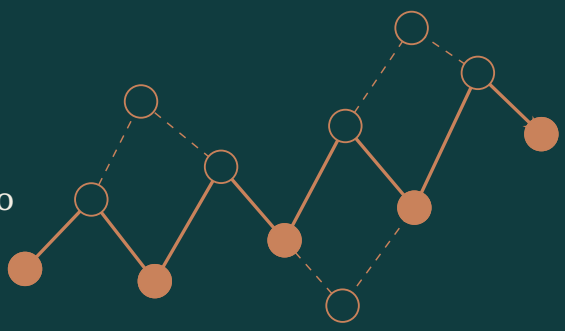
MODELOS, DINÂMICA E APLICAÇÕES

Introdução aos Processos Estocásticos

Cadeias de Markov, processos de Poisson, martingais, MCMC e cálculo de Itô



Daniel Miranda Machado

Texto: Daniel Miranda Machado.
Universidade Federal do ABC — MCZB018-13.
Composição em formato 17 × 24 cm.
Versão de trabalho – 31 de outubro de 2026.

Colaboração matemática e editorial

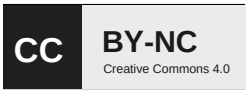
Este livro é de autoria de **Daniel Miranda** e foi desenvolvido e preparado editorialmente em colaboração com **Soleira — ChatGPT (OpenAI), GPT-5.6 Sol**. Ao longo do processo, a colaboração compreendeu o desenvolvimento, a reorganização e a reescrita de partes do texto; o refinamento de definições, teoremas, demonstrações e argumentos; a construção e o aperfeiçoamento de exemplos, aplicações, exercícios, resoluções e gabaritos; e o sequenciamento didático dos conteúdos. O trabalho incluiu ainda a padronização da notação, a revisão linguística e editorial, a preparação de figuras, a composição tipográfica e a manutenção do código LaTeX.

A responsabilidade final pelo conteúdo matemático e pelas escolhas autorais permanece com o autor.

Licença

© 2026 Daniel Miranda.

Exceto quando indicado em contrário, esta obra está licenciada sob a **Creative Commons Atribuição–NãoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0)**. É permitida a cópia, redistribuição e adaptação do material, em qualquer meio ou formato, desde que seja atribuída a autoria apropriada e que o uso não tenha finalidade comercial.



Uma cópia da licença está disponível em
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/.

A obra é fornecida “como está”, sem garantias expressas ou implícitas, nos limites permitidos pela legislação aplicável. Consulte o texto integral da licença para as permissões, condições e limitações correspondentes.

Introdução

Este livro apresenta uma introdução à teoria dos processos estocásticos, com ênfase em seus modelos fundamentais e em aplicações à probabilidade, à estatística computacional e à ciência de dados. Um processo estocástico descreve a evolução temporal de um sistema sujeito à aleatoriedade. Embora uma trajetória individual em geral não possa ser prevista em todos os seus detalhes, é possível estudar sua distribuição e determinar propriedades como probabilidades de transição e de retorno, distribuições de tempos de espera, probabilidades de extinção e comportamento assintótico.

Essa estrutura aparece em problemas de natureza bastante diversa. A evolução de uma fortuna, a reprodução de uma população, a chegada de requisições a um sistema de serviço e a recuperação de uma imagem incompleta por uma rede neural podem ser formuladas em termos de processos aleatórios. Em cada caso, é necessário especificar o espaço de estados, determinar qual informação do passado é relevante para a evolução futura e estabelecer as leis probabilísticas que governam a dinâmica do sistema.

O texto destina-se principalmente a estudantes de graduação que tenham cursado uma primeira disciplina de probabilidade e possuam familiaridade com cálculo e álgebra linear. São utilizados os conceitos usuais de variáveis aleatórias discretas e contínuas, independência e esperança, além de noções elementares de séries, derivadas e operações com matrizes. A lei forte dos grandes números, o teorema central do limite e os lemas de Borel–Cantelli fazem parte das ferramentas probabilísticas disponíveis. O teorema espectral para matrizes simétricas será recordado quando estudarmos a velocidade de convergência das cadeias de Markov. A esperança condicional será introduzida inicialmente em seu sentido elementar e, no capítulo dedicado aos

martingais, formulada de maneira mais precisa em termos da informação disponível. Não se pressupõe conhecimento prévio de teoria da medida.

Nos capítulos de cadeias em tempo discreto e processos de Poisson, as passagens ao limite serão justificadas com somas finitas, propriedades de séries e estimativas de probabilidades. Esses argumentos permitem tratar espaços de estados enumeráveis, recompensas de esperança absoluta finita e a população total de um processo de ramificação. Os cálculos com densidades e intensidades usam integrais do cálculo usual.

O capítulo inicial introduz a noção de processo estocástico e distingue os casos em que o parâmetro temporal e o espaço de estados são discretos ou contínuos. A teoria das cadeias de Markov em tempo discreto vem em três capítulos: primeiro, as cadeias finitas, com matrizes, classes de comunicação, tempos de chegada e problemas de absorção; depois, as distribuições estacionárias e o comportamento limite; por fim, as cadeias enumeráveis, em que passeios aleatórios e processos de ramificação mostram fenômenos próprios dos espaços infinitos. Exemplos contextualizados, como ruína do jogador, urnas e modelos baseados em dados, reaparecem ao longo desse percurso.

No estudo dos processos de ramificação, a sobrevivência e a extinção de populações são tratadas por funções geradoras. O processo de Poisson introduz processos de contagem em tempo contínuo e distribuições de tempos entre chegadas. Nas cadeias de Markov em tempo contínuo, transições entre estados e tempos aleatórios de permanência são reunidos em uma única estrutura, adequada, em particular, à modelagem de filas, sistemas de serviço e redes.

O estudo dos martingais apresenta uma perspectiva complementar, baseada na evolução de processos em relação à informação disponível, e conduz a aplicações em jogos justos, problemas de saída e tempos de parada. Em seguida, os métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) utilizam dinâmicas estocásticas para produzir amostras de distribuições difíceis de simular diretamente. Nesse contexto, conceitos como transição, recorrência e distribuição estacionária estabelecem uma ligação natural entre processos estocásticos e estatística computacional.

Os Capítulos **??** e **??** retomam o movimento browniano, apresentado no capítulo introdutório, e desenvolvem a integração estocástica. A escala difusiva liga os passeios aleatórios aos incrementos gaussianos; a reflexão

e os martingais resolvem problemas de barreiras e tempos de saída. A integral de Itô prolonga as transformadas previsíveis para o tempo contínuo e permite estudar modelos com força restauradora e ruído multiplicativo. Sua construção é apresentada por aproximações em média quadrática, utilizando somas, segundos momentos e estratégias que não antecipam o futuro.

O Capítulo ?? reúne esses conceitos em modelos estocásticos de inteligência artificial. Começa com redes de memória e distribuições de Gibbs, passa pela amostragem e pelo aprendizado de parâmetros e chega à geração de imagens por remoção de ruído. A extensão contínua é opcional e retoma as equações diferenciais estocásticas.

A organização dos capítulos é essencialmente cumulativa, embora nem todas as seções tenham o mesmo caráter. Em uma primeira leitura, podem ser omitidas as seções assinaladas com asterisco, dedicadas a aplicações, extensões ou tópicos complementares. Modelos ocultos de Markov, PageRank, redes de Jackson, testes sequenciais, algoritmos de colônias de formigas e modelos baseados em energia aparecem como desenvolvimentos da teoria básica.

Simulações numéricas são utilizadas ao longo do texto para explorar exemplos, comparar regimes e ilustrar comportamentos previstos pela teoria. Seu papel é complementar: contribuem para a intuição e podem sugerir conjecturas, mas não substituem as hipóteses nem as demonstrações dos resultados matemáticos.

A partir do Capítulo 2, os exercícios ao final de cada capítulo combinam cálculo, interpretação de modelos e demonstração. Respostas e indicações são reunidas ao final do livro.

Sumário

Introdução v

1 Processos estocásticos 1
- 1.1 Processos, estados e trajetórias . . . 2
- 1.2 Classes e propriedades fundamentais . . . 5

2 Cadeias de Markov finitas 17
- 2.1 Definições e exemplos . . . 20
- 2.2 Probabilidades de transição em vários passos . . . 31
  - 2.2.1 Estimação de transições e retenção de usuários . . . 38
- 2.3 Classificação dos estados . . . 42
- 2.4 Contagem de visitas e critério de recorrência . . . 59
- 2.5 Periodicidade dos estados . . . 64
- 2.6 Distribuições de saída . . . 66
- 2.7 Tempos de saída . . . 75
- 2.8 Problemas de síntese . . . 86
- 2.9 Modelos ocultos de Markov* . . . 92
- 2.10 Exercícios . . . 97
- 2.11 Exercícios complementares* . . . 99

3 Distribuições estacionárias e comportamento limite 100
- 3.1 Distribuições estacionárias . . . 101
- 3.2 Cálculo de distribuições estacionárias . . . 105
  - 3.2.1 Cadeias com dois estados . . . 105
  - 3.2.2 Um modelo de estoque . . . 107

3.2.3 Cadeias duplamente estocásticas 109
3.3 Reversibilidade e balanço detalhado 110
3.3.1 Cadeia reversa 118
3.4 Comportamento limite 120
3.4.1 Frequências e tempo médio de retorno 121
3.4.2 Convergência das distribuições 127
3.4.3 Recompensas ao longo de uma trajetória 131
3.5 Velocidade de convergência e espectro 136
3.6 Problemas de síntese 142
3.7 PageRank e centralidade* 147
3.8 Otimização por colônias de formigas* 150
3.8.1 Escolhas aleatórias guiadas pelo feromônio 151
3.8.2 Um modelo com dois caminhos 152
3.8.3 Sem evaporação: reforço e seleção 154
3.8.4 Exploração e concentração prematura 155
3.8.5 Uma aplicação em ciência de dados: seleção de variáveis 157
3.9 Exercícios 158
3.10 Exercícios complementares* 159

4 Cadeias de Markov enumeráveis 161
4.1 Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}^d$ 162
4.2 Um sistema com infinitos estados: o protocolo Aloha . . . 172
4.3 Processos de ramificação 174
4.3.1 Indivíduos, gerações e crescimento médio 175
4.3.2 Geradoras e extinção 182
4.3.3 Cascatas: o que os dados permitem estimar 193
4.4 Problemas de síntese 197
4.5 Percolação em árvores e grafos aleatórios* 201
4.5.1 Percolação em uma árvore infinita 202
4.5.2 Erdős–Rényi: da exploração local à componente gigante 206
4.6 Exercícios 211
4.6.1 Passeios e outras cadeias enumeráveis 211
4.6.2 Processos de ramificação 212
4.7 Exercícios complementares* 213

5 Processos de Poisson 215
5.1 Distribuição exponencial . . . 216
5.2 Definição do processo de Poisson . . . 218
5.2.1 O erro da aproximação de Poisson . . . 223
5.2.2 Construção do processo de Poisson . . . 225
5.2.3 Tempos de chegada e distribuição gama . . . 231
5.2.4 Uma janela de tempo muito curta . . . 232
5.3 Processos de Poisson compostos . . . 234
5.4 Transformações . . . 236
5.4.1 Afinamento . . . 236
5.4.2 Superposição . . . 239
5.4.3 Condicionamento . . . 242
5.5 Problemas de síntese . . . 246
5.6 Exercícios . . . 248
5.7 Processos de Poisson não homogêneos* . . . 251
5.8 Exercícios complementares* . . . 256

6 Cadeias de Markov em tempo contínuo 258
6.1 Corrida de relógios exponenciais . . . 260
6.2 Definições e exemplos . . . 265
6.2.1 Escolher o estado antes de escrever as taxas . . . 271
6.2.2 Construção a partir das taxas . . . 276
6.3 Calculando as probabilidades de transição . . . 282
6.4 Comportamento limite . . . 287
6.4.1 Condição de balanço detalhado . . . 293
6.4.2 Cadeias de nascimento e morte . . . 297
6.5 Distribuições e tempos de saída . . . 299
6.6 Filas markovianas . . . 305
6.6.1 Vários servidores . . . 308
6.7 Distribuições explícitas em modelos enumeráveis . . . 309
6.7.1 Yule: nascer em tempos diferentes . . . 309
6.7.2 Atendimento imediato e a fila $M/M/\infty$ . . . 311
6.8 Exercícios . . . 314
6.8.1 Relógios, taxas e equilíbrio . . . 314
6.8.2 Modelagem e variações dos exemplos . . . 316
6.9 Redes de filas* . . . 318

6.10 PASTA: demonstração por ciclos* . . . 326
6.11 Modelo de Jukes–Cantor* . . . 329
6.12 Ramificação e imigração* . . . 330
6.12.1 Famílias que evoluem em seus próprios relógios . . . 331
6.12.2 Quando chegam indivíduos de fora . . . 336
6.12.3 Uma ponte para vidas que dependem da idade . . . 338
6.13 Dormir, aguardar ou trabalhar* . . . 339
6.14 Exercícios complementares* . . . 342
6.14.1 Ramificação, energia e redundância* . . . 343

7 Martingais 346
7.1 Esperança condicional: da partição à informação . . . 347
7.2 Filtrações e informação . . . 350
7.3 Exemplos . . . 353
7.4 Estratégias de jogo e tempos de parada . . . 358
7.4.1 Convergência de martingais limitados . . . 363
7.5 Aplicações . . . 366
7.5.1 Distribuições de saída . . . 369
7.5.2 Tempos de saída . . . 373
7.6 Problemas de síntese . . . 378
7.7 Exercícios . . . 380
7.8 Testes sequenciais e martingais* . . . 382
7.9 Reforço e seleção nas colônias de formigas* . . . 387
7.9.1 Reforços iguais: a urna de Pólya . . . 387
7.9.2 Reforços diferentes: deriva e seleção . . . 391
7.10 Exercícios complementares* . . . 396

Respostas e indicações 397

Referências 441

Índice remissivo 445

CAPÍTULO

1

Processos estocásticos

Quando a aleatoriedade evolui no tempo, o objeto natural deixa de ser uma variável aleatória e passa a ser um processo estocástico.

Neste capítulo vamos estabelecer a linguagem básica que será usada ao longo de todo o livro. A ideia central é simples: um processo estocástico descreve um sistema cuja evolução envolve aleatoriedade. Formalmente, ele será representado por uma família de variáveis aleatórias indexadas por algum parâmetro, que na maior parte das aplicações será interpretado como tempo.

Essa definição, embora curta, reúne diferentes ingredientes. É preciso especificar quais valores o processo pode assumir, em que instantes ele é observado e qual é o mecanismo probabilístico que produz suas possíveis evoluções. Dependendo dessas escolhas, obtemos modelos bastante distintos: o tempo pode ser discreto ou contínuo; o conjunto de estados pode ser finito, enumerável ou contínuo; as trajetórias podem apresentar saltos, oscilações ou outras formas de comportamento.

Há também duas maneiras complementares de observar um processo. Podemos fixar um instante t e considerar X_t como uma variável aleatória, perguntando quais valores ela pode assumir e com quais probabilidades. Ou

podemos fixar uma realização ω e acompanhar a função

$$t \longmapsto X_t(\omega),$$

obtendo uma trajetória do processo. Essa mudança de ponto de vista será recorrente: ora estudaremos distribuições em instantes determinados, ora propriedades de trajetórias inteiras.

Nosso objetivo aqui não é ainda estudar profundamente uma classe particular de processos. Queremos primeiro organizar essas ideias, apresentar a notação e examinar exemplos suficientemente variados para reconhecer o que há de comum entre modelos muito diferentes.

1.1 Processos, estados e trajetórias

Definição 1.1 — Processo estocástico

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um *processo estocástico* com conjunto de parâmetros T e espaço de estados S é uma família de variáveis aleatórias

$$X = (X_t)_{t \in T}, \qquad X_t : \Omega \longrightarrow S,$$

definidas no mesmo espaço de probabilidade.

Na notação do espaço de probabilidade, Ω reúne os resultados possíveis, $\mathcal{F}$ representa os eventos considerados e $\mathbb{P}$ atribui probabilidades a esses eventos. Não precisaremos desenvolver aqui a estrutura de $\mathcal{F}$.

Em muitas aplicações, t representa tempo e T é $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ ou $[0, \infty)$. O parâmetro também pode representar posição, escala ou uma combinação de variáveis. Em imagens, por exemplo, um campo aleatório pode ser indexado pelas coordenadas (u, v) dos pixels. A palavra “processo” não exige, portanto, que o índice seja temporal.

Para um t fixo, X_t é uma variável aleatória. Se fixamos, em vez disso, um resultado $\omega \in \Omega$, obtemos uma função do parâmetro.

Definição 1.2 — Trajetória

Para cada resultado $\omega \in \Omega$, a função

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

é chamada de *trajetória* ou *caminho amostral* do processo.

Convém manter separadas essas duas leituras. Em $X_t(\omega)$, fixar t produz uma variável aleatória e fixar ω produz uma trajetória. Um gráfico obtido por simulação representa uma dessas trajetórias, não o processo inteiro.

Um processo estocástico pode ser pensado como uma regra aleatória que escolhe uma trajetória. Antes de sabermos qual ω ocorreu, temos várias trajetórias possíveis; depois que ω é fixado, uma delas fica determinada.

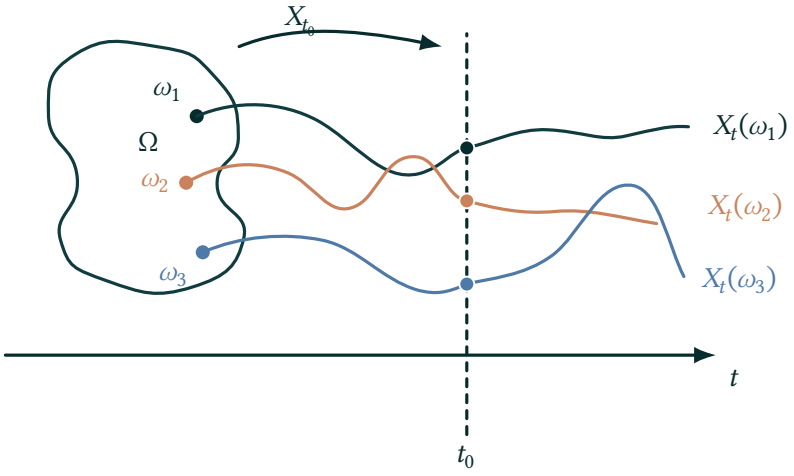


Figura 1.1: Duas leituras do mesmo processo. Fixado $\omega \in \Omega$, a função $t \mapsto X_t(\omega)$ é uma trajetória. Fixado o instante t_0, a aplicação $\omega \mapsto X_{t_0}(\omega)$ é uma variável aleatória, e a seção tracejada mostra seus valores em três resultados possíveis.

Exemplo 1.1 — Uma curva com amplitude aleatória.

Sejam A e B variáveis aleatórias reais e defina

$$X_t = A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t, \qquad t \geq 0.$$

Para cada instante t, X_t é uma variável aleatória. Depois de observados $A = a$ e $B = b$, porém, toda a trajetória fica determinada pela curva $x(t) = a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t$. Esse exemplo simples mostra que valores em instantes diferentes podem compartilhar a mesma fonte de aleatoriedade e, por isso, ser fortemente dependentes.

◁

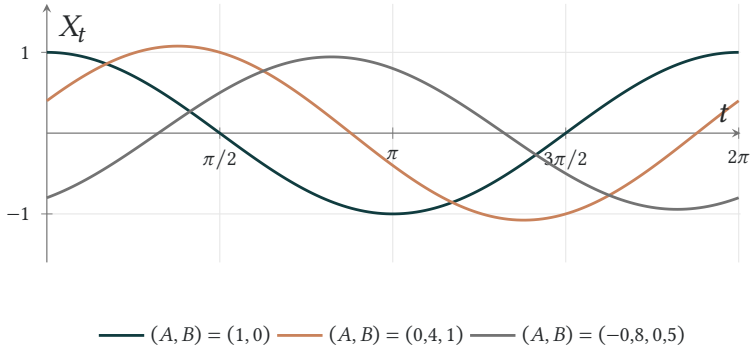


Figura 1.2: Três trajetórias possíveis de $X_t = A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t$. Depois que o par (A, B) é sorteado, a curva inteira fica determinada; antes disso, pares diferentes produzem trajetórias diferentes.

Para estudar a dependência ao longo do parâmetro, observamos vários instantes simultaneamente. Dados $t_1, \ldots, t_k \in T$, o vetor aleatório

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$$

possui uma distribuição conjunta, chamada de *distribuição finito-dimensional* do processo. Em outras palavras, escolhemos um número finito de instantes e perguntamos pela lei conjunta dos valores do processo nesses instantes. Em vez de descrever uma trajetória inteira, essa distribuição descreve o processo visto em um número finito de coordenadas.

As distribuições individuais de X_t dizem o que pode acontecer em cada instante isoladamente; as distribuições finito-dimensionais também registram como os valores se relacionam ao longo do parâmetro.

Essa distinção é essencial. Seja Z uma variável de Bernoulli com parâmetro $1/2$. O processo $X_n = Z$ tem a mesma distribuição marginal em todo instante. Uma sequência (Y_n) de variáveis de Bernoulli independentes, também com parâmetro $1/2$, possui exatamente as mesmas marginais.

Entretanto, as trajetórias são muito diferentes: X permanece constante, enquanto Y pode mudar a cada passo. Conhecer apenas a distribuição de cada coordenada não determina um processo.

Quando os estados são numéricos e os segundos momentos existem, duas funções fornecem resumos úteis:

$$\begin{aligned} m(t) &= E[X_t], \\ C(s,t) &= \operatorname{Cov}(X_s, X_t) = E\big[(X_s - m(s))(X_t - m(t))\big]. \end{aligned}$$

A média descreve o comportamento central em cada instante; a covariância mede como observações feitas em dois instantes variam conjuntamente. Esses resumos não determinam a lei de todo processo em geral. Para os processos gaussianos, apresentados adiante, média e covariância determinam todas as distribuições finito-dimensionais.

1.2 Classes e propriedades fundamentais

Há duas perguntas elementares sobre um processo: o conjunto de parâmetros é discreto ou contínuo? E o espaço de estados? Combinando as respostas, obtemos quatro classes:

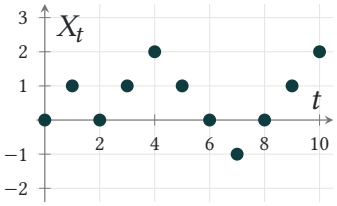
1. processos de parâmetro discreto e estado discreto;
2. processos de parâmetro discreto e estado contínuo;
3. processos de parâmetro contínuo e estado discreto;
4. processos de parâmetro contínuo e estado contínuo.

Aqui, "parâmetro contínuo" significa que o processo pode ser consultado em qualquer instante de um intervalo; "estado contínuo" significa que seus valores pertencem, tipicamente, a $\mathbb{R}^d$. Nenhuma dessas expressões afirma que as trajetórias sejam contínuas. Um processo com parâmetro contínuo e estado real pode apresentar saltos.

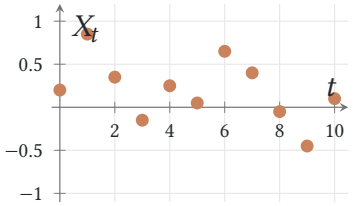
	Estado discreto	Estado contínuo
Parâmetro discreto	Cadeias de Markov, passeios aleatórios, processos de ramificação	Séries temporais, modelos autorregressivos, iterações do gradiente estocástico
Parâmetro contínuo	Processo de Poisson, tamanho de filas, cadeias de Markov em tempo contínuo	Movimento browniano, difusões, processos gaussianos

A Figura 1.3 mostra uma trajetória típica de cada classe. Nos painéis com parâmetro discreto, mostramos apenas os valores nos instantes observados; não há trajetória definida entre esses pontos.

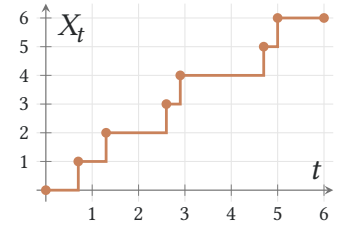
(a) Parâmetro e estado discretos



(b) Parâmetro discreto, estado contínuo



(c) Parâmetro contínuo, estado discreto



(d) Parâmetro e estado contínuos

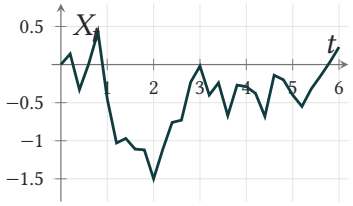


Figura 1.3: Trajetórias representativas das quatro classes de processos estocásticos. Nos dois primeiros painéis, o parâmetro é discreto e apenas os pontos marcados pertencem à trajetória. No painel (a), também os estados são discretos; no painel (c), o parâmetro é contínuo, mas os estados permanecem discretos. O painel (d) representa uma aproximação de trajetória browniana.

Os exemplos a seguir não serão desenvolvidos todos com a mesma profundidade. A intenção, neste primeiro panorama, é reconhecer como a classificação aparece em modelos que serão retomados ao longo do livro e perceber que processos de naturezas bastante diferentes cabem na mesma linguagem.

Parâmetro discreto e estado discreto. Nesta classe, observamos o sistema em instantes separados e cada observação assume valores em um conjunto finito ou enumerável. Uma sequência de resultados de lançamentos de uma moeda, o número de clientes presentes ao final de cada hora e a posição de um passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ são exemplos.

Exemplo 1.2 — Passeio aleatório.

Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com

$$\mathbb{P}(\xi_k = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(\xi_k = -1) = 1 - p.$$

Partindo de $S_0 = 0$, defina

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

O parâmetro n pertence a $\mathbb{N}_0$ e o estado S_n pertence a $\mathbb{Z}$. Cada trajetória é uma sequência de passos para a direita e para a esquerda.

◁

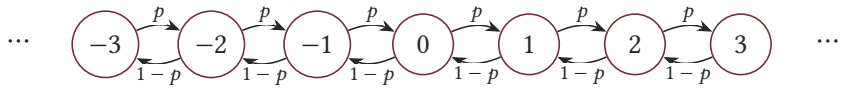


Figura 1.4: Trecho do grafo de transição do passeio aleatório em $\mathbb{Z}$. De cada estado k, o processo salta para $k+1$ com probabilidade p e para $k-1$ com probabilidade $1-p$; o mesmo padrão continua indefinidamente nos dois sentidos.

O passeio guarda no estado atual a soma de todos os incrementos anteriores. A independência dos incrementos permite calcular suas primeiras características sem conhecer a distribuição completa de cada trajetória.

Proposição 1.1 — Média e covariância de um passeio aleatório
Se (ξ_k) são independentes e identicamente distribuídas, com $E[\xi_1] = \mu$ e $\mathrm{Var}(\xi_1) = \sigma^2 < \infty$, então

$$E[S_n] = n\mu, \qquad \mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$$

e, para $m, n \geq 0$,

$$\mathrm{Cov}(S_m, S_n) = \sigma^2 \min\{m, n\}.$$

Demonstração. Como $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, a linearidade da esperança dá

$$E[S_n] = \sum_{k=1}^{n} E[\xi_k] = n\mu.$$

Pela independência dos incrementos, as variâncias se somam, logo

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(\xi_k) = n\sigma^2.$$

Para a covariância, suponha primeiro $m \leq n$ e escreva

$$S_n = S_m + (\xi_{m+1} + \cdots + \xi_n).$$

O segundo termo é independente de S_m. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(S_m, S_n) &= \mathrm{Cov}(S_m, S_m) + \mathrm{Cov}(S_m, \xi_{m+1} + \cdots + \xi_n) \\ &= \mathrm{Var}(S_m) = m\sigma^2. \end{aligned}$$

Se $n \leq m$, trocamos os papéis de m e n. Em ambos os casos obtemos $\sigma^2 \min\{m, n\}$. ∎

No caso simétrico, $p = 1/2$ e $\mu = 0$. Conhecidos os n primeiros incrementos,

$$E[S_{n+1} \mid \xi_1, \ldots, \xi_n] = S_n.$$

A melhor previsão do próximo valor é, portanto, o valor atual. Essa propriedade caracteriza os martingais e será formalizada no capítulo dedicado a eles.

Parâmetro discreto e estado contínuo. Mantemos o parâmetro discreto, de modo que o sistema continua sendo observado por etapas, mas permitimos agora que seus valores pertençam a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{R}^d$. Séries temporais de temperatura, demanda ou retorno financeiro são exemplos usuais.

Exemplo 1.3 — Processo autorregressivo.

Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ variáveis independentes, com média zero e variância σ_ε^2. Um processo autorregressivo de ordem um é definido por

$$X_{n+1} = \varphi X_n + \varepsilon_{n+1}, \qquad n \geq 0. \tag{1.1}$$

O novo valor combina uma fração do estado anterior com uma inovação aleatória. Quando $|\varphi| < 1$, a influência da condição inicial diminui geometricamente.

◁

Iterando (1.1), obtemos

$$X_n = \varphi^n X_0 + \sum_{j=1}^{n} \varphi^{n-j} \varepsilon_j.$$

Suponha $|\varphi| < 1$. Se X_0 tem média zero, variância $\sigma_\varepsilon^2/(1-\varphi^2)$ e é independente das inovações, então

$$E[X_n] = 0, \qquad \operatorname{Cov}(X_n, X_{n+h}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2}\varphi^{|h|}.$$

Essas fórmulas vêm diretamente da recursão. Como as inovações têm média zero, $E[X_{n+1}] = \varphi\, E[X_n]$, e uma média inicial nula permanece nula. Se

$$v = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi^2},$$

então, pela independência, $\operatorname{Var}(X_{n+1}) = \varphi^2 v + \sigma_\varepsilon^2 = v$; a variância também permanece constante. Por fim, para $h \geq 0$, podemos escrever $X_{n+h} = \varphi^h X_n +$ uma soma de inovações futuras, independente de X_n. Logo

$$\operatorname{Cov}(X_n, X_{n+h}) = \varphi^h \operatorname{Var}(X_n) = v\varphi^h,$$

e a simetria da covariância produz o expoente $|h|$.

Essas contas estabelecem a estacionariedade de segunda ordem: a média é constante e a covariância depende apenas da separação entre os instantes. Isso não basta para concluir que todas as distribuições conjuntas permaneçam iguais após uma translação temporal. Se, além das condições acima, X_0 e as inovações forem gaussianos, a distribuição de X_n e todas as distribuições conjuntas são determinadas pelas médias e covariâncias; nesse caso o processo é também estritamente estacionário. A dependência permanece, mas decai com a distância entre os instantes.

Um exemplo importante em ciência de dados é produzido durante o treinamento de um modelo. O gradiente estocástico atualiza um vetor de parâmetros por

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_n G(\theta_n; Z_{n+1}), \tag{1.2}$$

em que Z_{n+1} é a observação sorteada na etapa $n+1$ e G é uma estimativa do gradiente. Antes de fixada a sequência de observações sorteadas, (θ_n) é um processo estocástico com parâmetro discreto e estado em $\mathbb{R}^d$. Essa interpretação permite estudar flutuações, estabilidade e convergência do treinamento por ferramentas probabilísticas.

Parâmetro contínuo e estado discreto. Até aqui, o parâmetro avançava por etapas. Passamos agora ao tempo contínuo, mantendo por enquanto um espaço de estados discreto. Um processo de contagem registra quantos eventos ocorreram até cada instante: embora o tempo varie continuamente, o valor observado pertence a $\mathbb{N}_0$, e a trajetória muda por saltos.

Definição 1.3 — Processo de contagem

Um processo $(N(t))_{t\geq 0}$ é um processo de contagem quando $N(t)$ representa o número de eventos ocorridos no intervalo $[0, t]$. Suas trajetórias são não decrescentes, assumem valores inteiros e começam, usualmente, em $N(0) = 0$.

Definição 1.4 — Incrementos independentes

Um processo possui incrementos independentes quando, para $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, as variáveis

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$$

são independentes.

Exemplo 1.4 — Processo de Poisson.

Um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$ é um processo de contagem $(N(t))_{t \geq 0}$ com $N(0) = 0$, incrementos independentes e tal que

$$N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda h), \qquad t, h \geq 0.$$

O incremento $N(t+h) - N(t)$ conta quantos eventos novos ocorrem entre os instantes t e $t+h$. Sua distribuição depende apenas do comprimento h do intervalo, e não do instante em que começamos a observar. Assim, dois intervalos de mesma duração têm a mesma lei para o número de eventos, ainda que estejam em posições diferentes no tempo.

A independência dos incrementos acrescenta outra informação: contagens feitas em intervalos disjuntos não interferem umas nas outras. Em particular, o número de eventos novos entre t e $t+h$ é independente da contagem acumulada até t. A taxa λ fixa a escala do processo: ela representa o número médio de eventos por unidade de tempo e, em um intervalo de comprimento h, esperamos λh eventos.

Uma interpretação útil é imaginar um relógio aleatório que toca a cada nova chegada. O processo $N(t)$ registra quantas vezes esse relógio tocou até o instante t.

Por exemplo, se chegam em média três clientes por hora, então o número de chegadas nos próximos trinta minutos tem distribuição Poisson$(3/2)$. A probabilidade de exatamente duas chegadas é

$$e^{-3/2} \frac{(3/2)^2}{2!}.$$

Em particular,

$$E[N(t)] = \lambda t, \qquad \text{Var}(N(t)) = \lambda t.$$

O processo combina, portanto, uma taxa constante no tempo com independência entre contagens em intervalos disjuntos. Essas hipóteses simples tornam o processo de Poisson um primeiro modelo natural para chegadas a um sistema.

Se clientes chegam segundo um processo de Poisson e permanecem algum tempo em atendimento, o tamanho da fila (Q_t) também possui parâmetro contínuo e estado discreto. Diferentemente de $N(t)$, suas trajetórias podem subir nas chegadas e descer nas conclusões de serviço. Modelos de filas mostram que classificar o tipo de trajetória é apenas o começo; a dependência entre os saltos determina o comportamento do sistema.

Parâmetro contínuo e estado contínuo. O tempo já é contínuo; para completar o quadro, permitimos agora também que o estado varie continuamente. Nesta última classe, portanto, tanto o parâmetro quanto o estado variam em conjuntos contínuos. O exemplo central é o movimento browniano.

Em 1827, Robert Brown observou ao microscópio o movimento irregular de pequenas partículas suspensas em água. O fenômeno persistia em partículas sem atividade biológica e, portanto, pedia uma explicação física. Décadas mais tarde, a teoria cinética o interpretou como o efeito acumulado de inúmeros choques das moléculas do fluido; no trabalho de Einstein de 1905, essa imagem levou à previsão de que o deslocamento típico cresce como a raiz quadrada do tempo, ou, equivalentemente, de que sua variância é proporcional ao tempo.

O modelo matemático conserva os traços macroscópicos dessa descrição e deixa de lado os choques individuais. Em intervalos disjuntos, os deslocamentos são tomados como independentes; sua distribuição depende apenas da duração do intervalo e é gaussiana, com variância igual ao tempo decorrido. A continuidade das trajetórias completa a idealização e conduz aos axiomas seguintes.

Definição 1.5 — Movimento browniano

Um processo $(W_t)_{t\geq 0}$ é um movimento browniano padrão quando:

1. $W_0 = 0$;
2. seus incrementos em intervalos disjuntos são independentes;
3. $W_{t+h} - W_t$ tem distribuição normal com média zero e variância h;
4. suas trajetórias são contínuas quase certamente.

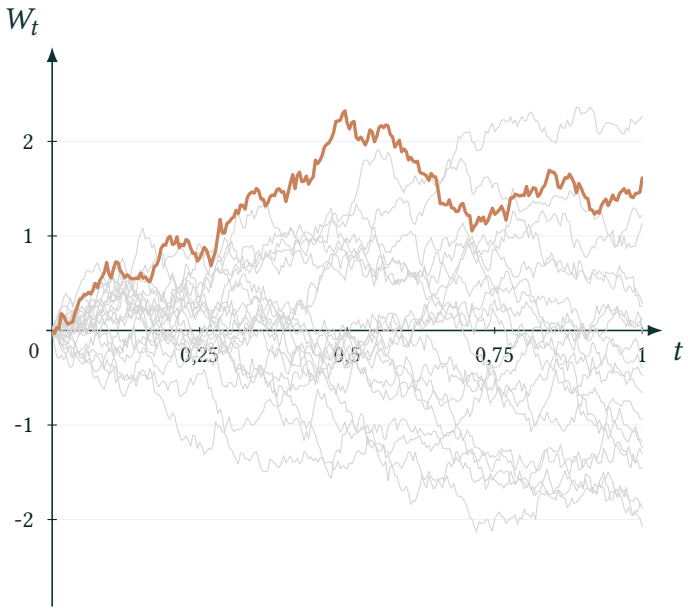


Figura 1.5: Movimento browniano.

Das propriedades dos incrementos segue que

$$E[W_t] = 0, \qquad \mathrm{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s, t\}.$$

Apesar de contínuas, as trajetórias brownianas são, quase certamente, não diferenciáveis em ponto algum. Continuidade do estado e continuidade da trajetória, portanto, não significam suavidade.

Processos gaussianos estendem essa ideia e aparecem diretamente em aprendizado de máquina. Dizemos que $(X_t)_{t\in T}$ é gaussiano quando, para

qualquer escolha finita $t_1, \dots, t_k$, o vetor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ possui distribuição normal multivariada. O processo fica determinado por sua função média $m(t)$ e por seu núcleo de covariância $K(s,t)$.

Em regressão por processos gaussianos, o índice t representa uma entrada do modelo, possivelmente um vetor em $\mathbb{R}^d$, e X_t representa o valor desconhecido da função nessa entrada. O núcleo especifica quais entradas devem produzir valores semelhantes. Depois de observar dados, condicionamos o processo e obtemos simultaneamente uma previsão e uma medida de incerteza. Esse exemplo reforça que o parâmetro de um processo não precisa representar tempo.

Propriedades que atravessam as quatro classes. A classificação anterior descreve os conjuntos envolvidos, mas não determina como as coordenadas do processo dependem umas das outras. As propriedades a seguir aparecem repetidamente nos modelos estudados neste livro.

Definição 1.6 — Estacionariedade

Dizemos que (X_t) é *estritamente estacionário* se, para quaisquer $t_1, \dots, t_k$ e para todo deslocamento h permitido,

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \quad \text{e} \quad (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$$

possuem a mesma distribuição.

Quando os segundos momentos existem, o processo é *estacionário de segunda ordem* se sua média é constante e sua covariância depende apenas da diferença entre os parâmetros:

$$E[X_t] = \mu, \qquad \operatorname{Cov}(X_s, X_t) = C(t-s).$$

O AR(1) do exemplo, com a variância inicial escolhida, é estacionário de segunda ordem; na versão gaussiana, também é estritamente estacionário. O passeio aleatório e o processo de Poisson não são, pois suas variâncias crescem com o tempo. Ambos possuem, entretanto, *incrementos estacionários*: a distribuição de $X_{t+h} - X_t$ depende de h, mas não de t. Estacionariedade do processo e estacionariedade dos incrementos são propriedades distintas.

Passeios aleatórios, processos de Poisson e movimentos brownianos pos-

suem incrementos independentes. No processo autorregressivo, cada novo estado herda parte do estado anterior e os incrementos geralmente são dependentes.

Definição 1.7 — Propriedade de Markov

Um processo possui a propriedade de Markov quando, condicionado ao estado presente, a distribuição do futuro não depende da trajetória passada. Em tempo discreto, essa condição pode ser escrita como

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_0, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A \mid X_n)$$

para todo conjunto de estados A.

A propriedade não afirma que o futuro seja independente do passado. Ela afirma que o estado presente contém a informação do passado necessária para prever o próximo passo. Passeios aleatórios, processos autorregressivos de ordem um, processos de Poisson e movimentos brownianos são markovianos. Em cada caso, porém, o espaço de estados e a forma das transições são diferentes.

Martingais formalizam a ideia de um processo sem deriva previsível. Em tempo discreto e em relação ao próprio histórico, a condição elementar é

$$E[M_{n+1} \mid M_0, \dots, M_n] = M_n \ :$$

conhecido o passado, a melhor previsão do próximo valor é o valor atual. A definição geral exige especificar precisamente a informação disponível em cada instante e será apresentada no capítulo de martingais.

O passeio aleatório de média zero possui essa propriedade. Outros processos podem adquiri-la depois que retiramos sua deriva média. Por exemplo, se $(N(t))$ é um processo de Poisson de taxa λ, então $M_t = N(t) - \lambda t$ separa o crescimento previsível, λt, da flutuação aleatória e é um martingal em relação à informação gerada pelas contagens.

Por fim, processos também diferem pela regularidade de suas trajetórias. Em tempo discreto, falamos naturalmente de sequências. Em tempo contínuo, uma trajetória pode ser contínua, como no movimento browniano, ou constante por trechos e contínua à direita, como no processo de Poisson. A distribuição dos estados e a regularidade dos caminhos respondem a

perguntas diferentes e devem ser especificadas separadamente.

Processo	**Estacionário**	**Incr. estacionários**	**Incr. independentes**	**Markov**
Passeio aleatório	Não	Sim	Sim	Sim
AR(1) gaussiano estacionário	Sim	Sim	Não	Sim
Processo de Poisson	Não	Sim	Sim	Sim
Movimento browniano	Não	Sim	Sim	Sim

Esse panorama fornece uma linguagem comum para os capítulos seguintes. A classificação indica onde o processo vive; estacionariedade, independência dos incrementos, propriedade de Markov e estrutura de martingal descrevem como ele evolui.

Para outras introduções aos processos apresentados neste capítulo, veja Durrett 2016; Lawler 2006. A relação entre processos gaussianos e aprendizado de máquina é desenvolvida em Rasmussen e Williams 2006.

CAPÍTULO

2

Cadeias de Markov finitas

Nas cadeias de Markov, o futuro depende do presente,
não do caminho percorrido até ele.

Um jogo termina ao atingir uma barreira; uma rede de memória procura corrigir uma entrada; um usuário pode voltar a um serviço ou abandoná-lo. A descrição de cada sistema começa pela escolha do estado, que deve conservar a informação necessária para prever o próximo passo.

Os modelos finitos permitem construir matrizes de transição, classificar estados e estudar retornos e saídas por meio de contas explícitas. O equilíbrio e a convergência serão tratados no capítulo seguinte. Os modelos ocultos de Markov encerram o percurso como aplicação complementar; PageRank e colônias de formigas acompanham o estudo do comportamento limite.

Uma rede que recupera uma lembrança

Reconhecemos uma letra mesmo quando alguns traços estão apagados. Uma memória associativa recebe uma configuração incompleta ou corrompida e a modifica para aproximá-la de um padrão armazenado. Um modelo mínimo desse mecanismo introduz a escolha do estado e sua evolução aleatória.

Representamos cada neurônio por uma unidade que pode estar inativa ou ativa. A configuração de uma rede com N unidades neuronais no instante n é o vetor

$$s(n) = (s_1(n), \dots, s_N(n)), \qquad s_i(n) \in \{-1, +1\}.$$

Essa variável binária também é chamada de *spin*, por analogia com modelos da física. O peso w_{ij} mede a influência de j sobre i; nesta primeira versão, $w_{ij} = w_{ji}$ e $w_{ii} = 0$. O campo local na unidade i é

$$h_i(s(n)) = \sum_{j \neq i} w_{ij} s_j(n).$$

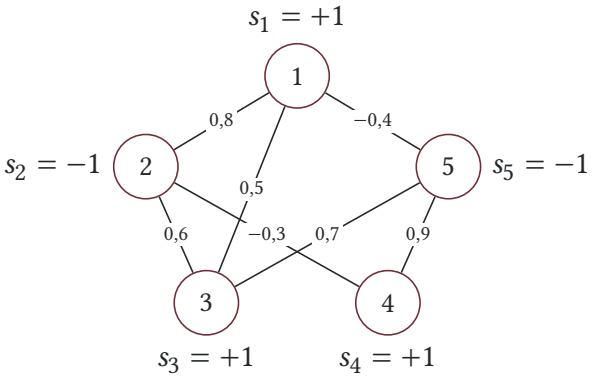


Figura 2.1: Uma configuração possível de uma rede com cinco unidades. Os números nas arestas são os pesos não nulos das interações; cada peso vale nos dois sentidos, pois $w_{ij} = w_{ji}$. Os rótulos junto aos vértices mostram os spins da configuração $s = (+1, -1, +1, +1, -1)$.

Em cada passo, escolhemos aleatoriamente uma das N unidades, todas com probabilidade $1/N$, independentemente das escolhas anteriores. Apenas a unidade escolhida é atualizada: essa é uma dinâmica *assíncrona.* Se ela é a unidade i, tomamos $s_i(n+1) = +1$ quando $h_i(s(n)) > 0$ e $s_i(n+1) = -1$ quando $h_i(s(n)) < 0$; se $h_i(s(n)) = 0$, conservamos o valor anterior, $s_i(n+1) = s_i(n)$. Para $j \neq i$, fazemos $s_j(n+1) = s_j(n)$.

A escolha aleatória da unidade a atualizar determina, a partir da configuração atual, a distribuição da configuração seguinte.

Aprendizado e *recuperação* são tarefas distintas. No aprendizado, escolhemos os pesos a partir dos padrões que desejamos guardar. Na recuperação,

fixamos esses pesos e deixamos a configuração evoluir a partir da entrada recebida. A rede não precisa consultar uma lista de padrões a cada atualização: a informação foi incorporada às interações.

Para guardar o padrão $\xi = (+1, +1, +1)$ em três unidades, tomemos $w_{ij} = 1/3$ para $i \neq j$. Se a entrada é $s(0) = (-1, +1, +1)$, então

$$h_1(s(0)) = \tfrac{1}{3}(+1) + \tfrac{1}{3}(+1) = \tfrac{2}{3} > 0.$$

A atualização da primeira unidade corrige o spin errado. Podemos acompanhar essa correção por uma energia,

$$E(s) = -\sum_{i<j} w_{ij} s_i s_j.$$

As energias antes e depois da correção são

$$E(s(0)) = E(-1, +1, +1) = \tfrac{1}{3}, \qquad E(s(1)) = E(+1, +1, +1) = -1.$$

A mudança é $-4/3$. Mais geralmente, ao alterar apenas a unidade i, a simetria dos pesos dá

$$E(s(n+1)) - E(s(n)) = -(s_i(n+1) - s_i(n)) h_i(s(n)) \leq 0.$$

A energia não aumenta com a atualização. Isso não garante que toda entrada chegue ao padrão desejado: podem existir outros estados estáveis, e o armazenamento de muitos padrões pode gerar interferência entre eles.

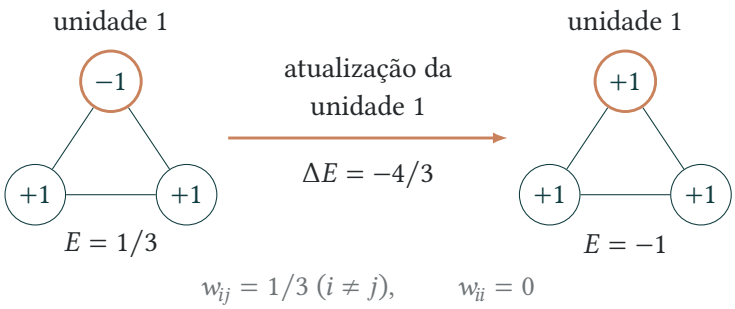


Figura 2.2: Atualização da primeira unidade na rede de três spins. A configuração passa de $s(0) = (-1, +1, +1)$ para $s(1) = (+1, +1, +1)$, e a energia diminui de $1/3$ para -1. Na escolha uniforme da unidade, essa correção tem probabilidade $1/3$ no próximo passo.

Conhecida a configuração $s(n)$, a escolha aleatória da unidade determina a lei de $s(n+1)$ sem depender das configurações anteriores. O processo $(s(n))_{n\geq 0}$ é, portanto, uma cadeia de Markov no espaço $\{-1,+1\}^N$.

O estudo da rede envolve a identificação de configurações estáveis, os tempos de chegada a essas configurações e a influência da aleatoriedade. O capítulo de MCMC retomará a rede de Hopfield com a definição completa, a demonstração de descida da energia, um exemplo com duas letras e a passagem para atualizações de Gibbs.

2.1 Definições e exemplos

As definições e vários resultados também valem para espaços enumeráveis, mas neste capítulo privilegiaremos os modelos finitos. O Capítulo 4 estudará os fenômenos próprios dos espaços infinitos. A seção opcional sobre colônias de formigas, no Capítulo 3, apresenta uma dinâmica com estado contínuo.

A distribuição inicial e as probabilidades de transição determinam a lei da trajetória. O estado X_n deve reunir a informação do passado relevante para prever o passo seguinte. Quando essa informação é insuficiente, pode ser necessário ampliar o estado.

Definição 2.1 — Cadeia de Markov

Considere um processo estocástico em tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$ com valores no espaço de estados S. Dizemos que (X_n) é uma *cadeia de Markov* se, para todo $n \geq 0$ e quaisquer estados $i_0, \dots, i_n, j$ tais que o evento $\{X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n\}$ tenha probabilidade positiva,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \\ &\qquad = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assim, uma vez conhecido o estado atual, o histórico não fornece informação adicional sobre o próximo estado.

Definição 2.2 — Cadeia homogênea e matriz de transição

A cadeia é *homogênea no tempo* quando

$$p(i,j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

não depende de n. A matriz $P = (p(i,j))_{i,j \in S}$ é sua *matriz de transição*. Suas entradas são não negativas e cada linha soma 1.
Na entrada $p(i,j)$, a linha i representa o estado atual e a coluna j representa o próximo estado. Portanto,

$$\sum_{j \in S} p(i,j) = 1$$

para cada i: partindo de i, a cadeia precisa estar em algum estado no passo seguinte.

A matriz descreve uma transição. Para calcular a probabilidade de uma trajetória inteira, basta aplicar repetidamente a regra do produto para probabilidades condicionais.

Proposição 2.1 — Probabilidade de um caminho

Se (X_n) é uma cadeia de Markov homogênea com distribuição inicial μ e matriz de transição P, então, para $i_0, \dots, i_n \in S$,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mu(i_0) \prod_{k=1}^{n} p(i_{k-1}, i_k).$$

Para $n = 0$, o produto vazio vale 1.

Demonstração. Para $n = 0$, a igualdade é a definição de μ. Suponha que ela valha até o instante n. Quando a história $X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n$ tem probabilidade positiva, a regra do produto e a propriedade de Markov dão

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1}) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)\, p(i_n, i_{n+1}). \end{aligned}$$

Se a história tem probabilidade zero, a trajetória mais longa também tem

probabilidade zero, e o produto no enunciado já é nulo. Isso conclui a indução. ∎

O mesmo cálculo explica por que podemos condicionar em informações parciais do passado, sem precisar conhecer todos os estados visitados.

Corolário 2.2 — Markov para eventos do passado

Fixe $n \geq 0$ e um evento A determinado pelos estados $X_0, \dots, X_{n-1}$. Se $\mathbb{P}(A, X_n = i) > 0$, então, para $j_1, \dots, j_m \in S$ e $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m \mid A, X_n = i) \\ = p(i, j_1)p(j_1, j_2) \cdots p(j_{m-1}, j_m).\end{aligned}$$

Para $n = 0$, entendemos A como o evento certo.

Demonstração. Primeiro considere uma história completa $X_0 = i_0, \dots, X_n = i$. A regra do produto aplicada à história e à sua continuação mostra que a probabilidade condicional dos próximos m estados é o produto anunciado; os fatores anteriores ao instante n se cancelam.

Como S é finito, o evento $A \cap \{X_n = i\}$ é união disjunta de histórias completas até n. Em cada história de probabilidade positiva, a probabilidade condicional da continuação é a mesma. Somando sobre essas histórias, obtemos a igualdade para A, sem depender dos estados anteriores a n. ∎

Proposição 2.3 — Homogeneidade em vários passos

Se $(X_n)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov homogênea, então, para todo $m \geq 1$ e quaisquer estados i, j,

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$$

não depende de n, sempre que o condicionamento estiver definido.

Demonstração. A prova é por indução em m. Para $m = 1$, a afirmação é exatamente a definição de homogeneidade.

Suponha agora que, para algum $m \geq 1$, as probabilidades

$$p^{(m)}(i,k) = \mathbb{P}(X_{n+m} = k \mid X_n = i)$$

não dependam de n. Condicionando no estado intermediário X_{n+m} e usando o Corolário 2.2 para o passado $X_n = i$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+m+1} = j \mid X_n = i) &= \sum_{k \in S} p(k,j)\, \mathbb{P}(X_{n+m} = k \mid X_n = i) \\ &= \sum_{k \in S} p(k,j)\, p^{(m)}(i,k).\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, o lado direito não depende de n. Isso conclui a indução. ∎

A homogeneidade em um passo estende-se, portanto, a qualquer número fixo de passos.

Exemplo 2.1 — Um sapo em quatro folhas.

Um sapo ocupa uma de quatro folhas, que chamaremos de A, B, C e D. Nem toda folha está ao alcance de qualquer outra: as ligações possíveis são as indicadas no grafo abaixo. A cada passo, o sapo escolhe uniformemente uma das folhas ligadas à folha em que se encontra. Se X_n indica a folha ocupada depois do n-ésimo salto, então (X_n) é uma cadeia de Markov: conhecida a folha atual, o próximo salto não depende do caminho percorrido antes.

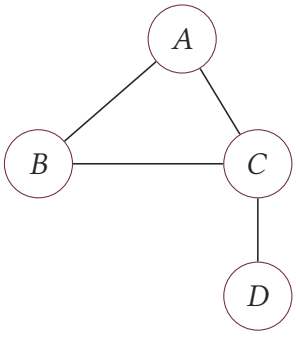


Figura 2.3: O sapo escolhe uniformemente uma folha vizinha. Assim, A e B têm duas opções, C tem três e, partindo de D, o salto para C é obrigatório.

Na ordem (A, B, C, D), as probabilidades são obtidas contando os vizinhos de cada folha. A matriz de transição é

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

◁

Daqui em diante, salvo indicação contrária, consideraremos cadeias homogêneas no tempo. Nas fórmulas de probabilidades condicionais, entenderemos sempre que o evento condicionado tem probabilidade positiva. A matriz de transição especifica a dinâmica a partir de cada estado, inclusive daqueles que têm probabilidade inicial zero.

Exemplo 2.2 — Ruína do jogador.

Considere um jogo com rodadas independentes. Em cada rodada, o jogador ganha uma unidade monetária com probabilidade $p = 0{,}4$ ou perde uma unidade com probabilidade $1 - p = 0{,}6$. O jogo termina quando sua fortuna atinge 0 ou N unidades monetárias.

Se X_n é a fortuna depois de n rodadas, então, para $0 < i < N$ e qualquer histórico compatível,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i + 1 \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) = 0{,}4.$$

O lado direito depende apenas da fortuna presente, de modo que a propriedade de Markov vale. As transições são

$$\begin{aligned} &p(i, i+1) = 0{,}4, \quad p(i, i-1) = 0{,}6, \quad \text{se } 0 < i < N, \\ &p(0, 0) = 1, \qquad p(N, N) = 1. \end{aligned}$$

Para $N = 5$, o grafo de transição torna visíveis as duas possibilidades em cada estado interior e as duas barreiras absorventes:

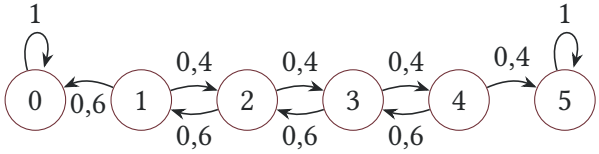


Figura 2.4: Grafo da ruína do jogador com barreiras 0 e 5. As barreiras são absorventes; nos estados interiores, a fortuna sobe uma unidade com probabilidade 0,4 e desce uma unidade com probabilidade 0,6.

