a conexidade de γ.

Seja y um ponto de $\overline{C}_1 \setminus C_1$ pertencente ao caminho γ. Logo, y está em C. Como não pode estar em A_2, deve estar em A_1 e, portanto, em U. Logo, U intersecta $\overline{C}_1 \setminus C_1$ no ponto y, conforme desejado.

■

Teorema de Jordan Generalizado para $\mathbb{R}^n$. Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Então $\mathbb{R}^n \setminus C$ tem precisamente duas componentes conexas, das quais C é a fronteira comum. Uma das componentes é limitada e acíclica e a outra é ilimitada e com homologia de $\mathbb{S}^{n-1}$.



Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos substituir $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{S}^n$ no enunciado, identificando $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, onde p é o polo norte da esfera. Sabemos que $\mathbb{S}^n \setminus C$ tem duas componentes conexas C_1 e C_2. Suponha $p \in C_1$. Se mostrarmos que $C_1 \setminus \{p\}$ é conexo, o que deixaremos como exercício ao leitor, então $C_1 \setminus \{p\}$ e C_2 são as componentes de $(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \setminus C$, e C é a fronteira de C_2 e $C_1 \setminus \{p\}$.

Agora precisamos calcular as homologias de $C_1 \setminus p$ e C_2. Sabemos pelo teorema que os espaços C_1 e C_2 são acíclicos. Para calcular a homologia de $C_1 \setminus p$ considere a sequência exata relativa do par (C_1, p):

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{k+1}(C_1) \longrightarrow \widetilde{H}_{k+1}(C_1, C_1 \setminus \{x\}) \longrightarrow \widetilde{H}_k(C_1 \setminus \{x\}) \longrightarrow \widetilde{H}_{k+1}(C_1) \longrightarrow \cdots \tag{11.1}$$

e logo como a componente C_1 é acíclica temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_k(C_1 \setminus \{x\}) &\cong \widetilde{H}_{k+1}(C_1, C_1 \setminus \{x\}) \\ &\cong \widetilde{H}_k(\mathbb{D}^n \setminus, \mathbb{D}^n\{0\}) \\ &\cong \widetilde{H}_k(\mathbb{D}^n\{0\}) \\ &\cong \widetilde{H}_k(\mathbb{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

onde o primeiro isomorfismo é dado pela sequência 11.1, o segundo por excisão, o terceiro pela sequência exata relativa do par $\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus 0$ e finalmente o quarto por homotopia.

■

11.2. Invariância de Domínio e de Dimensão

De modo geral, para verificar que uma função f é um homeomorfismo, é necessário verificar que tanto a função f quanto sua função inversa f^{-1} são contínuas, o Teorema da Invariância de Domínio, demonstrado por Brouwer em 1912, diz que se f é injetora e o domínio é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e a imagem também está em $\mathbb{R}^n$, então a continuidade de f^{-1} é automática. Além disso, o teorema diz que se dois subconjuntos U e V de $\mathbb{R}^n$ são homeomorfos e U é aberto, então V também deve ser aberto. A conclusão do teorema pode ser formulada de forma equivalente como f é uma aplicação aberta. Observamos que ambas as afirmações não são nada óbvias e geralmente não são verdadeiras se deixarmos o espaço euclidiano.

Uma consequência importante do Teorema de Invariância de Domínio é o Teorema da Invariância da Dimensão que afirma que $\mathbb{R}^n$ não pode ser homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ se $m \neq n$.

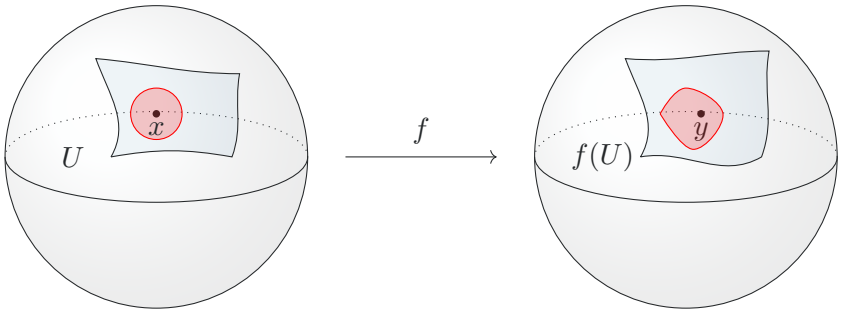
Para compreender a importância desse teorema devemos compreender o contexto histórico no qual surgiu. Antes de 1870, os matemáticos lidavam apenas com os subconjuntos U de $\mathbb{R}^n$ que podiam, pelo menos localmente, ser "parametrizados" por aplicações diferenciáveis injetoras de um subconjunto aberto de algum $\mathbb{R}^n$. Também se assumia tacitamente que a posição de um ponto em $\mathbb{R}^n$ só poderia ser completamente determinada por um sistema de n números reais. Essa é a definição ingênua de dimensão: uma reta tem dimensão 1, pois apenas uma coordenada é necessária para especificar um ponto nela; e uma superfície, como um cilindro ou esfera, tem uma dimensão 2, pois são necessárias duas coordenadas para especificar um ponto nela.

A descoberta por Cantor, em 1877, de uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$, para qualquer n, foi uma completa surpresa. A função de Cantor era totalmente descontínua, mas a descoberta da curva de Peano, em 1890, mostrou que existiam funções contínuas, embora não injetoras, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. A única esperança que restava de salvar a noção clássica de dimensão era aquela expressa por Dedekind assim que Cantor lhe comunicou seu teorema: não existem homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ para $m \neq n$. A prova da conjectura de Dedekind foi feita por Brouwer em 1911.

Invariância de Domínio. Sejam U aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e injetora. Então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e f é um mergulho.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos substituir $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{S}^n$ no enunciado, identificando $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$.

Dado um ponto $y \in f(U) \subset \mathbb{S}^n$, seja $x \in U \subset \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = y$. Seja B_ϵ uma bola aberta de raio ϵ centrada em x, cujo fecho está em U e seja $S_\epsilon = \overline{B}_\epsilon - B_\epsilon$.



Por indução, o conjunto $f(S_\epsilon)$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$ e, portanto, $f(S_\epsilon)$ separa $\mathbb{S}^n$ em duas componentes C_1 e C_2. O conjunto $f(B_\epsilon)$ é conexo e disjunto de $f(S_\epsilon)$ e, assim, ele está contido em uma das componentes C_1 ou C_2. Podemos supor, sem perda de generalidade, que esteja em C_1. Temos que $f(S_\epsilon)$ deve ser igual a C_1, caso contrário, o conjunto

$$\mathbb{S}^n \setminus f(B_\epsilon) \setminus f(S_\epsilon) = \mathbb{S}^n \setminus f\left(\overline{B}_\epsilon\right)$$

consistiria em todos os pontos de C_2 juntamente com pontos de C_1, contradizendo o fato de que a célula $f\left(\overline{B}_\epsilon\right)$ não separa $\mathbb{S}^n$. Portanto, $f(B_\epsilon) = C_1$. Concluímos que $f(U)$ contém a vizinhança aberta C_1 de y.

Logo, f leva conjuntos abertos em U a conjuntos abertos em $\mathbb{S}^n$ e, portanto, é uma aplicação aberta em $f(U)$. Consequentemente, f é um homeomorfismo entre U e $f(U)$. ∎

A demonstração do Teorema da Invariância de Domínio é mais fácil se assumirmos que a função f é continuamente diferenciável com jacobiano não singular. Neste caso, o resultado decorre do Teorema da Função Inversa.

Invariância de Domínio. Se M^n e N^n são variedades n-dimensionais topológicas e $f : M^n \to N^n$ é injetora e contínua, então f é uma aplicação aberta.

Demonstração. Mostraremos que a imagem de uma vizinhança de x sob f é uma vizinhança de $f(x)$. Seja $V \subset N^n$ um conjunto aberto homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ contendo $f(x)$. Então, a restrição de f a $f^{-1}(V)$ é injetora, contínua e, portanto, aberta pelo Teorema 11.2. Agora, se U é uma vizinhança aberta de x, então $U \cap f^{-1}(V)$ também é. Portanto, $f(U \cap f^{-1}(V))$ é uma vizinhança aberta de $f(x)$. Logo, $f(U)$ é uma vizinhança de $f(x)$. ∎

Invariância da Dimensão. Se uma m-variedade M^m é homeomorfa a uma variedade n-dimensional N^n, então $n = m$.

Demonstração. Dado $x \in M^m$, existe uma vizinhança aberta V de x em M^m que é homeomorfa ao disco $\mathbb{D}^m$ em $\mathbb{R}^m$ e, sem perda de generalidade, assumiremos que esse homeomorfismo leva o ponto x em 0. Assim,

$$\begin{aligned} H_i(M, M \setminus \{x\}) &\cong H_i\left(V, V \setminus \{x\}\right) && \text{(por excisão 10.5)} \\ &H_i\left(\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^m \setminus \{0\}\right) && \text{(por homeomofismo)} \\ &\cong \widetilde{H}_{i-1}\left(\mathbb{D}^m \setminus \{0\}\right) && \text{(pela sequência exata de homologia relativa)} \\ &\cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{m-1}) && \text{(por homotopia)} \end{aligned}$$

Na fórmula acima usamos o Teorema de Excisão com $X = M, A = M \setminus \{x\}$, e $U = M \setminus V$.

Como $\widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \cong \mathbb{Z}$, para $i = m$, e 0, caso contrário, temos que m é um invariante topológico de M^m, já que os grupos $H_i(M, M \setminus \{x\})$ são invariantes topológicos. ∎

11.3. Aplicações na Esfera

Nesta seção, estudaremos aplicações da esfera em si mesma, introduziremos o conceito de grau de uma aplicação e utilizaremos desse ferramental para provar o Teorema da Classificação de Hopf, o Teorema da Esfera Cabeluda, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e, posteriormente, o Teorema Fundamental da Álgebra.

O grau de uma aplicação $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, com $n > 0$, foi definido e estudado por Brouwer durante 1910-1912. Intuitivamente, o grau representa o número de vezes que a esfera no domínio é enrolada e envolve a esfera no contradomínio sob

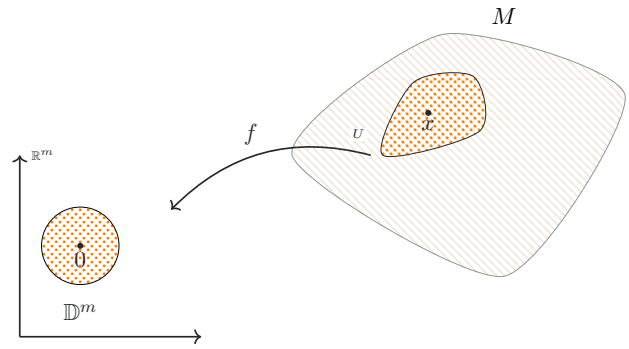


Figura 11.4.: Homeomorfismo da demonstração de Invariância da Dimensão.

a aplicação. O grau é sempre um número inteiro, mas pode ser positivo ou negativo dependendo das orientações.

Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ com $n > 0$ uma aplicação contínua. Como $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, seja α um gerador de $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$, então $f_*(\alpha) = d \cdot \alpha$. O inteiro d independe da escolha do gerador é denominado **grau** de f e é denotado por $\deg f$.

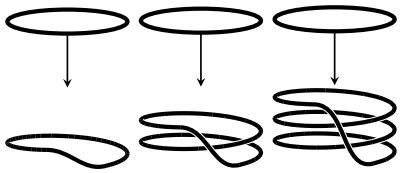


Figura 11.5.: Aplicações de grau 1, 2 e 3, respectivamente em $\mathbb{S}^1$

O grau de uma aplicação contínua na esfera tem as seguintes propriedades:

1. A aplicação identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tem grau $+1$.
2. Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ e $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ são aplicações contínuas, então $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.
3. Se f não é sobrejetora, então $\deg f = 0$.
4. Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ e $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ são aplicações contínuas e $f \simeq g$, então $\deg f = \deg g$.

5. Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ é um homeomorfismo, então $\deg f = \pm 1$.

6. Se f se estende a uma aplicação contínua $h : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$, então $\deg f = 0$.

Demonstração.

1 A aplicação identidade na esfera induz a aplicação identidade $(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n})_*$ nos grupos de homologia.

2 De fato, temos que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

3 De fato, se f não é sobrejetora, existe $y \notin \operatorname{im} f$. Então, podemos fatorar f da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ \downarrow{\scriptstyle f} & \nearrow{\scriptstyle \iota} & \\ \mathbb{S}^n \setminus \{y\} & & \end{array}$$

Como $\mathbb{S}^n \setminus \{y\} \cong \mathbb{R}^n$ é contrátil, $H_n(\mathbb{S}^n \setminus \{y\}) = 0$. Portanto, $f_* = f_* \iota_* = 0$, então $\deg f = 0$.

4 Isso ocorre porque, como f e g são homotópicas, temos que $f_* = g_*$. Provaremos a seguir que a recíproca é verdadeira.

5 Como $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, temos que $\deg f \cdot \deg f^{-1} = 1$, logo $\deg f = \pm 1$.

6 Temos a composição de funções:

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{\iota} \mathbb{D}^{n+1} \xrightarrow{h} \mathbb{S}^n,$$

logo, temos a composição induzida

$$H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\iota_*} H_n(\mathbb{D}^{n+1}) \xrightarrow{h_*} H_n(\mathbb{S}^n).$$

Como $\mathbb{D}^{n+1}$ é acíclico, a composta é o homomorfismo nulo. ∎

Para podermos usar as informações sobre o grau de uma aplicação precisamos antes calcular o grau de alguns exemplos fundamentais.

Seja $r : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma reflexão através de algum subespaço n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$, então $\deg r = -1$.

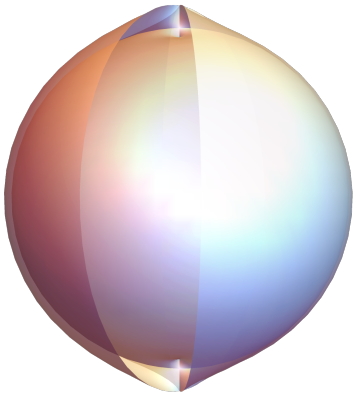


Figura 11.6.: Aplicação de grau 2 em $\mathbb{S}^2$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o subespaço é $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. O hemisfério superior U e o hemisfério inferior L de $\mathbb{S}^n$ podem ser considerados como n-simplexos singulares, através de homeomorfismos entre os hemisférios e o simplexo $\triangle^n$. Com essa estrutura de Δ-complexo, o gerador de $H_n(\mathbb{S}^n)$ é $[U - L]$. A reflexão r leva o ciclo $U - L$ para $L - U$ e assim

$$r_*([U - L]) = [L - U] = [-(U - L)] = -1\,[U - L].$$

Segue que $\deg r = -1$. ∎

Seja $-\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação antipodal $(x \mapsto -x)$, então $\deg \mathrm{id} = (-1)^{n+1}$.

Demonstração. Observe que $-\mathrm{id}$ é dada pela composição de $n + 1$ reflexões, cada uma mudando o sinal da i-ésima componente por uma reflexão. Como o grau da composição é a multiplicação de graus, temos o resultado desejado. ∎

Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação com grau diferente de $(-1)^{n+1}$, então f tem pelo menos um ponto fixo.

Demonstração. Suponha que f não possui pontos fixos. Assim, para todo x, temos que $f(x) \neq x$, logo o segmento $(1-t)f(x) + t(-x)$ ligando $f(x)$ a $-x$ não passa pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, já que $f(x)$ não é o ponto antipodal de $-x$. Podemos, então, normalizar para obter uma homotopia na esfera $g_t : I \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por:

$$g_t(x) \coloneqq \frac{(1-t)f(x) + t(-x)}{\|(1-t)f(x) + t(-x)\|}.$$

Então, g_t é uma homotopia de f à aplicação antipodal $-\operatorname{id}$ e logo $\deg f = (-1)^{n+1}$. ∎

A esfera $\mathbb{S}^n$ possui um campo contínuo de vetores tangentes que não se anula se, e somente se, n é ímpar.

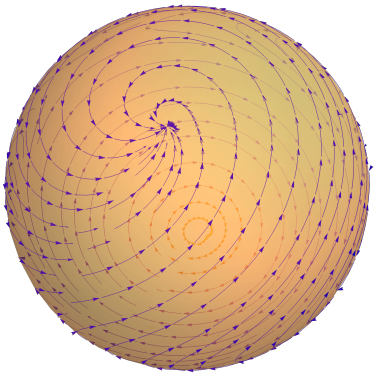


Figura 11.7.: Todo campo contínuo de vetores tangentes na esfera $\mathbb{S}^2$ se anula em algum ponto.

Demonstração. Suponha que $v(x)$ seja um campo de vetores tangente em $\mathbb{S}^n$. A tangência implica que x e $v(x)$ são ortogonais em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $v(x) \neq 0$, para todo x, podemos normalizar o campo de vetores de modo que $\|v(x)\| = 1$, para todo x. Supondo que isso tenha sido feito, os vetores $(\cos(\pi t))x + (\operatorname{sen}(\pi t))v(x)$ estão no círculo unitário do plano gerado por x e $v(x)$. Quando t vai de 0 para 1, obtemos uma homotopia:

$$f_t(x) = (\cos(\pi t))x + (\operatorname{sen}(\pi t))v(x)$$

da aplicação identidade de $\mathbb{S}^n$ na aplicação antipodal. Em termos dos graus dessas aplicações, isso resulta na igualdade $(-1)^{n+1} = 1$, que implica que n é ímpar.

Reciprocamente, seja uma esfera de dimensão ímpar $\mathbb{S}^{2k-1}$, então o campo vetorial definido por

$$v(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{2k-1},\ x_{2k}) = (-x_2,\ x_1,\ \cdots,\ -x_{2k},\ x_{2k-1})$$

é um campo vetorial tangente que não se anula em nenhum ponto, já que $v(x)$ é ortogonal a x, e $\|v(x)\| = 1$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. ■

A ausência de qualquer campo vetorial não nulo em $\mathbb{S}^2$ apresenta um resultado popular chamado Teorema da Bola Cabeluda.

Teorema da Bola Cabeluda. Uma bola peluda não pode ser penteada, em outras palavras, sempre que se tenta pentear uma bola cabeluda, haverá pelo menos um redemoinho de cabelo em algum lugar.

Demonstração. Se alguém imaginar que tem um cabelo crescendo de cada ponto na superfície de uma bola, então não é possível penteá-la. Caso contrário, os vetores tangentes aos cabelos mostrariam que $\mathbb{S}^2$ admitiria um campo vetorial contínuo não nulo. ■

O toro peludo é a única superfície peluda orientável que pode ser penteada suavemente.

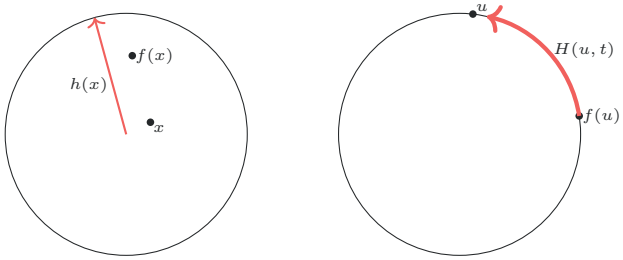
Uma aplicação curiosa do Teorema 11.3 em meteorologia consiste em considerar a distribuição de ventos como um campo de vetores sobre a superfície de um planeta com atmosfera. Mediante esta idealização, então a cada momento existe pelo menos um ponto onde a velocidade do vento é zero.

Ponto Fixo de Brouwer. Toda aplicação contínua $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ possui um ponto fixo.

Demonstração. Suponha que $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ não possui ponto fixo. Podemos definir a aplicação $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ pela equação

$$h(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|},$$

pois, por hipótese, $x - f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{D}^n$. Seja $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ a restrição de h a $\mathbb{S}^{n-1}$, então g tem grau 0, pela Proposição 11.3.



Por outro lado, mostraremos que g tem grau 1, gerando uma contradição. Para isso, definimos uma homotopia $H : \mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$ pela equação

$$H(u,t) = \frac{u - tf(u)}{\|u - tf(u)\|}.$$

Observamos que, para $t = 1$, o denominador é diferente de zero, pois $u \neq f(u)$; e para $0 \leq t < 1$, o denominador é diferente de zero, pois $\|u\| = 1$ e $\|tf(u)\| = t\|f(u)\| \leq t < 1$. A aplicação H é uma homotopia entre a aplicação identidade de $\mathbb{S}^{n-1}$ e a aplicação g. Portanto, $\deg g = 1$.

O próximo teorema fornece uma classificação completa das aplicações da esfera na esfera a menos de homotopia.

11.4. Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio não constante em uma única variável com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa. Apesar de seu nome, não há prova puramente algébrica do teorema, pois o resultado depende de alguma forma da completude dos números reais, que não é um conceito algébrico.

A primeira menção do Teorema Fundamental da Álgebra, na forma de que toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes, foi dada por Peter Roth de Nurnberg em 1608 e foi Descartes em 1637, quem distinguiu entre raízes reais e imaginárias. A primeira prova publicada do Teorema Fundamental da Álgebra foi dada por D'Alembert em 1746. No entanto, havia lacunas na prova de D'Alembert e a primeira prova totalmente aceita foi aquela dada por Gauss em 1797 em sua tese

de doutorado que foi publicada em 1799. Curiosamente, ao revisar a prova original de Gauss, os matemáticos modernos tendem a concordar que há tantas lacunas nessa demonstração quanto na demonstração de D'Alembert. A primeira prova rigorosa foi publicada por Argand, um matemático amador, em 1806 (e revisitada em 1813). Gauss também produziu duas outras provas em 1816 e outra versão incompleta de sua prova original em 1849.

A demonstração que apresentaremos baseia-se no conceito de grau de uma aplicação.

Teorema Fundamental da Álgebra. Todo polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui uma raiz em $\mathbb{C}$.

Demonstração. Observamos inicialmente que é suficiente demonstrar o teorema para um polinômio da forma:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_0 \neq 0 \text{ e } n \geq 1.$$

Suponha que p não tenha raízes, então p é uma aplicação do plano complexo $\mathbb{C}$ para $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A restrição desta aplicação aos diferentes círculos $|z| = r$ para diferentes valores de $r \geq 0$ são caminhos fechados em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

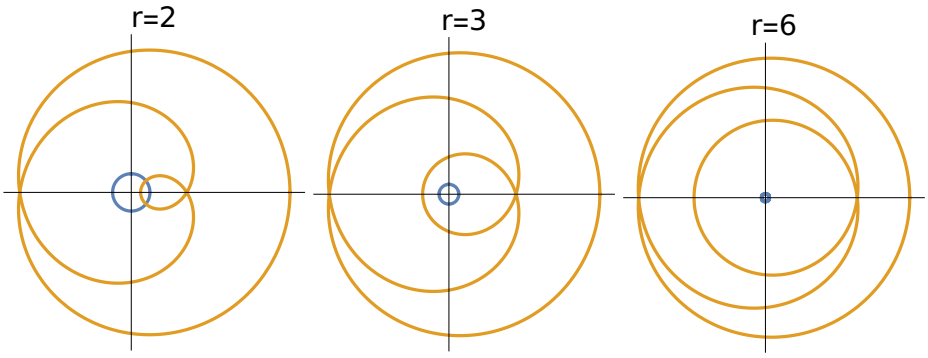


Figura 11.8.: Em azul, os círculos $|z| = r$ e, em laranja, suas respectivas imagens por $p(z) = z^3 + 2z^2 + 1$, para $r = 2, 3$ e 6.

Considere a aplicação $G : \mathbb{S}^1 \times [0,\ \infty) \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ definida por

$$G(t,\ r) = \frac{p(re^{2\pi it})/p(r)}{|p(re^{2\pi it})/p(r)|}.$$

A aplicação G leva os diferentes caminhos fechados, $p(re^{2\pi it})$ com r fixo, para a círculo unitário através de uma normalização. Seja $F : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ a homotopia definida por

$$F(t,\ s) = \begin{cases} G(t, s/(1-s))\ , & \text{se } 0 \leq s < 1 \\ e^{2\pi int}\ , & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Como a função G é contínua, temos que

$$\lim_{s\to 1^-} F(t,\ s) = \lim_{s\to 1^-} G(t,\ s/(1-s)) = \lim_{r\to\infty} G(t,\ r) = e^{2\pi int},$$

e logo F é contínua. Se denotarmos por $f_0(t) = F(t,\ 0) = 1$ e $f_1(t) = F(t,\ 1) = z^n$, então $f_0 \simeq f_1$. Consequentemente, $\deg f_0 = \deg f_1$. Mas $\deg f_0 = 0$ e $\deg f_1 = n$. Logo, temos uma contradição, e $p(z)$ deve ter uma raiz em $\mathbb{C}$. ∎

11.5. Teorema de Borsuk-Ulam

O Teorema de Borsuk–Ulam afirma que toda função contínua da esfera n-dimensional para o espaço euclidiano n-dimensional leva algum par de pontos antípodas para o mesmo ponto. O caso $n = 1$ implica que, em cada tempo e em cada grande círculo da Terra, existem dois pontos antípoda com a mesma temperatura. O caso $n = 2$ implica que, a cada instante, existem dois pontos antípodas na superfície da Terra com a mesma temperatura e a mesma pressão atmosférica. De acordo com (Matoušek; Björner; Ziegler, 2003), a primeira menção histórica do enunciado do teorema de Borsuk–Ulam foi dada por Lyusternik & Shnirel'man em 1930. A demonstração foi dada por Karol Borsuk em 1933, onde a formulação do problema foi atribuída a Stanislaw Ulam.

Borsuk-Ulam. Para qualquer aplicação $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

O teorema é uma consequência imediata do seguinte resultado, conhecido como Teorema Antipodal.

Antipodal. Suponha que a aplicação $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ satisfaça $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Então $n \leq m$.

Para ver que o Teorema Antipodal implica o Teorema de Borsuk-Ulam, suponha que $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ é um aplicação com $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Então

podemos definir um aplicação $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

de modo que $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Isso contradiz o Teorema Antipodal.

Teorema Antipodal. O grupo com dois elementos $\mathbb{Z}_2$ atua na k-esfera $\mathbb{S}^k$ pela aplicação antipodal $-\operatorname{id} \cdot x = -x$. E o espaço quociente pode ser identificado com o espaço projetivo real k dimensional e a aplicação quociente $\mathbb{S}^k \xrightarrow{p} \mathbb{RP}^k$ é a aplicação de recobrimento duplo.

Logo, cada p-simplexo singular $\sigma : \Delta_p \to \mathbb{RP}^k$ tem precisamente dois levantamentos $\overline{\sigma}_+, \overline{\sigma}_-$, que a aplicação $-\operatorname{id}$ transforma um no outro: temos $-\operatorname{id}(\overline{\sigma}_\pm) = \overline{\sigma}_\mp$. Correspondentemente, obtemos um aplicação de cadeia

$$\tau_* : S_*\left(\mathbb{RP}^k; \mathbb{Z}_2\right) \to S_*\left(\mathbb{S}^k; \mathbb{Z}_2\right)$$

dado por $\tau_*(\sigma) = \overline{\sigma}_+ + \overline{\sigma}_-$, que é denominada de transferência e temos a sequência exata curta

$$0 \to S_*\left(\mathbb{RP}^k; \mathbb{Z}_2\right) \xrightarrow{\tau_*} S_*\left(\mathbb{S}^k; \mathbb{Z}_2\right) \xrightarrow{p*} S_*\left(\mathbb{RP}^k; \mathbb{Z}_2\right) \to 0$$

de complexos de cadeias singulares com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

Um aplicação $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ com $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$, gera uma aplicação $\overline{g} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ nos quocientes. Obtemos assim uma aplicação de sequências exatas curtas de complexos de cadeia

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & S_*(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & S_*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}_*} & & \\
0 & \longrightarrow & S_*(\mathbb{RP}^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & S_*(\mathbb{S}^m; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{p_*} & S_*(\mathbb{RP}^m; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Temos a sequência exata longa de homologia associada a sequência exata curta

inferior do diagrama 11.5:

$$
\begin{array}{l}
0 \\
\longrightarrow H_m\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \xrightarrow{\tau_*} H_m\left(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2\right) \xrightarrow{p_*} H_m\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \\
\longrightarrow H_{m-1}\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \longrightarrow H_{m-1}\left(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2\right) \longrightarrow H_m\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \\
\longrightarrow H_1\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \qquad\qquad \cdots \\
\longrightarrow H_0\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \longrightarrow H_0\left(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2\right) \longrightarrow H_0\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right)
\end{array}
\tag{11.2}
$$

na qual já observamos que $H_{m+1}\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) = 0$. Observe que em homologia, a composição da aplicação de recobrimento e de transferência é trivial:

$$\tau_* \circ p_* = 2 \cdot \mathrm{id}_{H_m(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2)} = 0$$

porque estamos considerando homologias com coeficientes no corpo $\mathbb{Z}_2$.

Pela sequência exata longa anterior temos que a aplicação τ_* é injetora, e logo $p_* = 0$, então o morfismo mais à direita na sequência é zero e τ_* é um isomorfismo. Como $H_k\left(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2\right)$ se anula para $0 < k < m$, os morfismos de bordo $H_k\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \to H_{k-1}\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right)$ são isomorfismos para $1 < k \leq m$.

Mas o morfismo final da sequência exata longa é claramente um isomorfismo porque ambos $\mathbb{S}^m$ e $\mathbb{RP}^m$ são conexos por caminhos. Portanto, a seta anterior é zero e, portanto, também $H_1\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right) \to H_0\left(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2\right)$ é um isomorfismo.

Como as mesmas observações se aplicam a sequência exata longa superior, o quadrado com o homomorfismo de bordo no caso $n \geq m$ e $1 \leq i \leq m$ é

$$
\begin{array}{ccc}
H_i(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) & \xlongequal{\partial} & H_{i-1}(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) \\
\downarrow{\scriptstyle \overline{g}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}} \\
H_i(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2) & \xlongequal{\partial} & H_{i-1}(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2)
\end{array}
$$

Como $\overline{g} : H_0(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) \to H_0(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2)$ é um isomorfismo, o diagrama diz que $\overline{g}$ também é um isomorfismo para $1 \leq i \leq m$ por indução.

Também temos que

$$\begin{array}{ccc} H_m(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_m(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}_2) \\ \Big\| \overline{g} & & \Big\downarrow \overline{g} \\ H_i(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\tau_*} & H_m(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Mas para $n > m$, isso é um absurdo pois $H_m(\mathbb{S}^n;\mathbb{Z}_2) = 0$ e $H_m(\mathbb{S}^m;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}/2$. ∎

11.6. Teorema do Sanduíche de Presunto

O Teorema do Sanduíche de Presunto afirma que, dados n conjuntos mensuráveis no espaço euclidiano n-dimensional, é possível dividir cada um deles pela metade (em relação à sua medida) com um único hiperplano $(n-1)$-dimensional. O teorema é verdadeiro até mesmo se os objetos se sobrepuserem.

O teorema foi proposto por Hugo Steinhaus e provado por Stefan Banach. A demonstração que apresentamos baseia-se no Teorema de Borsuk Ulam.

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma coleção de conjuntos em $\mathbb{R}^n$ mensuráveis então existe um hiperplano H dividindo simultaneamente todos eles em dois conjuntos de mesma medida.

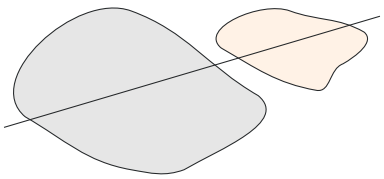


Figura 11.9.: A reta divide os conjuntos em pedaços de mesma área.

Demonstração. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos em $\mathbb{R}^n$ com medidas $\mu_1 = \mu(A_1), \ldots, \mu_n = \mu(A_n)$. Dado um conjunto mensurável $B \in \mathbb{R}^n$ definimos:

$$\mu_i(B) = \mu(B \cap A_i.)$$

Seja $\mathbb{S}^{n-1}$ a esfera unitária mergulhada em $\mathbb{R}^n$, centrada na origem. Seja $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ um ponto da esfera $\mathbb{S}^n$. Se pelo menos uma das componentes

$u_1, u_2, \ldots, u_d$ for diferente de zero, atribuímos ao ponto $\boldsymbol{u}$ o semi-espaço

$$h^+(\boldsymbol{u}) \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n \leq u_0\}$$

Obviamente, os pontos antípoda de $\mathbb{S}^n$ correspondem a semi-espaços opostos. Para um $\boldsymbol{u}$ da forma $(u_0, 0, 0, \ldots, 0)$ (onde $u_0 = \pm 1$), temos pela mesma fórmula

$$h^+((1, 0, \ldots, 0)) = \mathbb{R}^n,$$
$$h^+((-1, 0, \ldots, 0)) = \varnothing.$$

Definimos uma função $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$f_i(\boldsymbol{u}) \coloneqq \mu_i \left(h^+(\boldsymbol{u})\right)$$

Se tivermos $f(\boldsymbol{u}_0) = f(-\boldsymbol{u}_0)$ para algum $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{S}^n$, então o bordo do semi-espaço $h^+(\boldsymbol{u}_0)$ é o hiperplano desejado (não pode acontecer que $f((1, 0, \ldots, 0)) = f((-1, 0, \ldots, 0))$, então $h^+(\boldsymbol{u}_0)$ é de fato um semi-espaço). Para podermos aplicar o Teorema de Borsuk-Ulam resta mostrar que f é contínua.