A matriz correspondente é

	0	1	2	3	4	5
0	1,0	0	0	0	0	0
1	0,6	0	0,4	0	0	0
2	0	0,6	0	0,4	0	0
3	0	0	0,6	0	0,4	0
4	0	0	0	0,6	0	0,4
5	0	0	0	0	0	1,0

Os estados 0 e N são absorventes: quando a fortuna atinge uma das barreiras, o jogo termina.

Para distinguir um caminho particular de uma probabilidade de transição, considere a trajetória

$$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0.$$

Ela tem probabilidade $0{,}4(0{,}6)^3 = 0{,}0864$. A figura mostra essa realização; outras sequências também podem levar à ruína.

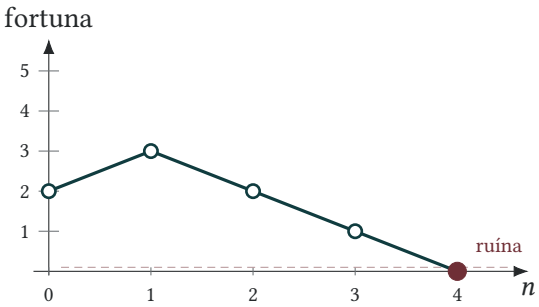


Figura 2.5: Uma realização da ruína do jogador com $N = 5$, começando com fortuna 2 e sendo absorvida em 0 no quarto passo.

◁

Exemplo 2.3 — Cadeia de Ehrenfest.

Esta cadeia surgiu na física como um modelo simplificado da troca de partículas entre dois recipientes. Na versão matemática, distribuímos $N \geq 1$ bolas entre duas urnas. A cada passo, escolhemos uma das N bolas ao acaso e a transferimos para a outra urna.

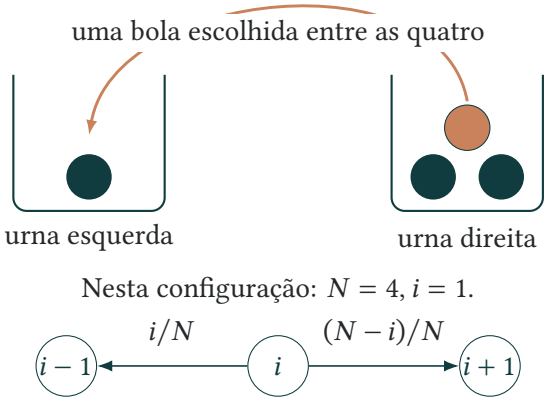


Figura 2.6: Na cadeia de Ehrenfest, escolhemos uma das N bolas e a transferimos para a outra urna. Se há i bolas à esquerda, o número de bolas nessa urna diminui com probabilidade i/N e aumenta com probabilidade $(N-i)/N$.

Seja X_n o número de bolas na urna esquerda depois do n-ésimo passo. Conhecer $X_n = i$ basta para determinar as probabilidades do passo seguinte: há $N - i$ bolas na urna direita e i na esquerda. Assim, para $0 \le i < N$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) = \frac{N-i}{N},$$

pois X_n aumenta quando a bola escolhida está na urna direita. Do mesmo modo, X_n diminui em uma unidade com probabilidade i/N. Logo,

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N} \quad (0 \le i < N), \qquad p(i, i-1) = \frac{i}{N} \quad (0 < i \le N),$$

e $p(i,j) = 0$ nos demais casos. Quando $N = 4$, por exemplo, a matriz é

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	1/4	0	3/4	0	0
2	0	2/4	0	2/4	0
3	0	0	3/4	0	1/4
4	0	0	0	1	0

◁

Nos exemplos da ruína do jogador e de Ehrenfest, partimos de uma descrição verbal e extraímos as probabilidades de transição. Reciprocamente, qualquer família $p(i,j)$ que satisfaça

(i) $p(i,j) \ge 0$ para todos os estados i, j;

(ii) $\sum_j p(i,j) = 1$ para cada estado i,

define uma matriz de transição. Para construir a cadeia, estando em i, sorteamos o próximo estado j segundo a distribuição dada pela linha i da matriz.

Outra maneira de descrever uma cadeia é por uma *recorrência aleatória*:

$$X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1}),$$

em que $Z_1, Z_2, \ldots$ são novas entradas aleatórias, independentes e com a mesma distribuição, também independentes de X_0. O próximo sorteio independe do passado; portanto, a lei de X_{n+1} depende apenas de X_n, e a cadeia é homogênea.

Exemplo 2.4 — Uma oficina de reparos.

Seja X_n o número de máquinas aguardando reparo no início do dia n. A oficina conserta uma máquina por dia, quando há alguma esperando. Ao final do dia, chegam Z_{n+1} novas máquinas com defeito. A regra é

$$\boxed{X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Z_{n+1}}, \qquad x^+ = \max\{x, 0\}.$$

Suponha que as chegadas de dias diferentes sejam independentes, com

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 2) = \frac{1}{4}.$$

Se $X_n = 2$, a oficina conserta uma máquina e resta uma antes das novas chegadas. Logo,

$$p(2,1) = \frac{1}{2}, \qquad p(2,2) = \frac{1}{4}, \qquad p(2,3) = \frac{1}{4}.$$

Já se $X_n = 0$ ou $X_n = 1$, não sobra nenhuma máquina depois do reparo, e $X_{n+1} = Z_{n+1}$. Assim, as linhas de transição correspondentes a 0 e 1 são iguais.

A recorrência determina o próximo estado a partir do número atual de máquinas e das novas chegadas, sem exigir a escrita de uma matriz infinita.

◁

Exemplo 2.5 — Três gerações de uma família: mobilidade social.

Uma família é acompanhada ao longo das gerações. Em cada geração, registramos sua posição em uma de três classes, representadas por 1 = inferior, 2 = intermediária e 3 = superior. Como modelo didático, suponha que a classe na geração seguinte dependa somente da classe atual, com a matriz de transição

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{array}.$$

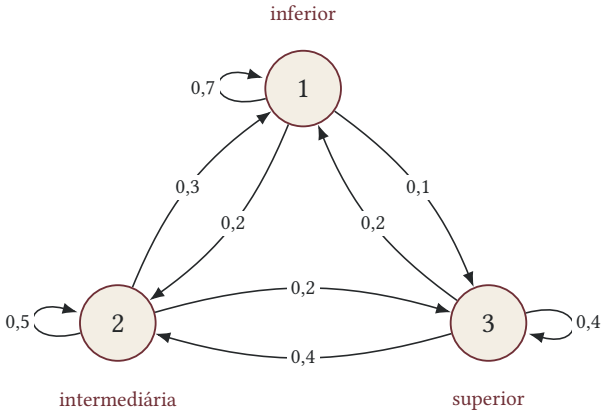


Figura 2.7: Três classes sociais e as probabilidades de transição entre gerações. Os laços representam a possibilidade de permanecer na mesma classe.

Se a família está na classe intermediária, na próxima geração ela permanece nessa classe com probabilidade 0,5, desce com probabilidade 0,3 e sobe com probabilidade 0,2. Esses números são ilustrativos, não estimativas obtidas de uma população real. Na próxima seção usaremos a mesma matriz para investigar duas gerações; no Capítulo 3, estudaremos o comportamento de longo prazo.

◁

Exemplo 2.6 — A vida de um computador.

Um computador de escritório pode estar funcionando (F), em reparo (R) ou definitivamente descartado (D). Ao final de um dia de funcionamento, permanece funcionando no dia seguinte com probabilidade 0,995 e entra em reparo com probabilidade 0,005. Se está em reparo, volta a funcionar com probabilidade 0,90, continua em reparo com probabilidade 0,05 e é descartado com probabilidade 0,05. Depois do descarte, não retorna ao serviço.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & F & R & D \\ \hline F & 0{,}995 & 0{,}005 & 0 \\ R & 0{,}90 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ D & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

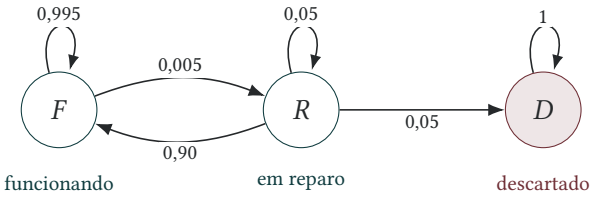


Figura 2.8: Funcionamento e reparo podem alternar; o descarte é um estado absorvente.

A condição atual determina a lei do dia seguinte. Mais adiante veremos como calcular o número esperado de dias em cada condição antes do descarte.

◁

Exemplo 2.7 — Um canal de comunicação com ruído.

Um dígito binário atravessa sucessivas etapas de transmissão. Em cada etapa, um 0 é trocado por 1 com probabilidade a, enquanto um 1 é trocado por 0 com probabilidade b, independentemente do que ocorreu antes. Se $X_n \in \{0, 1\}$ é o dígito que entra na etapa n, então (X_n) é uma cadeia de Markov com matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Interessa calcular $\mathbb{P}(X_n = X_0)$ e examinar se a informação sobre o bit original desaparece quando n cresce. O canal simétrico corresponde ao caso $a = b = 1 - p$, em que cada etapa preserva o dígito com probabilidade p.

◁

Exemplo 2.8 — Quando uma soma perde informação.

Sejam $Y_0, Y_1, \ldots$ Bernoulli independentes, com parâmetro $1/2$, e ponha $Z_n = Y_{n-1} + Y_n$ para $n \geq 1$. Conhecer $Z_2 = 1$ deixa duas possibilidades equiprováveis para (Y_1, Y_2), de modo que

$$\mathbb{P}(Z_3 = 0 \mid Z_2 = 1) = 1/4.$$

Mas, se sabemos também que $Z_1 = 0$, então $Y_1 = 0$ e $Y_2 = 1$; portanto

$$\mathbb{P}(Z_3 = 0 \mid Z_2 = 1, Z_1 = 0) = 0.$$

Os eventos condicionados têm probabilidade positiva. Assim, (Z_n) não é uma cadeia de Markov: a soma esconde informação que o passado ajuda a

reconstruir. O processo dos pares (Y_{n-1}, Y_n) tem a propriedade de Markov, pois o próximo par é (Y_n, Y_{n+1}) e a nova variável Y_{n+1} é independente das anteriores.

Escrevendo $W_n = (Y_{n-1}, Y_n)$, enumeramos os estados na ordem $00, 01, 10, 11$. Como $W_{n+1} = (Y_n, Y_{n+1})$, apenas o segundo algarismo do estado atual e o novo sorteio importam. A matriz de transição é

$$P_W = \begin{array}{c|cccc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 00 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 01 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 10 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

Por exemplo, para passar de 00 a 11 em dois passos, o único caminho possível é $00 \to 01 \to 11$; logo,

$$P_W^2(00, 11) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A soma Z_n pode ser recuperada de W_n, mas não o contrário: $Z_n = 1$ não distingue 01 de 10, que levam a distribuições diferentes para o próximo valor da soma. A distinção entre esses estados conserva a informação necessária ao próximo passo.

◁

2.2 Probabilidades de transição em vários passos

A matriz P descreve um passo. Para descrever m passos, precisamos somar sobre todos os estados intermediários possíveis. A multiplicação de matrizes faz exatamente essa contabilidade.

Distribuição inicial e lei da cadeia

A matriz de transição descreve como a cadeia se move, mas ainda é preciso dizer onde ela começa. A *distribuição inicial* é a distribuição μ de X_0:

$$\mu(x) = \mathbb{P}(X_0 = x), \qquad x \in S.$$

Escrevemos $\mathbb{P}_\mu$ para a lei da trajetória quando X_0 tem distribuição μ e E_μ para a esperança correspondente.
Quando o estado inicial é fixo, usamos uma notação mais curta: $\mathbb{P}_x$ é a lei da cadeia que começa em x, isto é, $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$, e E_x é a esperança sob essa lei. Assim, para qualquer evento A determinado pela trajetória,

$$\mathbb{P}_\mu(A) = \sum_{x \in S} \mathbb{P}_\mu(A \mid X_0 = x)\, \mathbb{P}_\mu(X_0 = x) = \sum_{x \in S} \mu(x) \mathbb{P}_x(A).$$

A fórmula apenas separa os casos possíveis para o estado inicial. Quando $\mu(x) > 0$, $\mathbb{P}_x$ também pode ser visto como a lei condicional $\mathbb{P}_\mu(\cdot \mid X_0 = x)$.

Definição 2.3 — Probabilidades de transição em m passos

Para $m \geq 0$, a probabilidade de transição de i para j em m passos é $\mathbb{P}_i(X_m = j)$. Denotaremos por P^m a matriz dessas probabilidades, com $P^0 = I$. O próximo teorema mostrará que ela coincide com a potência matricial usual.

Pela Proposição 2.3 e pela propriedade de Markov,

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}_i(X_m = j),$$

sempre que o condicionamento estiver definido.

Exemplo 2.9 — O sapo em dois e três passos.

Voltemos ao sapo do Exemplo 2.1. Se ele começa em A, para estar novamente em A depois de dois saltos há exatamente duas possibilidades:

$$A \to B \to A \qquad \text{ou} \qquad A \to C \to A.$$

As probabilidades desses caminhos são, respectivamente,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$P^2(A, A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

Para o sapo partir de A e chegar a B depois de três saltos, há três caminhos possíveis:

$$A \to B \to A \to B, \qquad A \to B \to C \to B, \qquad A \to C \to A \to B.$$

Desta vez os caminhos não têm todos a mesma probabilidade:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Logo,

$$P^3(A, B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{24}.$$

◁

A equação de Chapman–Kolmogorov reúne essas contribuições: fixado um instante intermediário, os caminhos são separados segundo o estado ocupado nesse instante.

Teorema 2.4 — Equação de Chapman–Kolmogorov

Para $m, n \geq 0$,

$$P^{m+n}(i, j) = \sum_{k \in S} P^m(i, k) P^n(k, j). \tag{2.2}$$

Em notação matricial, $P^{m+n} = P^m P^n$. Em particular, as probabilidades em m passos são as entradas da potência usual P^m.

Demonstração. Condicionamos pelo estado ocupado após os primeiros m passos. Os eventos $\{X_m = k\}$, para $k \in S$, são disjuntos e cobrem todas as possibilidades, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(X_{m+n} = j) &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}_i(X_m = k,\ X_{m+n} = j) \\ &= \sum_{\substack{k \in S: \\ P_i(X_m = k) > 0}} \mathbb{P}_i(X_m = k)\, \mathbb{P}_i(X_{m+n} = j \mid X_m = k).\end{aligned}$$

O primeiro fator é, por definição, $P^m(i,k)$. Para o segundo, o Corolário 2.2 permite esquecer os estados anteriores a m depois que conhecemos $X_m = k$; pela homogeneidade, podemos ainda deslocar a origem do tempo. Portanto,

$$\mathbb{P}_i(X_{m+n} = j \mid X_m = k) = \mathbb{P}_k(X_n = j) = P^n(k,j).$$

Substituindo esses dois fatores obtemos

$$P^{m+n}(i,j) = \sum_k P^m(i,k) P^n(k,j).$$

Se $\mathbb{P}_i(X_m = k) = 0$, o termo correspondente já é zero, por isso esses estados podem ser incluídos sem restrição na soma final. ∎

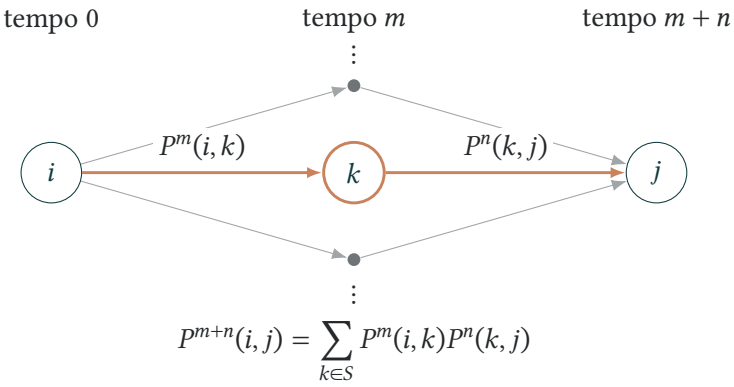


Figura 2.9: Para chegar de i a j em $m+n$ passos, somamos sobre o estado ocupado no instante m. Os eventos correspondentes aos diferentes valores de X_m são disjuntos. As setas representam percursos de m e n passos, respectivamente.

Exemplo 2.10 — Ehrenfest: duas trocas de urna.

Voltemos à urna de Ehrenfest do Exemplo 2.3, agora com $N = 4$ bolas. Suponha que todas estejam inicialmente na urna da direita, isto é, $X_0 = 0$. No primeiro passo uma bola vai obrigatoriamente para a esquerda, e $X_1 = 1$. No segundo, a bola escolhida pode ser a única que está à esquerda, com probabilidade $1/4$, ou uma das outras três, com probabilidade $3/4$. Logo,

$$\boxed{P^2(0,0) = \frac{1}{4}, \qquad P^2(0,2) = \frac{3}{4}.}$$

Nenhum outro estado é possível no segundo passo. A mesma urna será retomada no estudo do equilíbrio e da periodicidade.

◁

Exemplo 2.11 — Dois passos no canal binário.

Para o canal do Exemplo 2.7,

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

e portanto

$$P^2 = \begin{pmatrix} (1-a)^2 + ab & a(2-a-b) \\ b(2-a-b) & (1-b)^2 + ab \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, para começar em 0 e terminar em 1 depois de duas transmissões, há dois caminhos: $0 \to 0 \to 1$ e $0 \to 1 \to 1$. Suas probabilidades somam

$$(1-a)a + a(1-b) = a(2-a-b),$$

que é a entrada $(0,1)$ de P^2.

◁

Exemplo 2.12 — Mobilidade social: o caminho e o destino.

Retomemos a matriz da mobilidade social do Exemplo 2.5. Uma família começa na classe intermediária. A probabilidade de ela subir para a classe superior na geração seguinte e descer à inferior na outra é a probabilidade do *caminho específico* $2 \to 3 \to 1$:

$$\mathbb{P}_2(X_1 = 3, X_2 = 1) = p(2,3)p(3,1) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04.$$

Para calcular a probabilidade de estar na classe inferior depois de duas gerações, somamos sobre *todos* os caminhos:

$$\begin{aligned} P^2(2,1) &= p(2,1)p(1,1) + p(2,2)p(2,1) + p(2,3)p(3,1) \\ &= 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \\ &= \boxed{0{,}40}. \end{aligned}$$

A distribuição completa depois de duas gerações é

$$P^2(2,\cdot) = (0{,}40,\ 0{,}39,\ 0{,}21).$$

A probabilidade do destino reúne as contribuições de todos os itinerários que chegam a ele.

◁

Exemplo 2.13 — A loja: estoque depois de dois dias.

Uma loja acompanha seu estoque no fim do dia, entre 0 e 3 unidades. Se terminou o dia com 0 ou 1, repõe o estoque até 3 antes de vender novamente; se terminou com 2 ou 3, não encomenda nada. A demanda diária, independente de um dia para outro, é 0, 1 ou 2 unidades, com probabilidades $1/4$, $1/2$ e $1/4$, respectivamente.

Começando com $X_0 = 2$, qual é a chance de o estoque ser exatamente zero no fim do segundo dia? Para terminar com zero, a loja precisa começar esse segundo dia com 2 unidades e vender as duas. Se a primeira demanda foi 1 ou 2, haverá reposição a 3 e não será possível terminar em zero, pois a demanda máxima é 2. Assim, há somente o caminho $2 \to 2 \to 0$, que exige demanda zero no primeiro dia e demanda dois no segundo:

$$\boxed{P^2(2,0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.}$$

Mais adiante, no Exemplo 3.5, estudaremos a mesma política para calcular o estoque e o lucro médios no longo prazo.

◁

Exemplo 2.14 — Duas salas e uma saída: calculando P^n.

Uma pessoa circula por duas salas, representadas pelos estados 1 e 2. A cada passo, ela permanece na mesma sala com probabilidade $1/2$, passa para a outra com probabilidade $1/4$ ou sai do edifício com probabilidade $1/4$. A saída é definitiva e corresponde ao estado absorvente 3. A matriz de transição é

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

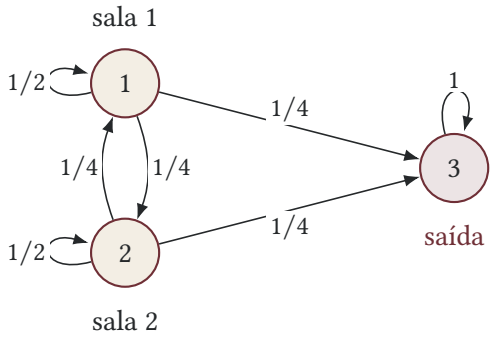


Figura 2.10: As duas salas permitem permanências e mudanças de sala; de qualquer uma delas é possível chegar à saída, que é absorvente.

Por Chapman–Kolmogorov, para estar na sala 2 após dois passos, começando na sala 1, a pessoa pode permanecer primeiro na sala 1 ou passar imediatamente à sala 2. Assim,

$$P^2(1,2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A diagonalização permite calcular P^n para um número qualquer de passos. Os vetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são autovetores de P, com autovalores $3/4$, $1/4$ e 1, respectivamente.

Tomando-os como colunas, obtemos

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $P = S\ \mathrm{diag}(3/4, 1/4, 1)\, S^{-1}$ e

$$P^n = S\ \mathrm{diag}\big((3/4)^n, (1/4)^n, 1\big)\, S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_n+b_n}{2} & \frac{a_n-b_n}{2} & 1-a_n \\ \frac{a_n-b_n}{2} & \frac{a_n+b_n}{2} & 1-a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $a_n = (3/4)^n$ e $b_n = (1/4)^n$.

Em cada passo anterior à saída, a chance de continuar no edifício é $3/4$. Logo,

$$\mathbb{P}_1(X_n = 3) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n :$$

esta é a probabilidade de já ter saído até o instante n. Além disso,

$$P^n(1,1) - P^n(1,2) = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

A diferença entre as probabilidades de ocupar as duas salas diminui rapidamente: a cadeia perde a preferência pela sala em que começou. Como $a_n, b_n \to 0$, a probabilidade de estar no estado 3 tende a 1. Voltaremos a esta cadeia para contar quantas vezes a pessoa visita uma das salas antes de sair.

◁

Se a distribuição inicial é o vetor-linha μ_0, então a distribuição de X_m é $\mu_0 P^m$. Essa identidade será o ponto de partida para o estudo do comportamento de longo prazo.

2.2.1 Estimação de transições e retenção de usuários

Em aplicações, a matriz de transição costuma ser estimada a partir de observações. Suponha que registremos, ao fim de cada semana, o número de dias em que cada usuário acessou um serviço. Fixamos antes da análise os estados A = ativo (quatro ou mais dias), P = pouco ativo (um a três dias), I = inativo (nenhum acesso) e B = abandono (conta encerrada). Aqui o encerramento é definitivo; inatividade, por si só, permite retorno.

Exemplo 2.15 — Das observações à previsão de abandono.

Considere a seguinte tabela *didática* de contagens, obtida a partir de pares de semanas consecutivas de vários usuários acompanhados no mesmo período:

N_{ij}	A	P	I	B	total
A	70	20	10	0	100
P	10	25	10	5	50
I	2	4	8	6	20

.

Os estados A, P, I e B representam, respectivamente, usuários ativos, pouco ativos, inativos e que abandonaram o serviço. A entrada N_{ij} conta quantas vezes foi observada uma transição do estado i para o estado j:

$$N_{ij} = \#\{\text{transições observadas de } i \text{ para } j\}.$$

Um mesmo usuário pode contribuir com vários pares de semanas consecutivas. A última observação de um usuário não é ligada à primeira de outro, e uma semana sem observação não deve ser registrada como inatividade.

A tabela permite estimar diretamente as probabilidades de transição. Se

$$N_i = \sum_k N_{ik}$$

é o número total de transições observadas a partir do estado i, tomamos

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}.$$

Essa estimativa é a frequência das transições de i para j entre todas as transições iniciadas em i.

Por exemplo, das 100 transições observadas a partir de A, 70 terminaram novamente em A, 20 em P e 10 em I. Assim,

$$\hat{p}_{AA} = 0{,}7, \qquad \hat{p}_{AP} = 0{,}2, \qquad \hat{p}_{AI} = 0{,}1.$$

Procedendo da mesma forma nas demais linhas, obtemos

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As três primeiras linhas foram estimadas a partir das observações. A última é uma hipótese do modelo: depois do abandono não são coletadas novas transições, e consideramos B um estado absorvente.

Suponha agora que um usuário esteja ativo no instante inicial. Sua distribuição inicial é $(1, 0, 0, 0)$ e, portanto,

$$(1, 0, 0, 0)\widehat{P}^2 = (0{,}54, 0{,}26, 0{,}15, 0{,}05),$$
$$(1, 0, 0, 0)\widehat{P}^3 = (0{,}445, 0{,}268, 0{,}166, 0{,}121).$$

A última coordenada da primeira expressão pode também ser obtida diretamente. Para que um usuário inicialmente ativo tenha abandonado o serviço em até dois passos, ele deve seguir um dos caminhos

$$A \to P \to B \qquad \text{ou} \qquad A \to I \to B.$$

Logo,

$$0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}05.$$

Como B é absorvente, a última coordenada de $(1, 0, 0, 0)\widehat{P}^3$ representa a probabilidade estimada de abandono até o terceiro passo:

$$0{,}121.$$

O abandono de usuários ou clientes é frequentemente chamado de *churn*. A fração ou probabilidade de abandono em um período é a *taxa de churn*, usada em serviços por assinatura e plataformas digitais para acompanhar a permanência dos usuários. O modelo relaciona a atividade observada nas semanas anteriores à probabilidade de abandono nas semanas seguintes.

Há mais de uma maneira de definir retenção. Se consideramos retido todo usuário que ainda não atingiu B, então a retenção até o terceiro passo é

$$1 - 0{,}121 = 0{,}879.$$

Se quisermos medir apenas a probabilidade de o usuário estar ativo ou pouco ativo exatamente no terceiro passo, obtemos

$$0{,}445 + 0{,}268 = 0{,}713.$$

As duas quantidades respondem a perguntas diferentes: a primeira mede a permanência no serviço, enquanto a segunda mede a presença de alguma atividade no período considerado.

◁

Se uma linha não contém transições observadas, sua distribuição não é identificada pelos dados: não podemos dividir por zero nem concluir que o estado seja absorvente. Uma suavização simples, para d_i destinos admissíveis, substitui as proporções por

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{N_{ij} + \eta}{N_i + d_i \eta}, \qquad \eta > 0,$$

nesses destinos, conservando os zeros estruturais. Ela evita previsões nulas baseadas em poucas observações, mas acrescenta uma escolha ao modelo; já não é o estimador de máxima verossimilhança sem restrições adicionais.

A hipótese de Markov pode ser examinada comparando a atividade na semana seguinte entre usuários com o mesmo estado atual, mas estados anteriores distintos. Diferenças persistentes sugerem que o estado resume mal o histórico. Para examinar a homogeneidade, podem-se estimar matrizes em períodos separados e comparar suas previsões em semanas posteriores, inclusive a fração de contas encerradas. Uma campanha, uma mudança no produto ou diferenças entre coortes podem alterar as probabilidades de transição. Nesses casos, uma única matriz fixa deixa de representar bem a evolução dos usuários. Mesmo quando o ajuste é razoável, as probabilidades obtidas são previsões do modelo: não expressam a incerteza da estimação nem demonstram o efeito causal de uma intervenção voltada à retenção.

2.3 Classificação dos estados

Para compreender as trajetórias, surgem duas perguntas diferentes: quando a cadeia visita y pela primeira vez e quando volta a y depois do instante inicial. Se começamos em y, a entrada já ocorreu, mas o retorno ainda está por acontecer.

Definição 2.4 — Tempos de entrada e de retorno

Para um estado y, definimos o *tempo de entrada* por

$$H_y = \min\{n \geq 0 : X_n = y\}.$$

Esse tempo admite o instante inicial. Na literatura, H_y também aparece como *tempo de atingimento* (*hitting time*) e, em algumas convenções, como *tempo de primeira passagem*. Usaremos "tempo de entrada" para salientar nossa convenção. O *tempo de primeiro retorno* é

$$T_y^+ = \min\{n \geq 1 : X_n = y\}.$$

Adotamos $\min \varnothing = \infty$ e escrevemos

$$\rho_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y^+ < \infty).$$

Quando a cadeia começa em y, T_y^+ é o primeiro retorno: o instante inicial não conta. Quando ela começa em $x \neq y$, temos $T_y^+ = H_y$. Assim, ρ_{xy} é a probabilidade de atingir y em tempo positivo e ρ_{yy} é a probabilidade de retornar a y.

Definição 2.5 — Tempo de parada

Uma variável aleatória T com valores em $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ é um *tempo de parada* para a informação gerada pela cadeia se, para cada n, é possível decidir se $T \leq n$ observando somente $X_0, \ldots, X_n$. Equivalentemente, como T assume valores inteiros, podemos exigir que seja possível decidir se $T = n$ usando apenas a informação disponível até o instante n.

Retornos, entradas e saídas fornecem exemplos básicos de tempos de parada.

Exemplo 2.16 — Tempo de primeiro retorno.

Para $n \geq 1$,

$$\{T_y^+ = n\} = \{X_1 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y, X_n = y\}.$$

Assim, no instante n já sabemos se o primeiro retorno ocorreu exatamente ali, e T_y^+ é um tempo de parada.

◁

Exemplo 2.17 — Entrada em um conjunto.

Se $A \subseteq S$, defina

$$H_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Para decidir se $H_A = n$, basta observar se $X_0, \dots, X_{n-1}$ estão fora de A e $X_n \in A$. Logo H_A é um tempo de parada.

◁

Exemplo 2.18 — Saída de um conjunto.

Se $A \subseteq S$, o primeiro instante de saída,

$$\tau_A = \min\{n \geq 0 : X_n \notin A\},$$

também é um tempo de parada: no instante n podemos verificar se a cadeia permaneceu em A até $n-1$ e saiu de A em n.

◁

Exemplo 2.19 — Última visita a um estado.

Como a cadeia pode visitar y infinitas vezes, o último tempo de visita pode não existir. Podemos formalizar essa ideia por

$$L = \sup\{n \geq 0 : X_n = y\},$$

permitindo $L = \infty$ e adotando uma convenção quando y nunca é visitado. Em geral, L não é um tempo de parada: para decidir no instante n que $L = n$, seria necessário saber que a cadeia nunca mais visitará y, isto é, consultar o futuro.

◁

A regra de parada depende apenas da informação já observada.

A propriedade forte de Markov diz que a cadeia pode ser reiniciada em um tempo de parada: dali em diante, importa o estado em que ela parou, e não o caminho usado para chegar até ele.

Teorema 2.5 — Propriedade forte de Markov

Se T é um tempo de parada, então, no evento $\{T < \infty\}$ e condicionalmente ao estado $X_T = y$, a trajetória futura $(X_{T+k})_{k\geq 0}$ tem a lei da cadeia iniciada em y e é independente do caminho observado até T. Mais precisamente, se A é um evento determinado pelo caminho observado até T, então, para $r \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{T+1} = z_1, \dots, X_{T+r} = z_r \mid A,\, X_T = y,\, T < \infty) \\ = \mathbb{P}_y(X_1 = z_1, \dots, X_r = z_r) = p(y, z_1) \prod_{k=1}^{r-1} p(z_k, z_{k+1}),\end{aligned}$$

sempre que o condicionamento estiver definido.
Em particular, para $m \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{T+m} = j \mid X_T = i,\, T < \infty) = \mathbb{P}_i(X_m = j),$$

sempre que o condicionamento estiver definido.

A hipótese de parada é essencial: uma escolha baseada em acontecimentos futuros poderia favorecer certas trajetórias e alterar a lei do processo reiniciado.

Demonstração. Fixe $r \geq 1$, estados $z_1, \dots, z_r$ e um evento A determinado pelo caminho observado até T, no sentido de que, para cada n, o evento $A \cap \{T = n\}$ é determinado por $X_0, \dots, X_n$. O argumento tem três passos.

1. Fixar o valor da parada. No evento $\{T = n\}$, a regra que determina a parada já pode ser decidida com a informação disponível até o instante n. Assim,

$$A \cap \{T = n, X_n = y\}$$

é um evento determinado por $X_0, \dots, X_n$. O instante aleatório foi, portanto, reduzido a um instante determinístico.

2. Aplicar a propriedade de Markov em n. Como no Corolário 2.2, podemos somar sobre as histórias completas compatíveis com $A \cap \{T = n, X_n = y\}$. Em cada uma, a probabilidade do bloco futuro depende apenas do estado $X_n = y$. Logo,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A, T = n, X_T = y, X_{T+1} = z_1, \dots, X_{T+r} = z_r)\\ &\quad = \mathbb{P}(A, T = n, X_T = y)\, p(y, z_1) \prod_{j=1}^{r-1} p(z_j, z_{j+1}).\end{aligned}$$

O segundo fator é exatamente a probabilidade de a cadeia iniciada em y seguir o caminho $y, z_1, \dots, z_r$; em particular, ele não depende de A nem de n.

3. Somar sobre os valores possíveis de T. Somando a identidade anterior em n e usando que os eventos $\{T = n\}$ são disjuntos, obtemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A, T < \infty, X_T = y, X_{T+1} = z_1, \dots, X_{T+r} = z_r)\\ &\quad = \mathbb{P}(A, T < \infty, X_T = y)\, p(y, z_1) \prod_{j=1}^{r-1} p(z_j, z_{j+1}).\end{aligned}$$

Quando a probabilidade condicionante é positiva, a divisão mostra que a lei do futuro, dado $X_T = y$, não depende do caminho observado até T. Como as probabilidades de blocos finitos determinam a lei da trajetória futura, obtemos a propriedade forte de Markov. ∎

Exemplo 2.20 — Recomeçando em um tempo de entrada.

Considere a ruína do jogador nos estados $\{0, 1, 2, 3\}$, com 0 e 3 absorventes e, nos estados interiores,

$$p(i, i+1) = 0{,}6, \qquad p(i, i-1) = 0{,}4.$$

Parta de 1 e seja $T = H_2$. O evento $\{T < H_0\}$ diz que a cadeia alcançou 2 antes da ruína. Como T é um tempo de parada e $X_T = 2$ nesse evento, a propriedade forte de Markov permite esquecer como e quando a cadeia chegou a 2. Em particular,

$$\mathbb{P}_1\big(X_{T+1} = 3 \mid T < H_0\big) = \mathbb{P}_2(X_1 = 3) = 0{,}6.$$

Do mesmo modo,

$$\mathbb{P}_1\big(X_{T+1} = 1,\ X_{T+2} = 2 \mid T < H_0\big) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24.$$

O instante T é aleatório, mas a cadeia passa a evoluir como uma cópia iniciada em 2. Esse reinício permite decompor trajetórias em trechos delimitados por entradas e retornos.

◁

Definição 2.6 — Tempos de retorno sucessivos

Definimos o instante do primeiro retorno por

$$T_y^{(1)} = T_y^+,$$

e, recursivamente, o instante do k-ésimo retorno a y por

$$T_y^{(k)} = \min\{n > T_y^{(k-1)} : X_n = y\}, \qquad k \geq 2. \tag{2.3}$$

Assim, $T_y^{(k)} < \infty$ significa que a cadeia visita y pelo menos k vezes em tempos positivos.

Pela propriedade forte de Markov, após cada retorno a cadeia recomeça em y sob a lei $\mathbb{P}_y$. Portanto,

$$\mathbb{P}_y\big(T_y^{(k)} < \infty\big) = \rho_{yy}^k. \tag{2.4}$$

Se $\rho_{yy} = 1$, cada retorno $T_y^{(k)}$ é finito com probabilidade um; como isso vale para todo k, a cadeia retorna a y infinitas vezes quase certamente. Se $\rho_{yy} < 1$, a probabilidade de ocorrerem pelo menos k retornos é ρ_{yy}^k, que tende a zero. Nesse caso, o número de retornos é finito quase certamente.

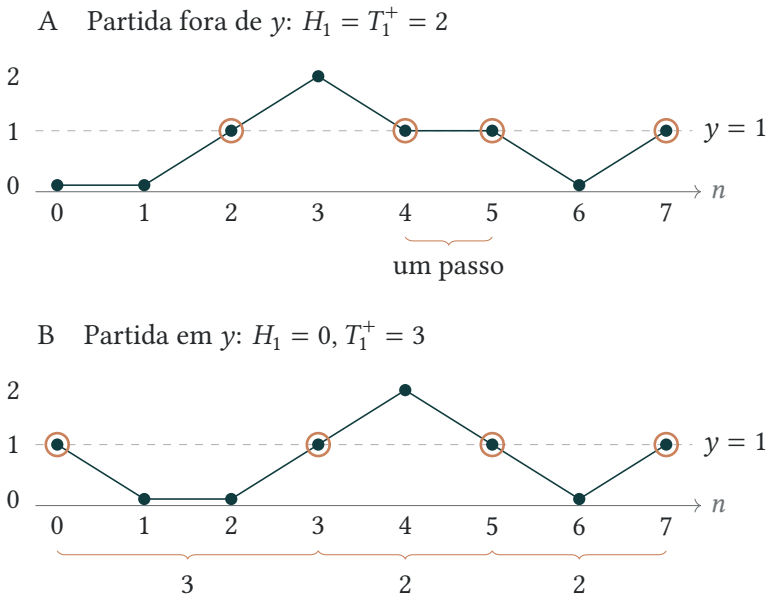


Figura 2.11: A entrada inclui o instante inicial; o retorno exige tempo positivo. Fora de y, temos $H_y = T_y^+$. No painel B, a entrada ocorre em zero e o primeiro retorno em três. Os círculos destacam as visitas a $y = 1$; no painel A, a permanência do instante 4 para o 5 conta como novo retorno. As chaves medem intervalos em passos, e as linhas apenas guiam a leitura dos tempos discretos.

Definição 2.7 — Estados recorrentes e transientes

Um estado y é *recorrente* se $\rho_{yy} = 1$; nesse caso, a cadeia iniciada em y retorna a y infinitas vezes com probabilidade 1. O estado é *transiente* se $\rho_{yy} < 1$; nesse caso, o número de visitas a y é finito com probabilidade 1.

Exemplo 2.21 — Um triângulo recorrente.

Considere a cadeia em $\{1, 2, 3\}$ que, a cada passo, salta para cada um dos outros dois vértices com probabilidade $1/2$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

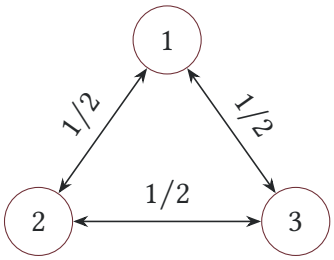


Figura 2.12: Grafo de transições do triângulo recorrente. De cada vértice, a cadeia salta para cada um dos outros dois com probabilidade $1/2$.

Partindo de 1, depois do primeiro passo a cadeia está em 2 ou 3. Enquanto não retorna a 1, em cada passo há probabilidade $1/2$ de continuar no outro vértice sem visitar 1. Portanto, para $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_1(T_1^+ > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0.$$

Logo $\mathbb{P}_1(T_1^+ < \infty) = 1$, e o estado 1 é recorrente. Por simetria, os três estados são recorrentes.

◁

Assim, recorrência não significa "permanecer perto" de y: ela afirma apenas que, partindo de y, a cadeia retorna a y com probabilidade um. A definição, por si só, não impõe que esse retorno seja rápido. Transiência significa que, partindo de y, há probabilidade positiva de nunca mais retornar.

A diferença aparece já na ruína do jogador: os estados absorventes são recorrentes, enquanto os estados internos são transientes.

Exemplo 2.22 — Ruína do jogador.

No jogo do Exemplo 2.2 com $N = 5$, os estados 0 e 5 são absorventes e, portanto, recorrentes. Os estados internos são transientes. De fato, a partir de cada um deles existe um caminho de probabilidade positiva até uma barreira absorvente sem retornar ao ponto de partida:

$$1 \to 0, \qquad 2 \to 1 \to 0, \qquad 3 \to 4 \to 5, \qquad 4 \to 5.$$

Por exemplo,

$$\mathbb{P}_2(T_2^+ = \infty) \geq p(2,1)p(1,0) = 0{,}36 > 0.$$

O mesmo argumento vale para 1, 3 e 4. Assim, cada estado interno tem probabilidade positiva de nunca retornar.

◁

A estrutura do grafo fornece critérios para identificar estados transientes e recorrentes.

Duas noções do grafo de transições serão usadas repetidamente. A primeira é orientada: pergunta se existe algum caminho possível de x até y. A segunda exige caminhos nos dois sentidos.

Definição 2.8 — Acessibilidade e comunicação

Dizemos que y é *acessível* a partir de x, e escrevemos $x \to y$, se

$$\mathbb{P}_x(H_y < \infty) > 0.$$

Equivalentemente, $x \to y$ se e somente se $P^m(x, y) > 0$ para algum $m \geq 0$: atingir y em tempo finito com probabilidade positiva equivale à existência de um caminho finito de x até y cujas transições tenham probabilidade positiva. Usaremos as duas formulações indistintamente. Dizemos que x e y *se comunicam*, e escrevemos $x \leftrightarrow y$, se $x \to y$ e $y \to x$. Os conjuntos de estados que se comunicam entre si são chamados de *classes de comunicação* da cadeia.

Lema 2.6 — Transitividade da acessibilidade

Se $x \to y$ e $y \to z$, então $x \to z$.

Demonstração. Existem m, n tais que $P^m(x, y) > 0$ e $P^n(y, z) > 0$. Por Chapman–Kolmogorov,

$$P^{m+n}(x, z) \geq P^m(x, y) P^n(y, z) > 0.$$

■

Como $H_x = 0$ sob $\mathbb{P}_x$, temos $x \to x$ para todo estado x. A comunicação é simétrica por definição e, pelo lema, também é transitiva. Portanto, $\leftrightarrow$ é uma

relação de equivalência: as classes de comunicação formam uma partição do espaço de estados.

Teorema 2.7 — Um caminho sem retorno

Se $\rho_{xy} > 0$ e $\rho_{yx} < 1$, então x é transiente.

Demonstração. Se $x = y$, a hipótese $\rho_{xx} < 1$ já afirma que x é transiente. Suponha, portanto, $x \neq y$. Seja $K \geq 1$ o menor comprimento de um caminho de probabilidade positiva de x até y. Escreva esse caminho como

$$x = x_0, x_1, \dots, x_K = y, \qquad \prod_{i=0}^{K-1} p(x_i, x_{i+1}) > 0.$$

Pela minimalidade de K, nenhum dos estados $x_1, \dots, x_{K-1}$ é igual a x: caso contrário, poderíamos eliminar o trecho entre duas visitas a x e obter um caminho mais curto até y. Depois de chegar a y, há probabilidade $1-\rho_{yx} > 0$ de nunca atingir x. Logo,

$$\mathbb{P}_x(T_x^+ = \infty) \geq \left(\prod_{i=0}^{K-1} p(x_i, x_{i+1})\right)(1 - \rho_{yx}) > 0,$$

e x é transiente. ∎

Uma consequência imediata é a seguinte.

Lema 2.8 — Retorno a partir de estados alcançáveis

Se x é recorrente e $\rho_{xy} > 0$, então $\rho_{yx} = 1$.

Demonstração. Se $\rho_{yx} < 1$, então o Teorema 2.7 implicaria que x é transiente, uma contradição. ∎

Definição 2.9 — Conjuntos fechados e irredutibilidade

Um conjunto $A \subseteq S$ é *fechado* se não é possível sair dele:

$$i \in A,\ j \notin A \quad \Longrightarrow \quad p(i,j) = 0.$$

Um conjunto $B \subseteq S$ é *irredutível* se quaisquer dois estados de B se comunicam. A cadeia é irredutível quando o próprio espaço S é irredutível.

Um conjunto fechado é uma região da qual a cadeia não sai. A irredutibilidade significa que cada estado pode ser alcançado a partir de qualquer outro. Na definição de um subconjunto B, os caminhos são considerados na cadeia original; quando B também é fechado, esses caminhos permanecem em B. Em uma cadeia finita, veremos que as classes fechadas são exatamente as regiões recorrentes da cadeia.

Exemplo 2.23 — Duas classes fechadas em quatro estados.

Considere a cadeia em $\{0,1,2,3\}$, com matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

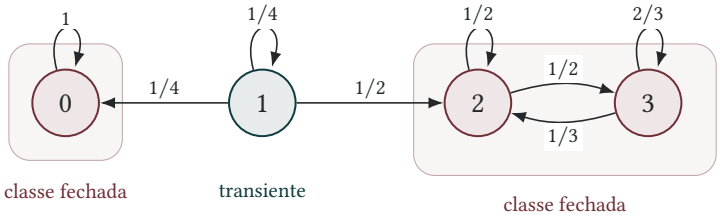


Figura 2.13: O estado 1 pode alcançar duas classes fechadas, $\{0\}$ e $\{2,3\}$, mas nenhuma delas permite retornar a 1.

O estado 0 é absorvente; os estados 2 e 3 se comunicam e formam uma classe fechada. Já o estado 1 é transiente: depois de chegar a 0, 2 ou 3, a cadeia não volta a 1.

Podemos calcular a probabilidade h de alcançar 0 antes de entrar em $\{2,3\}$, partindo de 1. No primeiro passo, a cadeia vai a 0 com probabilidade $1/4$,

fica em 1 com probabilidade $1/4$ ou entra em 2 com probabilidade $1/2$. Logo,

$$h = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}h, \qquad \text{portanto} \qquad \boxed{h = \frac{1}{3}}.$$

A chance de entrar primeiro na classe $\{2, 3\}$ é $2/3$. A decomposição em classes reduziu o cálculo a uma equação de primeiro passo.

◁

As classes fechadas podem ser reconhecidas diretamente no grafo de transições, como na cadeia a seguir.

Exemplo 2.24 — Uma cadeia de sete estados.

Considere a matriz de transição:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0,7	0	0	0	0,3	0	0
2	0,1	0,2	0,3	0,4	0	0	0
3	0	0	0,5	0,3	0,2	0	0
4	0	0	0	0,5	0	0,5	0
5	0,6	0	0	0	0,4	0	0
6	0	0	0	0	0	0,2	0,8
7	0	0	0	1	0	0	0

Desenhe uma seta de i para j quando $p(i, j) > 0$ e $i \neq j$. Os laços correspondentes a $p(i, i) > 0$ foram omitidos: eles não alteram quais estados são alcançáveis, embora sejam relevantes para a periodicidade.

A Figura 2.14 destaca as duas classes fechadas.

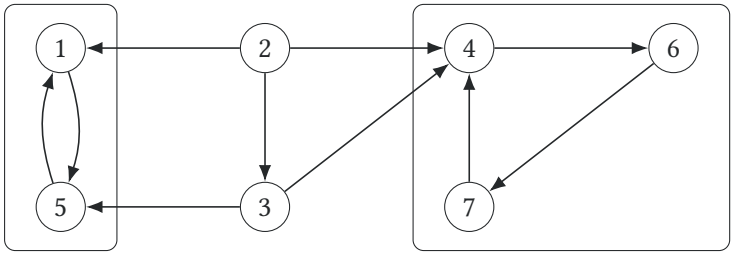


Figura 2.14: Grafo da cadeia de sete estados, com as classes fechadas destacadas. Os laços não estão desenhados.

O estado 2 alcança 1, mas 1 não alcança 2; pelo Teorema 2.7, o estado 2 é transiente. Do mesmo modo, 3 alcança 4, mas 4 não alcança 3, e portanto 3 é transiente.

As classes $\{1, 5\}$ e $\{4, 6, 7\}$ são fechadas e irredutíveis. Há conjuntos fechados maiores — por exemplo, a união $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ e o espaço inteiro —, mas são as classes fechadas que determinam os estados recorrentes. A recorrência dessas classes será demonstrada por meio de tentativas repetidas.

◁

Antes de aplicar a estimativa de tentativas repetidas, recordemos a continuidade das probabilidades e uma regra de somação não negativa. Essas ferramentas também serão usadas na contagem de visitas e em espaços enumeráveis.

Uma série de números não negativos é o supremo de suas somas parciais; seu valor pode ser $+\infty$. Para uma família $a_{ij} \geq 0$, podemos somar por linhas ou por colunas:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sup_{r,s\geq 1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Proposição 2.9 — Continuidade das probabilidades

Se os eventos A_m crescem, isto é,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots,$$

então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(A_m).$$

Se os eventos A_m decrescem, isto é,

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots,$$

então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(A_m).$$

Em particular, se T é um tempo de parada, então

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T \leq n), \qquad \mathbb{P}(T = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T > n).$$

Assim, se $T < \infty$ quase certamente, então $\mathbb{P}(T > n) \to 0$.

Demonstração. Para verificar a afirmação sobre eventos crescentes, escreva $D_1 = A_1$ e $D_m = A_m \setminus A_{m-1}$ para $m \geq 2$. Esses eventos são disjuntos, e a aditividade enumerável dá

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_m) = \lim_{r\to\infty} \sum_{m=1}^{r} \mathbb{P}(D_m) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(A_r).$$

Aplicando essa identidade aos complementares, obtemos a continuidade para eventos decrescentes. Para um tempo de parada T, os eventos $\{T \leq n\}$ crescem para $\{T < \infty\}$, enquanto $\{T > n\}$ decrescem para $\{T = \infty\}$. As duas identidades finais seguem das duas formas de continuidade. ∎

Lema 2.10 — Tentativas repetidas

Seja $D \subseteq S$ um conjunto fechado. Suponha que existam $k \geq 1$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\mathbb{P}_x(T_y^+ \leq k) \geq \alpha$$

para todo $x \in D$. Então, para todo $x \in D$ e $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_x\left(T_y^+ > nk\right) \leq (1-\alpha)^n.$$

Em particular, $\mathbb{P}_x(T_y^+ < \infty) = 1$ para todo $x \in D$.

Demonstração. Fixe $x \in D$ e, para $n \geq 0$, escreva

$$A_n = \{T_y^+ > nk\}.$$

O evento A_n significa que a cadeia chegou ao instante nk sem visitar y em tempo positivo. Como D é fechado e a cadeia começou em D, no evento A_n temos necessariamente

$$X_{nk} \in D.$$

Reiniciamos a análise no instante nk. Fixe $z \in D$ e suponha que o condicionamento abaixo esteja definido. O instante determinístico nk é um tempo

de parada, e A_n é determinado pelo caminho observado até esse instante. Pela propriedade forte de Markov,

$$\mathbb{P}_x\big(A_{n+1} \mid A_n,\, X_{nk} = z\big) = \mathbb{P}_z(T_y^+ > k).$$

Sabendo que a cadeia sobreviveu até nk e que está em z, a probabilidade de evitar y durante os próximos k passos é a mesma que para uma nova cadeia iniciada em z. O caminho percorrido antes de nk não entra mais no cálculo.

Pela hipótese do lema,

$$\mathbb{P}_z(T_y^+ \le k) \ge \alpha \qquad \text{para todo } z \in D.$$

Tomando complementares,

$$\mathbb{P}_z(T_y^+ > k) \le 1 - \alpha \qquad \text{para todo } z \in D.$$

Portanto, qualquer que seja o estado ocupado no instante nk, a probabilidade de sobreviver ao próximo bloco de k passos é no máximo $1 - \alpha$.

Se $\mathbb{P}_x(A_n) = 0$, então também $\mathbb{P}_x(A_{n+1}) = 0$ e a desigualdade que queremos é imediata. Suponha, pois, $\mathbb{P}_x(A_n) > 0$. Condicionando pelos possíveis valores de X_{nk} no evento A_n, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(A_{n+1} \mid A_n) &= \sum_{z \in D} \mathbb{P}_x(A_{n+1} \mid A_n,\, X_{nk} = z)\, \mathbb{P}_x(X_{nk} = z \mid A_n) \\
&\le (1 - \alpha) \sum_{z \in D} \mathbb{P}_x(X_{nk} = z \mid A_n) \\
&= 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

Assim, como $A_{n+1} \subseteq A_n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(T_y^+ > (n+1)k) &= \mathbb{P}_x(A_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}_x(A_{n+1} \mid A_n)\, \mathbb{P}_x(A_n) \\
&\le (1 - \alpha) \mathbb{P}_x(T_y^+ > nk).
\end{aligned}$$

Iterando essa desigualdade e usando $\mathbb{P}_x(T_y^+ > 0) \le 1$, concluímos que

$$\mathbb{P}_x(T_y^+ > nk) \le (1 - \alpha)^n, \qquad n \ge 0.$$

Por fim, os eventos $\{T_y^+ > nk\}$ decrescem para $\{T_y^+ = \infty\}$. Pela continuidade das probabilidades (pela Proposição 2.9),

$$\mathbb{P}_x(T_y^+ = \infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_x(T_y^+ > nk) \le \lim_{n \to \infty} (1 - \alpha)^n = 0.$$

Logo $\mathbb{P}_x(T_y^+ < \infty) = 1$. ∎

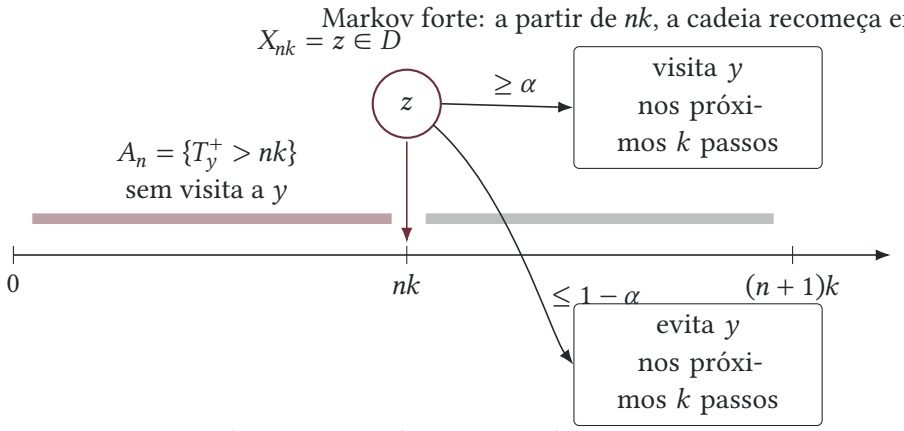


Figura 2.15: A ideia das tentativas repetidas. No evento A_n, a cadeia chega ao instante nk sem visitar y e ocupa algum estado $z \in D$. Pela propriedade forte de Markov, a análise recomeça em z; a hipótese garante probabilidade pelo menos α de visitar y nos próximos k passos e, portanto, probabilidade no máximo $1-\alpha$ de sobreviver ao bloco seguinte.

Dentro de uma classe finita sem saída, há sempre uma nova oportunidade de voltar a qualquer estado fixado. A finitude permite tornar essa oportunidade uniforme, independentemente do ponto de partida.

Teorema 2.11 — Classes fechadas finitas

Se C é um conjunto finito, fechado e irredutível, todos os seus estados são recorrentes.

Demonstração. Fixe $y \in C$. Para cada $x \in C$, escolha um caminho de probabilidade positiva que, partindo de x, visite y em tempo positivo. Quando $x \neq y$, isso é possível pela irredutibilidade. Para $x = y$, precisamos de um caminho de retorno: se $C = \{y\}$, o fato de C ser fechado implica $p(y, y) = 1$; se C tem mais de um estado, podemos ir de y a outro estado da classe e depois voltar a y.

Denote por $\ell_x \geq 1$ o comprimento do caminho escolhido e por $q_x > 0$ a

probabilidade de segui-lo. Como C é finito,

$$k = \max_{x \in C} \ell_x < \infty, \qquad \alpha = \min_{x \in C} q_x > 0.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}_x(T_y^+ \leq k) \geq \alpha \qquad \text{para todo } x \in C.$$

Como C é fechado, o Lema 2.10 se aplica e dá

$$\mathbb{P}_y(T_y^+ < \infty) = 1.$$

Logo y é recorrente. Como y foi arbitrário, todos os estados de C são recorrentes. ∎

No exemplo de sete estados, isso mostra imediatamente que todos os estados das classes $\{1, 5\}$ e $\{4, 6, 7\}$ são recorrentes.

Em uma cadeia finita, as classes fechadas são precisamente as classes recorrentes. Isso permite decompor o espaço de estados.

Teorema 2.12 — Decomposição de uma cadeia finita

Se S é finito e não vazio, ele se decompõe na união disjunta

$$S = \mathcal{T} \cup R_1 \cup \cdots \cup R_k,$$

onde $\mathcal{T}$ é o conjunto dos estados transientes e $R_1, \ldots, R_k$ são as classes de comunicação fechadas. Todos os estados de cada R_i são recorrentes.

Demonstração. Contraia cada classe de comunicação a um único vértice e mantenha uma seta entre duas classes distintas quando existe uma transição de probabilidade positiva da primeira para a segunda. O grafo resultante é finito e não possui circuitos dirigidos: se várias classes formassem um circuito, seus estados se comunicariam e pertenceriam à mesma classe.

As classes sem seta de saída são exatamente as classes fechadas. Como o grafo é finito e não possui circuitos dirigidos, seguindo sucessivamente as setas a partir de qualquer classe chegamos, após um número finito de passos, a uma classe da qual não sai nenhuma seta. Portanto, existe pelo menos

uma classe fechada. Pelo Teorema 2.11, todos os estados dessas classes são recorrentes.

Considere agora uma classe C que não é fechada. Seguindo setas no grafo das classes, chegamos depois de um número finito de passos a alguma classe fechada R. Assim, para $x \in C$ e algum $y \in R$, temos $x \to y$. Por outro lado, $y \not\to x$: caso contrário, x e y se comunicariam e pertenceriam à mesma classe. Pelo Teorema 2.7, x é transiente. Como x era arbitrário em C, toda classe não fechada é formada por estados transientes.

As classes de comunicação particionam S. Reunindo as classes não fechadas em $\mathcal{T}$ e enumerando as classes fechadas como $R_1, \ldots, R_k$, obtemos a decomposição afirmada. ∎

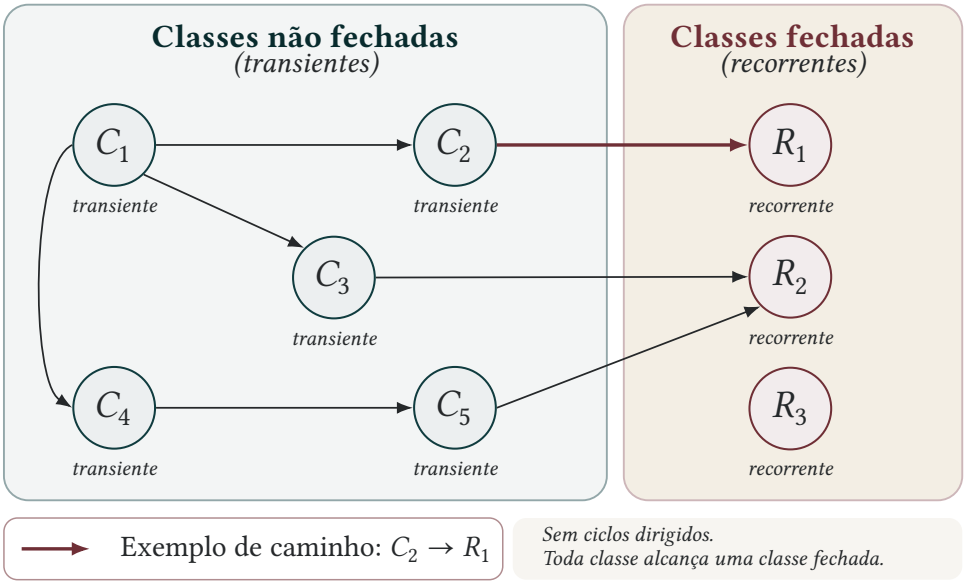


Figura 2.16: Grafo das classes de comunicação após contrair cada classe a um vértice. As classes fechadas não têm setas de saída.

2.4 Contagem de visitas e critério de recorrência

A probabilidade de retorno informa se a cadeia volta a um estado; agora queremos contar quantas vezes ela volta. A fórmula da cauda liga essa contagem à esperança.

Lema 2.13 — Fórmula da cauda

Se Z assume valores em $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, então

$$EZ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z > n),$$

com a possibilidade de ambos os lados serem infinitos.

Demonstração. Se $\mathbb{P}(Z = +\infty) > 0$, a esperança é infinita e cada termo da primeira série é pelo menos essa probabilidade. A identidade vale nesse caso.

Suponha agora $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$ e escreva $p_j = \mathbb{P}(Z = j)$. Pela definição de esperança de uma variável discreta, $EZ = \sum_{j \geq 1} j p_j$. Para cada M, uma soma finita dá

$$\sum_{j=1}^{M} j p_j = \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=k}^{M} p_j \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq k).$$

Tomando o supremo em M, obtemos uma das desigualdades. Na direção oposta, para cada K, particionamos os resultados em $Z = 1, \dots, K-1$ e $Z \geq K$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(Z \geq k) &= \sum_{j=1}^{K-1} j p_j + K \mathbb{P}(Z \geq K) \\ &= \sum_{j=1}^{K-1} j p_j + K \sum_{j=K}^{\infty} p_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = EZ. \end{aligned}$$

Tomar o supremo em K fornece a desigualdade restante. A segunda série do enunciado é a primeira com o índice deslocado, pois Z assume valores inteiros.

A versão truncada é a identidade finita

$$Z \wedge M = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{1}_{\{Z \geq k\}}, \qquad E(Z \wedge M) = \sum_{k=1}^{M} \mathbb{P}(Z \geq k).$$

Cada nível alcançado por Z contribui uma unidade para a esperança truncada. ∎

Retomemos agora os tempos de retorno sucessivos definidos em (2.3). Pela propriedade forte de Markov, para $x, y \in S$ e $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}_x\left(T_y^{(k)} < \infty\right) = \rho_{xy}\rho_{yy}^{k-1}. \tag{2.5}$$

Seja $N(y)$ o número de visitas a y nos instantes $n \geq 1$. A identidade acima permite calcular $E_x N(y)$.

Lema 2.14 — Número esperado de visitas

Vale

$$E_x N(y) = \begin{cases} 0, & \rho_{xy} = 0, \\ \dfrac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}, & \rho_{xy} > 0,\ \rho_{yy} < 1, \\ +\infty, & \rho_{xy} > 0,\ \rho_{yy} = 1. \end{cases}$$

Se y não pode ser alcançado, não há visitas a contar, ainda que y seja recorrente quando a cadeia começa nele. Separar os casos evita o quociente indeterminado $0/0$.

Demonstração. Aplicaremos a fórmula da cauda do Lema 2.13 à contagem $N(y)$, que pode ser infinita. Para cada $k \geq 1$,

$$\{N(y) \geq k\} = \{T_y^{(k)} < \infty\}.$$

Usando (2.5), obtemos

$$E_x N(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty).$$

Se $\rho_{xy} = 0$, cada parcela é zero. Se $\rho_{xy} > 0$ e $\rho_{yy} < 1$, então

$$\begin{aligned} E_x N(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{xy} \rho_{yy}^{k-1} \\ &= \rho_{xy} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{yy}^{j} \\ &= \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}}, \end{aligned}$$

pela soma da série geométrica. Se $\rho_{xy} > 0$ e $\rho_{yy} = 1$, todas as parcelas valem $\rho_{xy} > 0$ e, portanto, a soma é infinita. ■

Exemplo 2.25 — Duas salas e uma saída: contando visitas.

Retomemos a cadeia do Exemplo 2.14. Quantas vezes, em média, a pessoa visita a sala 2 quando começa na sala 1? Primeiro, precisamos da probabilidade ρ_{12} de alcançar a sala 2. Condicionando pelo primeiro passo, ela pode ir diretamente à sala 2 ou permanecer na sala 1 e tentar novamente:

$$\rho_{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_{12}, \qquad \text{portanto} \qquad \rho_{12} = \frac{1}{2}.$$

Para retornar à sala 2 começando nela, a pessoa pode permanecer nessa sala no primeiro passo ou ir à sala 1 e depois alcançar a sala 2. Assim,

$$\rho_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\rho_{12} = \frac{5}{8}.$$

Aplicando o lema,

$$E_1 N(2) = \frac{\rho_{12}}{1 - \rho_{22}} = \frac{1/2}{1 - 5/8} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Embora a probabilidade de chegar à sala 2 seja somente $1/2$, a esperança é maior que 1: quem chega pode visitar a sala várias vezes antes de sair. De fato, entre as trajetórias que chegam à sala 2, o número esperado de visitas é $(4/3)/(1/2) = 8/3$.

◁

Lema 2.15 — Visitas e probabilidades de transição

O número esperado de visitas também satisfaz

$$E_x N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y).$$

Demonstração. Conte primeiro as visitas até o instante m:

$$N_m(y) = \sum_{n=1}^{m} \mathbf{1}_{\{X_n = y\}}, \qquad E_x N_m(y) = \sum_{n=1}^{m} P^n(x, y),$$

pela linearidade da esperança de uma soma finita. Para cada $k \geq 1$, os eventos $\{N_m(y) \geq k\}$ crescem para $\{N(y) \geq k\}$. Pela continuidade das probabilidades, $\mathbb{P}_x(N(y) \geq k) = \sup_m \mathbb{P}_x(N_m(y) \geq k)$. Essas probabilidades são não negativas e crescem com m; por isso, os supremos que definem as somas podem ser tomados em qualquer ordem:

$$\begin{aligned} E_x N(y) &= \sum_{k \geq 1} \sup_m \mathbb{P}_x(N_m(y) \geq k) \\ &= \sup_m \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(N_m(y) \geq k) = \sup_m E_x N_m(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y). \end{aligned}$$

Usamos apenas a fórmula da cauda e o princípio de que uma soma de termos não negativos é o supremo de suas somas finitas. O argumento também vale quando a esperança é infinita. ∎

Exemplo 2.26 — Duas salas e uma saída: somando as probabilidades.

Podemos conferir o resultado do Exemplo 2.25 de outra maneira. A diagonalização feita no Exemplo 2.14 nos deu, para $n \geq 1$,

$$P^n(1, 2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

Pelo lema anterior e pela soma das séries geométricas,

$$\begin{aligned} E_1 N(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(1,2) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Obtivemos o mesmo número de duas formas: antes contamos as visitas pela chegada inicial e pelos retornos sucessivos; agora somamos, instante a instante, as probabilidades de ocupar a sala 2.

◁

Teorema 2.16 — Critério de recorrência

Um estado y é recorrente se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(y,y) = \infty.$$

Demonstração. Pelos Lemas 2.14 e 2.15, a série é $E_y N(y)$, que é infinita exatamente quando $\rho_{yy} = 1$. ■

Lema 2.17 — Recorrência em uma classe

Se x é recorrente e $x \to y$, então y é recorrente.

Demonstração. Se $x = y$, nada há a provar. Caso contrário, o Lema 2.8 garante $y \to x$. Escolha $j, \ell \geq 1$ tais que $P^j(y,x) > 0$ e $P^\ell(x,y) > 0$. Por Chapman–Kolmogorov,

$$P^{j+n+\ell}(y,y) \geq P^j(y,x) P^n(x,x) P^\ell(x,y) \qquad (n \geq 0).$$

Somando em n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^{j+n+\ell}(y,y) \geq P^j(y,x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,x)\right) P^\ell(x,y).$$

Como x é recorrente, o critério anterior mostra que $\sum_{n\geq 1} P^n(x,x) = \infty$; acrescentar o termo $P^0(x,x) = 1$ não altera a divergência. Logo a série no lado direito é infinita. Portanto a série de retornos a y também diverge, e o mesmo critério implica que y é recorrente. ■

A recorrência informa se voltamos a um estado; a periodicidade descreve em quais instantes esses retornos são possíveis.

2.5 Periodicidade dos estados

Definição 2.10 — Período e aperiodicidade

Para um estado x, considere o conjunto dos possíveis tempos de retorno

$$I_x = \{n \geq 1 \,:\, P^n(x,x) > 0\}.$$

Quando I_x é não vazio, o *período* de x é o máximo divisor comum de seus elementos. Se $I_x = \emptyset$, não há retorno possível e não atribuímos período ao estado. O estado é *aperiódico* quando seu período é 1.
O período não mede quanto tempo a cadeia costuma levar para voltar. Ele detecta um ritmo obrigatório: período $d > 1$ significa que todo retorno só pode ocorrer em tempos múltiplos de d.

Exemplo 2.27 — Periodicidade na cadeia de Ehrenfest.

Na cadeia de Ehrenfest, uma bola muda de urna a cada passo. Portanto, o número de bolas na urna esquerda troca de paridade em todos os instantes: de um estado par a cadeia vai para um estado ímpar, e vice-versa.

Consequentemente, um retorno ao estado inicial só pode ocorrer após um número par de passos. Por outro lado, de qualquer estado há probabilidade positiva de mover uma bola e devolvê-la no passo seguinte. Assim,

$$P^2(x,x) > 0 \qquad \text{e} \qquad P^{2m+1}(x,x) = 0,$$

para todo estado x. Como 2 é um tempo possível de retorno e todos os tempos de retorno são pares, o período é 2.

◁

Exemplo 2.28 — Triângulo e quadrado.

Considere a cadeia da Figura 2.17. A partir de 0, escolhemos com probabilidade $1/2$ um circuito de comprimento 3 ou um circuito de comprimento 4; depois de escolhido o circuito, o percurso de volta a 0 é determinístico.

$$\begin{pmatrix} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

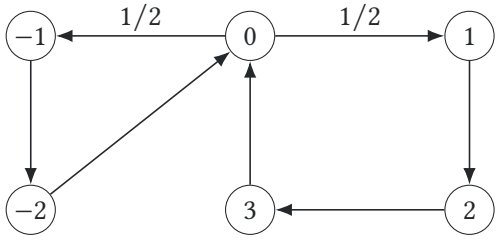


Figura 2.17: Dois circuitos de comprimentos três e quatro. A cadeia pode voltar a zero em tempos de máximo divisor comum um.

Temos $P^3(0,0) > 0$ e $P^4(0,0) > 0$. Como o máximo divisor comum de 3 e 4 é 1, o estado 0 é aperiódico, mesmo que $p(0,0) = 0$. O exemplo mostra que a existência de uma permanência é suficiente, mas não necessária, para aperiodicidade.

◁

Lema 2.18 — Períodos em uma classe

Estados que se comunicam e admitem retorno em tempo positivo têm o mesmo período.

Demonstração. Escolha k, m tais que $P^k(x,y) > 0$ e $P^m(y,x) > 0$. Então

$$P^{k+m}(x,x) \geq P^k(x,y)P^m(y,x) > 0.$$

Logo, o período de x divide $k+m$. Para qualquer $\ell \in I_y$,

$$P^{k+\ell+m}(x,x) \geq P^k(x,y)P^\ell(y,y)P^m(y,x) > 0,$$

de modo que $k+\ell+m \in I_x$. Subtraindo $k+m$, concluímos que o período de x divide todo $\ell \in I_y$; portanto, ele divide o período de y. Trocando x e y, obtemos a divisibilidade oposta. Os dois períodos são iguais. ∎

Lema 2.19 — Permanência e aperiodicidade
Se $p(x,x) > 0$, então x tem período 1.

Demonstração. Nesse caso, $1 \in I_x$, e o máximo divisor comum de um conjunto que contém 1 só pode ser 1. ∎

No canal de comunicação do Exemplo 2.7, se $0 < a, b < 1$, ambos os estados possuem permanência positiva; portanto, a cadeia é aperiódica. Em uma cadeia irredutível, basta encontrar um único estado aperiódico, pois o Lema 2.18 transfere o período para toda a classe.

Voltaremos à periodicidade no próximo capítulo, ao investigar o comportamento das potências P^n.

A classificação descreve a possibilidade de retorno. Em problemas de saída, interessa identificar por qual parte da fronteira a cadeia deixa uma região.

2.6 Distribuições de saída

Se $A \subseteq S$, definimos o tempo de entrada em A por

$$H_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Se A e B são disjuntos, escrevemos $C = S \setminus (A \cup B)$. Partindo de $x \in C$, a cadeia pode visitar vários estados de C antes de entrar em A ou em B.

Queremos saber *qual conjunto ela atinge primeiro*, e não onde estará em um instante fixo.

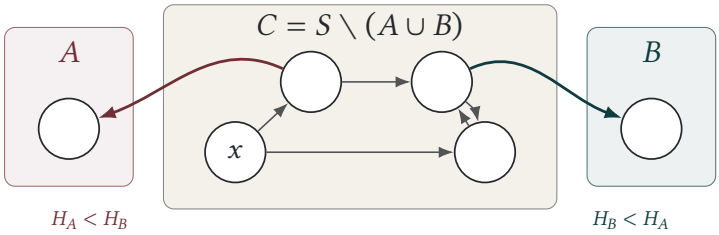


Figura 2.18: Partindo de $x \in C$, a cadeia pode circular entre os estados interiores antes de sair por A ou por B. As setas coloridas indicam as duas possibilidades de primeira saída; não supomos que A e B sejam absorventes.

A probabilidade de atingir A primeiro é $h(x) = \mathbb{P}_x(H_A < H_B)$. Ela vale 1 em A e 0 em B; dentro de C, o valor é determinado pela análise do primeiro passo. O próximo teorema torna essas condições precisas.

Teorema 2.20 — Problema de Dirichlet para cadeias de Markov

Sejam $A, B \subseteq S$ disjuntos e suponha que $C = S \setminus (A \cup B)$ seja finito. Admita que $H_A \wedge H_B < \infty$ quase certamente a partir de todo estado de C. Então

$$h(x) = \mathbb{P}_x(H_A < H_B)$$

é a única função que satisfaz

$$\begin{cases} h(x) = 1, & x \in A, \\ h(x) = 0, & x \in B, \\ h(x) = \displaystyle\sum_{y} p(x,y)\,h(y), & x \in C. \end{cases}$$

Demonstração. As condições na fronteira são imediatas: se a cadeia começa em A, já atingiu A antes de B; se começa em B, ocorre o contrário. Para $x \in C$, condicionando pelo primeiro passo e usando a propriedade de Markov,

$$\mathbb{P}_x(H_A < H_B) = \sum_y p(x,y)\,\mathbb{P}_y(H_A < H_B).$$

Logo, h satisfaz as equações do enunciado.

Para a unicidade, seja u outra solução e ponha $T = H_A \wedge H_B$. Mostraremos primeiro que, para todo $n \geq 0$,

$$u(x) = E_x\big[u(X_{T\wedge n})\big].$$

Para $n = 0$, isso é simplesmente $u(x) = u(X_0)$. Para passar de n a $n+1$, distinguimos dois casos. Se $T \leq n$, a cadeia já chegou à fronteira e o valor observado em $T \wedge (n+1)$ é o mesmo observado em $T \wedge n$. Se $T > n$, então $X_n \in C$ e podemos usar a equação harmônica $u(X_n) = \sum_y p(X_n, y)u(y)$. Essa passagem pode ser justificada sem introduzir esperança condicional em relação a toda a trajetória. Para $z \in C$ e qualquer y, o evento $\{T > n, X_n = z\}$ depende apenas dos estados até o instante n, de modo que a propriedade de Markov fornece

$$\mathbb{P}_x(T > n, X_n = z, X_{n+1} = y) = \mathbb{P}_x(T > n, X_n = z)\,p(z,y).$$

Somando sobre z e y, e separando o evento $\{T \leq n\}$, obtemos

$$\begin{aligned} E_x\big[u(X_{T\wedge(n+1)})\big] &= E_x\big[\mathbf{1}_{\{T\leq n\}}u(X_T)\big] \\ &\quad + E_x\left[\mathbf{1}_{\{T>n\}}\sum_y p(X_n,y)u(y)\right] \\ &= E_x\big[u(X_{T\wedge n})\big]. \end{aligned}$$

A identidade segue, portanto, por indução.

Como $u = 1$ em A, $u = 0$ em B e C é finito, existe $M < \infty$ tal que $|u(z)| \leq M$ em todos os estados. Em $\{T \leq n\}$ temos $u(X_{T\wedge n}) = u(X_T)$; em $\{T > n\}$, a diferença entre esses valores é no máximo $2M$. Portanto,

$$|E_x[u(X_{T\wedge n})] - E_x[u(X_T)]| \leq 2M\,\mathbb{P}_x(T > n) \longrightarrow 0.$$

A última passagem usa $T < \infty$ quase certamente e a continuidade das probabilidades para eventos decrescentes. Como X_T pertence a $A \cup B$,

$$u(x) = E_x[u(X_T)] = \mathbb{P}_x(X_T \in A) = \mathbb{P}_x(H_A < H_B) = h(x).$$

Assim, a solução é única. ∎

O adjetivo *harmônica* descreve a terceira equação: em cada estado interior, o valor de h é a média dos valores depois de um passo. Se R é a submatriz de P com linhas e colunas em C e

$$v(x) = \sum_{a \in A} p(x, a),$$

a contribuição da fronteira é exatamente $v(x)$, pois $h = 1$ em A e $h = 0$ em B. Assim, as equações interiores podem ser escritas como

$$(I - R)h_C = v.$$

Exemplo 2.29 — Quatro estados e duas barreiras absorventes.
Um jogador começa com 2 unidades. Em cada rodada, ganha ou perde uma unidade com probabilidades iguais e para ao atingir 0 (ruína) ou 3 (meta). A matriz da cadeia, na ordem $(0, 1, 2, 3)$, é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

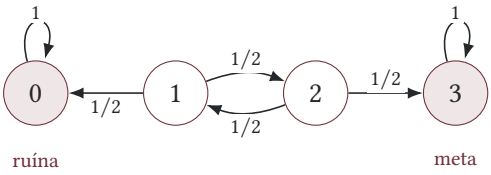


Figura 2.19: O passeio termina ao chegar a 0 ou 3. Em cada estado interior, as duas direções têm probabilidade 1/2.

Escreva $u_i = \mathbb{P}_i(H_3 < H_0)$, a probabilidade de alcançar a meta partindo de i unidades. As condições na fronteira são $u_0 = 0$ e $u_3 = 1$. Condicionando pelo primeiro passo nos estados interiores,

$$u_1 = \frac{1}{2}u_2, \qquad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}.$$

Substituindo a primeira equação na segunda,

$$u_2 = \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_2 = \frac{2}{3}}, \qquad u_1 = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a probabilidade de alcançar a meta antes da ruína é precisamente $2/3$, e não 1. Voltaremos a essa cadeia para calcular a duração média do jogo.

◁

Exemplo 2.30 — O rato, o gato e o queijo.
Um rato percorre cinco salas ligadas pelas passagens indicadas na figura. A cada passo ele escolhe uniformemente uma das salas vizinhas. Na sala 3 está um gato; na sala 5, um pedaço de queijo. O passeio termina assim que o rato entra em uma dessas duas salas. Se ele começa na sala 1, qual é a probabilidade de encontrar o queijo antes do gato?

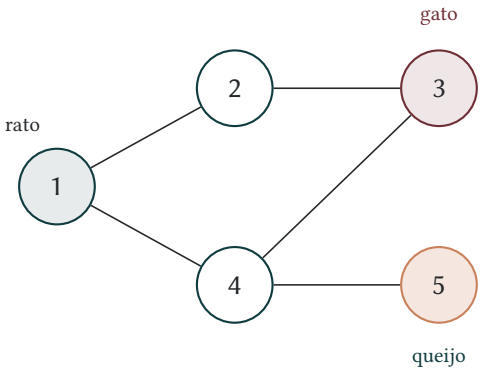


Figura 2.20: O rato começa na sala 1. As arestas são passagens possíveis; as salas 3 (gato) e 5 (queijo) encerram o passeio. A sala 4 tem três vizinhas, enquanto 1 e 2 têm duas.

Escreva $u(i) = \mathbb{P}_i(H_5 < H_3)$. As condições de fronteira são $u(3) = 0$ e $u(5) = 1$. Pelas passagens desenhadas, a análise do primeiro passo fornece

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1}{2}u(2) + \frac{1}{2}u(4), \\ u(2) &= \frac{1}{2}u(1) + \frac{1}{2}u(3) = \frac{1}{2}u(1), \\ u(4) &= \frac{1}{3}\big(u(1) + u(3) + u(5)\big) = \frac{u(1)+1}{3}. \end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas expressões na primeira,

$$u(1) = \frac{1}{4}u(1) + \frac{u(1)+1}{6} = \frac{5}{12}u(1) + \frac{1}{6},$$

e portanto

$$\boxed{\mathbb{P}_1(H_5 < H_3) = u(1) = \frac{2}{7}}.$$

Embora existam duas salas de destino, a chance de sucesso não é $1/2$: ela depende das passagens entre as salas. O desenho permite montar as equações sem escrever a matriz de transição completa.

Este problema é uma adaptação de um exemplo de Brémaud (2020).

◁

Exemplo 2.31 — Um saldo mensal: atingir zero em quatro meses.

Uma pessoa acompanha um saldo mensal limitado aos valores $0, 1, 2, 3$. A cada mês recebe uma unidade e tem uma despesa D_n independente dos meses anteriores, com

$$\mathbb{P}(D_n = 0) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(D_n = 1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(D_n = 2) = \frac{1}{4}.$$

O saldo do fim do mês é limitado inferiormente por 0 e superiormente por 3:

$$X_{n+1} = \min\{3, \max\{0, X_n + 1 - D_{n+1}\}\}.$$

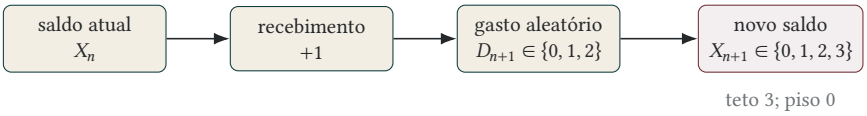


Figura 2.21: Em cada mês, um recebimento fixo é seguido de uma despesa aleatória. O saldo é limitado aos quatro estados indicados.

Começando com saldo 2, qual é a probabilidade de atingir 0 em algum dos próximos quatro meses? Não basta calcular $\mathbb{P}_2(X_4 = 0)$: a pessoa pode chegar a zero e depois voltar a ter saldo positivo. Para registrar se a falta de saldo *já ocorreu*, modificamos a cadeia tornando 0 absorvente. A matriz da cadeia assim parada, na ordem $(0, 1, 2, 3)$, é

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, partindo de 1, chegar a zero no próximo mês exige $D_{n+1} = 2$, o que ocorre com probabilidade $1/4$. Elevando a matriz à quarta potência, obtemos a linha de interesse:

$$Q^4(2,\cdot) = \left(\frac{23}{128}, \frac{49}{256}, \frac{77}{256}, \frac{21}{64}\right).$$

Como 0 é absorvente na nova cadeia,

$$\boxed{\mathbb{P}_2(H_{\{0\}} \le 4) = Q^4(2,0) = \frac{23}{128} \approx 0{,}180}.$$

Transformar em absorvente o conjunto cuja visita queremos registrar converte uma pergunta sobre toda a trajetória em uma probabilidade de transição em tempo fixo.

◁

Exemplo 2.32 — Conclusão de um curso de dois anos.

Considere os estados 1 = primeiro ano, 2 = segundo ano, G = conclusão e D = abandono, com matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}60 & 0 & 0{,}15 \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $h(i)$ é a probabilidade de concluir o curso antes de abandonar, então $h(G) = 1$, $h(D) = 0$ e

$$h(1) = 0{,}25h(1) + 0{,}60h(2), \qquad h(2) = 0{,}20h(2) + 0{,}70.$$

Da segunda equação, $h(2) = 7/8$; substituindo na primeira, obtemos $h(1) = 7/10$. Assim, nesse modelo, 70% dos estudantes que iniciam o primeiro ano concluem o curso.

◁

Exemplo 2.33 — Ruína do jogador por análise de primeiro passo.
Voltemos ao jogo em que, a cada aposta, o capital aumenta uma unidade com probabilidade $p \in (0,1)$ ou diminui uma unidade com probabilidade $q = 1 - p$. O jogo termina ao atingir 0 (ruína) ou N (meta), com $N \geq 2$. Seu tempo de término é $H_{\{0,N\}} = H_0 \wedge H_N$.

Se o capital inicial é i, com $0 \leq i \leq N$, escrevemos

$$u_i = \mathbb{P}_i(H_N < H_0),$$

a probabilidade de alcançar a meta antes da ruína. Como a absorção em uma das barreiras é quase certa, a probabilidade de ruína é seu complemento, $1 - u_i$.

A análise de primeiro passo, demonstrada a seguir, fornece

$$u_i = \begin{cases} \dfrac{i}{N}, & p = q = \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}, & p \neq q. \end{cases}$$

◁

No jogo justo, a chance de atingir a meta é a proporção do capital inicial em relação a ela, e não necessariamente $1/2$. Quando há deriva, as diferenças sucessivas dessa chance formam uma progressão geométrica.

Demonstração por primeiro passo. De qualquer estado interior, uma sequência de N perdas leva a uma barreira com probabilidade pelo menos $q^N > 0$. Em blocos de N passos,

$$\mathbb{P}_i(H_{\{0,N\}} > kN) \leq (1 - q^N)^k.$$

Assim, a absorção ocorre quase certamente e tem esperança finita. Pelo problema de Dirichlet,

$$u_0 = 0, \qquad u_N = 1, \qquad u_i = p u_{i+1} + q u_{i-1} \quad (0 < i < N).$$

A equação de primeiro passo pode ser reescrita como

$$p(u_{i+1} - u_i) = q(u_i - u_{i-1}).$$

Para aproveitar essa relação, ponha $d_i = u_i - u_{i-1}$, a variação da probabilidade de sucesso quando a fortuna inicial aumenta de $i-1$ para i. Então

$$d_{i+1} = \frac{q}{p}\, d_i, \qquad 1 \le i < N.$$

Portanto, as diferenças sucessivas formam uma progressão geométrica.

Se $p = q = 1/2$, temos $d_{i+1} = d_i$, ou seja, todas as diferenças são iguais a d_1. Como $u_0 = 0$,

$$u_i = \sum_{k=1}^{i} d_k = i\, d_1.$$

A condição $u_N = 1$ determina $d_1 = 1/N$, e assim $u_i = i/N$: no jogo justo, a probabilidade cresce linearmente com a fortuna inicial.

Se $p \neq q$, escreva $r = q/p \neq 1$. Pela recorrência, $d_k = d_1 r^{k-1}$ e, somando as diferenças,

$$u_i = u_0 + \sum_{k=1}^{i} d_k = d_1 \sum_{k=0}^{i-1} r^k = d_1\, \frac{1 - r^i}{1 - r}.$$

Falta determinar d_1. Usando a outra condição de fronteira,

$$1 = u_N = d_1\, \frac{1 - r^N}{1 - r} \qquad \Longrightarrow \qquad d_1 = \frac{1 - r}{1 - r^N}.$$

Substituindo na expressão de u_i, encontramos

$$\boxed{u_i = \frac{1 - r^i}{1 - r^N} = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}.}$$

Como a absorção em 0 ou N ocorre quase certamente, a probabilidade de ruína é $1 - u_i$. ∎

2.7 Tempos de saída

Probabilidades de saída resolvem um problema de fronteira harmônico. Tempos esperados de saída resolvem uma equação quase igual, mas com um termo 1: cada passo realizado *antes de atingir o conjunto de destino* acrescenta uma unidade de tempo.

Se $C = S \setminus A$ e começamos em $x \in C$, a cadeia pode visitar vários estados de C antes de entrar em A. O relógio para na primeira entrada, no instante H_A.

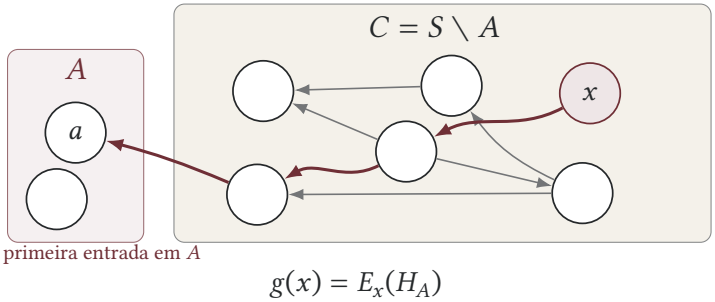


Figura 2.22: Uma trajetória ilustrativa do tempo de chegada a A. O percurso destacado começa em $x \in C$, atravessa estados de C e termina na primeira entrada em A. Não é necessário que A seja absorvente.

Teorema 2.21 — Equação de Poisson para o tempo de saída

Seja $A \subseteq S$, suponha que $C = S \setminus A$ seja finito e que $H_A < \infty$ quase certamente a partir de todo $x \in C$. Então

$$g(x) = E_x(H_A)$$

é a única solução de

$$\begin{cases} g(x) = 0, & x \in A, \\ g(x) = 1 + \displaystyle\sum_y p(x,y)g(y), & x \in C. \end{cases}$$

Demonstração. Se C é vazio, a afirmação é imediata. Suponha C não vazio e escreva $T = H_A$. Mostraremos primeiro que $E_x T$ é finita. Para cada $z \in C$, a hipótese de chegada quase certa permite escolher $k_z \geq 1$ tal que $\mathbb{P}_z(T \leq k_z) > 1/2$. Como C é finito, podemos tomar $k = \max_{z \in C} k_z$, de modo que

$$\mathbb{P}_z(T > k) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } z \in C.$$

Se a cadeia ainda não chegou a A no instante jk, ela está em algum estado de C. Condicionando nesse estado e usando a propriedade de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T > (j+1)k) &= \sum_{z \in C} \mathbb{P}_x(T > jk, X_{jk} = z)\, \mathbb{P}_z(T > k) \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{P}_x(T > jk). \end{aligned}$$

Repetindo a desigualdade, obtemos $\mathbb{P}_x(T > jk) \leq 2^{-j}$. Agrupando os instantes $jk, \ldots, (j+1)k - 1$ na fórmula da cauda,

$$E_x T = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(T > n) \leq k \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2k < \infty.$$

Como $T \geq 1$ quando $x \in C$, a análise do primeiro passo dá

$$E_x T = 1 + \sum_y p(x,y) E_y T, \qquad x \in C,$$

e $E_x T = 0$ em A. Portanto, g satisfaz as equações.

Para provar a unicidade, seja u outra solução real, com $u = 0$ em A. A equação de primeiro passo pode ser iterada enquanto a cadeia não atingiu A. Mais precisamente, para cada $n \geq 0$,

$$u(x) = E_x \left[\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{T > j\}} + u(X_{T \wedge n}) \right].$$

No instante inicial a identidade é trivial. Para passar de n a $n+1$, em $\{T \leq n\}$ não há outro passo a contar; em $\{T > n\}$ temos $X_n \in C$. Particionando esse evento segundo $X_n = z \in C$, a propriedade de Markov dá

$$\mathbb{P}_x(T > n, X_n = z, X_{n+1} = y) = \mathbb{P}_x(T > n, X_n = z) p(z,y).$$

A equação $u(z) = 1 + \sum_y p(z,y)u(y)$ acrescenta então uma unidade e substitui $u(X_n)$ pela média de $u(X_{n+1})$. Isso estabelece a identidade por indução. Como a soma das indicadoras conta exatamente os instantes anteriores a T,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{T>j\}} = T \wedge n, \qquad u(x) = E_x(T \wedge n) + E_x[u(X_{T\wedge n})].$$

Como $u = 0$ em A e C é finito, existe $M < \infty$ tal que $|u| \le M$. No evento $\{T \le n\}$, o valor $u(X_{T\wedge n})$ é zero. Assim,

$$|E_x[u(X_{T\wedge n})]| \le M\,\mathbb{P}_x(T > n) \longrightarrow 0.$$

Para o primeiro termo, a identidade de caudas truncadas dá

$$E_x(T \wedge n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}_x(T > j) \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(T > j) = E_x T.$$

É o limite das somas parciais de uma série não negativa de soma finita. Logo, $u(x) = E_x T = g(x)$, o que prova a unicidade. ∎

Exemplo 2.34 — Quanto dura o passeio de quatro estados?.

Retomemos o Exemplo 2.29. Escreva $g(i) = E_i H_{\{0,3\}}$. Como o jogo termina nas barreiras, $g(0) = g(3) = 0$. Cada rodada realizada acrescenta uma unidade de tempo, e a análise de primeiro passo fornece

$$g(1) = 1 + \frac{1}{2}g(2), \qquad g(2) = 1 + \frac{1}{2}g(1).$$

Substituindo a primeira equação na segunda,

$$g(2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}g(2) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{g(2) = 2}, \qquad g(1) = 2.$$

Assim, começando com duas unidades, o jogador disputa, em média, duas rodadas. As equações se parecem com as do exemplo anterior, mas o termo 1 tem um papel novo: ele contabiliza o passo que acaba de ser dado.

◁

Além da duração média até a saída, interessa o número esperado de visitas a *cada estado* antes de atingir A. A matriz fundamental reúne essas contagens.

Definição 2.11 — Matriz fundamental

Nas hipóteses do Teorema 2.21, suponha $C = S \setminus A$ não vazio e finito. Considere a submatriz de transições entre os estados de C,

$$R = (p(x,y))_{x,y\in C}.$$

A *matriz fundamental* antes da saída de C é

$$\boxed{N = I + R + R^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} R^n.}$$

Ao formar R, conservamos apenas as transições entre estados de C. Partindo de $x \in C$, a cadeia pode permanecer em C no próximo passo ou entrar em A. Por isso,

$$\sum_{y\in C} R(x,y) = \mathbb{P}_x(X_1 \in C) \leq 1.$$

A diferença entre essa soma e 1 é a probabilidade de entrar em A no primeiro passo. Assim, as linhas de R podem somar menos que 1.

Isso é importante ao calcular as potências de R. Por exemplo,

$$R^2(x,y) = \sum_{z\in C} p(x,z)p(z,y).$$

Só aparecem caminhos que, no primeiro passo, passam por um estado z de C e, no segundo, chegam a y. Um caminho que entrasse em A e depois retornasse a C ficaria de fora. De modo geral, pela propriedade de Markov,

$$R^n(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y,\ H_A > n), \qquad n \geq 0, \quad x,y \in C.$$

Portanto, $R^n(x,y)$ é a probabilidade de estar em y no instante n *sem ter atingido A até esse instante.* A fórmula inclui $n = 0$: como a cadeia começa em $x \in C$, temos $H_A > 0$ e $R^0(x,y) = I(x,y)$.

Convergência da série. Pelo teorema anterior, $E_x H_A < \infty$ para todo $x \in C$. Como

$$0 \leq R^n(x,y) \leq \mathbb{P}_x(H_A > n),$$

a fórmula da cauda fornece

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n(x,y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(H_A > n) = E_x H_A < \infty.$$

Logo, a série que define N converge entrada por entrada. A mesma desigualdade mostra que $R^n \to 0$. Para cada m, a multiplicação de uma soma finita de matrizes dá

$$(I - R)(I + R + \cdots + R^m) = I - R^{m+1}.$$

Passando ao limite, obtemos $(I-R)N = I$. Como $I-R$ é uma matriz quadrada, isso mostra que é inversível e que

$$\boxed{N = (I - R)^{-1}.}$$

Interpretação das entradas. Fixemos um estado $y \in C$. Antes de chegar a A, a cadeia pode visitar y nenhuma, uma ou várias vezes. O número dessas visitas é a variável aleatória

$$V_y = \sum_{n=0}^{H_A-1} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}}.$$

Somamos apenas os instantes $0, 1, \ldots, H_A - 1$: o estado ocupado no instante H_A já pertence a A e não entra na contagem. Em particular, quando $x = y$, a observação inicial é uma visita. Esta contagem difere de $N(y)$, usada no estudo da recorrência: aquela começa em $n = 1$ e não é interrompida na saída; aqui contamos desde o instante inicial até a primeira chegada a A.

Para passar das probabilidades às visitas esperadas, lembremos que a esperança de uma indicadora é a probabilidade do evento correspondente: $E_x \mathbf{1}_B = \mathbb{P}_x(B)$. Além disso,

$$\mathbf{1}_{\{X_n=y, H_A>n\}} = \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} \mathbf{1}_{\{H_A>n\}}.$$

O segundo fator faz com que uma visita só seja contada quando ocorre antes da chegada a A. De fato, ele vale 1 exatamente para $n = 0, \ldots, H_A - 1$ e vale 0 depois disso. Consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y, H_A>n\}} = \sum_{n=0}^{H_A-1} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} = V_y.$$

Podemos agora passar das probabilidades às visitas esperadas:

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y, H_A > n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_x \mathbf{1}_{\{X_n=y, H_A>n\}} \\ &= E_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y,H_A>n\}}\right] \\ &= E_x\left[\sum_{n=0}^{H_A-1} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right] \\ &= \boxed{E_x V_y}. \end{aligned}$$

A troca da soma pela esperança é permitida porque as indicadoras são não negativas (Lema 2.15). A última igualdade usa a identidade anterior, isto é, a definição de V_y. Portanto, a entrada $N(x,y)$ é o *número esperado de visitas a y antes de atingir A*, quando partimos de x. Ela não é, em geral, uma probabilidade.

Da contagem de visitas ao tempo de saída. Em cada instante $n < H_A$, a cadeia ocupa exatamente um estado de C. Nesse instante, portanto, exatamente uma das indicadoras $\mathbf{1}_{\{X_n=y\}}$, com $y \in C$, vale 1; todas as outras valem 0. Assim, somar as visitas a todos os estados de C conta uma vez cada instante anterior à saída:

$$\sum_{y\in C} V_y = \sum_{n=0}^{H_A-1} \sum_{y\in C} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}} = H_A.$$

Tomando esperanças, encontramos

$$\boxed{E_x H_A = \sum_{y\in C} N(x,y).}$$

Em outras palavras, *somar a linha de N correspondente ao estado inicial x* fornece o tempo médio até a chegada a A.

Também podemos reunir as equações de primeiro passo em notação matricial. Escrevamos $C = \{x_1, \ldots, x_m\}$, na mesma ordem das linhas e colunas

de R, e definamos os vetores-coluna

$$g_C = \begin{pmatrix} E_{x_1} H_A \\ \vdots \\ E_{x_m} H_A \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, g_C *não é uma matriz de transição*: cada uma de suas m coordenadas é a duração média da cadeia até A para um estado inicial diferente. Para $x \in C$, a equação de primeiro passo é

$$E_x H_A = 1 + \sum_{y \in C} R(x, y) E_y H_A.$$

O termo 1 representa o primeiro passo; se ele levar a A, o tempo restante será zero. Reunindo essas equações e usando $N = (I - R)^{-1}$, temos

$$g_C = \mathbf{1} + R g_C \quad \Longleftrightarrow \quad (I - R) g_C = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{g_C = N\mathbf{1}.}$$

A coordenada de $N\mathbf{1}$ associada a x é justamente a soma da linha de N correspondente a x, como já havíamos obtido pela contagem de visitas.

Exemplo 2.35 — Uma matriz, três perguntas: conclusão, visitas e duração.

Retomemos o curso de dois anos do Exemplo 2.32. Os estados 1 e 2 são transientes; G (conclusão) e D (abandono) são absorventes. Separemos a matriz de transição em dois blocos: R reúne as transições dentro dos estados transientes, e K registra as transições desses estados para G e D:

$$R = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{array}{c|cc} & G & D \\ \hline 1 & 0 & 3/20 \\ 2 & 7/10 & 1/10 \end{array}.$$

A matriz fundamental pode ser calculada invertendo $I - R$:

$$N = (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

A primeira linha de N responde a duas perguntas: partindo do primeiro ano, quantas vezes, em média, o estudante estará em cada ano antes de concluir ou abandonar? Temos $N(1,1) = 4/3$ visitas esperadas ao primeiro ano, *incluindo* a observação inicial, e $N(1,2) = 1$ visita esperada ao segundo ano.

O valor $N(1,2) = 1$ é uma contagem média, não uma probabilidade. A chance de alcançar o segundo ano antes de abandonar é

$$\mathbb{P}_1(H_2 < H_D) = \frac{3/5}{1 - 1/4} = \frac{4}{5}.$$

Uma vez no segundo ano, o número médio de visitas a ele, incluindo a primeira, é $1/(1 - 1/5) = 5/4$, porque em cada passo há probabilidade $1/5$ de permanecer nesse estado. O produto

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1 = N(1,2)$$

mostra como uma probabilidade de chegada pode se transformar num número esperado de visitas.

Para calcular a probabilidade de terminar em cada estado absorvente, podemos sair de um estado transiente após $0, 1, 2, \ldots$ transições dentro do conjunto $\{1, 2\}$. Somando essas possibilidades, obtemos

$$B = (I + R + R^2 + \cdots)K = NK = \begin{array}{c|cc} & G & D \\ \hline 1 & 7/10 & 3/10 \\ 2 & 7/8 & 1/8 \end{array}.$$

Assim, começando no primeiro ano, a probabilidade de conclusão é $7/10$, como havíamos encontrado por análise de primeiro passo, e a de abandono é $3/10$.

Finalmente, a soma das entradas de cada linha de N dá o tempo esperado até chegar a G ou D:

$$E_1 H_{\{G,D\}} = \frac{4}{3} + 1 = \boxed{\frac{7}{3}}, \qquad E_2 H_{\{G,D\}} = \boxed{\frac{5}{4}}.$$

A mesma matriz fornece, portanto, visitas esperadas, probabilidades de absorção e duração média.

◁

Exemplo 2.36 — O computador revisitado: dias de uso e de reparo.
Voltemos ao computador do Exemplo 2.6. Antes do descarte, ele pode estar funcionando (F) ou em reparo (R). A matriz das transições entre esses dois estados é

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}995 & 0{,}005 \\ 0{,}90 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

O descarte ocorre quase certamente. De fato, partindo de F, há probabilidade positiva de passar por $F \to R \to D$ em dois dias; partindo de R, há probabilidade 0,05 de ser descartado no próximo. Como o conjunto $\{F, R\}$ é finito, essas possibilidades permitem uma cota geométrica uniforme para o tempo de absorção.

A matriz fundamental é

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3800 & 20 \\ 3600 & 20 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, a primeira linha mostra que um computador inicialmente em funcionamento passa, em média, $\boxed{3800}$ dias funcionando e $\boxed{20}$ dias em reparo antes do descarte, contando também a observação inicial. Assim,

$$E_F H_D = 3800 + 20 = \boxed{3820} \text{ dias.}$$

Se começamos com o computador em reparo, a segunda linha fornece $E_R H_D = 3600 + 20 = 3620$ dias.

Como verificação independente, as equações de primeiro passo para $g_F = E_F H_D$ e $g_R = E_R H_D$ são

$$\begin{cases} g_F = 1 + 0{,}995\, g_F + 0{,}005\, g_R, \\ g_R = 1 + 0{,}90\, g_F + 0{,}05\, g_R. \end{cases}$$

A primeira dá $g_F = g_R + 200$; a segunda então dá $g_R = 3620$ e $g_F = 3820$, confirmando a matriz fundamental. O mesmo modelo fornece dois tipos de informação: *duração total* e *tempo passado em cada estado*.

◁

Exemplo 2.37 — Contando visitas antes da ruína.

Retomemos o passeio justo com barreiras 0 e 3 dos Exemplos 2.29 e 2.34. Agora calcularemos quantas vezes cada estado interior é visitado antes da absorção. Os estados transientes são $C = \{1, 2\}$ e a submatriz correspondente é

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$I - R = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (I - R)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Partindo de 1, a cadeia visita em média $4/3$ vezes o próprio estado 1 e $2/3$ vez o estado 2 antes de atingir $\{0, 3\}$. A soma da primeira linha é

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2,$$

portanto $E_1 H_{\{0,3\}} = 2$. Partindo de 2, a simetria fornece o mesmo tempo médio, com os papéis dos dois estados trocados. Assim, a mesma matriz registra tanto visitas esperadas a estados específicos quanto o tempo esperado total antes da absorção.

◁

Exemplo 2.38 — Duração do jogo.

Nas condições do Exemplo 2.33, defina

$$v_i = E_i H_{\{0,N\}}, \qquad 0 \le i \le N.$$

Assim, v_i é o número médio de rodadas até o jogo terminar, quando o capital inicial é i. Retomemos também $u_i = \mathbb{P}_i(H_N < H_0)$, a probabilidade de atingir a meta antes da ruína. Mostraremos que

$$v_i = \begin{cases} i(N - i), & p = q = \dfrac{1}{2}, \\[2mm] \dfrac{N u_i - i}{p - q}, & p \neq q. \end{cases}$$

◁

No jogo justo, dobrar simultaneamente o capital inicial e a meta conserva a probabilidade de sucesso, mas multiplica por quatro a duração média. Quando há deriva, a duração depende também da direção favorecida pelas apostas.

Demonstração. Já verificamos que o tempo $H_{\{0,N\}}$ tem esperança finita. Como nenhuma rodada é necessária quando o jogo começa numa barreira, $v_0 = v_N = 0$. Nos estados interiores, o primeiro passo consome uma rodada e deixa o capital em $i+1$ ou $i-1$. Portanto,

$$v_i = 1 + pv_{i+1} + qv_{i-1}, \qquad 0 < i < N.$$

Jogo justo: $p = q = 1/2$. Reorganizando a equação, obtemos

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = -2.$$

A segunda diferença é constante; por isso, procuramos uma solução quadrática $v_i = -i^2 + Ai + B$. De $v_0 = 0$ vem $B = 0$ e, de $v_N = 0$,

$$0 = -N^2 + AN \qquad \Longrightarrow \qquad A = N.$$

Assim,

$$\boxed{v_i = i(N-i).}$$

Jogo com deriva: $p \neq q$. A equação homogênea associada é $w_i = pw_{i+1} + qw_{i-1}$. Reescrevendo-a como

$$p(w_{i+1} - w_i) = q(w_i - w_{i-1}),$$

vemos que, quando $p \neq q$, suas soluções são $w_i = A + B(q/p)^i$. Precisamos ainda de uma solução particular da equação que contém o termo 1. A função

$$v_i^{(p)} = -\frac{i}{p-q}$$

serve, pois uma substituição direta fornece

$$1 + p\left(-\frac{i+1}{p-q}\right) + q\left(-\frac{i-1}{p-q}\right) = -\frac{i}{p-q}.$$

Portanto, a solução geral pode ser escrita como

$$v_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i - \frac{i}{p-q}.$$

Impondo $v_0 = 0$, obtemos $A = -B$, isto é,

$$v_i = B\left[\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1\right] - \frac{i}{p-q}.$$

A outra fronteira, $v_N = 0$, determina a constante:

$$0 = B\left[\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right] - \frac{N}{p-q} \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{N}{(p-q)((q/p)^N - 1)}.$$

Substituindo essa expressão em v_i, chegamos a

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{p-q}\left[N\,\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} - i\right] \\ &= \boxed{\frac{Nu_i - i}{p-q}}, \end{aligned}$$

pois a fração é exatamente a probabilidade u_i encontrada no exemplo anterior. A unicidade da equação de Poisson garante que essa solução é a esperança procurada. ■

No capítulo de martingais, obteremos essas probabilidades por uma segunda demonstração. A nova ferramenta conservará esperanças até a saída e evitará resolver novamente as equações de diferenças.

Exemplo 2.39 — Esperando cara seguida de coroa.

Lançamos repetidamente uma moeda justa, com lançamentos independentes, e paramos quando aparece o padrão cara–coroa. Use os estados 0 = nenhum prefixo útil, C = o último resultado foi cara e F = padrão completo. Se g_0 e g_C são os tempos esperados restantes, então

$$g_0 = 1 + \frac{1}{2}g_0 + \frac{1}{2}g_C, \qquad g_C = 1 + \frac{1}{2}g_C + \frac{1}{2}\cdot 0.$$

A segunda equação dá $g_C = 2$ e a primeira dá $g_0 = 4$. Portanto, são necessários, em média, quatro lançamentos para observar cara seguida de coroa.

◁

2.8 Problemas de síntese

O sapo em quatro folhas, uma rede elétrica e a manutenção de um computador reúnem as técnicas de transição, chegada e absorção. As soluções a seguir mostram como as mesmas equações respondem a perguntas sobre percursos, tempos e custos.

Exemplo 2.40 — O sapo precisa chegar à última folha.

Retomemos o sapo do Exemplo 2.1. As folhas A, B e C formam um triângulo, e a folha D está ligada somente a C. O sapo parte de A, escolhe uniformemente uma folha vizinha em cada salto e quer chegar a D.

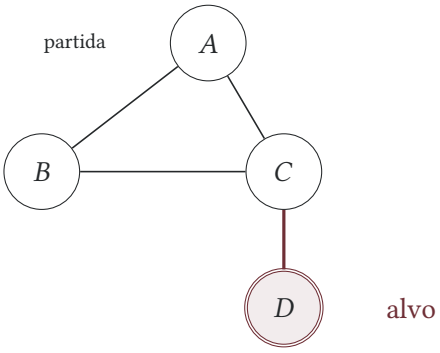


Figura 2.23: O mesmo grafo das quatro folhas, agora com a partida em A e a folha D destacada como alvo.

Quanto tempo levará, em média, para chegar a D? Escreva $e_x = E_x H_D$. O problema de Poisson dá $e_D = 0$ e

$$\begin{aligned} e_A &= 1 + \frac{e_B + e_C}{2}, \\ e_B &= 1 + \frac{e_A + e_C}{2}, \\ e_C &= 1 + \frac{e_A + e_B + e_D}{3}. \end{aligned}$$

Os estados A e B desempenham papéis simétricos, logo $e_A = e_B = t$. Se escrevermos $e_C = v$, as equações se reduzem a

$$t = 1 + \frac{t + v}{2}, \qquad v = 1 + \frac{2t}{3}.$$

A primeira fornece $t = 2 + v$. Substituindo na segunda,

$$v = 1 + \frac{2}{3}(2 + v) \quad \Longrightarrow \quad v = 7, \qquad t = 9.$$

Portanto,

$$\boxed{E_A H_D = 9 \text{ saltos.}}$$

E qual é a chance de atingir D antes de voltar pela primeira vez a A? Comecemos em B ou C e definamos $u_x = \mathbb{P}_x(H_D < H_A)$. As condições de fronteira são $u_A = 0$, $u_D = 1$; pelo problema de Dirichlet,

$$u_B = \frac{u_A + u_C}{2} = \frac{u_C}{2}, \qquad u_C = \frac{u_A + u_B + u_D}{3} = \frac{u_B + 1}{3}.$$

Daí $u_C = 2/5$ e $u_B = 1/5$. Partindo de A, o primeiro salto vai para B ou C, cada um com probabilidade $1/2$. Assim,

$$\boxed{\mathbb{P}_A(H_D < T_A^+) = \frac{1}{2}u_B + \frac{1}{2}u_C = \frac{3}{10}.}$$

O tempo médio até o alvo e a chance de alcançá-lo antes do primeiro retorno descrevem aspectos distintos do percurso nesse grafo.