Seja $(\boldsymbol{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de pontos de $\mathbb{S}^n$ convergindo para $\boldsymbol{u}$; precisamos mostrar que $\mu_i(h^+(\boldsymbol{u}_n)) \to \mu_i(h^+(\boldsymbol{u}))$. Notamos que se um ponto $\boldsymbol{x}$ não está no bordo de $h^+(\boldsymbol{u})$, então para todo n suficientemente grande, temos $\boldsymbol{x} \in h^+(\boldsymbol{u}_n)$ se, e somente se, $\boldsymbol{x} \in h^+(\boldsymbol{u})$. Portanto, se g denota a função característica de $h^+(\boldsymbol{u})$, ou seja, $g(\boldsymbol{x}) = 1$ para $\boldsymbol{x} \in h^+(\boldsymbol{u})$ e $g(\boldsymbol{x}) = 0$ para $\boldsymbol{x} \notin h^+(\boldsymbol{u})$ e g_n é a função característica de $h^+(\boldsymbol{u}_n)$. Temos que $g_n(\boldsymbol{x}) \to g(\boldsymbol{x})$ para todo $\boldsymbol{x} \notin \partial h^+(\boldsymbol{u})$. Como $\partial h^+(\boldsymbol{u})$ tem μ_i-medida 0, g_n converge para g μ_i-quase certamente.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

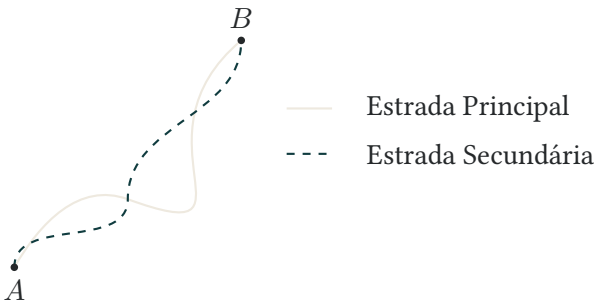
$$\mu_i\left(h^+(\boldsymbol{u}_n)\right) = \int g_n \, \mathrm{d}\mu_i \to \int g \, \mathrm{d}\mu_i = \mu_i\left(h^+(\boldsymbol{u})\right),$$

pois todos as funções g_n são dominadas pela função constante 1, que é integrável, pois μ_i é finito. ∎

Exercícios

Ex. 143 — Considere a seguinte história adaptada de (Arnold, 1992).

"Em certo país há duas cidades e dois caminhos que as unem: a estrada principal e a estrada secundária. Em A moram dois amantes, Carlos e Denise, que devem viajar para B: C pela estrada principal, e D pela secundária. Tão grande é a força de seu amor que se a qualquer instante eles estiverem separados por dez quilômetros ou mais, certamente morrerão. Além de um casal de namorados, nossa história contém um par de inimigos jurados, Everton e Franscisco. Como nosso história começa, E está em A, F está em B, e eles devem trocar de lugar, E viajando de A para B através da estrada principal enquanto F viaja de B para A através do estrada secundária. Tão grande é a força de seu ódio que se a qualquer instante eles estão separados por dez quilômetros ou menos, certamente morrerão. Prove que a tragédia é inevitável. Pelo menos duas pessoas vão acabar mortas"

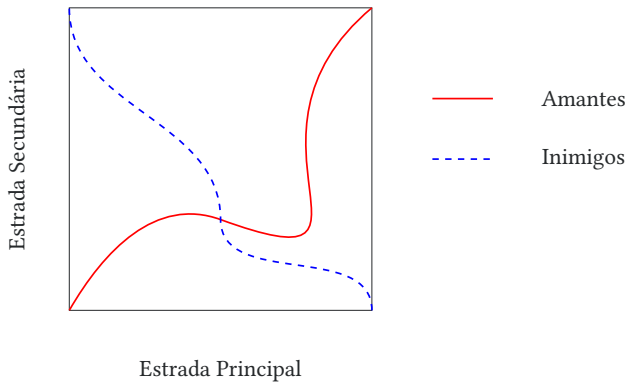


Para modelar o problema, no primeiro passo, parametrizaremos o problema no quadrado unitário $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Um ponto $(x, y) \in S$ descreve a localização de um par de caracteres (ou C e D, ou E e F) ao longo das estradas principal e secundária, respectivamente. Assim, por exemplo, o ponto (0, 0) representa o fato de "ambos os caracteres estão em A", $(1, 1)$ representa "ambos os caracteres estão em B" (0,3, 0,7) representa que "o primeiro caractere percorreu 30 por cento do caminho ao longo da estrada principal de A a B e o segundo personagem está a 70 por cento do caminho ao longo da estrada secundária", e assim por diante. As viagens de um par de personagens pelas estradas principal e secundária são agora codificado no movimento do único ponto (x, y) em S.

Assim temos que o caminho que descreve o movimento do par (C, D) deve começar em $(0, 0)$ e terminar em $(1, 1)$. E o caminho que descreve o movimento de (E, E) deve começar em $(0, 1)$ e terminar em $(1, 0)$. Então (e esta é a parte to-

pológica que teremos que demonstrar), "obviamente", os dois caminhos devem se intersectar.
O importante é o que acontece em um ponto de intersecção (x_0, y_0). Ele representa um par de pontos - um na estrada principal, um na estrada secundária - que são ocupados (em momentos diferentes) tanto por C e D quanto por E e F. Se esse par de pontos estiver a 10 quilômetros ou mais de distância, significa a desgraça para M e D; 10 quilômetros ou menos, cortinas para E e F. De qualquer maneira, a tragédia é inevitável, assim como diz o problema.

Colocando o problema rigorosamente, queremos provar o seguinte teorema:
Teorema Sejam $f, g\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ aplicações contínuas, tal que $f(0) = (0,0)$, $f(1) = (1,1)$ e $g(0) = (0,1)$, $g(1) = (1,0)$. Então $f(x) = g(y)$ para algum $x, y \in [0,1]$.



1. Use o Teorema da Curva de Jordan para provar esse fato. (Dica: complete um dos caminhos de modo a ser uma curva fechada.)
2. Use o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para provar esse fato. (Dica: Considere $F : I \times I \to I \times I$ apropriada.)

Ex. 144 — Termine a demonstração do Teorema de Jordan Generalizado para $\mathbb{R}^n$: Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Então $\mathbb{R}^n \setminus C$ tem precisamente duas componentes conexas, das quais C é a fronteira comum.

Ex. 145 — Mostre que o grau da aplicação $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ $p(z) = z^n$ é n usando homologia simplicial.

Ex. 146 — Prove que qualquer aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}.$ tal que $\|f(x) - x\| < 1$ é sobrejetiva.

Ex. 147 — Mostre uma aplicação $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $\deg f = 0$ e f é sobrejetiva.

Ex. 148 — Seja ΣX a suspensão de X e $\Sigma f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$ a aplicação induzida por $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ para $n > 0$. Usando os resultados do Exercício 138, mostre que

1. $\deg f = \deg \Sigma f$;
2. para $m \in \mathbb{Z}$, existe uma aplicação $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grau m.

Ex. 149 — Uma aplicação $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ satisfazendo $f(x) = f(-x)$ para todo x é dita aplicação par.

1. Mostre que um aplicação par tem um grau par e que esse grau é de fato zero quando a dimensão n é par.
2. Quando n é ímpar, mostre que existem mapas de qualquer grau par.

Ex. 150 — Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação contínua com $\deg f = 0$. Mostre que devem existir pontos $x, y \in \mathbb{S}^n$ com $f(x) = x$ e $f(y) = -y$.

Ex. 151 — Neste exercício provaremos que uma esfera de dimensão par positiva não pode ser munida de uma estrutura de um grupo topológico. Dado um grupo G atuando como um grupo de homeomorfismos de um espaço X, dizemos que G age livremente se o único elemento de G que possui algum ponto fixo é o elemento identidade. Sejam g, h dois elementos, diferentes ao elemento identidade, de um grupo G agindo livremente em $\mathbb{S}^n$, onde $n > 0$ é par.

1. Prove que g e h têm grau -1.
2. Prove que gh é o elemento identidade.
3. Conclua que G é $\mathbb{Z}_2$ ou o grupo trivial.
4. Prove que $\mathbb{S}^n$ não é um grupo topológico.

Ex. 152 — Prove que $\mathbb{S}^3$ é um grupo topológico. Dica: identifique $\mathbb{R}^4$ com os quatérnios.

Ex. 153 — Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

1. **(Borsuk-Ulam)** Se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

2. Se $A_i \subset \mathbb{S}^n$ são conjuntos fechados para $i = 1, 2, \ldots, n+1$ tal que $A_1 \cup \cdots A_{n+1} = \mathbb{S}^n$, então pelo menos um desses conjuntos deve conter um par de pontos antipodais.

3. Se $A_i \subset \mathbb{S}^n$ são conjuntos para $i = 1, 2, \ldots, n+1$ tal que $A_1 \cup \cdots A_{n+1} = \mathbb{S}^n$, então pelo menos um desses conjuntos deve conter um par de pontos antipodais

Dicas: $(1) \Rightarrow (2)$ Defina $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ tomando a j-ésima componente de $f(x)$ como sendo a distância de x a A_j. $(2) \Rightarrow (3)$ Use a normalidade da esfera. $(3) \Rightarrow (1)$ Defina $g(x) = f(x) - f(-x)$ e por absurdo suponha que $0 \notin g(\mathbb{S}^n)$. Defina n conjuntos abertos $U_i = \{x_i > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, e adicione a esta coleção o conjunto $U_{n+1} = \{x_i < 0 \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$. Observe que $g(\mathbb{S}^n) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n=1} U_i$.

12 Homologia Celular

Um espaço topológico X pode ser muito patológico para que as ferramentas de topologia algébrica forneçam alguma informação útil sobre ele. Como vimos, para construir os grupos de homologia e cohomologia utilizamos funções dos simplexos Δ^n em X e o mesmo vale para a construção de homotopias e grupos fundamentais, para os quais precisamos de uma função do intervalo em X. Dessa forma, em geral, se a topologia de um espaço tiver pouco a ver com a topologia euclidiana, os grupos de homologia podem não fornecer informações significativas.

A primeira escolha seria restringir-se à categoria das variedades topológicas, o que faremos no capítulo 14. O problema está no fato que esta escolha exclui muitos espaços que aparecem naturalmente em várias ocasiões. Por isso, neste capítulo introduziremos uma categoria intermediária, que seja bastante ampla para conter todos os espaços significativos que deveremos considerar, mas também suficientemente limitada para excluir espaços topológicos demasiadamente irregulares e patológicos. Em particular, temos que considerar espaços cuja topologia, pelo menos localmente, não se afaste demais da euclidiana, sem todavia serem necessariamente regulares como uma variedade.

A categoria dos CW-complexos satisfaz estes requisitos: tratam-se de espaços obtidos partindo de uma família de pontos e acrescentando discos de várias dimensões, colando os bordos dos discos ao espaço precedente através de funções contínuas. Essa classe de espaços é mais ampla e possui algumas propriedades categóricas melhores do que os complexos simpliciais, mas ainda mantém uma natureza combinatória que permite a computação dos grupos de homologia. Em contraposição aos Δ-complexos, nos CW-complexos as colagens se dão através de uma função contínua qualquer.

Nesse contexto, introduziremos também a Homologia Celular que é uma teoria de homologia adaptada para a categoria dos CW-complexos. Como veremos, a Homologia Celular concorda com a Homologia Singular quando o espaço admite uma estrutura de CW-complexo e fornece um meio eficaz de calcular os módulos de homologia.

12.1. CW-Complexos

Nessa seção, apresentaremos duas definições de CW-complexos que mostraremos que são equivalentes.

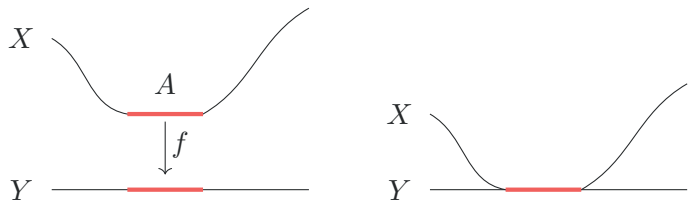
CW-Complexos como espaços obtidos pela colagem de células

Para descrever os CW-complexos como espaços obtidos pela colagem de células, vamos começar recordando o que é uma colagem

Seja (X, A) um par topológico, ou seja, X é um espaço topológico e A é fechado em X. Seja Y um espaço topológico e $f : A \to Y$ uma função contínua. Definimos a colagem de X com Y por meio de f, denotada por $X \sqcup_f Y$, como o espaço quociente da união disjunta $X \sqcup Y$ sob a relação de equivalência

$$a \sim f(a),\ a \in A.$$

Em outras palavras, as classes de equivalência, ou seja, os elementos de $X \sqcup_f Y$, são os conjuntos $\{x\}$, onde $x \in X \setminus A$ e os conjuntos $f^{-1}(y) \cup \{y\},\ y \in Y$.



Lema 12.1

Seja (X, A) um par topológico, onde A é fechado em X, sejam Y um espaço topológico e $f : A \to Y$ é uma função contínua. Denote por $p : X \sqcup Y \to X \sqcup_f Y$ a projeção de quociente canônica. Então $p|_{X\setminus A}$ é uma aplicação injetora aberta e $p|_Y$ é uma aplicação injetora fechada. Em particular, ambas as restrições são mergulhos, $p(X \setminus A)$ é aberto em $X \sqcup_f Y$ e $p(Y)$ é fechado em $X \sqcup_f Y$.

Seja n um inteiro não negativo.

- Uma n-**célula** é um espaço homeomorfo ao n-disco $\mathbb{D}^n$.
- Uma n-**célula aberta** é um espaço homeomorfo ao n-disco aberto $\operatorname{int}(\mathbb{D}^n)$.
- Uma **célula** é um espaço que é uma n-célula para algum $n \geq 0$.

Observe que $\operatorname{int}(\mathbb{D}^m)$ e $\operatorname{int}(\mathbb{D}^n)$ são homeomorfos se, e somente se, $m = n$. Assim, podemos falar sobre a dimensão de uma célula.

Segue diretamente da definição que o bordo de uma n-**célula** é um espaço homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Um CW-complexo é um espaço construído a partir de um conjunto não vazio de 0-células (pontos) e, indutivamente, construímos subconjuntos X^n colando n-células. O espaço $X = \bigcup_{n\geq 0} X^n$ munido da topologia fraca é o que chamamos de CW-complexo.

Um CW-complexo é um espaço junto com uma filtração de subespaços

$$\emptyset = X^{-1} \subsetneq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \ldots \subseteq X^n \subseteq \ldots \subseteq X$$

de tal modo que

1. $X^0 \neq \emptyset$.
2. X^n é obtido colando n-células a X^{n-1}, ou seja, temos as aplicações

$$\varphi_\alpha : \partial\mathbb{D}^n_\alpha \to X^{n-1}, \quad \alpha \in I_n, n \geq 0,$$

e homeomorfismos $\alpha_n : Y^n \to X^n$ tais que $\alpha_n \circ \pi_n|_{X^{n-1}} : X^{n-1} \to X^n$ é a

inclusão, onde

$$Y^n = Z^n \bigsqcup_{\varphi_n} X^{n-1},$$

sendo $Z^n = \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \mathbb{D}^n_\alpha$ e $\varphi_n = \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha : \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \partial \mathbb{D}^n_\alpha \to X^{n-1}$, e onde $\pi_n : Z^n \sqcup X^{n-1} \to Y^n$ é a projeção canônica.

3. $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$.

4. X carrega a topologia fraca na família de espaços $\{X^n\}_{n \geq 0}$, ou seja, um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado se $A \cap X^n$ é fechado em X^n, para todo $n \geq 0$.

O conjunto X^n é dito o n-**esqueleto** de X, para cada $n \geq 0$. As aplicações φ_α são chamadas de **aplicações características** ou de **colagem**.

Se o espaço topológico X é homeomorfo a um CW-complexo dizemos que X admite uma **estrutura de CW-complexo**.

O número de células em um CW-complexo pode ser infinito. Um CW-complexo é de **dimensão finita** se $X^n = X$ para algum n; de **tipo finito** se possui um número finito de células em cada dimensão; e **finito** se for de dimensão finita e de tipo finito, ou seja, se possui um número finito de células. A **dimensão de um CW-complexo** de dimensão finita é o maior n para o qual existem n-células.

Observamos que todo CW-complexo finito é compacto, sendo a união de um número finito de subespaços compactos $\Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right), e \in \mathcal{E}$.

1. A reta real admite uma estrutura de CW-complexo com os inteiros como 0-células e os intervalos $[n, n+1]$ como 1-células. Essa estrutura possui infinitas células e esse CW-complexo possui dimensão 1.

2. De modo mais geral, $\mathbb{R}^n$ é um CW-complexo n-dimensional de maneira óbvia: as n-células são os cubos cujos vértices têm coordenadas inteiras, as 0-células são os pontos inteiros do reticulado, etc.

3. Todo complexo simplicial geométrico localmente finito é um CW-complexo.

   Nesse caso, podemos tomar as aplicações características como o homeomofismo do simplexo no disco fechado e as demonstrações dos Axiomas 1 e 2 são imediatas.

Para provar o Axioma 3, observamos que qualquer simplexo em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado em $X \subset \mathbb{R}^n$. Assim, a topologia induzida em Δ^k de $\mathbb{R}^n$ coincide com a induzida de X.

4. Todo Δ-complexo é um CW-complexo.



Figura 12.1.: Estrutura de CW-complexo da reta.

Exemplo 12.1 — Esfera.

Nos exemplos anteriores, as aplicações características φ_α eram mergulhos. No entanto, uma das vantagens dos CW-complexos é que as aplicações características φ_α^n não precisam ser mergulhos. Em particular, $\mathbb{S}^n$ admite uma estrutura de CW-complexo com apenas uma 0-célula e uma n-célula: considere qualquer ponto x (digamos, o polo norte) como a 0-célula, e como aplicação característica para a n-célula, use uma aplicação quociente φ que leva o bordo da n-célula $\mathbb{S}^n$ a 0-célula. A Figura 12.2 ilustra o caso de $\mathbb{S}^1$.

A esfera $\mathbb{S}^n$ admite também uma estrutura de complexo simplicial - por exemplo obtida como o bordo do simplexo Δ^{n+1}.

◁

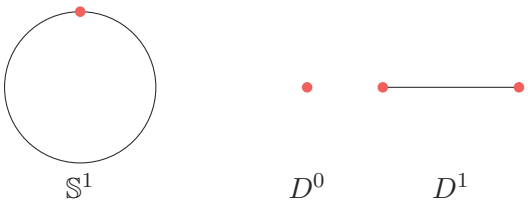


Figura 12.2.: Estrutura de CW-complexo de $\mathbb{S}^1$

Exemplo 12.2 — Toro.

O toro tem uma decomposição CW com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula, conforme apresentado na Figura 12.3. Essa estrutura de CW-complexo é mais simples que a estrutura de Δ-complexo apresentada anteriormente.

◁

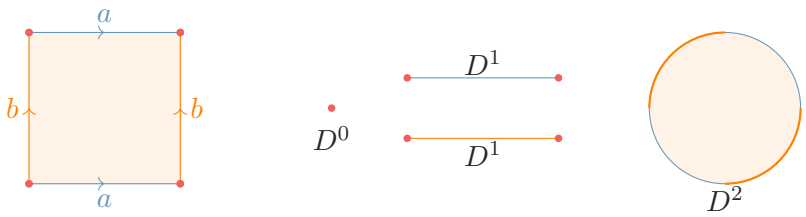


Figura 12.3.: Estrutura de CW-complexo do toro.

Exemplo 12.3.

Toda variedade suave admite uma estrutura de CW-complexo. De fato, qualquer variedade suave pode ser triangularizada e, portanto, admite a estrutura de um complexo simplicial. Para a demonstração veja (Munkres, 2016).

◁

Exemplo 12.4.

Toda variedade topológica compacta é homotopicamente equivalente a um CW complexo finito. Para a demonstração veja (Milnor, 1959).

◁

Exemplo 12.5 — Espaço Projetivo.

O espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ possui uma estrutura de CW-complexo com uma célula em cada dimensão k, para $0 \leq k \leq n$.

Lembramos que o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ pode ser construído de duas maneiras equivalentes:

$$\mathbb{RP}^n := \mathbb{D}^n / \sim_1 \qquad \mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n / \sim_2$$

sendo $\sim_1$ a relação que identifica os pares de pontos antipodais do bordo e $\sim_2$ a relação que identifica qualquer par de pontos antipodais. Um homeomorfismo entre as duas representações pode ser obtido projetando ao quociente o mergulho i :

$\mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$, cuja imagem é o hemisfério norte $S^n_+ = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n : x_n \geq 0\}$. Comparando estes dois modelos de $\mathbb{RP}^n$, podemos observar que a relação $\sim_1$, restrita ao bordo $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$, coincide com a relação $\sim_2$, logo o bordo de $\mathbb{D}^n$ projetado ao quociente coincide com $\mathbb{RP}^{n-1}$.

O espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ é obtido de $\mathbb{RP}^{n-1}$ colando uma n-célula:

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^{n-1} \sqcup_f \mathbb{D}^n,$$

sendo $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ a projeção canônica. O espaço $\mathbb{RP}^{n-1} \sqcup_f \mathbb{D}^n$ é homeomorfo ao espaço quociente $\mathbb{D}^n$ pela relação $\sim_1$.

◁

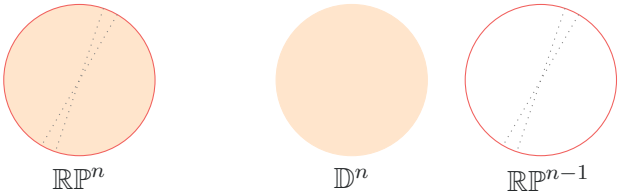


Figura 12.4.: $\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^{n-1} \sqcup_f \mathbb{D}^n$

Exemplo 12.6 — Espaço Projetivo Complexo.

O espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$ é o espaço das retas complexas passando pela origem em $\mathbb{C}^{n+1}$. Cada uma dessas retas é totalmente determinada por um ponto $(z_0, \ldots, z_n) \neq 0$ nesta reta, e para qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a n-tupla $(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$ determina a mesma reta para a qual escrevemos $[z_0, \ldots, z_n]$. A reta também pode ser representada por um ponto $z = (z_0, \ldots, z_n)$ com $\|z\| = 1$, de forma que z e λz representam a mesma reta, para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Assim, da última representação, temos que

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$$

é um espaço de dimensão (real) $2n$. Temos as inclusões

$$* = \mathbb{CP}^0 \subseteq \mathbb{CP}^1 \subseteq \mathbb{CP}^2 \subseteq \cdots$$

onde $\mathbb{CP}^{n-1} \subseteq \mathbb{CP}^n$ envia $[z_0, \ldots, z_{n-1}]$ para $[z_0, \ldots, z_{n-1}, 0]$.

Um ponto arbitrário em $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{CP}^{n-1}$ pode ser representado unicamente por $(z_0, \ldots, z_{n-1}, t)$, onde $t > 0$ é o número real tal que $t = \sqrt{1 - \|z\|} = \sqrt{1 - \sum z_i \overline{z}_i}$. Isso define uma aplicação

$$e_{2n} \to \mathbb{CP}^n : z = (z_0, \ldots, z_{n-1}) \mapsto [z_0, \ldots, z_{n-1}, t] .$$

O bordo de e_{2n} (onde $t = 0$) é enviado para $\mathbb{CP}^{n-1}$. Desta forma, $\mathbb{CP}^n$ é obtido de $\mathbb{CP}^{n-1}$ anexando uma $2n$-célula. Então $\mathbb{CP}^n$ tem uma estrutura de CW-complexo com uma célula em cada dimensão par, i.e.$0, 2, \ldots, 2n$.

◁

Exemplo 12.7.

Seja $\mathbb{RP}^\infty$ o conjunto de retas passando pela origem em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com base $(e_1, e_2, \ldots)$. Considerando $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como a união ascendente de $\mathbb{R}^n$, temos que como um conjunto, $\mathbb{RP}^\infty$ é a união ascendente dos espaços $\mathbb{RP}^n$. O problema é como munir essa união de uma topologia. Para isso, declaramos um conjunto como fechado se, e somente se, sua interseção com todo $\mathbb{RP}^n$ for fechado, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo Exemplo 12.5, temos que $\mathbb{RP}^\infty$ é um CW-complexo com uma célula n para cada $n, 0 \leq n$. Observe que o Axioma 3 é válido por construção.

◁

12.1.1. Definição Equivalente

Uma **decomposição celular** de um espaço topológico X é uma família $\mathcal{E} = \{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de subespaços de X tal que cada e_α é uma célula e

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in I} e_\alpha .$$

Uma definição equivalente de CW-complexo é:

Um par $(X, \mathcal{E})$ consistindo de um espaço topológico de Hausdorff X e uma decomposição celular $\mathcal{E}$ de X é dito um **CW-complexo** se os axiomas a seguir são satisfeitos:

Axioma 1 - Aplicações Características: Para cada n-célula $e \in \mathcal{E}$, existe uma aplicação $\Phi_e : \mathbb{D}^n \to X$ cuja restrição $\Phi_e|_{\text{int}(\mathbb{D}^n)} : \text{int}(\mathbb{D}^n) \to e$ é um homeomorfismo e Φ_e leva o bordo do disco $\mathbb{D}^n$, i.e. $\mathbb{S}^{n-1}$, em X^{n-1}.

Axioma 2 - Finitude do Fecho: Para toda célula $e \in \mathcal{E}$, o fecho $\overline{e}$ intercepta apenas um número finito de outras células em $\mathcal{E}$.

Axioma 3 - Topologia Fraca: Um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $A \cap \overline{e}$ é fechado em X, para cada $e \in \mathcal{E}$.

Observe que os Axiomas 2 e 3 são necessários apenas no caso de $\mathcal{E}$ ser infinito (ou seja, eles são automaticamente satisfeitos se $\mathcal{E}$ for finito).

Normalmente, abusa-se da notação e denomina-se o espaço X de CW-complexo se ele admite uma decomposição celular $\mathcal{E}$ que o transforma em um. Essa estrutura de CW-complexo, entretanto, não é única e o conjunto de células também depende da estrutura escolhida - como já vimos nos exemplos anteriores.

Antes de provarmos a equivalência das duas definições apresentamos alguns resultados sobre a topologia de um CW-complexo usando a segunda definição.

Lema 12.2

Seja $(X, \mathcal{E})$ um espaço de Hausdorff X munido de uma decomposição celular $\mathcal{E}$. Se $(X, \mathcal{E})$ satisfaz o Axioma 1 na Definição 12.1.1, então temos

$$\overline{e} = \Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right)$$

para qualquer célula $e \in \mathcal{E}$. Em particular, $\overline{e}$ é um subespaço compacto de X e o bordo da célula $\overline{e} \setminus e = \Phi_e\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ está em X^{n-1}.

Demonstração. Para qualquer aplicação $f : Y \to Z$ entre espaços topológicos Y e Z e qualquer subconjunto $B \subseteq Y$, temos $f\left(\overline{B}\right) \subseteq \overline{f(B)}$. Desta forma

$$\overline{e} = \overline{\Phi_e\left(\operatorname{int}\left(\mathbb{D}^n\right)\right)} \supseteq \Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right) \supseteq e.$$

Mas $\Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right)$ é compacto, portanto fechado em X já que X é de Hausdorff. Assim, $\Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right) = \overline{e}$. Pelo Axioma 1, temos $\Phi_e\left(\operatorname{int}\left(\mathbb{D}^n\right)\right) = e$ e $\Phi_e\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cap e = \emptyset$ e logo $\Phi_e\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) = \overline{e} \setminus e$. ∎

Observe que, se X não é de Hausdorff, ainda temos $\Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right) \subseteq \overline{e}$, mas não necessariamente temos igualdade. Não temos garantia de que $\Phi_e\left(\mathbb{D}^n\right)$ é fechado em X.

O subespaço $\overline{e} = \Phi_e(\mathbb{D}^n)$ é denominado **célula fechada**.

Sejam $(X, \mathcal{E})$ um CW-complexo, Y um espaço topológico e $f : X \to Y$ uma função. Então, são equivalentes:

1. $f : X \to Y$ é contínua;
2. a restrição $f|_{\overline{e}} : \overline{e} \to Y$ é contínua, para todo $e \in \mathcal{E}$;
3. a restrição $f|_{X^n} : X^n \to Y$ é contínua, para todo $n \geq 0$.

Subcomplexos

Seja $(X, \mathcal{E})$ um CW-complexo, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ um subconjunto de células e

$$X' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e.$$

Lema 12.3

As condições a seguir são equivalentes:

a. O par $(X', \mathcal{E}')$ é um CW-complexo.

b. O subconjunto X' é fechado em X.

c. Para cada $e \in \mathcal{E}'$, $\overline{e} \subseteq X'$, onde $\overline{e}$ é o fecho de e em X.

Demonstração. b ⇒ c é trivial.

c ⇒ b Temos que mostrar que $\overline{e} \cap X'$ é fechado, para todo $e \in \mathcal{E}$. Pela finitude do fecho de X, temos que $\overline{e} \cap X' = \overline{e} \cap (e'_1 \cup \cdots \cup e'_r)$, que por c é igual a

$$\overline{e} \cap \left(\overline{e}'_1 \cup \cdots \cup \overline{e}'_r\right),$$

sendo assim fechado.

a ⇒ c Uma aplicação característica Φ_e, para $e \in \mathcal{E}'$, relativo a $(X', \mathcal{E}')$ também é característica em relação a $(X, \mathcal{E})$, e logo $\Phi_e(D^n)$, o fecho de e em X também é o fecho de e no subespaço X' e, consequentemente, está nele.

b e **c** $\Rightarrow$ **a** Uma aplicação característica para $e \in \mathcal{E}'$ relativo a X também é característica relativo a X', por causa de **c**; e X' é obviamente satisfaz a finitude do fecho. Assim $(X', \mathcal{E}')$ satisfaz os Axiomas 1 e 2. Ainda temos que mostrar que se $A \subset X'$ e $A \cap \overline{e}$ é fechado em X' para todo $e \in \mathscr{E}'$, A é fechado em X'. Mas **b** implica que fechado em X é o mesmo que fechado em X', então tudo o que temos que provar é que $A \cap \overline{e}$ é fechado para $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$. Da finitude de fecho de X temos $A \cap \overline{e} = A \cap (e'_1 \cup \cdots \cup e'_r) \cap \overline{e}$, onde podemos pegar $e'_i \in \mathcal{E}'$, pois as células em $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ não podem contribuir para a interseção com $A \subset X'$. Então, temos

$$A \cap \overline{e} = A \cap \left(\overline{e}'_1 \cup \cdots \cup \overline{e}'_r\right) \cap \overline{e},$$

mas $A \cap (\overline{e}'_1 \cup \cdots \cup \overline{e}'_r)$ é fechado por hipótese, e logo $A \cap \overline{e}$. ∎

Sejam $(X, \mathcal{E})$ um CW-complexo e $(X', \mathcal{E}')$ como acima. Então $(X', \mathcal{E}')$ é chamado de **subcomplexo** de $(X, \mathcal{E})$ se as 3 condições equivalentes do lema anterior são satisfeitas.

Temos algumas consequências imediatas:

Seja $(X, \mathcal{E})$ um CW-complexo.

1. Seja $\{A_i \mid i \in I\}$ qualquer família de subcomplexos de $(X, \mathcal{E})$. Então $\bigcup_{i \in I} A_i$ e $\bigcap_{i \in I} A_i$ são subcomplexos de $(X, \mathcal{E})$.
2. O n-esqueleto X^n é um subcomplexo de $(X, \mathcal{E})$, para cada $n \geq 0$.
3. Seja $\{e_i \mid i \in I\}$ uma família arbitrária de n-células em $\mathcal{E}$. Então $X^{n-1} \cup \left(\bigcup_{i \in I} e_i\right)$ é um subcomplexo.

Demonstração. Para **1** observe que $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um subcomplexo pela caracterização do Lema 12.3 e $\bigcap_{i \in I} A_i$ é um subcomplexo por **b** nesse 12.3. Ambos **2** e **3** seguem usando a caracterização **c** no Lema 12.3 juntamente com o Lema 12.2.

Observe que **2** é um caso especial de **3**. Pelo exposto temos que o n-esqueleto X^n de um CW-complexo $(X, \mathcal{E})$ é um subconjunto fechado de X. ∎

A categoria **CW** é a categoria cujos objetos são CW-complexos e cujos morfismos são funções contínuas.

Equivalência entre as definições de CW-complexo

As definições de CW-complexos apresentadas em 12.1 e 12.1.1 são equivalentes.

12.2. Homologia de CW-Complexos

Nesta seção, introduziremos a homologia celular $H_p^{\mathrm{cw}}(X;R)$ para um CW-complexo X. Como veremos, a homologia celular concorda com a homologia singular no caso em que X é um CW-complexo. Em muitos casos práticos, o número de p-células é pequeno e dessa forma o complexo celular $C_*^{\mathrm{cw}}(X;R)$ é muito mais tratável do que o complexo singular $S_*(X;R)$.

Para esse fim, começamos com a observação que a filtração por esqueletos de um CW-complexo

$$\emptyset = X^{-1} \subsetneq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \ldots \subseteq X^n \subseteq \ldots \subseteq X$$

leva a uma série de sequências exatas longas dos pares (X^k, X^{k-1}).

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X^{k-1};R) \xrightarrow{i_*} H_q(X^k;R) \xrightarrow{j_*} H_q(X^k, X^{k-1};R) \xrightarrow{\partial_*} \cdots \tag{12.1}$$

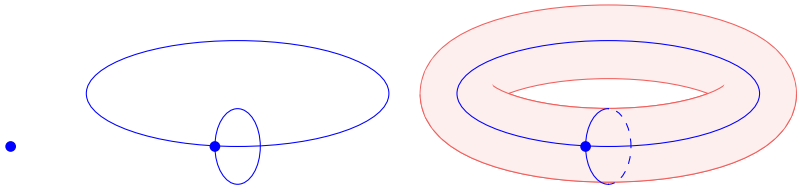


Figura 12.5.: Filtração por esqueletos de um toro.

Pela Proposição 10.3, (X^p, X^{p-1}) é um bom par, assim temos o isomorfismo entre a homologia relativa e a homologia quociente:

$$H_q\left(X^k, X^{k-1}\right) \cong H_q\left(X^k/X^{k-1}, *\right) = \widetilde{H}_q\left(X^k/X^{k-1}\right).$$

De posse dessas informações, podemos calcular a homologia relativa que é dada por:

$$H_q\left(X^k, X^{k-1}\right) \cong \widetilde{H}_q\left(X^k/X^{k-1}\right) \cong \widetilde{H}_q\left(\bigvee_{i\in I_k} \mathbb{S}_i^k\right) \cong \begin{cases} R[I_k]\,, & q = k \\ 0\,, & q \neq k. \end{cases}$$

Aqui usamos o Corolário 10.5 e o Exercício 135 e que X^k/X^{k-1} é homeomorfo ao buquê de esferas $\bigvee_{i\in I_k} \mathbb{S}_i^k$.

Logo, o módulo $H_p(X^p, X^{p-1}; R)$ é um R-módulo livre cujo posto (quando finito) é igual ao número de p-células em X. Isso significa que podemos ver $H_p(X^p, X^{p-1}; R)$ como o conjunto de combinações lineares formais $\sum_i \lambda_i e_i^p$, onde $\lambda_i \in R$ e e_i^p são p-células abertas.

Dado um CW-complexo X, definimos as **p-cadeias celulares** de X, $C_*^{\mathrm{cw}}(X; R)$, por

$$C_p^{\mathrm{cw}}(X; R) = H_p(X^p, X^{p-1}; R)\,,$$

onde $H_p(X^p, X^{p-1}; R)$ é o p-ésimo grupo de homologia singular relativa do par (X^p, X^{p-1}) e X^p é o p-esqueleto de X.

Seja X um CW-complexo, então:

1. $H_k(X^p; R) \cong 0$, para todo $k > p$. Em particular, se X tem dimensão finita n, então $H_p(X; R) \cong 0$, para todo $p > n$.
2. $H_k(X^p; R) \cong H_k(X; R)$, para todo $k < p$.
3. Se R é um domínio de ideais principais, então $H_p(X^p; R)$ é um módulo livre.

Demonstração.

1 Observamos que $H_k(X^0; R) \cong 0$, para todo $k > 0$. Na sequência exata longa em homologia do par (X^p, X^{p-1})

$$\cdots \to H_{k+1}(X^p, X^{p-1}; R) \to H_k(X^{p-1}; R) \to H_k(X^p; R) \to H_k(X^p, X^{p-1}; R) \to \cdots$$

observamos que, se $k \neq p, p-1$, então como já vimos o primeiro e o quarto grupos são triviais, e temos os isomorfismos

$$H_k(X^p; R) \cong H_k(X^{p-1}; R)\,, \qquad \text{para } k \neq p, p-1.$$

Assim, se $k > p$, por indução, obtemos

$$H_k(X^p) \cong H_k(X^0) \cong 0\,.$$

2 A demonstração é similar. Usando a sequência exata longa em homologia do par (X^p, X^{p-1}) temos:

$$\cdots \to H_{k+1}(X^{p+1}, X^p; R) \to H_k(X^p; R) \to H_k(X^{p+1}; R) \to H_k(X^{p+1}, X^p; R) \to \cdots\,.$$

Se $k < p$, então $k+1 < p+1$ e o primeiro e quarto grupos são triviais, logo $H_k(X^p; R) \cong H_k(X^{p+1}; R)$, $k < p$. Por indução, se $k < p$, então $H_k(X^p; R) \cong H_k(X^q; R)$, para todo $q \geq p$.

3 Como R é um domínio de ideais principais e $H_p(X^p; R)$ é um submódulo do módulo livre $S_q(X; R)$ e, portanto, é livre. ∎

Os resultados anteriores permitem uma visão vívida e esclarecedora de como a homologia é criada nas colagens do CW-complexo. Se fixarmos uma dimensão p e observarmos como H_p varia à medida que nos movemos pelos esqueletos de X, encontramos a seguinte imagem. Primeiro, $H_0\left(X^0\right)$ é sobreposto por $H_0\left(X^1\right)$, que depois disso permanece inalterado à medida que avançamos para esqueletos de dimensão maior. Se $p > 0$, como X^0 é discreto, $H_p\left(X^0\right) \cong 0$. Então os grupos de homologia $H_p\left(X^k\right)$ continuam a ser 0 até chegar a X^p. O módulo $H_p\left(X^p\right)$ é livre. Relações podem ser introduzidas quando passamos para X^{p+1}; mas depois disso todas as homologias

$$H_p\left(X^{p+1}\right) \cong H_p\left(X^{p+2}\right) \cong \cdots$$

são isomorfas. Dessa forma, temos que toda a homologia q-dimensional de X é criada em X^p, e todas as relações em $H_p(X)$ ocorrem em X^{p+1}.

Até esse ponto definimos as n-cadeias celulares de um CW-complexo X, e agora queremos construir um complexo de cadeias. Definimos:

$$\partial_n^{\mathrm{cw}} : C_n^{\mathrm{cw}}(X; R) = H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \xrightarrow{\partial_{*,n}} H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \xrightarrow{j_{*,n-1}} H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) = C_{n-1}^{\mathrm{cw}}$$

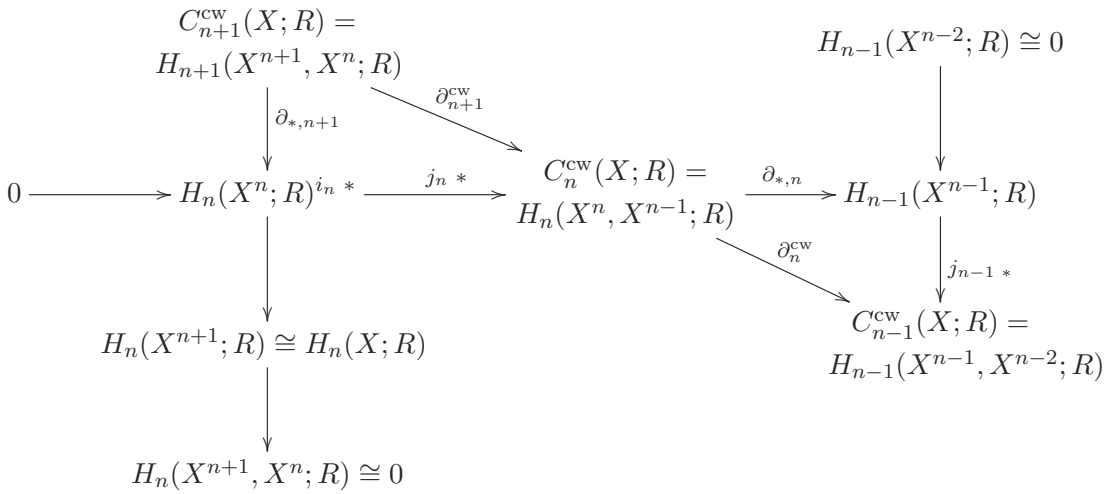
O operador bordo para a homologia celular $\partial_n^{\mathrm{cw}} : C_n^{\mathrm{cw}}(X; R) \to C_{n-1}^{\mathrm{cw}}(X; R)$ é definido como

$$\partial_n^{\mathrm{cw}} := j_{*,n-1} \circ \partial_{*,n}.$$

Lema 12.4

$(\partial^{\mathrm{cw}})^2 = 0$.

Demonstração. O fato de $(\partial^{\mathrm{cw}})^2 = 0$ decorre do diagrama a seguir, no qual as duas colunas e a linha central são exatas:



(12.2)

No diagrama anterior, temos que $\partial^{\mathrm{cw}}_{n+1} = j_n \circ \partial_{n+1}$ e $\partial^{\mathrm{cw}}_n = j_{n-1} \circ \partial_n$. Agora, $\partial_{*,n} \circ j_n = 0$. Portanto, a composição das diagonais é zero, ou seja,

$$\partial^{\mathrm{cw}}_{n+1} \circ \partial^{\mathrm{cw}}_n = j_{n-1} \circ \partial_n \circ j_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

■

A partir dos morfismos de bordo $\partial^{\mathrm{cw}}_p : C^{\mathrm{cw}}_p(X;R) \to C^{\mathrm{cw}}_{p-1}(X;R)$, obtemos a seguinte sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial^{\mathrm{cw}}_{p+1}} C^{\mathrm{cw}}_p(X;R) \xrightarrow{\partial^{\mathrm{cw}}_p} C^{\mathrm{cw}}_{p-1}(X;R) \xrightarrow{\partial^{\mathrm{cw}}_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial^{\mathrm{cw}}_2} C^{\mathrm{cw}}_1(X;R) \xrightarrow{\partial^{\mathrm{cw}}_1} C^{\mathrm{cw}}_0(X;R) \xrightarrow{\partial^{\mathrm{cw}}_0}$$

e temos um complexo em cadeia. Este é o **complexo de cadeias celulares** de X.

Definimos a **homologia celular** do CW-complexo X como a homologia do complexo de cadeias celulares, isto é

$$H^{\mathrm{cw}}_n(X;R) \coloneqq H_n\left(C^{\mathrm{cw}}_*(X;R)\right) = \ker \partial^{\mathrm{cw}}_n / \operatorname{im} \partial^{\mathrm{cw}}_{n+1}.$$

Se X é CW-complexo, então as homologias singulares e celulares são isomorfas, i.e.,

$$H_n^{\mathrm{cw}}(X;R) \cong H_n(X;R), \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

Além disso

$$H_n^{\mathrm{cw}}(X;R) \cong H_n(X^n)/\operatorname{im}\partial_{n+1}, \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

Demonstração. Considere o Diagrama 12.2. Como j_n é uma aplicação injetiva temos que:

- j_n é um isomorfismo de $\operatorname{im}\partial_{n+1}$ em $\operatorname{im} j_n \circ \partial_{n+1} = \operatorname{im}\partial_{n+1}^{\mathrm{cw}}$
- j_n é um isomorfismo de $H_n(X^p;R)$ em $\operatorname{im} j_n = \ker\partial_n$

Pela exatidão da linha vertical do Diagrama 12.2 e pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo temos que

$$H_n(X;R) \cong H_n(X^p;R)/\operatorname{im}\partial_{n+1}.$$

Logo

$$H_n^{\mathrm{cw}}(X;R) = \ker\partial_n^{\mathrm{cw}}/\operatorname{im}\partial_{n+1}^{\mathrm{cw}} \cong H_n(X^p;R)/\operatorname{im}\partial_{n+1} = H_n(X;R).$$

■

1. $H_n(X;R) = 0$, se X for um CW-complexo sem nenhuma n-células.
2. Se X é um CW-complexo com k n-células e R é um domínio de ideais principais, então $H_n(X;R)$ é finitamente apresentado gerado por no máximo k elementos.
3. Se X é um CW-complexo não tendo células de dimensões $n-1$ e $n+1$, então $H_n(X)$ é um módulo livre com base em correspondência biunívoca com as n-células de X.

Demonstração.

2 De fato, como $C_n^{\mathrm{cw}}(X;R)$ é um módulo livre com k geradores e subquocientes destes são finitamente apresentados já que R é um domínio de ideais principais. ■

Exemplo 12.8.

No exemplo 12.1, vimos que a esfera $\mathbb{S}^m$ admite uma estrutura de CW complexo com apenas uma 0-célula e uma m-célula. Assim, para $m > 2$, temos a partir do corolário anterior que

$$H_n(\mathbb{S}^m;R) \cong \begin{cases} R, & n = 0 \\ R, & n = m \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

◁

Suponha que o CW-complexo X tenha apenas células pares, i.e., $X^{2k} = X^{2k+1}$, para todo k. Então

$$H_*(X;R) \cong C_*^{\mathrm{cw}}(X;R).$$

Em outras palavras, $H_n(X;R)$ é trivial para n ímpar e é o módulo $C_*^{\mathrm{cw}}(X;R)$ livre para todo n par, e a dimensão de $H_n(X;R)$ para n par é o número de n-células.

Exemplo 12.9.

O espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$ tem uma estrutura CW formada pelas células $e_0 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_{2n}$ e logo

$$H_k\left(\mathbb{CP}^n;R\right) \cong \begin{cases} R\,, & \text{se } 0 \leq k \leq 2n, \text{ e } k \text{ for par} \\ 0\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

◁

Exemplo 12.10.

Vamos agora mostrar que os espaços $\mathbb{CP}^6$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^6$ não são homotopicamente equivalentes.

Considere a estrutura usual de CW-complexo para $\mathbb{CP}^6$ e a estrutura CW-complexo produto para $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^6$. Ambos os espaços possuem células apenas em dimensões pares, mas $\mathbb{CP}^6$ tem uma célula na dimensão 6, enquanto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^6$ tem duas células na dimensão 6. Segue que $H_6\left(\mathbb{CP}^6\right) \cong \mathbb{Z}$, enquanto $H_6\left(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^6\right) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Então, $\mathbb{CP}^6$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^6$ não são homotopicamente equivalentes.

◁

Expressão para o operador de bordo celular Para aplicarmos o Teorema, muitas vezes é necessário calcular o operador de bordo, o que pode ser difícil se feito diretamente a partir definição. A seguir, mostraremos como expressar o operador de bordo em termos dos graus de certas aplicações $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

O morfismo de bordo

$$\partial_n^{\mathrm{cw}} : H_n\left(X^n, X^{n-1}\right) \xrightarrow{\partial_{*,n}} H_{n-1}\left(X^{n-1}\right) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right).$$

leva uma n-célula aberta $e_\alpha \in X$, considerada como uma cadeia em $H_n(X^n, X^{n-1})$, para uma combinação de $(n-1)$-células abertas $e_\beta \in X$, considerada como uma cadeia em $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$. Dessa forma, a aplicação de bordo fica completamente determinada pelos coeficientes $d_{\alpha\beta}$, tais que

$$\partial_n^{\mathrm{cw}}(e_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta$$

Para cada β, defina uma aplicação $p_\beta : X^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ como segue.

1. Seja $q : X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2}$ a aplicação quociente.
2. Lembre-se de que X^{n-1}/X^{n-2} é homeomorfo à união por um ponto de $(n-1)$-esferas $\mathbb{S}^{n-1}$, uma para cada β, i.e, $X^{n-1}/X^{n-2} \cong \bigvee_\beta \mathbb{S}^{n-1}_\beta$. Seja $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \to \mathbb{S}^{n-1}$ a projeção na β-ésima esfera. É a aplicação que colapsa todas as outras esferas na união por um ponto, exceto a β-ésima, no ponto de união. Então definimos

$$p_\beta = q_\beta \circ q,$$

E definimos $\triangle_{\alpha\beta} : \partial\mathbb{D}^n_\alpha \to \mathbb{S}^{n-1}_\beta$ como a composição

$$\triangle_{\alpha\beta} = p_\beta \varphi_\alpha,$$

em outras palavras, a aplicação colagem de e^n_α seguida pela aplicação quociente $X^{n-1} \to S^{n-1}_\beta$ colapsando o complemento de e^{n-1}_β em X^{n-1} a um ponto.

Seja X um CW-complexo. Então o morfismo de bordo

$$\partial^{\mathrm{cw}}_n : H_n(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; \mathbb{Z})$$

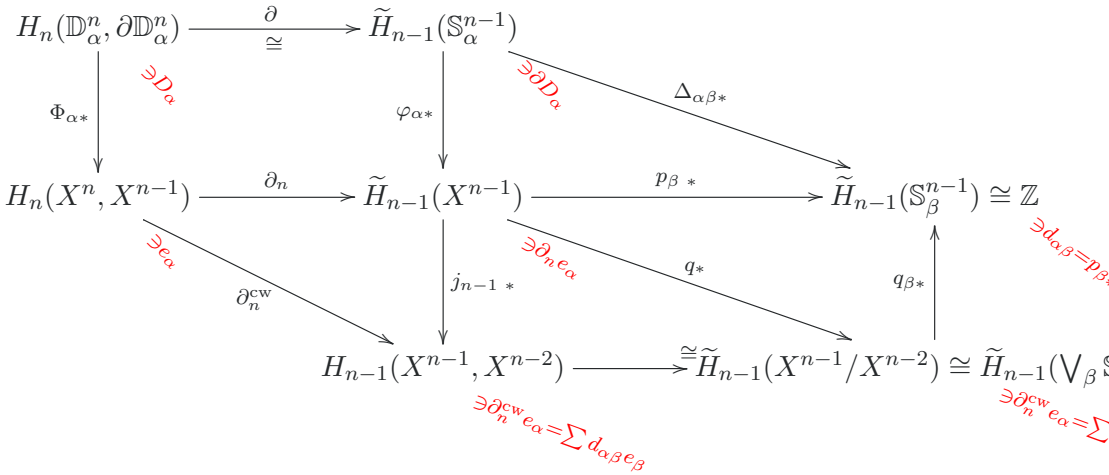
do complexo celular $C^{\mathrm{cw}}_*(X; \mathbb{Z})$ associado a X é dado por

$$\partial^{\mathrm{cw}}_n(e_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta,$$

onde $d_{\alpha\beta} = \deg \triangle_{\alpha\beta}$ é o grau da aplicação $\triangle_{\alpha\beta} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definida como $\triangle_{\alpha\beta} = p_\beta \varphi_\alpha$.

Observamos que soma na proposição anterior é finita, pois φ_α leva $\mathbb{S}^{n-1}$ em uma união de um número finito de células de dimensão no máximo $n-1$. Os graus $d_{\alpha\beta}$ são frequentemente chamados de números de incidência.

Para demonstrar a proposição, considere o diagrama comutativo



(12.3)

Primeiramente, observamos que $p_{\beta *}$ leva um gerador e_β de $H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right)$ ao gerador de $H_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}, *\right) \cong \widetilde{H}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cong \mathbb{Z}$ e todos os outros geradores para zero.

Seja $x \in H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right)$, como $H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right)$ é livre com base $\{e_\beta\}$, existem e são únicos os inteiros n_β tais que

$$x = \sum n_\beta e_\beta.$$

Como $H_{n-1}\left(X^{n-1}, X^{n-2}\right) \cong H_{n-1}\left(X^{n-1}/X^{n-2}\right)$, podemos escrever x como $x = \sum n_\beta e'_\beta$.

Das observações acima, segue que a menos da escolha do gerador de $\widetilde{H}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$[1] e de isomorfismo temos que se $x = \sum n_\beta e_\beta$ então $q_{\beta *} x = n_\beta \in \widetilde{H}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right) \cong \mathbb{Z}$.

Agora, observe que a aplicação $\Phi_{\alpha *}$ leva um gerador $D_\alpha \in H_n(\mathbb{D}^n_\alpha, \partial\mathbb{D}^n_\alpha)$ para um gerador de $H_n(X^n, X^{n-1})$ correspondente a e_α. Denotaremos esse gerador também por e_α.

Observamos que o quadrado superior comuta por naturalidade $\varphi_\alpha = \Phi_\alpha|_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Todos os triângulos comutam por definição. Dessa forma, temos, a menos de isomorfismos, fazendo uma perseguição no diagrama 12.3 (indicada em vermelho e começando com $D_\alpha \in H_n(\mathbb{D}^n_\alpha, \partial\mathbb{D}^n_\alpha)$), que:

$$d_{\alpha\beta} = q_{\beta *} \circ \partial^{\mathrm{cw}}_n e_\alpha = p_{\beta *} \partial_n\left(e_\alpha\right) = p_{\beta *} \varphi_{\alpha *} \partial D_\alpha = \Delta_{\alpha\beta}(\partial D_\alpha),$$

onde D_α é um gerador de $H_n\left(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}\right)$ que corresponde a aplicação identidade sob um homeomorfismo escolhido fixo $\Delta_n \to \mathbb{D}_n$. Segue-se que $\partial(D)$ é um gerador de $\widetilde{H}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$. Em outras palavras, o coeficiente $d_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ é igual ao grau da aplicação $\Delta_{\alpha\beta} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$.

Isso também faz sentido para $n = 1$, embora não tenhamos definido um grau de aplicação $\mathbb{S}^0 \to \mathbb{S}^0$. Nesse caso, o operador de bordo $\partial_1 : H_1\left(X^1, X^0\right) \to H_0\left(X^0\right)$ é definido simplesmente pela fórmula familiar

$$\partial_1\left(e_\alpha\right) = e_\alpha(1) - e_\alpha(0).$$

Observe também que, embora o cálculo acima identifique $d_{\alpha\beta}$ apenas a menos de isomorfismos, mas isso não faz diferença na prática.

[1] Na verdade, temos duas escolhas possíveis aqui.

Exemplo 12.11.

Seja Σ_g a superfície orientável fechada de gênero g com sua estrutura de CW-complexo usual obtida do polígono de $4g$ lados colado pela palavra

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

e consistindo de uma 0-célula, $2g$ 1-células e uma 2-célula.

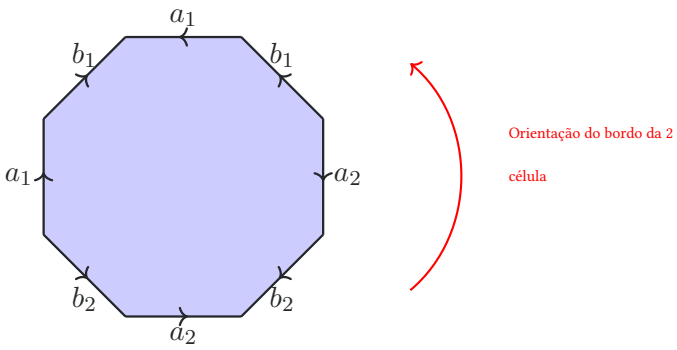


Figura 12.6.: Diagrama de Colagem de Σ_g. Observe que em cada duas 1-células coladas entre si uma está com a mesma orientação do bordo da 2-célula e uma com a orientação reversa, dessa forma, o disco é enrolado duas vezes em cada círculo em direções contrárias, e assim o grau é 0.

O complexo de cadeias celulares associado é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \,.$$

O operador d_1 deve ser 0, pois o complexo possui apenas uma 0-célula. Além disso, d_2 é 0 porque cada a_i ou b_i aparece com seu inverso em $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, e dessa forma e dessa forma o disco é enrolado duas vezes em cada círculo em direções contrárias e assim as aplicações $\Delta_{\alpha\beta}$ são aplicações homotópicas a constantes. Como d_1 e d_2 são ambos zero, os grupos de homologia de Σ_g são os mesmos que os grupos de cadeia celular e assim

$$H_n(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & \text{se } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}\,, & \text{se } n = 1. \end{cases}$$

◁

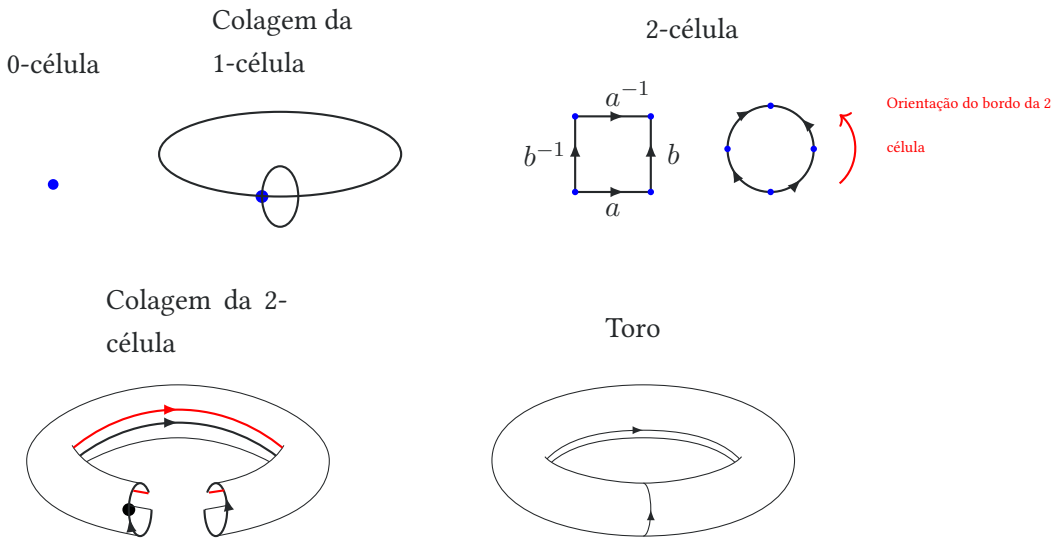


Figura 12.7.: Construção da estrutura de CW-complexo do toro. Cada duas 1-células coladas entre si uma está com a mesma orientação do bordo da 2-célula e uma com a orientação reversa e dessa forma o disco é enrolado duas vezes em cada círculo em direções contrárias.

Exemplo 12.12.

Seja P_g superfície não orientável fechada do gênero g com sua estrutura de CW-complexo usual obtida da colagem do polígono de $2g$ lados colado pela palavra

$$a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$$

e consistindo de uma 0-célula, g 1-células e uma 2-célula.

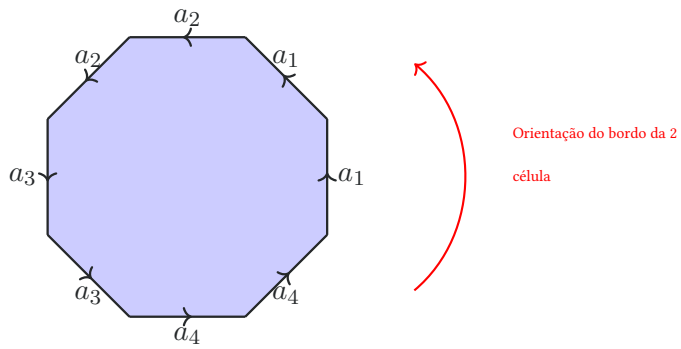


Figura 12.8.: Diagrama de Colagem de P_g. Cada duas 1-células coladas entre si estão com a mesma orientação do bordo da 2-célula e assim a 2-celula é enrolada duas vezes em cada círculo na mesma direção e logo o grau é 2.

O complexo de cadeia celular associado é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^g \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

Novamente temos que o operador $d_1 = 0$, enquanto que o operador $d_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^g$ é especificado pela equação $d_2(1) = (2, \cdots, 2)$ já que cada termo a_i aparece na palavra de colagem da 2-célula com expoente 2, e dessa forma o bordo do disco é enrolado duas vezes em cada círculo na mesma direção e assim cada aplicação $\triangle_{\alpha\beta}$ é homotópica à aplicação $z \mapsto z^2$, de grau 2. Como $d_2(1) = (2, \cdots, 2)$, temos que a aplicação d_2 é injetiva e portanto $H_2(P_g) \cong 0$. Finalmente se escolhermos a base para $\mathbb{Z}^g$ como a base obtida substituindo o último elemento base padrão $(0, \cdots, 0, 1)$ por $(1, \cdots, 1)$, veremos que

$$H_1(P_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

e desta forma temos que

$$H_n(P_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & \text{se } n = 0, \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2\,, & \text{se } n = 1, \\ 0\,, & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

◁

Espaço projetivo real Temos uma estrutura de CW-Complexo em $\mathbb{RP}^n$ com $X^k = \mathbb{RP}^k$ na qual há uma k-célula - que denotaremos por e_k - para cada k entre 0 e n. A aplicação de colagem da n-célula é o recobrimento duplo dado pela aplicação antipodal $\pi : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$. Dessa forma o complexo da cadeia celular é dado:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longleftarrow & C_0^{\mathrm{cw}}(\mathbb{RP}^n) & \xleftarrow{\partial_1^{\mathrm{cw}}} & C_1^{\mathrm{cw}}(\mathbb{RP}^n) & \xleftarrow{\partial_2^{\mathrm{cw}}} & \cdots & \xleftarrow{\partial_n^{\mathrm{cw}}} & C_n^{\mathrm{cw}}(\mathbb{RP}^n) & \longleftarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \| & & \\ 0 & \longleftarrow & \mathbb{Z}\langle e_0\rangle & \xleftarrow{\partial_1^{\mathrm{cw}}=0} & \mathbb{Z}\langle e_1\rangle & \xleftarrow{\partial_2^{\mathrm{cw}}} & \cdots & \xleftarrow{\partial_n^{\mathrm{cw}}} & \mathbb{Z}\langle e_n\rangle & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

O primeiro operador bordo é zero porque $H_0\left(\mathbb{RP}^n\right) \cong \mathbb{Z}$ Para $n > 1$, para calcular o morfismo de bordo ∂_k^{cw} calculamos o grau da composição

$$\mathbb{S}^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{RP}^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{RP}^{k-1}/\mathbb{RP}^{k-2} = \mathbb{S}^{k-1},$$

com q a aplicação quociente. A aplicação $q\varphi$ restringe-se a um homeomorfismo em cada componente de $\mathbb{S}^{k-1} \setminus \mathbb{S}^{k-2}$ sobre $\mathbb{RP}^{k-1} \setminus \mathbb{RP}^{k-2}$, e esses dois homeomorfismos são obtidos um do outro compondo com a aplicação antipodal de $\mathbb{S}^{k-1}$, denoata $-\mathrm{id}$, que tem grau $(-1)^k$. Logo

$$\deg q\varphi = \deg \mathrm{id} + \deg(-\mathrm{id}) = 1 + (-1)^k,$$

e assim ∂_k^{cw} é 0 ou é a multiplicação por 2 dependendo se k é ímpar ou par. Assim, o complexo da cadeia celular para $\mathbb{RP}^n$ é

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{se } n \text{ é par}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{se } n \text{ é ímpar}$$

A partir das sequências anteriores segue facilmente que A homologia do espaço projetivo real é a seguinte.

$$H_k\left(\mathbb{RP}^n\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\,, & k = 0 \\ \mathbb{Z}\,, & k = n \text{ ímpar} \\ \mathbb{Z}_2\,, & k \text{ ímpar}, 0 < k < n \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Representando essas informações numa tabela na qual as entradas ausentes são 0.

dim	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{RP}^0$	$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{RP}^1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$				
$\mathbb{RP}^2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$				
$\mathbb{RP}^3$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$		
$\mathbb{RP}^4$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$		
$\mathbb{RP}^5$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$

No espaço projetivo real, células ímpares criam novos geradores e células pares (com exceção da célula zero) criam torção na dimensão anterior.

12.3. Axiomas de Eilenberg-Steenrod para a Homologia

Eilenberg e Steenrod propuseram em (Eilenberg; Steenrod, 1945) um sistema de axiomas para definir o que é uma "teoria de homologia". Nesse conjunto de axiomas, o foco era predominantemente em CW-complexos finitos. Mais tarde, esses axiomas foram complementados pelo axioma da aditividade de Milnor (Milnor, 1962) que agora é considerado como parte dos axiomas padrão. Denotamos por $\mathbf{PTop}$ a categoria de pares de espaços topológicos.

Uma teoria de homologia H em $\mathbf{PTop}$ é:

- uma sequência de funtores $h_n : \mathbf{PTop} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e
- uma sequência de transformações naturais $\partial : h_n(X, A) \to h_{n-1}(A, \varnothing)$

que satisfazem:

A1-Sequência exata longa Para qualquer par (X, A), a sequência

$$\cdots \to h_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} h_q(A) \to h_q(X) \to h_q(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

é exata, onde escrevemos $h_q(X)$ para $h_q(X, \varnothing)$.

A2-Axioma da dimensão O grupo $h_n(*)$ é diferente de zero apenas para $n = 0$.

A3-Invariância homotópica Se $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicos, então $f_{0*} = f_{1*} : h_n(X, A) \to h_n(Y, B)$.

A4-Excisão Excisões induzem isomorfismos.

A5-Aditividade Seja $\coprod X_i$ a união disjunta de X_i. As aplicações de inclusão $X_i \to \coprod X_i$ induzem as aplicações $h_n(X_i) \to h_n(\coprod X_i)$, e estes por sua vez induzem uma aplicação da soma direta em $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$:

$$\alpha : \bigoplus_{i \in I} h_n(X_i) \to h_n\left(\coprod_{i \in I} X_i\right).$$

Então a aplicação α é um isomorfismo para todo n.

Os grupos $h_n(*)$ são denominados coeficientes da teoria de homologia.

Unicidade da Homologia Singular. Existe essencialmente apenas uma teoria de homologia, com um grupo de coeficientes dado, na subcategoria $\mathbf{CW} \subset \mathbf{PTop}$ que satisfaz os axiomas acima. Em outras palavras, se H, H_0 são duas teorias de homologia com o mesmo grupo de coeficientes que satisfazem os axiomas os grupos $H_n(X, A)$ e $H_{0n}(X, A)$ são isomorfos para $(X, A) \in \mathbf{CW}$.

Exercícios

Ex. 154 — Sejam X um CW-complexo e A um subcomplexo. Prove que A tem uma vizinhança U em X tal que A é retrato de deformação de A.

Ex. 155 — Prove que qualquer subconjunto compacto de um CW-complexo X está contido em algum subcomplexo finito de X.

Ex. 156 — Seja (X, Y) um par CW. Então o espaço quociente X/Y pode ser munido de uma estrutura de CW-complexo de modo que a aplicação quociente $X \to X/Y$ seja celular.

Ex. 157 — Mostre que a suspensão ΣX de um CW-complexo é novamente um CW-complexo, onde

$$\Sigma X \coloneqq \frac{X \times I}{X \times \partial I}.$$

Ex. 158 — Esfera Infinita

1. Mostre que se X que é o colimite, ou seja, a união de uma sequência crescente de CW-subcomplexos

$$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots \subset X = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n$$

   então X é um CW-complexo.

2. Mostre que a esfera de dimensão n $\mathbb{S}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, admite uma estrutura CW-complexa com duas células de dimensão k para qualquer $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. Descreva a estrutura de CW-complexo da esfera infinita

$$\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{S}^\infty = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{S}^n,$$

4. Usando as definições do item anterior, mostre que se cada inclusão $X_n \mapsto X_{n+1}$ é homotopicamente nula, então X é contrátil.

5. Mostre que $\mathbb{S}^\infty$ é contrátil.

Ex. 159 —

1. Mostre que os espaços $\mathbb{CP}^3$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ não são homotopicamente equivalentes.

2. Mostre que os espaços $\mathbb{CP}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \cdots \times \mathbb{S}^{2n}$ não são homotopicamente equivalentes para todo $n > 1$.

Ex. 160 — Para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ admite estrutura de CW-complexo? E de um CW-complexo finito?

Ex. 161 —

1. Mostre que o produto $X \times Y$ de dois complexos CW finitos é um CW-complexo.

2. Use o item anterior para construir uma estrutura de CW-complexo do toro n-dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$
3. Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$

Ex. 162 — Seja X o espaço obtido anexando duas 2-células a $\mathbb{S}^1$, uma através da aplicação $z \mapsto z^3$ e outra via $z \mapsto z^5$, onde z denota a coordenada complexa em $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Calcule os grupos de cohomologia $H^*(X; R)$ de X com coeficientes:

1. $R = \mathbb{Z}$.
2. $R = \mathbb{Z}_2$.
3. $R = \mathbb{Z}/3$.