◁

Exemplo 2.41 — Passeios aleatórios resolvem circuitos elétricos. Considere o grafo à esquerda da figura: entre a e b existem dois caminhos de comprimento dois, passando por x e y. Em cada vértice o passeio escolhe um vizinho uniformemente. Perguntamos pela probabilidade de voltar a a antes de atingir b.

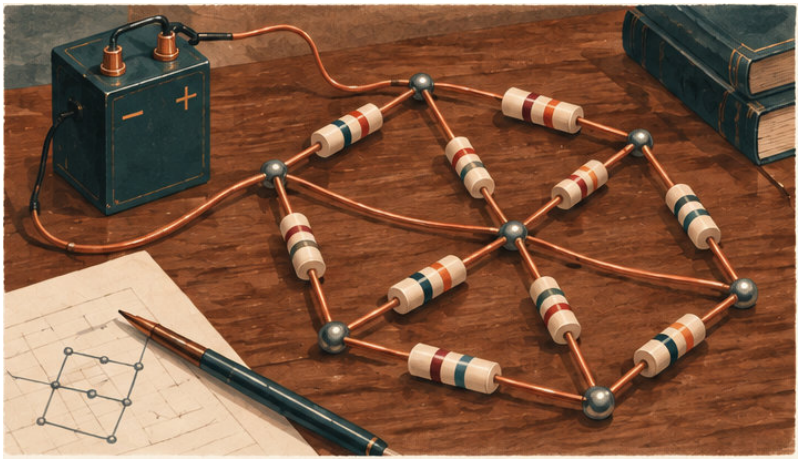


Figura 2.24: Uma rede física de resistores, fios e bateria. Os grafos idealizados da figura seguinte permitem transformar potenciais elétricos em probabilidades de chegada.

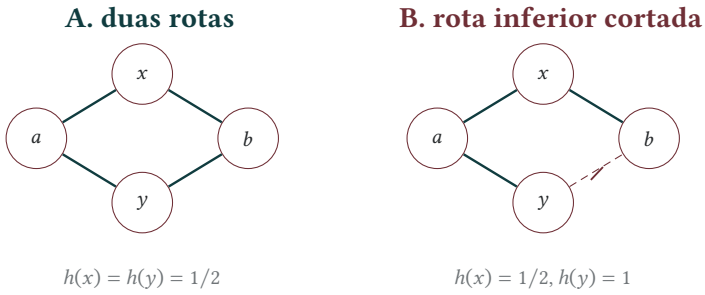


Figura 2.25: Duas redes com resistores de 1 Ω. No painel B, a ligação y–b foi removida. Os valores assinalados são potenciais, que também representam probabilidades de atingir a antes de b.

Seja $h(z) = \mathbb{P}_z(H_a < H_b)$, de modo que $h(a) = 1$ e $h(b) = 0$. No grafo A, pela análise de primeiro passo,

$$h(x) = \frac{h(a) + h(b)}{2} = \frac{1}{2}, \qquad h(y) = \frac{1}{2}.$$

Partindo de a, a primeira transição chega a x ou y com probabilidade $1/2$. Portanto,

$$\boxed{\mathbb{P}_a(T_a^+ < H_b) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}h(y) = \frac{1}{2}}.$$

Substitua agora cada aresta por um resistor de 1 Ω e mantenha os potenciais $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$. A lei de Kirchhoff nos vértices interiores exige que a soma das correntes seja zero:

$$\sum_{w \sim z} (v(z) - v(w)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(z) = \frac{1}{d(z)} \sum_{w \sim z} v(w).$$

São exatamente as equações satisfeitas por h. Logo, os potenciais são as probabilidades de atingimento. Os dois caminhos possuem resistência 2 Ω cada e estão em paralelo; a resistência efetiva entre a e b é, assim, 1 Ω.

Na rede B, eliminamos a aresta y–b. A partir de y, a próxima transição leva obrigatoriamente a a, de modo que $h(y) = 1$, enquanto $h(x) = 1/2$ permanece igual. Consequentemente,

$$\boxed{\mathbb{P}_a(T_a^+ < H_b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}}.$$

A resistência efetiva passa a ser $2\,\Omega$: o ramo que termina em y não conduz corrente até b.

Podemos tornar exata a conexão entre resistência e probabilidade, para qualquer um desses grafos com resistores de $1\,\Omega$. Com potenciais $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$, a corrente total que sai de a é

$$I = \sum_{z \sim a} (1 - v(z)).$$

Como $v(z) = \mathbb{P}_z(H_a < H_b)$, a análise do primeiro passo fornece

$$\begin{aligned} I &= d(a)\left[1 - \frac{1}{d(a)} \sum_{z \sim a} \mathbb{P}_z(H_a < H_b)\right] \\ &= d(a)\big[1 - \mathbb{P}_a(T_a^+ < H_b)\big]. \end{aligned}$$

A diferença de potencial entre a e b é uma unidade; pela definição de resistência efetiva, $R_{\text{ef}}(a,b) = 1/I$. Portanto,

$$\boxed{\mathbb{P}_a(T_a^+ < H_b) = 1 - \frac{1}{d(a) R_{\text{ef}}(a,b)}.}$$

Nos dois grafos, $d(a) = 2$. Com resistência $1\,\Omega$ recuperamos a probabilidade $1/2$; com resistência $2\,\Omega$, obtemos $3/4$. Retirar a ligação aumentou a resistência e a chance de voltar a a antes de atingir b. A identidade explica a relação, em vez de apenas compará-las.

◁

Exemplo 2.42 — O computador: vale contratar manutenção?.

Retomemos o computador do Exemplo 2.6. Em cada dia ele está funcionando (F), em reparo (R) ou definitivamente descartado (D). Antes do descarte, a submatriz das transições é

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}995 & 0{,}005 \\ 0{,}90 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \qquad N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3800 & 20 \\ 3600 & 20 \end{pmatrix}.$$

As entradas de N contam os dias esperados em cada estado antes do descarte, incluindo o dia inicial. Assim, começando em funcionamento, o computador passa, em média, 3800 dias em F e 20 dias em R.

Suponha que cada dia de funcionamento produza um resultado líquido de R$ 5, cada dia em reparo custe R$ 120 e o descarte tenha custo fixo de R$ 500.

A empresa pode pagar os reparos por dia ou contratar, no início, um plano de R$ 2000 que cobre *todos* os dias de reparo até o descarte. Admitimos que a contratação não altere as probabilidades de transição nem os demais custos.

Pagar por reparo	**Contrato fixo**
R$ 120 por dia	R$ 2.000 no início
20 dias esperados	Todos os reparos cobertos
R$ 2.400	**R$ 2.000**

Economia esperada com contrato: R$ 400

Figura 2.26: Duas formas de pagamento para os mesmos tempos aleatórios de funcionamento e reparo. A comparação é feita pelo custo esperado.

Sem contrato, o valor esperado do resultado acumulado é

$$\begin{aligned} E_F L_{\text{avulso}} &= 5\,N(F,F) - 120\,N(F,R) - 500 \\ &= 5 \cdot 3800 - 120 \cdot 20 - 500 = \boxed{\text{R\$ } 16100}. \end{aligned}$$

Com o plano de manutenção, pagamos uma única vez pelos reparos, de modo que

$$E_F L_{\text{contrato}} = 5 \cdot 3800 - 2000 - 500 = \boxed{\text{R\$ } 16500}.$$

Portanto, *segundo o critério do resultado esperado*, o contrato é preferível por R$ 400. A vantagem não se repete necessariamente em cada trajetória, pois o número efetivo de dias em reparo é aleatório.

A comparação desconsidera juros, inflação, aversão ao risco e mudanças na qualidade dos reparos. Para comparar com a compra imediata de outro computador, precisaríamos também modelar seu custo e seu funcionamento. A comparação econômica obtida pela matriz fundamental permanece condicionada a essas hipóteses.

◁

A análise de primeiro passo relaciona, assim, percursos, tempos e custos. A interpretação das respostas acompanha a modelagem de cada situação.

2.9 Modelos ocultos de Markov*

O engajamento de um usuário não é observado diretamente: registramos ações, como cliques ou dias sem acesso. Um usuário engajado pode passar um dia sem clicar, e um usuário pouco engajado pode clicar por acaso. O modelo distingue, assim, o estado que evolui da observação imperfeita desse estado.

Definição 2.12 — Modelo oculto de Markov

Um *modelo oculto de Markov*, abreviado HMM, do inglês *hidden Markov model*, é formado por uma cadeia de Markov (X_n), com distribuição inicial μ_0 e matriz de transição P, e por uma sequência de observações (Y_n). Os estados X_n não são observados diretamente; em seu lugar, observamos Y_n. Condicionadas à trajetória dos estados, as observações são independentes, e a lei de Y_n depende apenas do estado X_n:

$$\mathbb{P}(Y_n = y \mid X_0, X_1, \ldots) = b_{X_n}(y).$$

As funções b_i são as *probabilidades de emissão*. Para manter a notação simples, trabalharemos nesta seção com observações discretas; para observações contínuas, as probabilidades de emissão são substituídas por densidades.

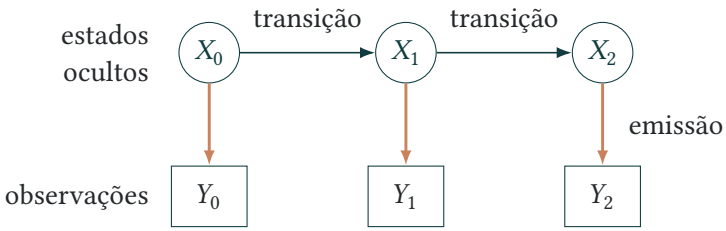


Figura 2.27: Os estados ocultos formam uma cadeia de Markov. Cada observação depende do estado oculto do mesmo instante. Dada a trajetória dos estados, as observações são independentes; sem esse condicionamento, elas podem ser dependentes.

Se observássemos X_n, bastaria usar a matriz P para prever o próximo estado. Como vemos apenas Y_n, não sabemos com certeza onde a cadeia

está. Em vez de um estado, precisamos carregar uma *distribuição* sobre os estados possíveis.

A descrição acima determina a lei conjunta. A Proposição 2.1 fornece a probabilidade da trajetória oculta; multiplicamos essa probabilidade pelas emissões condicionalmente independentes. Escrevendo $x_{0:n} = (x_0, \dots, x_n)$ e analogamente $y_{0:n}$,

$$\mathbb{P}(x_{0:n}, y_{0:n}) = \mu_0(x_0) \prod_{k=1}^{n} p_{x_{k-1}x_k} \prod_{k=0}^{n} b_{x_k}(y_k).$$

Os fatores correspondem à distribuição inicial, às transições e às emissões. Essa fatoração permite calcular a distribuição do estado oculto a partir das observações.

O problema de *filtragem* é o seguinte: depois de observar $Y_0, \dots, Y_n$, qual é a nossa distribuição para o estado atual X_n? Definimos

$$r_n(j) = \mathbb{P}(X_n = j \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n).$$

Quando chega uma nova observação, a atualização ocorre em dois movimentos. Primeiro deixamos a cadeia evoluir, sem ainda olhar o novo dado. Depois usamos o novo dado para corrigir a previsão:

$$r_n \xrightarrow{\text{previsão pela cadeia}} \tilde{r}_{n+1} \xrightarrow{\text{correção pela observação}} r_{n+1}.$$

O primeiro passo combina as transições da cadeia com a hipótese de que cada emissão depende apenas do estado oculto do mesmo instante; o segundo usa a regra de Bayes para incorporar a nova observação.

Proposição 2.22 — Filtragem: previsão e correção

Suponha que

$$r_n(i) = \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{0:n} = y_{0:n}).$$

Antes de observar Y_{n+1}, a distribuição prevista do novo estado é

$$\tilde{r}_{n+1}(j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid Y_{0:n} = y_{0:n}) = \sum_i r_n(i) p_{ij}.$$

Depois de observar $Y_{n+1} = y_{n+1}$, corrigimos essa distribuição por

$$r_{n+1}(j) = \frac{b_j(y_{n+1})\,\tilde{r}_{n+1}(j)}{\sum_k b_k(y_{n+1})\,\tilde{r}_{n+1}(k)}.$$

No instante inicial,

$$r_0(j) = \frac{\mu_0(j) b_j(y_0)}{\sum_k \mu_0(k) b_k(y_0)}.$$

Demonstração. Comecemos pela previsão. Condicionamos segundo o estado atual:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid Y_{0:n} = y_{0:n}) = \sum_i \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, Y_{0:n} = y_{0:n}) \times \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{0:n} = y_{0:n}).$$

A propriedade de Markov descreve a relação entre os estados ocultos. Para incluir as observações, usamos também a hipótese de emissão. Na fatoração da lei conjunta, com $x_n = i$, o fator final é p_{ij}, que não depende dos estados ou das observações anteriores. Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, Y_{0:n} = y_{0:n}) \\
&= \sum_{x_0,\ldots,x_{n-1}} \mu_0(x_0) b_{x_0}(y_0) \left(\prod_{m=1}^{n} p_{x_{m-1}x_m} b_{x_m}(y_m) \right) p_{ij} \\
&= p_{ij}\, \mathbb{P}(X_n = i, Y_{0:n} = y_{0:n}).
\end{aligned}$$

Para $n = 0$, a mesma igualdade é simplesmente $\mu_0(i) b_i(y_0) p_{ij} = p_{ij} \mathbb{P}(X_0 = i, Y_0 = y_0)$. Quando o evento condicionado tem probabilidade positiva, a divisão mostra que o primeiro fator da soma anterior é p_{ij}; o segundo é $r_n(i)$. Estados com $r_n(i) = 0$ não contribuem para a soma. Obtemos, portanto,

$$\tilde{r}_{n+1}(j) = \sum_i r_n(i) p_{ij}.$$

Agora chega a observação $Y_{n+1} = y_{n+1}$. Pela regra de Bayes,

$$r_{n+1}(j) = \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = y_{n+1} \mid X_{n+1} = j, Y_{0:n} = y_{0:n})\,\tilde{r}_{n+1}(j)}{\mathbb{P}(Y_{n+1} = y_{n+1} \mid Y_{0:n} = y_{0:n})}.$$

A hipótese de emissão transforma o primeiro fator do numerador em $b_j(y_{n+1})$. Para obter o denominador, somamos o numerador sobre todos os estados possíveis. Surge exatamente

$$\sum_k b_k(y_{n+1})\,\tilde{r}_{n+1}(k).$$

A fórmula para r_0 é o mesmo argumento de Bayes aplicado à primeira observação. ■

A multiplicação por P faz a *previsão*: mesmo sem receber informação nova, nossa crença sobre o estado muda porque o próprio sistema evolui. A multiplicação por $b_j(y_{n+1})$ faz a *correção*: estados que explicam melhor a observação recebem mais peso. A normalização final apenas faz esses novos pesos somarem um.

Toda a história $y_0, \dots, y_n$ influencia o futuro através de r_n. Depois de calcular essa distribuição, não precisamos refazer os cálculos desde o início quando chega o próximo dado. O vetor r_n é o nosso estado de conhecimento sobre a cadeia oculta. Essa recursão é frequentemente chamada de algoritmo *forward*.

Exemplo 2.43 — Engajamento latente e cliques observados.

Tome $X_n \in \{E, D\}$, onde E significa engajado e D, desengajado, e $Y_n \in \{C, S\}$, onde C significa clique e S, silêncio no dia. Suponha

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \qquad \mu_0 = (1/2, 1/2), \qquad \begin{array}{c|cc} & C & S \\ \hline E & 0{,}9 & 0{,}1 \\ D & 0{,}2 & 0{,}8 \end{array}.$$

Considere a sequência de observações

$$C, \qquad S, \qquad C.$$

Antes de qualquer observação, atribuímos probabilidades iguais aos dois estados. O primeiro dado é um clique. Como um clique é muito mais provável em E do que em D, Bayes produz

$$r_0 = \frac{(0{,}5 \cdot 0{,}9,\ 0{,}5 \cdot 0{,}2)}{0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} = \left(\frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right).$$

Assim, depois do clique, a probabilidade de engajamento é aproximadamente 0,818.

No dia seguinte, antes de observar qualquer ação, fazemos a previsão:

$$\tilde{r}_1 = r_0 P = \left(\frac{39}{55}, \frac{16}{55}\right).$$

A probabilidade prevista de engajamento é agora aproximadamente 0,709. Ela mudou mesmo antes de chegar um novo dado: o estado oculto também pode ter mudado.

Observamos então silêncio. Sob E, essa observação tem probabilidade 0,1; sob D, probabilidade 0,8. Multiplicamos a previsão por esses dois pesos:

$$\left(\frac{39}{55} \cdot 0{,}1,\ \frac{16}{55} \cdot 0{,}8\right) = \left(\frac{39}{550}, \frac{128}{550}\right).$$

Normalizando,

$$r_1 = \left(\frac{39}{167}, \frac{128}{167}\right).$$

A probabilidade de engajamento cai para aproximadamente 0,234. Ela não cai a zero: silêncio é evidência contra engajamento, não uma observação direta do estado.

Antes da terceira observação,

$$\tilde{r}_2 = r_1 P = \left(\frac{348}{835}, \frac{487}{835}\right).$$

A probabilidade prevista de engajamento sobe para aproximadamente 0,417, pois a matriz permite que um usuário desengajado volte a se engajar. Agora observamos um clique. A correção dá

$$r_2 = \frac{\left(\frac{348}{835} \cdot 0{,}9,\ \frac{487}{835} \cdot 0{,}2\right)}{\frac{348}{835} \cdot 0{,}9 + \frac{487}{835} \cdot 0{,}2} = \left(\frac{1566}{2053}, \frac{487}{2053}\right).$$

A probabilidade de engajamento volta a aproximadamente 0,763.

O percurso completo pode ser lido em duas etapas:

$$0{,}5 \xrightarrow[\text{clique}]{\text{correção}} 0{,}818 \xrightarrow{\text{previsão}} 0{,}709 \xrightarrow[\text{silêncio}]{\text{correção}} 0{,}234$$

$$0{,}234 \xrightarrow{\text{previsão}} 0{,}417 \xrightarrow[\text{clique}]{\text{correção}} 0{,}763.$$

Entre observações, a matriz de transição atualiza a previsão; cada nova observação a corrige. A filtragem repete essas duas operações.

◁

Em uma cadeia observada, registramos o próprio X_n. No HMM, registramos Y_n e mantemos uma distribuição sobre X_n. Por isso, (Y_n) em geral não é uma cadeia de Markov: saber apenas a última observação pode perder informação que as observações anteriores forneceram sobre o estado oculto.

Para ir além. A filtragem é apenas uma das perguntas possíveis em modelos ocultos de Markov. Podemos usar observações futuras para rever o que acreditávamos sobre estados passados (*smoothing*), procurar uma trajetória oculta particularmente plausível (problema associado ao algoritmo de Viterbi) ou estimar a matriz de transição e as probabilidades de emissão a partir dos próprios dados, por exemplo com o algoritmo de Baum–Welch. Esses temas são tratados em Rabiner (1989) e, com numerosos exemplos de séries temporais, em Zucchini et al. (2016).

2.10 Exercícios

Os exercícios retomam a construção de matrizes, a probabilidade de trajetórias, os critérios de recorrência, a propriedade forte de Markov e os problemas de absorção.

Exercício 2.1 — Probabilidades de caminhos e histórias parciais

Considere uma cadeia em $\{1, 2, 3\}$ com distribuição inicial $\mu = (1/2, 1/4, 1/4)$ e matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$ e $\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 3)$. Depois encontre

$$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 \in \{1, 3\}, X_1 = 2).$$

Explique por que a informação parcial sobre X_0 não muda a última probabilidade depois de conhecido X_1.

Exercício 2.2 — Contar visitas e decidir recorrência

Seja $0 < r < 1$ e considere a cadeia nos estados $\{0, 1\}$ com

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-r & r \end{pmatrix}.$$

Partindo de 1, calcule $P^n(1,1)$ e a esperança do número total de visitas ao estado 1, incluindo o instante inicial. Encontre $\mathbb{P}_1(T_1^+ < \infty)$ e use o critério de contagem de visitas para classificar os dois estados.

Exercício 2.3 — Um estado que guarda dois dias

Um serviço registra $Y_n = 1$ quando há sobrecarga no dia n e $Y_n = 0$ caso contrário. A probabilidade de sobrecarga amanhã depende apenas do par (Y_{n-1}, Y_n) e vale 0,1, 0,6, 0,3 e 0,8 nos pares 00, 01, 10 e 11, respectivamente. Suponha que todos esses históricos tenham probabilidade positiva. Explique por que registrar apenas Y_n não produz uma cadeia de Markov e construa a matriz do processo dos pares, nessa ordem de estados.

Exercício 2.4 — Três passos e caminhos intermediários

Na ruína com barreiras 0 e 4, use probabilidade de ganho $p = 0{,}6$. Construa P e calcule $P^3(1,4)$ e $P^3(1,0)$. Confira as entradas por Chapman–Kolmogorov e pela enumeração dos caminhos, lembrando que as barreiras são absorventes.

Exercício 2.5 — Meta, risco e duração

Um jogador começa com duas unidades e encerra o jogo ao chegar a zero ou seis. Calcule a chance de atingir seis e a duração média quando $p = 1/2$ e quando $p = 3/5$. Explique por que aumentar a chance de sucesso não obriga a duração média a diminuir.

Exercício 2.6 — Recomeçar ao atingir um nível

No passeio justo com barreiras absorventes 0 e 5, comece em $X_0 = 2$ e defina

$$T = \min\{n \geq 0 \,:\, X_n \in \{0, 3\}\}, \qquad \tau = \min\{n \geq 0 \,:\, X_n \in \{0, 5\}\}.$$

Explique por que T é um tempo de parada e calcule $\mathbb{P}_2(X_T = 3)$. Use a propriedade forte de Markov para calcular $\mathbb{P}_2(X_\tau = 5 \mid X_T = 3)$ e $E_2[\tau - T \mid X_T = 3]$, indicando de qual estado a cadeia recomeça. Deduza $\mathbb{P}_2(X_\tau = 5)$ por esse caminho intermediário e compare com a fórmula direta da ruína.

Exercício 2.7 — Visitas antes da absorção

No jogo justo com barreiras 0 e 5, comece com duas unidades. Use a matriz fundamental dos estados 1, 2, 3, 4 para calcular o número esperado de visitas ao estado 3 antes da absorção, incluindo o instante inicial na contagem quando cabível. Some a linha correspondente ao estado inicial e compare com a fórmula da duração média.

2.11 Exercícios complementares*

Exercício 2.8 — Filtragem com dois dias*

No modelo da Seção 2.9, observe silêncio no dia 0 e um clique no dia 1. Calcule a distribuição filtrada em cada dia e a probabilidade do clique no dia 1 dada a primeira observação.

Exercício 2.9 — Emissões que não distinguem estados*

Suponha que $b_E(y) = b_D(y)$ para todo y. Mostre, pela atualização de Bayes, que a nova observação não muda a distribuição prevista do estado. Mostre também que, nesse modelo, a lei da sequência de observações não depende da matriz de transição dos estados ocultos. Por que essa matriz não pode ser identificada apenas a partir das observações?

Exercício 2.10 — Dependência entre observações*

No exemplo de engajamento, calcule $\mathbb{P}(Y_1 = C \mid Y_0 = C)$ e $\mathbb{P}(Y_1 = C \mid Y_0 = S)$. Explique por que valores diferentes são compatíveis com a independência condicional das emissões exigida pelo HMM.

CAPÍTULO

3

Distribuições estacionárias e comportamento limite

Uma distribuição pode permanecer inalterada enquanto os estados continuam mudando. A existência desse equilíbrio e a convergência para ele são questões distintas.

A descrição das transições e dos tempos de chegada permite investigar o comportamento da cadeia no longo prazo. Interessa saber se existe uma distribuição estacionária, quando ela é única e sob quais condições a lei e as médias temporais se aproximam dela. As urnas de Ehrenfest, o sapo e os modelos de mobilidade social e estoque reaparecem sob essa perspectiva.

Os resultados gerais são enunciados também para espaços enumeráveis quando suas hipóteses o permitem; no próximo capítulo veremos por que o infinito exige cuidados adicionais.

3.1 Distribuições estacionárias

Uma distribuição preservada pela dinâmica mantém a lei da cadeia inalterada em todos os instantes. Para estudar essa possibilidade, partimos da fórmula da probabilidade total:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i, X_n = j) \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i)\,\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i).\end{aligned}$$

Escrevendo $\mu_0(i) = \mathbb{P}(X_0 = i)$, a última equação toma a forma

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_i \mu_0(i) P^n(i, j) \tag{3.1}$$

Em notação matricial, a distribuição no instante n é $\mu_n = \mu_0 P^n$. Usamos vetores-linha: a coordenada j de $\mu_0 P^n$ é justamente a soma em (3.1).

Definição 3.1 — Distribuição estacionária

Uma distribuição de probabilidade π em S é *estacionária* para a cadeia com matriz de transição P se

$$\pi P = \pi, \qquad \text{isto é,} \qquad \pi(j) = \sum_{i \in S} \pi(i) p(i, j) \quad \text{para todo } j.$$

Se $X_0 \sim \pi$, então $X_n \sim \pi$ para todo n. Isso não significa que a cadeia permaneça no mesmo estado; significa que o movimento redistribui a massa de probabilidade sem alterar sua distribuição total.

Uma imagem para a estacionariedade

Imagine uma unidade de areia distribuída entre os estados, com massa $\pi(i)$ em i. Em um passo, a fração $p(i, j)$ da areia que estava em i é enviada para j. A igualdade $\pi P = \pi$ afirma que, depois de todas as transferências, cada estado termina com a mesma quantidade de areia com que começou.

Exemplo 3.1 — Evolução de uma distribuição inicial.

Considere o canal de comunicação do Exemplo 2.7 com $a = 0{,}4$, $b = 0{,}2$ e distribuição inicial $\mu_0(0) = 0{,}3$, $\mu_0(1) = 0{,}7$. Então

$$(0{,}3 \quad 0{,}7)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}32 \quad 0{,}68).$$

Depois de mais um passo, a distribuição é $\mu_0 P^2 = (0{,}328 \quad 0{,}672)$. Para compreender o comportamento a longo prazo, não precisamos calcular todas as potências de P. Basta acompanhar a probabilidade de um dos estados.

Seja $u_n = (\mu_0 P^n)(0)$ a probabilidade de estar no estado 0 no instante n. A probabilidade de estar no estado 1 é, portanto, $1 - u_n$.

Para estar no estado 0 no instante seguinte, a cadeia pode permanecer em 0, com probabilidade de transição 0,6, ou passar de 1 para 0, com probabilidade 0,2. Assim,

$$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}2(1 - u_n) = 0{,}2 + 0{,}4u_n.$$

Procuramos um valor que permaneça inalterado por essa atualização. Resolvendo $u = 0{,}2 + 0{,}4u$, encontramos $u = 1/3$. Subtraindo esse valor da recorrência, obtemos

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = 0{,}4\left(u_n - \frac{1}{3}\right).$$

Assim, a distância de u_n a $1/3$ é multiplicada por 0,4 a cada passo e, portanto, tende a zero. Como a probabilidade do outro estado é $1 - u_n$, concluímos que

$$\mu_0 P^n \longrightarrow \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right).$$

◁

Exemplo 3.2 — Estacionária sem convergência.

Considere agora uma cadeia que alterna entre os estados 0 e 1, com

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu_0 = (1 \quad 0).$$

Como a cadeia troca de estado a cada passo,

$$\mu_0 P^{2n} = (1 \quad 0), \qquad \mu_0 P^{2n+1} = (0 \quad 1).$$

A sequência $\mu_0 P^n$ não converge. No entanto, $\pi = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$ é estacionária, pois $\pi P = \pi$. Já a média das n primeiras distribuições converge:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_0 P^k \longrightarrow \pi,$$

pois cada par de termos tem média π e a contribuição de um eventual termo restante tende a zero.

◁

Se $\mu_0 P^n$ converge para uma distribuição ν em uma cadeia finita, então

$$\nu P = \lim_{n \to \infty} \mu_0 P^{n+1} = \nu.$$

Logo, todo limite é estacionário, mas a existência de uma distribuição estacionária não garante que as distribuições sucessivas convirjam. O segundo exemplo também explica por que vale a pena considerar médias: elas podem convergir mesmo quando as distribuições oscilam. Essa será a ideia usada na demonstração seguinte.

Resta uma pergunta: sob quais condições as potências P^n convergem? Voltaremos a ela ao estudar o comportamento limite.

Proposição 3.1 — Existência de uma estacionária em espaço finito

Toda matriz de transição em um espaço finito e não vazio possui pelo menos uma distribuição estacionária.

A cadeia pode ter várias classes fechadas, por isso a afirmação é de existência. Em um espaço infinito, a massa das distribuições pode escapar para estados cada vez mais distantes, e o argumento de compacidade abaixo deixa de valer.

Demonstração. Parta de uma distribuição qualquer μ_0. As distribuições nos instantes sucessivos são

$$\mu_0,\ \mu_0 P,\ \mu_0 P^2, \dots$$

e considere a média das n primeiras:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu_0 P^j.$$

Cada a_n ainda é uma distribuição de probabilidade, pois é uma média de distribuições. Como o espaço de estados é finito, todas essas distribuições pertencem ao simplex

$$\left\{ u \in \mathbb{R}^{|S|} \ : \ u(i) \geq 0,\ \sum_i u(i) = 1 \right\},$$

que é compacto. Logo existe uma subsequência (a_{n_r}) que converge para alguma distribuição π.

Resta mostrar que esse limite é preservado por P. Multiplicar a média por P apenas desloca a sequência em um passo:

$$a_n P = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_0 P^j.$$

Consequentemente, todos os termos intermediários se cancelam na diferença e

$$a_n P - a_n = \frac{\mu_0 P^n - \mu_0}{n} \longrightarrow 0.$$

Ao longo da subsequência escolhida, $a_{n_r} \to \pi$; como a multiplicação por P é contínua, $a_{n_r} P \to \pi P$. A diferença entre esses dois limites é zero, portanto

$$\pi P = \pi.$$

Assim, π é uma distribuição estacionária. ∎

Exemplo 3.3 — Uma cadeia com infinitas distribuições estacionárias. Retomemos a cadeia de quatro estados do Exemplo 2.23. Suas classes fechadas são $\{0\}$ e $\{2,3\}$; o estado 1 é transiente. Busquemos *todas* as distribuições estacionárias $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

Da equação $\pi P = \pi$, a coordenada do estado 1 fornece

$$\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1, \qquad \text{logo} \quad \pi_1 = 0.$$

As equações dos estados 2 e 3 dão

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3, \qquad \text{isto é,} \qquad \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_2.$$

Se $\pi_0 = t$, a normalização $\pi_0 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ determina

$$\boxed{\pi_t = \left(t,\ 0,\ \frac{2}{5}(1-t),\ \frac{3}{5}(1-t)\right), \qquad 0 \le t \le 1.}$$

Cada valor de t fornece uma estacionária. O vetor $(2/5, 3/5)$ é a estacionária da classe fechada $\{2,3\}$, enquanto a massa t permanece no estado absorvente 0. O parâmetro livre reflete a possibilidade de repartir a massa entre duas classes que não se comunicam.

◁

3.2 Cálculo de distribuições estacionárias

3.2.1 Cadeias com dois estados

Considere uma cadeia em $S = \{1, 2\}$. Escrever

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ 1 & 1-a & a \\ 2 & b & 1-b \end{array}$$

torna visíveis as duas probabilidades de mudança: a para ir de 1 a 2 e b para voltar de 2 a 1. Se $a + b > 0$, a distribuição estacionária é

$$\pi_1 = \frac{b}{a+b}, \qquad \pi_2 = \frac{a}{a+b}. \tag{3.2}$$

Como primeira verificação, no canal de comunicação do Exemplo 2.7, cuja ordem dos estados é $(0, 1)$, com $a = 0{,}4$ e $b = 0{,}2$, obtemos $(1/3, 2/3)$. A fórmula também pode ser lida como uma igualdade de fluxos:

$$\pi_1 a = \frac{ab}{a+b} = \pi_2 b.$$

Assim, a massa enviada de 1 para 2 é igual à massa enviada de 2 para 1. Algebricamente,

$$\frac{b}{a+b}(1-a) + \frac{a}{a+b}b = \frac{b - ba + ab}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$
$$\frac{b}{a+b}a + \frac{a}{a+b}(1-b) = \frac{ba + a - ab}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

A fórmula (3.2) vale sempre que $a + b > 0$, inclusive quando um dos estados é absorvente. Se $a = b = 0$, ambos os estados são absorventes e toda distribuição em $\{1, 2\}$ é estacionária.

Exemplo 3.4 — Mobilidade social: uma distribuição entre gerações. Retomemos a matriz do Exemplo 2.5. Queremos encontrar uma distribuição $\pi = (u, v, w)$ preservada pelas transições. As duas primeiras coordenadas de $\pi P = \pi$ e a normalização dão

$$\begin{cases} u = 0{,}7u + 0{,}3v + 0{,}2w, \\ v = 0{,}2u + 0{,}5v + 0{,}4w, \\ u + v + w = 1. \end{cases}$$

Multiplicando as duas primeiras equações por 10 e rearranjando,

$$3u = 3v + 2w, \qquad 5v = 2u + 4w.$$

Substituindo $u = v + \frac{2}{3}w$ na segunda, obtemos $v = \frac{16}{9}w$ e $u = \frac{22}{9}w$. Portanto,

$$\boxed{\pi = \left(\frac{22}{47}, \frac{16}{47}, \frac{9}{47}\right).}$$

No modelo, a proporção estacionária correspondente à classe superior é $9/47$, aproximadamente 19,1%. Essa interpretação diz respeito às probabilidades de uma cadeia homogênea hipotética, não a uma estimativa da

mobilidade social efetivamente observada. Na seção de comportamento limite, verificaremos por que a distribuição de uma família converge a esse vetor, independentemente da classe inicial.

◁

3.2.2 Um modelo de estoque

Retomemos a política de reposição do Exemplo 2.13, agora para determinar o estoque em equilíbrio e o resultado médio das vendas.

Exemplo 3.5 — Repor ou esperar: um pequeno problema de estoque. Uma loja vende um produto e acompanha o estoque $X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ no fim de cada dia. Antes das vendas do dia seguinte, se sobraram 0 ou 1 unidades, a loja repõe o estoque até 3; caso contrário não encomenda nada. Denote por B_n o estoque depois da eventual reposição:

$$B_n = \begin{cases} 3, & X_n \leq 1, \\ X_n, & X_n \geq 2. \end{cases}$$

A demanda diária independente vale 0, 1, 2 com probabilidades $1/4, 1/2, 1/4$, respectivamente. Como $B_n \geq 2$, todas as unidades demandadas são vendidas e $X_{n+1} = B_n - D_{n+1}$.

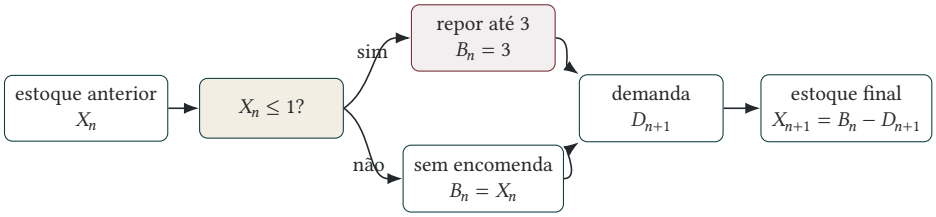


Figura 3.1: A política de reposição depende apenas do estoque do dia anterior; depois da demanda, obtemos o novo estado da cadeia.

Por exemplo, se $X_n = 2$, a demanda 2 leva a 0 com probabilidade $1/4$, a demanda 1 leva a 1 com probabilidade $1/2$ e a demanda 0 mantém 2 com probabilidade $1/4$. Na ordem $(0, 1, 2, 3)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo $\pi P = \pi$ e $\sum_i \pi(i) = 1$, obtemos

$$\pi = \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{20}\right).$$

Para calcular custos e receitas em equilíbrio, suponha que cada unidade vendida renda 5, cada unidade encomendada custe 2 e cada unidade que sobra no fim do dia custe 1 para armazenar. Em equilíbrio, a demanda média é 1 unidade, e o número médio de unidades encomendadas por dia é

$$3\pi(0) + 2\pi(1) = 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{7}{20} = 1.$$

Essa igualdade não é coincidência: em equilíbrio, $E_\pi X_{n+1} = E_\pi X_n$. Como o estoque do dia seguinte é o estoque atual mais a reposição e menos a demanda, a reposição média deve igualar $ED = 1$. O estoque médio ao fim do dia vale

$$\pi(1) + 2\pi(2) + 3\pi(3) = \frac{8}{5}.$$

Portanto, o lucro líquido médio por dia, sob essa política, é

$$\boxed{5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}}.$$

Essa é a esperança do lucro de um dia em equilíbrio. Para interpretá-la como média temporal do lucro, usamos o teorema ergódico para o estoque e a reposição, que dependem de X_n, e a lei forte para as demandas independentes; voltaremos a essas ferramentas na Subseção 3.4.3.

◁

3.2.3 Cadeias duplamente estocásticas

Definição 3.2 — Matriz duplamente estocástica

Uma matriz de transição P é *duplamente estocástica* quando, além de cada linha somar 1, cada coluna também soma 1:

$$\sum_{y} p(x,y) = 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{x} p(x,y) = 1.$$

As somas das linhas já fazem parte da definição de matriz de transição; a condição nova é a das colunas.

Teorema 3.2 — Distribuição uniforme

Em um espaço com N estados, a distribuição uniforme, $\pi(x) = 1/N$, é estacionária se e somente se P é duplamente estocástica.

Demonstração. Se P é duplamente estocástica, então, para cada estado y,

$$\sum_{x} \pi(x)p(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{x} p(x,y) = \frac{1}{N} = \pi(y).$$

Logo, $\pi P = \pi$.

Reciprocamente, suponha que a distribuição uniforme seja estacionária. Então, para cada estado y,

$$\frac{1}{N} = \pi(y) = \sum_{x} \pi(x)p(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{x} p(x,y).$$

Multiplicando por N, obtemos

$$\sum_{x} p(x,y) = 1.$$

Portanto, as colunas de P também somam 1, e P é duplamente estocástica. ∎

Exemplo 3.6 — Passeio aleatório com reflexão nos extremos.

O espaço de estados é $\{0, 1, \dots, L\}$, com $L \geq 1$. Nos estados interiores, a cadeia vai para cada vizinho com probabilidade $1/2$. Adotamos a seguinte reflexão nos extremos: uma tentativa de sair do intervalo é substituída por uma permanência. Assim, $p(0,0) = p(0,1) = 1/2$ e $p(L, L-1) = p(L, L) = 1/2$.

Para $L = 4$, a matriz é

	0	1	2	3	4
0	0,5	0,5	0	0	0
1	0,5	0	0,5	0	0
2	0	0,5	0	0,5	0
3	0	0	0,5	0	0,5
4	0	0	0	0,5	0,5

Cada coluna soma 1, e o mesmo argumento vale para qualquer L. Portanto, a distribuição estacionária é uniforme:

$$\pi(i) = \frac{1}{L+1}, \qquad 0 \leq i \leq L.$$

◁

3.3 Reversibilidade e balanço detalhado

A estacionariedade equilibra o fluxo total que entra e sai de cada estado. O balanço detalhado impõe uma condição mais forte: o equilíbrio deve ocorrer separadamente em cada par de estados.

Definição 3.3 — Balanço detalhado e reversibilidade

Uma distribuição π satisfaz o *balanço detalhado* para P se

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x) \qquad \text{para todos } x, y \in S.$$

Quando existe tal distribuição, dizemos que a cadeia é *reversível* em relação a π.

O produto $\pi(x)p(x,y)$ é a probabilidade de observar a transição $x \to y$ quando a cadeia começa com distribuição π. A igualdade afirma que essa transição e a transição inversa têm a mesma probabilidade em equilíbrio.

Para verificar que o balanço detalhado implica estacionariedade, fixamos y e somamos em x:

$$\sum_x \pi(x)p(x,y) = \pi(y)\sum_x p(y,x) = \pi(y).$$

Na imagem da areia, o balanço detalhado diz que, para cada par x, y, a massa enviada de x para y coincide com a massa enviada de y para x. A estacionariedade permite compensações globais mais complexas; por isso, nem toda cadeia estacionária é reversível.

Exemplo 3.7 — Estacionária sem balanço detalhado.

Considere a matriz duplamente estocástica

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

A distribuição uniforme é estacionária, mas não satisfaz balanço detalhado: para ela, $\pi(1)p(1,3) = 0$, enquanto $\pi(3)p(3,1) = 1/15 > 0$.

◁

Exemplo 3.8 — Um triângulo em equilíbrio, mas não reversível.

Uma partícula percorre os vértices de um triângulo. De cada vértice ela avança no ciclo $1 \to 2 \to 3 \to 1$ com probabilidade a e percorre a aresta oposta com probabilidade $1-a$, onde $0 \le a \le 1$. Na ordem $(1,2,3)$, a matriz é

$$P_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

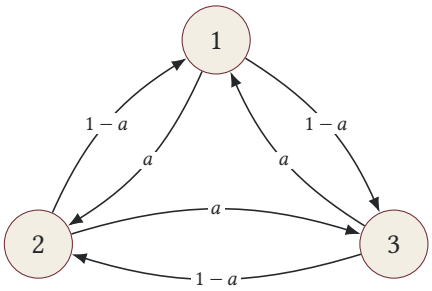


Figura 3.2: Em cada vértice, a probabilidade no sentido $1 \to 2 \to 3 \to 1$ é a, e no sentido oposto é $1 - a$.

Cada coluna de P_a soma 1, logo a distribuição $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ é estacionária para todo $a \in [0, 1]$. O balanço detalhado entre 1 e 2, porém, exige

$$\pi(1)p(1,2) = \pi(2)p(2,1) \iff \frac{a}{3} = \frac{1-a}{3} \iff \boxed{a = \frac{1}{2}}.$$

Quando $a = 1/2$, as outras igualdades de balanço detalhado também valem, e a cadeia é reversível. Para $a \neq 1/2$, a distribuição uniforme ainda é preservada, mas há uma circulação preferencial em torno do triângulo. Assim, *estacionariedade* não implica *reversibilidade*.

◁

Exemplo 3.9 — Pesos de uma cadeia de nascimento e morte.

Uma cadeia de nascimento e morte tem espaço de estados formado por inteiros consecutivos $\ell, \ell+1, \ldots, r$, com r finito ou $r = +\infty$, e só pode permanecer no lugar ou mover uma unidade:

$$p(x,y) = 0 \quad \text{quando } |x - y| > 1.$$

Escrevemos

$$\begin{aligned} p(x, x+1) &= p_x && \text{para } x < r, \\ p(x, x-1) &= q_x && \text{para } x > \ell, \\ p(x, x) &= 1 - p_x - q_x && \text{para } \ell \le x \le r. \end{aligned}$$

Adotamos $q_\ell = 0$ e, quando r é finito, $p_r = 0$. Supomos $p_x, q_{x+1} > 0$ em cada aresta admissível e $p_x + q_x \le 1$. O balanço detalhado entre os vizinhos x e $x+1$ exige

$$\pi(x)p_x = \pi(x+1)q_{x+1},$$

logo

$$\pi(x+1) = \frac{p_x}{q_{x+1}} \cdot \pi(x) \tag{3.3}$$

Começando em ℓ e aplicando a recursão repetidamente,

$$\pi(\ell + i) = \pi(\ell) \cdot \frac{p_{\ell+i-1} \cdot p_{\ell+i-2} \cdots p_{\ell+1} \cdot p_\ell}{q_{\ell+i} \cdot q_{\ell+i-1} \cdots q_{\ell+2} \cdot q_{\ell+1}}.$$

Depois, escolhemos $\pi(\ell)$ para que a soma das probabilidades seja 1. Essa normalização só é possível, no caso infinito, quando a série dos pesos acima converge.

Neste modelo, o balanço detalhado também é necessário para a estacionariedade. De fato, suponha que π seja uma distribuição estacionária e fixe $x < r$. O conjunto $F = \{\ell, \dots, x\}$ é finito. Em um passo, a única saída de F ocorre pela transição $x \to x+1$, e a única entrada ocorre pela transição inversa. Somando as equações de estacionariedade nos estados de F, obtemos

$$\pi(F) = \pi(F) - \pi(x)p_x + \pi(x+1)q_{x+1}.$$

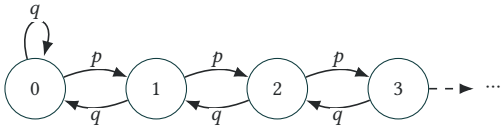
Portanto, $\pi(x)p_x = \pi(x+1)q_{x+1}$ para toda aresta admissível. Toda estacionária precisa, assim, ter os pesos calculados acima. Se a série desses pesos diverge, não existe distribuição estacionária; se converge, sua normalização fornece a única estacionária.

◁

Exemplo 3.10 — Uma fila de atendimento em equilíbrio.

Em cada instante, um serviço recebe uma nova pessoa com probabilidade $p = 2/5$, ou surge uma oportunidade de atendimento com probabilidade $q = 3/5$. Se a fila está vazia, a oportunidade de atendimento não altera seu tamanho. O estado X_n é o número de pessoas esperando; suas transições são

$$p(0,0) = q, \quad p(0,1) = p, \qquad p(i,i+1) = p, \quad p(i,i-1) = q \quad (i \geq 1).$$



$p = 2/5$: entrada $q = 3/5$: serviço possível

Figura 3.3: A fila cresce nas chegadas e diminui nos atendimentos efetivos. No estado zero, uma oportunidade de atendimento produz uma permanência.

É uma cadeia de nascimento e morte. Pelo balanço detalhado, os pesos estacionários precisam satisfazer $\pi(i+1)q = \pi(i)p$, isto é, $\pi(i+1) = \frac{2}{3}\pi(i)$. A normalização da série geométrica fornece

$$\boxed{\pi(i) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}, \qquad i \geq 0.}$$

Há probabilidade estacionária $1/3$ de a fila estar vazia. O número médio de pessoas no sistema em equilíbrio é

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\pi(i) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \boxed{2}.$$

Na Seção 3.6, o Exemplo 3.22 retomará essa fila para relacionar a reversibilidade à distribuição dos atendimentos.

◁

Exemplo 3.11 — Cadeia de Ehrenfest.

Considere primeiro o caso de três bolas. A matriz de transição é

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	0	0
1	$1/3$	0	$2/3$	0
2	0	$2/3$	0	$1/3$
3	0	0	1	0

Tomando $\pi(0) = c$ e usando (3.3), obtemos

$$\pi(1) = 3c, \qquad \pi(2) = 3c, \qquad \pi(3) = c.$$

A soma é $8c$, portanto $c = 1/8$ e

$$\pi(0) = \frac{1}{8}, \qquad \pi(1) = \frac{3}{8}, \qquad \pi(2) = \frac{3}{8}, \qquad \pi(3) = \frac{1}{8}.$$

Os coeficientes $1, 3, 3, 1$ sugerem a resposta geral: para N bolas, a distribuição estacionária é binomial com parâmetros N e $1/2$,

$$\pi(x) = 2^{-N}\binom{N}{x}.$$

◁

Verificação da estacionária de Ehrenfest. Para verificar o balanço detalhado,

$$\begin{aligned}\pi(x)p(x,x+1) &= 2^{-N}\frac{N!}{x!(N-x)!}\cdot\frac{N-x}{N}\\ &= 2^{-N}\frac{N!}{(x+1)!(N-x-1)!}\cdot\frac{x+1}{N}\\ &= \pi(x+1)p(x+1,x).\end{aligned}$$

Há também uma prova probabilística. Escolha inicialmente, de forma independente e equiprovável, a urna de cada bola. Todas as 2^N configurações são igualmente prováveis. Trocar a urna de uma bola escolhida ao acaso apenas permuta essas configurações, de modo que a distribuição uniforme das configurações — e, portanto, a lei binomial de X_n — permanece inalterada.

■

Exemplo 3.12 — Passeio aleatório em um grafo.

Seja $G = (V, E)$ um grafo finito, simples e não orientado, sem vértices isolados. Sua matriz de adjacência é $A(u,v) = 1$ quando $\{u,v\} \in E$ e zero nos demais casos. O grau $d(u) = \sum_v A(u,v)$ conta os vizinhos de u e é positivo. Escolher uniformemente um vizinho define

$$p(u,v) = \frac{A(u,v)}{d(u)}.$$

Essa cadeia é reversível em relação à distribuição estacionária

$$\pi(u) = \frac{d(u)}{2|E|}.$$

◁

Um vértice com mais vizinhos recebe mais massa no equilíbrio. A verificação não exige conectividade; esta será necessária para que uma única trajetória possa explorar todo o grafo.

Demonstração. Como $A(u,v) = A(v,u)$, para qualquer constante $c > 0$ os pesos $cd(u)$ satisfazem

$$cd(u)p(u,v) = cA(u,v) = cA(v,u) = cd(v)p(v,u).$$

Cada aresta contribui duas unidades para a soma dos graus; logo $\sum_u d(u) = 2|E|$. Tomar $c = 1/(2|E|)$ normaliza os pesos e prova o balanço detalhado. ■

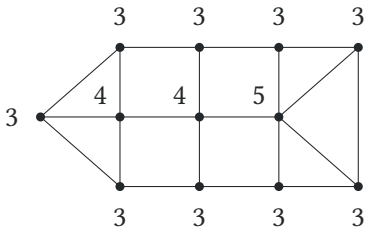


Figura 3.4: Os números indicam os graus dos vértices. Sua soma é 40, de modo que a massa estacionária de cada vértice é seu grau dividido por 40.

Exemplo 3.13 — O sapo retorna: onde passa mais tempo?.

Voltemos ao sapo nas quatro folhas do Exemplo 2.1. Os graus das folhas A, B, C, D são, respectivamente, 2, 2, 3, 1, e a soma é 8. Pelo balanço detalhado do passeio aleatório em grafo, uma distribuição estacionária é

$$\boxed{\pi(A) = \frac{1}{4}, \qquad \pi(B) = \frac{1}{4}, \qquad \pi(C) = \frac{3}{8}, \qquad \pi(D) = \frac{1}{8}.}$$

Por exemplo, o fluxo entre A e C se equilibra:

$$\pi(A)p(A,C) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} = \pi(C)p(C,A).$$

A folha C, ligada a três outras, recebe três vezes mais massa estacionária do que D, que tem uma única ligação. Na Figura 2.3, essa diferença pode ser lida nos graus dos vértices.

◁

Os resultados das próximas seções mostrarão que, se o grafo for conexo, a cadeia é irredutível, a estacionária é única e suas massas são também as frequências temporais a partir de qualquer vértice. A convergência das distribuições exigirá ainda aperiodicidade.

Exemplo 3.14 — Um cavalo passeando ao acaso no tabuleiro.

Um cavalo ocupa uma casa de um tabuleiro de xadrez 8×8. A cada passo, escolhe uniformemente uma das casas alcançáveis por um movimento legal. No centro do tabuleiro há oito opções; num canto há apenas duas.

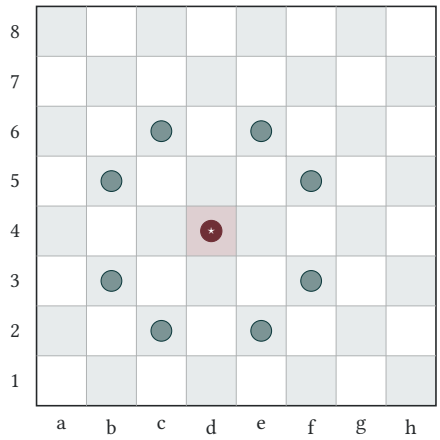


Figura 3.5: A casa inicial $d4$, destacada em vinho, tem oito vizinhas possíveis, assinaladas em petróleo. O cavalo escolhe cada uma com probabilidade $1/8$.

Vimos que, num passeio aleatório em um grafo não orientado, a distribuição estacionária é proporcional aos graus. Quantos movimentos legais orientados existem no tabuleiro? Há oito deslocamentos de cavalo possíveis, com sinais e ordens das componentes, e para cada deslocamento existem $7 \cdot 6$ casas iniciais permitidas. Assim, a soma dos graus das casas é $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Logo,

$$\pi(d4) = \frac{8}{336} = \frac{1}{42}, \qquad \pi(a1) = \frac{2}{336} = \frac{1}{168}.$$

Em equilíbrio, o cavalo ocupa $d4$ quatro vezes mais frequentemente do que $a1$. Cada movimento, porém, troca a cor da casa. Por isso a distribuição em um instante fixo não converge à estacionária quando partimos de uma casa determinada. Voltaremos a essa distinção ao estudar periodicidade na Seção 3.4.

◁

3.3.1 Cadeia reversa

Suponha que a cadeia comece em equilíbrio, isto é, $X_0 \sim \pi$. Se gravarmos sua trajetória e exibirmos o filme ao contrário, obteremos novamente uma cadeia de Markov. A fórmula seguinte identifica suas probabilidades de transição.

Teorema 3.3 — Cadeia reversa

Suponha que $X_0 \sim \pi$, onde π é estacionária, e fixe n. O processo

$$Y_m = X_{n-m}, \qquad 0 \le m \le n,$$

é uma cadeia de Markov no suporte $S_\pi = \{i \in S : \pi(i) > 0\}$, cujas transições, para $0 \le m < n$, são dadas pela matriz reversa

$$\hat{p}(i,j) = \frac{\pi(j)p(j,i)}{\pi(i)}, \qquad i, j \in S_\pi.$$

Demonstração. Primeiro, a cadeia em equilíbrio permanece no suporte S_π. De fato, se $j \notin S_\pi$, a estacionariedade implica

$$0 = \pi(j) = \sum_i \pi(i)p(i,j).$$

Como os termos são não negativos, $p(i,j) = 0$ para todo $i \in S_\pi$. Portanto, partindo do suporte, a cadeia não pode sair dele.

Fixe $0 \le m < n$ e escreva $t = n - m$. Uma história da cadeia reversa com $Y_m = i$, $Y_{m-1} = a_1, \dots, Y_0 = a_m$ corresponde, na cadeia original, a

$$X_t = i, \quad X_{t+1} = a_1, \ \dots, \ X_n = a_m.$$

A história considerada tem probabilidade positiva e, portanto, $\pi(i) > 0$. Denote por

$$c_i = \mathbb{P}_i(X_1 = a_1, \dots, X_m = a_m)$$

a probabilidade desse trecho futuro, com a convenção $c_i = 1$ quando $m = 0$. Pela propriedade de Markov, uma vez conhecido $X_t = i$, a probabilidade desse futuro é c_i, independentemente do estado ocupado em $t - 1$. Pela

estacionariedade, $\mathbb{P}(X_{t-1} = j, X_t = i) = \pi(j)p(j,i)$. Assim,

$$\mathbb{P}(X_{t-1} = j, X_t = i, X_{t+1} = a_1, \dots, X_n = a_m) = \pi(j)p(j,i)c_i,$$
$$\mathbb{P}(X_t = i, X_{t+1} = a_1, \dots, X_n = a_m) = \pi(i)c_i.$$

Dividindo a primeira probabilidade pela segunda, o fator correspondente ao futuro se cancela:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{m+1} = j \mid Y_m = i, Y_{m-1} = a_1, \dots, Y_0 = a_m) \\ = \frac{\pi(j)p(j,i)c_i}{\pi(i)c_i} = \frac{\pi(j)p(j,i)}{\pi(i)}.\end{aligned}$$

O resultado depende apenas de i e j, não dos demais estados observados nem do instante m. Isso prova a propriedade de Markov e a homogeneidade da cadeia reversa.