Ex. 163 — Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ uma aplicação de grau m. Seja $X = \mathbb{S}^n \cup_f e^{n+1}$ o espaço obtido de $\mathbb{S}^n$ anexando um $(n+1)$-célula via f. Calcule a homologia de X.

Ex. 164 — Seja G um grupo abeliano finitamente gerado e seja $n \geq 1$. Construa um CW-complexo X tal que $H_n(X) \cong G$ e $\tilde{H}_i(x) = 0$ para todos $i \neq n$. Dica: use o exercício anterior.

Ex. 165 — Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{CP}^n$.

Ex. 166 — Usando o fato que se X e Y são CW-complexos finitos então $X \times Y$ também tem a estrutura de um CW-complexo.

1. Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ para todos m e n.
2. Calcule os grupos de homologia de $\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty$ usando o fato de que o fato de

$$\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty = \varinjlim_n \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$$

Ex. 167 — Seja $\mathbb{M}$ a faixa Möbius obtida como um quociente de $[0,1] \times [-1,1]$, identificando $(0,t) \sim (1,-t)$. A faixa de Möbius vem equipada com duas inclusões do círculo

$$C_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M, \quad C_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$$

onde a imagem de C_1 é o círculo central $[0,1] \times \{0\}/\sim$ e a imagem de C_2 é o círculo de fronteira $[0,1] \times \{\pm 1\}/\sim$

1. Dê uma estrutura de CW-complexo para a faixa de Möbius de modo que

ambas as aplicações C_1 e C_2 sejam inclusões de CW-subcomplexos. Desenhe uma imagem ilustrando isso.

2. Mostre que C_1 é a inclusão de um retrato de deformação. Se $P : M \to \mathbb{S}^1$ é a retração associada, prove que

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{C_2} M \xrightarrow{P} \mathbb{S}^1$$

fornece uma fatoração do mapa $\beta_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definido como $\beta_2\left(e^{i\theta}\right) = e^{2i\theta}$ como a inclusão de um subcomplexo, seguido por uma equivalência de homotopia.

13 Cohomologia Singular

Até agora, associamos a cada espaço topológico X uma sequência de módulos chamados de grupos de homologia. Agora associamos a X outra sequência de módulos, chamados de grupos de cohomologia. A cohomologia é uma variante algébrica da homologia, o resultado de uma simples dualização na definição, processo que tornaremos preciso em breve. A diferença básica entre estas teorias é que os grupos de cohomologia são funtores contravariantes, mas os grupos de homologia são funtores covariantes. Os grupos de homologia determinam os grupos de cohomologia correspondentes, e a reciproca é verdadeira se os grupos de homologia são finitamente gerados.

Esses grupos só foram definidos muito depois dos grupos de homologia. A ideia inicial dos grupos de cohomologia (módulos ou anéis) de um espaço topológico são atribuídas a S. Lefschetz em 1930, quando este formulou uma prova simplificada do teorema da dualidade para uma variedade orientável com bordo. Porém a definição de cobordo foi feita de modo independente por James W. Alexander e Andrey Kolmogorov em 1935. A razão não é difícil de entender, pois eles são geometricamente muito menos naturais do que os grupos de homologia.

O que é um pouco surpreendente é que a contravariância leva a uma estrutura extra na cohomologia: um produto natural chamado de produto cup, que tornam os grupos de cohomologia um anel. Esta estrutura adicional é extremamente útil, e grande parte deste capítulo é dedicada ao estudo de produto cup, que são consideravelmente mais sutis do que a estrutura aditiva da cohomologia.

A cohomologia possui uma aplicabilidade enorme e só para citar alguns exemplos temos o Teorema da Dualidade de Poincaré, a teoria de obstrução, e o Teorema de de Rham.

13.1. Cohomologia

Como observamos na introdução do capítulo os grupos cohomologia são uma variante algébrica da homologia, que a grosso modo, são "duais" aos grupos de homologia. Para tornar isso preciso começaremos descrevendo o módulo de cocadeias singulares como o dual do módulo de cadeias singulares.

Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R, para qualquer $p \geq 0$ definimos o **módulo de cocadeias singulares** $S^p(X;R)$ como o dual do R-módulo $S_p(X;R)$, ou seja, como $\mathrm{Hom}_R(S_p(X;R),\ R)$ o módulo de todas as R aplicações lineares de $S_p(X;R)$ a R

$$S^p(X;R) = \mathrm{Hom}_R(S_p(X;R),\ R) = \{f : S_p(X;R) \to R\}.$$

Os elementos de $S^p(X;R)$ são denominados p-**cocadeias singulares**. Por completude, definimos $S^p(X;R) = 0$ para $p < 0$.

Os módulos duais $\mathrm{Hom}_R(S_p(X;R),\ R)$ são mais abstratos que os módulos $S_p(X;R)$. De modo a simplificar a apresentação daremos agora uma descrição mais elementar dos módulo de cocadeias. Começamos observando que $S_p(X;R)$ é o R-módulo livre gerado pelo conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ dos p-simplexos singulares, e dessa forma toda aplicação linear de $S_p(X;R)$ para R é completamente determinada pelos seus valores nos geradores $S_{\Delta^p}(X)$, e logo podemos ver um elemento de $S^p(X;R)$ como uma função arbitrária $f : S_{\Delta^p}(X) \to R$ atribuindo a cada p-simplexo singular σ um elemento de R. O conjunto de funções de $S_{\Delta^p}(X)$ a R formam um R-módulo sob as operações de multiplicação por escalar e adição usuais de funções. Resumindo:

$$S^p(X;R) = \{f : S_{\Delta^p}(X) \to R\}.$$

Finalmente para obtermos um complexo de cocadeias precisamos definir o morfismo de cobordo $\delta^p : S^p(X;R) \to S^{p+1}(X;R)$. Poderíamos dizer apenas o operador de cobordo é o dual do operador de bordo, $\delta^p = \mathrm{Hom}_R(\partial_{p+1}, R)$, mas a seguir vamos tentar interpretar o que isso significa.

É bastante natural exigir que para qualquer p-cocadeia singular $f : S_{\Delta^p}(X) \to$

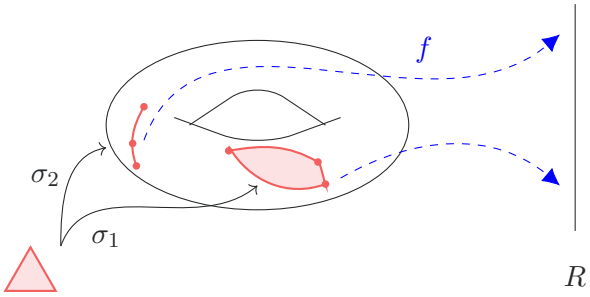


Figura 13.1.: Uma cocadeia singular f associa a cada p-simplexo um valor em R.

R, o morfismo de cobordo $\delta^p f$ satisfaça a seguinte propriedade de comutatividade:

$$(\delta^p f)(\alpha) = f(\partial_{p+1}\alpha) \qquad \begin{array}{ccc} S_{p+1}(X;R) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & S_p(X;R) \\ & \searrow^{\delta^p f} & \downarrow f \\ & & R\,. \end{array}$$

Essa propriedade de comutatividade possui uma interpretação interessante. Se escrevermos $\langle g, \beta\rangle = g(\beta)$ para a avaliação da p-cocadeia singular $g \in S^p(X;R)$ na p-cadeia singular $\beta \in S_p(X;R)$

$$\langle -, - \rangle : S^p(X;R) \times S_p(X;R) \to R$$

temos:

$$\langle \delta^p f,\ \alpha\rangle = \langle f,\ \partial_{p+1}\alpha\rangle,$$

ou seja, estamos definindo δ^p como a transformação adjunta (ou dual) de ∂_{p+1}:

$$\delta^p = \partial^*_{p+1}.$$

Resumindo: temos que o complexo de cohomologia é obtido a partir do complexo de homologia pela dualização dos espaços e aplicações.

Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R, para qualquer $p \geq 0$, o **homomorfismo de cobordo** ou **operador de cobordo**

$$\delta^p : S^p(X;R) \to S^{p+1}(X;R)$$

é definido por

$$\langle \delta^p f,\ \alpha\rangle \coloneqq \langle f,\ \partial_{p+1}\alpha\rangle,$$

para toda p-cadeia singular $f : S_{\Delta^p}(X) \to R$ e toda $(p+1)$-cadeia singular $\alpha \in S_{p+1}(X;R)$; equivalentemente,

$$\delta^p f \coloneqq f \circ \partial_{p+1} \text{ para toda } f \in S^p(X;R).$$

Definimos a soma direta $S^*(X;R)$ como

$$S^*(X;R) \coloneqq \bigoplus_{p\geq 0} S^p(X;R)\ .$$

e podemos estender o morfismo de cobordo para a álgebra graduada obtendo $\delta : S^*(X;R) \to S^*(X;R)$.

Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R, o morfismo de cobordo $\delta : S^*(X;R) \to S^*(X;R)$ satisfaz

$$\delta \circ \delta = 0.$$

A demonstração dessa identidade é direta e será deixada como exercício.

Logo $S^p(X;R)$ junto com os morfismos de cobordo δ^p formam o complexo de cocadeias:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X;R) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X;R) \cdots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X;R) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X;R) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \cdots$$

Dado um espaço espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R definimos

1. O kernel $Z^p(X;R)$ do operador cobordo $\delta^p : S^p(X;R) \to S^{p+1}(X;R)$, i.e.,

   $$Z^p(X;R) = \ker \delta^p$$

   é dito **módulo dos p-cociclos singulares**.

2. A imagem $B^p(X;R)$ do operador cobordo $\delta^{p-1} : S^{p-1}(X;R) \to S^p(X;R)$, i.e.,

   $$B^p(X;R) \coloneqq \operatorname{im} \delta^{p-1}$$

   é dito **módulo dos p-cobordos singulares**.

Pela Proposição 13.1, $B^p(X;R)$ é um submódulo de $Z^p(X;R)$ e assim podemos definir os módulos de cohomologia:

Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R, para qualquer $p \geq 0$ o **módulo de cohomologia singular** $H^p(X;R)$ é definido por

$$H^p(X;R) := \frac{\ker \delta^p}{\operatorname{im} \delta^{p-1}} = \frac{Z^p(X;R)}{B^p(X;R)} .$$

Definimos por completude que $H^p(X;R) = (0)$ se $p < 0$.

Do mesmo modo que no caso dos grupos de homologia, é prática comum referir-se aos módulos $H^p(X;R)$ como grupos mesmo sendo R-módulos.

Exemplo 13.1.

Vamos mostrar que

$$H^0(X;R) = \pi_0(X)^R.$$

onde $\pi_0(X)$ é o conjunto de todas as componentes conexas por caminho de X.

Uma 0-cocadeia é uma função $S_0(X;R) \to R$; isto é, equivalentemente identificando os 0-simplexos com pontos, uma função $f : X \to R$. Para calcular δf, seja $\sigma : \Delta_1 \to X$ um 1-simplexo e calculamos f em seu bordo:

$$(\delta f)(\sigma) = f(\partial\sigma) = f(\sigma(v_1)) - f(\sigma(v_0)).$$

Então f é um cociclo se for constante nas componentes conexas por caminhos.

◁

Sejam $\{X_i, i \in I\}$ as componentes conexas por caminho de um espaço X. Então, para todo $p \geq 0$,

$$H^q(X) = \prod_{i \in I} H^q(X_i),$$

ou seja, a cohomologia singular de X isomorfa ao produto da cohomologia singular de suas componentes conexas por caminho.

Coeficientes num R-módulo

Há uma generalização da cohomologia singular usando coeficientes mais gerais. Podemos usar R-módulo G como o conjunto de coeficientes.

Dados um espaço topológico X, um anel comutativo com unidade R e um R-módulo G, para qualquer $p \geq 0$ o grupo singular de cocadeias $S^p(X;G)$ é o R-módulo $\mathrm{Hom}_R(S_p(X;R),\ G)$ de R-aplicações lineares de $S_p(X;R)$ a G. Definimos $S^p(X;G) = 0$ para $p < 0$.

Uma vez que $S_p(X;R)$ é o R-módulo livre gerado pelo conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ de p-simplexos singulares, podemos visualizar $S^p(X;G)$ como o conjunto de todas as funções $f : S_{\Delta^p}(X) \to G$. Este também é um R-módulo. Como um caso especial, se tomarmos $R = \mathbb{Z}$, então G pode ser qualquer grupo abeliano. Como antes, obtemos R-módulos $Z^p(X;G)$ e $B^p(X;G)$ e morfismos de cobordo $\delta^p : S^p(X;G) \to S^{p+1}(X;G)$ definidos por

$$\delta^p f := f \circ \partial_{p+1} \text{ para toda } f \in S^p(X;G).$$

Temos o complexo de cocadeia

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X;G) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X;G) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X;G) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X;G) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \cdots$$

e obtemos os grupos de cohomologia.

Dados um espaço topológico X, um anel comutativo com unidade R e um R-módulo G, para qualquer $p \geq 0$ o **módulo de cohomologia singular** $H^p(X;G)$ é definido por

$$H^p(X;G) := \frac{\ker \delta^p}{\mathrm{im}\, \delta^{p-1}} = \frac{Z^p(X;G)}{B^p(X;G)}\,.$$

Definimos $H^p(X;G) = (0)$ se $p < 0$ e definimos a **cohomologia singular** de X com coeficientes em G,denotada $H^*(X;G)$, como a soma direta

$$H^*(X;G) := \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X;G)$$

Exemplo 13.2.

Seja X o espaço que consiste de um único ponto. Então existe um único n-simplexo singular $\sigma_n : \Delta^n \to X$ para cada $n \geq 0$, e dessa forma $S_p(X;R) = R\sigma_n$ e $S^p(X;G) = G\varphi^n$ para cada $n \geq 0$, onde

$$(g\varphi^n)(\sigma_n) = g.$$

Temos que

$$\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{n-1}$$

é igual a σ_{n-1} para $n \geq 2$ par, e é igual a 0 para $n \geq 1$ ímpar. Portanto, $\delta\varphi^n$ é igual a φ^{n+1} para $n \geq 1$ ímpar e é igual a 0 para $n \geq 0$ par.

Portanto, temos o complexo de cocadeias:

$$0 \longrightarrow G\varphi^0 \xrightarrow{0} G\varphi^1 \xrightarrow{1} G\varphi^2 \xrightarrow{0} G\varphi^3 \longrightarrow \dots$$

Os homomorfismos de bordo rotulados como 1 são isomorfismos e os rotulados 0 são triviais. Portanto $B^n(;\, G)$ é igual a $G\varphi^n$ para $n \geq 2$ par, e é zero caso contrário, enquanto $Z^n(X;G)$ é igual a $G\varphi^n$ para $n \geq 0$ par, e é zero caso contrário. Assim para $n \neq 0$ temos $B^n(X;G) = Z^n(X;G)$ e $H^n(X\ G) = 0$. No caso $n = 0$ temos

$$H^0\ (X;\ G) = Z^0\ (X;\ G)/B^0\ (X;\ G) = G\varphi^0/0 \cong G.$$

◁

Funtorialidade da Cohomologia

A cohomologia é funtorial. Para vermos a validade dessa afirmação considere $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, sabemos que essa função induz uma aplicação de cadeias $f_{\sharp,p} : S_p(X;R) \to S_p(Y;R)$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & S_{p+1}(X;R) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & S_p(X;R) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{\sharp,p+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{\sharp,p}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & S_{p+1}(Y;R) & \xrightarrow[\partial^Y_{p+1}]{} & S_p(Y;R) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

então aplicando $\mathrm{Hom}_R(\bullet, G)$ obtemos uma aplicação de cocadeia $f^{\sharp,p} : S^p(Y;G) \to S^p(X;G)$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & S^{p+1}(X;R) & \xleftarrow{\delta^X_p} & S^p(X;R) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^{\sharp,p}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{\sharp,p}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & S^{p+1}(Y;R) & \xleftarrow[\delta^Y_p]{} & S^p(Y;R) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

que comuta com cobordos (pois $f_{\sharp,p}$ comuta com os bordos) e, portanto, temos um homomorfismo

$$f^{*p} : H^p(Y;G) \to H^p(X;G).$$

Esse fato é registrado como a seguinte proposição.

Se X e Y são dois espaços topológicos e se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre eles, então existem homomorfismos $f^{*p} : H^p(Y;G) \to H^p(X;G)$ para todo $p \geq 0$.

Como consequência da proposição anterior temos

Se X e Y são dois espaços topológicos homeomorfos então $H^p(Y;G) \cong H^p(X;G)$ para todo $p \geq 0$.

Ou seja, os grupos de cohomologia são invariantes topológicos.

Dessa forma, o grupo de homologia singular é um **funtor**. De modo mais preciso, temos os funtores $H^i(\bullet;R)$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Top} & \xrightarrow{H^i(\bullet;R)} & {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \\
\\
X & \longmapsto & H^i(X;R) \quad \ni \quad [g \circ f] \qquad f \circ g \in S^p(X;R) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle f \text{ cont.}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle f^*} \text{ homom.} \qquad \Big\uparrow \\
Y & \longmapsto & H^i(Y;R) \quad \ni \quad [g] \qquad\quad g \in S^p(Y;R)
\end{array}$$

13.2. Cohomologia Reduzida e Relativa

Nesta seção denotaremos por R um anel comutativo com elemento identidade e por G um R-módulo.

Os grupos de cohomologia singular reduzidos $\widetilde{H}^p(X;G)$ são definidos pela dualização do complexo de cocadeias aumentada

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\epsilon} S_0(X;R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X;R) \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X;R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X;R) \xleftarrow{\partial_{p+1}}$$

aplicando $\mathrm{Hom}_R(\bullet, G)$ temos (veja o exercício correspondente sobre cohomologia

reduzida)

$$\widetilde{H}^0(X;G) = \mathrm{Hom}_R(\widetilde{H}_0(X;R),\ G) \tag{13.1}$$

$$\widetilde{H}^p(X;G) = H^p(X;G), \quad p \geq 1. \tag{13.2}$$

Pelo exercício correspondente sobre cohomologia reduzida, temos que

$$H^0(X;G) \cong \widetilde{H}^0(X;G) \oplus G.$$

De modo análogo, para obtermos os grupos de cohomologia relativa, dualizamos o complexo de cadeias de homologia relativa

$$0 \xleftarrow{\partial_0} S_0(X,\ A;R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X,\ A;R) \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X,\ A;R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X,\ A;R)$$

aplicando $\mathrm{Hom}_R(\bullet;G)$, e lembrando que $S_p(X,\ A;R) = S_p(X,\ R)/S_p(A,\ R)$. Dessa forma obtemos o complexo de cocadeias

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X,\ A;G) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X,\ A;G) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X,\ A;G) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X,\ A;G)$$

com $S^p(X,\ A;G) = \mathrm{Hom}_R(S_p(X,\ A;R),\ G)$ e $\delta^p = \mathrm{Hom}_R(\partial_p,\ G)$ para todo $p \geq 0$ (e δ^{-1} é o morfismo zero). Mais explicitamente

$$\delta^p(f) = f \circ \partial_{p+1} \text{ para todos } f \in S^p(X,\ A;G).$$

Observe que $S^p(X,\ A;G) = \mathrm{Hom}_R(S_p(X;R)/S_p(A;R),\ G)$ é isomorfo ao submódulo de $S^p(X;G) = \mathrm{Hom}_R(S_p(X;R),\ G)$ consistindo em todos os aplicações lineares com valores em G definidos em simplexos singulares em $S_p(X;R)$ que se anulam nos simplexos singulares de $S_p(A;R)$. Consequentemente, o morfismo de cobordo

$$\delta^p : S^p(X,\ A;G) \to S^{p+1}(X,\ A;G)$$

é a restrição de $\delta^p_X : S^p(X;G) \to S^{p+1}(X;G)$ a $S^p(X,\ A;G)$ onde δ^p_X é o morfismo de bordo da cohomologia absoluta.

Dado um par topológico $(X,\ A)$, os grupos de cohomologia relativa singulares $H^p(X,\ A;G)$ de $(X,\ A)$ surgem do complexo de cocadeias

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X,\ A;G) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X,\ A;G) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X,\ A;G) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X,\ A;G)$$

e são dados por

$$H^p(X,\ A; G) = \frac{\ker \delta^p}{\operatorname{im} \delta^{p-1}},\ p \geq 0.$$

Como no caso da cohomologia singular absoluta, uma aplicação contínua $f : (X,\ A) \to (Y,\ B)$ induz um homomorfismo da cohomologia relativa $f^* : H^*(Y,\ B) \to H^*(X,\ A)$. Isso ocorre porque a aplicação f induz uma aplicação de cadeias $f_\sharp : S_*(X,\ A; R) \to S_*(Y,\ B; R)$, e aplicando $\operatorname{Hom}_R(\bullet, G)$ obtemos uma aplicação de cocadeia $f^\sharp : S^*(Y,\ B; G) \to S^*(X,\ A; G)$ que comuta com cobordos e, portanto, induz homomorfismos $f^{*p} : H^p(Y,\ B; G) \to H^p(X,\ A; G)$.

Se $(X,\ A)$ e $(Y,\ B)$ são pares topológicos e se $f : (X,\ A) \to (Y,\ B)$ é uma função contínua entre eles, então existem homomorfismos

$$f^{*p} : H^p(Y,\ B; G) \to H^p(X,\ A; G) \text{ para } p \geq 0.$$

Como consequência da proposição anterior temos que a cohomologia (relativa) é um invariante topológico.

A partir da sequência exata curta

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow S_p(A; R) \xrightarrow{i_\sharp} S_p(X; R) \xrightarrow{j_\sharp} S_p(X, A; R) \longrightarrow 0,$$

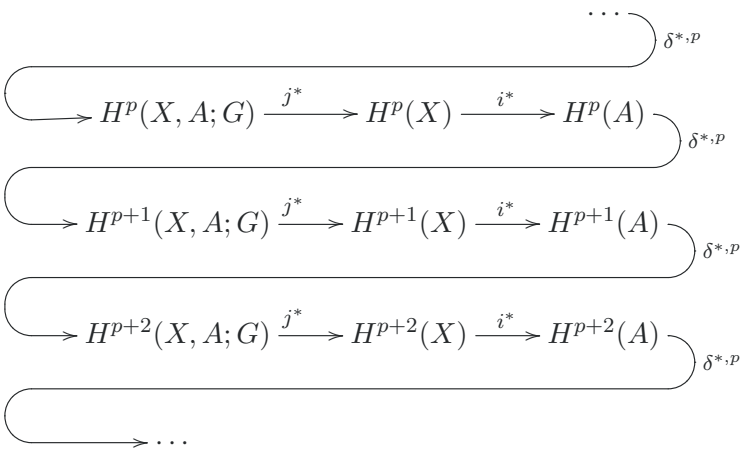
e como o módulo $S_p(X, A; R)$ é livre, a sequência anterior é cindida e aplicando $\operatorname{Hom}_R(\bullet; G)$ obtemos a sequência exata curta

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow S^p(X, A; G) \xrightarrow{\sharp} S^p(X; G) \xrightarrow{\sharp} S^p(A; G) \longrightarrow 0,$$

e logo pelo Teorema 7.7 temos a Sequência Exata Longa de Cohomologia Relativa:

Sequência Exata Longa de Cohomologia Relativa. Ao par $(X,\ A)$ topológico

temos a seguinte sequência exata longa de grupos de cohomologia



Como para os grupos de homologia, também temos o isomorfismo $H^n(X, A; R) \cong H^n(X/A, A/A; R)$ quando (X, A) é um bom par.

Bons Pares. Se (X, A) é um bom par então a aplicação quociente $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ induz um isomorfismo $q_* : H^n(X, A; R) \to H^n(X/A, A/A; R) \cong \widetilde{H}^n(X/A; R)$ para todo n.

Exemplo 13.3 — Cohomologia das Esferas.

Os grupos de cohomologia singular das esferas são:

$$\widetilde{H}^n(\mathbb{S}^m; R) \cong \begin{cases} R, & n = m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13.3}$$

O que pode ser reescrito como:

$$H^n(\mathbb{S}^0; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13.4}$$

$$H^n(\mathbb{S}^m; R) \cong \begin{cases} R, & n = 0 \\ R, & n = m \qquad \text{se } m > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13.5}$$

Não faremos o caso $H^n(\mathbb{S}^0; R)$ que é simples.

Para calcularmos os grupos de cohomologia para $\mathbb{S}^{n+1}$, usaremos a sequência exata longa em cohomologia para o bom par $(\mathbb{D}^{n+1}, \partial(\mathbb{D}^{n+1}) \cong \mathbb{S}^n)$. Começando

em $H^{k-1}(\mathbb{S}^n)$, obtemos:

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^{n+1}) \longrightarrow H^k(\mathbb{D}^n) \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \longrightarrow$$

Aqui, usamos o fato de que, como $(\mathbb{D}^{n+1}, \mathbb{S}^n)$ é um bom par, sua cohomologia é isomorfa à de $\mathbb{D}^{n+1}/\mathbb{S}^n$, que é $\mathbb{S}^{n+1}$. Pela hipótese indutiva e pelo fato de que a cohomologia de um disco é igual a de um ponto, temos a sequência (onde $k < n-1$)

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^{n+1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

Assim, $H^k(\mathbb{S}^{n+1}) \cong 0$ também. A sequência exata longa para H^n é um pouco diferente e deixaremos esse caso como exercício.

◁

13.3. Propriedades da Cohomologia

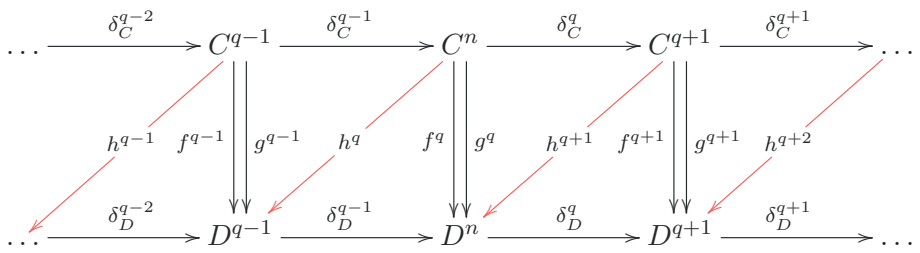
Invariância por Homotopia A cohomologia também é invariante por homotopias.

Sejam C e D complexos de cocadeia. Uma **aplicação de cocadeia** $f : C \to D$ é uma sequência de homomorfismos

$$f^q : C^q \to D^q$$

que comutam com os operadores de cobordo. Se $f, g : C \to D$ são aplicações de cocadeia, então uma homotopia de cocadeia H entre f e g é uma sequência de homomorfismos $h^q : C^q \to D^{q-1}$ tais que

$$f^q - g^q = \delta^{q-1} h^q + h^{q+1} \delta^q.$$



Seja $f : (X,\ A) \to (Y,\ B)$ uma aplicação contínua de pares topológicos então temos a aplicação de cadeias induzida,

$$f_\sharp\ :\ S_*(X,\ A) \to S_*(Y,\ B)\ ,$$

que dá origem a uma aplicação de cocadeia

$$f^\sharp : S^*(Y,\ B; G) \to S^*(X,\ A; G)$$

e, portanto, a um homomorfismo induzido em grupos de cohomologia

$$f^* : H^q(Y,\ B; G) \to H^q(X,\ A; G)$$

para todo q. Observamos que o homomorfismo induzido em cohomologia segue o caminho oposto ao da homologia; estamos lidando com um funtor contravariante.

Se duas funções $f, g\ :\ (X,\ A)\ \to\ (Y,\ B)$ são homotópicas, então qualquer homotopia $h : (X \times I,\ A\ \times I) \to (Y,\ B)$ dá origem a uma homotopia em cadeia $h_\sharp : S_*(X,\ A) \to S_{*+1}(Y,\ B)$ entre as aplicações de cadeias $f_\sharp$ e $g_\sharp$:

$$f_{\sharp,n} - g_{\sharp,n} = \partial_{n+1} \circ h_{\sharp,n} + h_{\sharp,n-1} \circ \partial_n$$

Dualizando essa equação obtemos

$$f^{\sharp,n} - g^{\sharp,n} = h^{\sharp,n+1} \circ \delta^n + \delta^{n-1} \circ h^{\sharp,n}.$$

Portanto, $h^\sharp : S^{*+1}(Y,\ A) \to S^*(X,\ B)$ é uma homotopia de cocadeias entre $f^\sharp$ e $g^\sharp$ e consequentemente os homomorfismos induzidos

$$f^*,\ g^* : H^q(Y,\ B; G) \to H^q(X,\ A; G)$$

são os mesmos.

Dados X e Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ duas aplicações contínuas, se f e g são homotópicas e $f^{*p}, g^{*p} : H^p(Y; G) \to H^p(X; G)$ são os homomorfismos induzidos, então $f^{*p} = g^{*p}$ para todos $p \geq 0$. Como consequência direta temos

Invariância por Homotopia. Se X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então os grupos de cohomologia $H^p(X; R)$ e $H^p(Y; R)$ são isomorfos para todos $p \geq 0$,

Como $\mathbb{R}^n$ é contrátil temos o seguinte corolário:

Os grupos de cohomologia singular de $\mathbb{R}^n$ são dados por

$$H^p(\mathbb{R}^n; R) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \geq 1 \\ R & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

Axioma de Excisão O Axioma de Excisão também é válido para a cohomologia singular.

Axioma de Excisão. Dados os subespaços $Z \subseteq A \subseteq X$, de modo que o fecho de Z esteja contido no interior de A, então a inclusão $(X - Z,\ A - Z) \to (X,\ A)$ induz um isomorfismo de cohomologia singular

$$H^p(X - Z,\ A - Z; G) \cong H^p(X,\ A; G),\ \text{para todos } p \geq 0.$$

Equivalentemente, para quaisquer subespaços $A, B \subseteq X$ cujos interiores cubram X, o morfismo de inclusão $(B,\ A \cap B) \to (X,\ A)$ induz isomorfismos

$$H^p(B,\ A \cap B; G) \cong H^p(X,\ A; G),\ \text{para todos } p \geq 0.$$

Demonstração. O Axioma de Excisão para a cohomologia singular decorre da prova de excisão para homologia singular. Sejam $A, B \subseteq X$ cujos interiores cubram X. E considere

$$\iota : S_*(A + B) \subseteq S_*(X)$$

a inclusão do subcomplexo de simplexo em A ou B. Usando a subdivisão baricêntrica, existe uma aplicação de cadeia

$$\rho : S_*(X) \to S_*(A + B)$$

tal que $\rho\iota = 1$ e $1 - \iota\rho = \partial h + h\partial$ para uma homotopia em cadeia h. Aplicando $\mathrm{Hom}(\bullet, G)$, obtemos a aplicação dual de cocadeias

$$\begin{aligned} \iota^{\#} &: S^{\#}(X; G) \to S^{\#}(A + B; G) = \mathrm{Hom}(S_*(A + B),\ G) \qquad \text{e} \\ \rho^{\#} &: S^{\#}(A + B; G) \to S^{\#}(X; G) \end{aligned}$$

tal que $\iota^{\#}\rho^{\#} = 1$ e $1 - \rho^{\#}\iota^{\#} = h^{\#}\delta + \delta h^{\#}$. Portanto $\iota^{\#}$ induz um isomorfismo em cohomologia

$$H(S_*(A + B),\ G) \cong H(X,\ G)$$

Dado o diagrama de sequências exatas curtas de complexos de cocadeias

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S^{\#}(A + B,\ A; G) & \longrightarrow & S^{\#}(A + B; G) & \longrightarrow & S^{\#}(A; G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & S^{\#}(X,\ A; G) & \xrightarrow{j^{\#}} & S^{\#}(X; G) & \xrightarrow{i^{\#}} & S^{*}(A; G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

temos o diagrama de sequências exatas longas induzidas

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^{n+1}(A+B;G) & \longrightarrow & H^{n+1}(A;G) & \longrightarrow & H^n(A+B,\ A;G) & \longrightarrow & H^n(A+B;G & \\
& \Vert{\scriptstyle i^*} & & \Vert & & \downarrow & & \Vert{\scriptstyle i^*} & \\
\cdots \longrightarrow & H^{n+1}(X;G) & \xrightarrow{i^*} & H^{n+1}(A;G) & \longrightarrow & H^n(X,\ A;G) & \xrightarrow{j^*} & H^n(X;G) & -
\end{array}$$

e pelo Lema dos Cinco $H^n(A+B,\ A;G) \cong H^n(X,\ A;G)$.

Existe ainda uma identificação natural $S^*(A+B,\ A;G) \cong S^*(B,\ A\cap B;G)$, e consequentemente temos um isomorfismo induzido $H^*(A+B,\ A;G) \cong H^*(B,\ A\cap B;G)$ com $\imath^*$ é o isomorfismo de excisão. ∎

Sequência exata de Mayer-Vietoris Há também uma versão da sequência exata de Mayer-Vietoris para cohomologia singular.

Dado um espaço topológico X, para quaisquer dois subconjuntos A, B de X tal que $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$, pelo Teorema 10.5 que temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow S_p(A\cap B;G) \xrightarrow{\varphi} S_p(A;G)\oplus S_p(B;G) \xrightarrow{\psi} S_p(A;G)+S_p(B;G) \longrightarrow 0$$

para todo $p \geq 0$, onde φ e ψ são dadas por

$$\begin{aligned}
\varphi(c) &= (i_\sharp(c), -j_\sharp(c)) \\
\psi(a,\ b) &= k_\sharp(a) + l_\sharp(b)\ .
\end{aligned}$$

e onde i, j, k, l são as aplicações de inclusão mostradas no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
A\cap B & \xrightarrow{i} & A \\
{\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\
B & \xrightarrow{l} & X.
\end{array}$$

Como $S_p(A;G)\oplus S_p(B;G)$ é livre e porque $S_p(A\cap B;G)$ é um submódulo de $S_p(A;G)$ e $S_p(B;G)$, podemos escolher bases em $S_p(A;G)$ e $S_p(B;G)$ completando uma base de $S_p(A\cap B;G)$ e, como consequência, podemos definir uma aplicação $p : S_p(A;G)\oplus S_p(B;G) \to S_p(A\cap B;G)$, de modo que $p\circ\varphi = \mathrm{id}$. Portanto, a sequência acima cinde e, se aplicarmos $\operatorname{Hom}_R(\bullet, G)$ a ela, pela Proposição 7.3 obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(S_p(A)+S_p(B);G) \xrightarrow{\psi^*} S^p(A)\oplus S^p(B;G) \xrightarrow{\varphi^*} S^p(A\cap B;G) \longrightarrow 0$$

onde $\varphi^* = \mathrm{Hom}(\varphi; G)$ e $\psi^* = \mathrm{Hom}(\psi; G)$. Podemos mostrar que $\psi^* = (i^\sharp,\ j^\sharp)$ e $\varphi^* = k^\sharp - l^\sharp$.

A inclusão $\iota_p : S_p(A) + S_p(B) \to S(X)$ e $\rho_p : S_p(X) \to S_p(A) + S(B)$ são equivalentes por homotopia de cadeias de modo que $\rho \circ \iota$ e $\iota \circ \rho$ são homotópicas de cadeias para id, aplicando $\mathrm{Hom}_R(\bullet, R)$ vemos que também existe uma equivalência por homotopia de cadeias entre $\mathrm{Hom}(S_p(A) + S_p(B); G)$ e $\mathrm{Hom}(S_p(X); G) = S^p(X)$, de modo que a sequência exata longa associada à sequência exata curta leva a Sequência de Mayer Vietoris.

Mayer Vietoris para Cohomologia Singular. Se X é um espaço topológico então para quaisquer dois subconjuntos A, B de X tais que $X = \mathrm{int}\,(A) \cup \mathrm{int}\,(B)$, existe uma longa sequência exata de cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^p(X; G) \xrightarrow{\psi^*} H^p(A; G) \oplus H^p(B; G) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(A \cap B; G) \longrightarrow H^{p+1}(X; G) -$$

Se $A \cap B \neq \emptyset$, existe uma sequência semelhante na cohomologia reduzida.

Vamos dar a descrição de $\delta^{*,p}$. Para isso considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(S_{p+1}(A) + S_{p+1}(B); G) & \xrightarrow{\psi^*} & S^{p+1}(A) \oplus S^{p+1}(B; G) & \xrightarrow{\varphi^*} & S^{p+1}(A \cap B; G) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \quad \exists d(z) & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \quad \exists \delta y & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(S_p(A) + S_p(B); G) & \xrightarrow{\psi^*} & S^p(A) \oplus S^p(B; G) & \xrightarrow{\varphi^*} & S^p(A \cap B; G) - \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \quad \exists y & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \quad \exists z
\end{array}$$

Seja $z \in S^p(A \cap B; G)$ um ciclo. Pela exatidão das linhas, existe $y = (a, b) \in S^p(A; G) \oplus S^p(B; G)$ que é levado para z. Pela comutatividade do diagrama e pelo fato de que $\delta z = 0$, δy vai para 0 em $S^{q+1}(A \cap B; G)$, ou seja, -$\delta(a)$ e $\delta(b)$ concordam em $A \cap B$. Portanto, δy é a imagem de um elemento em $S^{p+1}(X; G)$. Este elemento representa $\delta^{*,p}[z]$. Como anteriormente podemos mostrar que $\delta^{*,p}[z]$ é independente das escolhas nesta construção.

Exemplo 13.4 — Cohomologia de $\mathbb{S}^1$.

Para calcular a cohomologia de $\mathbb{S}^1$ consideraremos a cobertura do círculo por dois arcos abertos A e B como na Figura 13.2. A interseção $A \cap B$ é a união disjunta de dois arcos abertos, que chamamos de C e D, i.e., $A \cap B = C \sqcup D$. Como um arco

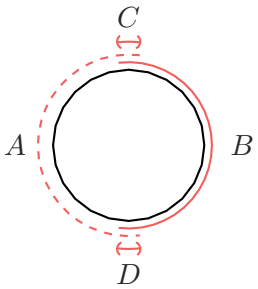


Figura 13.2.: Cobertura aberta de $\mathbb{S}^1$.

aberto é difeomorfo a um intervalo aberto e, portanto, à reta real $\mathbb{R}$, os anéis de cohomologia de A e B são isomorfas a de $\mathbb{R}$, e a cohomologia de $A \cap B$ é isomorfa à da união disjunta $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$.

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}; G) \xrightarrow{\psi^*} H^0(A; G) \oplus H^0(B; G) \xrightarrow{\varphi^*} H^0(\overbrace{A \cap B}^{C \sqcup D}; G) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1; G) \longrightarrow$$

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi^*} R \oplus R \xrightarrow{\varphi^*} R \oplus R \longrightarrow H^1(\mathbb{S}; G) \longrightarrow 0$$

Como $\varphi^*(a, b) = ((a - b)|_C, (a - b)|_D)$ temos que $\operatorname{im} \varphi^* = R(1, 1)$ e que $\ker \varphi^* = R(1, 1)$. Logo

$$H^0(\mathbb{S}^1; R) = \ker \varphi^* \cong R$$
$$H^1(\mathbb{S}^1; R) = R \oplus R/\varphi^* \cong R$$

◁

Equivalência entre a Cohomologia Simplicial e Singular O propósito desta seção é demostrar que as cohomologias singular e simplicial coincidem em Δ-complexos. Denotaremos por $H^{\Delta}(X, A; R)$ a homologia simplicial e por $H^{\mathrm{Sg}}(X, A; R)$ a homologia singular de X.

Nessa seção assumiremos que R é um domínio de ideais principais, pois precisamos da seguinte proposição que será demonstrada posteriormente.

Seja R um domínio de ideais principais. Se uma aplicação de cadeias entre complexos de cadeias de módulos livres induz um isomorfismo nos grupos de homologia, então induz um isomorfismo nos grupos de cohomologia com qualquer módulo de coeficiente G.

Seja X um Δ-complexo e R um domínio de ideais principais. Então, para todo n,

$$H^n(X, A; G) \cong H^n_\Delta(X, A; G).$$

Demonstração. Se X é um Δ complexo e $A \subset X$ é um subcomplexo, então o grupos de cadeias simpliciais $\Delta_n(X, A)$ dualizam para grupos de cocadeias simpliciais $\Delta^n(X, A; G) = \mathrm{Hom}(\Delta_n(X, A), G)$, e os grupos de cohomologia resultantes são, por definição, os grupos de cohomologia simpliciais $H^{\Delta n}(X, A; G)$.

Como as inclusões $\Delta_n(X, A) \subset S_n(X, A)$ induzem isomorfismos $H^\Delta_n(X, A) \cong H_n(X, A)$, a Proposição 13.3 implica que as aplicações duais $S^n(X, A; G) \to \Delta^n(X, A; G)$ também induzem isomorfismos

$$H^n(X, A; G) \cong H^n_\Delta(X, A; G).$$

13.4. Relação entre os Grupos de Homologia e Cohomologia

Em uma seção posterior demonstraremos o Teoremas dos Coeficientes Universais para a Cohomologia que estabelece relações entre grupos de homologia e cohomologia. Nessa seção apresentaremos um de seus corolários que descreve o n-ésimo grupo de cohomologia com coeficientes em um grupo abeliano G em termos do n-ésimo e $(n-1)$-ésimo grupos de homologia e do grupo G

Coeficientes Universais para os Grupos de Cohomologia. Se X é um espaço topológico, A é um subconjunto de X e G é um grupo abeliano então existe uma sequência exata cindida

$$0 \to \mathrm{Ext}^1\left(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G\right) \to H^n(X, A; G) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H_n(X, A), G\right) \to 0.$$

A aplicação α envia a classe de cohomologia do cociclo $\varphi : C_n \to G$ para o homomorfismo $H_n(C) \to G, [c] \mapsto \varphi(c)$.

Dessa forma então existe um isomorfismo relativo cohomologia singular

$$H^n(X, A; G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H_n(X, A; \mathbb{Z}), G\right) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}\left(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G\right)$$

para todo $n \geq 0$.

O funtor Ext será descrito em detalhes posteriormente. Apresentaremos nessa seção apenas um conjunto de propriedades que no caso em que G é um grupo abeliano finitamente gerado, nos permite calcular $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}\left(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G\right)$. É comum descartar o subscrito 1 em $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$.

O funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$ possui as seguintes propriedades na categoria de grupos abelianos:

1. $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}\left(A_1 \oplus A_2, B\right) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}\left(A_1, B\right) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}\left(A_2, B\right)$
2. $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ para um grupo abeliano livre A.
3. $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, B) \cong B/nB$.
4. $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, B) = 0$ para $B = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}$.
5. $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{mmc}(m, n)$.

Exemplo 13.5.

Considere o plano projetivo tridimensional $\mathbb{RP}^3$ com a estrutura de CW-complexo tendo uma célula e^n em cada dimensão para $0 \leq n \leq 3$. O complexo celular associado é

$$0 \to \mathbb{Z}[e^3] \xrightarrow{0} \mathbb{Z}[e^2] \xrightarrow{2} \mathbb{Z}[e^1] \xrightarrow{0} \mathbb{Z}[e^0] \to 0.$$

Portanto, os grupos de homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são:

$$H_n(\mathbb{RP}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{para } n = 3 \\ 0 & \text{para } n > 3. \end{cases}$$

Segue então que

$$G \otimes H_n(\mathbb{RP}) = \begin{cases} G & \text{para } n = 0, n = 3 \\ G/2G & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n = 2, n > 3 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\operatorname{Tor}(G, H_n(\mathbb{RP})) = \begin{cases} {}_2G & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo pelo Teorema dos Coeficientes Universais para a Homologia temos que:

$$H_n(\mathbb{RP}; G) \cong \begin{cases} G & \text{para } n = 0 \\ G/2G & \text{para } n = 1 \\ {}_2G & \text{para } n = 2 \\ G & \text{para } n = 3 \\ 0 & \text{para } n > 3 \end{cases}$$

De forma similar,

$$\operatorname{Hom}(H_n(\mathbb{RP}), G) = \begin{cases} G & \text{para } n = 0, n = 3 \\ {}_2G & \text{para } n = 1, n > 3 \\ 0 & \text{para } n = 2 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$\operatorname{Ext}(H_n(\mathbb{RP}), G) = \begin{cases} G/2G & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo pelo Teorema dos Coeficientes Universais para a Cohomologia temos que:

$$H^n(\mathbb{RP}; G) \cong \begin{cases} G & \text{para } n = 0 \\ {}_2G & \text{para } n = 1 \\ G/2G & \text{para } n = 2 \\ G & \text{para } n = 3 \\ 0 & \text{para } n > 3. \end{cases}$$

Por exemplo, no caso onde os coeficientes são $\mathbb{Z}$ temos que:

$$H^n(\mathbb{RP};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{para } n = 3 \\ 0 & \text{para } n > 3. \end{cases}$$

◁

13.5. Produto Cup e o Anel de Cohomologia

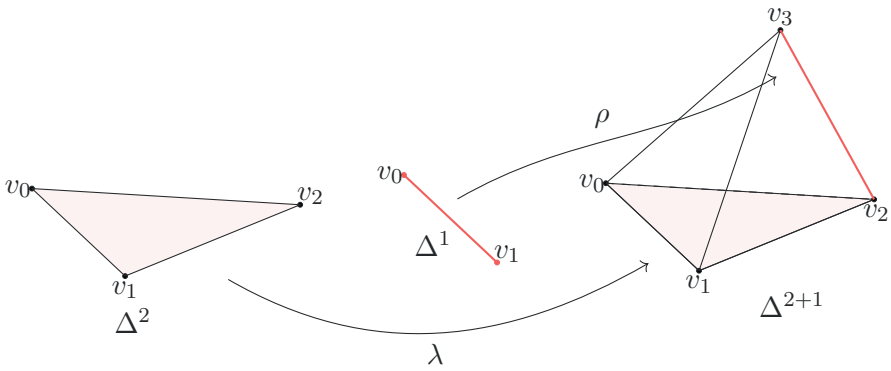
Uma grande diferença entre homologia e cohomologia, além da contravariância da segunda, é que a cohomologia pode ser dotada de um produto "natural", tornando a cohomologia, especificamente $H^*(X;R)$, um anel. Para multiplicar cocadeias, precisaremos multiplicar seus coeficientes, e para isso, precisamos usar um anel para os coeficientes da cohomologia, em vez de apenas um módulo.

Assim, queremos definir uma operação $\smile$ que leva duas cocadeias $c \in S^p(X;R)$ e $d \in S^q(X;R)$ e produz uma cocadeia $c \smile d \in S^{p+q}(X;R)$. Para isso, definimos duas aplicações afins $\lambda_p : \Delta^p \to \Delta^{p+q}$ e $\rho_q : \Delta^q \to \Delta^{p+q}$ por

$$\begin{aligned} \lambda_p(e_i) &= e_i, \qquad 0 \leq i \leq p \\ \rho_q(e_i) &= e_{p+i}, \qquad 0 \leq i \leq q \end{aligned}$$

Para qualquer $(p+q)$-simplexo $\sigma : \Delta^{p+q} \to X$ singular, observe que $\sigma \circ \lambda_p : \Delta^p \to X$ é um p-simplexo singular e $\sigma \circ \rho_q : \Delta^q \to X$ é um q-simplexo singular.

Equivalentemente $\sigma \circ \lambda_p = \sigma|_{[e_0,\dots e_p]}$ e $\sigma \circ \rho_p = \sigma|_{[e_p,\dots e_{p+q}]}$.



Como $S_p(X;R)$ é o R-módulo livre gerado pelo conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ do p-simplexos singulares, toda p-cadeia singular c é completamente determinada por sua restrição a $S_{\Delta^p}(X)$ e, portanto, pode ser vista como uma função de $S(X)_{\Delta^p}$ a R.

Dado $\sigma : \Delta^{p+q} \to X$ um simplexo singular, denominamos $\sigma \circ \lambda_p$ de p-face da frente de σ, e $\sigma \circ \rho_q$ de q-face de trás σ.

Dadas quaisquer duas cocadeias $c \in S^p(X;R)$ e $d \in S^q(X;R)$, seu produto cup $c \smile d \in S^{p+q}(X;R)$ é a cocadeia definida por

$$(c \smile d)(\sigma) = c(\sigma \circ \lambda_p) d(\sigma \circ \rho_q)$$

para todos os simplexos singulares $\sigma \in S_{\Delta^{p+q}}(X)$. Logo o produto cup é uma função

$$\smile : S^p(X;R) \times S^q(X;R) \to S^{p+q}(X;R).$$

Outra forma de expressar o produto cup é

$$(c \smile d)(\sigma) = c\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,v_p]}\right) d\left(\sigma|_{[v_p,\cdots,v_{p+q}]}\right)$$

Ressaltamos que esse produto depende fortemente da ordenação dos vértices do simplexo e consequentemente não é natural. Também observamos que que o produto cup possui fortes semelhanças com o produto cunha da álgebra exterior.

Lembre-se de que $S^*(X;R)$ é o R-módulo $\oplus_{p\geq 0} S^p(X;R)$, e que $\epsilon : S_0(X;R) \to R$ é o único homomorfismo tal que $\epsilon(x) = 1$ para todo ponto $x \in S_0(X;R)$. Assim, $\epsilon \in S^0(X;R)$ e uma vez que $\partial^0 \epsilon = \epsilon \partial_1 = 0$, a cocadeia ϵ é na verdade um ciclo e sua classe de cohomologia $[\epsilon] \in H^0(X;R)$ é denotada por 1.

A seguinte proposição é imediata a partir da definição do produto cup e será deixada como exercício.

A operação do produto cup $\smile$ em $S^*(X;R)$ é bilinear, associativa e tem o ciclo ϵ como elemento identidade. Assim, $S^*(X;R)$ é um anel graduado associativo com elemento identidade.

A seguinte propriedade implica que o produto cup é bem definido em ciclos.

Para quaisquer duas cocadeias $c \in S^p(X;R)$ e $d \in S^q(X;R)$ temos

$$\delta(c \smile d) = (\delta c) \smile d + (-1)^p c \smile (\delta d) \ .$$

Demonstração. Seja $\sigma : \triangle^{p+q+1} \to X$, então temos que

$$(\delta c \cup d)(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^j c(\sigma|_{[v_0,\, \cdots, \hat{v}_i, \cdots,\, v_{p+1}]}) d(\sigma|_{[v_{p+1},\, \cdots,\, v_{p+q+1}]})$$

$$(-1)^p (c \cup \delta d)(\sigma) = \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i c(\sigma|_{[v_0,\, \cdots,\, v_p]}) d(\sigma|_{[v_p,\, \cdots, \hat{v}_i, \cdots,\, v_{p+q+1}]})$$

Somando as duas expressões temos que o último termo da primeira soma cancela o primeiro termo da segunda soma, e os termos restantes são exatamente $\delta(c \cup d)(\sigma) = (c \cup d)(\partial\sigma)$ pois

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0,\, \cdots\, ,\, \hat{v}_i,\, \cdots\, ,\, v_{p+q+1}]}.$$

■

A fórmula da Proposição 13.5 implica que o produto cup de ciclos é um ciclo, e que o produto cup de um ciclo com um de cobordo em qualquer ordem é um de cobordo, assim que nós obtemos um produto cup induzido nas classes de cohomologia.

$$\smile : H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R) \ .$$

O produto cup é bilinear, associativo e possui elemento identidade.

Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo na cohomologia $f^{p*} : H^p(X;R) \to H^p(y;R)$ para al $p \geq 0$, e o produto cup se comporta bem em relação a esse homomorfismo.

Dada $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, para todos os $\omega \in H^p(X; R)$ e todos os $\eta \in H^q(X; R)$, temos

$$f^{(p+q)*}(\omega \smile x\eta) = f^{p*}(\omega) \smile f^{q*}(\eta) \, .$$

Assim, $f^* = (f^{p*})_{p\geq 0}$ é um homomorfismo entre os anéis graduados $H^*(X; R)$ (com o produto cup $\to x$) e $H^*(Y; R)$ (com o produto cup $\smile$ em Y).

Dado um espaço topológico X, seu anel de cohomologia $H^*(X; R)$ é o anel graduado $\oplus_{p\geq 0} H^p(X; R)$ equipado com a operação de multiplicação $\smile$ induzida pelas operações $\smile$: $H^p(X; R) \times H^q(X; R) \to H^{p+q}(X; R)$ para todos $p, q \geq 0$. Um elemento $\omega \in H^p(X; R)$ é dito ser de grau (ou dimensão) p, e escrevemos $p = \deg(\omega)$.

Embora o produto cup não seja comutativo em geral, é anti-comutativo no seguinte sentido.

Para todos os $\omega \in H^p(X; R)$ e todos os $\eta \in H^q(X; R)$, temos

$$\omega \smile \eta = (-1)^{pq}(\eta \smile \omega) \, .$$

Exemplo 13.6 — Anel de Cohomologia da Esfera.

Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera n-dimensional. Então

$$H^*(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$$

Nesse caso os únicos grupos de cohomologia diferentes de zero são $H^0(\mathbb{S}^n)$ e $H^n(\mathbb{S}^n)$, que têm geradores e e ω, respectivamente, e e atua como identidade do anel de cohomologia. Assim, $e \smile \omega = \omega \smile e = \omega$ e $e \smile e = e$. O único outro produto possível seria $\omega \smile \omega$. Esse produto, no entanto, teria dimensão $2n$, então é automaticamente zero, $\omega \smile \omega = 0$.

◁

Os anéis de cohomologia dos espaços projetivos reais e complexos são dados por:

1. $H^* \left(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2\right) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha] / \left(\alpha^{n+1}\right)$ onde α é o gerador de $H^1 \left(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2\right)$.
2. $H^* \left(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2\right) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]$ onde α é o gerador de $H^1 \left(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2\right)$.
3. $H^* \left(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[\beta] / \left(\beta^{n+1}\right)$ onde β é o gerador de $H^2 \left(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}\right)$.

4. $H^*\left(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[\beta]$ onde β é o gerador de $H^2\left(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}\right)$.

13.6. Anéis de Cohomologia de Superfícies

Observamos que não existe um método geral para calcular o anel de cohomologia de um espaço X.

Nessa seção apresentamos alguns exemplos e estratégias para o cálculo dos produtos cup, e para isso recorremos à cohomologia simplicial. Nesta seção, definimos uma fórmula de produto cup simplicial que corresponde à fórmula anterior para cocadeias singulares sob o isomorfismo padrão entre as teorias de cohomologia simplicial e singular.

Anel de Cohomologia do Toro Vamos calcular o anel de cohomologia do toro $\mathbb{T}$. Lembramos que uma estrutura de Δ-complexo para o toro é apresentada na Figura 13.3

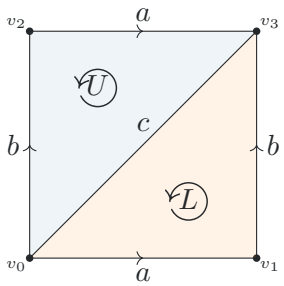


Figura 13.3.: Uma estrutura de Δ-complexo no Toro.

Também lembramos que

$$H_n(\mathbb{T}; R) = H^n(\mathbb{T}; R) \cong \begin{cases} R, & n = 2 \text{ ou } n = 0 \\ R \oplus R \text{ se } n = 1 & \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{13.6}$$

Considere os simplexos singulares

$$[v_0, v_1, v_3], \quad [v_0, v_2, v_3], \quad [v_0, v_1], \quad [v_0, v_2], \quad [v_0, v_3], \quad [v_0]$$

na quadrado. Suas imagens no toro são indicadas pelos mesmos símbolos. Denotaremos por

$$[v_0, v_1, v_3]^*, \quad [v_0, v_2, v_3]^*, \quad [v_0, v_1]^*, \quad [v_0, v_2]^*, \quad [v_0, v_3]^*, \quad [v_0]^*$$

os cocadeias correspondentes. Assim, o anel de cohomologia do toro pode ser calculado encontrando os produtos desses cocadeias.

Começamos com os casos fáceis. O elemento $[v_0]^*$ é a identidade. Também temos que o produto de 1-cocadeia e um 2-cocadeias $[v_\bullet, v_\bullet]^* \cup [v_\bullet, v_\bullet, v_\bullet]^* = 0$ pois seria uma 3-cocadeia e que os produtos de dois 2-cocadeias $[v_\bullet, v_\bullet, v_\bullet]^* \cup [v_\bullet, v_\bullet, v_\bullet]^* = 0$ pois seria uma 4-cocadeia. Assim, os únicos produtos diferentes de zero são produtos de 1 cocadeias. Considere então um produto $[v_i, v_j]^* \smile [v_h, v_k]^*$, cuja operação é avaliada em $[v_0, v_1, v_3]$ e $[v_0, v_2, v_3]$, pode ser facilmente verificado que o resultado será diferente de zero se, e somente se, $i = 0, j = h = 1, k = 3$ ou $i = 0, j = h = 2, k = 3$. Nesses casos,

$$[v_0, v_1]^* \smile [v_1, v_3]^* = [v_0, v_1, v_3]^* = [v_0, v_1]^* \smile [v_0, v_2]^* \tag{13.7}$$

$$[v_0, v_2]^* \smile [v_2, v_3]^* = [v_0, v_2, v_3]^* = [v_0, v_2]^* \smile [v_0, v_1]^* \tag{13.8}$$

A última entrada em cada linha leva em consideração a identificação de lados opostos do quadrado. Todos os outros produtos são zero.

É fácil verificar as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\delta[v_0, v_1]^* &= [v_0, v_1, v_3]^* + [v_0, v_2, v_3]^* \\
\delta[v_0, v_2]^* &= [v_0, v_1, v_3]^* + [v_0, v_2, v_3]^* \\
\delta[v_0, v_3]^* &= -[v_0, v_1, v_3]^* - [v_0, v_2, v_3]^*
\end{aligned}$$

Decorre então que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= [v_0, v_1]^* + [v_0, v_3]^* \\
\beta &= [v_0, v_2]^* + [v_0, v_3]^*
\end{aligned}$$

são 1-ciclos e que todo 1-ciclo de $\mathbb{T}$ é combinação linear destes. As fórmulas 13.7

implicam que

$$\alpha \smile \alpha = 0$$
$$\beta \smile \beta = 0$$
$$\alpha \smile \beta = [v_0, v_1, v_3]^*$$
$$\beta \smile \alpha = [v_0, v_2, v_3]^*$$

Finalmente, $[v_0, v_1, v_3]^*$ e $[v_0, v_2, v_3]^*$ são ambos cociclos, já que não há 3 células, e a soma destes é um cobordo.

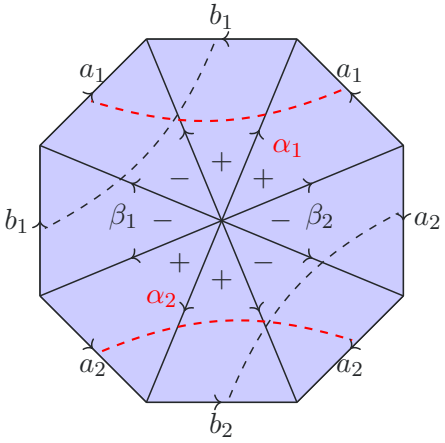
Portanto $H^*(\mathbb{T})$ é gerado pelos elementos 1, a classe de $[v_0]^*$, $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$, as classes de α, β, e $\overline{\gamma}$, a classe de cohomologia de $[v_0, v_1, v_3]^*$ e as fórmulas dos produtos tornam-se

$$\overline{\alpha} \smile \overline{\alpha} = \overline{\beta} \smile \overline{\beta} = 0$$
$$\overline{\alpha} \smile \overline{\beta} = -\overline{\beta} \smile \overline{\alpha} = \overline{\gamma}$$

Isso completa o cálculo do anel $H^*(\mathbb{T}) = H^*(\mathbb{T})$.

Exemplo 13.7.

Seja M a superfície orientável fechada do gênero $g \geq 1$ com a estrutura de Δ-complexo apresentada na figura abaixo para o caso $g = 2$.



O único produto cup interessante é $H^1(M) \times H^1(M) \to H^2(M)$. Uma base para os grupos de homologia $H_1(M)$ é formada pelas arestas a_i e b_i, como calculado no Exemplo 12.11. Usando a decomposição celular é fácil ver que

$H^1(M) \cong \mathrm{Hom}\,(H_1(M), \mathbb{Z})$. Uma base para $H_1(M)$ determina uma base dual para $\mathrm{Hom}\,(H_1(M), \mathbb{Z})$, então o elemento dual para a_i é a classe de cohomologia α_i atribuindo o valor 1 a a_i e 0 aos demais elementos da base, e da mesma forma temos as classes de cohomologia β_i dual a b_i.

Para representar α_i por um cociclo simplicial φ_i precisamos escolher valores para φ_i nas arestas irradiando do vértice central de tal forma que

$$\delta\varphi_i = 0.$$

Considere a curva α_i na figura, que representa um loop em M encontrando a aresta a_i em um ponto e que não intercepta os outros elementos de base a_j e b_j. De maneira análoga definimos a curva β_i. Então, definimos φ_i para ter o valor 1 nas arestas que encontram a curva α_i e o valor 0 em todas as outras arestas. Assim φ_i conta o número de interseções de cada aresta com a curva α_i. De maneira semelhante, obtemos um cociclo ψ_i contando as interseções com a curva β_i.

Podemos calcular os produtos cup diretamente da definição. Tendo em mente que a ordenação dos vértices de cada 2-simplexo é compatível com as orientações indicadas de suas arestas, vemos por exemplo que $\varphi_1 \smile \psi_1$ assume o valor 0 em todos os 2-simplexos exceto aquele com aresta externa b_1 na parte inferior direita da figura, onde assume o valor 1. Assim $\varphi_1 \smile \psi_1$ assume o valor 1 na 2-cadeia c formada pela soma de todos os 2-simplexos com os sinais indicados no centro da figura. É imediato que $\partial c = 0$. Como não há 3-simplexos, c não é um bordo, então representa um elemento diferente de zero de $H_2(M)$. O fato de $(\varphi_1 \smile \psi_1)(c)$ ser um gerador de $\mathbb{Z}$ implica que c representa um gerador de $H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ e que $\varphi_1 \smile \psi_1$ representa o gerador dual γ de $H^2(M) \cong \mathrm{Hom}\,(H_2(M), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Assim $\alpha_1 \smile \beta_1 = \gamma$ e logo:

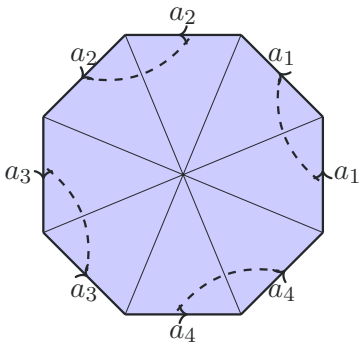
$$\alpha_i \smile \beta_j = -(\beta_i \smile \alpha_j) = \begin{cases} \gamma, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \alpha_i \smile \alpha_j = 0, \quad \beta_i \smile \beta_j = 0$$

Como produto cup é distributivo essas relações determinam o produto cup $H^1(M) \times H^1(M) \to H^2(M)$ completamente.

◁

Exemplo 13.8.

A superfície não orientável fechada P do gênero g pode ser tratada de maneira similar se usarmos coeficientes $\mathbb{Z}_2$. Para isso considere a estrutura de Δ-complexo apresentada na figura, então as arestas a_i fornecem uma base para $H_1(P;\mathbb{Z}_2)$, para maiores detalhes veja o exemplo 12.12.



Novamente temos que os elementos da base dual $\alpha_i \in H^1(P;\mathbb{Z}_2)$ podem ser representados por cociclos cujos valores são dados pela contagem de interseções com as curvas α_i conforme apresentado na figura. Logo temos que $\alpha_i \smile \alpha_i$ é o gerador de $H^2(P;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ e $\alpha_i \smile \alpha_j = 0$ por $i \neq j$.

◁

13.7. Fórmula de Künneth

Sejam X e Y espaços topológicos e denote por p e q as projeções $p : X \times Y \longrightarrow X$ e $q : X \times Y \longrightarrow Y$. Usando as aplicações de cohomologia induzidas por essas projeções, temos uma aplicação induzida denotado por $\times$:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(X;R) & \times & H^*(Y;R) & \xrightarrow{\times} & H^*(X\times Y;R) \\ a & & b & \mapsto & a\times b := p^*(a)\smile q^*(b) \end{array}$$

Todos os grupos de cohomologia $H^i(X;R)$ e $H^i(Y;R)$ possuem uma estrutura de R-módulo, e portanto, os anéis de cohomologia correspondentes $H^*(X;R)$ e $H^*(Y;R)$. Como a aplicação $\times$ é bilinear, a propriedade universal para produtos

tensoriais produz um homomorfismo, que denotamos por $\mu_\times$:

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y;R)$$

Assim, por definição, temos que:

$$\mu_\times(a \otimes b) \coloneqq a \times b$$

Vamos colocar uma estrutura de anel em $H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R)$ pela seguinte operação de multiplicação:

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) \coloneqq (-1)^{\deg(b)\cdot\deg(c)}(a \cdot c \otimes b \cdot d),$$

onde $a \cdot c$ denota a operação em $H^*(X;R)$, geralmente o produto cup ou um produto isomorfo.

Assim, o produto cruzado torna-se um isomorfismo de anel pois:

$$\begin{aligned}
\mu_\times((a \otimes b) \cdot (c \otimes d)) &= (-1)^{\deg(b)\cdot\deg(c)}(ac \times bd) \\
&= (-1)^{(\deg b)\cdot\deg(c)} p^*(a \smile c) \smile q^*(b \smile d) \\
&= (-1)^{\deg(b)\cdot\deg(c)} p^*(a) \smile p^*(c) \smile q^*(b) \smile q^*(d) \\
&= p^*(a) \smile q^*(b) \smile p^*(c) \smile q^*(d) \\
&= \mu_\times(a \otimes b) \smile \mu_\times(c \otimes d)
\end{aligned}$$

Fórmula de Künneth. Sejam X e Y CW-complexos e suponha que $H^k(Y;R)$ é um R-módulo livre finitamente gerado para todo k, então o produto cruzado

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y;R)$$

é um isomorfismo de anel. Além disso, temos o seguinte isomorfismo de grupos:

$$H^n(X \times Y;R) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^i(X;R) \otimes_R H^j(Y;R).$$

Em uma seção posterior, demonstraremos uma generalização desse resultado. No que segue, apresentaremos alguns exemplos da utilização da Fórmula de Künneth na determinação dos anéis de cohomologia de alguns espaços.

	Espaço		
	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
H^0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$H^0(\mathbb{S}^1) \otimes H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
H^1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$(H^0(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) \oplus (H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^0(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
H^2			$H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

Tabela 13.1.: Determinação da cohomologia do toro bidimensional usando a Fórmula de Künneth

	Espaço		
	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$
H^0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$H^0(\mathbb{T}^2) \otimes H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
H^1	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$(H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^0(\mathbb{S}^1)) \oplus (H^0(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
H^2	$\mathbb{Z}$		$(H^2(\mathbb{T}^2) \otimes H^0(\mathbb{S}^1)) \oplus (H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
H^3			$H^2(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

Tabela 13.2.: Determinação da cohomologia do toro tridimensional usando a Fórmula de Künneth

Para simplificar as notações, fazemos a seguinte definição.

Álgebra Exterior. Seja R um anel comutativo com unidade. A álgebra exterior sobre R, denotada $\Lambda_R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$, é o R-módulo livre gerado por produtos da forma:

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k'}} \text{ com } i_1 < i_2 < \cdots < i_{k'}$$

e com multiplicação associativa e distributiva satisfazendo:

$$\alpha_i\alpha_j = -\alpha_j\alpha_i, \text{ se } i \neq j$$
$$\alpha_i^2 = 0.$$

Na definição anterior, estamos convencionando que produto vazio de α_i's é o elemento identidade $1 \in \Lambda_R[\alpha_1, \alpha_2, \ldots]$.

Exemplo 13.9.

Vamos agora mostrar que

$$H^*\left(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7; \mathbb{Z}\right) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[a_3, a_5, a_7],$$

onde a_i é um gerador de grau i em $H^*\left(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7, \mathbb{Z}\right)$, para $i = 3, 5, 7$.