Por fim, a fórmula define uma matriz de transição em S_π, pois, para $i \in S_\pi$,

$$\sum_{j \in S_\pi} \hat{p}(i,j) = \frac{1}{\pi(i)} \sum_{j \in S_\pi} \pi(j)p(j,i) = \frac{\pi(i)}{\pi(i)} = 1.$$

Os termos com $j \notin S_\pi$ têm peso zero. Se quisermos estender $\widehat{P}$ a todo S, basta completar as linhas fora do suporte com distribuições de probabilidade arbitrárias; elas não afetam a cadeia em equilíbrio. ■

Se π satisfaz o balanço detalhado, então, para $i, j \in S_\pi$,

$$\hat{p}(i,j) = \frac{\pi(j)p(j,i)}{\pi(i)} = p(i,j).$$

Nesse caso, um filme da cadeia em equilíbrio tem a mesma lei quando exibido de trás para a frente. Essa é a razão para o nome *reversível*.

Exemplo 3.15 — Um ciclo visto ao contrário.

Nos estados $1, 2, 3$, seja C o ciclo orientado $1 \to 2 \to 3 \to 1$ e tome $P = 0{,}2I + 0{,}8C$. Então

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

As colunas somam um, logo $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$ é estacionária. A fórmula da cadeia reversa dá $\widehat{P} = P^{\mathsf{T}}$:

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

O filme invertido percorre o ciclo no sentido oposto. Como $p(1,2) = 0{,}8$ e $p(2,1) = 0$, não há balanço detalhado com a estacionária uniforme: equilíbrio não implica reversibilidade.

◁

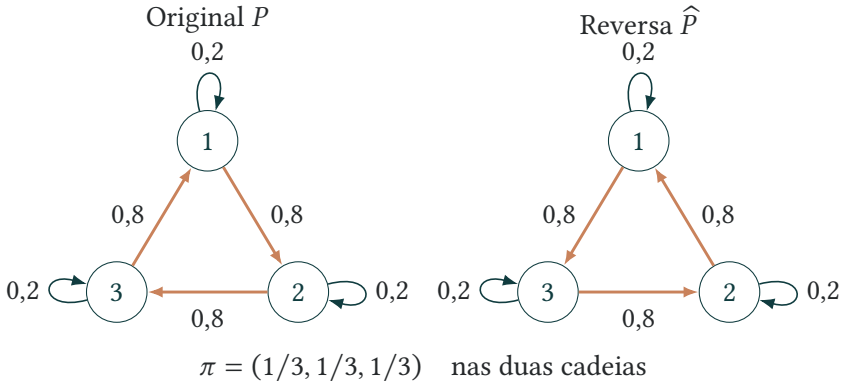


Figura 3.6: A cadeia original e sua reversa têm a mesma distribuição estacionária, mas percorrem o ciclo em sentidos opostos. Na original, $\pi(1)p(1,2) = 4/15$ e $\pi(2)p(2,1) = 0$: a preservação das massas não exige balanço detalhado em cada par de estados.

3.4 Comportamento limite

A existência de uma distribuição estacionária não assegura que a lei da cadeia convirja para ela. A recorrência e a periodicidade permitem distinguir as situações em que essa aproximação ocorre.

Se y é transiente, os Lemas 2.14 e 2.15 dão $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y) < \infty$ para qualquer estado inicial x e, consequentemente,

$$P^n(x,y) \longrightarrow 0.$$

Assim, a probabilidade de cada estado transiente fixado tende a zero. Em um espaço infinito, isso não impede que toda a massa permaneça no conjunto dos estados transientes, deslocando-se para estados cada vez mais distantes. Para entender a convergência, concentramos a atenção em classes irredutíveis recorrentes. A periodicidade, definida no capítulo anterior, ainda pode impedir que a lei convirja.

Esse comportamento já apareceu no Exemplo 3.2.

Há duas formas de observar o longo prazo: a distribuição em um instante distante e a média calculada ao longo de uma única trajetória.

Convergência da lei e média temporal

Em uma cadeia irredutível com estacionária π, a aperiodicidade garante $P^n(x, y) \to \pi(y)$. As médias temporais podem convergir mesmo com periodicidade: a cadeia pode passar uma fração bem definida do tempo em cada estado.

3.4.1 Frequências e tempo médio de retorno

As médias ao longo de uma trajetória dispensam a aperiodicidade. Cada retorno ao mesmo estado encerra uma excursão e permite recomeçar com a mesma lei.

Teorema 3.4 — Frequência assintótica

Suponha que a cadeia em um espaço finito ou enumerável seja irredutível e recorrente. Para

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_m = y\}},$$

vale, sob $\mathbb{P}_x$ para todo estado inicial x,

$$\frac{N_n(y)}{n} \longrightarrow \frac{1}{E_y T_y^+} \quad \text{quase certamente,}$$

com a convenção $1/\infty = 0$.

O inverso do intervalo médio entre visitas é a frequência de visitas. Se o intervalo tem média infinita, a cadeia ainda retorna infinitas vezes, mas os retornos ocupam uma fração assintótica nula do tempo.

Demonstração. Pela irredutibilidade e recorrência, $H_y < \infty$ quase certamente, qualquer que seja o estado inicial. Ponha $R_0 = H_y$ e seja R_k o instante do k-ésimo retorno depois de R_0. Pela propriedade forte de Markov, os intervalos $L_k = R_k - R_{k-1}$, $k \geq 1$, são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), com a lei de T_y^+ sob $\mathbb{P}_y$.

Se $a = E_y T_y^+ < \infty$, a lei forte dos grandes números dá $R_k/k \to a$. Para $n \geq H_y$, denote por $k(n)$ o maior inteiro $k \geq 0$ tal que $R_k \leq n$. Pela recorrência, $k(n) \to \infty$ quase certamente. Para $k(n) \geq 1$,

$$\frac{R_{k(n)}}{k(n)} \leq \frac{n}{k(n)} < \frac{R_{k(n)+1}}{k(n)+1}\,\frac{k(n)+1}{k(n)}.$$

A lei forte vale também ao longo da subsequência $k(n)$. Os dois extremos convergem a a, logo $n/k(n) \to a$ e $k(n)/n \to 1/a$. A contagem $N_n(y)$ difere de $k(n)$ em no máximo uma visita, o que não altera o limite.

Se $E_y T_y^+ = \infty$, aplicamos a lei forte às variáveis limitadas $L_k \wedge b$. Para cada inteiro $b \geq 1$,

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{R_k}{k} \geq E_y(T_y^+ \wedge b) \quad \text{quase certamente.}$$

Podemos tomar essas desigualdades simultaneamente para todos os inteiros $b \geq 1$: a união enumerável dos eventos excepcionais ainda tem probabilidade zero. Pela fórmula da cauda do Lema 2.13,

$$E_y(T_y^+ \wedge b) = \sum_{j=1}^{b} \mathbb{P}_y(T_y^+ \geq j), \qquad E_y T_y^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_y(T_y^+ \geq j) = \infty.$$

As esperanças truncadas são, portanto, as somas parciais de uma série divergente de termos não negativos. Dado qualquer número M, podemos escolher b com $E_y(T_y^+ \wedge b) > M$; a desigualdade anterior dá $\liminf_k R_k/k > M$. Como M é arbitrário, $R_k/k \to \infty$. Usando o mesmo $k(n)$, temos $n/k(n) \geq R_{k(n)}/k(n) \to \infty$; portanto $N_n(y)/n \to 0$ também nesse caso. ∎

Definição 3.4 — Recorrência positiva e recorrência nula

Um estado recorrente y é *recorrente positivo* se $E_y T_y^+ < \infty$ e *recorrente nulo* se $E_y T_y^+ = \infty$.

A estimativa seguinte permite passar às esperanças para variáveis limitadas, relacionando as frequências observadas nas trajetórias às probabilidades.

Lema 3.5 — Esperanças de variáveis entre zero e um

Se $0 \le Z_n \le 1$ e $Z_n \to c$ quase certamente, onde $c \in [0,1]$ é uma constante, então $EZ_n \to c$.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e defina

$$A_N = \bigcup_{n \ge N} \{|Z_n - c| > \varepsilon\}.$$

Os eventos A_N decrescem com N. Como $Z_n \to c$ quase certamente, a probabilidade de sua interseção é zero: fora do evento excepcional, somente um número finito dos desvios pode superar ε. Pela continuidade das probabilidades para eventos decrescentes, $\mathbb{P}(A_N) \to 0$. Essa propriedade decorre da aditividade enumerável, como recordado na Proposição 2.9.

Para $n \ge N$, temos $|Z_n - c| \le \varepsilon$ fora de A_N e $|Z_n - c| \le 1$ em A_N. Logo,

$$|EZ_n - c| \le E|Z_n - c| \le \varepsilon + \mathbb{P}(A_N).$$

Primeiro escolhemos N para tornar pequena a última probabilidade; depois usamos que ε pode ser arbitrariamente pequeno. Isso prova a afirmação. ∎

Como exemplo, considere a cadeia de Ehrenfest. O espaço é finito e a cadeia é irredutível; o Lema 2.10 limita a esperança do retorno por uma série geométrica. Seus estados são, portanto, recorrentes positivos.

Teorema 3.6 — Tempo médio de retorno

Se uma cadeia irredutível em espaço finito ou enumerável possui distribuição estacionária π, então todos os estados são recorrentes positivos e

$$\pi(y) = \frac{1}{E_y T_y^+} > 0.$$

Em particular, a distribuição estacionária é única.

Um estado com maior massa estacionária reaparece mais cedo, em média. A finitude do espaço garante a existência de alguma estacionária; em um espaço enumerável, essa existência é uma hipótese adicional, que exclui tanto transiência quanto recorrência nula numa cadeia irredutível.

Demonstração. Primeiro, $\pi(y) > 0$ para todo y. De fato, escolha z com $\pi(z) > 0$ e um caminho de z a y em r passos. Então $\pi(y) = (\pi P^r)(y) \geq \pi(z)P^r(z, y) > 0$.

Pelo Lema 2.17, recorrência ou transiência é propriedade da classe. Se a classe fosse transiente, teríamos $P^n(x, y) \to 0$ para todo x. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha um conjunto finito $F \subseteq S$ com $\sum_{x \notin F} \pi(x) < \varepsilon$. Pela estacionariedade e por $P^n(x, y) \leq 1$,

$$\pi(y) = \sum_x \pi(x)P^n(x, y) \leq \sum_{x \in F} \pi(x)P^n(x, y) + \varepsilon.$$

A soma à direita é finita e tende a zero. Portanto $\pi(y) \leq \varepsilon$; como ε é arbitrário, teríamos $\pi(y) = 0$, uma contradição. Logo a cadeia é recorrente.

Comece agora com $X_0 \sim \pi$. A estacionariedade dá $E_\pi[N_n(y)/n] = \pi(y)$. O teorema de frequência vale para todo estado inicial e, portanto, também para essa mistura de leis: se $\mathscr{A}$ é o evento de convergência, a probabilidade total dá $\mathbb{P}_\pi(\mathscr{A}) = \sum_x \pi(x)\mathbb{P}_x(\mathscr{A}) = 1$. Como $0 \leq N_n(y)/n \leq 1$, o Lema 3.5 fornece

$$\pi(y) = \frac{1}{E_y T_y^+}.$$

O lado esquerdo é positivo, logo a esperança é finita. A fórmula determina cada coordenada de qualquer distribuição estacionária, provando a unicidade. ∎

No passeio do cavalo do Exemplo 3.14, já calculamos $\pi(d4) = 1/42$ e $\pi(a1) = 1/168$. Portanto,

$$E_{d4}T_{d4}^{+} = 42, \qquad E_{a1}T_{a1}^{+} = 168.$$

A casa central é visitada, em média, quatro vezes mais frequentemente que o canto. A periodicidade desse passeio não altera a fórmula do tempo médio de retorno.

Para o sapo do Exemplo 3.13,

$$E_C T_C^{+} = \frac{1}{3/8} = \frac{8}{3}, \qquad E_D T_D^{+} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

A folha D tem um tempo médio de retorno três vezes maior que C. Para a fila do Exemplo 3.10, a probabilidade estacionária de estar vazia é $\pi(0) = 1/3$; logo, o tempo médio entre visitas sucessivas à fila vazia é $E_0 T_0^{+} = 3$ instantes.

Reciprocamente, um tempo médio de retorno finito permite construir uma distribuição estacionária a partir das visitas de uma excursão completa. As mesmas contagens serão usadas no estudo das recompensas.

Proposição 3.7 — Pesos de ocupação de uma excursão

Considere uma cadeia em espaço finito ou enumerável e um estado a para o qual $L = T_a^{+}$ satisfaz $\ell = E_a L < \infty$. Defina

$$\nu(y) = E_a \sum_{m=0}^{L-1} \mathbf{1}_{\{X_m = y\}}.$$

Então $\sum_y \nu(y) = \ell$, $\nu P = \nu$ e ν/ℓ é uma distribuição estacionária.

Demonstração. Como $E_a L < \infty$, o retorno ocorre em tempo finito quase certamente. Cada excursão é uma sequência finita

$$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_r), \qquad \gamma_0 = \gamma_r = a, \qquad \gamma_m \neq a \quad (1 \le m < r),$$

com comprimento $r = r(\gamma) \ge 1$. O conjunto Γ dessas sequências é enumerável, pois S é finito ou enumerável. A probabilidade da excursão γ é

$$q_\gamma = \prod_{m=0}^{r-1} p(\gamma_m, \gamma_{m+1}), \qquad \sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma = 1.$$

Se $n_y(\gamma) = \sum_{m=0}^{r-1} \mathbf{1}_{\{\gamma_m = y\}}$, a definição de esperança para essa distribuição enumerável dá

$$\nu(y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma n_y(\gamma).$$

Em cada excursão, $\sum_y n_y(\gamma) = r$. Reagrupando séries de termos não negativos, como explicado no capítulo anterior,

$$\sum_y \nu(y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma \sum_y n_y(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma r = E_a L = \ell.$$

Também podemos reagrupar as visitas segundo o instante em que ocorrem, obtendo $\nu(x) = \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}_a(L > m, X_m = x)$. O evento $\{L > m\}$ é determinado pela trajetória até m. Assim, a propriedade de Markov, aplicada em cada instante fixo, fornece

$$\begin{aligned} \sum_x \nu(x) p(x,y) &= \sum_{m \geq 0} \sum_x \mathbb{P}_a(L > m, X_m = x) p(x,y) \\ &= \sum_{m \geq 0} \mathbb{P}_a(L > m, X_{m+1} = y) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} q_\gamma \sum_{m=0}^{r-1} \mathbf{1}_{\{\gamma_{m+1} = y\}}. \end{aligned}$$

Todas as parcelas são não negativas; os reagrupamentos são os mesmos de séries numéricas usados acima. Em cada excursão finita, trocar a visita inicial pela final não muda a contagem, pois $\gamma_0 = \gamma_r = a$. A última expressão é, portanto, $\nu(y)$. Concluímos que $\nu P = \nu$. Como $1 \leq \ell < \infty$, dividir por ℓ normaliza os pesos e produz uma distribuição estacionária. ∎

Teorema 3.8 — Recorrência positiva e existência de estacionária

Uma cadeia irredutível em espaço finito ou enumerável possui distribuição estacionária se e somente se algum de seus estados é recorrente positivo. Nesse caso, todos os estados são recorrentes positivos e a distribuição estacionária é única.

Demonstração. Se existe uma distribuição estacionária, o Teorema 3.6 dá recorrência positiva de todos os estados e unicidade. Reciprocamente, se a é recorrente positivo, a Proposição 3.7 constrói uma estacionária a partir de suas excursões. Aplicando novamente o teorema do tempo médio de retorno, obtemos as demais afirmações. ∎

3.4.2 Convergência das distribuições

A convergência das distribuições exige eliminar as oscilações periódicas. O próximo lema mostra como a aperiodicidade permite comparar trajetórias em um mesmo instante.

Lema 3.9 — Caminhos com todos os comprimentos suficientemente grandes

Em uma cadeia irredutível e aperiódica, para cada par x, y existe $n_0(x, y)$ tal que $P^n(x, y) > 0$ para todo $n \geq n_0(x, y)$.

Podemos inserir voltas num caminho de x a y. Quando os comprimentos das voltas não compartilham um divisor maior que um, essas inserções acabam preenchendo todos os tempos grandes.

Demonstração. Fixe um estado a. Podemos escolher tempos possíveis de retorno $r_1, \ldots, r_j$ cujo máximo divisor comum seja 1. Concatenar caminhos de retorno mostra que toda soma positiva desses números com coeficientes inteiros não negativos também é um tempo possível de retorno.

Como o máximo divisor comum é 1, a identidade de Bézout permite escrever cada resíduo módulo r_1 como uma combinação inteira de $r_1, \ldots, r_j$. Podemos tornar não negativos os coeficientes de $r_2, \ldots, r_j$ somando a eles múltiplos suficientemente grandes de r_1; isso não muda o resíduo da combinação. O termo que multiplica r_1 pode ser omitido. Assim, para cada resíduo b, existe uma soma não negativa s_b dos tempos de retorno que tem esse resíduo.

Seja M o maior desses representantes. Todo inteiro $n > M$ tem a forma $s_b + q r_1$, com $q \geq 0$, e portanto é um tempo possível de retorno a a. Finalmente, concatene um caminho de x a a, uma dessas voltas e um caminho de a a y. Isso fornece a afirmação. ∎

Teorema 3.10 — Teorema da convergência

Suponha que uma cadeia em espaço finito ou enumerável seja irredutível e aperiódica e possua distribuição estacionária π. Então, para todos os estados x, y,

$$P^n(x, y) \longrightarrow \pi(y).$$

A irredutibilidade permite que duas trajetórias se encontrem; a aperiodicidade permite que o encontro ocorra no mesmo relógio. A existência de uma probabilidade estacionária impede que a massa escape para regiões cada vez mais distantes. A demonstração usa um *acoplamento*: uma construção conjunta de duas cadeias no mesmo espaço de probabilidade que preserva a lei de cada uma separadamente. Construiremos uma cópia iniciada em x e outra em equilíbrio; depois que elas se encontrarem, passarão a evoluir juntas.

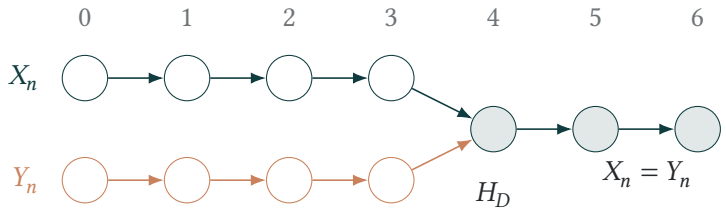


Figura 3.7: Duas cadeias evoluem separadamente até o primeiro encontro H_D. Daí em diante, usam as mesmas transições e permanecem juntas. Os círculos representam estados em cada instante, sem especificar seus valores.

Demonstração. Comece com duas cadeias independentes de matriz P. A cadeia dos pares tem transição

$$Q\big((u, v), (u', v')\big) = p(u, u')p(v, v').$$

A aperiodicidade permite escolher um mesmo instante para as duas coordenadas. Pelo lema anterior, dados (u, v) e (u', v'), existem n_1 e n_2 tais que

$$P^n(u, u') > 0 \quad (n \geq n_1), \qquad P^n(v, v') > 0 \quad (n \geq n_2).$$

Escolhendo o mesmo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ para as duas coordenadas,

$$Q^n\big((u,v),(u',v')\big) = P^n(u,u')P^n(v,v') > 0.$$

Portanto, a cadeia dos pares é irredutível. Além disso, se as duas coordenadas começam independentemente com lei π e usam transições independentes, ambas permanecem independentes e com lei π. Assim, a distribuição produto, definida por $(\pi \otimes \pi)(u,v) = \pi(u)\pi(v)$, é estacionária para Q. Pelo teorema do tempo médio de retorno, uma cadeia irredutível que possui essa probabilidade estacionária é recorrente positiva. Em particular, partindo de qualquer par, ela atinge qualquer par fixado, por exemplo (a,a), quase certamente.

Agora tome $X_0 = x$ e $Y_0 \sim \pi$. Seja $D = \{(z,z) : z \in S\}$ a diagonal e $H_D = \inf\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$ o primeiro encontro. Antes do encontro, as coordenadas evoluem independentemente; a partir dele, usam a mesma transição sorteada.

Essa mudança altera apenas a dependência entre as coordenadas. Antes ou depois do encontro, dado o estado atual z de uma coordenada, o seu próximo estado continua sendo sorteado segundo $p(z,\cdot)$. Assim, cada coordenada conserva sua lei de cadeia de Markov com matriz P: X começa em x e Y permanece em equilíbrio. Até o encontro, a lei é a da cadeia dos pares; como ela chega a (a,a) em tempo finito, $H_D < \infty$ quase certamente.

Se $X_n \neq Y_n$, o encontro ainda não ocorreu. Para qualquer conjunto $A \subseteq S$,

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_x(X_n \in A) - \pi(A)| &= |E(\mathbf{1}_{\{X_n \in A\}} - \mathbf{1}_{\{Y_n \in A\}})| \\ &\leq \mathbb{P}(X_n \neq Y_n) \leq \mathbb{P}(H_D > n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade usamos que $|\mathbf{1}_{\{X_n \in A\}} - \mathbf{1}_{\{Y_n \in A\}}| \leq \mathbf{1}_{\{X_n \neq Y_n\}}$. O último limite usa apenas a continuidade das probabilidades: os eventos $\{H_D > n\}$ decrescem para $\{H_D = \infty\}$, cuja probabilidade é zero. Como a cota vale para todo conjunto A,

$$\sup_{A \subseteq S} \big|\mathbb{P}_x(X_n \in A) - \pi(A)\big| \leq \mathbb{P}(H_D > n) \longrightarrow 0.$$

Essa é precisamente a cota de variação total que será formalizada adiante. Escolhendo $A = \{y\}$, obtemos o enunciado. ∎

Retomemos também a cadeia redutível dos Exemplos 2.23 e 3.3. Começando no estado 1, a cadeia sai dele quase certamente, pois a chance de

permanecer ali por n passos é $(1/4)^n$. A probabilidade de entrar primeiro em 0 é $1/3$; a de entrar na classe $\{2,3\}$ é $2/3$. A classe $\{2,3\}$ é irredutível e aperiódica, e sua lei converge para $(2/5, 3/5)$. Aplicando o teorema depois da entrada nessa classe, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P^n(1,\cdot) &= \frac{1}{3}(1,0,0,0) + \frac{2}{3}(0,0,2/5,3/5)\\ &= \boxed{(1/3,\ 0,\ 4/15,\ 2/5)}.\end{aligned}$$

Esta é uma das distribuições estacionárias calculadas anteriormente, com $t = 1/3$. Em uma cadeia redutível, a distribuição limite pode depender do estado inicial: a dinâmica determina quanta massa alcança cada classe fechada.

Exemplo 3.16 — Três modelos revisitados: o que acontece após muitas etapas?.

O sapo. O grafo das folhas é conexo, logo a cadeia é irredutível. Há um retorno possível a A em dois saltos, $A \to B \to A$, e outro em três, $A \to B \to C \to A$. Como $\gcd(2,3) = 1$, a cadeia é aperiódica. Pelo teorema da convergência e pelo Exemplo 3.13,

$$\lim_{n\to\infty} P^n(A,C) = \frac{3}{8}, \qquad \lim_{n\to\infty} P^n(A,D) = \frac{1}{8}.$$

A mobilidade social. Na matriz do Exemplo 2.5, todas as entradas são positivas. Portanto, qualquer classe alcança qualquer outra em um passo e há permanências positivas: a cadeia é irredutível e aperiódica. Sua distribuição de uma geração distante converge para a estacionária que calculamos:

$$P^n(2,\cdot) \longrightarrow \left(\frac{22}{47}, \frac{16}{47}, \frac{9}{47}\right).$$

A ruína do jogador. No jogo do Exemplo 2.2, com $p = 2/5$, barreiras 0 e 5 e fortuna inicial 2, os estados interiores são transientes e a cadeia é absorvida em uma das barreiras. A fórmula de ruína finita fornece

$$\mathbb{P}_2(H_5 < H_0) = \frac{1-(3/2)^2}{1-(3/2)^5} = \frac{40}{211}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} P^n(2,0) = \frac{171}{211}, \qquad \lim_{n\to\infty} P^n(2,5) = \frac{40}{211}.$$

A distribuição limite é uma mistura das massas absorventes, que depende da fortuna inicial. Os três exemplos mostram duas situações distintas: numa cadeia finita irredutível e aperiódica a lei converge para uma distribuição única; numa cadeia redutível com absorção, o limite registra qual classe fechada foi atingida.

◁

3.4.3 Recompensas ao longo de uma trajetória

Contar visitas corresponde a atribuir recompensa um em um estado e zero nos demais. Custos e observações gerais exigem mais cuidado: num espaço infinito, não basta somar limites de frequências sem controlar a contribuição dos estados raros.

Teorema 3.11 — Teorema ergódico

Suponha que uma cadeia em espaço finito ou enumerável seja irredutível e possua distribuição estacionária π. Se $f : S \to \mathbb{R}$ satisfaz $\sum_x |f(x)|\pi(x) < \infty$, então, sob qualquer estado inicial,

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(X_m) \longrightarrow \sum_x f(x)\pi(x) \quad \text{quase certamente.}$$

Aperiodicidade não é necessária: médias temporais incorporam ciclos completos. A condição de integrabilidade garante que a recompensa média de uma excursão seja finita. No caso finito, toda função real satisfaz essa condição; no enumerável, ela controla a contribuição dos estados raros à soma.

Demonstração. Fixe um estado a e ponha $L = T_a^+$ para uma cadeia iniciada em a. Pelo teorema do retorno, $\ell = E_a L < \infty$.

1. Contagens de ocupação de uma excursão. Retome os pesos

$$\nu(y) = E_a \sum_{m=0}^{L-1} \mathbf{1}_{\{X_m = y\}}.$$

A Proposição 3.7 já mostrou que ν/ℓ é estacionária. Pela unicidade da distri-

buição estacionária, concluímos que

$$\nu(y) = \ell\pi(y).$$

Essa identidade relaciona a ocupação de um ciclo à média em equilíbrio.

2. Recompensa por ciclo e lei forte. Seja $B = \sum_{m=0}^{L-1} f(X_m)$ a recompensa da excursão e $C = \sum_{m=0}^{L-1} |f(X_m)|$ sua recompensa absoluta. Ambas são finitas em cada excursão, pois $L < \infty$ e f assume valores reais. Para calcular suas esperanças, use o conjunto enumerável Γ de excursões, suas probabilidades q_γ e as contagens $n_y(\gamma)$ da Proposição 3.7. Reagrupando uma série numérica de termos não negativos,

$$\begin{aligned} E_a C &= \sum_{\gamma\in\Gamma} q_\gamma \sum_y |f(y)| n_y(\gamma) \\ &= \sum_y |f(y)| \sum_{\gamma\in\Gamma} q_\gamma n_y(\gamma) \\ &= \sum_y |f(y)|\nu(y) = \ell \sum_y |f(y)|\pi(y) < \infty. \end{aligned}$$

Como $|B| \le C$, a recompensa B tem esperança absoluta finita. O mesmo cálculo com $f(y)$ no lugar de $|f(y)|$ agora é permitido pela convergência absoluta da série e dá

$$E_a B = \sum_y f(y)\nu(y) = \ell \sum_y f(y)\pi(y).$$

Nos ciclos sucessivos, os pares comprimento–recompensa são i.i.d., pela propriedade forte de Markov. Se L_k e B_k correspondem ao k-ésimo ciclo, a lei forte fornece

$$\frac{B_1 + \cdots + B_k}{L_1 + \cdots + L_k} = \frac{k^{-1}\sum_{j=1}^k B_j}{k^{-1}\sum_{j=1}^k L_j} \longrightarrow \frac{E_a B}{\ell} = \sum_y f(y)\pi(y).$$

Assim, a recompensa acumulada nos ciclos completos, dividida pelo tempo desses ciclos, converge para a média estacionária.

3. O ciclo incompleto. Resta controlar o pedaço da trajetória que pertence ao último ciclo, ainda não encerrado. Se C_k é a recompensa absoluta do k-ésimo ciclo, a integrabilidade implica, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{k\ge 1} \mathbb{P}(C_k > \varepsilon k) < \infty.$$

De fato, os C_k têm a mesma lei que C. Considere a variável inteira não negativa

$$Z_\varepsilon = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{C>\varepsilon k\}} \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Pela fórmula da cauda (Lema 2.13),

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(C_k > \varepsilon k) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(C > \varepsilon k) = EZ_\varepsilon \leq \frac{E_a C}{\varepsilon} < \infty.$$

Não precisamos enumerar novamente as excursões: cada termo conta apenas quantos limiares εk ficam abaixo de C. Pelo primeiro lema de Borel–Cantelli, quando a soma das probabilidades é finita, apenas um número finito desses eventos ocorre, quase certamente. Aplicando isso a $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ e reunindo os eventos excepcionais, obtemos $C_k/k \to 0$ quase certamente.

Seja $K(n)$ o número de ciclos completos até n. Pela inversão das contagens usada no Teorema 3.4, $K(n)/n \to 1/\ell$. A recompensa ainda não contabilizada está contida no ciclo seguinte e seu módulo é limitado por $C_{K(n)+1}$. Além disso,

$$\frac{C_{K(n)+1}}{n} = \frac{C_{K(n)+1}}{K(n)+1}\,\frac{K(n)+1}{n} \longrightarrow 0.$$

O tempo dos ciclos completos, dividido por n, também tende a um, pois

$$\frac{L_1 + \cdots + L_{K(n)}}{n} = \frac{L_1 + \cdots + L_{K(n)}}{K(n)}\,\frac{K(n)}{n} \longrightarrow \ell\,\frac{1}{\ell} = 1.$$

Combinando essa razão com o limite das recompensas dos ciclos completos e a estimativa do resto, provamos o limite para a média até um instante arbitrário.

Partindo de $x \neq a$, a primeira chegada a a ocorre em tempo finito quase certamente. A soma anterior a essa chegada é uma soma finita de valores reais e, dividida por n, desaparece; não precisamos que o tempo dessa primeira chegada tenha esperança finita. Mudar a soma de $m = 0, \ldots, n-1$ para $m = 1, \ldots, n$ tampouco altera o limite: $f(X_0)/n \to 0$, e o termo $|f(X_n)|/n$ é limitado pela recompensa absoluta, dividida por n, do ciclo que contém o instante n. A estimativa anterior mostra que ele também tende a zero. ∎

Exemplo 3.17 — A loja revisitada: lucro médio observado.

Na loja do Exemplo 3.5, a distribuição estacionária foi calculada como

$$\pi = \left(\frac{1}{10}, \frac{7}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{20}\right).$$

Resta relacionar o lucro esperado em equilíbrio à média observada em uma *trajetória longa*. Seja D_{n+1} a demanda do dia seguinte e defina o número de unidades encomendadas quando o estoque atual é i por

$$r(i) = (3 - i)\mathbf{1}_{\{i \le 1\}}.$$

O lucro líquido durante o dia $n+1$ é $L_{n+1} = 5D_{n+1} - 2r(X_n) - X_{n+1}$: receita menos compra de reposição e custo de armazenamento do estoque restante. Pelo teorema ergódico,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(X_k) \longrightarrow \sum_{i} r(i)\pi(i) = 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{7}{20} = 1 \quad \text{quase certamente,}$$

e a média temporal do estoque converge para

$$\sum_{i} i\pi(i) = \frac{8}{5}.$$

Além disso, as demandas diárias são independentes e têm média $E(D_n) = 1$; pela lei forte dos grandes números, $n^{-1}\sum_{k=1}^{n} D_k \to 1$ quase certamente. Combinando essas três médias,

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L_k \longrightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5} \quad \text{quase certamente.}}$$

A conta anterior de lucro estacionário prevê, portanto, a média efetivamente observada ao longo de uma única operação suficientemente longa.

◁

Teorema 3.12 — Convergência de Cesàro

Se a cadeia é irredutível e possui distribuição estacionária π, então

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^m(x,y) \longrightarrow \pi(y)$$

para quaisquer x, y, mesmo sem aperiodicidade.

Essa média equivale a observar a cadeia em um instante escolhido uniformemente entre 1 e n, independentemente da trajetória. Ela suaviza as oscilações periódicas, sem assegurar a convergência da lei em cada instante.

Demonstração. Pelo teorema ergódico aplicado a $f = \mathbf{1}_{\{y\}}$, temos $N_n(y)/n \to \pi(y)$ quase certamente sob $\mathbb{P}_x$. Como essa razão está entre zero e um, o Lema 3.5 garante que suas esperanças convergem para $\pi(y)$. A esperança é exatamente $n^{-1}\sum_{m=1}^{n} P^m(x,y)$. ∎

Exemplo 3.18 — Ehrenfest: cinco leituras do equilíbrio.

Para $N \geq 1$, Ehrenfest tem distribuição estacionária $\pi(j) = 2^{-N}\binom{N}{j}$ e período dois. Partindo de zero, X_n tem a mesma paridade de n; logo a lei alterna entre estados pares e ímpares e não converge para π.

Na versão preguiçosa, $\widetilde{P} = (I+P)/2$: com probabilidade $1/2$, nada muda; caso contrário, uma bola troca de urna. A mesma π é estacionária, e a permanência positiva torna a cadeia aperiódica. Assim, $\widetilde{P}^n(x,j) \to \pi(j)$.

Nas duas versões, as frequências temporais e as médias de Cesàro convergem para $\pi(j)$. O tempo médio de primeiro retorno também tem a mesma fórmula nas duas cadeias:

$$E_j T_j^{+} = \frac{2^N}{\binom{N}{j}}.$$

Na versão preguiçosa, permanecer em j no primeiro passo já conta como retorno; por isso não devemos simplesmente duplicar essa esperança. Com $N = 4$, os tempos médios de retorno a 0 e 2 são respectivamente 16 e $8/3$ passos. A média temporal de X_n converge para $N/2$ em ambas as versões, embora a lei de Ehrenfest usual continue oscilando.

◁

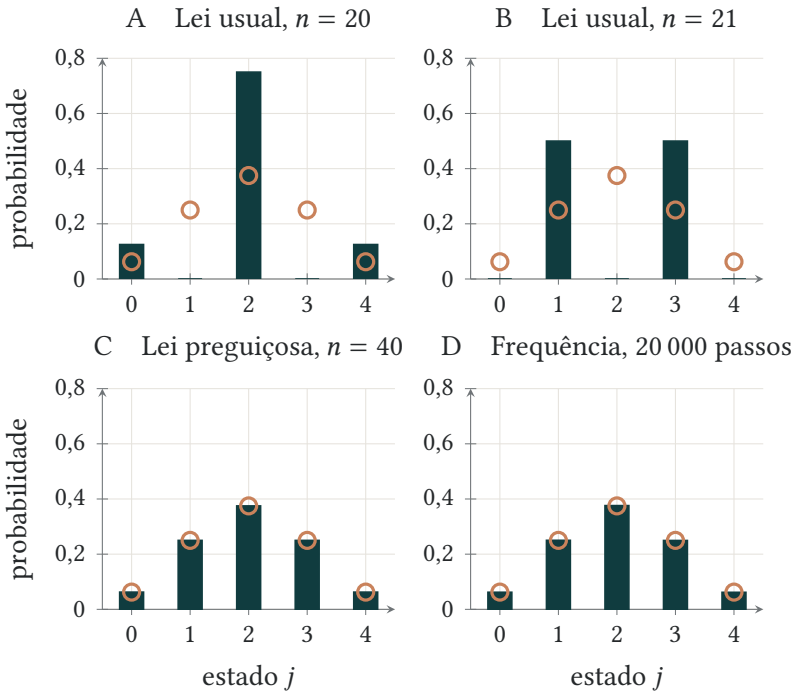


Figura 3.8: Na cadeia de Ehrenfest usual, a lei alterna entre estados pares e ímpares. A versão preguiçosa elimina essa alternância e sua lei converge para π. Mesmo na cadeia usual, as frequências de uma trajetória longa se aproximam da distribuição estacionária. Nos quatro painéis, $N = 4$ e $X_0 = 0$. A–C mostram leis calculadas; D mostra uma realização da cadeia usual.

3.5 Velocidade de convergência e espectro

Saber que uma cadeia converge não diz quanto devemos esperar. Duas dinâmicas podem ter a mesma distribuição estacionária e conservar a influência do estado inicial por tempos muito diferentes. Precisamos de uma distância entre distribuições e, depois, de uma forma de acompanhar sua redução.

Definição 3.5 — Distância de variação total

Para distribuições μ, ν em um espaço finito ou enumerável S, defina

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |\mu(x) - \nu(x)|.$$

O fator $1/2$ evita contar duas vezes a massa que precisa ser redistribuída. Se $A_+ = \{x : \mu(x) \geq \nu(x)\}$, a soma das diferenças positivas coincide com o módulo da soma das negativas. Portanto,

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{A \subseteq S} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Assim, a distância é o maior erro na probabilidade de um mesmo evento. Aplicar uma transição comum não aumenta esse erro: a desigualdade triangular e $\sum_y p(x,y) = 1$ dão

$$\|\mu P - \nu P\|_{\mathrm{TV}} \leq \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}}.$$

Exemplo 3.19 — Dois estados: uma taxa exata.

Considere $P = \left(\begin{smallmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{smallmatrix}\right)$, com $0 < a, b < 1$, nos estados $0, 1$. Já sabemos que $\pi = (b/(a+b), a/(a+b))$. Para $u_n = P^n(0,0)$,

$$u_{n+1} = b + (1 - a - b)u_n, \qquad u_n - \pi(0) = (1 - a - b)^n (1 - \pi(0)).$$

As diferenças nas duas coordenadas têm sinais opostos; logo

$$\|P^n(0,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} = \frac{a}{a+b} |1 - a - b|^n.$$

Com $a = 0{,}2$ e $b = 0{,}3$, a distância é $0{,}4(0{,}5)^n$, igual a $0{,}05$ em três passos. Com $a = 0{,}02$ e $b = 0{,}03$, a estacionária é a mesma, mas o fator de redução é $0{,}95$: a mistura é mais lenta. Os autovalores são 1 e $1 - a - b$.

◁

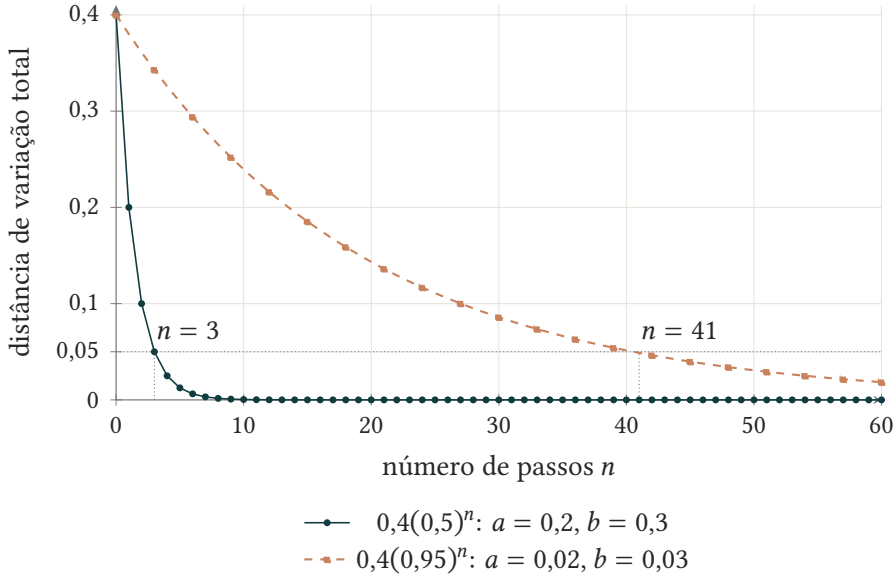


Figura 3.9: Duas cadeias de dois estados têm a mesma distribuição estacionária, $\pi = (0{,}6, 0{,}4)$, mas se aproximam dela em ritmos diferentes. Partindo de 0, a distância fica menor ou igual a 0,05 pela primeira vez em 3 e 41 passos, respectivamente. Os valores são definidos em tempos inteiros.

Em cadeias reversíveis, a álgebra linear torna esse mecanismo geral. Aqui restringimos a discussão a um espaço finito com pelo menos dois estados e $\pi(x) > 0$ para todo x. Essa positividade é essencial para que

$$\langle f, g \rangle_\pi = \sum_x f(x) g(x) \pi(x)$$

seja um produto interno. A norma correspondente é

$$\|f\|_{2,\pi} = \left(\sum_x f(x)^2 \pi(x) \right)^{1/2}.$$

A matriz também atua sobre funções por $(Pf)(x) = \sum_y p(x,y) f(y)$; isso não muda a convenção de distribuições como vetores-linha.

Recordação de álgebra linear: o teorema espectral

Toda matriz real simétrica A possui autovalores reais e uma base ortonormal de autovetores $v_1, \dots, v_N$. Se $Av_k = \lambda_k v_k$ e $v = \sum_k a_k v_k$, então

$$A^n v = \sum_k a_k \lambda_k^n v_k.$$

Isso separa a evolução em componentes: cada coordenada na base de autovetores é multiplicada por uma potência do autovalor correspondente. Usaremos esse resultado de álgebra linear, admitido aqui, após transformar a matriz reversível em uma matriz simétrica.

Teorema 3.13 — Contração espectral reversível

Se P é uma matriz de transição em um espaço finito com pelo menos dois estados, e a cadeia é irredutível, aperiódica e reversível em relação a π, seus autovalores são reais. Podemos enumerá-los como $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|S|}$. O autovalor 1 é simples e, escrevendo

$$\lambda_* = \max_{k \geq 2} |\lambda_k| < 1,$$

temos

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi(x)} - 1}\, \lambda_*^n.$$

Cada autovetor descreve uma forma de desequilíbrio, multiplicada pelo seu autovalor a cada passo. O modo constante permanece; os demais desaparecem geometricamente. Um autovalor próximo de -1 também decai devagar, com alternância de sinal: importa o segundo maior *módulo*, não apenas o segundo maior valor.

Demonstração. Seja D a matriz diagonal com entradas $\pi(x)$. Como $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$, a matriz $M = D^{1/2} P D^{-1/2}$ é simétrica: suas entradas satisfazem

$$M_{xy} = \sqrt{\frac{\pi(x)}{\pi(y)}}\, p(x,y) = M_{yx}.$$

Como $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, o vetor

$$u_1 = D^{1/2}\mathbf{1} = \big(\sqrt{\pi(x)}\big)_{x\in S}$$

é um autovetor de M com autovalor 1. Ele tem norma euclidiana igual a 1, pois $\sum_x \pi(x) = 1$. Pelo teorema espectral, podemos completá-lo em uma base ortonormal $u_1, \dots, u_{|S|}$ de autovetores reais de M. Se $Mu_k = \lambda_k u_k$, defina $f_k = D^{-1/2}u_k$. Então

$$Pf_k = D^{-1/2}Mu_k = \lambda_k f_k, \qquad \langle f_j, f_k\rangle_\pi = \langle D^{1/2}f_j, D^{1/2}f_k\rangle_2 = \langle u_j, u_k\rangle_2 = \delta_{jk}.$$

Portanto, os f_k formam uma base ortonormal para o produto interno ponderado por π, e $f_1 = \mathbf{1}$. Para $k \geq 2$, a ortogonalidade dá

$$\pi(f_k) := \sum_x \pi(x) f_k(x) = \langle f_k, \mathbf{1}\rangle_\pi = 0.$$

Pelo teorema de convergência das cadeias finitas irredutíveis e aperiódicas, para cada estado x,

$$P^n f_k(x) \longrightarrow \pi(f_k) = 0.$$

Por outro lado, $Pf_k = \lambda_k f_k$ implica $P^n f_k = \lambda_k^n f_k$. Como f_k não é a função nula, isso só é possível se $|\lambda_k| < 1$. Assim, os modos não constantes desaparecem geometricamente e o autovalor 1 é simples.

A densidade da massa inicial em x, em relação a π, é $h_0(y) = \mathbf{1}_{\{y=x\}}/\pi(x)$. Pela definição de P agindo sobre funções,

$$(P^n h_0)(y) = \sum_z P^n(y,z)h_0(z) = \frac{P^n(y,x)}{\pi(x)} = \frac{P^n(x,y)}{\pi(y)} =: h_n(y).$$

A última igualdade é o balanço detalhado em n passos. Com efeito,

$$D^{1/2}P^n D^{-1/2} = M^n,$$

e M^n também é simétrica, pois M é simétrica. Portanto, $\pi(y)P^n(y,x) = \pi(x)P^n(x,y)$. Além disso, $\langle h_0 - 1, \mathbf{1}\rangle_\pi = 0$ e $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$. A expansão nessa base de autovetores fornece, então,

$$\|h_n - 1\|_{2,\pi} \leq \lambda_*^n \|h_0 - 1\|_{2,\pi}, \qquad \|h_0 - 1\|_{2,\pi}^2 = \frac{1}{\pi(x)} - 1.$$

Finalmente, Cauchy–Schwarz dá

$$\sum_y \pi(y)|h_n(y) - 1| = \langle |h_n - 1|, \mathbf{1}\rangle_\pi \leq \|h_n - 1\|_{2,\pi}\|\mathbf{1}\|_{2,\pi} = \|h_n - 1\|_{2,\pi},$$

pois $\sum_y \pi(y) = 1$. Como $\|P^n(x,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}}$ é metade dessa soma, obtemos a cota anunciada. ∎

Exemplo 3.20 — Três estados e dois ritmos de esquecimento.
No caminho 1–2–3, tome

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

A simetria dá $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$. Como P é simétrica, seus autovetores à direita também são autovetores à esquerda, e podemos decompor vetores-linha na mesma base. Os vetores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ e $(1, -2, 1)$ têm autovalores 1, $3/4$ e $1/4$, respectivamente. Como

$$(1, 0, 0) = \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) + \tfrac{1}{2}(1, 0, -1) + \tfrac{1}{6}(1, -2, 1),$$

segue que

$$P^n(1, \cdot) - \pi = \tfrac{1}{2}(3/4)^n(1, 0, -1) + \tfrac{1}{6}(1/4)^n(1, -2, 1).$$

A primeira coordenada é positiva e as outras duas são não positivas; portanto,

$$\|P^n(1, \cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} = \tfrac{1}{2}(3/4)^n + \tfrac{1}{6}(1/4)^n.$$

Em dois passos, a distância é $7/24 \approx 0{,}2917$. Para tempos grandes, domina o modo de autovalor $3/4$.

◁

A existência de π, a convergência para π e a velocidade dessa convergência respondem a três perguntas diferentes. A *lacuna espectral absoluta*, também chamada de *gap espectral absoluto* (*absolute spectral gap*), $1 - \lambda_*$, controla o decaimento do modo não constante mais lento no caso reversível. Uma distribuição inicial pode não ter componente nesse modo e convergir mais depressa. A versão preguiçosa $(I + P)/2$ transforma cada autovalor λ em $(1 + \lambda)/2$ e elimina autovalores negativos, mas pode desacelerar modos positivos. No capítulo de MCMC, essa discussão reaparecerá como tempo de mistura e diagnóstico de simulações.

3.6 Problemas de síntese

As urnas de Ehrenfest, uma fila de atendimento e um ábaco probabilístico oferecem três leituras do equilíbrio: a reversibilidade do tempo, os fluxos de entrada e saída e a conservação de massa.

Exemplo 3.21 — Conseguimos reconhecer um filme exibido ao contrário?.

Voltemos à cadeia de Ehrenfest do Exemplo 2.3. Há N bolas distribuídas entre duas urnas e, a cada passo, uma delas troca de urna.



Figura 3.10: Uma representação das duas urnas de Ehrenfest. No modelo, as bolas passam de uma urna para a outra, e a cadeia acompanha a quantidade presente na primeira.

Se $X_n = i$ bolas estão na primeira, então

$$p(i, i+1) = \frac{N-i}{N}, \qquad p(i, i-1) = \frac{i}{N}.$$

Já encontramos a distribuição estacionária binomial $\pi(i) = 2^{-N}\binom{N}{i}$. Seria possível assistir a um filme curto do sistema em equilíbrio e descobrir se ele foi exibido no sentido correto?

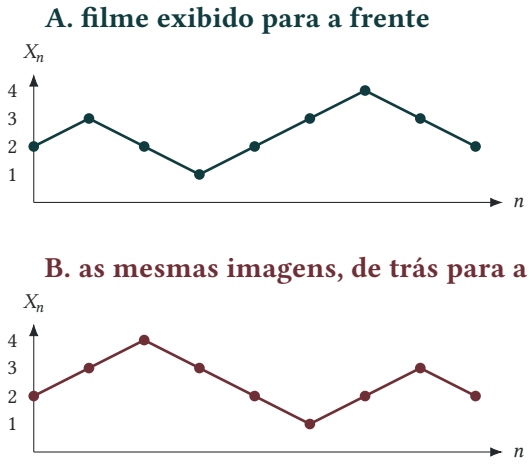


Figura 3.11: Uma trajetória ilustrativa para $N = 4$ e as mesmas observações na ordem inversa. A reversibilidade afirma igualdade das probabilidades das duas sequências em equilíbrio, não que uma realização seja literalmente simétrica.

O balanço detalhado responde à pergunta. De fato,

$$\begin{aligned}\pi(i)p(i,i+1) &= 2^{-N}\binom{N}{i}\frac{N-i}{N} \\ &= 2^{-N}\binom{N}{i+1}\frac{i+1}{N} = \pi(i+1)p(i+1,i).\end{aligned}$$

Para qualquer sequência admissível $x_0, x_1, \ldots, x_m$, aplicar essa igualdade em todas as transições e cancelar os termos intermediários dá

$$\pi(x_0)\prod_{k=0}^{m-1} p(x_k, x_{k+1}) = \pi(x_m)\prod_{k=0}^{m-1} p(x_{k+1}, x_k).$$

Portanto, *em equilíbrio*, uma sequência e a sequência reversa têm exatamente a mesma probabilidade. Nenhum teste baseado apenas nesse filme pode distinguir estatisticamente os dois sentidos do tempo.

Isso não vale para toda cadeia estacionária: no triângulo do Exemplo 3.8, quando $a \neq 1/2$, as circulações em sentidos opostos possuem probabilidades diferentes.

◁

Exemplo 3.22 — Uma fila que não se denuncia pelo som.

Retomemos a fila do Exemplo 3.10. A cada instante há uma chegada com probabilidade $p = 2/5$, ou uma oportunidade de atendimento com probabilidade $q = 3/5$; se a fila está vazia, essa última possibilidade não muda o estado.



Figura 3.12: Uma fila com um único posto de atendimento. As transições do modelo estão na Figura 3.3.

Já calculamos sua distribuição estacionária,

$$\pi(i) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i, \qquad i \geq 0,$$

e verificamos o balanço detalhado $\pi(i)p = \pi(i+1)q$. Portanto, a fila é reversível. Daqui em diante, supomos $X_0 \sim \pi$, ou seja, observamos a fila em equilíbrio.

Imagine agora que ouvimos um *bipe* para cada chegada, um *clique* para cada atendimento efetivo e silêncio quando há oportunidade de atendimento com a fila vazia. Os bipes formam uma sequência de indicadores independentes Bernoulli com parâmetro p, pela própria construção.

Para estudar os cliques, usamos a reversibilidade. Ao inverter um filme da fila em equilíbrio, cada salto para baixo se torna um salto para cima. Pela reversibilidade, a sequência de saltos para baixo lida para trás tem a mesma lei que a sequência de saltos para cima lida para a frente. Como

uma sequência de variáveis independentes continua independente quando sua ordem é invertida, *os indicadores dos atendimentos efetivos também são independentes Bernoulli com parâmetro p.* Assim, em equilíbrio,

$$\mathbb{P}(\text{nenhum atendimento nos próximos três passos}) = (1-p)^3 = \frac{27}{125},$$

e o tempo entre atendimentos consecutivos tem distribuição geométrica com esperança $1/p = 5/2$.

Quando há alguém na fila, a chance de atendimento no próximo passo é $q = 3/5$, enquanto a probabilidade de atendimento em equilíbrio é $p = 2/5$. A segunda leva em conta também os instantes em que a fila está vazia. Em tempo contínuo, o resultado correspondente é conhecido como *teorema de Burke*: numa fila M/M/1 estável e em equilíbrio, as saídas formam um processo de Poisson com a mesma taxa das chegadas.

◁

Exemplo 3.23 — Um ábaco que calcula uma distribuição estacionária. Duas crianças possuem fichas. Em cada rodada, a primeira distribui metade de suas fichas para si e metade para a segunda; a segunda envia um quarto para a primeira e conserva três quartos.



Figura 3.13: Uma imagem da redistribuição de fichas entre duas crianças. O diagrama de transição abaixo especifica exatamente as frações transferidas em cada rodada.

A regra é dada pela matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

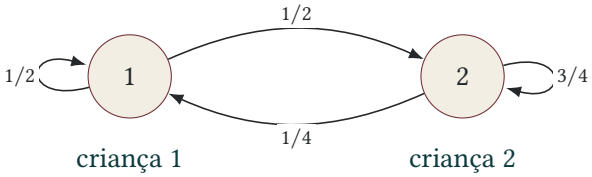


Figura 3.14: Cada criança redistribui suas fichas segundo a linha correspondente de P; as setas representam transferências, não sorteios.

Para todas as divisões produzirem números inteiros, antes de cada rodada a professora completa o estoque da primeira criança até o menor múltiplo de 2 maior ou igual à quantidade atual, e o da segunda até o menor múltiplo de 4 maior ou igual à sua quantidade. Em seguida, as duas crianças redistribuem simultaneamente as fichas, calculando suas transferências a partir dos estoques já repostos. Começando com $(3, 1)$, a evolução é

antes da reposição	depois da reposição	depois da distribuição
$(3, 1)$	$(4, 4)$	$(3, 5)$
$(3, 5)$	$(4, 8)$	$(4, 8)$
$(4, 8)$	$(4, 8)$	$(4, 8)$

Por exemplo, na primeira rodada, a criança 1 recebe 2 fichas de si mesma e 1 da outra, ficando com 3; a segunda recebe $2 + 3 = 5$. Depois da segunda rodada, $(4, 8)$ já é preservado:

$$(4, 8)P = (4, 8).$$

Normalizando o número de fichas, obtemos

$$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \qquad \pi P = \pi.}$$

A redistribuição fornece a mesma proporção que o balanço detalhado, $\pi(1)/2 = \pi(2)/4$.

Esse procedimento é uma versão do *ábaco probabilístico*: a conservação e a redistribuição de massa permitem encontrar um vetor estacionário. Há

algoritmos semelhantes para outras matrizes racionais, cuja terminação exige argumentos adicionais.

◁

Filmes invertidos, atendimentos e fichas redistribuídas traduzem a preservação de massa expressa por $\pi P = \pi$ em situações distintas.

3.7 PageRank e centralidade*

Os links que apontam para uma página permitem atribuir-lhe uma medida de importância. Representamos essas ligações por um grafo dirigido: escrevemos $A_{ij} = 1$ quando há um link da página i para a página j, e $A_{ij} = 0$ caso contrário.

A *centralidade por grau de entrada* atribui a j o valor $d_j^{\text{in}} = \sum_i A_{ij}$. Essa contagem trata todos os links recebidos da mesma maneira: dez links de páginas pouco citadas valem tanto quanto dez links de páginas muito citadas.