Pela Fórmula de Künneth aplicada ao CW-complexo produto $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7$, temos o seguinte isomorfismo de anéis:

$$H^*\left(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7; \mathbb{Z}\right) \cong H^*\left(\mathbb{S}^3; \mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*\left(\mathbb{S}^5; \mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*\left(\mathbb{S}^7; \mathbb{Z}\right).$$

Seja α_i um gerador de grau i em $H^*\left(\mathbb{S}^i; \mathbb{Z}\right)$ para $i = 3, 5, 7$. Então os geradores de grau 3, 5 e 7 em $H^*\left(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7; \mathbb{Z}\right)$ são dados respectivamente por:

- $a_3 = \mu_\times(\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1)$
- $a_5 = \mu_\times(1 \otimes \alpha_5 \otimes 1)$
- $a_7 = \mu_\times(1 \otimes 1 \otimes \alpha_7)$

O produto desses geradores produz geradores de dimensões superiores, ou seja, $8, 10, 12$ e 15, no anel de cohomologia $H^*\left(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7; \mathbb{Z}\right)$. Vamos calcular alguns produtos dos elementos:

$$\begin{aligned} a_3^2 = &\mu_\times(\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1) \smile \mu_\times(\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1) \\ = &\mu_\times[(\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1) \cdot \mu_\times(\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1)] \\ = &\mu_\times\left(\alpha_3^2 \otimes 1 \otimes 1\right) \\ = &0 \end{aligned}$$

e um resultado semelhante para a_5^2 e a_7^2:

$$\begin{aligned}
a_3a_5 =& \mu_\times (\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1) \smile \mu_\times (1 \otimes \alpha_5 \otimes 1) \\
=& \mu_\times [(\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \alpha_5 \otimes 1)] \\
=& \mu_\times [((\alpha_3 \otimes 1) \otimes 1) \cdot ((1 \otimes \alpha_5) \otimes 1)] \\
=& \mu_\times [((\alpha_3 \otimes 1) \cdot (1 \otimes \alpha_5)) \otimes (1 \cdot 1)] \\
=& \mu_\times (\alpha_3 \otimes \alpha_5 \otimes 1) \\
a_5a_3 =& \mu_\times (1 \otimes \alpha_5 \otimes 1) \smile \mu_\times (\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1) \\
=& \mu_\times [(1 \otimes \alpha_5 \otimes 1) \cdot (\alpha_3 \otimes 1 \otimes 1)] \\
=& \mu_\times [((1 \otimes \alpha_5) \otimes 1) \cdot ((\alpha_3 \otimes 1) \otimes 1)] \\
=& \mu_\times [((1 \otimes \alpha_5) \cdot (\alpha_3 \otimes 1)) \otimes (1 \cdot 1)] \\
=& -\mu_\times (\alpha_3 \otimes \alpha_5 \otimes 1) \\
=& -a_3a_5.
\end{aligned}$$

Também temos resultados semelhantes para os outros produtos. Os cálculos acima mostram que temos um isomorfismo $H^*\left(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7; \mathbb{Z}\right) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[a_3, a_5, a_7]$.

◁

É fácil ver que um resultado semelhante vale para o anel de cohomologia de qualquer produto (finito) de esferas de dimensão ímpar.

Se as dimensões k_i são todas ímpares então

$$H^*\left(\mathbb{S}^{k_1} \times \mathbb{S}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{S}^{k_n}; \mathbb{Z}\right) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots a_{k_n}].$$

Exemplo 13.10.

Vamos determinar o anel de cohomologia de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$. Pela Fórmula de Künneth, temos o seguinte isomorfismo de anéis:

$$H^*\left(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3; \mathbb{Z}\right) \cong H^*\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*\left(\mathbb{S}^3; \mathbb{Z}\right).$$

Se deixarmos $a \in H^*\left(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}\right)$ denotar o elemento de grau 2 que gera $H^2\left(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}\right)$ e $b \in H^*\left(\mathbb{S}^3, \mathbb{Z}\right)$ o elemento de grau 3 que gera $H^3\left(\mathbb{S}^3, \mathbb{Z}\right)$, então $\mu_\times(a \otimes 1)$

e $\mu_\times(1 \otimes b)$ (onde 1 denota a identidade no respectivos anéis de cohomologia) serão os geradores em $H^*\left(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3, \mathbb{Z}\right)$ de grau 2 e 3, respectivamente. Além disso, $\mu_\times(a \otimes 1) \smile \mu_\times(1 \otimes b) = \mu_\times(a \otimes b)$ será um gerador de grau 5 em $H^*\left(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3, \mathbb{Z}\right)$.

Assim, pela Fórmula de Künneth, o anel de cohomologia $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ é $\Lambda[\alpha] \otimes \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^2)$, onde as dimensões de α e β são 3 e 2, respectivamente. Como a multiplicação do produto cup satisfaz $\alpha \smile \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta \smile \alpha$ e, como o grau de β é par, isso significa que α e β comutam, o que não acontecia no caso de graus ímpares.

◁

Exemplo 13.11.

Pela Fórmula de Künneth, temos o seguinte isomorfismo de anéis:

$$\begin{aligned} H^*\left(\mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2\right) &\cong H^*\left(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2\right) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^*\left(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2\right) \\ &= \mathbb{Z}_2[\alpha] \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2[\beta] \\ &\cong \mathbb{Z}_2[\alpha, \beta], \end{aligned}$$

onde α e β são geradores de grau 1 , e comutam já que trabalhamos com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

◁

Exemplo 13.12.

Considere os espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5$. Ambos os espaços são CW-complexos com células $\left\{e^0, e^2, e^3, e^5\right\}$ em dimensões, $0, 2, 3$ e 5, respectivamente. Assim, ambos os espaços possuem os mesmos grupos de homologia e cohomologia. Então é natural perguntar se os espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5$ são homotopicamente equivalentes.

Mostraremos que não. Mais precisamente, mostraremos que os dois espaços possuem anéis de cohomologia diferentes. Para calcular os anéis de cohomologia desses espaços introduziremos a Fórmula de Künneth.

Vamos mostrar que os espaços $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5$ não são homotopicamente equivalentes.

- No Exemplo 13.10 determinamos o anel de cohomologia de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ como sendo $\Lambda[\alpha] \otimes \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^2)$ com α e β comutando.
- O anel de cohomologia $H^*\left(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5; \mathbb{Z}\right)$ pode ser calculado a partir do isomorfismo do anel

$$\widetilde{H}^*\left(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5; \mathbb{Z}\right) \cong \widetilde{H}^*\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z}\right) \oplus \widetilde{H}^*\left(\mathbb{S}^3; \mathbb{Z}\right) \oplus \widetilde{H}^*\left(\mathbb{S}^5; \mathbb{Z}\right),$$

com $H^*\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/\left(\alpha^2\right), H^*\left(\mathbb{S}^3; \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}[\beta]/\left(\beta^2\right)$ e $H^*\left(\mathbb{S}^5; \mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}[\gamma]/\left(\gamma^2\right)$, onde α é o gerador de $H^2\left(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z}\right)$, β é o gerador de $H^3\left(\mathbb{S}^3; \mathbb{Z}\right)$ e γ é o gerador de $H^5\left(\mathbb{S}^5; \mathbb{Z}\right)$. Além disso, temos que $\alpha \smile \beta = 0$.

  De fato, considere

$$p : \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5 \to \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3$$

  a aplicação de retração natural. Usando 175 temos que p^* induz isomorfismos em os grupos de cohomologia H^2 e H^3 desses espaços. Portanto, se $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ são os geradores de $H^2\left(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3\right)$ e $H^3\left(\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^3\right)$, respectivamente, então $\alpha = p^*\overline{\alpha}$ e $\beta = p^*\overline{\beta}$. Logo

$$\alpha \smile \beta = p^*\overline{\alpha} \smile p^*\overline{\beta} = p^*(\overline{\alpha} \smile \overline{\beta}) = 0,$$

  pois $\overline{\alpha} \smile \overline{\beta} = 0$.

◁

Exemplo 13.13.

Vamos utilizar a Fórmula de Künneth para mostrar que $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$ não é uma retração de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$, para $n, m \geq 1$. Primeiro, considere a estrutura de CW-complexo produto em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$: consiste em células $\left\{e^0, e^m, e^n, e^{m+n}\right\}$ com aplicações de colagem $\phi : \partial e^m \to e^0$ e $\phi' : \partial e^n \to e^0$ vindo dos fatores. Portanto $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$ é um subconjunto de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$. (Observe que também permitimos o caso $n = m$.) Em seguida, suponha por contradição que haja uma retração

$$r : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$$

Então, se $i : \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ denota a inclusão, então a composição $r \circ i$ é a aplicação identidade em $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$. E assim, a aplicação de cohomologia $(r \circ i)^* =$

$i^* \circ r^*$ é a identidade, então

$$r^* : H^* (\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m) \longrightarrow H^* (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$$

é um homorfismo injetor. Pela Fórmula de Künneth, temos um isomorfismo de anéis

$$H^* (\mathbb{S}^n) \otimes H^* (\mathbb{S}^m) \overset{\times}{\cong} H^* (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$$

Portanto, um elemento diferente de zero em $H^n (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$ tem a forma $a \times 1 \coloneqq \mu_\times(a \otimes 1)$, com $a \in H^n (\mathbb{S}^n)$ uma classe diferente de zero. Da mesma forma, um elemento diferente de zero em $H^m (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$ tem a forma $1 \times b \coloneqq \mu_\times(1 \otimes b)$, para alguma classe diferente de zero $b \in H^m (\mathbb{S}^m)$. Vamos agora considerar o produto de elementos diferentes de zero $a \times 1 \in H^n (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$ e $1 \times b \in H^m (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$ no anel $H^* (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$. E assim temos:

$$\begin{aligned}(a \times 1) \smile (1 \times b) &= \mu_\times(a \otimes 1) \smile \mu_\times(1 \otimes b) \\ &= \mu_\times[(a \otimes 1) \cdot (1 \otimes b)] \\ &= \mu_\times(a \otimes b) \\ &= a \times b \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

pois $a \otimes b \neq 0$ in $H^* (\mathbb{S}^n) \otimes H^* (\mathbb{S}^m)$. Temos também um isomorfismo de anéis

$$\widetilde{H}^* (\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m) \cong \widetilde{H}^* (\mathbb{S}^n) \oplus \widetilde{H}^* (\mathbb{S}^m)$$

Sejam $\alpha, \beta \in H^* (\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m)$ os geradores de grau n e m, respectivamente. Então

$$\alpha \smile \beta \in H^{n+m} (\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m) \cong 0$$

m Por outro lado, como r^* é um homorfismo injetor, as classes $r^*(\alpha)$ e $r^*(\beta)$ são elementos não nulos de grau n e, respectivamente, m no anel de cohomologia $H^* (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)$, então pelo cálculo acima, seu produto não é zero. Mas

$$r^*(\alpha) \smile r^*(\beta) = r^*(\alpha \smile \beta) = r^*(0) = 0,$$

o que nos fornece uma contradição.

◁

13.8. Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Uma teoria de cohomologia H na categoria $\mathbf{PTop}$ é:

- uma sequência de funtores contravariantes $h^n : \mathbf{PTop} \to {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e
- uma sequência de transformações naturais $\delta : h^{n-1}(A, \varnothing) \to h^n(X, A)$

que satisfazem:

A1-Sequência exata longa Para qualquer par (X, A), a sequência

$$\cdots \leftarrow h^{q+1}(X, A) \xleftarrow{\partial} h^q(A) \leftarrow h^q(X) \leftarrow h^q(X, A) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

é exata, onde escrevemos $h^q(X)$ para $h^q(X, \varnothing)$.

A2-Axioma da dimensão O grupo $h^n(*)$ é diferente de zero apenas para $n = 0$.

A3-Invariância homotópica Se $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas, então $f^{0*} = f^{1*} : h^n(Y, B) \to h^n(X, A)$.

A4-Excisão Excisões induzem isomorfismos.

A5-Aditividade Seja $\coprod X_i$ a união disjunta de X_i. As aplicações de inclusão $X_i \to \coprod X_i$ induzem o seguinte isomorfismo

$$\prod_{i \in I} h^n\left(X_i\right) \cong h^n\left(\coprod_{i \in I} X_i\right).$$

Os grupos $h^n(*)$ são denominados coeficientes da teoria de homologia.

Unicidade da Cohomologia Singular. Existe essencialmente apenas uma teoria de cohomologia, com um grupo de coeficientes dado, na subcategoria $\mathbf{CW} \subset \mathbf{PTop}$ que satisfaz os axiomas acima. Em outras palavras, se H, H' são duas teorias de cohomologia com o mesmo grupo de coeficientes que satisfazem os axiomas os grupos $H^n(X, A)$ e $H'^n(X, A)$ são isomorfos para $(X, A) \in \mathbf{CW}$.

Exercícios

Ex. 168 — Prove que $\delta \circ \delta = 0$.

Ex. 169 — Calcule a cohomologia dos espaços $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{RP}^2$ e a garrafa de Klein primeiro com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e depois com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

Ex. 170 — Seja X um grafo regular finito. Expresse a estrutura dos grupos de cohomologia $H^n(X, R)$ em termos da característica de Euler e número de componentes de X.

Ex. 171 — Descreva a estrutura dos grupos de cohomologia de $H^q\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}; R\right)$ para todo q, n.

Ex. 172 — Para um espaço topológico X, seja

$$\langle \quad , \quad \rangle : C^n(X) \otimes C_n(X) \to \mathbb{Z}$$

o pareamento de Kronecker dado por $\langle \phi, \sigma \rangle \coloneqq \phi(\sigma)$. Em termos desse emparelhamento, a aplicação de cobordo $\delta : C^n(X) \to C^{n+1}(X)$ é definida por $\langle \delta(\phi), \sigma \rangle = \langle \phi, \partial\sigma \rangle$ para todo $\sigma \in C_{n+1}(X)$. Mostre que esse pareamento induz um pareamento entre cohomologia e homologia:

$$\langle \quad , \quad \rangle : H^n(X; \mathbb{Z}) \otimes H_n(X; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

Ex. 173 — Use a sequência de Mayer-Vietoris para calcular os grupos de cohomologia $H^k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z})$.

Ex. 174 — Use a sequência de Mayer-Vietoris para calcular os grupos de cohomologia $H^k(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$.

Ex. 175 — Mostre que se A é uma retração de X então a aplicação $H^n(X) \to H^n(A)$ induzida pela inclusão $A \subset X$ é sobrejetora. Compare com o Exercício 130.

Ex. 176 — Esse exercício mostra que alguns resultados e técnicas de homologia se generalizam para a cohomologia.

1. Calcule $H^i\left(\mathbb{S}^n; G\right)$ por indução em n de duas maneiras: usando a sequência exata longa de um par e usando a sequência de Mayer-Vietoris.
2. Mostre que se A é um subespaço fechado de X que é um retrato por deformação de alguma vizinhança, então a aplicação quociente $X \to X/A$ induz isomorfismos $H^n(X, A; G) \approx \tilde{H}^n(X/A; G)$ para todo n.

3. Mostre que se A é uma retração de X então $H^n(X;G) \approx H^n(A;G) \oplus H^n(X,A;G)$.

Ex. 177 — Prove que o do produto cup $\smile$ em $S^*(X;R)$ é bilinear, associativo e tem o ciclo ϵ como elemento identidade.

Ex. 178 —

1. Calcule os grupos de cohomologia do n-toro:

$$\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ vezes}}.$$

2. Descreva concretamente o anel de cohomologia de $\mathbb{T}^3$

Ex. 179 — Mostre que se as dimensões k_i são todas ímpares então

$$H^*\left(\mathbb{S}^{k_1} \times \mathbb{S}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{S}^{k_n}, \mathbb{Z}\right) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}\left[a_1, a_2, \ldots a_n\right]$$

Ex. 180 —

1. Mostre que $H^*(\bigsqcup_\alpha X_\alpha; R) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha H^*(X_\alpha; R)$.
2. Descreva o anel de cohomologia de $H^*(\bigsqcup_{i=1}^n X_i; R)$.

Ex. 181 —

1. Mostre que os espaços $\mathbb{CP}^3$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ não são homotopicamente equivalentes.
2. Mostre que os espaços $\mathbb{CP}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \cdots \times \mathbb{S}^{2n}$ não são homotopicamente equivalentes para todo $n > 1$.

14 Dualidade de Poincaré

Neste capítulo vamos demonstrar alguns resultados sobre a homologia e cohomologia de variedades.

Os grupos de homologia singulares de um complexo celular se anulam para dimensões superiores a dimensão do complexo celular. O mesmo vale para uma variedade. A demonstração desse fato depende das seguintes observações: localmente uma variedade se parece com um espaço euclidiano e a sequência de Mayer-Vietoris pode ser usadas para colar informações locais. Essa será a técnica que usaremos para demonstrar esse fato e Teorema da Dualidade de Poincaré. Os grupos de homologia n dimensionais de uma variedade n-dimensional M também possuem propriedades especiais. Eles podem ser usados para definir e construir orientações homológicas de uma variedade. Uma orientação local é um gerador do grupo de homologia local $H_n(M \mid \{x\}; R)$. No caso de uma variedade conexa compacta fechada podemos compatibilizar as escolhas locais e definir uma orientação homológica global, como uma classe fundamental em $H_n(M; R)$ e mostraremos que esse grupo é zero ou $\mathbb{Z}$.

Finalmente, demonstraremos o Teorema da Dualidade de Poincaré, em homenagem a Henri Poincaré, que é um resultado básico sobre a estrutura dos grupos de homologia e cohomologia de variedades. O teorema afirma que se M é uma variedade fechada orientada n-dimensional (compacta e sem bordo), então o k-ésimo grupo de cohomologia de M é isomorfo ao $(n-k)$-ésimo grupo de homologia de M, para todos os inteiros k.

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M).$$

14.1. Cohomologia com Suporte Compacto

Dizemos que uma cocadeia $u \in S^p(X;R)$ tem suporte compacto se houver algum subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $u \in S^p(X, X-K;R)$, ou equivalentemente se u se anular em cada simplexo singular em $X-K$.

Dizemos que cocadeia $u \in S^q(X,G)$ tem suporte compacto se, e somente se, existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $u \in S^q(X, X \setminus K;G)$.

Observe que o conjunto de cocadeias $u \in S^q(X;G)$ que possuem suporte compacto é um submódulo livre de $S^q(X;G)$, que denotaremos por $S_c^q(X;G)$. Além disso, se u tem suporte compacto, o mesmo pode ser dito sobre seu cobordo, $\delta(u)$; portanto, obtemos o complexo cocadeia

$$S_c^*(X;G) = \bigoplus_{q\geq 0} S_c^q(X,G).$$

Podemos estender o morfismo de cobordo δ para a álgebra graduada obtendo $\delta : S_c^*(X;G) \to S_c^*(X;G)$.

O grupo de cohomologia q-dimensional de X com suporte compacto é o grupo de cohomologia q-dimensional do complexo $S_c^*(X;G)$ e denotaremos esse grupo por $H_c^q(X;G)$.

Os subconjuntos compactos de qualquer espaço topológico X, que denotaremos por $\mathcal{K}$, são parcialmente ordenados por inclusão, ainda mais, eles são direcionados pela relação de inclusão porque a união de quaisquer dois subconjuntos compactos é compacto. E o grupo de cocadeias $S_c^q(X)$ pode ser visto como a união dos subgrupos $S^q(X, X-K)$, onde K varia sobre todos os subconjuntos compactos de X. Em outras palavras,

$$S_c^q(X;G) = \varinjlim_{K\in\mathcal{K}} S^q(X, X-K;G),$$

onde o limite direto é tomado sobre o conjunto direcionado consistindo de todos os subconjuntos compactos $K \subset X$. Já a operação de tomar grupos de homologia de um complexo cocadeia comuta com o limite direto e consequentemente

$$H_c^q(X;G) = \varinjlim_{K\in\mathcal{K}} H^q(X, X-K;G),$$

onde novamente o limite direto é tomado sobre todos os subconjuntos compactos $K \subset X$.

Assim temos a seguinte proposição:

$$H_c^q(X;G) = \varinjlim_{K\in\mathcal{K}} H^q(X, X-K;G),$$

Ao contrário do caso da cohomologia singular, se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, não existe necessariamente uma aplicação induzida usual $f^* : H_c^p(Y;R) \to H_c^p(X;R)$. O problema é que se K é um subconjunto compacto de Y, então $f^{-1}(K)$ não é necessariamente um conjunto compacto. No entanto, aplicações próprias têm essa propriedade e induzem uma aplicação induzida correspondente entre grupos de cohomologia com suporte compacto. Dado $K' \subset X$ compacto, se consideramos a aplicação $g = f|_{K'} : K' \to Y$ então g é uma aplicação própria, e logo para qualquer subconjunto compacto K de Y, $g^{-1}(K)$ é compacto em X, então g leva $X - g^{-1}(K)$ em $Y - K$ e logo existe um homomorfismo induzido de $H^p(Y, Y-K;R)$ a $H^p\left(X, X-g^{-1}(K);R\right)$.

Como $H_c^p(X;R)$ é o limite direto de $H^p(X, X-K';R)$ onde K' varia sobre subconjuntos compactos em X, existe um homomorfismo de $H^p\left(X, X-f^{-1}(K);R\right)$ para $H_c^p(X;R)$, então temos um homomorfismo de $H^p(Y, Y-K;R)$ para $H_c^p(X;R)$. Deixamos como exercício que esses homomorfismos induzem um homomorfismo $f^* : H_c^p(Y;R) \to H_c^p(X;R)$.

Obviamente, se X é compacto, $S_c^*(X) = S^*(X)$, e $H_c^q(X) = H^q(X)$. Se X não é compacto, como vimos $H_c^q(X,G)$ é um invariante topológico do espaço X; no entanto não é uma invariante do tipo homotopia de X como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 14.1.

Vamos calcular a cohomologia com suporte compacto de $\mathbb{R}^n$. Pela proposição acima,

$$H_c^i(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{K\in\mathcal{K}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$$

onde o limite direto é tomado sobre o conjunto direcionado dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Observe que podemos substituir K pelas bolas fechadas B_k de raio inteiro k centradas na origem, pois cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ está contido em uma de tais bolas. Então temos que

$$\varinjlim_{K\in\mathcal{K}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k).$$

Como para todo k temos que

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k) \cong H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad \text{(por excisão)}$$
$$\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{(por homologia relativa)}$$

segue que

$$H_c^i(\mathbb{R}^n) \cong \varinjlim_{K \in \mathcal{K}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \tag{14.1}$$
$$= \varinjlim_{k \in \mathbb{N}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_k) \tag{14.2}$$
$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{14.3}$$

Agora vamos calcular a cohomologia com suporte compacto de um ponto $*$. Como o ponto é compacto temos

$$H_c^i(*) = H^i(*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo a homologia com suporte compacto não é invariante por homotopia.

◁

14.2. Orientabilidade

Vamos definir a orientabilidade de uma variedade no contexto de topologia algébrica. A definição que apresentaremos funciona para variedades topológicas. Nesta definição não usaremos a matriz jacobiana das funções de transição, fibrados tangentes ou forma volume, como é o usual na definição de orientação de variedades diferenciáveis. Em vez disso, usaremos a escolha de geradores de grupos de homologia. Provaremos a equivalência dessas definições para variedades suaves no Teorema 14.2.

Antes de apresentar a definição de orientação, no entanto, precisamos estabelecer o seguinte fato. Seja M uma variedade de dimensão n. Então, para todo

$x \in M$, a **homologia local** de M em x na dimensão k é

$$H_k(M, M \setminus \{x\}; R) = \begin{cases} R, \ se\ k = n \\ 0, \ se\ k \neq n \end{cases}$$

Demonstração. Dado $x \in M$, existe uma vizinhança aberta V de x em M que é homeomorfa ao disco $\mathbb{D}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e, sem perda de generalidade, assumiremos que esse homeomorfismo leva o ponto x em 0. Assim,

$$\begin{aligned} H_i(M, M \setminus \{x\}; R) &\cong H_i\left(V, V \setminus \{x\}; R\right) && \text{(por excisão 10.5)} \\ &H_i\left(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R\right) && \text{(por homeomofismo)} \\ &\cong \widetilde{H}_{i-1}\left(\mathbb{D}^n \setminus \{0\}; R\right) && \text{(pela sequência exata de homolo} \\ &\cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{S}^{n-1}; R) \cong \begin{cases} R, \ se\ k = n \\ 0, \ se\ k \neq n \end{cases} && \text{(por homotopia)} \end{aligned}$$

Na fórmula acima usamos o Teorema de Excisão com $X = M, A = M \setminus \{x\}$, e $U = M \setminus V$.

■

Para simplificar a notação introduziremos a seguinte convenção:

$$H_k(M \mid N; R) \coloneqq H_k(M, M \setminus N; R)$$

que usaremos no que se segue. Com este conhecimento sobre a homologia local de M em x, podemos dar a seguinte definição localizada de orientação.

- Uma R-**orientação local** de uma variedade n-dimensional M em $x \in M$ é uma escolha de um gerador para $H_n(M \mid \{x\}; R) \cong R$.
- Uma $\mathbb{Z}$-**orientação local** é denominada simplesmente de **orientação local**.

Na definição anterior estamos vendo R como um R-módulo livre, dessa forma um gerador de R é um elemento $s \in R$ tal que a aplicação $r \mapsto rs$ $(r \in R)$ é sobrejetiva. Como R é um anel com um elemento identidade, um gerador de R é apenas um elemento invertível.

De fato, como veremos a família de grupos de homologia $H_n(M \mid \{x\}; R)$ é "localmente constante". Isso é captado na afirmação que sua união, quando x varia sobre M, constitui um espaço de recobrimento sobre M.

- O conjunto das orientações locais será denotado por $\widetilde{M}$ e é definido como:

$$\widetilde{M} \coloneqq \{(x, \mu_x) | x \in M \text{ e } \mu_x \text{ é uma orientação local de } M \text{ em } x\}.$$

- O conjunto das homologias locais de M será denotado por $\widetilde{M}_R$ e é definido como:

$$\widetilde{M}_R \coloneqq \coprod_{x \in M} H_n(M \mid \{x\}; R)$$

Como os pontos de $\widetilde{M}$ são da forma (x, α) com $\alpha \in H_n(M \mid \{x\}; R)$ temos uma aplicação de projeção $p : \widetilde{M}_R \to M$. Pretendemos munir $\widetilde{M}_R$ de uma topologia de modo que com tenhamos um espaço de recobrimento. Faremos isso através da aplicação $j_{A,x}$, definida para qualquer conjunto fechado $A \subseteq M$ e $x \in A$ como a aplicação induzida pela inclusão de pares:

$$j_{A,x} : H_n(M \mid A; R) \to H_n(M \mid \{x\}; R).$$

Se $A \subset M$ é homeomorfo a um subconjunto compacto e convexo B de $\mathbb{R}^n$ então $j_{A,x}$ é um isomorfismo e ambos os grupos são isomorfos a R.

Demonstração. O conjunto A está contido no interior de algum n-disco fechado $D \subset M$. E logo

$$\begin{array}{ccc}
H_n(M|A;R) & \xrightarrow{j_{A,x}} & H_n(M|\{x\};R) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \quad \text{(excisão)} \\
H_n(D|A;R) & \xrightarrow{j_{A,x}} & H_n(D|\{x\};R) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \quad \text{(homeomorfismo)} \\
H_n(\mathbb{D}^n|B;R) & \xrightarrow{j_{B,0}} & H_n(\mathbb{D}^n|\{0\};R) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \quad \text{(homotopia)} \\
H_n(\mathbb{D}^n|\partial\mathbb{D}^n;R) & \xrightarrow{=} & H_n(\mathbb{D}^n|\partial\mathbb{D}^n;R)
\end{array}$$

■

Para entender melhor as aplicações $j_{A,\bullet}$, sejam dois pontos $x, y \in M$ numa vizinhança aberta U que é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Então temos que as aplicações $j_{A,\bullet}$

fornecem uma escolha "coerente" de elementos de $H_n(M \mid \bullet; R)$. Pois, temos o isomorfismo induzido pela inclusão:

$$j_{\overline{U},y} : H_n(U \mid \{y\}; R) \xrightarrow{\cong} H_n(M \mid \{y\}; R) \tag{14.4}$$

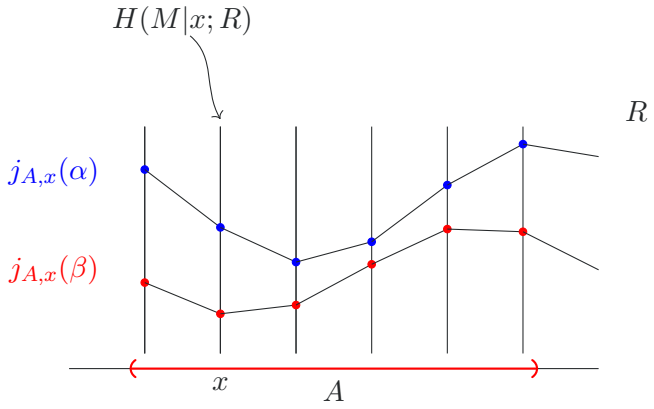


Figura 14.1.: As aplicações $j_{A,x}$ fornecem uma escolha "coerente" de elementos de $H_n(M \mid x; R)$. No desenhos as fibras associadas a $\alpha, \beta \in H(M|A; R)$;.

E se x e y são quaisquer dois pontos de $\mathbb{R}^n$, existe um isomorfismo canônico $H_n(\mathbb{R}^n \mid \{x\}; R) \cong H_n(\mathbb{R}^n \mid \{y\}; R)$ definido escolhendo uma bola fechada $D^n \subset \mathbb{R}^n$ grande o suficiente para que x e y estejam ambos no interior de D^n, e observando que no diagrama a seguir,

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{R}^n \mid \{x\}; R) & \xleftarrow{j_{D^n,x}} & H_n(\mathbb{R}^n \mid D^n; R) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle j_{D^n,y,*}} \\ & & H_n(\mathbb{R}^n \mid \{y\}) \end{array} \tag{14.5}$$

ambos $j_{D^n,x}$ e $j_{D^n,x}$ são isomorfismos. Além disso, o isomorfismo entre $H_n(\mathbb{R}^n \mid \{x\}; R)$ e $H_n(\mathbb{R}^n \mid \{y\}; R)$ obtido independe da escolha da bola fechada D^n.

A partir dessa observação, definimos uma base de abertos $V_{U,\alpha}$ em $\widetilde{M}_R$ indexados pelo par (U, α) onde U é aberto em M, e $\alpha \in H_n(M \mid \overline{U})$

$$V_{U,\alpha} = \left\{ (x, j_{\overline{U},x}(\alpha)) : x \in U \right\}$$

Assim, cada $\alpha \in H_n(M \mid \overline{U})$ define assim uma "folha" de $\widetilde{M}_R$ sobre U. Compare com a Figura 14.1.

Esse espaço de recobrimento tem mais estrutura que os espaços de recobrimento usuais: cada fibra é um R-módulo, livre em um gerador. Essas estruturas variam continuamente à medida que passamos de uma fibra para outra.

Os conjuntos $U_\alpha = V_{U,\alpha}$ são a base de uma topologia. Com esta topologia, $p : \widetilde{M} \to M$ dada por $p : \mu_x \mapsto x$ restrita a qualquer componente, é uma aplicação de recobrimento e as aplicações de anel nas fibras são contínuas.

Demonstração. Um ponto $\tilde{x} \in H_n(M|x; R)$ satisfaz $\tilde{x} = (x, j_{A,x}(\alpha))$ para algum conjunto $A = \overline{U}$ que é homeomorfo a algum conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, pela Proposição 14.2. Assim, qualquer ponto está num dos conjuntos U_α.

Se $\tilde{x} \in U_\alpha \cap V_\beta$ então $\tilde{x} = (x, j_{\overline{U},x}(\alpha)) = (u, j_{u,\overline{V}}(\beta))$ e logo $u = v$ e $j_{\overline{U},x}(\alpha) = j_{\overline{V},x}(\beta)$. Seja $x \in W \subset U \cap V$, com W um conjunto aberto, homeomorfo a um convexo de $\mathbb{R}^n$ e contendo x. Então $j_{\overline{W},x}$ é um isomorfismo pela Proposição 14.2. Seja $\gamma \in H_n(M|\overline{W}; R)$ tal que $(x, j_{\overline{W},x}(\gamma)) = \tilde{x}$. Então o homomorfismo dado pela inclusão $H_n(M|\overline{U}; R) \to H_n(M|\overline{W}; R)$ leva α a γ pois γ é o único elemento tal que $(x, j_{\overline{W},x}(\gamma)) = \tilde{x}$. Da mesma forma, β é levado para γ. Isso mostra que $\tilde{x} \in W_\gamma \subset U_\alpha \cap V_\beta$ e, portanto, temos uma base para uma topologia.

Para mostrar que é um recobrimento quando restrita a componentes, observe que a aplicação p é aberta e contínua por definição. Considere um conjunto aberto U de M com $\overline{U}$ compacto e homeomorfo a um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times H_n(M|\overline{U}; R) & \xrightarrow{\varphi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow & \downarrow p \\ & & U \end{array}$$

onde $\varphi(x, \alpha) = (x, j_{\overline{U},x}(\alpha))$ e $H_n(M|\overline{U}; R)$ tem a topologia discreta. Então a aplicação φ é aberta, pois, para $V \subset U$ abertos, φ leva $V \times \{\alpha\}$ para V_α. Se $\varphi(x, \alpha) = \varphi(y, \beta)$ então $x = y$ pois $p(\varphi(x, \alpha)) = x$ e $p(\varphi(y, \beta)) = y$. Temos também que $j_{\overline{V},x}(\alpha) = j_{\overline{U},x}(\beta)$ implica que $\alpha = \beta$ porque $j_{\overline{U},x}$ é um isomorfismo. Portanto, a aplicação φ é injetora.

A função φ é sobrejetora pois, para qualquer $y \in U$, a aplicação $j_{y,\overline{U}} : H_n(M|\overline{U}; R) \to H_n(M|y; R)$ é sobrejetora. Portanto, para $V \subset U$ aberto,

$\varphi^{-1}(V_\alpha) = V \times \{\alpha\}$. Logo temos que φ é contínua e assim φ é um homeomorfismo.