A *centralidade de autovetor* procura pesos não negativos c_j tais que a importância de j seja proporcional à soma das importâncias de quem a cita:

$$c_j = \frac{1}{\kappa} \sum_i c_i A_{ij}, \qquad \text{ou, com vetores-linha,} \qquad cA = \kappa c.$$

Mesmo quando existe um vetor estritamente positivo, multiplicá-lo por uma constante positiva preserva a equação. A unicidade deve, portanto, ser entendida a menos desse fator ou depois de uma normalização, como $\sum_j c_j = 1$. Sua existência e unicidade dependem de condições sobre o grafo. Há ainda outra decisão: uma página deve transmitir sua importância inteira por cada link ou repartir um total entre todos os links que oferece?

O passeio aleatório adota a segunda opção. Se $d_i^{\text{out}} = \sum_j A_{ij} > 0$, faça

$$p(i, j) = \frac{A_{ij}}{d_i^{\text{out}}}.$$

Um visitante escolhe uniformemente um dos links da página atual. Páginas sem saída deixam uma linha por definir; classes fechadas podem aprisionar o passeio e tornar o resultado dependente do ponto de partida.

Definição 3.6 — Teletransporte e vetor de PageRank

Escolha uma distribuição v, representada por um vetor-linha, com $v(i) > 0$ e $\sum_i v(i) = 1$. Ela determina o destino do teletransporte. Complete cada linha sem saída de P com v e defina

$$G = \alpha P + (1 - \alpha)\mathbf{1}v, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

onde $\mathbf{1}$ é a coluna de uns. Em cada passo, seguimos P com probabilidade α e escolhemos um novo destino segundo v com probabilidade $1 - \alpha$. O *vetor de PageRank* é a distribuição π que satisfaz

$$\pi G = \pi, \qquad \sum_i \pi(i) = 1.$$

Proposição 3.14 — Um equilíbrio único e alcançável

Em um grafo finito, com $v(i) > 0$ para todo i, G possui uma única distribuição estacionária π, e $\mu_0 G^n \to \pi$ para toda distribuição inicial μ_0.

Demonstração. Cada entrada satisfaz $G_{ij} \geq (1-\alpha)v(j) > 0$. Portanto, a cadeia é irredutível e aperiódica. Como o espaço é finito, existe uma distribuição estacionária pela Proposição 3.1. A unicidade e a convergência seguem dos Teoremas 3.6 e 3.10. ∎

Exemplo 3.24 — Quatro páginas e uma página sem saída.

Considere os links da Figura 3.15. Os graus de entrada de A, B, C, D são $(1, 1, 2, 0)$. A página D não tem links; $\{A, B, C\}$ é uma classe fechada da cadeia original.

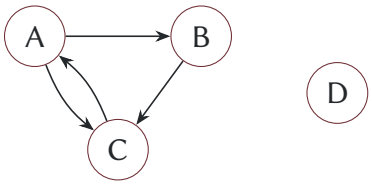


Figura 3.15: Links entre quatro páginas; a página D não possui links de saída.

Com $v(i) = 1/4$ e $\alpha = 4/5$, na ordem A, B, C, D,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad G = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 17 & 1 \\ 17 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

A última linha de P é a convenção para páginas sem saída, não um conjunto de links observados. Partindo de $\mu_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ e iterando $\mu_{n+1} = \mu_n G$, obtemos

n	A	B	C	D
1	0,3000	0,2000	0,4000	0,1000
2	0,3900	0,1900	0,3500	0,0700
3	0,3440	0,2200	0,3720	0,0640
10	0,3600	0,2062	0,3713	0,0625

.

Embora A e B tenham o mesmo grau de entrada, A recebe todo o fluxo de links de C, enquanto B recebe apenas metade do fluxo de A. O ranking incorpora essa diferença que o grau não enxerga.

◁

A síntese

PageRank é uma centralidade de autovetor regularizada por teletransporte. A equação de autovetor agora usa a matriz estocástica G e o autovalor 1.

Os dados observados são as páginas e seus links em uma coleta datada; a matriz é construída dessa coleta, enquanto α e v são escolhas do modelo. Se o objetivo fosse descrever navegação real, poderíamos comparar frequências de visitas em sessões reservadas com as previstas, ou estimar as transições pelos cliques observados. Links e cliques são fontes de dados distintas. A formulação original é de Page et al. (1999).

O ranking depende de α, da personalização em v e de como tratamos as páginas sem saída. Essas escolhas importam, sobretudo quando a rede contém estruturas criadas para manipular os resultados, como fazendas de links: o teletransporte reduz certos efeitos, mas não impede a manipulação.

Por isso, convém comparar os rankings obtidos com parâmetros próximos e com novas coletas. A centralidade descreve a posição de uma página na rede segundo um modelo; ela não é, por si só, uma medida universal de qualidade ou relevância.

3.8 Otimização por colônias de formigas*

Até aqui, as probabilidades de transição foram dadas de antemão. Nos algoritmos de colônias de formigas, as próprias trajetórias modificam as escolhas futuras por meio do reforço de feromônio. Esse mecanismo aproxima cadeias de Markov, urnas reforçadas e otimização. Acompanharemos a escolha do estado, o exemplo com dois caminhos, a cota produzida pela evaporação e a discussão sobre exploração. Sem evaporação, o reforço leva a resultados de convergência surpreendentes: serão enunciados aqui e demonstrados no capítulo de martingais, que dispõe das ferramentas necessárias. Ao final, voltaremos à ciência de dados com uma aplicação à seleção de variáveis.

Uma colônia de formigas pode encontrar um caminho curto entre o formigueiro e uma fonte de alimento sem que nenhuma formiga conheça o mapa completo. Cada indivíduo toma decisões locais, mas deixa no ambiente uma informação que altera as decisões dos indivíduos seguintes: o feromônio. Caminhos percorridos com frequência recebem novos depósitos; caminhos pouco usados perdem feromônio por evaporação. A combinação dessas duas regras produz uma forma simples de memória coletiva.

Os algoritmos de *otimização por colônias de formigas* abstraem esse mecanismo para procurar boas soluções de problemas combinatórios Dorigo et al. 1996; Dorigo e Stützle 2004. A estrutura probabilística do algoritmo é a seguinte: uma distribuição é usada para construir uma solução aleatória, a qualidade da solução modifica essa distribuição e o procedimento se repete. Assim, o algoritmo fornece um exemplo concreto de processo estocástico com realimentação.

3.8.1 Escolhas aleatórias guiadas pelo feromônio

Considere um grafo finito. A cada aresta e associamos duas quantidades positivas. O valor $\tau_e(n)$ representa o feromônio presente na aresta no início da iteração n, enquanto η_e mede sua atratividade definida pelo problema. Em uma aplicação de caminhos mínimos, é comum tomar $\eta_e = 1/\ell_e$, em que ℓ_e é o comprimento da aresta.

Se uma formiga está em um vértice v e pode escolher uma aresta no conjunto $A(v)$, a regra usual atribui a $e \in A(v)$ a probabilidade

$$p_n(e \mid v) = \frac{\tau_e(n)^\alpha \eta_e^\beta}{\displaystyle\sum_{f \in A(v)} \tau_f(n)^\alpha \eta_f^\beta}. \tag{3.4}$$

Aqui, $\alpha \geq 0$ controla a influência do histórico acumulado no feromônio, e $\beta \geq 0$ controla a influência da informação heurística. Valores grandes de α tornam o algoritmo mais sensível às escolhas anteriores; valores grandes de β favorecem fortemente as arestas que já parecem vantajosas.

Depois que a formiga completa um caminho R_{n+1} de custo $L(R_{n+1})$, uma regra simples de atualização é

$$\tau_e(n+1) = (1-\delta)\tau_e(n) + \frac{Q}{L(R_{n+1})}\,\mathbf{1}_{\{e \in R_{n+1}\}}, \qquad 0 \leq \delta < 1, \tag{3.5}$$

em que $Q > 0$. O fator $1-\delta$ representa a evaporação, e o segundo termo reforça as arestas que participaram da solução construída. Como o depósito é inversamente proporcional ao custo total, soluções melhores deixam marcas mais fortes. Nas implementações com várias formigas por iteração, basta somar os depósitos produzidos por elas.

Proposição 3.15 — A escolha correta do estado

Fixe o grafo, as heurísticas, os custos e os parâmetros. Suponha que cada iteração reinicie o mesmo procedimento de construção dos caminhos, conservando da iteração anterior apenas os feromônios, e que os caminhos sejam concluídos em um número finito de escolhas. As decisões seguem (3.4), com números aleatórios novos, independentes dos empregados anteriormente. Observado apenas nos instantes entre

duas iterações, o vetor de feromônios

$$X_n = (\tau_e(n) : e \in E)$$

é uma cadeia de Markov.

Demonstração. Reúna em U_{n+1} os números aleatórios usados na próxima iteração. Conhecidos X_n e U_{n+1}, o procedimento determina os caminhos e a atualização dos feromônios. Podemos, portanto, escrever

$$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1}),$$

com a mesma regra F em todas as iterações. Como os números em U_{n+1} são independentes do passado e têm sempre a mesma distribuição, conhecer os feromônios anteriores não acrescenta informação sobre X_{n+1} quando X_n já é conhecido. Essa é a propriedade de Markov. ∎

Durante a construção de um caminho, a posição da formiga pode não ser um estado suficiente. No problema do caixeiro-viajante, por exemplo, também precisamos registrar as cidades já visitadas. A propriedade de Markov depende, portanto, da informação escolhida para formar o estado.

3.8.2 Um modelo com dois caminhos

Considere dois caminhos entre o formigueiro e o alimento, com comprimentos L_1 e L_2. Em cada iteração, uma formiga escolhe um dos caminhos por inteiro. Denotando essa escolha por $J_{n+1} \in \{1, 2\}$, escrevemos $\mathcal{H}_n$ para o histórico da colônia até a iteração n, incluindo os feromônios e as escolhas já realizadas. Estudaremos a regra

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = i \mid \mathcal{H}_n) = \frac{\tau_i(n)}{\tau_1(n) + \tau_2(n)}, \qquad i = 1, 2, \tag{3.6}$$

e a atualização

$$\tau_i(n+1) = (1 - \delta)\tau_i(n) + q_i \mathbf{1}_{\{J_{n+1} = i\}}, \qquad q_i = \frac{Q}{L_i}. \tag{3.7}$$

Esse é o caso $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. A simplificação retira a preferência explícita pelo comprimento da regra de escolha. Mesmo assim, o comprimento entra

no algoritmo por meio do reforço q_i: uma passagem pelo caminho menor produz um depósito maior.

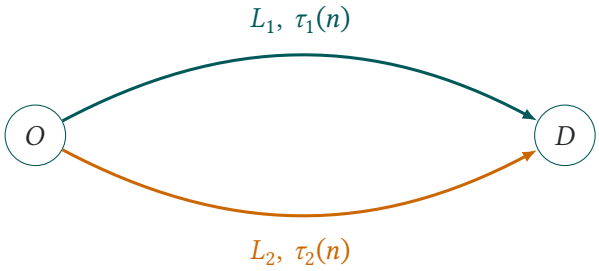


Figura 3.16: Dois caminhos competem pela próxima escolha. O estado registra o feromônio acumulado em cada um deles.

Exemplo 3.25 — Uma primeira atualização.

Suponha que $L_1 = 2$, $L_2 = 4$, $Q = 1$, $\delta = 0{,}1$ e $\tau_1(0) = \tau_2(0) = 1$. Inicialmente, cada caminho é escolhido com probabilidade $1/2$. Se a primeira formiga escolhe o caminho 1, então

$$\tau_1(1) = 0{,}9 + \frac{1}{2} = 1{,}4, \qquad \tau_2(1) = 0{,}9.$$

Consequentemente, a probabilidade de a segunda formiga escolher o mesmo caminho é

$$\frac{1{,}4}{1{,}4 + 0{,}9} = \frac{14}{23} \approx 0{,}609.$$

Uma única escolha já altera a distribuição da escolha seguinte. Se a segunda formiga também usar o caminho 1, o reforço será novamente $1/2$; uma passagem pelo caminho 2 produziria apenas $1/4$ de unidade de feromônio.

◁

O próximo resultado mostra que a evaporação impede o crescimento ilimitado do feromônio.

Proposição 3.16 — Limitação produzida pela evaporação
Se $0 < \delta < 1$, então, para $i = 1, 2$,

$$\tau_i(n) \le (1-\delta)^n \tau_i(0) + \frac{q_i}{\delta}\bigl(1-(1-\delta)^n\bigr). \tag{3.8}$$

Em particular,

$$\tau_i(n) \le \max\left\{\tau_i(0), \frac{q_i}{\delta}\right\} \qquad \text{para todo } n.$$

Demonstração. Da regra de atualização e do fato de que o indicador é no máximo um,

$$\tau_i(n+1) \le (1-\delta)\tau_i(n) + q_i.$$

Iterando essa desigualdade e somando a progressão geométrica, obtemos (3.8). ∎

A fórmula também esclarece o papel de δ. Um depósito feito k iterações antes é multiplicado por $(1-\delta)^k$, aproximadamente $e^{-\delta k}$ quando δ é pequeno. Assim, $1/\delta$ fornece uma escala aproximada para o alcance da memória do algoritmo.

3.8.3 Sem evaporação: reforço e seleção

Suponha inicialmente que os dois caminhos recebam o mesmo reforço $q > 0$ e que não haja evaporação. A atualização torna-se

$$\tau_i(n+1) = \tau_i(n) + q\mathbf{1}_{\{J_{n+1}=i\}}.$$

Dividindo os feromônios por q, reconhecemos uma urna de Pólya: a escolha de uma cor aumenta sua chance de ser escolhida novamente. A proporção

$$Z_n = \frac{\tau_1(n)}{\tau_1(n)+\tau_2(n)}$$

converge quase certamente, mas não necessariamente para $1/2$. Se $\tau_1(0) = \tau_2(0) = q$, seu limite Z_∞ é uniforme em $[0,1]$. Em particular,

$$\mathbb{P}(Z_\infty > 0{,}9) = 0{,}1.$$

Mesmo com regras simétricas, as flutuações iniciais podem deixar uma preferência persistente. A demonstração e a lei Beta para feromônios iniciais gerais aparecerão no capítulo de martingais.

Voltemos agora a $q_i = Q/L_i$. Se $L_1 < L_2$, cada passagem pelo primeiro caminho deposita mais feromônio do que uma passagem pelo segundo. No modelo sem evaporação, essa vantagem determina a preferência assintótica.

Teorema 3.17 — Seleção assintótica do caminho menor

Considere o modelo de dois caminhos sem evaporação, com feromônios iniciais positivos. Se $L_1 < L_2$, então

$$Z_n \longrightarrow 1 \qquad \text{quase certamente.}$$

Portanto, a proporção do feromônio localizada no caminho menor converge a um, embora cada escolha individual continue sendo aleatória.

A demonstração, baseada na comparação de processos de nascimento em tempo contínuo, será apresentada no capítulo de martingais, juntamente com a análise da deriva de Z_n. O contraste entre os modelos é o seguinte: reforços iguais produzem um limite aleatório, enquanto um reforço estritamente maior leva a uma preferência assintótica pelo caminho menor.

3.8.4 Exploração e concentração prematura

O teorema anterior favorece o caminho correto no modelo idealizado, mas também expõe um risco dos algoritmos reforçados. Se uma solução recebe muito feromônio por acaso nas primeiras iterações, sua probabilidade pode crescer antes que outras regiões tenham sido suficientemente exploradas. Além disso, a evaporação, sozinha, não garante exploração: o feromônio de um caminho nunca escolhido pode decair para valores próximos de zero.

Uma proteção comum consiste em restringir o feromônio a um intervalo $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$, com $0 < \tau_{\min} < \tau_{\max} < \infty$. Depois de aplicar (3.5), valores abaixo ou acima desses limites são truncados.

Proposição 3.18 — Exploração persistente

Suponha que $\tau_{\min} \le \tau_i(n) \le \tau_{\max}$ para $i = 1, 2$ e todo n. Sob a regra de escolha proporcional ao feromônio,

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = i \mid \mathscr{H}_n) \ge \varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{\tau_{\min}}{2\tau_{\max}} > 0.$$

Consequentemente, cada caminho é escolhido infinitas vezes com probabilidade um.

Demonstração. Como o numerador é pelo menos $\tau_{\min}$ e o denominador é no máximo $2\tau_{\max}$, obtemos a cota uniforme. Condicionado a qualquer história, a probabilidade de evitar o caminho i durante as próximas r escolhas é no máximo $(1-\varepsilon)^r$. Fazendo $r \to \infty$, concluímos que a probabilidade de nunca mais escolher esse caminho é zero. Como isso vale após qualquer instante, o caminho é escolhido infinitas vezes quase certamente. ∎

Os limites fixos preservam a exploração, mas alteram o comportamento assintótico. Com eles,

$$Z_n \le \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\max} + \tau_{\min}} < 1,$$

de modo que o teorema de seleção do caminho menor, enunciado sem truncamento, não se aplica a essa nova regra. O caso sem evaporação torna a diferença particularmente clara: cada visita acrescenta $q_i > 0$ até atingir $\tau_{\max}$. Como cada caminho é visitado infinitas vezes, ambos os feromônios atingem esse teto em tempo finito quase certamente. A partir daí, as escolhas têm probabilidade $1/2$, mesmo que os comprimentos sejam diferentes.

Com evaporação, o feromônio pode diminuir entre depósitos e deixar de ficar preso ao teto. Ainda assim, a proposição garante exploração, não seleção do ótimo. O reforço favorece as decisões recompensadas, enquanto os limites impedem que as demais sejam abandonadas. Essa tensão é uma versão do compromisso entre exploração e aproveitamento que aparece em aprendizado de máquina e em algoritmos sequenciais de decisão.

3.8.5 Uma aplicação em ciência de dados: seleção de variáveis

Suponha que desejemos ajustar um modelo preditivo usando apenas algumas das variáveis $x_1, \dots, x_d$. Cada candidato é representado por $z = (z_1, \dots, z_d) \in \{0,1\}^d$: na etapa j, a formiga decide incluir ($z_j = 1$) ou excluir ($z_j = 0$) a variável. Associamos feromônios $\tau_{j,1}$ e $\tau_{j,0}$ a essas duas decisões. A regra (3.4) torna-se

$$\mathbb{P}(z_j = b \mid \text{decisões anteriores}) = \frac{\tau_{j,b}^{\alpha}\eta_{j,b}^{\beta}}{\tau_{j,0}^{\alpha}\eta_{j,0}^{\beta} + \tau_{j,1}^{\alpha}\eta_{j,1}^{\beta}}, \qquad b \in \{0,1\}.$$

Podemos tomar $\eta_{j,b} = 1$ ou utilizar informação heurística calculada com os dados de treinamento.

O subconjunto selecionado é $S(z) = \{j : z_j = 1\}$. Ajustamos o modelo usando essas variáveis e avaliamos, por exemplo, o custo

$$C(S) = \widehat{R}_{\text{val}}(S) + \lambda \frac{|S|}{d}, \tag{3.9}$$

onde $\widehat{R}_{\text{val}}(S)$ é o erro de validação e $\lambda \geq 0$ penaliza subconjuntos grandes. As decisões do caminho recebem depósitos proporcionais a $Q/(\varepsilon + C(S))$, com $\varepsilon > 0$, favorecendo candidatos de menor custo.

O erro usado para selecionar as variáveis não é uma avaliação independente da solução final: consultas repetidas podem ajustar a busca às particularidades da validação. Um conjunto de teste separado, consultado apenas ao final, permite avaliá-la.

O vetor dos $2d$ feromônios é o estado de Markov entre iterações, desde que a avaliação seja fixa e novos sorteios independentes sejam utilizados em cada passo. Se todos os feromônios ficam entre limites uniformes positivos, as heurísticas são positivas e α, β são fixos, cada decisão tem probabilidade uniformemente positiva. Como cada candidato requer apenas d decisões, nenhum subconjunto é abandonado para sempre. Isso garante *exploração*, mas não assegura a seleção do melhor subconjunto.

O algoritmo admite diversas variantes: várias formigas por iteração, reforço apenas da melhor solução ou busca local. A escolha de um estado suficiente, a memória produzida pelo reforço e a distinção entre exploração e seleção do ótimo permanecem centrais nessas variantes.

3.9 Exercícios

Os exercícios retomam distribuições estacionárias, periodicidade, balanço detalhado, acoplamento e médias temporais.

Exercício 3.1 — Acoplar e acompanhar uma média

Considere a cadeia nos estados $\{0, 1\}$ com

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Determine sua distribuição estacionária. Se o custo de um passo é $c(0) = 1$ e $c(1) = 4$, calcule o limite quase certo da média temporal dos custos, qualquer que seja o estado inicial. Compare-o com $E_0[c(X_1)]$.

Para quantificar o esquecimento da partida, construa duas cópias usando a mesma sequência de uniformes U_n: do estado 0, o próximo estado é 1 se $U_n \le 1/4$; do estado 1, é 1 se $U_n \le 1/2$. Comece com $X_0 = 0$ e Y_0 distribuído segundo a estacionária, independentemente das uniformes. Se T é o primeiro encontro, mostre que

$$\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

e obtenha uma cota para $\|P^n(0,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}}$.

Exercício 3.2 — Classes, períodos e estacionárias

Na ordem $1, \dots, 5$, considere

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Identifique as classes de comunicação, quais são fechadas, a classificação dos estados e seus períodos. Determine todas as distribuições estacionárias. Por que a lei iniciada em 1 não converge, embora existam estacionárias?

Exercício 3.3 — Passeio em um caminho

Em um grafo com arestas $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ e $\{3,4\}$, escolha uniformemente um vizinho em cada passo. Calcule a estacionária, verifique o balanço detalhado, determine o período e os tempos médios de retorno a 1 e 2. O que muda para $\widetilde{P} = (I + P)/2$?

Exercício 3.4 — O estado inicial pode eliminar o modo lento

Na cadeia de três estados do Exemplo 3.20, comece no estado 2. Decomponha $(0, 1, 0)$ nos autovetores apresentados, calcule exatamente a distância de variação total depois de n passos e encontre o primeiro n para o qual ela é no máximo 0,02. Compare com a partida em 1.

Exercício 3.5 — Trocas entre duas urnas

Três bolas pretas e três brancas estão divididas entre duas urnas com três bolas cada. Em cada passo, escolha uma bola de cada urna, independentemente e de maneira uniforme, e troque-as. Seja X_n o número de bolas pretas na primeira urna. Determine as transições e verifique que a distribuição estacionária é

$$\pi(i) = \frac{\binom{3}{i}^2}{\binom{6}{3}}, \qquad 0 \le i \le 3.$$

Dê também uma explicação por contagem de configurações.

3.10 Exercícios complementares*

Exercício 3.6 — Cálculo do equilíbrio*

Confira a segunda linha da tabela de iterações da Seção 3.7. Resolva $\pi G = \pi$ com normalização e compare sua resposta com a décima iteração.

Exercício 3.7 — Os extremos do teletransporte*

O que ocorre com G e π quando $\alpha = 0$? Dê um grafo de dois vértices para o qual $\alpha = 1$ destrói a unicidade da distribuição estacionária. Explique o papel de cada hipótese da proposição sobre PageRank.

Exercício 3.8 — Personalização dos destinos*

No grafo de quatro páginas, troque v por $(1/2, 1/6, 1/6, 1/6)$, incluindo essa troca na linha sem saída de P. Partindo da distribuição uniforme, calcule uma iteração com $\alpha = 4/5$. Que parte da mudança se deve à preferência introduzida no modelo, e não a novos links observados?

Exercício 3.9 — O teto pode apagar a preferência*

Considere dois caminhos com escolha proporcional ao feromônio, reforços $q_1 > q_2 > 0$, ausência de evaporação e $\tau_{\min} \le \tau_i(0) \le \tau_{\max}$, onde $0 < \tau_{\min} < \tau_{\max} < \infty$. A atualização é

$$\tau_i(n+1) = \min\left\{\tau_{\max}, \tau_i(n) + q_i \mathbf{1}_{\{J_{n+1}=i\}}\right\}.$$

Mostre que cada caminho é escolhido infinitas vezes e que ambos os feromônios atingem $\tau_{\max}$ em tempo finito quase certamente. Quais passam a ser as probabilidades de escolha? Explique por que isso não contradiz o teorema de seleção do caminho menor e por que exploração persistente não basta para garantir preferência assintótica pelo melhor caminho.

CAPÍTULO

4

Cadeias de Markov enumeráveis

Em uma cadeia finita, toda classe fechada irredutível é recorrente. Quando o espaço é infinito, a cadeia pode caminhar para longe e nunca retornar.

Em um espaço infinito, uma cadeia irredutível pode ser transiente. Mesmo quando é recorrente, o tempo médio de retorno pode ser infinito; nesse caso, não há distribuição estacionária. Os critérios de retorno, as equações de primeiro passo e o teorema ergódico continuam disponíveis, sob as hipóteses estabelecidas nos capítulos anteriores.

Os passeios aleatórios revelam a influência da dimensão sobre a recorrência. O protocolo Aloha descreve um sistema de comunicação com infinitos estados; nos processos de ramificação, o estado é o tamanho de uma população. Os problemas de síntese reúnem esses modelos no estudo da ruína, do crescimento de filas e da extinção. Por fim, a percolação em árvores e os grafos aleatórios mostram como a ideia de ramificação também ajuda a estudar a formação de grandes componentes em uma rede.

4.1 Passeios aleatórios em $\mathbb{Z}^d$

O critério de recorrência do Teorema 2.16 ganha uma interpretação concreta para passeios aleatórios: basta estimar a probabilidade de o passeio estar novamente na origem após n passos.

Definição 4.1 — Passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}^d$
Fixe $x \in \mathbb{Z}^d$, com $d \geq 1$. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos tais que

$$\mathbb{P}(\xi_n = e_j) = \mathbb{P}(\xi_n = -e_j) = \frac{1}{2d}, \qquad j = 1, \ldots, d,$$

onde $e_1, \ldots, e_d$ é a base canônica. O processo

$$S_0 = x, \qquad S_n = x + \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \geq 1,$$

é o *passeio aleatório simples e simétrico* em $\mathbb{Z}^d$.

Sob $\mathbb{P}_x$, o passeio parte de x. Como a lei dos incrementos não depende da posição, começar em outro estado apenas desloca a trajetória: $\mathbb{P}_x(S_n = x) = \mathbb{P}_0(S_n = 0)$. Por isso, estudaremos os retornos à origem. A Figura 4.1 mostra uma realização em dimensão um.

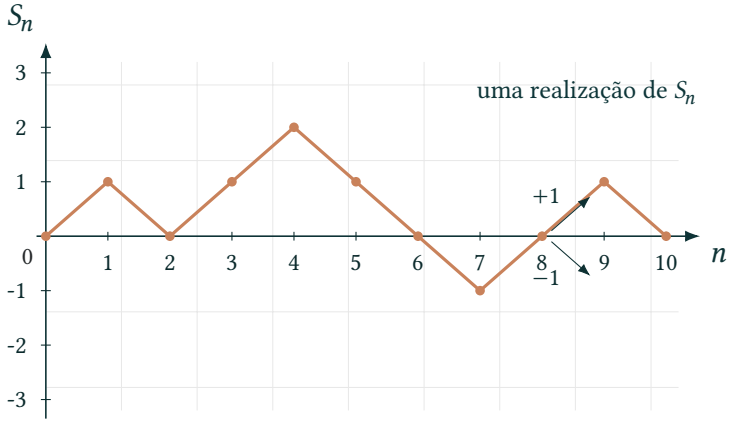


Figura 4.1: Passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.1 — Quantos caminhos retornam em dois e quatro passos?. As probabilidades de estar novamente na origem após poucos passos podem ser calculadas por contagem de caminhos. Aqui admitimos visitas anteriores à origem: não estamos calculando probabilidades de *primeiro* retorno. Partindo da origem em $\mathbb{Z}^d$, o primeiro passo pode ocorrer em qualquer uma das $2d$ direções. Para retornar no segundo passo, deve-se escolher a direção oposta. Portanto,

$$\mathbb{P}_0(S_2 = 0) = \frac{2d}{(2d)^2} = \frac{1}{2d}.$$

Em quatro passos há dois tipos de caminho fechado. No primeiro, todos os passos são paralelos a um mesmo eixo: há d escolhas do eixo e $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de ordenar os dois passos positivos e os dois negativos. No segundo, são usados dois eixos distintos, com um passo positivo e um negativo em cada eixo: há $\binom{d}{2}$ escolhas dos eixos e $4! = 24$ ordenações. Para $d = 1$, esse segundo tipo não ocorre, de acordo com $\binom{1}{2} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(S_4 = 0) &= \frac{6d + 24\binom{d}{2}}{(2d)^4} \\ &= \frac{3(2d-1)}{8d^3}.\end{aligned}$$

Em particular,

d	$\mathbb{P}_0(S_2 = 0)$	$\mathbb{P}_0(S_4 = 0)$
1	$1/2$	$3/8$
2	$1/4$	$9/64$
3	$1/6$	$5/72$

Essas contas mostram que a dimensão altera as probabilidades de retorno já nos primeiros passos. A classificação em recorrente ou transiente depende, porém, da soma sobre *todos* os instantes.

◁

Os vértices de $\mathbb{Z}^d$ se dividem em duas classes: aqueles cuja soma das coordenadas é par e aqueles cuja soma é ímpar. Cada passo liga vértices de classes diferentes; assim, o grafo é bipartido. Como a soma vale zero na origem, o passeio só pode retornar a ela em instantes pares.

Para estimar as probabilidades de retorno, usaremos a fórmula de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Teorema 4.1 — Recorrência em $\mathbb{Z}$

O passeio simples e simétrico em $\mathbb{Z}$ é recorrente. Mais geralmente, se um passo vale $+1$ com probabilidade p e -1 com probabilidade $q = 1-p$, o passeio é recorrente se e somente se $p = q = 1/2$.

Demonstração. Se $p = 0$ ou $p = 1$, o passeio se move sempre no mesmo sentido e nunca retorna à origem. Suponha, portanto, $0 < p < 1$. Para retornar à origem no instante $2n$, são necessários exatamente n passos para a direita e n para a esquerda. Logo,

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Pela fórmula de Stirling,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n/e)^{2n}}{2\pi n\,(n/e)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}. \tag{4.1}$$

Consequentemente,

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Como não há retornos em instantes ímpares, basta examinar $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0)$. Se $p = q = 1/2$, temos $4pq = 1$ e os termos dessa série são assintoticamente equivalentes a $1/\sqrt{\pi n}$. Ela diverge, pois $\sum_{n\geq 1} n^{-1/2}$ diverge. Se $p \neq q$, então $4pq = 1 - (p-q)^2 < 1$. Como $\binom{2n}{n} \leq \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j} = 4^n$, temos $\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) \leq (4pq)^n$ para todo $n \geq 1$. A série converge por comparação com a série geométrica $\sum_{n\geq 1}(4pq)^n$. Pelo Teorema 2.16, a origem é recorrente no primeiro caso e transiente no segundo. Por invariância por translação, a mesma classificação vale para todos os estados. ∎

Lema 4.2 — Identidade de Vandermonde

Para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Demonstração. Expandindo os dois fatores pelo binômio de Newton, temos

$$(1+x)^n (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right).$$

Um termo de grau n é obtido escolhendo x^k no primeiro fator e x^{n-k} no segundo. Assim, o coeficiente de x^n no produto é $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Como $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, essa soma é o lado esquerdo da identidade. Por outro lado, o produto é $(1+x)^{2n}$, cujo coeficiente de x^n é $\binom{2n}{n}$. Igualar os coeficientes prova a afirmação, inclusive para $n = 0$. ∎

Teorema 4.3 — Recorrência em $\mathbb{Z}^2$

O passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}^2$ é recorrente.

Demonstração. Em um caminho fechado com $2n$ passos, suponha que haja k passos para a direita e k para a esquerda. Restam $n-k$ passos para cima e $n-k$ para baixo. Para cada k, observamos que

$$\frac{(2n)!}{k!^2 (n-k)!^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 = \binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2.$$

Portanto, somando sobre k e usando a identidade de Vandermonde demonstrada acima, o número de caminhos fechados é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!^2 (n-k)!^2} = \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}^2.$$

Cada sequência específica de $2n$ passos tem probabilidade 4^{-2n}, pois em cada instante há quatro direções equiprováveis. Consequentemente,

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2.$$

Pela estimativa (4.1), $\binom{2n}{n}/4^n \sim 1/\sqrt{\pi n}$. Elevando ao quadrado, obtemos

$$\boxed{\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n}.}$$

Como a série $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge, a série das probabilidades de retorno também diverge. Pelo Teorema 2.16, a origem é recorrente; por translação, todos os estados são recorrentes. ∎

A recorrência garante que o passeio volta à origem, mas não que o tempo médio até esse retorno seja finito. As estimativas que acabamos de obter permitem responder também a essa segunda pergunta.

Corolário 4.4 — Recorrência nula em dimensões um e dois

O passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}^d$ é recorrente nulo para $d = 1$ e $d = 2$.

Demonstração. Em ambos os casos, o passeio é recorrente e $P^n(0,0) = \mathbb{P}_0(S_n = 0) \to 0$: nos instantes pares, isso decorre das equivalências assintóticas obtidas; nos ímpares, a probabilidade é zero. Denote por

$$N_n(0) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{\{S_m = 0\}}$$

o número de visitas à origem entre os instantes 1 e n. Então

$$E_0\left[\frac{N_n(0)}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^m(0,0) \longrightarrow 0.$$

Para justificar esse limite, fixe $\varepsilon > 0$ e escolha m_0 tal que $P^m(0,0) < \varepsilon$ para $m \geq m_0$. Os termos anteriores a m_0 são finitos e, divididos por n, tendem a zero; os restantes contribuem no máximo ε à média. Mais explicitamente, para $n \geq m_0$,

$$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^m(0,0) \leq \frac{m_0 - 1}{n} + \varepsilon.$$

Primeiro fazemos n crescer e depois tomamos ε arbitrariamente pequeno, obtendo o limite anunciado.

Por outro lado, o Teorema 3.4 dá $N_n(0)/n \to 1/E_0(T_0^+)$ quase certamente. Como essas variáveis ficam entre zero e um, o Lema 3.5 mostra que suas esperanças convergem para a mesma constante. Logo, $1/E_0(T_0^+) = 0$, isto é, $E_0(T_0^+) = \infty$. Por translação, a conclusão vale para todos os estados. ■

A Figura 4.2 mostra uma trajetória no plano e sua distância à origem. Os zeros no segundo painel identificam os retornos da trajetória desenhada no primeiro.

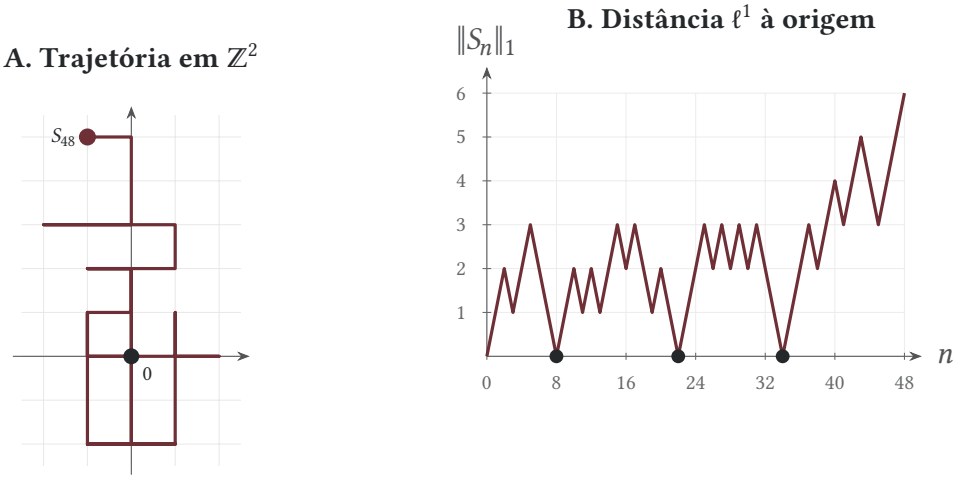


Figura 4.2: Uma realização do passeio simples em $\mathbb{Z}^2$. No painel A, a origem e o ponto final S_{48} estão destacados. No painel B, os zeros de $\|S_n\|_1$ nos instantes 8, 22 e 34 correspondem aos retornos à origem da mesma trajetória.

Teorema 4.5 — Transiência em $\mathbb{Z}^3$

O passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}^3$ é transiente.

Demonstração. Em dimensão três, a contagem dos caminhos fechados produz uma soma mais difícil de calcular exatamente. Para provar a transiência, basta obter uma cota para a probabilidade de retorno cuja série seja convergente. Combinaremos a estimativa do coeficiente binomial central com uma cota para o maior termo de uma distribuição multinomial.

Um retorno à origem só pode ocorrer após um número par de passos. Consideremos, portanto, $2n$ passos, com $n \geq 1$. Denote por i, j, k as quantidades de passos nas direções positivas dos três eixos. Para que o deslocamento final seja zero, precisamos ter também i, j, k passos nas respectivas direções negativas. Assim,

$$i + j + k = n.$$

Para valores fixados de i, j, k, estamos ordenando seis tipos de passos, com multiplicidades i, i, j, j, k, k. O número dessas sequências é

$$\frac{(2n)!}{i!^2 j!^2 k!^2}.$$

Cada sequência tem probabilidade 6^{-2n}, porque há seis direções equiprováveis. Somando sobre todas as possibilidades, chegamos a

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{(2n)!}{i!^2 j!^2 k!^2}.$$

Primeiro passo: reconhecer uma distribuição de probabilidade. Defina

$$a_{i,j,k} = \frac{n!}{i!\,j!\,k!}\, 3^{-n}, \qquad i + j + k = n.$$

Esse é o valor da probabilidade de obter i, j, k resultados em três categorias equiprováveis, em n ensaios independentes. Pela fórmula multinomial,

$$\sum_{i+j+k=n} a_{i,j,k} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

Com esses números, a expressão admite a fatoração

$$\frac{(2n)!}{i!^2 j!^2 k!^2} = \binom{2n}{n} \left(\frac{n!}{i!\,j!\,k!}\right)^2.$$

Como $6^{2n} = 2^{2n}3^{2n}$, a probabilidade de retorno fica

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{i+j+k=n} a_{i,j,k}^2.$$

Não precisaremos calcular a soma dos quadrados: como todos os termos são não negativos e somam um,

$$\sum_{i+j+k=n} a_{i,j,k}^2 \le \left(\max_{i+j+k=n} a_{i,j,k} \right) \sum_{i+j+k=n} a_{i,j,k} = \max_{i+j+k=n} a_{i,j,k}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) \le \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} M_n, \qquad M_n := \max_{i+j+k=n} a_{i,j,k}.$$

Segundo passo: estimar o maior termo multinomial. O máximo ocorre quando i, j, k diferem entre si por no máximo uma unidade. Para ver isso, suponha, por exemplo, que $i \ge j + 2$. Ao trocar (i, j, k) por $(i - 1, j + 1, k)$, a razão entre o novo termo e o anterior é

$$\frac{a_{i-1,j+1,k}}{a_{i,j,k}} = \frac{i}{j+1} > 1.$$

Assim, enquanto duas coordenadas diferirem por duas ou mais unidades, podemos aumentar o termo aproximando-as. No máximo, as três coordenadas estão tão equilibradas quanto possível.

Comecemos pelo caso $n = 3m$. Então o maior termo é $M_{3m} = a_{m,m,m}$. Pela fórmula de Stirling, $k! \sim \sqrt{2\pi k}(k/e)^k$, obtemos

$$\begin{aligned} M_{3m} &= \frac{(3m)!}{(m!)^3}\, 3^{-3m} \\ &\sim \frac{\sqrt{6\pi m}(3m/e)^{3m}}{(2\pi m)^{3/2}(m/e)^{3m}\, 3^{3m}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi m} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi n}. \end{aligned}$$

Em particular, M_{3m} é da ordem de $1/m$.

Para os demais valores de n, se $n = 3m + 1$, os índices maximais são $(m + 1, m, m)$ e suas permutações. Se $n = 3m + 2$, são $(m + 1, m + 1, m)$ e suas

permutações. Comparando diretamente os fatoriais com os do caso $3m$,

$$M_{3m+1} = \frac{3m+1}{3(m+1)}\, M_{3m},$$
$$M_{3m+2} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}\, M_{3m}.$$

Ambos os fatores são no máximo um. Como $n = 3m$, $3m+1$ ou $3m+2$ tem a mesma ordem de grandeza que m para $m \geq 1$, existe uma constante C_2 tal que

$$M_n \leq \frac{C_2}{n} \qquad (n \geq 1).$$

Os casos $n = 1, 2$ são incluídos aumentando C_2, se necessário.

Terceiro passo: reunir as duas estimativas. A estimativa (4.1) fornece

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Assim, existe uma constante C_1 tal que $\binom{2n}{n}/2^{2n} \leq C_1/\sqrt{n}$ para n suficientemente grande. Aumentando C_1, incluímos também os primeiros valores de n. Portanto,

$$\boxed{\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}}\frac{C_2}{n} = \frac{C}{n^{3/2}}.}$$

Não há retornos em instantes ímpares. Como $\sum_{n\geq 1} n^{-3/2}$ converge, também converge $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_0(S_k = 0)$. Pelo critério de recorrência, a origem é transiente. A invariância por translação estende essa conclusão a todos os estados. ∎

Corolário 4.6 — Transiência em dimensões maiores

O passeio aleatório simples e simétrico em $\mathbb{Z}^d$ é transiente para todo $d \geq 3$.

Demonstração. Para $d > 3$, projete o passeio nas três primeiras coordenadas. A projeção fica parada quando o passo ocorre numa das demais coordenadas. Se a observarmos apenas nos instantes em que ela se move, obtemos o passeio simples em $\mathbb{Z}^3$; esse processo é a *cadeia de saltos* da projeção. De fato, cada passo move uma dessas três coordenadas com probabilidade $6/(2d) = 3/d$. Condicionadas à ocorrência de um movimento, as seis direções projetadas têm probabilidade $(1/(2d))/(3/d) = 1/6$ cada uma. Como os incrementos originais são independentes, essas direções sucessivas também são independentes.

O tempo de espera até cada movimento tem distribuição geométrica com parâmetro $3/d > 0$ e é finito quase certamente: a probabilidade de esperar mais de r passos é $(1 - 3/d)^r$, que tende a zero. Os tempos de espera formam uma sequência enumerável; portanto, com probabilidade um, todos são finitos. Pela transiência em dimensão três, a cadeia de saltos visita a origem apenas um número finito de vezes e todas as suas permanências têm duração finita. Nesse mesmo evento, a projeção está na origem em apenas um número finito de instantes. Toda visita do passeio original à origem exige que a projeção esteja na origem. Portanto, o passeio em $\mathbb{Z}^d$ é transiente. ∎

Os resultados anteriores compõem o *teorema de Pólya*: o passeio simples e simétrico é recorrente nas dimensões 1 e 2 e transiente em todas as dimensões maiores.

A fronteira dimensional

Mais geralmente, as probabilidades de retorno em tempos pares têm ordem $n^{-d/2}$. Esse é um resultado adicional: demonstramos a equivalência assintótica nas dimensões 1 e 2, uma cota superior suficiente na dimensão 3 e a transiência por projeção nas dimensões maiores. A ordem exata para todas as dimensões requer estimativas mais precisas das probabilidades de transição; veja Lawler 2006. A série correspondente diverge em dimensões 1 e 2, mas converge a partir da dimensão 3. Essa é a mudança de regime por trás do teorema de Pólya.

4.2 Um sistema com infinitos estados: o protocolo Aloha

Nos passeios, perguntamos se a trajetória retorna a um estado. Em um sistema de comunicação, os estados podem registrar o número de mensagens pendentes. O exemplo a seguir mostra como as colisões podem impedir o escoamento dessas mensagens e fazer a fila crescer.

Exemplo 4.2 — Protocolo Aloha: colisões que bloqueiam o canal. Em uma versão simplificada do protocolo Aloha, mensagens novas tentam transmitir assim que chegam; cada mensagem que já sofreu uma colisão tenta novamente, independentemente das outras, com probabilidade $r = 1/2$ por intervalo. Se exatamente uma mensagem transmitir, ela sai do sistema. Se duas ou mais transmitirem, ocorre uma colisão e nenhuma sai.

Suponha que, em cada intervalo n, cheguem $A_n = 1$ mensagem com probabilidade $3/4$ ou $A_n = 2$ mensagens com probabilidade $1/4$, independentemente entre intervalos. As decisões de retransmissão são renovadas a cada intervalo, independentemente das novas chegadas e de todos os sorteios anteriores. Seja X_n o número de mensagens pendentes antes das novas chegadas no intervalo n, com $X_0 = 0$. A Figura 4.3 resume as possibilidades de transmissão.

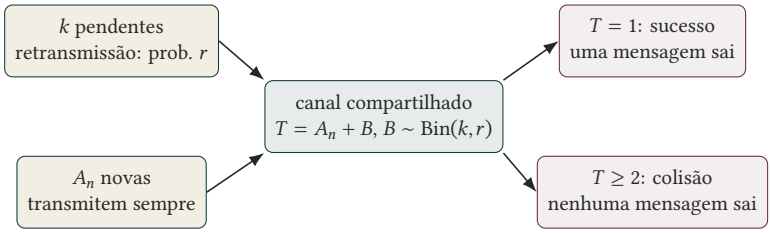


Figura 4.3: As tentativas simultâneas competem pelo mesmo canal. Apenas quando há exatamente uma transmissão ocorre uma saída.

Escreva $I_n = 1$ quando há uma transmissão bem-sucedida no intervalo n e $I_n = 0$ caso contrário. Então

$$X_{n+1} = X_n + A_n - I_n.$$

Se chegam duas mensagens, elas colidem entre si e X_n aumenta em duas unidades. Se chega uma, o número de mensagens pendentes fica igual ou aumenta em uma unidade. Portanto, X_n nunca diminui.

Há uma particularidade importante nesta versão do modelo: sempre chega pelo menos uma mensagem nova, e ela tenta transmitir imediatamente. Por isso, uma mensagem pendente nunca consegue sair: qualquer tentativa sua colide com uma nova transmissão. O único sucesso possível ocorre quando chega uma única mensagem e todas as pendentes ficam em silêncio; nesse caso, quem sai é a mensagem recém-chegada.

Dado $X_n = k$, as probabilidades do próximo estado dependem apenas de k, pois os novos sorteios são independentes do passado. Assim, (X_n) é uma cadeia de Markov em $\mathbb{N}_0$, com transições

$$\begin{aligned} p(k,k) &= \frac{3}{4}\,2^{-k}, \\ p(k,k+1) &= \frac{3}{4}(1-2^{-k}), \\ p(k,k+2) &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

e todas as demais probabilidades são zero. Cada estado é transiente: partindo de k, a probabilidade de permanecer nele durante os próximos r intervalos é $p(k,k)^r$, que tende a zero porque $p(k,k) < 1$. Portanto, a cadeia o deixa em tempo finito quase certamente; como nunca diminui, não pode retornar depois de sair.

Além do crescimento da fila, ocorre um bloqueio persistente do canal: *ao longo de infinitos intervalos, ocorrem somente finitas transmissões bem-sucedidas, quase certamente.* Para demonstrá-lo, observamos que a condição de sucesso descrita acima dá

$$\mathbb{P}(I_n = 1 \mid X_n = k) = \frac{3}{4}\,2^{-k}.$$

Se M_n é o número de intervalos entre 0 e $n-1$ em que chegaram duas mensagens, então $X_n \geq 2M_n$ e M_n tem distribuição binomial com parâmetros n e $1/4$. Cada intervalo com duas chegadas acrescenta duas mensagens à fila, e os demais nunca a fazem diminuir; isso explica a desigualdade $X_n \geq 2M_n$. Além disso, escrevendo M_n como soma dos indicadores independentes desses intervalos, obtemos

$$E(4^{-M_n}) = \prod_{k=0}^{n-1} E\big(4^{-\mathbf{1}_{\{A_k=2\}}}\big) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^n.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I_n = 1) &= \frac{3}{4}E(2^{-X_n}) \le \frac{3}{4}E(4^{-M_n}) \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\left(\frac{13}{16}\right)^n.\end{aligned}$$

Para contar todos os sucessos, somamos primeiro até um instante finito e depois fazemos esse instante crescer. Pela linearidade da esperança e pela passagem ao limite para contagens crescentes, justificada no Lema 2.15, obtemos

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(I_n = 1) \le \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{13}{16}\right)^n = \boxed{4}.$$

Uma variável não negativa com esperança finita não pode ser infinita com probabilidade positiva. Para ver isso aqui, se $S = \sum_{n\ge 0} I_n$, a desigualdade de Markov dá $\mathbb{P}(S \ge r) \le 4/r$ para todo $r \ge 1$; como $\{S = \infty\} \subseteq \{S \ge r\}$, sua probabilidade é zero. Logo, o número total de sucessos é finito quase certamente, embora mensagens continuem chegando. As tentativas simultâneas impedem o escoamento das mensagens.

A conclusão vale para a versão de carga elevada considerada aqui. Outras leis de chegada exigem uma análise própria.

◁

Nos passeios e no protocolo Aloha, acompanhamos deslocamentos ou o acúmulo de mensagens. No próximo modelo, a população de uma geração produz a seguinte: o tamanho atual continua sendo toda a informação necessária para descrever o próximo passo, mas cada indivíduo contribui com uma quantidade aleatória de novos indivíduos.

4.3 Processos de ramificação

Uma população pode crescer em média e, ainda assim, desaparecer. O tamanho esperado, por si só, não determina a probabilidade de extinção.

A ideia de acompanhar sucessivas gerações não se limita a populações de seres vivos. Ela aparece também em sistemas físicos e em processos de transmissão, como mostram os exemplos a seguir.

Linhagens familiares. A partir de um indivíduo, acompanhamos seus filhos, netos, bisnetos e assim por diante. O número de filhos pode variar

de uma pessoa para outra, e cada filho pode dar continuidade à linhagem por meio de seus próprios descendentes. Quantos membros haverá em uma geração futura? Qual é a probabilidade de que a linhagem deixe de ter descendentes?

Multiplicadores de elétrons. Um elétron que atinge uma superfície pode provocar a emissão de vários outros elétrons. Estes são conduzidos a uma segunda superfície, onde podem produzir novas emissões. Em uma sequência de etapas, um pequeno número inicial de elétrons pode dar origem a um sinal muito maior. Cada etapa corresponde a uma geração, e o número de elétrons emitidos por impacto faz o papel do número de filhos.

Reações em cadeia. Um nêutron pode provocar a fissão de um núcleo atômico, liberando novos nêutrons, que podem provocar outras fissões. Nem todo nêutron dá continuidade à reação: ele pode escapar do material ou ser absorvido sem produzir uma fissão. Em uma aproximação por gerações, podemos perguntar se a sequência de fissões se interrompe ou continua.

Início de uma epidemia. Uma pessoa infectada pode transmitir a doença a um número aleatório de outras pessoas. Estas podem produzir novas infecções, formando sucessivas gerações de transmissão. Quando ainda há muitas pessoas suscetíveis e diferentes cadeias de transmissão raramente alcançam a mesma pessoa, um processo de ramificação pode aproximar essa fase inicial. As gerações indicam quem infectou quem, não intervalos de tempo de igual duração.

Nesses exemplos, cada elemento pode produzir um número aleatório de novos elementos. Para construir um modelo comum, chamaremos esses elementos de *indivíduos* e acompanharemos o total em cada geração.

O tamanho de cada geração será o estado de uma cadeia de Markov. Condicionando no tamanho da geração anterior, calcularemos a média e a variância da população; com as funções geradoras, estudaremos a probabilidade de extinção. Ao final, discutiremos o que se pode estimar a partir de dados de cascatas de compartilhamentos, em uma aplicação que também pode ser lida separadamente.

4.3.1 Indivíduos, gerações e crescimento médio

Considere uma população que evolui em gerações. Cada indivíduo produz um número aleatório de filhos, independentemente dos demais e sempre

segundo a mesma distribuição. Esses filhos formam a geração seguinte, na qual o mecanismo se repete. Assim, o tamanho de cada geração é determinado pela soma dos números de filhos dos indivíduos da geração anterior.

Definição 4.2 — Processo de Galton–Watson

Seja Y uma variável com valores em $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e lei $p_j = \mathbb{P}(Y = j)$. Considere cópias independentes $(Y_{n,r})_{n\geq 0, r\geq 1}$ de Y. Para $Z_0 = k \in \mathbb{N}_0$, defina

$$Z_{n+1} = \sum_{r=1}^{Z_n} Y_{n,r}.$$

A soma vazia vale zero. O processo (Z_n) é um *processo de Galton–Watson*, e (p_j) é sua distribuição de descendentes.

O índice n identifica a geração e r distingue os indivíduos que a compõem. A fórmula conta os filhos de todos eles. Se dois indivíduos produzem, respectivamente, três e nenhum filho, a geração seguinte terá tamanho três. A família $(Y_{n,r})$ registra quantos filhos cada indivíduo tem, enquanto a sequência (Z_n) conserva apenas os totais por geração. Assim, árvores genealógicas diferentes podem produzir a mesma sequência de tamanhos.

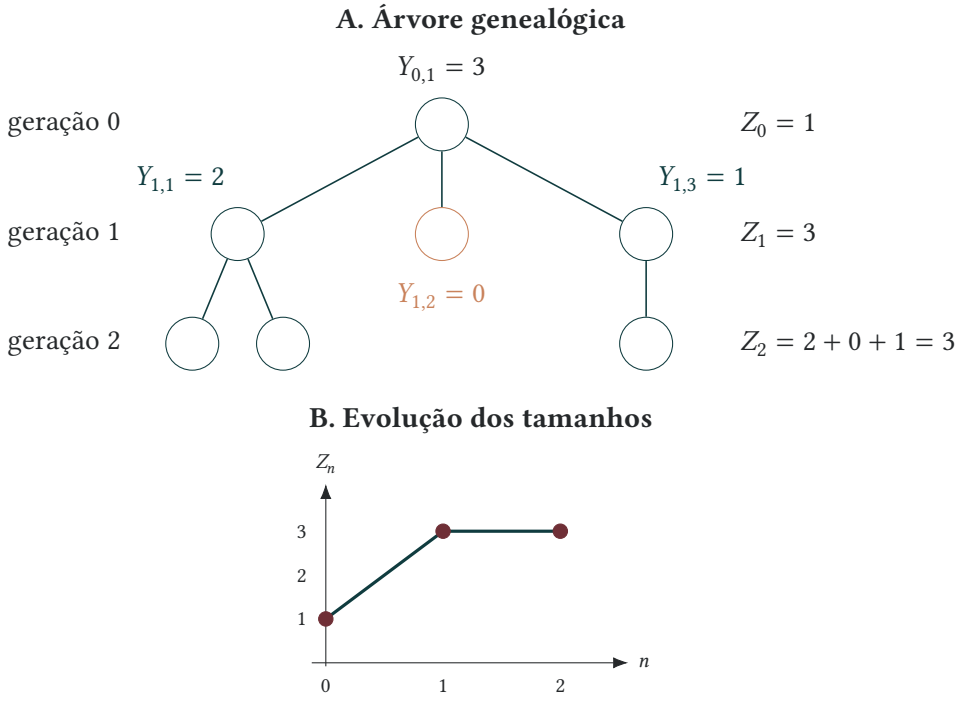


Figura 4.4: A árvore acompanha os indivíduos e os seus filhos; o gráfico registra apenas os totais por geração, aqui $Z_0 = 1$, $Z_1 = 3$ e $Z_2 = 3$. O indivíduo central da geração 1 não deixa descendentes.