Assim, numa fibra a aplicação φ é apenas $j_{\overline{U},x}$ que é um isomorfismo. Logo as operações de anel na fibra correspondem às operações no segundo fator de $U \times H_n(M|\overline{U}; R)$ e, portanto, são contínuas. ■

Podemos estender essa definição local de orientação para uma definição global pela seguinte definição.

Uma **orientação da variedade** M é uma seção $s : M \to \widetilde{M}$ de $p : \widetilde{M} \to M$ se para todo $x \in M$ existe uma carta contendo uma bola aberta B centrada em x de modo que todas as orientações locais μ_y nos pontos $y \in B$ são imagens do mesmo gerador $\mu_B \in H_n(M \mid B)$ sob as aplicações

$$j_{B,y} : H_n(M \mid B) \to H_n(M \mid \{y\}).$$

Seja M uma variedade então

1. A aplicação $p : \widetilde{M} \to M$ dada por $p : \mu_x \mapsto x$ é uma aplicação de recobrimento.
2. A variedade $\widetilde{M}$ é orientável e é denominada **recobrimento duplo orientável** de M.
3. Se M é conexa, então M é orientável se M tiver duas componentes.

Demonstração.

1 A mesma construção que mostra que $\widetilde{M}_R$ é um espaço de recobrimento mostra que a aplicação $p : \widetilde{M} \to M$ dada por $p : (\mu_x, x) \mapsto x$ é uma aplicação de recobrimento. Esboçaremos apenas a construção. Nesse caso os abertos são dados pela restrição de $j_{A,\bullet}$ aos geradores. Desejamos munir o conjunto $\widetilde{M}$ de uma topologia de modo a obtermos um espaço de recobrimento. Dada uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n \subset M$ e um gerador $\mu_B \in H_n(M \mid B)$, seja U_{B,μ_B} o conjunto de todos $(x, \mu_x) \in \widetilde{M}$ tal que $x \in B$ e μ_x seja a imagem de μ_B sob a aplicação natural $j_{\overline{B},x} H_n(M \mid B) \to H_n(M \mid x)$.

É fácil verificar os conjuntos U_{B,μ_B} formam uma base para uma topologia em $\widetilde{M}$, e que a projeção $\widetilde{M} \to M$ é uma aplicação de recobrimento.

2 A variedade $\widetilde{M}$ é orientável pois cada ponto $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ é da forma (x, μ_x) para $B \subset M$ um conjunto homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, μ_B um gerador de $H_n(M|B)$ e $\mu_x = j_{B,x}(\mu_B)$.

Então cada ponto $\tilde{x} \in U_{B,\mu_B}$, definidos como no item anterior, possui uma orientação local canônica o que nos permite construir uma seção dada por

$$s(x, \mu_x) = (x, \mu_x, \tilde{\mu}_x)$$

dada pelo elemento $\tilde{\mu}_x \in H_n(\widetilde{M} \mid \tilde{x})$ correspondente a $\mu_x \in H_n(M|x)$ sob os isomorfismos

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\widetilde{M} \mid U_{B,\mu_x}) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{j}_{\tilde{B},\tilde{x}}} & H_n(\widetilde{M} \mid \tilde{x}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(U_{B,\mu_x}|\tilde{x}) \\ \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* & & \cong \downarrow \pi^* \\ H_n(M \mid B) & \xrightarrow[\cong]{j_{B,x}} & H_n(M \mid x) & \xrightarrow{\cong} & H_n(B|x) \end{array}$$

e por construção, usando o primeiro quadrado do diagrama anterior, temos que essas orientações locais satisfazem a condição de consistência local necessária para definir uma orientação global.

3 Se M for conexa, $\widetilde{M}$ possui no máximo duas componentes, pois é um espaço recobrimento duplo de M. Se tiver duas componentes, cada uma delas é homeomorfa à M pela projeção de recobrimento, então M é orientável.

Por outro lado, se M é orientável, ela possui exatamente duas orientações dada que é uma variedade conexa, e cada uma dessas orientações define uma componente de $\widetilde{M}$. ∎

Podemos generalizar a definição de orientação de uma variedade.

Uma R-**orientação da variedade** M é uma seção $s : M \to \widetilde{M}_R$ de $p : \widetilde{M}_R \to M$ tal que para todo $x \in M$ existe uma carta contendo uma bola aberta B com $x \in B$ tal que todas as orientações locais μ_y nos pontos $y \in B$ são as imagens do mesmo gerador $\mu_B \in H_n(M \mid B; R)$ sob as aplicações

$$j_{B,y} : H_n(M \mid B; R) \to H_n(M \mid \{y\}; R).$$

Se existir uma R-orientação, a variedade é dita R-**orientável**.

Dado A um subconjunto aberto de M, o conjunto das R-orientações de A formam um módulo com as operações ponto a ponto que denotamos por $\Gamma_R(A)$.

Como p é um homeomorfismo local, temos as duas propriedades a seguir.

- Dado $\tilde{x} \in \tilde{M}_R$, existe uma vizinhança U de $p(\tilde{x})$ e uma seção $s \in \Gamma_R(V)$ tal que $s \circ p(\tilde{x}) = x$.
- Se duas seções $s, t \in \Gamma_R(A)$ concordam em $x \in A$, então elas concordam em uma vizinhança de x; em outras palavras, $\{y \in A \mid s(y) = t(y)\}$ é um conjunto aberto em A.
- Se M é conexa então se $s, t \in \Gamma_R(M)$ concordam em $x \in M$, então eles concordam em todo M.

A estrutura do espaço de recobrimento $\widetilde{M}_R$ admite uma descrição simples. Tendo em vista o isomorfismo canônico

$$H_n(M \mid \{x\}; R) \cong H_n(M \mid \{x\}) \otimes R,$$

cada $r \in R$ determina um subespaço de recobrimento $\widetilde{M}_r$ de $\widetilde{M}_R$ consistindo dos pontos

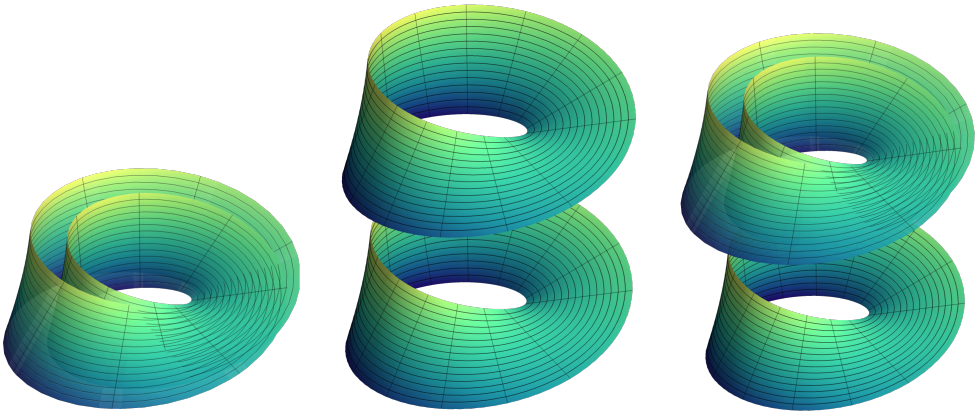
$$\pm\mu_x \otimes r$$

onde $\pm\mu_x$ são os geradores de $H_n(M \mid \{x\})$ e $r \in R$. Os pontos da forma $\pm\mu_x \otimes r$, com x fixo, são projetados por p em x. Se r tem ordem 2 em R então $r = -r$ então $\widetilde{M}_r$ é apenas uma cópia de M, caso contrário $\widetilde{M}_r$ é isomorfo a um recobrimento duplo de M. O espaço de recobrimento $\widetilde{M}_R$ é a união dos subespaços $\widetilde{M}_r$, que são disjuntos exceto pela igualdade $\widetilde{M}_r = \widetilde{M}_{-r}$.

Assim, para concluir, $\widetilde{M}_R$ é a união de cópias de folhas que são cópias de M e de recobrimentos duplos de M.

Seja M uma variedade então:

1. A variedade $\widetilde{M}_R$ é R-orientável.
2. Se M é R-orientável então todo subespaço de recobrimento $\widetilde{M}_r$ de $\widetilde{M}_R$ é trivial.
3. Se M é orientável então M é R-orientável.



(a) Recobrimento duplo da Faixa de Möbius $\widetilde{\mathbb{M}}$. Cada folha está associada à um dos geradores $\{-1, 1\} \in \mathbb{Z}$.

(b) Recobrimento da Faixa de Möbius $\widetilde{\mathbb{M}}_{\mathbb{Z}_2}$. Cada recobrimento está associado à um dos elementos $\{0, 1\} \in \mathbb{Z}_2$.

(c) Recobrimento da Faixa de Möbius $\widetilde{\mathbb{M}}_{\mathbb{Z}_3}$. Cada recobrimento está associado à um dos elementos $\{0, 1\} \in \mathbb{Z}_3$.

Demonstração.

1 A demonstração é análoga ao caso $\widetilde{M}$.

2 Se M é R-orientável então $\widetilde{M}_R$ não contém recobrimentos duplos não triviais pois caso contrário existiria um caminho γ em $\widetilde{M}_R$ de uma unidade em uma fibra para outra unidade nessa fibra. A imagem de γ em M é compacta e não existiria seção sobre ela.

3 Se M é orientável, então o recobrimento duplo é trivial. Como $\widetilde{M}_r$ é união de cópias de M e do recobrimento duplo de M, que é trivial, temos que o recobrimento $\widetilde{M}_r$ é trivial.

■

Assim temos que uma variedade orientável é R-orientável para todo R, enquanto uma variedade não orientável é R-orientável se R contém uma unidade de ordem 2, que é equivalente a ser válida a igualdade $2 = 0$ no anel R. Assim, toda variedade é $\mathbb{Z}_2$-orientável.

Toda variedade possui uma $\mathbb{Z}_2$-orientação.

Uma $\mathbb{Z}_2$-orientação também é chamada de orientação $\mathrm{mod}2$.

Outra definição que será útil na discussão da dualidade de Poincaré é a noção

de classe fundamental. Uma **classe fundamental** para M com coeficientes num R-módulo é um elemento de $H_n(M;R)$ cuja imagem em $H_n(M \mid \{x\};R)$ é um gerador para todo $x \in M$.

Na próxima seção demonstraremos que uma variedade M tem uma classe fundamental com coeficientes num R-módulo, se, e somente se, ela admite uma R-orientação. Em vista dessa observação, uma classe fundamental também poderia ser chamada de classe de orientação para M.

Agora, para terminar a seção iremos comparar as duas definições usuais de orientabilidade a homológica e para variedades diferenciáveis. Começamos lembrando a definição clássica para variedades diferenciáveis.

- Um atlas diferenciável $(U_i, \varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n)$ é dito **orientado** se o determinante das derivadas de todas as mudanças de coordenadas

$$\varphi_i \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

  for positivo. Um atlas orientado é dito **maximal** se não puder ser ampliado para um atlas orientado adicionando outra cartas diferenciável. Observe que qualquer atlas orientado diferenciável define um atlas orientado diferenciável maximal adicionando todos as carta diferenciável s de modo que o atlas ainda esteja orientado. Normalmente, é assim que um atlas orientado é fornecido.

- Uma **orientação diferenciável** de uma variedade diferenciável n-dimensional M é a escolha de um atlas orientado diferenciável maximal.

- Uma variedade diferenciável M é dita **(diferenciavelmente) orientável** se tiver uma orientação diferenciável,caso contrário é dita não orientável.

- Uma variedade diferenciável M juntamente com uma orientação diferenciável é dita variedade diferenciável orientada.

Se M é uma variedade diferenciável é diferenciavelmente orientável se e somente é orientável no sentido homológico.

Demonstração. Suponha que M é diferenciavelmente orientável. Dado $x \in M$, considere ϕ a inversa de uma carta orientável, ou seja, um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \to U$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\phi(0) = x$. Seja $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n|\{0\}) \cong \mathbb{Z}$ um gerador fixado. Então $\phi_*(\alpha) \in H_n(U|\{x\}; R)$ é um gerador. Duas dessas cartas podem ser comparadas a um terceira cujo domínio esteja contido na intersecção. Assim, suponha que $\psi : \mathbb{R}^n \to V$ seja outra carta com $\psi(0) = x$. Então $\phi^{-1}\psi$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo, fixando a origem, e com Jacobiano positivo.

A relevância da condição de Jacobiano positivo é que um difeomorfismo $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ preserva o gerador de $H_n(\mathbb{R}^n|\{0\})$ se, e somente se, $\det \mathrm{Jac}_0(f) > 0$. Para demonstrar essa afirmação considere uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ enviando 0 para 0. Então essa aplicação é homotópica à $\mathrm{Jac}_0(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com homotopia dada por $H_{1-t}(x) = \frac{f(tx)}{t}$ e $H_1(x) = \mathrm{Jac}_0(f)(x)$.

As aplicações lineares possuem duas classes de homotopia pois $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}^n)$ possui exatamente duas componentes conexas por caminho, determinadas pelo determinante.

Logo a aplicação induzida em $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é o sinal de $\det \mathrm{Jac}_0 f$.

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M|\{x\}) & \xrightarrow{i_{U,*}^{-1}} & H_n(U|\{x\}) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n|\{0\}) \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle (\phi^{-1}\circ\psi)_*=\mathrm{id}} \\ H_n(M|\{x\}) & \xrightarrow{i_{V,*}^{-1}} & H_n(V|\{x\}) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n|\{0\}) \end{array} \tag{14.6}$$

Assim se o Jacobiano é positivo, a aplicação induzida na homologia é a identidade. Portanto o elemento $s_x = \phi_*(\alpha)$ é independente da escolha da carta ϕ. A seção $s \in \widetilde{M}$ é contínua.

Por outro lado, se tivermos uma orientação no sentido homológico, ou seja, uma seção s de $\widetilde{M}$, então, em qualquer ponto, se olharmos para qualquer carta, o elemento $\phi_*(\alpha)$ dado como acima pela carta coincide com s_x ou não. Caso contrário, a carta, que é a composição com uma reflexão através de um hiperplano, fornece um elemento que coincide. Escolher apenas as cartas que coincidem com a seção de orientação s_x fornece um atlas. Pelas observações anteriores, o Jacobiano de qualquer mudança de variáveis dentro desse atlas deve ter determinante positivo

e, portanto, esta é uma orientação diferenciável. ∎

14.3. Produto Cap

Para um espaço X e um anel de coeficientes R, definimos um R-produto bilinear entre cadeias e cocadeias $\frown$: $S_k(X;R) \times S^l(X;R) \to S_{k-l}(X;R)$ para $k \geq l$ definindo

$$\sigma \frown \varphi = \varphi\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,v_l]}\right)\sigma|_{[v_l,\cdots,v_k]}$$

para $\sigma : \Delta^k \to X$ e $\varphi \in C^l(X;R)$. Esse produto é denominado **produto cap**.

O produto cap tem as seguintes propriedades:

1. Dualidade: Para $a \in S_*(X),\ b, c \in S^*(X)$, temos

$$\langle a, b \smile c\rangle = \langle a \frown b, c\rangle.$$

2. Associatividade: Para $a \in S_*(X),\ b, c \in S^*(X)$, temos

$$a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \frown c.$$

3. Unidade: Dada a aplicação de aumento $\varepsilon : S_0(X;R) \to R$ que é o único homomorfismo tal que $\varepsilon(x) = 1$ para todo ponto $x \in S_0(X;R)$. A classe de cohomologia do cociclo ε em $H_0(X;R)$ é denotada por 1 e satisfaz:

$$c \frown 1 = c.$$

4. Naturalidade: Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Para $b \in S_*(X)$ e $c \in S^*(Y)$, temos

$$(f_*b) \frown c = f_*\left(b \frown f^*(c)\right).$$

A demonstração da proposição anterior é simples e será deixada ao leitor.

Lema 14.1

$$\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^l(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown \delta\varphi)$$

Demonstração.

$$\partial\sigma \frown \varphi = \sum_{i=0}^{l}(-1)^i\varphi\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_{l+1}]}\right)\sigma|_{[v_{l+1},\cdots,v_k]} \tag{14.7}$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{k}(-1)^i\varphi\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,v_l]}\right)\sigma|_{[v_l,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_k]} \tag{14.8}$$

$$\sigma \frown \delta\varphi = \sum_{i=0}^{l+1}(-1)^i\varphi\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_{l+1}]}\right)\sigma|_{[v_{l+1},\cdots,v_k]} \tag{14.9}$$

$$\partial(\sigma \frown \varphi) = \sum_{i=l}^{k}(-1)^{i-l}\varphi\left(\sigma|_{[v_0,\cdots,v_l]}\right)\sigma|_{[v_l,\cdots,\hat{v}_i,\cdots,v_k]} \tag{14.10}$$

Da relação $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown \delta\varphi)$ segue que o produto cap de um ciclo σ e um cociclo φ é um ciclo. Além disso, se $\partial\sigma = 0$ então $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\sigma \frown \delta\varphi)$, então o produto cap de um ciclo e um cobordo é um bordo. E se $\delta\varphi = 0$ então $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\partial\sigma \frown \varphi)$, então o produto cap de um bordo e um cociclo é um bordo.

Logo vemos que o produto cap induz uma operação bilinear nas classes de cohomologia e homologia

$$\frown\colon H_k(X;R) \times H^l(X;R) \to H_{k-l}(X;R)$$

(se $0 \leq l \leq k$), também chamado de produto cap.

Lema 14.2 — Naturalidade

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Para $b \in H_k(X)$ e $c \in H^l(Y)$, temos

$$(f_* b) \frown c = f_* (b \frown f^*(c)) .$$

o que pode ser representado no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_k(X;R) \otimes H^l(X;R) & \xrightarrow{\frown} & H_{k-l}(X;R) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} \quad \uparrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ H_k(Y;R) \otimes H^l(Y;R) & \xrightarrow{\frown} & H_{k-l}(Y;R) \end{array}$$

14.4. Teorema da Dualidade de Poincaré

Primeiramente apresentaremos um método, denominado de Bootstrap ou Lema de Bootstrap, que fornece uma estratégia para demonstrar afirmações $P_M(A)$ sobre subconjuntos fechados A de M, iniciando a demonstração a partir de conjuntos simples e generalizando. Usaremos essa estratégia na demonstração da existência de uma classe fundamental e no Teorema da Dualidade de Poincaré, porém adicionando algumas etapas a mais de modo a ter que invocar o lema diretamente.

O Método Bootstrap

Dada uma variedade n-dimensional M para a qual gostaríamos de provar alguma propriedade $P_M(A)$ sobre subconjuntos fechados A de M. Considere as cinco proposições a seguir:

i Se A é um subconjunto compacto e convexo de M, então $P_M(A)$ vale.

ii Se $P_M(A)$, $P_M(B)$ e $P_M(A \cap B)$ valem para subconjuntos fechados A e B, então $P_M(A \cup B)$ vale.

iii Se $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots A_i \supseteq A_{i+1} \supseteq \cdots$ é uma sequência de subconjuntos compactos e se $P_M(A_i)$ vale para todo i, então $P\left(\bigcap_i A_i\right)$ vale.

iv Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos compactos disjuntos com vizinhanças disjuntas e se $P_M(A_i)$ vale para todo i, então $P(\bigcup_i A_i)$ vale.

v Para qualquer subconjunto fechado A, se $P_M(A \cap W)$ vale para todos os subconjuntos abertos W de M tal que o fecho de W é compacto, então $P_M(A)$ vale.

A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em (Bredon, 2013).

Lema do Bootstrap. Seja M qualquer variedade n.

1. Seja $P_M(A)$ uma propriedade sobre subconjuntos compactos A de M. Se **i**, **ii** e **iii** são válidos, então $P_M(A)$ é válida para todos os subconjuntos compactos A de M.
2. Se M é um espaço métrico separável, $P_M(A)$ é uma propriedade sobre subconjuntos fechados A de M, e todas as quatro afirmações **i**-**iv** são válidas, então $P_M(A)$ é verdadeira para todos os subconjuntos fechados A de M.
3. Seja $P_M(A)$ uma propriedade sobre subconjuntos fechados A de M. Se todas as cinco afirmações **i**-**v** são válidas, então $P_M(A)$ é verdadeira para todos os subconjuntos fechados A de M.

Existência da Classe Fundamental

Primeiro, pretendemos demonstrar a existência de uma classe fundamental para uma variedade n-dimensional fechada e R-orientável. Para demonstrar isso, precisamos do seguinte lema técnico.

Lema 14.3

Sejam M uma variedade de dimensão n e $A \subset M$ um subconjunto compacto. Então

1. Se $x \mapsto \alpha_x$ é uma seção do espaço de recobrimento $\widetilde{M}_R \to M$, então existe uma única classe $\alpha_A \in H_n(M \mid A; R)$ cuja imagem em $H_n(M \mid \{x\}; R)$ é α_x para todo $x \in A$.

2. $H_i(M \mid A; R) = 0$ para $i > n$.

Demonstração. Vamos demonstrar ambas as afirmações simultaneamente. A abordagem da demonstração aqui é construtiva, baseada no Lema de Bootstrap. Para simplificar a notação, deixaremos implícito o anel de coeficientes R.

Caso 1. Sejam $M = \mathbb{R}^n$ e A um subconjunto compacto e convexo. Nesse caso sabemos que $j_{A,x}$ é um isomorfismo o que basta para provar esse lema neste caso.

Caso 2. Seja $M = \mathbb{R}^n$ e $A = A_1 \cup A_2$ onde supomos que o teorema vale para A_1, A_2 e $A_1 \cap A_2$. Como

$$(M \setminus A_1) \cap (M \setminus A_2) = M \setminus A \text{ e} \tag{14.11}$$

$$(M \setminus A_1) \cup (M \setminus A_2) = M \setminus (A_1 \cap A_2), \tag{14.12}$$

aplicando a sequência de Mayer-Vietoris temos:

$$0 \longrightarrow H_i(M \mid A) \xrightarrow{\varphi} H_i(M \mid A_1) \oplus H_i(M \mid A_2) \longrightarrow H_i(M \mid (A_1 \cap A_2)) \longrightarrow \cdots$$

e como $H_i(M \mid (A_1 \cap A_2)) = H_i(M \mid A_1) = H_i(M \mid A_2) = 0$ para $i > n$ temos que a afirmação **2** é satisfeita.

Se $x \mapsto \alpha_x$ é uma seção, então temos por hipótese a unicidade das classes $\alpha_{A_1} \in H_n(M \mid A_1; R), \alpha_{A_2} \in H_n(M \mid A_2; R)$, e $\alpha_{A_1 \cap A_2} \in H_n(M \mid (A_1 \cap A_2); R)$ com imagem α_x para todo x em A, B ou $A \cap B$ respectivamente.

A exatidão da sequência implica que $(\alpha_{A_1}, -\alpha_{A_2}) = \varphi(\alpha_A)$ para alguma classe $\alpha_A \in H_n(M \mid A; R)$. Além disso,temos que a imagem de α_A deve ser α_x já que é levada para α_{A_1} e α_{A_2} e é única pela injetividade de φ.

Caso 3. Seja $M = \mathbb{R}^n$ e $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ com A_i convexo e compacto. Esse caso decorre por indução usando os Casos 1 e 2.

Caso 4. Sejam $M = \mathbb{R}^n$ e A um subconjunto compacto. Seja $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n \mid A)$ representado por um ciclo relativo z e seja $C \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, o suporte desse ciclo, ou seja a união das imagens dos simplexos em z. O conjunto C é compacto, então a distância de C à A é $\epsilon > 0$.

Podemos então cobrir A por um número finito de bolas fechadas de raio menor que ϵ centradas nos pontos de A. Denotaremos a união de tais bolas por U é assim

temos que U é disjunto de C. Então, o ciclo relativo z define um elemento $\alpha_U \in H_i(\mathbb{R}^n \mid U)$ que é levado para $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n \mid A)$. Se $i > n$ então $H_i(\mathbb{R}^n \mid U) = 0$ pelo Caso 3, já que U é uma união finita de subconjuntos compactos convexos, então $\alpha_U = 0$ e $\alpha = 0$. Logo $H_i(\mathbb{R}^n,\ A) = 0$ e temos a afirmação 1.

Se $i = n$ e $\alpha_x = 0$ em $H_n(\mathbb{R}^n \mid \{x\}; R)$ para todo $x \in A$ então isso implica o fato análogo para U onde α_x é a imagem de α_U e então $\alpha_U = 0$ e $\alpha = 0$ e logo temos a unicidade. A existência segue tomando α_A como a imagem de α_B para qualquer uma das bolas B em U.

Caso 5. Seja M uma variedade n-dimensional e $A \subset U \subset M$ onde U é uma carta aberta de M. Por excisão, $H_i(M \mid A) \cong H_i(U \mid A)$ e a demonstração segue pelo Caso 4.

Caso 6. Seja M uma variedade n-dimensional e $A \subset M$ um subconjunto compacto. Como A é um subconjunto compacto de uma variedade, A pode ser escrito como $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ para conjuntos compactos A_i cada um destes contido numa carta de M. Consequentemente a combinação do Caso 5 para cada A_i e a indução do Caso 2 fornece o resultado. ∎

Agora, a existência da classe fundamental de variedades orientáveis R conexas e fechadas segue com um breve argumento.

Existência da Classe Fundamental. Seja M uma variedade de dimensão n conexa e fechada. Então

1. Se M é R-orientável, a aplicação $H_n(M; R) \to H_n(M \mid \{x\}; R) \cong R$ é um isomorfismo para todo $x \in$ M.

2. Se M não é R-orientável, a aplicação $H_n(M; R) \to H_n(M \mid \{x\}; R) \cong R$ é injetora com imagem $\{r \in R | 2r = 0\}$ para todo $x \in M$.

3. $H_i(M; R) = 0$ para $i > n$.

Demonstração.

Os itens 1 e 3 seguem imediatamente da parte 2 do Lema 14.3 colocando $A = M$.

2 Observe que, como M é conexa, cada seção em $\Gamma_R(M)$ é determinada por seu valor em um ponto $x \in M$. Como p é um aplicação de recobrimento, o módulo de seção $\Gamma_R(M)$ pode ser identificado com os componentes conexas de M_R que são levadas homeomorficamente via p para M. Como M é não orientável, a cobertura dupla orientada $p : \widetilde{M} \to M$ não é trivial (ou seja, conexa), portanto os componentes de M_R são da forma $r(\tilde{M})$, com $r : \tilde{M} \to M_R$ a aplicação contínua definida por $\mu \mapsto \mu \otimes r$. Os únicos pontos em $r(\tilde{M})$ que sob p são levados para $x \in M$ são $\mu_x \otimes r$ e $-\mu_x \otimes r = \mu_x \otimes (-r)$. Assim, $p|_{r(\tilde{M})}$ é um homeomorfismo se $r = -r$, ou $2r = 0$.

■

Em particular, $H_n(M; \mathbb{Z})$ é $\mathbb{Z}$ ou 0 dependendo se M é orientável ou não. Vamos guardar esse fato num corolário.

Seja M uma n-variedade. Se M for fechada e conexa, então

$$H_n(M; R) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } M \text{ é orientável} \\ 0 & \text{se } M \text{ é não orientável} \\ 0 & \text{se } M \text{ não é compacta.} \end{cases}$$

Pelo Teorema 14.4, existe uma classe fundamental se M é uma variedade fechada e R-orientável. Para mostrar que a recíproca também é verdadeira, seja $\mu \in H_n(M; R)$ uma classe fundamental e seja μ_x sua imagem em $H_n(M \mid \{x\}; R)$. A função $x \mapsto \mu_x$ é então uma orientação R pois a aplicação $H_n(M; R) \to H_n(M \mid \{x\}; R)$ fatora através de $H_n(M \mid B; R)$ para B uma bola aberta em M contendo x. Além disso, M deve ser compacta já que μ_x só pode ser diferente de zero para x na imagem de um ciclo representando μ, e esta imagem é compacta. Seja M uma variedade conexa e fechada de dimensão n. Então M admite uma classe fundamental coeficientes num R-módulo se, e somente se, for R-orientável.

Aplicação de Dualidade

Para M uma variedade orientada, definimos a aplicação de dualidade

$$D_M : H_c^p(M) \to H_{n-p}(M)$$

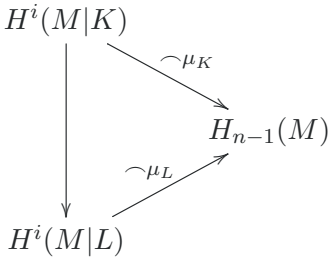
do seguinte modo. Para qualquer $\alpha \in H_c^p(M) = \varinjlim H^p(M|K)$, escolha um representante $\alpha' \in H^p(M, M \setminus K)$ e definimos

$$D(\alpha) = \alpha' \frown \mu_K$$

Essa aplicação está bem definida, pois para $K \subset L$, temos a restrição

$$\rho_K : H_n(M|L) \to H_n(M|K)$$

com $\rho_K(\mu_L) = \mu_K$. Então a naturalidade do produto cap nos diz o seguinte diagrama comuta:



Lema 14.4

Se M é a união de dois conjuntos abertos U e V, então existe um diagrama de sequências de Mayer-Vietoris, comutativo a menos de sinal:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H_c^p(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) & \longrightarrow & H_c^p(M) & \xrightarrow{\partial} & H_c^{p+1}(U \cap V) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle D_{U\cap V}} & & \downarrow{\scriptstyle D_U \oplus -D_V} & & \downarrow{\scriptstyle D_M} & & \downarrow{\scriptstyle D_{U\cap V}} & \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-p}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-p}(U) \oplus H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(M) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-p-1}(U \cap V) & \longrightarrow \cdots
\end{array} \tag{14.13}$$

Demonstração. Sejam conjuntos compactos K, L tais que $K \subset U$ e $L \subset V$. Então temos o diagrama, onde a linha superior e inferior são obtidas por Mayer-Vietoris e Excisão:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^p(U\cap V, U\cap V\setminus(K\cap L)) & \longrightarrow & H^p(U,U\setminus K)\oplus H^p(U,U\setminus L) & \longrightarrow & H^p(M,M\setminus(K\cup \\
& \downarrow \frown\mu_{K\cap L} & & \downarrow \frown\mu_K\otimes\frown-\mu_L & & \downarrow \frown\mu_{K\cup L} \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-p}(U\cap V) & \longrightarrow & H_{n-p}(U)\oplus H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(M) -
\end{array}$$

Podemos provar facilmente que os dois primeiros quadrados do diagrama comutam no nível de cadeias. E consequentemente tomando o limite direto temos que os dois primeiros quadrados de 14.13 comutam. Muito menos simples é o terceiro quadrado, que mostraremos que comuta a menos de um sinal.

Para isso, novamente, só precisamos mostrar que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
H^p(M, M\setminus(K\cup L)) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(U\cap V, U\cap V\setminus(K\cup L)) \\
\downarrow \frown\mu_{K\cap L} & & \downarrow \frown\mu_{K\cap L} \\
H_{n-p}(M) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-p-1}(U\cap V)
\end{array}$$

Seja $A = M\setminus K$ e $B = M\setminus L$. Então a aplicação δ é obtida a partir da sequência exata curta

$$0 \to S^*(M,A)\cap S^*(M,B) \to S^*(M,A)\oplus S^*(M,B) \to S^*(M, A\cap B) \to 0$$

Lembre-se de que usamos o fato de que $S^*(M, A\cup B) \to S^*(M,A)\cap S^*(M,B)$ induz isomorfismo em cohomologia. Para um cociclo $\phi \in S^*(M, A\cap B)$, escrevemos $\phi = \phi_A - \phi_B$ para $\phi_A \in S^*(M,A)$ e $\phi_B \in S^*(M,B)$. Então $\delta[\phi]$ é representado pelo cociclo $\delta\phi_A = \delta\phi_B \in S^*(M,A)\cap S^*(M,B)$. Da mesma forma, se $z \in S_*(M)$ representa uma classe de homologia, então $\partial[z] = [\partial z_U]$, onde $z = z_U - z_V$ com $z_U \in S_*(U)$ e $z_V \in S_*(V)$.

Através da subdivisão baricêntrica, a classe $\mu_{K\cup L}$ pode ser representada por uma cadeia α que é uma soma $\alpha = \alpha_{U\setminus L} + \alpha_{U\cap V} + \alpha_{V\setminus K}$ de cadeias em três conjuntos abertos $U\setminus L, U\cap V$ e $V\setminus K$ respectivamente. Pela unicidade de $\mu_{K\cap L}$ a cadeia $\alpha_{U\cap V}$ representa $\mu_{K\cap L}$, pois as outras duas cadeias estão no complemento de $K\cap L$. Da mesma forma, a cadeia $\alpha_{U\setminus L} + \alpha_{U\cap V}$ representa μ_K. Agora seja ϕ

um cociclo representando um elemento em $H^p(M, M \setminus (K \cup L))$. O morfismo δ, leva esse cociclo para $\delta\phi_A$. Continuando para baixo, obtemos $\delta\phi_A \frown \alpha_{U\cap V}$, que representa a mesma classe de homologia que $(-1)^{n-p-1}\phi_A \frown \partial\alpha_{U\cap V}$, pois

$$\partial\left(\phi_A \frown \alpha_{U\cap V}\right) = (-1)^{n-p}\delta\phi_A \frown \alpha_{U\cap V} + \phi_A \frown \partial\alpha_{U\cap V}.$$

Por outro lado, ϕ é primeiro levado para $\phi \frown \alpha \in H_{n-p}(M)$. Se escrevermos ele como uma soma de uma cadeia em U e uma cadeia em V:

$$\phi \frown \alpha = \phi \frown \alpha_{U\setminus L} + \phi \frown \left(\alpha_{U\cap V} + \alpha_{V\setminus K}\right) .$$

e por definição $\partial[\phi \frown \alpha] = \left[\partial\left(\phi \frown \alpha_{U\setminus L}\right)\right] \in H_{n-k-1}(U \cap V)$.

$$\partial\left(\phi \frown \alpha_{U\setminus L}\right) = \phi \frown \partial\alpha_{U\setminus L} = \phi_A \frown \partial\alpha_{U\setminus L} = -\phi_A \frown \partial\alpha_{U\cap V}$$

A segunda igualdade segue do fato que ϕ_B é zero em $M \setminus L$. A última igualdade segue de $\alpha_{U\setminus L} + \alpha_{U\cap V} = \mu_K$ que é uma cadeia em $U \setminus K$. ∎

Teorema da Dualidade de Poincaré

Agora, podemos finalmente enunciar o Teorema da Dualidade de Poincaré.