Se sabemos que $Z_n = i$, há exatamente i indivíduos para se reproduzir. As gerações até n foram determinadas pelos sorteios $Y_{\ell,r}$ com $\ell < n$. Os números de filhos $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,i}$ são independentes desses sorteios e têm todos a lei de Y. Por isso, conhecer as gerações anteriores não altera a distribuição da próxima: basta saber Z_n. Essa é a propriedade de Markov, e as probabilidades de transição são

$$p(i, j) = \mathbb{P}(Y_1 + \cdots + Y_i = j), \qquad p(0, 0) = 1,$$

onde $Y_1, \dots, Y_i$ são cópias independentes de Y. O estado zero é absorvente: se uma geração não tem indivíduos, a seguinte também estará vazia.

A independência das reproduções, o uso da mesma lei por todos os indivíduos e a separação em gerações são hipóteses do modelo, não propriedades automáticas de uma população real.

Exemplo 4.3 — Uma linha da matriz de transição.
Suponha que cada indivíduo não tenha filhos com probabilidade $1/3$ e tenha dois filhos com probabilidade $2/3$. Se $Z_n = 2$, então

$$Z_{n+1} = Y_1 + Y_2,$$

com Y_1, Y_2 independentes e valores em $\{0, 2\}$. Portanto,

$$p(2,0) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \qquad p(2,2) = 2\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \qquad p(2,4) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Para obter dois filhos ao todo, exatamente um dos dois indivíduos deve reproduzir-se; as duas escolhas possíveis explicam o fator 2 em $p(2,2)$. Essas são todas as possibilidades, e suas probabilidades somam um.

O mesmo raciocínio vale para qualquer tamanho inicial. Se $Z_n = i$, o número B de indivíduos que produzem dois filhos tem distribuição binomial com parâmetros i e $2/3$, e $Z_{n+1} = 2B$. Assim, para $0 \le k \le i$,

$$p(i, 2k) = \binom{i}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{i-k},$$

enquanto $p(i,j) = 0$ nos demais casos.

◁

Teorema 4.7 — Tamanho esperado da geração
Se $m = E(Y) < \infty$ e $Z_0 = k$, então $E(Z_n) = km^n$ para todo $n \ge 0$, com $m^0 = 1$.

O fator m tem uma interpretação simples: cada indivíduo deixa, em média, m filhos, de modo que a esperança do tamanho da população é multiplicada por m de uma geração para a seguinte. Isso se refere à média entre possíveis evoluções, não ao crescimento de cada trajetória. Algumas populações podem desaparecer, enquanto outras crescem o suficiente para sustentar a esperança.

Demonstração. Se $Z_n = i$, os i indivíduos produzem filhos, cada um com esperança m. Pela linearidade da esperança,

$$E(Z_{n+1} \mid Z_n = i) = im.$$

Retiramos o condicionamento somando sobre os possíveis tamanhos da geração atual. Pela esperança total,

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{\infty} E(Z_{n+1} \mid Z_n = i)\,\mathbb{P}(Z_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} im\,\mathbb{P}(Z_n = i) = mE(Z_n). \end{aligned}$$

Na soma, os valores de i com probabilidade zero não contribuem. Como $Z_0 = k$ é constante, $E(Z_0) = k$. Se $E(Z_n) = km^n < \infty$, a igualdade anterior dá $E(Z_{n+1}) = km^{n+1} < \infty$. Isso estabelece simultaneamente a fórmula e a finitude das esperanças por indução, incluindo $n = 0$. ∎

A média não informa quanto os tamanhos das gerações podem variar entre uma realização e outra. Para estudar essa variação, suponha que a distribuição de filhos tenha variância finita $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$.

Proposição 4.8 — Variância do tamanho da geração
Se $\sigma^2 < \infty$ e $Z_0 = k$, então $v_n = \mathrm{Var}(Z_n)$ satisfaz

$$v_0 = 0, \qquad v_{n+1} = \sigma^2 km^n + m^2 v_n.$$

Em particular, se $m = 1$, então $v_n = kn\sigma^2$ para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Escreva $v_n = \mathrm{Var}(Z_n)$. Dado $Z_n = i$, a geração seguinte é formada pelos filhos desses i indivíduos. Como os números de filhos são independentes, cada um com média m e variância σ^2, temos

$$E(Z_{n+1} \mid Z_n = i) = im, \qquad \mathrm{Var}(Z_{n+1} \mid Z_n = i) = i\sigma^2.$$

O segundo momento é a soma da variância com o quadrado da média. Aplicando essa identidade à distribuição condicionada, obtemos

$$E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = i) = i\sigma^2 + i^2 m^2.$$

Para calcular o segundo momento de Z_{n+1}, tomamos agora a esperança sobre os possíveis valores de Z_n. Como

$$E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = i) = i\sigma^2 + i^2 m^2,$$

a fórmula da esperança total fornece

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}^2) &= E\big[E(Z_{n+1}^2 \mid Z_n)\big] \\ &= E\big[\sigma^2 Z_n + m^2 Z_n^2\big] \\ &= \sigma^2 E(Z_n) + m^2 E(Z_n^2). \end{aligned}$$

Essa igualdade também permite verificar que os segundos momentos são finitos. De fato, como $Z_0 = k$, temos $E(Z_0^2) = k^2 < \infty$. Suponha agora que $E(Z_n^2) < \infty$. Como já sabemos que $E(Z_n) = km^n$ é finita, a igualdade anterior mostra que $E(Z_{n+1}^2) < \infty$. Portanto, por indução, todos os segundos momentos são finitos.

Podemos, então, calcular a variância subtraindo o quadrado da média. Usando $E(Z_{n+1}) = mE(Z_n)$, encontramos

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= E(Z_{n+1}^2) - [E(Z_{n+1})]^2 \\ &= \sigma^2 E(Z_n) + m^2\big(E(Z_n^2) - [E(Z_n)]^2\big) \\ &= \sigma^2 km^n + m^2 v_n. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos $E(Z_n) = km^n$ e reconhecemos, entre parênteses, a variância de Z_n.

Se $m = 1$, a recorrência se reduz a

$$v_{n+1} = k\sigma^2 + v_n.$$

Assim, a variância aumenta $k\sigma^2$ a cada geração. Como $Z_0 = k$ é constante, temos $v_0 = 0$ e, portanto,

$$v_n = nk\sigma^2.$$

■

Os dois termos da recorrência têm origens diferentes. O primeiro mede a variabilidade produzida pela reprodução na geração atual; o segundo vem da variação no número de indivíduos que chegaram a essa geração.

Com um indivíduo inicial e média de um filho, temos

$$E(Z_n) = 1, \qquad \operatorname{Var}(Z_n) = n\sigma^2.$$

Se $\sigma^2 > 0$, a média permanece constante, mas a variância cresce linearmente. Isso não significa que a população se mantenha perto de um indivíduo. Veremos que, nesse caso, ela acaba se extinguindo com probabilidade um.

Exemplo 4.4 — Dois multiplicadores de elétrons.

Retomemos os multiplicadores de elétrons mencionados na abertura. Em cada etapa, um elétron pode provocar a emissão de novos elétrons, que seguem para a etapa seguinte. Considere dois modelos, nos quais os números de elétrons emitidos por impactos diferentes são independentes e seguem, em todas as etapas, as distribuições:

Elétrons emitidos	Modelo A	Modelo B
0	1/4	1/2
2	1/2	0
4	1/4	1/2

Os dois equipamentos começam com dois elétrons e possuem três etapas de amplificação. Qual deles produz, em média, mais elétrons na saída? Em qual o sinal final é menos variável?

Se Y_A e Y_B representam o número de elétrons emitidos por um impacto, as médias são iguais:

$$E(Y_A) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2, \qquad E(Y_B) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

As variâncias, porém, são diferentes. Calculando os segundos momentos, obtemos

$$\operatorname{Var}(Y_A) = \left(2^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{4}\right) - 2^2 = 2,$$
$$\operatorname{Var}(Y_B) = 4^2 \cdot \frac{1}{2} - 2^2 = 4.$$

Denote por Z_n o número de elétrons após a etapa n, com $Z_0 = 2$. Como $m = 2$ nos dois modelos, o tamanho esperado da terceira geração é o mesmo:

$$E(Z_3) = 2 \cdot 2^3 = 16.$$

Para calcular a variância, usamos a recorrência da Proposição 4.8. Com $k = m = 2$ e $\nu_0 = 0$, ela fornece

$$\nu_1 = 2\sigma^2, \qquad \nu_2 = 12\sigma^2, \qquad \nu_3 = 56\sigma^2.$$

Portanto,

$$\operatorname{Var}(Z_3) = \begin{cases} 112, & \text{no modelo A,} \\ 224, & \text{no modelo B.} \end{cases}$$

Embora os dois equipamentos produzam o mesmo sinal médio, o modelo A apresenta menor variabilidade.

Há ainda outra diferença. Para que não reste nenhum elétron após a primeira etapa, os dois elétrons iniciais precisam deixar zero descendentes. Pela independência, essa probabilidade é

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = \begin{cases} (1/4)^2 = 1/16, & \text{no modelo A,} \\ (1/2)^2 = 1/4, & \text{no modelo B.} \end{cases}$$

Assim, a mesma média de reprodução pode acompanhar comportamentos bastante distintos, tanto na variabilidade do sinal quanto na chance de ele desaparecer. Para estudar a extinção em um número qualquer de gerações, precisaremos considerar toda a distribuição de descendentes.

◁

4.3.2 Geradoras e extinção

Para calcular a probabilidade de extinção, precisamos ir além do crescimento médio. Compare duas regras: na primeira, cada indivíduo tem exatamente um filho; na segunda, ele tem zero ou dois filhos, cada possibilidade com probabilidade $1/2$. Ambas têm média um, mas, na primeira, a população permanece sempre com o mesmo tamanho, enquanto, na segunda, veremos que a extinção é certa. Para entender essa diferença, precisamos levar em conta toda a distribuição de filhos.

Definição 4.3 — Função geradora de probabilidades

A função geradora de Y é

$$f(s) = E(s^Y) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j, \qquad 0 \le s \le 1,$$

com a convenção $0^0 = 1$.

Da definição, vemos que $f(0) = p_0$ e $f(1) = 1$. Cada coeficiente p_j registra a probabilidade de um indivíduo ter exatamente j filhos.

A principal vantagem da função geradora aparece quando somamos os números de filhos de indivíduos diferentes. Se Y_1 e Y_2 são independentes e têm a mesma distribuição de Y, então

$$\begin{aligned} E(s^{Y_1+Y_2}) &= E(s^{Y_1} s^{Y_2}) \\ &= E(s^{Y_1})E(s^{Y_2}) \\ &= f(s)^2. \end{aligned}$$

A segunda igualdade decorre da independência. Assim, a soma dos números de filhos corresponde ao produto das funções geradoras. Para i indivíduos que se reproduzem independentemente, o mesmo argumento mostra que a geradora do número total de filhos é $f(s)^i$.

Para estudar a extinção, usaremos também a continuidade e a convexidade de f, além de uma relação entre sua derivada e o número médio de filhos.

Proposição 4.9 — Propriedades elementares da geradora

A função f é contínua, não decrescente e convexa em $[0,1]$. Se $\mathbb{P}(Y \ge 2) > 0$, a convexidade é estrita. Quando $m = E(Y) < \infty$,

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{1 - f(s)}{1 - s} = f'(1-) = m, \qquad f(s) \ge 1 + m(s-1) \quad (0 \le s \le 1).$$

Se $\mathbb{P}(Y \ge 2) > 0$, a última desigualdade é estrita para $s < 1$.

A notação $f'(1-)$ indica a derivada em 1 tomada pela esquerda. A identidade $f'(1-) = m$ mostra como a geradora recupera a média dos filhos; a

última desigualdade compara seu gráfico com a reta tangente em 1.

Demonstração. Continuidade. Separamos a série que define f em uma soma finita e uma cauda. Como $|s^j - t^j| \le 1$ para $s, t \in [0,1]$, para qualquer inteiro $J \ge 0$ temos

$$|f(s) - f(t)| \le \sum_{j=0}^{J} p_j |s^j - t^j| + \sum_{j>J} p_j.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha primeiro J para que a segunda soma seja menor que $\varepsilon/2$. Isso é possível porque $\sum_j p_j = 1$. A primeira soma é finita e tende a zero quando s se aproxima de t. Assim, com s suficientemente próximo de t, ela também é menor que $\varepsilon/2$. Esse argumento vale inclusive nos extremos 0 e 1.

Monotonicidade e convexidade. Cada função s^j é não decrescente e convexa em $[0,1]$. Para $0 < \theta < 1$,

$$(\theta s + (1-\theta)t)^j \le \theta s^j + (1-\theta)t^j.$$

Multiplicar por p_j e somar primeiro até J produz a mesma desigualdade para as somas parciais de f. Fazer J crescer preserva a desigualdade e dá a convexidade de f; a monotonicidade segue do mesmo argumento termo a termo. Se algum $p_j > 0$ com $j \ge 2$, esse termo satisfaz a desigualdade estrita sempre que $s \ne t$, e os demais termos não a desfazem.

Derivada em 1 *e reta tangente.* Para encontrar a inclinação da geradora em 1, usaremos o quociente de diferenças, sem pressupor que podemos derivar a série termo a termo. Para $0 \le s < 1$, a identidade da soma geométrica fornece

$$\frac{1 - f(s)}{1 - s} = \sum_{j=1}^{\infty} p_j (1 + s + \cdots + s^{j-1}).$$

A igualdade pode ser obtida somando $p_j(1 - s^j)$ até J e fazendo J crescer, com s fixo. Cada parêntese é no máximo j, de modo que o quociente não excede m. Para obter uma cota inferior, fixamos J e conservamos apenas os primeiros termos:

$$\frac{1 - f(s)}{1 - s} \ge \sum_{j=1}^{J} p_j (1 + s + \cdots + s^{j-1}).$$

Quando s se aproxima de 1, a soma à direita se aproxima de $\sum_{j=1}^{J} j p_j$. Escolhendo primeiro J suficientemente grande e depois s suficientemente

próximo de 1, tornamos essa cota tão próxima de m quanto desejarmos. Como o quociente nunca excede m, seu limite é m.

A cota superior também dá $1 - f(s) \le m(1-s)$, que é a desigualdade da reta tangente. Se algum $p_j > 0$ com $j \ge 2$ e $s < 1$, então $1 + s + \cdots + s^{j-1} < j$ nesse termo; a cota superior é estrita, como afirmado. ∎

Para acompanhar várias gerações, escreva

$$F_n(s) = E_1(s^{Z_n}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_1(Z_n = j) s^j, \qquad s \in [0,1],$$

com $\mathbb{P}_k$ e E_k na convenção do Capítulo 2 para a cadeia iniciada em k.

Enquanto o coeficiente p_j de f representa a probabilidade de um indivíduo ter exatamente j filhos, o coeficiente de s^j em F_n representa a probabilidade de a geração n conter exatamente j indivíduos, partindo de um único ancestral. Assim, f descreve a reprodução individual, enquanto F_n descreve a distribuição do tamanho da geração n. O resultado a seguir relaciona essas geradoras por meio da composição de funções.

Proposição 4.10 — Iteração da função geradora

Para o processo de Galton–Watson iniciado com $Z_0 = 1$, as funções geradoras das sucessivas gerações satisfazem, para $s \in [0,1]$,

$$F_0(s) = s, \qquad F_{n+1}(s) = F_n(f(s)), \quad n \ge 0.$$

Consequentemente,

$$F_n = f^{\circ n}, \qquad n \ge 0,$$

onde $f^{\circ n}$ denota a composição de f consigo mesma n vezes, com $f^{\circ 0}(s) = s$. Em particular, também vale

$$F_{n+1}(s) = f(F_n(s)).$$

Demonstração. Como $Z_0 = 1$, temos $F_0(s) = E_1(s^{Z_0}) = s$.

Para relacionar duas gerações consecutivas, condicionamos ao tamanho da geração n. Se $Z_n = i$, os números de filhos dos i indivíduos são independentes e têm a mesma distribuição de Y. Portanto,

$$\begin{aligned} E_1(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = i) &= E\left(s^{Y_{n,1}+\cdots+Y_{n,i}}\right) \\ &= E\left(\prod_{r=1}^{i} s^{Y_{n,r}}\right) \\ &= \prod_{r=1}^{i} E(s^{Y_{n,r}}) = f(s)^i. \end{aligned}$$

A igualdade vale também para $i = 0$: nesse caso, a geração seguinte é vazia, e o produto vazio vale um, inclusive quando $s = 0$, pela convenção $0^0 = 1$.

Retirando o condicionamento pela esperança total, obtemos

$$F_{n+1}(s) = E_1\big(f(s)^{Z_n}\big) = F_n(f(s)),$$

onde a última igualdade usa a definição de F_n, pois $f(s) \in [0, 1]$.

Partindo de $F_0(s) = s$, a recorrência fornece, por indução, $F_n = f^{\circ n}$. Por fim, como $f^{\circ(n+1)} = f \circ f^{\circ n}$, também obtemos $F_{n+1} = f \circ F_n$. ∎

Por exemplo, $F_1(s) = f(s)$ e $F_2(s) = f(f(s))$. A cada nova geração, aplicamos f mais uma vez: trata-se de composição, não da potência $f(s)^n$.

Se a população começa com k indivíduos, a geradora inicial é s^k. O mesmo condicionamento e uma indução em n fornecem

$$E_k(s^{Z_n}) = F_n(s)^k.$$

Essa potência expressa a propriedade de ramificação: o tamanho da geração n, partindo de k indivíduos, tem a mesma distribuição que a soma dos tamanhos de k populações independentes, cada uma iniciada com um indivíduo.

Voltemos agora à probabilidade de extinção. Considere o tempo

$$H_0 = \inf\{n \geq 0 \,:\, Z_n = 0\}$$

e escreva

$$q_n = \mathbb{P}_1(H_0 \leq n)$$

para a probabilidade de a população se extinguir até a geração n.

Como zero é absorvente, a extinção até a geração n equivale a termos $Z_n = 0$. Portanto,

$$q_n = \mathbb{P}_1(Z_n = 0) = F_n(0).$$

Como $Z_0 = 1$, temos $q_0 = 0$. Além disso, pela Proposição 4.10,

$$q_{n+1} = F_{n+1}(0) = f(F_n(0)) = f(q_n).$$

A recorrência tem uma leitura genealógica. Para a população se extinguir até a geração $n+1$, cada família fundada por um filho da primeira geração precisa desaparecer em no máximo n gerações adicionais. Se há i filhos, a probabilidade é q_n^i. Retirando o condicionamento sobre o número de filhos, obtemos $\sum_i p_i q_n^i = f(q_n)$. Além disso, q_n não diminui quando damos à população mais uma geração para se extinguir.

Teorema 4.11 — Extinção como menor ponto fixo

A probabilidade $q = \mathbb{P}_1(H_0 < \infty)$ é a menor solução da equação $f(s) = s$ em $[0, 1]$. Partindo de $k \geq 1$ indivíduos, $\mathbb{P}_k(H_0 < \infty) = q^k$.

Como $f(1) = 1$, a equação de ponto fixo sempre admite a solução 1. Isso não significa que a extinção seja certa: quando há outras soluções, precisamos identificar qual delas representa essa probabilidade. A sequência que começa em $q_0 = 0$ faz exatamente essa seleção, pois considera horizontes finitos cada vez maiores. A fórmula q^k, por sua vez, decorre da independência entre as k famílias iniciais.

Demonstração. Os eventos $\{H_0 \leq n\}$ aumentam para $\{H_0 < \infty\}$. Pela continuidade das probabilidades de eventos crescentes, recordada na Proposição 2.9, temos $q_n \uparrow q$. A continuidade de f, provada na Proposição 4.9, permite passar ao limite em $q_{n+1} = f(q_n)$ e concluir que $q = f(q)$.

Se $r \in [0, 1]$ satisfaz $f(r) = r$, então $q_0 = 0 \leq r$. Suponha $q_n \leq r$. Como f é não decrescente,

$$q_{n+1} = f(q_n) \leq f(r) = r.$$

A indução mostra que $q_n \leq r$ para todo n; tomando o limite, obtemos $q \leq r$. Assim, nenhum outro ponto fixo em $[0, 1]$ pode ser menor que a probabilidade de extinção.

Por fim, para uma população iniciada com k indivíduos, a fórmula da geradora e o fato de zero ser absorvente dão

$$\mathbb{P}_k(H_0 \le n) = \mathbb{P}_k(Z_n = 0) = F_n(0)^k = q_n^k.$$

Fazendo $n \to \infty$, a mesma continuidade das probabilidades e a continuidade da potência $s \mapsto s^k$ fornecem $\mathbb{P}_k(H_0 < \infty) = q^k$. Equivalentemente, cada uma das k famílias iniciais precisa se extinguir; a independência dessas famílias produz o mesmo fator q^k. ∎

Teorema 4.12 — Regimes subcrítico, crítico e supercrítico

Suponha $m < \infty$ e $Z_0 = 1$. Se $m < 1$, então $q = 1$. Se $m = 1$ e $\mathbb{P}(Y = 1) < 1$, também $q = 1$. Se $m > 1$, então $q < 1$. No caso degenerado $Y = 1$ quase certamente, $Z_n = 1$ para todo n e $q = 0$.

A média de um filho por indivíduo separa os regimes. No caso crítico não degenerado, a esperança do tamanho da população permanece constante e, ainda assim, a extinção é certa. Quando $m > 1$, há uma probabilidade positiva de sobrevivência; essa probabilidade só é igual a um se nenhum indivíduo puder ter zero filhos.

Ideia — Leitura geométrica dos três regimes

A equação $f(s) = s$ pede os pontos em que o gráfico de $y = f(s)$ encontra a diagonal $y = s$. Um encontro sempre ocorre em $s = 1$. Nesse ponto, a inclinação da geradora é $f'(1-) = m$; junto com a convexidade, ela determina o que pode acontecer à esquerda.

Se $m < 1$, a tangente em 1 tem inclinação menor que a diagonal e fica acima dela à esquerda de 1. Pela convexidade, o gráfico de f fica sobre a tangente ou acima dela e, portanto, estritamente acima da diagonal para $s < 1$. Não há outro ponto fixo.

Se $m = 1$ e a reprodução não é degenerada, a curva tem a mesma inclinação que a diagonal em 1, mas é estritamente convexa. Ela continua acima da diagonal para $s < 1$, e a extinção também é certa.

Se $m > 1$, a inclinação em 1 supera a da diagonal. Imediatamente à esquerda, temos $f(s) < s$. Já em $s = 0$ vale $f(0) = p_0 \ge 0$; pela continu-

idade, há um ponto fixo abaixo de 1: ele é 0 quando $p_0 = 0$ e pertence a $(0, 1)$ quando $p_0 > 0$. Esse menor ponto fixo é a probabilidade de extinção.

Demonstração. Para $m < 1$ e $s < 1$, a desigualdade da reta tangente, justificada na Proposição 4.9, fornece

$$f(s) \geq 1 + m(s-1) > s.$$

A desigualdade estrita vale porque $1 + m(s-1) - s = (1-m)(1-s) > 0$. Logo o único ponto fixo é 1, e o Teorema 4.11 dá $q = 1$. Se $m = 1$ e Y não é identicamente um, necessariamente $\mathbb{P}(Y \geq 2) > 0$: caso contrário, Y só assumiria os valores 0 e 1, e a média um forçaria $\mathbb{P}(Y = 1) = 1$. A desigualdade da reta tangente é então estrita para $s < 1$: $f(s) > 1+(s-1) = s$. Novamente, o único ponto fixo é 1, e $q = 1$.

Se $m > 1$, o quociente $(1 - f(s))/(1 - s)$ é maior que um para $s < 1$ suficientemente próximo de 1, pois seu limite é m. Isso equivale a $f(s) < s$ nessa região. Por outro lado, $f(0) - 0 = p_0 \geq 0$. Se $p_0 > 0$, a função contínua $f(s) - s$ muda de sinal entre 0 e um ponto próximo de 1, logo se anula em $(0, 1)$. Se $p_0 = 0$, o próprio zero é ponto fixo. Em ambos os casos, o menor ponto fixo é menor que um. Quando $Y = 1$ quase certamente, cada indivíduo é substituído por exatamente um filho. A recursão dá $Z_{n+1} = Z_n$ em todas as gerações; como $Z_0 = 1$, nunca se atinge zero e $q = 0$. ∎

A mesma distinção pode ser vista tomando a probabilidade de sobrevivência, em vez da de extinção, como incógnita. Para isso, definimos

$$\lambda(s) = 1 - f(1-s), \qquad 0 \leq s \leq 1.$$

Se q é a probabilidade de extinção, então $\rho = 1 - q$ é a probabilidade de sobrevivência. Como $f(q) = q$, temos $\lambda(\rho) = \rho$. Como q é o menor ponto fixo de f, ρ é o maior ponto fixo de λ em $[0, 1]$.

Além disso, $\lambda(0) = 0$ e $\lambda'(0+) = f'(1-) = m$: a inclinação que antes observávamos em 1 passa a ser vista na origem.

A Figura 4.5 compara os três regimes para uma distribuição que atribui probabilidade $1 - p$ a nenhum filho e probabilidade p a três filhos.

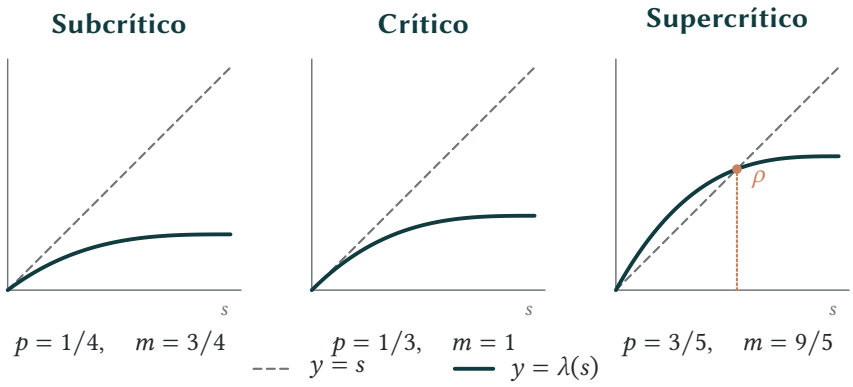


Figura 4.5: Os três regimes para $\lambda(s) = p[1-(1-s)^3]$. O zero é sempre um ponto fixo. Nos casos subcrítico e crítico, é o único; no supercrítico, aparece também o ponto fixo positivo ρ, que representa a probabilidade de sobrevivência.

No último painel, com $p = 3/5$, obtemos $\rho = (9-\sqrt{33})/6 \approx 0{,}543$. A possibilidade de sobrevivência aparece, portanto, como um novo ponto de encontro entre a curva e a diagonal.

Podemos agora retomar as aplicações da abertura. Nas linhagens, a extinção significa não haver mais descendentes; nas reações em cadeia, significa que a sequência de fissões se encerrou. O critério se refere ao número médio de descendentes por indivíduo, contando também os que não deixam nenhum, e depende das hipóteses de reprodução independente e de uma mesma lei ao longo das gerações.

Nem toda aplicação, porém, acompanha um número ilimitado de gerações. Em um multiplicador com n etapas, iniciado por um elétron, a probabilidade de não haver elétrons na saída é q_n, não q. A quantidade q descreve a extinção eventual na idealização em que o mecanismo pode se repetir indefinidamente.

Exemplo 4.5 — Zero ou dois filhos.

Suponha $p_0 = 1/4$ e $p_2 = 3/4$. Então $m = 3/2$ e $f(s) = 1/4 + 3s^2/4$. A equação de ponto fixo equivale a

$$3s^2 - 4s + 1 = (3s-1)(s-1) = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 4.11, $q = 1/3$, apesar de $E_1(Z_n) = (3/2)^n$. Com três indivíduos iniciais, a extinção tem probabilidade $1/27$, e a sobrevivência,

26/27.

◁

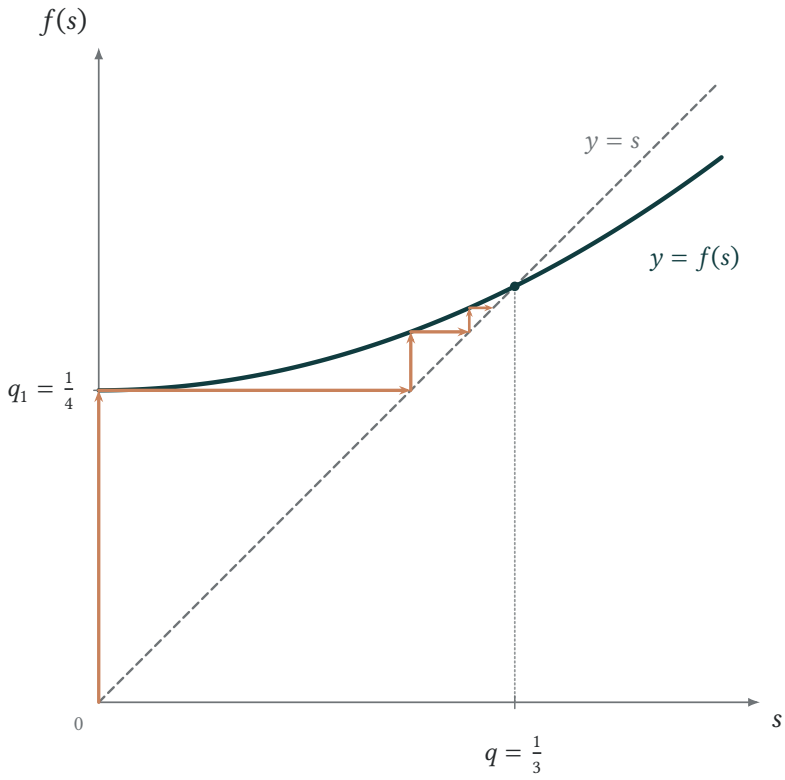


Figura 4.6: A geradora $f(s) = 1/4+3s^2/4$ e a diagonal no recorte $0 \leq s \leq 1/2$. As setas mostram a iteração $q_{n+1} = f(q_n)$, iniciada em $q_0 = 0$, aproximando-se do menor ponto fixo, $q = 1/3$. A outra solução, $s = 1$, está fora do recorte.

Na Figura 4.6, cada degrau parte de (q_n, q_n), na diagonal, e sobe até (q_n, q_{n+1}), no gráfico de f. O trecho horizontal leva então a (q_{n+1}, q_{n+1}), de volta à diagonal. A iteração iniciada em zero se aproxima do menor ponto fixo sem ultrapassá-lo. Essa construção também permite visualizar o procedimento numérico usado no próximo exemplo.

Exemplo 4.6 — Descendência Poisson.
Para Y com lei de Poisson de média 2, isto é, $\mathbb{P}(Y = j) = e^{-2}2^j/j!$, temos

$$f(s) = e^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2s)^j}{j!} = e^{-2}e^{2s} = e^{2(s-1)}.$$

Usamos, na segunda igualdade, a série da função exponencial. Aqui a equação de ponto fixo não é polinomial, mas podemos aproximar sua menor solução pela mesma iteração usada no Teorema 4.11. Começando em $q_0 = 0$ e calculando $q_{n+1} = e^{2(q_n-1)}$, obtemos $q \approx 0{,}203188$. Assim, a extinção tem probabilidade de cerca de 20,3% a partir de um indivíduo. Com dois indivíduos iniciais, essa probabilidade cai para $q^2 \approx 0{,}041285$.

◁

Os exemplos anteriores mostram como calcular a probabilidade de extinção a partir de uma lei de descendentes. A próxima comparação mostra por que duas leis com a mesma média podem levar a respostas diferentes mesmo quando ambas são supercríticas.

Exemplo 4.7 — Mesma média, diferentes probabilidades de extinção.
Cada indivíduo produz dois descendentes, mas apenas os que sobrevivem até a idade de reprodução são contados na geração seguinte. Cada descendente tem probabilidade $3/5$ de sobreviver. Compare duas regras para essa sobrevivência. Em ambas, famílias diferentes e gerações diferentes usam sorteios independentes.

Mortalidade independente. Os dois descendentes sobrevivem independentemente. O número Y_A dos que chegam à geração seguinte tem distribuição binomial com parâmetros 2 e $3/5$, de modo que

$$f_A(s) = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}s\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{12}{25}s + \frac{9}{25}s^2.$$

Pode não sobreviver nenhum, apenas um ou ambos.

Mortalidade conjunta. Os dois descendentes sobrevivem juntos, com probabilidade $3/5$, ou ambos morrem, com probabilidade $2/5$. O número Y_B dos sobreviventes é, portanto, zero ou dois, e

$$f_B(s) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}s^2.$$

Aqui a dependência está dentro de cada família: o resultado de uma família não determina o de outra.

As duas regras têm a mesma média,

$$E(Y_A) = E(Y_B) = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}.$$

Assim, começando com um indivíduo, ambas produzem o mesmo tamanho esperado $(6/5)^n$ na geração n. Para comparar as probabilidades de extinção, procuramos os menores pontos fixos das geradoras. No primeiro caso,

$$f_A(s) = s \quad \Longleftrightarrow \quad 9s^2 - 13s + 4 = (9s - 4)(s - 1) = 0,$$

logo $q_A = 4/9$. No segundo,

$$f_B(s) = s \quad \Longleftrightarrow \quad 3s^2 - 5s + 2 = (3s - 2)(s - 1) = 0,$$

logo $q_B = 2/3$. A extinção é, portanto, mais provável sob a mortalidade conjunta, embora cada descendente tenha a mesma probabilidade individual de sobrevivência nos dois modelos.

As variâncias também diferem:

$$\mathrm{Var}(Y_A) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}, \qquad \mathrm{Var}(Y_B) = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{25}.$$

Na segunda regra, uma família inteira pode ser perdida de uma só vez; na primeira, um dos descendentes pode sobreviver mesmo quando o outro morre. A média de reprodução não distingue essas situações, mas a lei de descendentes e sua função geradora distinguem.

◁

Até aqui, supusemos conhecida a distribuição de descendentes. Em uma aplicação, ela precisa ser estimada a partir das observações.

4.3.3 Cascatas: o que os dados permitem estimar

Em uma cascata de compartilhamentos, chamamos de filho uma transmissão *direta*. Se uma pessoa alcança outra e esta, por sua vez, alcança dez novas pessoas, a primeira teve um filho, não onze. Contar filhos não é o mesmo que contar todos os indivíduos atingidos: a primeira quantidade

descreve a reprodução de cada participante; a segunda, o alcance acumulado da cascata.

Suponha que $Y_1, \dots, Y_N$ sejam observações independentes, completamente acompanhadas, da mesma distribuição de filhos. Escreva $N_j = \#\{r : Y_r = j\}$, com $N > 0$. A distribuição empírica e sua geradora são

$$\hat{p}_j = \frac{N_j}{N}, \qquad \widehat{m} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} Y_r, \qquad \widehat{f}(s) = \sum_j \hat{p}_j s^j.$$

Definimos $\hat{q}$ como a probabilidade de extinção do processo cuja distribuição de descendentes é $\hat{p}$. Pelo Teorema 4.11, ela é o menor ponto fixo de $\widehat{f}$. Esses números descrevem o modelo ajustado; não quantificam a incerteza amostral, que não trataremos aqui.

A distribuição empírica também pode ser obtida procurando a lei que torna os resultados observados mais prováveis. Pela independência, a probabilidade desses resultados, sob uma lei $p = (p_j)$, é

$$L(p) = \prod_{r=1}^{N} p_{Y_r} = \prod_{j\,:\,N_j>0} p_j^{N_j}.$$

Vista como função da lei desconhecida p, essa expressão é chamada de *verossimilhança*.

Proposição 4.13 — Estimador de máxima verossimilhança

Entre todas as distribuições de probabilidade em $\mathbb{N}_0$, a verossimilhança $L(p)$ é maximizada por $\hat{p}_j = N_j/N$, inclusive quando algumas contagens são zero.

Uma categoria não observada recebe probabilidade zero no estimador, mas isso não prova que seja impossível na população. Se todas as categorias observadas têm probabilidade positiva, redistribuir entre elas, proporcionalmente, qualquer massa atribuída às demais aumenta a verossimilhança.

Demonstração. Seja $J = \{j : N_j > 0\}$ o conjunto das categorias observadas. Esse conjunto é finito, pois foram acompanhados apenas N indivíduos; assim, todas as somas de logaritmos a seguir são finitas. Se $p_j = 0$ para algum $j \in J$, a verossimilhança se anula, enquanto $\hat{p}$ fornece um valor positivo. Basta, portanto, considerar distribuições com $p_j > 0$ para todo $j \in J$.

Escreva

$$\ell(p) = \sum_{j \in J} N_j \log p_j$$

para o logaritmo da verossimilhança. Como o logaritmo é crescente, maximizar ℓ equivale a maximizar a verossimilhança. A desigualdade $\log u \le u - 1$, para $u > 0$, segue de que $u - 1 - \log u$ decresce até $u = 1$ e cresce depois, atingindo ali o mínimo zero. Aplicando-a a cada razão positiva $p_j / \hat{p}_j$, obtemos

$$\begin{aligned} \ell(p) - \ell(\hat{p}) &= N \sum_{j \in J} \hat{p}_j \log \frac{p_j}{\hat{p}_j} \\ &\le N \sum_{j \in J} (p_j - \hat{p}_j) \\ &= N \left(\sum_{j \in J} p_j - 1 \right) \le 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade usa apenas que a massa total de uma distribuição é um. A igualdade exige $p_j = \hat{p}_j$ para todo $j \in J$, pois $\log u = u - 1$ apenas quando $u = 1$. Nesse caso, a massa em J já soma um, de modo que $p_j = 0$ fora de J. Logo, $p = \hat{p}$, o que prova também a unicidade do maximizador. ■

Exemplo 4.8 — Uma amostra de transmissores.

Uma amostra didática de 80 pessoas, selecionadas antes de conhecer seus resultados e acompanhadas durante toda a janela de reprodução, fornece as seguintes contagens:

j	0	1	2
N_j	24	12	44

A média estimada é $\widehat{m} = (12 + 2 \cdot 44)/80 = 1{,}25$, e a função geradora empírica é

$$\widehat{f}(s) = 0{,}30 + 0{,}15 s + 0{,}55 s^2.$$

Pelo Teorema 4.11, a equação $11s^2 - 17s + 6 = (11s-6)(s-1) = 0$ dá $\hat{q} = 6/11$. Com quatro sementes independentes, a probabilidade ajustada de extinção é $(6/11)^4 \approx 0{,}08852$.

◁

Essa amostra não seria equivalente a reunir todos os indivíduos de uma única árvore que já terminou. Em uma árvore finita com N vértices, cada indivíduo, exceto a raiz, está ligado a seu pai por uma aresta. Há, portanto, $N-1$ arestas, que correspondem aos $N-1$ filhos contados na árvore inteira. A média observada seria forçosamente $(N-1)/N < 1$, independentemente da lei de reprodução subjacente. Selecionar apenas cascatas que terminaram pode, assim, esconder um mecanismo supercrítico; selecionar apenas cascatas grandes introduz outro viés.

Mesmo com uma amostra bem escolhida, precisamos examinar como os indivíduos foram acompanhados. Se a coleta termina antes de alguém ter oportunidade de produzir todos os seus filhos, há *censura*: um zero registrado pode ser apenas temporário. Em uma rede de contatos, duas linhagens também podem alcançar a mesma pessoa. Essas *colisões* rompem a estrutura de árvore do modelo.

Outras dificuldades dizem respeito à reprodução. Pessoas expostas ao mesmo contexto podem não se comportar de forma independente, e grupos ou gerações diferentes podem seguir leis distintas. Nesses casos, a *dependência* e a *heterogeneidade* limitam a descrição por uma única função geradora.

A interpretação de $\widehat{m}$ e $\hat{q}$ depende, portanto, de como a amostra foi obtida. É preciso distinguir uma característica da reprodução de um efeito da seleção dos indivíduos ou da interrupção do acompanhamento.

Em uma rede finita, a sobrevivência eterna é uma idealização: o processo de Galton–Watson funciona sobretudo como uma aproximação inicial, antes que a saturação e as colisões passem a dominar a dinâmica. Depois dos problemas de síntese, a Seção 4.5 retoma essa limitação ao explorar grafos aleatórios. Para aprofundar a teoria clássica de ramificação e seus exercícios, veja Schinazi (1999, seção I.9).

4.4 Problemas de síntese

Os modelos deste capítulo levantam perguntas que não se resolvem olhando apenas uma transição. Na ruína sem barreira superior, precisamos escolher a solução correta de uma equação harmônica; no protocolo Aloha, determinar o crescimento de uma fila; na ramificação, distinguir tamanho esperado e probabilidade de extinção. Os três problemas a seguir retomam essas perguntas com as ferramentas já desenvolvidas.

Exemplo 4.9 — Ruína sem uma barreira superior: qual solução escolher?.

Um jogador começa com $i \geq 1$ unidades e, a cada rodada, ganha uma unidade com probabilidade $p \in (0,1)$ ou perde uma unidade com probabilidade $q = 1 - p$. O jogo termina ao atingir zero, mas não há limite superior para a fortuna.

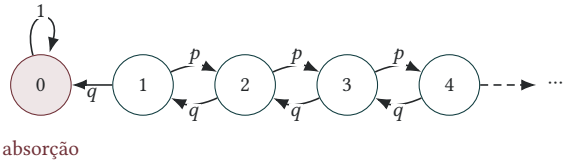


Figura 4.7: Passeio nos inteiros não negativos: zero é absorvente, mas não existe barreira à direita.

Queremos $h(i) = \mathbb{P}_i(H_0 < \infty)$. Aqui $h(i)$ representa a probabilidade de *ruína* sem uma barreira superior. Em contraste, u_i no Exemplo 2.33 representa a probabilidade de *atingir a meta* antes de zero no jogo com duas barreiras. Condicionando pelo primeiro passo,

$$h(0) = 1, \qquad h(i) = p\,h(i+1) + q\,h(i-1), \quad i \geq 1.$$

No espaço infinito, essas equações não identificam sozinhas a probabilidade procurada: a função constante $h(i) = 1$ sempre as satisfaz. Precisamos de uma condição que selecione a solução correta.

Para isso, introduzimos provisoriamente uma barreira $N > i$. A probabilidade $h_N(i) = \mathbb{P}_i(H_0 < H_N)$ já foi obtida na ruína finita:

$$h_N(i) = \begin{cases} \dfrac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}, & p \neq q, \\[2ex] 1 - \dfrac{i}{N}, & p = q. \end{cases}$$

Os eventos $\{H_0 < H_N\}$ crescem com N e sua união é $\{H_0 < \infty\}$: toda trajetória que chega a zero percorreu apenas um número finito de estados antes dessa chegada. A monotonicidade também pode ser vista diretamente: para atingir uma barreira mais distante antes de zero, o passeio precisa atravessar cada barreira mais próxima. Por outro lado, se $H_0 < \infty$, o máximo das posições até H_0 é finito; qualquer N acima desse máximo satisfaz $H_0 < H_N$. Pela continuidade das probabilidades de eventos crescentes, basta, portanto, tomar $N \to \infty$. Se $p < q$, dividimos numerador e denominador de $h_N(i)$ por $(q/p)^N$ e obtemos o limite um; se $p > q$, usamos $(q/p)^N \to 0$. No caso $p = q$, temos $i/N \to 0$. Assim,

$$\boxed{h(i) = \begin{cases} 1, & p \le q, \\ (q/p)^i, & p > q. \end{cases}}$$

Por exemplo, se $p = 3/5$ e o jogador começa com duas unidades, a probabilidade de ruína é $(2/3)^2 = 4/9$. Logo, ele tem probabilidade $5/9$ de nunca ficar sem dinheiro.

A resposta também é a *menor solução não negativa* das equações de primeiro passo com $h(0) = 1$. De fato, se $u \ge 0$ é outra solução, seu valor no estado N é não negativo. Em $\{0, \dots, N\}$, a função u é harmônica no interior. A chegada a uma das barreiras ocorre quase certamente: em qualquer bloco de N rodadas, uma sequência de N perdas, de probabilidade $q^N > 0$, garante a chegada a zero se a chegada ainda não ocorreu. A probabilidade de permanecer no interior durante r blocos é, portanto, no máximo $(1 - q^N)^r$, que tende a zero.

As probabilidades de atingir cada barreira são harmônicas no interior, por condicionamento no primeiro passo. A combinação dessas probabilidades com os valores de fronteira $u(0) = 1$ e $u(N)$ tem os mesmos valores de u nas duas barreiras. Ela é a única função harmônica com esses dados: se a diferença entre duas soluções tivesse máximo positivo no interior, a equação de média ponderada, com $p, q > 0$, obrigaria os dois vizinhos a terem o mesmo máximo. Repetindo o argumento, chegaríamos a uma barreira, onde a diferença é zero, uma contradição. Aplicar o mesmo raciocínio ao mínimo exclui uma diferença negativa. Logo, decompor segundo a primeira barreira atingida dá

$$u(i) = \mathbb{P}_i(H_0 < H_N) + u(N)\mathbb{P}_i(H_N < H_0) \ge h_N(i).$$

Deixando $N \to \infty$, obtemos $u(i) \geq h(i)$. A condição de minimalidade seleciona, entre as soluções não negativas da equação harmônica, aquela que representa a probabilidade procurada.

◁

Exemplo 4.10 — Aloha revisitado: como cresce a fila quando os sucessos cessam?.

O protocolo Aloha do Exemplo 4.2 tem chegadas independentes de uma mensagem com probabilidade $3/4$ e de duas mensagens com probabilidade $1/4$. Como vimos, o número total de transmissões bem-sucedidas é finito quase certamente, e a demonstração fornece

$$\mathbb{P}(I_n = 1) \leq \frac{3}{4}\left(\frac{13}{16}\right)^n.$$

O diagrama da Figura 4.3 explica o mecanismo: quanto maior a fila de mensagens pendentes, mais provável é uma colisão.

A desigualdade da união e a série geométrica dão uma cota para os sucessos futuros:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{algum sucesso a partir do instante } n) &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(I_k = 1) \\ &\leq 4\left(\frac{13}{16}\right)^n.\end{aligned}$$

Por exemplo, para $n = 22$ a cota é menor que 0,05. Portanto, com probabilidade superior a 95%, não ocorre mais nenhuma transmissão bem-sucedida a partir desse instante, embora continuem chegando mensagens.

Para calcular o crescimento da fila, retomemos sua identidade:

$$X_n = X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k - \sum_{k=0}^{n-1} I_k.$$

A lei forte dos grandes números, aplicada às chegadas, dá

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A_k \longrightarrow E(A_0) = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{5}{4} \quad \text{quase certamente.}$$

A soma de todos os I_k é finita quase certamente, logo sua contribuição dividida por n tende a zero. Concluímos que

$$\boxed{\frac{X_n}{n} \longrightarrow \frac{5}{4} \quad \text{quase certamente.}}$$

Como o sistema realiza somente um número finito de transmissões bem-sucedidas, a fila cresce à taxa assintótica das próprias chegadas.

◁

Exemplo 4.11 — Duas populações com o mesmo crescimento médio. Duas populações começam com um único indivíduo. Em cada geração, seus descendentes reproduzem-se independentemente, segundo o modelo de Galton–Watson. Compare as seguintes leis para o número Y de filhos:

$$\begin{aligned} &\text{População A:} \quad \mathbb{P}(Y=2)=1, \\ &\text{População B:} \quad \mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Y=3)=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nas duas populações a média de filhos é exatamente $m = E(Y) = 2$; portanto, o teorema do tamanho esperado da geração fornece

$$\boxed{E_1(Z_n) = 2^n \quad \text{nos dois modelos.}}$$

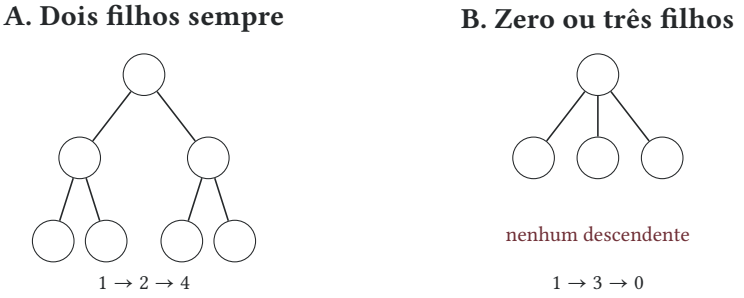


Figura 4.8: À esquerda, toda geração duplica; à direita, uma trajetória possível se extingue após uma geração com três indivíduos. A média de filhos nos dois modelos é a mesma.

A igualdade das médias não implica igualdade das chances de sobrevivência. Na população A, todo indivíduo tem dois filhos. Começando com um indivíduo, $Z_n = 2^n$ em todas as trajetórias e a extinção é impossível.

Na população B, a função geradora é

$$f(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s^3.$$

Pelo teorema da extinção, a probabilidade q de desaparecimento é o *menor* ponto fixo de f. A equação $f(q) = q$ equivale a

$$2q^3 - 3q + 1 = (q-1)(2q^2 + 2q - 1) = 0.$$

As raízes são 1, $(-1+\sqrt{3})/2$ e $(-1-\sqrt{3})/2$. A última é negativa e, entre os dois pontos fixos de $[0,1]$, devemos escolher o menor:

$$\boxed{q = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}366.}$$

Embora seu tamanho esperado cresça como 2^n, essa população desaparece com probabilidade superior a 36%.

As probabilidades de extinção em horizontes finitos permitem acompanhar essa aproximação. Na primeira geração, a extinção tem probabilidade $q_1 = 1/3$. Até a segunda geração,

$$q_2 = f(q_1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{29}{81},$$

e as iterações seguintes aumentam até q. Com três indivíduos iniciais, cujas famílias são independentes, a extinção eventual tem probabilidade $q^3 \approx 0{,}049$.

A média m determina o crescimento *esperado* de cada geração e separa regimes de reprodução. Ela não determina, sozinha, a chance de extinção: essa probabilidade depende da distribuição completa de descendentes, resumida pela função geradora.

◁

Nos três problemas, uma conta local só ganha sentido quando a relacionamos ao comportamento de longo prazo. Na ruína, a minimalidade seleciona a probabilidade correta; no Aloha, a soma dos sucessos determina a taxa de crescimento da fila; na ramificação, a distribuição dos filhos distingue crescimento esperado e chance de sobrevivência.

4.5 Percolação em árvores e grafos aleatórios*

Até aqui, usamos processos de ramificação para acompanhar o número de indivíduos de cada geração. Podemos fazer uma pergunta semelhante em

uma rede: se cada ligação estiver disponível apenas com certa probabilidade, quantos vértices poderão ser alcançados a partir de um vértice inicial?

A resposta é particularmente simples quando a rede tem a forma de uma árvore. Nesse caso, os vértices alcançados se organizam em gerações, como em uma árvore genealógica, e a relação com Galton–Watson é exata. Em um grafo aleatório com ciclos, essa relação deixa de ser exata, mas ainda ajuda a explicar quando surge uma componente que reúne uma fração considerável dos vértices.

Definição 4.4 — Percolação por arestas

Considere um grafo não orientado $G = (V, E)$, finito ou enumerável, e um número $p \in [0, 1]$. Cada aresta é declarada *aberta* com probabilidade p e *fechada* com probabilidade $1 - p$, independentemente das demais. O grafo formado pelos mesmos vértices e apenas pelas arestas abertas é chamado de *percolação por arestas* em G.

Denotaremos por $C(v)$ a *componente aberta* de v: o conjunto de vértices que podem ser alcançados a partir de v por caminhos de arestas abertas, incluindo o próprio v. Se o grafo for infinito, uma questão natural será saber quando $C(v)$ também pode ser infinita.

4.5.1 Percolação em uma árvore infinita

Considere uma árvore infinita enraizada em o, na qual cada vértice tem exatamente $b \geq 2$ filhos. Como se trata de uma árvore, cada vértice diferente da raiz tem um único pai. A raiz forma a geração zero, seus filhos formam a geração um, e assim por diante. Suponha que cada aresta seja aberta, independentemente das demais, com probabilidade p.

Seja Z_n o número de vértices da geração n que podem ser alcançados a partir da raiz usando somente arestas abertas. Em particular, $Z_0 = 1$. Um vértice alcançado pode dar acesso a alguns de seus b filhos: somente aqueles ligados a ele por uma aresta aberta.

Proposição 4.14 — Percolação e ramificação em árvores

O processo (Z_n) é um processo de Galton–Watson com distribuição de descendentes

$$Y \sim \text{Binomial}(b, p).$$

Sua função geradora e seu número médio de descendentes são

$$f(s) = (1 - p + ps)^b, \qquad m = bp.$$

A distribuição binomial aparece porque cada vértice possui b possibilidades de alcançar um filho, e cada uma delas ocorre com probabilidade p. A independência das arestas garante a independência das reproduções.

Demonstração. Suponha conhecidos os vértices alcançados até a geração n. Para cada um dos Z_n vértices alcançados nessa geração, examinamos as b arestas que o ligam aos filhos. Essas arestas ainda não foram examinadas e são independentes das utilizadas nas gerações anteriores.

Assim, o número $Y_{n,r}$ de filhos alcançados a partir do r-ésimo vértice tem distribuição binomial de parâmetros b e p. Dois vértices distintos têm conjuntos disjuntos de arestas para seus filhos. Além disso, em uma árvore, um filho só pode ser alcançado por meio de seu próprio pai: não há caminhos alternativos que levem a contá-lo duas vezes. A independência das arestas permite, portanto, associar a cada vértice uma reprodução independente, sempre com a mesma lei binomial. Assim, essas variáveis são independentes entre si e entre gerações, e

$$Z_{n+1} = \sum_{r=1}^{Z_n} Y_{n,r}.$$

Esta é exatamente a construção da Definição 4.2. Por fim, a fórmula binomial fornece

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} p^j (1-p)^{b-j} s^j \\ &= (1 - p + ps)^b. \end{aligned}$$

Para calcular a média, escreva Y como a soma dos b indicadores de abertura das arestas que ligam um vértice a seus filhos. Cada indicador tem esperança p; pela linearidade da esperança, $m = E(Y) = bp$. ∎

Como as gerações são disjuntas e cada uma contém no máximo b^n vértices, o tamanho da componente da raiz é

$$|C(o)| = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n.$$

Essa componente é infinita precisamente quando (Z_n) nunca se extingue. Se alguma geração está vazia, todas as seguintes também estarão, e a soma terá apenas um número finito de termos não nulos. Por outro lado, se $Z_n \geq 1$ para todo n, a soma é infinita.

Teorema 4.15 — Limiar de percolação na árvore

Seja

$$\theta(p) = \mathbb{P}(|C(o)| = \infty).$$

Para a árvore com $b \geq 2$ filhos por vértice,

$$\theta(p) = 0 \quad \text{se } p \leq \frac{1}{b}, \qquad \theta(p) > 0 \quad \text{se } p > \frac{1}{b}.$$

Além disso, $q = 1 - \theta(p)$ é a menor solução em $[0, 1]$ de

$$q = (1 - p + pq)^b.$$

A *probabilidade crítica* é o limiar

$$p_c = \inf\{p \in [0, 1] \,:\, \theta(p) > 0\}.$$

O teorema mostra que $p_c = 1/b$. Até esse valor, inclusive no ponto crítico, a componente da raiz é finita quase certamente. Acima dele, surge uma probabilidade positiva de ela ser infinita, embora a extinção continue possível enquanto $p < 1$.