Dualidade de Poincaré. Se M é uma variedade R-orientável de dimensão n com classe fundamental $\mu_M \in H_n(M; R)$, então a aplicação $D_M : H_c^k(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$ dada por $D_M(\alpha) = \alpha \frown \mu_M$ é um isomorfismo para todo k.

Demonstração. Como na demonstração do Lema 14.3, esta demonstração será feita a partir de casos específicos para casos mais gerais baseada na estratégia do Lema de Bootstrap.

Caso 1. Seja M um disco aberto. A aplicação D_M pode ser identificada com a aplicação $D_M : H^k(M; R) \to H_{n-k}(M; R)$ dada por

$$D_M(\alpha) \coloneqq \alpha \frown \mu_{\Delta^n},$$

onde μ_{Δ^n} é definida pela aplicação inclusão de $\iota : \Delta^n \to M$. Os grupos de homologia e cohomologia são 0 quando $k \neq n$, então só precisamos considerar esse caso. Com $k = n$, o gerador de $H^n(M; R) \cong \mathrm{Hom}(M, R)$ é representado por um cociclo ϕ que é 1 em Δ^n. Assim,

$$\phi \frown \mu_{\Delta^n} = [\phi(\Delta^n|_{[v_0,\ldots,v_n]})\Delta^n|_{[v_n]}] = [\Delta^n|_{[v_n]}] = [v_n]$$

no qual o lado direito é o último vértice de Δ^n e é um gerador de $H_0(M; R)$

Caso 2. Seja $M = \mathbb{R}^n$. Este caso segue do Caso 1 observando que $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo ao disco.

Caso 3. Seja $M = U \cup V$ onde $U, V \subset M$ são abertos e tais que teorema vale para U, V e $U \cap V$. Esse caso decorre imediatamente do Lema 14.4 e do Lema dos Cinco.

Caso 4. Seja $M = \bigcup_{\alpha} U_i$ onde $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ é uma sequência de conjuntos abertos e o teorema vale para cada U_i. Por excisão, $H_c^k(U)$ é o limite $\varinjlim_{A} H^k(M \mid A)$ com o limite direto tomado sobre $A \subset U_i$ compacto, então temos as aplicações naturais $H_c^k(U_i) \to H_c^k(U)$ pois $U_i \subset U_{i+1}$. Isso nos permite tomar o limite direto novamente, agora sobre U_i e ver que

$$H_c^k(M) \cong \varinjlim_{U_i} H_c^k(U_i) \cong \tag{14.14}$$

$$H_{n-k}(M) \cong \varinjlim_{U_i} H_{n-k}(U_i) \tag{14.15}$$

dado que $M = \bigcup_{i} U_i$ e cada conjunto compacto em M está contido em um dos U_i. Assim, D_M é o limite dos isomorfismos D_{U_i} e é, portanto, ele próprio um isomorfismo.

Caso 5. Seja M um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Para qualquer subconjunto aberto convexo V de M temos a validade do teorema pois V é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Se V, W são ambos subconjuntos abertos convexos de $\mathbb{R}^n$, então $V \cap W$ também é e o teorema é válido para $V \cup W$ pelo Caso 3. Por indução, também é válido para qualquer $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Agora, podemos escrever M como a união enumerável de bolas $V_i M = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, ou seja, uma união enumerável de subconjuntos abertos convexos. Fazendo $W_j = \bigcup_{i=1}^{j} V_i$, temos uma sequência de subconjuntos abertos em M que satisfazem o teorema. Assim, obtemos o resultado desejado para M pelo Caso 4.

Caso 6. Seja M uma variedade. A coleção de conjuntos abertos $U \subset M$ para os quais as aplicações de dualidade D_U são isomorfismos é parcialmente ordenada por inclusão. A união de toda subcoleção totalmente ordenada está na coleção do

Caso 4. Pelo Lema de Zorn, temos a existência de um conjunto aberto maximal U para o qual o teorema vale.

Suponha $U \neq$ M. Escolha um ponto $x \in M \setminus U$ e uma vizinhança aberta V de x homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. O teorema é válido para V e $U \cap V$ pelos Casos 2 e 4. Pelo Caso 3 e pelo fato de que o teorema é válido para U, ele é válido para $U \cup V$, o que contradiz a maximalidade de U. ∎

Quando a variedade M é compacta temos que $H_c^k(M;R) = H^k(M;R)$ e temos a seguinte dualidade:

Dualidade de Poincaré. Se M é uma variedade n-dimensional fechada e R-orientável com classe fundamental $\mu_M \in H_n(M;R)$, então a aplicação

$$D_M : H^k(M;R) \longrightarrow H_{n-k}(M;R)$$

definida por $D_M(\alpha) = \alpha \frown \mu_M$ é um isomorfismo para todo k.

Finalmente, observamos que as definições e resultados anteriores podem ser adaptadas para homologias e cohomologias com coeficientes num R-módulo e assim temos o seguinte resultado.

Dualidade de Poincaré para coeficientes em um módulo. Seja M uma variedade n-dimensional, R anel comutativo com unidade e G um R-módulo. Se M é R-orientável, então a aplicação

$$D_M : H_c^p(M;G) \to H_{n-p}(M;G)$$

é um isomorfismo para todo $p \geq 0$. Em particular, se $R = \mathbb{Z}_2$, a aplicação acima é um isomorfismo, seja M orientável ou não.

Se M é compacta e R orientável, então a aplicação

$$D_M : \omega \mapsto \omega \frown \mu_M$$

é um isomorfismo entre $H^p(M;G)$ e $H_{n-p}(M;G)$.

14.5. Aplicações

Um fato de extrema relevância sobre uma variedade compacta M é que seus grupos de homologia são finitamente gerados. cohomologia. Esse fato será usado na demonstração do próximo teorema.

Se M é uma variedade conexa n-dimensional fechada então

1. Se M é orientável, então $H_{n-1}(M, R)$ não tem torção, e para todo R,

$$H_n(M; R) \simeq R \simeq H^n(M; R).$$

2. Se M é não orientável, então o subgrupo de torção de $H_{n-1}(M)$ tem ordem 2, e para todo R,

$$H_n(M; R) \simeq \ker\left(R \xrightarrow{2} R\right) \coloneqq {}_2R \quad \text{e} \quad H^n(M; R) \simeq R/2R$$

Em particular, $H_n(M) = 0$ e $H^n(M) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Demonstração.

1 O cálculo quando M é orientável é imediato, pois

$$H^n(M; R) \simeq H_0(M; R) \quad \text{e} \quad H_n(M; R) \simeq H^0(M; R)$$

pela dualidade de Poincaré; e os grupos 0-dimensionais são isomorfos a R porque M é conexa.

Vamos demonstrar que $H_{n-1}(M)$ não tem torção. Pelo Teorema dos Coeficientes Universais para Cohomologia temos

$$H^n(M) \simeq \operatorname{Hom}\left(H_n(M), \mathbb{Z}\right) \oplus \operatorname{Ext}\left(H_{n-1}(M), \mathbb{Z}\right).$$

e como $\operatorname{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, e $\operatorname{Ext}\left(H_{n-1}(M), \mathbb{Z}\right)$ é isomorfo ao subgrupo de torção de $H_{n-1}(M)$, o subgrupo de torção se anula.

3 O isomorfismo $H_n(M; R) \simeq \ker\left(R \xrightarrow{2} R\right)$ já foi demonstrado.

Pelo Teorema dos Coeficientes Universais para Homologia temos

$$0 \to H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes G \to H_i(X; G) \to \operatorname{Tor}_1(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), G) \to 0.$$

Tomando $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e observando que $\operatorname{Tor}_1(H_{i-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ é o subgrupo de torção de $H_{i-1}(X; \mathbb{Z})$ que denotaremos por T temos

$$0 \to H_i(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to T \to 0.$$

Mas é imediato que ${}_2\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ e assim temos o resultado.

Finalmente se M é não orientável então $H_n(M) = 0$ e como, acabamos demonstrar, $H_{n-1}(M)$ é a soma direta de um grupo abeliano livre e $\mathbb{Z}_2$. Assim, $\mathrm{Hom}\,(H_n(M), G) = 0$ e $\mathrm{Ext}\,(H_{n-1}(M), G) \cong \mathrm{Ext}\,(\mathbb{Z}_2, G) \cong G/2G$.

■

Em particular, o anterior mostra que se $R = \mathbb{Z}$ e se M é compacta e não orientável então $H_n(M; R) = (0)$, e se M é compacta então $H_n(M; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. O teorema também fornece uma caracterização nítida da orientabilidade de uma variedade n-dimensional compacta em termos do anulamento de $H_n(M; \mathbb{Z})$.

Uma variedade fechada de dimensão ímpar tem característica de Euler-Poincaré 0.

Demonstração. Suponha que M seja uma variedade n-dimensional fechada e orientável. A dualidade de Poincaré implica que $H_i(M) \cong H^{n-i}(M)$ então naturalmente seus postos são iguais. Além disso, o Teorema do Coeficiente Universal implica que

$$\mathrm{posto}\, H^{n-i}(M) = \mathrm{posto}\, H_{n-1}(M).$$

Portanto, se n é ímpar, os termos de $\sum_i (-1)^i \mathrm{posto}\, H_i(M)$ se cancelam em pares e, portanto, a característica de Euler de M é zero.

Se M não for orientável aplicamos a dualidade de Poincaré com $R = \mathbb{Z}_2$. Neste caso cada $H_p(M; \mathbb{Z}_2)$ e cada $H^{2m+1-p}(M; \mathbb{Z}_2)$ é um espaço vetorial e seu posto é igual a sua dimensão. Como $\mathbb{Z}_2$ é um corpo, $H^{2m+1-p}(M; \mathbb{Z}_2)$ e $H_{2m+1-p}(M; \mathbb{Z}_2)$ são espaços duais de mesma dimensão e, como acima, concluímos que

$$\sum_{p=0}^{2m+1} (-1)^p \dim H_p(M; \mathbb{Z}_2) = 0.$$

Se pudermos mostrar que

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{2m+1} (-1)^p \dim H_p(M; \mathbb{Z}_2),$$

acabamos. Pelo teorema do Coeficiente Universal para Homologia temos que

$$H_n(X, A; \mathbb{Z}_2) \cong (H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\,(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$$

e pelo fato de que

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\operatorname{mdc}(m,n)}$$

temos que

- o produto tensorial de cada termo $\mathbb{Z}^k$ em $H_p(M;\mathbb{Z})$ com $\mathbb{Z}_2$ fornece um termo $(\mathbb{Z}_2)^k$ em $H_p(M;\mathbb{Z}_2)$
- o produto tensorial de cada termo $\mathbb{Z}_m$ em $H_p(M;\mathbb{Z})$ com $m > 2$ com $\mathbb{Z}_2$ produz 0
- e o produto tensorial de cada termo em $(\mathbb{Z}_2)^h$ em $H_p(M;\mathbb{Z})$ com $\mathbb{Z}_2$ produz um termo $(\mathbb{Z}_2)^h$ em $H_p(M;\mathbb{Z}_2)$, e o mesmo termo em $(\mathbb{Z}_2)^h$ em $H_{p+1}(M;\mathbb{Z}_2)$ como a contribuição de $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left((\mathbb{Z}_2)^h, \mathbb{Z}_2\right)$.

A contribuição dos dois termos $(\mathbb{Z}_2)^h$ para a soma $\sum_{p=0}^{2m+1}(-1)^p \dim H_p(M;\mathbb{Z}_2)$ cancelam, pois seus respectivos sinais são $(-1)^p$ e $(-1)^{p+1}$, e dessa forma

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{2m+1} (-1)^p \dim H_p(M;\mathbb{Z}_2),$$

Exercícios

Ex. 182 — Mostre que todo espaço de recobrimento de uma variedade orientável é uma variedade orientável.

Ex. 183 — Para uma aplicação $f : M \to N$ entre variedades n-dimensionais orientáveis fechadas conexas com classes fundamentais μ_M e μ_N, o grau de f é definido como o inteiro d tal que $f_*(\mu_M) = d\mu_N$, logo o sinal do grau depende da escolha das classes fundamentais. Mostre que para qualquer variedade n-dimensional fechada orientável M existe uma aplicação $M \to \mathbb{S}^n$ de grau 1.
Dica: Considere uma bola fechada em M.

Ex. 184 — Mostre que uma projeção de espaço de recobrimento p com folhas $M \to N$ tem grau p, quando M e N são variedades orientáveis, conexas e fechadas.

Ex. 185 — Dada uma ação de um grupo G em uma variedade orientável M por homeomorfismos que preservam orientação, mostre que M/G também é orientável.

Ex. 186 — Seja M uma variedade n-dimensional conexa. Suponha que para cada conjunto compacto $K \subset M$ seja escolhido um elemento $h_K \in H_n(M|K;G)$ tal que $j_{K,x}(h_K) = h_x$ para qualquer $x \in K$, e $2h_x \neq 0$ para todo $x \in M$. Prove que a variedade M é orientável.
Dica: Mostre que existe um elemento fixo $h \in G$ e orientações locais únicas μ_x para todo $x \in M$ tal que $h_x = \alpha(\mu_x \otimes h)$. Finalmente observe que h não pode ser um elemento de ${}_2G$.

Ex. 187 — Seja M é uma variedade conexa, e que para cada compacto $K \subset M$, $H_n(M|K;\mathbb{Z}) \neq \{0\}$. Prove que M é orientável.
Dica: Use o fato de que quaisquer dois pontos de M estão contidos em um subconjunto conexo compacto de M, por exemplo, um caminho que une os dois pontos.

Ex. 188 — Para uma variedade n-dimensional M e um subespaço compacto $A \subset M$, mostre que $H_n(M|A;R)$ é isomorfo ao grupo $\Gamma_R(A)$ de seções do espaço de recobrimento $M_R \to M$ sobre A.

Ex. 189 — Demonstre as propriedades do produto cap enunciadas na Proposição 14.3.

Ex. 190 —

1. Mostre que $(\alpha \frown \varphi) \frown \psi = \alpha \frown (\varphi \smile \psi)$ para todo $\alpha \in C_k(X;R), \varphi \in C^l(X;R)$, e $\psi \in C^m(X;R)$
2. Deduza que o produto cap torna $H_*(X;R)$ um módulo a direita $H^*(X;R)$.

Ex. 191 — Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ conexo e aberto. Os seguintes são equivalentes:

a. D é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$

b. D é simplesmente conexo.

c. $H_1(D;\mathbb{Z}) = 0$.

d. $H^1(D;\mathbb{Z}) = 0$.

e. $\mathbb{R}^2 \setminus D$ é conexo.

f. O bordo de D é conexo.

g. Se $J \subset D$ é uma curva de Jordan, então D contém o interior de J.

Ex. 192 — Se M^n é uma variedade n-dimensional conexa, orientável e compacta com $H_1(M^n;\mathbb{Z}) = 0$ e se $N^{n-1} \subset M^n$ é uma variedade $(n-1)$-dimensional compacta e conexa, então mostre que $M^n \subset N^{n-1}$ possui exatamente duas componentes com N^{n-1} sendo o bordo topológico de cada uma.

Ex. 193 — Mostre que $H_c^0(X;G) = 0$ se X é conexo por caminhos e não compacto.

Ex. 194 — Mostre que a característica de Euler de uma variedade $(4n+2)$-dimensional fechada e orientada é par.

Ex. 195 — Seja M uma variedade n-dimensional compacta e orientável. Prove que os grupos de homologia $H_q(M;\mathbb{Z})$ e $H_{n-q}(M;\mathbb{Z})$ têm os mesmos postos. Além disso, mostre que o subgrupo de torção de $H_q(M;\mathbb{Z})$ é isomorfo ao subgrupo de torção de $H_{n-q-1}(M;\mathbb{Z})$.
Observação: Esta é a forma como o teorema da dualidade de Poincaré era frequentemente enunciado antes da introdução dos grupos de cohomologia.

Ex. 196 — Mostre que $H_c^n(X \times \mathbb{R};G) \cong H_c^{n-1}(X;G)$ para todo n.

Ex. 197 — Mostre que para um Δ-complexo localmente compacto X os grupos de cohomologia simplicial e singular $H_c^i(X;G)$ são isomorfos. Isso pode ser feito mostrando que $\Delta_c^i(X;G)$ é a união dos subgrupos $\Delta^i(X,A;G)$ quando A varia sobre subcomplexos de X que contêm todos, exceto um número finito de simplexos, e também que $C_c^i(X;G)$ é a união dos subgrupos $C^i(X,A;G)$ para a mesma família de subcomplexos A.

Ex. 198 — Mostre que se uma variedade conexa M é o bordo de uma variedade compacta N, então a característica de Euler de M é par. Conclua que $\mathbb{RP}^{2n}$ e $\mathbb{CP}^{2n}$ não podem ser bordos.
Dica Cole duas cópias de N pelo bordo M.

Ex. 199 — Mostre que se M é uma variedade n-dimensional contrátil compacta, então $H_i(\partial M;\mathbb{Z}) \simeq H_i\left(\mathbb{S}^{n-1};\mathbb{Z}\right)$ para todo i.

Referências

ADHIKARI, Mahima Ranjan. **Basic algebraic topology and its applications**. [*S. l.*]: Springer, 2016.

ALUFFI, Paolo. **Algebra: chapter 0**. [*S. l.*]: American Mathematical Soc., 2021. v. 104.

ANDERSON, Frank W; FULLER, Kent R. **Rings and categories of modules**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 13.

ARNOLD, Vladimir I. **Ordinary differential aligns**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 1992.

AWODEY, Steve. **Category theory**. [*S. l.*]: Oxford university press, 2010.

BLYTH, Thomas Scott. **Module theory: an approach to linear algebra**. [*S. l.*]: University of St Andrews, 2018.

BREDON, Glen E. **Topology and geometry**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 139.

BRUZZO, Ugo; OTERO, Beatriz Graña. **Derived functors and sheaf cohomology**. [*S. l.*]: World Scientific, 2020.

CAMERON, Peter J. **Sets, logic and categories**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

CARTAN, Henry; EILENBERG, Samuel. **Homological algebra**. [*S. l.*]: Princeton university press, 1999. v. 41.

CROOM, Fred H. **Basic concepts of algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

CROSSLEY, Martin D. **Essential topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2006.

DAVIS, James Frederic; KIRK, Paul. **Lecture notes in algebraic topology**. [*S. l.*]: American Mathematical Soc., 2001. v. 35.

DEO, Satya. **Algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer, 2018.

DIECK, Tammo tom. **Algebraic topology**. [*S. l.*]: European Mathematical Society, 2008. v. 8.

DIEUDONNÉ, Jean; DIEUDONNE, Jean Alexandre. **A history of algebraic and differential topology, 1900-1960**. [*S. l.*]: Springer, 1989.

DIMCA, Alexandru. **Sheaves in topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2004.

EDELSBRUNNER, Herbert; HARER, John L. **Computational topology: an introduction**. [*S. l.*]: American Mathematical Society, 2022.

EILENBERG, Samuel; STEENROD, Norman E. Axiomatic approach to homology theory. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 31, n. 4, p. 117–120, 1945.

FÉLIX, Yves; TANRÉ, Daniel. **Topologie algébrique: cours et exercices corrigés**. [*S. l.*]: Dunod, 2010.

FINE, Benjamin; ROSENBERGER, Gerhard. **The fundamental theorem of algebra**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 1997.

FOMENKO, Anatolij T. **Visual geometry and topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

FOMENKO, Anatolij Timofeevič; FUKS, Dmitrij B. **Homotopical topology**. [*S. l.*]: Springer, 2016. v. 273.

FORSTER, Otto. **Lectures on Riemann surfaces**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 81.

FOX, RH. On homotopy type and deformation retracts. **Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 44, n. 1, p. 40–50, 1943.

FRANJOU, Vincent; TOUZÉ, Antoine. **Lectures on functor homology**. [*S. l.*]: Springer, 2015.

FRIEDMAN, Greg. An elementary illustrated introduction to simplicial sets. **arXiv preprint arXiv:0809.4221**, 2008.

FRITSCH, Rudolf; PICCININI, Renzo. **Cellular structures in topology**. [*S. l.*]: Cambridge University Press, 1990. v. 19.

FULTON, William. **Algebraic topology: a first course**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 153.

GALLIER, Jean; QUAINTANCE, Jocelyn. **Homology, Cohomology, and Sheaf Cohomology for Algebraic Topology, Algebraic Geometry, and Differential Geometry**. [*S. l.*]: World Scientific, 2021.

GIBLIN, Peter. **Graphs, surfaces and homology: an introduction to algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013.

GRANDIS, Marco. **Algebraic Topology: A Structural Introduction**. [*S. l.*]: World Scientific, 2021.

HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. [*S. l.*]: Cambridge University Press, 2002.

HAUSMANN, Jean-Claude. **Mod two homology and cohomology**. [*S. l.*]: Springer, 2014. v. 10.

HILTON, Peter J; STAMMBACH, Urs. **A course in homological algebra**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 4.

HUNGERFORD, Thomas W. **Algebra**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 73.

JAMES, Ioan Mackenzie. **Handbook of algebraic topology**. [*S. l.*]: Elsevier, 1995.

JANICH, Klaus. **Topology (Undergraduate Texts in Mathematics)**. [*S. l.*]: Springer Verlag, 1984.

KACZYNSKI, Tomasz; MISCHAIKOW, Konstantin Michael; MROZEK, Marian. **Computational homology**. [*S. l.*]: Springer, 2004. v. 3.

KAMMEYER, Holger. **Introduction to Algebraic Topology**. [*S. l.*]: Springer Nature.

KNAPP, Anthony W. **Advanced algebra**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2007.

KOZLOV, Dimitry. **Combinatorial algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 21.

LAM, Tsit-Yuen. **Lectures on modules and rings**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 189.

LANG, Serge. **Algebra**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 211.

LEE, John. **Introduction to topological manifolds**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2010. v. 202.

LEE, John M. **Smooth manifolds**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

LEINSTER, Tom. **Basic category theory**. [*S. l.*]: Cambridge University Press, 2014. v. 143.

LIMA, Elon Lages. Grupo fundamental e espaços de recobrimento, 2a edição. **IMPA, CNPq, Rio de Janeiro**, 1998.

LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. [*S. l.*]: IMPA, 2009.

MAC LANE, Saunders. **Categories for the working mathematician**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 5.

MACLANE, Saunders. **Homology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012.

MASSEY, William S. **A basic course in algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer, 2019. v. 127.

MASSEY, William S. A history of cohomology theory. *In:* HISTORY of topology. [*S. l.*]: Elsevier, 1999. p. 579–603.

MASSEY, William S. **Algebraic topology: an introduction**. [*S. l.*]: Springer, 1967. v. 56.

MASSEY, William S. **Singular homology theory**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 70.

MATOUŠEK, Jiří; BJÖRNER, Anders; ZIEGLER, Günter M. **Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry**. [*S. l.*]: Springer, 2003. v. 2003.

MATVEEV, Sergei Vladimirovich. **Lectures on algebraic topology**. [*S. l.*]: European Mathematical Society, 2006. v. 3.

MAY, J Peter. **A concise course in algebraic topology**. [*S. l.*]: University of Chicago press, 1999.

MILLER, Haynes R. **Lectures on Algebraic Topology**. [*S. l.*]: World Scientific, 2021.

MILNOR, John. On axiomatic homology theory. **Pacific Journal of Mathematics**, Pacific Journal of Mathematics, A Non-profit Corporation, v. 12, n. 1, p. 337–341, 1962.

MILNOR, John. On spaces having the homotopy type of CW-complex. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 90, n. 2, p. 272–280, 1959.

MUNKRES, James R. **Elementary Differential Topology.(AM-54), Volume 54**. [*S. l.*]: Princeton University Press, 2016. v. 54.

MUNKRES, James R. **Elements of algebraic topology**. [*S. l.*]: CRC press, 2018.

MUNKRES, James R. **Topology**. [*S. l.*]: Prentice Hall Upper Saddle River, 2000. v. 2.

OSBORNE, M Scott. **Basic homological algebra**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 196.

PIERCE, Benjamin C. **Basic category theory for computer scientists**. [*S. l.*]: MIT press, 1991.

PRASOLOV, Viktor Vasilevich. **Elements of combinatorial and differential topology**. [*S. l.*]: American Mathematical Society, 2022. v. 74.

RICHESON, David S. **Euler's gem: the polyhedron formula and the birth of topology**. [*S. l.*]: Princeton University Press, 2019.

ROMAN, Steven; AXLER, S; GEHRING, FW. **Advanced linear algebra**. [*S. l.*]: Springer, 2005. v. 3.

ROTMAN, Joseph J. **An introduction to algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 119.

ROTMAN, Joseph J. **An introduction to homological algebra**. [*S. l.*]: Springer, 2009. v. 2.

ROTMAN, Joseph J. **Notes on homological algebra**. [*S. l.*]: Van Nostrand Reinhold, 1970. v. 26.

ROTMAN, Joseph J. **The theory of groups: An introduction**. [*S. l.*]: Allyn e Bacon, 1973.

SPANIER, Edwin H. **Algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 1989.

STILLWELL, John. **Classical topology and combinatorial group theory**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 72.

VERMANI, Lekh R. **An elementary approach to homological algebra**. [*S. l.*]: CRC Press, 2003.

VICK, James W. **Homology theory: an introduction to algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 145.

WALLACE, Andrew H. **Algebraic topology: homology and cohomology**. [*S. l.*]: Courier Corporation, 2007.

WEIBEL, Charles A. **An introduction to homological algebra**. [*S. l.*]: Cambridge university press, 1995.

WEIBEL, Charles A. **History of homological algebra**. [*S. l.*]: na, 1999.

WEINTRAUB, Steven H. **Fundamentals of algebraic topology**. [*S. l.*]: Springer, 2014. v. 270.

WILLARD, Stephen. **General topology**. [*S. l.*]: Courier Corporation, 2012.

Índice Remissivo

R-módulo, 166
    à direita, 165
    à esquerda, 165
R-orientação da variedade, 461
R-orientável, 461
R-submódulo, 166
Δ-complexo
    conexo por caminho, 250
ℓ-esqueleto, 229
n-bordo, 189, 244
n-cadeias, 189
n-ciclo, 189, 244
n-cobordo, 211
n-cocadeias, 210
n-cociclo, 211
n-célula, 361, 386
n-célula aberta, 386
n-esqueleto, 387
n-simplexo, 235
p-cadeias celulares, 396
(diferenciavelmente) orientável, 464

acíclico, 294
anulador, 171
aplicação
    homotopicamente nula, 22
aplicação R-linear, 166
aplicação de cadeias, 191
aplicação de cocadeia, 424
aplicação de cocadeias, 212
aplicação de recobrimento, 68
aplicações homotópicas, 18
    relativamente, 30
associatividade, 150
automorfismo, 97, 153
ação do grupo fundamental na fibra, 112

base, 170
bom par, 305
bordo, 222, 289

caminho, 32
    constante, 33
    fechado, 32
caminho inverso, 33
característica de Euler-Poincaré, 262
carta local, 5

categoria
    pré-aditiva, 159
categoria CW, 394
categoria produto, 155
ciclo fundamental, 284
ciclos homólogos, 189, 245
cinde, 179
classe fundamental, 464
cocadeia
    suporte compacto, 453
cocadeias singulares, 414
cociclos cohomólogos, 211
codomínio, 151
coeficientes de torção, 175, 252
cohomologia, 211
cohomologia simplicial com coeficientes em R, 267
cohomologia singular, 418
cokernel, 167
complexo de cadeia
    acíclico, 190
complexo de cadeias, 188
    isomorfos, 194
    limitado, 191
    limitado inferiormente, 191
    limitado superiormente, 191
    quase-isomorfo, 194
complexo de cadeias celulares, 398
complexo de cocadeias, 210
complexo de codadeias simpliciais, 267
complexo quociente, 191
complexo simplicial, 227
    localmente finito, 227
complexo simplicial abstrato, 232
composição, 150
comuta, 151
comutativo, 151
concatenação, 36
cone, 330
cone duplo, 3
conjunto
    convexo, 20
conjunto fundamental, 77
conjunto gerador, 170
contradomínio, 151
coordenadas baricêntricas, 222
CW
    categoria, 394
CW-complexo, 391
célula, 361, 386
célula fechada, 393

decomposição celular, 391
Δ-complexo, 234
diagrama comutativo, 151
diferencial, 189, 210, 242
dimensão de um CW-complexo, 387
dimensão finita, 387
dirigido, 323
domínio, 151
domínio de ideais principais, 175
domínio de integridade, 174
dual, 154, 155, 158

elemento
    de torção, 171

livre, 171
elemento neutro, 150
endomorfismo, 152
epimorfismo, 153
equivalência homotópica, 26, 196
Esfera Infinita, 410
espaço
contrátil, 28
recobrimento, 68
espaço de base, 68
espaço de órbitas, 77
espaço topológico
triangularizável, 233
espaços de recobrimento
equivalentes, 97
isomorfos, 97
espaços de recobrimento isomorfos, 97
estrela, 239
estrelado, 294
estrutura de CW-complexo, 387

face, 223, 288
fecho convexo, 220
fibra, 70
fiel, 159
finito, 227, 387
flechas, 150
folhas, 68
fronteira, 222
funtor, 156, 299, 420
aditivo, 159
exato, 183
exato à direita, 183
exato à esquerda, 183
fiel, 159
plenamente fiel, 159
pleno, 159
funtor contravariante, 157
funtor covariante, 157
funtores de esquecimento, 156

G-recobrimento, 81
garrafa de Klein, 9
grau, 368
grau do recobrimento, 70
grupo
n-ciclos, 244
p-bordos, 244
de homologia, 245
grupo de automorfismo, 99
grupo de cadeias simpliciais, 242
grupo fundamental, 45
grupos
homologia, 291
homologia reduzida
com coeficientes em G, 341
grupos de homologia reduzida, 341
grupóide fundamental, 41
gênero da superfície, 12

homeomorfismo local, 67
homologia, 189
reduzida, 293
singular reduzida
com coeficientes, 343
homologia celular, 398
homologia local, 456

homologia reduzida singular, 293
homologia simplicial, 245
homologia simplicial com coeficientes em R, 253
homomorfismo de aumentação, 250
homomorfismo de bordo, 242, 289
homomorfismo de cisão, 182
homomorfismo de cobordo, 415
homomorfismo de conexão, 203
homomorfismo de recobrimento, 97
homomorfismo induzido, 48, 192, 212
homotopia, 18
    extremidades fixas, 33
    linear, 21
    livre, 35
    relativa, 30
homotopia de cadeias, 195
homotopia de cocadeias, 212
homotopia relativa, 31
homotopicamente equivalentes, 196
homólogos, 291

identidade, 150
inversa, 152
inversa homotópica, 26, 196
isomorfismo, 152
isomorfismo de R-módulos, 166
isomorfismo natural, 160
isomorfos, 152

justaposição, 36

laço com base em x_0, 32
Lema da Cobra, 205
Lema do Zig-Zag, 198, 213
levantamento, 58, 83, 84
limite direto, 324
livre, 79
livremente, 79
localmente simplesmente conexo, 102

maximal, 464
monomorfismo, 153
morfismos, 150
módulo
    n-ciclos, 189
    n-cociclos, 211
    n-cociclos simpliciais, 267
    p-ciclos singulares, 290
    p-cociclos singulares, 416
    cohomologia, 211
    com torção, 171
    cíclico, 170
    de torção, 171
    fiel, 171
    finitamente gerado, 170
    homologia, 189
    homologia relativa, 208
    homologia singular, 291
    livre, 170
    livre de torção, 171
módulo de cadeias simplicial, 253
módulo de cadeias singulares, 289
módulo de cocadeias singulares, 414
módulo de cohomologia singular, 417, 418
módulo de homologia simplicial relativa com coeficientes em R,

255
módulo quociente, 167
módulos
p-bordos, 189
p-bordos singulares, 290
p-cobordos, 211
p-cobordos simpliciais, 267
p-cobordos singulares, 416

nervo, 239
normal, 99
número de Betti, 252, 262
número de folhas, 70
número de Lebesgue, 86, 336

objetos, 150
operador bordo, 189
operador de cobordo, 210, 415
operação de colchete, 295
oposta, 154
orientado, 464
orientação, 461
orientação da variedade, 460
orientação diferenciável , 464
orientação local, 456

par topológico, 302
pequeno, 314
plano projetivo, 8
plenamente fiel, 159
pleno, 159
poliedro, 229
polítopo, 229
posto, 173, 252
posto livre, 175
princípio da dualidade, 155
produto cap, 466
produto cruzado, 349
produto de caminhos, 36
produto direto, 168
produto tensorial, 176
propriamente descontínua, 77

quase-isomorfimo, 194

recobrimento duplo, 70
recobrimento duplo orientável, 460
recobrimento universal, 70
regular, 99
retrato, 24
retrato de deformação forte, 25
retrato por deformação, 24
retração, 24

semilocalmente simplesmente conexo, 103
separa, 359
sequência
exata de complexos, 197
sequência exata, 178
do par, 209, 258
cindida, 179
curta, 178
longa, 178
longa de uma tripla, 307
simplesmente conexo, 53
simplexo, 220
simplexo aberto, 222
simplexo singular, 288
sistema dirigido, 324

soma conexa, 10
soma direta, 168
sub-Δ-complexo, 254
subcomplexo, 394
subcomplexo de cadeias, 191
subcomplexo simplicial, 229
superfície, 8
suporte da cocadeia, 275
suspensão, 3

Teorema de Mayer-Vietoris, 283
tipo de homotopia, 26, 196
tipo finito, 387
transformação de deck, 97
transformação natural, 160
transformações de deck, 99
transformações de recobrimento, 99
triangularização, 233
triangulação, 233

união por um ponto, 1

variedade
    orientável, 461
variedade suave, 6
variedade topológica, 5
vizinhança conveniente, 77
vizinhanças distinguidas, 68
vizinhanças elementares, 68