Demonstração. Pela Proposição 4.14, a média de descendentes é $m = bp$. Se $p < 1/b$, então $m < 1$ e o processo se extingue quase certamente. No ponto $p = 1/b$, temos $m = 1$. Como $b \geq 2$, a binomial correspondente não é a distribuição degenerada $Y = 1$: em particular, $\mathbb{P}(Y = 0) = (1 - 1/b)^b > 0$. Também nesse caso a extinção é certa.

Se $p > 1/b$, então $m > 1$ e a sobrevivência tem probabilidade positiva. Essas são exatamente as conclusões do Teorema 4.12. A equivalência entre sobrevivência e componente infinita dá as afirmações sobre $\theta(p)$.

Pelo Teorema 4.11, a probabilidade de extinção é a menor solução de $f(q) = q$. Como $\theta(p)$ é a probabilidade do evento complementar à extinção, temos $q = 1 - \theta(p)$. Substituir $f(s) = (1 - p + ps)^b$ fornece a equação indicada. ∎

Também podemos escrever a equação em termos da probabilidade de percolação. Substituindo $q = 1 - \theta(p)$, obtemos

$$\theta(p) = 1 - (1 - p\theta(p))^b.$$

Quando $p \leq p_c$, a única solução em $[0, 1]$ é zero. Quando $p > p_c$, existe também uma solução positiva, e é ela que corresponde à probabilidade de percolação: trata-se da maior solução em $[0, 1]$. Isso decorre da mudança de variável $\theta = 1 - q$, que inverte a ordem das soluções: o menor ponto fixo na variável q corresponde à maior solução na variável θ.

Exemplo 4.12 — Uma árvore binária.

Suponha que cada vértice tenha dois filhos e que cada aresta esteja aberta com probabilidade $3/4$. Nesse caso,

$$m = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}, \qquad f(s) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}s\right)^2.$$

A equação de extinção é

$$q = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}q\right)^2,$$

ou, equivalentemente,

$$9q^2 - 10q + 1 = (9q - 1)(q - 1) = 0.$$

Como a probabilidade de extinção é o menor ponto fixo, $q = 1/9$. Portanto,

$$\theta(3/4) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Compare com o Exemplo 4.5, em que cada indivíduo tinha zero ou dois filhos, com probabilidades $1/4$ e $3/4$. A média de descendentes também era $3/2$, mas a probabilidade de extinção era $1/3$, não $1/9$. A chance de alcançar infinitos vértices depende da distribuição dos descendentes, não apenas de sua média.

◁

Há ainda uma distinção entre a extinção e o tamanho esperado da componente. Para calcular $E(|C(o)|)$ a partir da soma das gerações, começamos pela contagem até uma geração finita:

$$B_N = \sum_{n=0}^{N} Z_n, \qquad E(B_N) = \sum_{n=0}^{N} (bp)^n.$$

A última igualdade usa o Teorema 4.7 e a linearidade da esperança. Como B_N cresce para $|C(o)|$, a passagem ao limite para contagens crescentes, justificada no Lema 2.15, fornece

$$E\big(|C(o)|\big) = \sum_{n=0}^{\infty} (bp)^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-bp}, & p < 1/b, \\ +\infty, & p \geq 1/b. \end{cases}$$

No ponto crítico $p = 1/b$, a componente da raiz é finita quase certamente, mas seu tamanho esperado é infinito. Não há contradição: o fato de uma variável aleatória ser finita quase certamente não obriga sua esperança a ser finita.

4.5.2 Erdős–Rényi: da exploração local à componente gigante

Uma árvore não tem ciclos: cada vértice distinto da raiz está ligado a ela por um único caminho simples, isto é, sem repetir vértices. Em uma rede geral, podemos encontrar um mesmo vértice por caminhos diferentes. Essas *colisões* impedem que a exploração da componente seja, exatamente, um processo de Galton–Watson.

Ainda assim, a ramificação descreve bem o início da exploração de certos grafos aleatórios. O exemplo mais conhecido é o modelo de Erdős–Rényi.

Definição 4.5 — Grafo aleatório de Erdős–Rényi

Fixe $n \geq 2$ e $p \in [0,1]$. O grafo $G(n,p)$ tem vértices $\{1,\dots,n\}$. Para cada par de vértices distintos, a aresta que os liga está presente com probabilidade p, independentemente das demais.

Trata-se da percolação por arestas no grafo completo com n vértices: começamos com todas as arestas possíveis e conservamos cada uma delas com probabilidade p. A Figura 4.9 mostra uma realização com seis vértices.

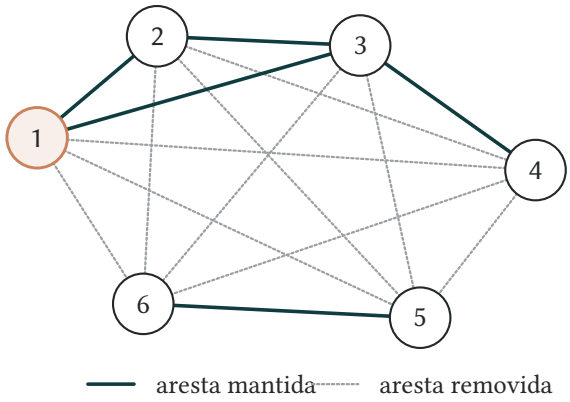


Figura 4.9: Uma realização de $G(6,p)$. As cinco arestas presentes aparecem em verde-petróleo, e as dez ausentes, em cinza pontilhado. As componentes conexas são $\{1,2,3,4\}$ e $\{5,6\}$.

Para estudar grafos grandes, escolheremos

$$p = \frac{c}{n}, \qquad c > 0 \text{ fixo},$$

com n suficientemente grande para que $c/n \leq 1$. Essa escolha mantém o número médio de vizinhos por vértice próximo de c. De fato, se D_v é o número de vizinhos, ou *grau*, de um vértice v, então

$$D_v \sim \text{Binomial}\left(n-1, \frac{c}{n}\right), \qquad E(D_v) = (n-1)\frac{c}{n} \longrightarrow c.$$

Quando n cresce, temos muitas possibilidades de ligação, cada uma com probabilidade pequena. Para cada j fixo,

$$\mathbb{P}(D_v = j) = \binom{n-1}{j}\left(\frac{c}{n}\right)^j\left(1-\frac{c}{n}\right)^{n-1-j} \longrightarrow e^{-c}\frac{c^j}{j!}.$$

Para verificar esse limite, observe que

$$\binom{n-1}{j}\left(\frac{c}{n}\right)^j = \frac{c^j}{j!}\prod_{\ell=1}^{j}\left(1-\frac{\ell}{n}\right) \longrightarrow \frac{c^j}{j!},$$

com produto vazio igual a um quando $j = 0$, enquanto $(1 - c/n)^{n-1-j} \to e^{-c}$. Assim, o número de vizinhos de um vértice fixado tem, no limite, distribuição de Poisson de média c.

Mas conhecer a distribuição do grau não basta para entender o tamanho de uma componente. Precisamos acompanhar sua exploração. Começamos por um vértice e o colocamos em uma fila. Ao examinar o primeiro vértice da fila, revelamos suas arestas para os vértices ainda não descobertos. Os novos vizinhos entram no fim da fila, e o vértice examinado sai dela. Repetimos esse procedimento até a fila ficar vazia; nesse momento, toda a componente inicial foi descoberta.

Suponha que a fila ainda não esteja vazia e que, até essa etapa, tenham sido descobertos r vértices: o inicial e todos os novos vizinhos encontrados nos passos anteriores. Esse total inclui os já examinados e os que ainda aguardam na fila. Restam $n - r$ vértices não descobertos, e as arestas entre eles e o próximo vértice a ser examinado ainda não foram reveladas. Condicionalmente ao histórico da exploração, o número de novos vizinhos tem, portanto, distribuição

$$\text{Binomial}\left(n-r, \frac{c}{n}\right).$$

Ao contrário de uma ramificação com descendentes independentes, a distribuição dessas contagens muda ao longo da exploração: r depende dos resultados dos passos anteriores. Mas, enquanto r for pequeno em comparação com n, a distribuição acima se aproxima de uma Poisson de média c. Para um número fixo de etapas, essa aproximação pode ser tornada rigorosa quando $n \to \infty$: a exploração é descrita, no limite, por uma ramificação com descendências independentes de lei Poisson de média c, encerrada se não houver mais vértices por examinar.

Essa descrição é local. Em um grafo com ciclos, podem existir arestas entre vértices já descobertos, mas essas ligações não acrescentam novos elementos à fila. Na exploração, só podem ser novos vizinhos os $n - r$ vértices ainda não descobertos. Quando r deixa de ser pequeno diante de n, a média condicional $(n - r)c/n$ já não está próxima de c, e a aproximação

por Galton–Watson não descreve sozinha a exploração de uma componente grande.

Para a distribuição de Poisson de média c, a função geradora é

$$f(s) = e^{c(s-1)}, \qquad m = c.$$

O Teorema 4.12 sugere, portanto, uma mudança de comportamento em $c = 1$: abaixo desse valor a ramificação se extingue quase certamente; acima dele há probabilidade positiva de sobrevivência. O resultado para o grafo finito é mais forte e exige argumentos adicionais.

Teorema 4.16 — Componente gigante em Erdős–Rényi

Considere $G(n, c/n)$, com $c > 0$ fixo, e denote por $L_1(n) \geq L_2(n)$ os tamanhos das duas maiores componentes conexas, com $L_2(n) = 0$ se houver apenas uma componente.

1. Se $0 < c < 1$, existe uma constante $A = A(c)$ tal que
$$\mathbb{P}\big(L_1(n) \leq A \log n\big) \longrightarrow 1.$$

2. Se $c > 1$, então
$$\frac{L_1(n)}{n} \longrightarrow \rho(c) \quad \text{em probabilidade,}$$
onde $\rho(c) \in (0,1)$ é a única solução positiva de
$$\rho = 1 - e^{-c\rho}.$$
Além disso, existe uma constante $B = B(c)$ tal que
$$\mathbb{P}\big(L_2(n) \leq B \log n\big) \longrightarrow 1.$$

A convergência em probabilidade no segundo item significa que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_1(n)}{n} - \rho(c)\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

Portanto, a fração de vértices na maior componente se concentra perto de

$\rho(c)$ quando o grafo cresce.

Uma componente que reúne uma proporção positiva dos vértices é chamada de *componente gigante*. O teorema afirma que ela não aparece no regime subcrítico e que, no supercrítico, existe uma única componente desse tipo: todas as demais têm tamanho muito menor que n. No ponto crítico $c = 1$, não há componente gigante; o tamanho das maiores componentes está na escala $n^{2/3}$, um comportamento mais delicado que não estudaremos aqui.

Não demonstraremos esse resultado; uma apresentação com demonstrações dos três regimes está em Frieze e Karoński (2016, capítulo 2). A aproximação local por Galton–Watson explica a origem da equação para $\rho(c)$, mas não é suficiente para justificar a existência e a unicidade de uma componente gigante. Para isso, é necessário controlar a exploração também quando o número de vértices descobertos já é grande.

A equação do teorema é precisamente a equação de sobrevivência para um processo de Galton–Watson de descendência Poisson de média c. Com efeito, se q é sua probabilidade de extinção,

$$q = e^{c(q-1)}.$$

Escrevendo $\rho(c) = 1 - q$, encontramos

$$\rho(c) = 1 - e^{-c\rho(c)}.$$

Essa coincidência tem uma interpretação probabilística. Depois de realizado o grafo, escolha um de seus n vértices uniformemente. A probabilidade de ele pertencer à maior componente, condicionada ao grafo, é $L_1(n)/n$, que pelo teorema fica próxima de $\rho(c)$ com alta probabilidade. Por outro lado, a exploração iniciada nesse vértice se aproxima, nas primeiras etapas, de uma ramificação Poisson: a chance de essa ramificação sobreviver sugere a proporção de vértices que pertencem à componente gigante. Essa interpretação não substitui os argumentos globais necessários à prova do teorema.

Exemplo 4.13 — Uma componente com quase oitenta por cento dos vértices.

Considere $G(n, 2/n)$. No Exemplo 4.6, vimos que a probabilidade de extinção de uma ramificação com descendência Poisson de média 2 é aproximadamente $q = 0{,}203188$. Portanto,

$$\rho(2) = 1 - q \approx 0{,}796812.$$

Em um grafo suficientemente grande desse modelo, a maior componente ocupa uma proporção próxima de 79,7% dos vértices, com alta probabilidade.

Isso não significa que o grafo inteiro seja conexo. Um vértice específico é isolado quando nenhuma de suas $n-1$ arestas possíveis está presente, o que ocorre com probabilidade

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1} \longrightarrow e^{-2} \approx 0{,}1353.$$

Pela linearidade da esperança, a proporção esperada de vértices isolados também se aproxima de 13,5%. A existência de uma componente gigante não é o mesmo que a conectividade de todo o grafo.

◁

Nos dois modelos, a média de descendentes igual a um marca a transição. Na árvore, alcançar novos vértices é exatamente um processo de ramificação. Em Erdős–Rényi, essa descrição vale aproximadamente no início da exploração, mas antecipa uma propriedade global do grafo. O que começou como uma pergunta sobre extinção torna-se uma pergunta sobre o aparecimento de grandes estruturas em uma rede.

4.6 Exercícios

4.6.1 Passeios e outras cadeias enumeráveis

Exercício 4.1 — Retornar sempre não significa retornar depressa

Compare os passeios em $\mathbb{Z}$ com $p = 1/2$ e com $p = 7/10$. Use as probabilidades de retorno em tempos pares para classificá-los. No caso simétrico, explique por que recorrência não implica tempo médio de retorno finito.

Exercício 4.2 — Uma recompensa sem média estacionária finita

Em $\mathbb{N}_0$, faça $p(i,0) = 1/3$ e $p(i,i+1) = 2/3$ para todo $i \geq 0$. Encontre a distribuição estacionária, o tempo médio de retorno a zero e a média temporal de X_n. Para $f(i) = 2^i$, verifique que a hipótese de integrabilidade do teorema ergódico falha. Use as funções limitadas $f \wedge b$ para mostrar que a média temporal de $f(X_n)$ tende a $+\infty$.

4.6.2 Processos de ramificação

Exercício 4.3 — Transições e duas gerações

Para $p_0 = 1/4$ e $p_2 = 3/4$, calcule $p(2,0)$, $p(2,2)$, $p(2,4)$ e $E_2(Z_3)$. Partindo de uma semente, calcule a probabilidade de extinção até a segunda geração e compare-a com a probabilidade de extinção eventual.

Exercício 4.4 — Quando a extinção é impossível?

Lembre que $q = \mathbb{P}_1(H_0 < \infty)$ se refere a uma semente. Mostre que $q = 0$ se e somente se $p_0 = 0$, e conclua que, para toda população inicial de $k \geq 1$ indivíduos, a extinção é impossível exatamente quando $p_0 = 0$. Use a relação $\mathbb{P}_k(H_0 < \infty) = q^k$. Explique por que o caso $Y \equiv 1$ precisa ser separado no critério pela média.

Exercício 4.5 — Descendência geométrica

Suponha $\mathbb{P}(Y = j) = (1-r)r^j$, $j \geq 0$, com $0 < r < 1$. Calcule m, f e q em função de r. Depois, determine a probabilidade de sobrevivência com três sementes quando $r = 2/3$.

Exercício 4.6 — Tamanho total no regime subcrítico

Se $m < 1$ e $Z_0 = k$, seja $B = \sum_{n \geq 0} Z_n$ o número total de indivíduos, incluindo os iniciais. Prove que $E(B) = k/(1-m)$. Justifique a troca entre soma e esperança a partir das somas finitas $B_M = \sum_{n=0}^{M} Z_n$ e de suas probabilidades de cauda, admitindo inicialmente a possibilidade $B = \infty$. Explique por que a finitude da média obtida implica $B < \infty$ quase certamente.

Exercício 4.7 — Amostragem e fronteira

Uma amostra completa de 60 indivíduos contém 18 sem filhos, 6 com um filho e 36 com dois filhos. Calcule $\widehat{m}$, $\widehat{f}$, $\hat{q}$ e a probabilidade estimada de extinção com duas sementes. Explique o que $\hat{p}_3 = 0$ permite afirmar e por que uma árvore encerrada com 60 vértices não poderia produzir essas contagens.

4.7 Exercícios complementares*

Exercício 4.8 — Uma árvore ternária*

Cada vértice de uma árvore infinita possui três filhos, e cada aresta é aberta independentemente com probabilidade p. Determine o valor crítico de p. Para $p = 1/4$, calcule o tamanho esperado da componente da raiz. Explique o que acontece com a probabilidade de uma componente infinita e com o tamanho esperado quando $p = 1/3$.

Exercício 4.9 — Árvore regular e a escolha da raiz*

Em uma árvore infinita em que todos os vértices têm exatamente $d \geq 3$ vizinhos, escolha um deles como raiz. Abra cada aresta, independentemente, com probabilidade p. A raiz tem d vizinhos, mas cada um dos demais vértices tem apenas $d-1$ filhos, pois um vizinho é seu pai. Determine a probabilidade crítica de percolação por arestas. Explique por que a diferença na primeira geração não altera esse limiar.

Exercício 4.10 — Vértices isolados em Erdős–Rényi*

Considere $G(n, c/n)$ e denote por I_n o número de vértices isolados. Calcule $E(I_n)$ e mostre que $E(I_n)/n \to e^{-c}$. Por que a presença de uma componente gigante, quando $c > 1$, não implica que o grafo seja conexo?

CAPÍTULO

5

Processos de Poisson

Contar eventos no tempo exige duas descrições equivalentes: os tempos de espera entre chegadas e o número de chegadas observado em cada intervalo.

Uma central recebe chamadas em instantes irregulares. Podemos perguntar quanto tempo falta até a próxima chamada ou quantas chegarão durante uma hora. São duas maneiras de observar o mesmo fluxo: uma acompanha as esperas; a outra, as contagens.

Em um detector de partículas, cada registro também marca um instante, mas algumas partículas podem passar sem ser detectadas. Queremos saber como essa seleção altera o número de registros e a espera entre eles. Em duas lojas próximas, a questão pode ser outra: quantos clientes chegam à primeira enquanto a segunda ainda espera seu primeiro cliente? Reunir as chegadas, conservando a origem de cada uma, ajudará a responder.

Esses sistemas têm em comum eventos que se acumulam no tempo. Para construir um modelo, precisaremos explicitar as hipóteses sobre as esperas e sobre a relação entre contagens em intervalos diferentes.

Partiremos da falta de memória da exponencial e construiremos o processo de Poisson. Em seguida, veremos como somar quantidades aleatórias, separar, reunir e condicionar as chegadas. Na Seção 4.3, a aleatoriedade aparecia no número de descendentes; aqui, ela aparece também nos ins-

tantes em que os eventos ocorrem. A construção por relógios preparará o estudo das cadeias em tempo contínuo. O percurso principal termina com problemas de síntese e exercícios; a intensidade variável fica em uma seção opcional ao final do capítulo.

5.1 Distribuição exponencial

Comecemos pela espera até a próxima chegada. No modelo exponencial, uma taxa de 2 chegadas por minuto corresponde a uma espera média de meio minuto. A propriedade que distingue esse modelo é a falta de memória: saber quanto já esperamos não altera a distribuição da espera que ainda resta.

Definição 5.1 — Distribuição exponencial

Uma variável aleatória T tem distribuição exponencial com taxa $\lambda > 0$, e escrevemos $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, se

$$\mathbb{P}(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{para todo } t \ge 0.$$

Equivalentemente, $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ para $t \ge 0$, e a densidade é

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

A taxa λ mede a frequência do fenômeno, não seu tempo médio. Quanto maior λ, mais rapidamente a cauda $\mathbb{P}(T > t)$ decai e menor é a espera típica. A proposição seguinte calcula a média e a variância.

Proposição 5.1 — Momentos da distribuição exponencial

Se $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, então

$$ET = \frac{1}{\lambda}, \qquad ET^2 = \frac{2}{\lambda^2}, \qquad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Em particular, a média e o desvio padrão são ambos iguais a $1/\lambda$.

Demonstração. Calculamos primeiro as integrais em um intervalo $[0, b]$ e depois fazemos $b \to \infty$. Os termos de fronteira desaparecem porque $be^{-\lambda b} \to 0$ e $b^2 e^{-\lambda b} \to 0$: o decaimento exponencial domina essas potências. Integrando por partes,

$$ET = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\, dt = -\, te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda},$$
$$ET^2 = \int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}\, dt = -\, t^2 e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Na integral do segundo momento, usamos ainda $\int_0^\infty te^{-\lambda t}\, dt = ET/\lambda = 1/\lambda^2$. Portanto,

$$\mathrm{Var}(T) = ET^2 - (ET)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

Também é possível enxergar a dependência em λ por mudança de escala. Se $S \sim \mathrm{Exp}(1)$, então $S/\lambda \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, pois

$$\mathbb{P}(S/\lambda \le t) = \mathbb{P}(S \le \lambda t) = 1 - e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T \le t).$$

Portanto, média e desvio padrão são multiplicados por $1/\lambda$, enquanto a variância é multiplicada por $1/\lambda^2$:

$$ET = \frac{ES}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{\mathrm{Var}(S)}{\lambda^2}.$$

Teorema 5.2 — Propriedade de falta de memória

Se $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, então, para $s, t \ge 0$,

$$\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s).$$

Ideia — O relógio recomeça

Se uma lâmpada tem vida útil exponencial e já funcionou durante t horas, sua vida residual tem a mesma distribuição da vida de uma lâmpada nova. Isso não afirma que objetos reais não envelhecem; é

uma hipótese específica do modelo exponencial.

Demonstração. Como $\{T > t+s\} \subseteq \{T > t\}$ e $\mathbb{P}(T > t) > 0$,

$$\mathbb{P}(T > t+s \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t+s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s).$$

O quociente cancela o tempo já transcorrido. ∎

5.2 Definição do processo de Poisson

Em vez da espera, registremos uma contagem. A distribuição de Poisson aparecerá tanto no número de chegadas de um intervalo quanto na soma de muitos eventos raros.

Definição 5.2 — Distribuição de Poisson

Dizemos que X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, e escrevemos $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, se

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Admitimos também $\lambda = 0$, caso em que $X = 0$ quase certamente.

A distribuição de Poisson modela contagens, cujos valores possíveis são $0, 1, 2, \ldots$, e não tempos de espera. Veremos que seu parâmetro λ é tanto a média quanto a variância. Para isso, calcularemos primeiro os momentos fatoriais.

Teorema 5.3 — Momentos fatoriais da Poisson

Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então, para qualquer inteiro $k \geq 1$,

$$E X(X-1)\cdots(X-k+1) = \lambda^k,$$

e, portanto, $EX = \text{Var}(X) = \lambda$.

Demonstração. Se $\lambda = 0$, a variável é zero quase certamente e todas as afirmações são imediatas. Para $\lambda > 0$, o produto $X(X-1)\cdots(X-k+1)$ é zero quando $X \le k-1$. Assim,

$$\begin{aligned} EX(X-1)\cdots(X-k+1) &= \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} j(j-1)\cdots(j-k+1) \\ &= \lambda^k \sum_{j=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!} = \lambda^k. \end{aligned}$$

Na última soma, a mudança de índice $r = j-k$ faz r percorrer $0, 1, \ldots$. Ela se torna $\sum_{r\ge 0} e^{-\lambda}\lambda^r/r! = 1$, a massa total da Poisson. O caso $k = 1$ fornece $EX = \lambda$; o caso $k = 2$ fornece $E[X(X-1)] = \lambda^2$. Usando

$$\operatorname{Var}(X) = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2,$$

concluímos

$$\operatorname{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda.$$

■

Exemplo 5.1 — Pares de eventos distintos.

Se $N \sim \text{Poisson}(\theta)$, então $N(N-1)$ conta pares *ordenados* de eventos distintos: há N escolhas para o primeiro e $N-1$ para o segundo. Portanto,

$$E[N(N-1)] = \theta^2, \qquad E\binom{N}{2} = \frac{\theta^2}{2}.$$

Com média de quatro eventos em uma janela, esperamos 16 pares ordenados, ou oito pares sem ordem. Isso não é $EN(EN-1) = 12$: a contagem também flutua de uma janela para outra.

◁

Teorema 5.4 — Soma de variáveis de Poisson
Se $X_1, \dots, X_k$ são independentes e $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$, então

$$X_1 + \cdots + X_k \sim \text{Poisson}\left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k\right).$$

Demonstração. Começamos com duas variáveis. Se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ambas são zero quase certamente, e o resultado é imediato. Se uma única taxa é zero, a respectiva variável também é zero e a afirmação se reduz à lei da outra parcela. Suponhamos, assim, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Os eventos $\{X_1 = m, X_2 = n - m\}$, para $m = 0, \dots, n$, são disjuntos e reúnem todas as maneiras de a soma valer n. A independência permite multiplicar as probabilidades:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = n\right) &= \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}\left(X_1 = m\right)\mathbb{P}\left(X_2 = n - m\right) \\ &= \sum_{m=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{(\lambda_1)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda_2}\frac{(\lambda_2)^{n-m}}{(n-m)!}\end{aligned}$$

Reunimos os fatores exponenciais e extraímos $(\lambda_1 + \lambda_2)^n / n!$. Os fatores restantes formam uma soma binomial:

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-m}$$

A soma vale 1: reúne as probabilidades de uma distribuição Binomial(n, p) com $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$. O termo fora da soma é a probabilidade de Poisson desejada. Para passar de $k-1$ a k parcelas, aplicamos o caso de duas variáveis à soma das primeiras $k-1$ e à última. Essas duas variáveis são independentes porque a primeira depende apenas de $X_1, \dots, X_{k-1}$. Isso completa a indução. ∎

Estamos prontos para definir o processo. Pense, por exemplo, em $N(t)$ como o número de requisições recebidas por um servidor no intervalo $[0, t]$.

Definição 5.3 — Processo de Poisson homogêneo

Retomando a Definição 1.3, pedimos aqui um pouco mais: com probabilidade um, as trajetórias são não decrescentes, assumem valores finitos em $\mathbb{N}_0$, são contínuas à direita e têm saltos unitários. Em particular, há apenas um número finito de chegadas em cada intervalo limitado. O processo de contagem $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um *processo de Poisson com taxa* $\lambda > 0$ se

- $N(0) = 0$;
- $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ para $s, t \geq 0$;
- $N(t)$ tem incrementos independentes: se $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, então

$$N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \quad \text{são independentes.}$$

O segundo item diz que a distribuição da contagem depende apenas do comprimento do intervalo, não de sua posição no tempo. O terceiro afirma a independência das contagens em intervalos disjuntos. Pela convenção de continuidade à direita, $N(s+t) - N(s)$ conta as chegadas em $(s, s+t]$: o extremo direito está incluído.

Saber apenas que $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ para cada t não determina a lei do processo: também precisamos saber como as contagens em instantes diferentes se relacionam. A independência dos incrementos é parte essencial do modelo. Aqui λ é a taxa de chegadas por unidade de tempo, enquanto λt é o número médio de chegadas em um intervalo de duração t.

Para motivar a definição, imagine n pessoas agindo de maneira independente. Cada uma produz um evento durante certo minuto com probabilidade λ/n, tomando $n \geq \lambda$ para que essa probabilidade esteja entre zero e um. O número X_n de eventos nesse minuto tem distribuição Binomial$(n, \lambda/n)$, isto é,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Mantendo a média λ fixa e fazendo n crescer, essa massa converge.

Teorema 5.5 — Aproximação de Poisson

Fixe $\lambda \geq 0$ e um inteiro $k \geq 0$. Para $X_n \sim \text{Binomial}(n, \lambda/n)$, definida nos inteiros $n \geq \max\{1, \lambda\}$, temos

$$\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

A soma reúne muitas oportunidades, cada uma com pouca chance de ocorrência. O limite mantém a média total λ fixa: aumentar o número de oportunidades sem reduzir a chance individual seria outro regime.

Demonstração. Se $\lambda = 0$, as variáveis X_n e a Poisson limite são iguais a zero quase certamente. Suponha $\lambda > 0$. Para n suficientemente grande, $n \geq k$ e $\lambda/n < 1$. Com k fixo,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

Como k é fixo, cada um dos seus fatores $1 - j/n$ tende a um; portanto, o produto finito tende a um. Quando $k = 0$, esse produto é vazio e vale um. O último fator também tende a um por continuidade. Para o fator que contém o expoente n, usamos o limite elementar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 - x)}{-x} = 1.$$

Como $\lambda/n \to 0$, segue que

$$n \log(1 - \lambda/n) = -\lambda \, \frac{\log(1 - \lambda/n)}{-\lambda/n} \longrightarrow -\lambda.$$

Pela continuidade da exponencial, $(1 - \lambda/n)^n \to e^{-\lambda}$. O fator $\lambda^k/k!$ não depende de n; multiplicar esses limites fornece a massa de Poisson anunciada. ∎

Exemplo 5.2 — Cem oportunidades de um evento raro.

Compare $B \sim \text{Binomial}(100, 0{,}02)$ com $Z \sim \text{Poisson}(2)$. As médias são iguais; as variâncias são 1,96 e 2. As probabilidades, arredondadas, são

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(B = k)$	0,13262	0,27065	0,27341	0,18228
$\mathbb{P}(Z = k)$	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045

As duas distribuições têm a mesma média e probabilidades próximas, mas não são idênticas. A desigualdade de Le Cam, apresentada adiante (Teorema 5.6), permite limitar o erro dessa aproximação.

◁

5.2.1 O erro da aproximação de Poisson

A aproximação binomial mostrou como surge a lei de Poisson a partir de muitas oportunidades raras. Para um número finito de oportunidades, qual é o erro dessa aproximação? E se as probabilidades individuais forem diferentes? A desigualdade seguinte dá uma cota nas duas situações. A prova compara primeiro uma variável de Bernoulli com uma Poisson de mesma média; depois, repete essa comparação em cada parcela.

Para acompanhar o cálculo, recordemos a distância de variação total introduzida na Definição 3.5. Para distribuições μ e ν em $\mathbb{N}_0$,

$$\|\mu - \nu\|_{\text{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} |\mu(k) - \nu(k)| = \sum_{k \colon \mu(k) > \nu(k)} [\mu(k) - \nu(k)].$$

A última igualdade decorre de que as diferenças somam zero: o total das diferenças positivas é igual ao módulo do total das negativas.

Teorema 5.6 — Desigualdade de Le Cam

Se $X_1, \dots, X_n$ são Bernoulli independentes, com parâmetros $p_i \in [0, 1]$, ponha $S = \sum_i X_i$ e $\theta = \sum_i p_i$. Para $Z \sim \text{Poisson}(\theta)$,

$$\|\mathscr{L}(S) - \mathscr{L}(Z)\|_{\text{TV}} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

> Aqui $\mathscr{L}$ indica a distribuição de uma variável; Poisson de parâmetro zero é a massa em zero.

A estimativa de Le Cam (1960, pp. 1183–1184), na convenção acima, controla o erro de probabilidade de *qualquer* evento. Como $\sum_i p_i^2 \le \theta \max_i p_i$, a cota é útil quando a média total é controlada e cada ocorrência individual é rara. A independência é essencial: indicadores idênticos podem produzir apenas zero ou n ocorrências.

Demonstração. Para $B \sim \text{Bernoulli}(p)$ e $Z_p \sim \text{Poisson}(p)$, a massa de B é maior que a de Z_p apenas no ponto 1, pois $e^{-p} \ge 1 - p$. De fato, em zero a massa da Poisson é pelo menos $1 - p$; nos pontos $2, 3, \ldots$, a Bernoulli tem massa zero; apenas em 1 sua massa p excede pe^{-p}. Usando a expressão da variação total pelas diferenças positivas, obtemos

$$\|\mathscr{L}(B) - \mathscr{L}(Z_p)\|_{\mathrm{TV}} = p(1 - e^{-p}) \le p^2.$$

Essa fórmula também vale em $p = 0$. Para leis discretas em $\mathbb{N}_0$, estenda suas massas por zero aos inteiros negativos. A convolução $\mu * \eta$ é a lei da soma de duas variáveis independentes com leis μ e η e satisfaz $(\mu * \eta)(k) = \sum_j \mu(j)\eta(k-j)$. Convoluir duas leis com a mesma η não aumenta a distância: pela desigualdade triangular e por $\sum_k \eta(k-j) = 1$,

$$\begin{aligned}\sum_k \left| \sum_j [\mu(j) - \nu(j)]\eta(k-j) \right| &\le \sum_k \sum_j |\mu(j) - \nu(j)|\eta(k-j) \\ &= \sum_j |\mu(j) - \nu(j)| \sum_k \eta(k-j) = \sum_j |\mu(j) - \nu(j)|.\end{aligned}$$

O reagrupamento envolve somente séries numéricas de termos não negativos, como recordado imediatamente antes da Proposição 2.9. Dividir por dois dá a contração em variação total.

Passamos agora à soma. Substituímos cada Bernoulli por uma Poisson de mesma média, uma parcela de cada vez, mantendo a independência. Em cada troca, a soma das parcelas que não mudaram fornece a lei comum η; por isso, a distância entre as leis da soma antes e depois da troca é no máximo p_i^2. Pela desigualdade triangular, o erro acumulado nas n substituições não excede $\sum_i p_i^2$. A soma final tem lei de Poisson de média θ, pelo teorema de soma de Poisson. ∎

Exemplo 5.3 — Quatro probabilidades diferentes.

Para $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}02$, $p_3 = 0{,}03$ e $p_4 = 0{,}04$, temos $\theta = 0{,}10$ e $\sum_i p_i^2 = 0{,}003$. Em particular,

$$\mathbb{P}(S = 0) = 0{,}99 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}96 = 0{,}90345024.$$

Como $e^{-0{,}1} \approx 0{,}90483742$, o erro é cerca de $0{,}00138718 < 0{,}003$.

◁

5.2.2 Construção do processo de Poisson

Há duas maneiras de observar o mesmo fenômeno: podemos registrar os instantes em que os eventos ocorrem ou contar quantos já ocorreram. Uma imagem útil para a primeira descrição é a de um relógio aleatório. Depois de cada toque, acionamos um novo relógio exponencial de taxa λ; quando ele toca, registramos uma chegada e recomeçamos a espera.

Definição 5.4 — Construção por tempos entre chegadas

Sejam $\tau_1, \tau_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Defina, quase certamente,

$$T_0 = 0, \qquad T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \qquad N(t) = \max\{n : T_n \le t\}.$$

O número τ_n é o tempo entre a $(n-1)$-ésima e a n-ésima chegada, enquanto T_n é o instante da n-ésima chegada. A variável $N(t)$ responde à pergunta complementar: quantos toques já ocorreram até o instante t?

Precisamos verificar que o máximo da definição existe. Como cada $\tau_n > 0$ com probabilidade um, as somas T_n são estritamente crescentes simultaneamente para todos os n, fora de um evento de probabilidade zero. Falta mostrar que não se acumulam infinitas chegadas em tempo limitado.

Pela independência das esperas e pelos momentos da exponencial,

$$ET_n = \frac{n}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Fixe $b > 0$. Se $n > 2\lambda b$, então $n/\lambda - b > n/(2\lambda)$. Pela desigualdade de

Chebyshev,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n \le b) &\le \mathbb{P}\left(\left|T_n - \frac{n}{\lambda}\right| \ge \frac{n}{2\lambda}\right) \\ &\le \frac{n/\lambda^2}{n^2/(4\lambda^2)} = \frac{4}{n} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Como T_n é crescente, os eventos $\{T_n \le b\}$ decrescem. A continuidade das probabilidades mostra que a chance de todos os T_n permanecerem abaixo de b é zero. Tomando $b = 1, 2, \ldots$, concluímos que $T_n \to \infty$ quase certamente. Assim, para todo $t \ge 0$, o conjunto $\{n : T_n \le t\}$ contém 0 e é finito, e $N(t)$ fica definido simultaneamente para todos os instantes. No evento excepcional de probabilidade zero, podemos definir $N(t) = 0$ para todo t.

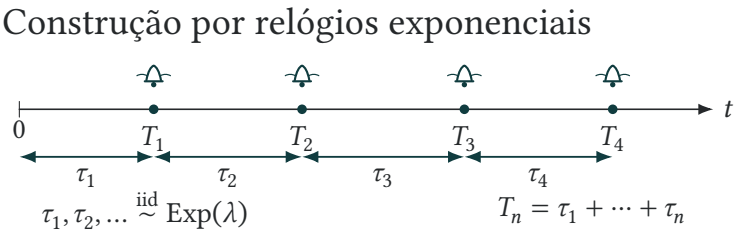


Figura 5.1: A construção por relógios exponenciais. O tempo τ_n separa duas chegadas consecutivas, e $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ é o instante da n-ésima chegada.

Fixadas as regras do modelo, quase toda realização de N é uma função em degraus que começa em zero e sobe uma unidade a cada chegada. Precisamente, $N(t) = n$ em $[T_n, T_{n+1})$; portanto a trajetória é contínua à direita e tem saltos unitários. O formato é sempre o mesmo, mas os instantes dos saltos mudam de uma realização para outra.

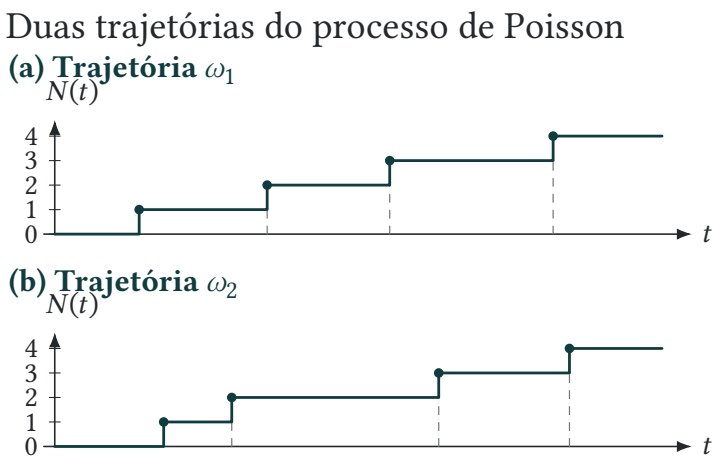


Figura 5.2: Duas realizações do mesmo processo de Poisson. Em ambas, cada chegada produz um salto unitário; o que muda de uma trajetória para outra são os instantes em que esses saltos ocorrem.

As duas descrições contêm a mesma informação. O n-ésimo toque ocorre até o instante t exatamente quando já foram registradas pelo menos n chegadas:

$$T_n \le t \quad \Longleftrightarrow \quad N(t) \ge n.$$

Teorema 5.7 — Construção exponencial do processo de Poisson
O processo $\{N(t) : t \ge 0\}$ construído acima é um processo de Poisson com taxa λ.

Demonstração. **Primeiro passo: a lei da contagem.** Já verificamos as propriedades das trajetórias e, como $\tau_1 > 0$ quase certamente, temos $N(0) = 0$. Escreva $p_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$. Não haver chegadas até t equivale a $\tau_1 > t$, de modo que

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Para $n \ge 1$, se a primeira chegada ocorreu no instante $v \le t$, restam $t - v$ unidades de tempo. As esperas $\tau_2, \tau_3, \ldots$ são independentes de τ_1 e têm a mesma distribuição das esperas originais. Assim, a contagem restante tem

a mesma lei de $N(t-v)$. Pela densidade da primeira espera,

$$p_n(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda v} p_{n-1}(t-v)\, dv.$$

Não usamos aqui nenhuma propriedade do processo de Poisson: apenas a independência dos relógios da construção. Fazendo indução em n, suponha que $p_{n-1}(u) = e^{-\lambda u}(\lambda u)^{n-1}/(n-1)!$. Então

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda v} e^{-\lambda(t-v)} \frac{[\lambda(t-v)]^{n-1}}{(n-1)!}\, dv \\ &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t (t-v)^{n-1}\, dv \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

A última igualdade usa $\int_0^t (t-v)^{n-1}\, dv = t^n/n$. Isso prova $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

Segundo passo: o relógio restante em um instante fixo. A lei de $N(t)$, sozinha, não garante incrementos independentes. Fixe $s \geq 0$. No evento $N(s) = k$, temos

$$T_k \leq s < T_{k+1} = T_k + \tau_{k+1}, \qquad R_s = T_{k+1} - s.$$

Ou seja, observamos k chegadas até s e sabemos que o relógio τ_{k+1} ainda não tocou.

Para ver que o passado não influencia a espera restante, considere um evento H que especifique as contagens em uma lista finita de instantes até s. Fixe também $N(s) = k$. Uma vez escolhidas as primeiras k esperas, com $T_k = v \leq s$, o evento H já está determinado por essas chegadas. A espera seguinte, independente das anteriores, deve satisfazer $\tau_{k+1} > s - v$. A probabilidade de também ultrapassar $s - v + u$ é

$$\mathbb{P}(\tau_{k+1} > s - v + u) = e^{-\lambda u} \mathbb{P}(\tau_{k+1} > s - v), \qquad u \geq 0.$$

Para $k \geq 1$, reunimos as escolhas das primeiras k esperas integrando sua densidade conjunta sobre a região compatível com H e $T_k \leq s$. Em cada ponto dessa região, a condição $N(s) = k$ acrescenta o fator $\mathbb{P}(\tau_{k+1} > s - T_k)$. Exigir também $R_s > u$ substitui esse fator por $\mathbb{P}(\tau_{k+1} > s - T_k + u)$, multiplicando

todo o integrando por $e^{-\lambda u}$. Como esse fator não depende das esperas já escolhidas, ele pode sair da integral. Obtemos

$$\mathbb{P}(H, N(s) = k, R_s > u) = e^{-\lambda u}\mathbb{P}(H, N(s) = k).$$

Para $k = 0$ o argumento é o mesmo, com $T_0 = 0$. Somar em $k = 0, 1, \ldots$ fornece

$$\mathbb{P}(H, R_s > u) = \mathbb{P}(H)e^{-\lambda u}.$$

Portanto R_s é exponencial de taxa λ, independentemente das contagens observadas até s. É a falta de memória aplicada ao relógio que estava em andamento no instante s.

Terceiro passo: todas as esperas futuras. Ainda no evento $N(s) = k$, as esperas $\tau_{k+2}, \tau_{k+3}, \ldots$ são independentes das primeiras $k+1$ esperas e também de H. Consequentemente, o cálculo anterior pode ser repetido com qualquer número finito dessas esperas:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(H, N(s) = k, R_s > u_1, \tau_{k+2} > u_2, \ldots, \tau_{k+m} > u_m\big) \\ = \mathbb{P}(H, N(s) = k)e^{-\lambda(u_1+\cdots+u_m)}, \qquad u_1, \ldots, u_m \geq 0.\end{aligned}$$

Somando em k e lembrando que probabilidades de intervalos podem ser obtidas por diferenças de probabilidades de cauda, concluímos que as esperas após s são exponenciais independentes de taxa λ, e independentes das contagens anteriores.

Quarto passo: os incrementos. Denote essas novas esperas por $W_1, W_2, \ldots$, com $W_1 = R_s$. Para $r \geq 0$,

$$\{N(s+t) - N(s) = r\} = \{W_1 + \cdots + W_r \leq t < W_1 + \cdots + W_{r+1}\},$$

onde a soma vazia vale zero. O evento depende apenas das esperas futuras. Pelo primeiro passo, sua probabilidade é $e^{-\lambda t}(\lambda t)^r/r!$ e não depende das contagens anteriores a s.

Para $0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_m$, aplicamos essa independência sucessivamente ao incremento do último intervalo, depois ao do penúltimo e assim por diante. Obtemos, para $n_j \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(N(s_j) - N(s_{j-1}) = n_j,\ 1 \leq j \leq m\big) \\ = \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda(s_j - s_{j-1})}\frac{[\lambda(s_j - s_{j-1})]^{n_j}}{n_j!}.\end{aligned}$$

Os incrementos são, portanto, independentes, e sua distribuição depende apenas do comprimento do intervalo. Isso completa a prova. ∎

Proposição 5.8 — Equivalência entre relógios e contagens

Se N satisfaz a definição de processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$ e $T_n = \inf\{t \geq 0 : N(t) \geq n\}$ é o instante da n-ésima chegada, com $\inf \varnothing = \infty$, então $T_1, T_2 - T_1, \ldots$ são independentes e têm distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Demonstração. Primeiro, a n-ésima chegada ocorre em tempo finito quase certamente. De fato, pelas propriedades das trajetórias,

$$\mathbb{P}(T_n > t) = \mathbb{P}(N(t) < n) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \longrightarrow 0.$$

Os eventos $\{T_n > t\}$ decrescem para $\{T_n = \infty\}$ quando t cresce, de modo que a continuidade das probabilidades dá $\mathbb{P}(T_n = \infty) = 0$. Isso vale simultaneamente para todos os inteiros $n \geq 1$.

Compare N com o processo $\widetilde{N}$ construído por esperas exponenciais no teorema anterior. Em uma lista finita de instantes determinísticos, ordenamos os valores distintos e incluímos o instante zero. Cada contagem é a soma dos incrementos nos intervalos assim formados. Nos dois processos, esses incrementos são independentes e têm os mesmos parâmetros de Poisson; portanto, as contagens têm a mesma distribuição conjunta. Além disso, para quaisquer $t_1, \ldots, t_m \geq 0$,

$$\{T_1 \leq t_1, \ldots, T_m \leq t_m\} = \{N(t_1) \geq 1, \ldots, N(t_m) \geq m\}.$$

Portanto o vetor $(T_1, \ldots, T_m)$ tem a mesma distribuição que o vetor dos primeiros m instantes de chegada de $\widetilde{N}$. Tomar diferenças consecutivas mostra que $(T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_m - T_{m-1})$ tem a distribuição de m exponenciais independentes de taxa λ. Como m é arbitrário, a afirmação vale para toda a sequência. ∎

Ideia — Duas descrições equivalentes

No processo de Poisson homogêneo, "tempos entre chegadas i.i.d. exponenciais" e "contagens com incrementos de Poisson independentes e estacionários" descrevem o mesmo modelo. Escolhemos a versão mais conveniente para cada cálculo.

5.2.3 Tempos de chegada e distribuição gama

Construímos o processo e mostramos a equivalência entre relógios e contagens. Podemos agora perguntar quanto tempo decorre até uma chegada de ordem fixada. A soma das esperas já definidas fornece esse instante; o resultado seguinte identifica sua distribuição.

Teorema 5.9 — Soma de exponenciais e distribuição gama

Sejam $\tau_1, \tau_2, \ldots$ variáveis independentes com distribuição $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Para cada inteiro $n \geq 1$, a soma $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$, que representa o instante da n-ésima chegada, tem distribuição gama com parâmetro de forma n e taxa λ. Sua densidade é

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{para } t \geq 0,$$

e vale 0 para $t < 0$.

Demonstração. O instante da n-ésima chegada excede t exatamente quando ocorreram menos de n chegadas até t. Pela lei da contagem, para $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(T_n > t) = \mathbb{P}(N(t) \leq n-1) = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Logo, a função de distribuição de T_n é

$$F_{T_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \qquad t \geq 0.$$

Derivando, obtemos

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Na segunda soma, fazemos a troca de índice $i = j-1$: os termos de grau 0 até $n-2$ se cancelam, restando apenas o último termo da primeira soma. Quando $n = 1$, a segunda soma é vazia e o resultado é a densidade exponencial. Para $t < 0$, a densidade é zero, pois $T_n > 0$ quase certamente. ■

Calcular a espera por contagens. A equivalência $\{T_n > t\} = \{N(t) \leq n-1\}$, usada na prova, evita integrar a densidade gama a cada novo problema: basta somar as probabilidades de observar de zero a $n-1$ eventos no intervalo.

Exemplo 5.4 — Quando chega a terceira requisição?.

Suponha que os tempos entre requisições sejam independentes e exponenciais com taxa de 2 por minuto. O instante T_3 da terceira chegada tem média $3(1/2) = 3/2$ minuto, por ser a soma de três esperas de média $1/2$ minuto. Qual é a chance de esperar mais de dois minutos? Isso equivale a observar no máximo duas chegadas até esse instante:

$$\mathbb{P}(T_3 > 2) = e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2}\right) = 13e^{-4} \approx 0{,}2381.$$

A pergunta era sobre o tempo de espera, mas a contagem forneceu a resposta diretamente.

◁

5.2.4 Uma janela de tempo muito curta

Construímos o fluxo completo de chegadas. Podemos agora aproximá-lo em uma janela curta: a situação usual é não acontecer nada; uma chegada tem probabilidade proporcional à duração da janela; duas ou mais são ainda menos prováveis. A distinção entre essas ordens de grandeza será a base das taxas no capítulo de tempo contínuo.

Proposição 5.10 — Nenhuma chegada, uma chegada ou várias
Se N é um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$ e $D_h = N(t+h) - N(t)$, então, para $t \geq 0$ fixado e $h \downarrow 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_h = 0) &= 1 - \lambda h + O(h^2), \\
\mathbb{P}(D_h = 1) &= \lambda h + O(h^2), \\
\mathbb{P}(D_h \geq 2) &= \frac{\lambda^2 h^2}{2} + O(h^3) = o(h).
\end{aligned}$$

Essas probabilidades não dependem de qualquer lista finita de contagens anteriores ao instante t.

Demonstração. O incremento D_h tem lei Poisson(λh) e é independente dos incrementos que descrevem o passado. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_h = 0) &= e^{-\lambda h}, \\
\mathbb{P}(D_h = 1) &= \lambda h e^{-\lambda h}, \\
\mathbb{P}(D_h \geq 2) &= 1 - e^{-\lambda h}(1 + \lambda h).
\end{aligned}$$

Para comparar as ordens, ponha $x = \lambda h$. A expansão de Taylor da exponencial em zero fornece

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), \qquad x e^{-x} = x - x^2 + O(x^3).$$

Somando essas duas expressões, os termos lineares se cancelam:

$$e^{-x}(1 + x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Subtrair de um dá a terceira fórmula. As duas primeiras resultam diretamente das expansões anteriores. Como λ é fixa, $O(x^j) = O(h^j)$ para cada inteiro j. Em particular,

$$\frac{\mathbb{P}(D_h \geq 2)}{h} = \frac{\lambda^2 h}{2} + O(h^2) \longrightarrow 0.$$

Isso é exatamente o significado de $o(h)$. A independência dos incrementos prova a última afirmação. ∎

Escrever $O(h^2)$ significa que o erro absoluto é limitado por uma constante vezes h^2, para h suficientemente pequeno. Escrever $o(h)$ significa que o erro dividido por h tende a zero. Portanto, "chegadas uma de cada vez" não impede duas chegadas numa janela positiva: afirma que a chance de duas ou mais desaparece mais depressa que a duração da janela. A aproximação exige λh pequeno, com taxa e duração expressas em unidades compatíveis.

5.3 Processos de Poisson compostos

Até aqui, cada chegada acrescentava uma unidade à contagem. Em muitas aplicações, porém, interessa também o que cada evento acrescenta: o valor da compra de um cliente, a duração de uma chamada ou o custo de um sinistro. Passaremos da contagem dos eventos à soma das quantidades associadas a eles.

Definição 5.5 — Processo de Poisson composto

Se $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa λ e $Y_1, Y_2, \ldots$ são variáveis reais i.i.d., independentes de N, definimos

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

com a convenção de que a soma vale 0 quando $N(t) = 0$.

O número $N(t)$ diz quantas parcelas aparecem; as marcas Y_i dizem quanto vale cada parcela. Quando as marcas são não negativas, $S(t)$ acumula quantidades e não diminui. Marcas negativas também são permitidas, por exemplo para representar ganhos e perdas. Em geral, $S(t)$ registra valores, não o número de eventos: mesmo marcas positivas podem produzir saltos maiores que um ou não inteiros.

Teorema 5.11 — Média e variância de uma soma aleatória

Se N é inteiro, não negativo e independente das variáveis i.i.d. $Y_1, Y_2, \ldots$, então, se $EN < \infty$ e $E|Y_1| < \infty$,

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] = EN\, EY_1$$

e, se também $EN^2 < \infty$ e $EY_1^2 < \infty$,

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = EN\, \operatorname{Var}(Y_1) + \operatorname{Var}(N)(EY_1)^2.$$

Demonstração. Escreva $S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$. A independência de N e das marcas assegura que, condicionado a $N = n$, continuamos somando n variáveis independentes com a lei original de Y_1. A desigualdade triangular dá

$$E(|S| \mid N = n) \le \sum_{i=1}^{n} E|Y_i| = nE|Y_1|.$$

Multiplicar por $\mathbb{P}(N = n)$ e somar em n fornece $E|S| \le EN\, E|Y_1| < \infty$, justificando a esperança de S. A mesma decomposição, agora com a média condicional nEY_1, dá

$$ES = \sum_{n \ge 0} \mathbb{P}(N = n) nEY_1 = EN\, EY_1.$$

Sob as hipóteses de segundo momento, sua variância condicional é $n \operatorname{Var}(Y_1)$ e

$$E[S^2 \mid N = n] = n \operatorname{Var}(Y_1) + n^2 (EY_1)^2;$$

somar sobre os valores de N mostra que

$$ES^2 = EN\, \operatorname{Var}(Y_1) + E(N^2)(EY_1)^2 < \infty.$$

Subtraindo $(ES)^2 = (EN)^2 (EY_1)^2$, obtemos diretamente

$$\operatorname{Var}(S) = EN\, \operatorname{Var}(Y_1) + \left[E(N^2) - (EN)^2\right](EY_1)^2,$$

que é a segunda fórmula. ∎

Para o processo composto, $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$; logo,

$$ES(t) = \lambda t\, EY_1, \qquad \text{Var}(S(t)) = \lambda t\, EY_1^2.$$

A segunda identidade inclui duas fontes de variabilidade: o número aleatório de chegadas e o tamanho aleatório de cada marca.

Exemplo 5.5 — Receita diária.

Uma loja recebe um número de clientes com distribuição de Poisson de média 81. Os gastos são i.i.d., com média 8 e desvio padrão 6, e independentes da quantidade de clientes. A receita diária S satisfaz

$$ES = 81 \cdot 8 = 648, \qquad \text{Var}(S) = 81(6^2 + 8^2) = 8100.$$

Portanto, seu desvio padrão é 90. Observe que não basta multiplicar 81 pela variância de um gasto: a quantidade de clientes também varia.

◁

5.4 Transformações

5.4.1 Afinamento

Podemos classificar cada chegada de um processo de Poisson: emergência ou chamada comum, compra ou simples visita, falha de um tipo ou de outro. Seja Y_i a classe atribuída à i-ésima chegada e seja $N_j(t)$ o número de chegadas de classe j até o instante t. O resultado central é que a separação preserva a estrutura de Poisson.

Teorema 5.12 — Afinamento independente

Se as marcas Y_i tomam valores em $\{1, \dots, m\}$, são i.i.d. e independentes do processo original, então $(N_j(t))_{t \geq 0}$ são processos de Poisson independentes, com taxas

$$\lambda_j = \lambda \mathbb{P}(Y_i = j).$$

Uma classe de probabilidade zero corresponde ao processo identicamente nulo.

Há duas afirmações: cada subprocesso ainda é Poisson e os subprocessos são independentes. Essa independência pode parecer contraintuitiva, pois todas as classes provêm da mesma corrente de chegadas; ela é uma propriedade especial da marcação independente de um processo de Poisson.

Demonstração. Escreva $p_j = \mathbb{P}(Y_i = j)$ e fixe um intervalo de comprimento t. Se X_j conta as chegadas da classe j nesse intervalo e $k = k_1 + \cdots + k_m$, o evento considerado exige exatamente k chegadas originais. Condicionado a esse total, as marcas independentes têm contagens multinomiais: há $k!/(k_1! \cdots k_m!)$ maneiras de distribuir as classes na sequência das chegadas. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m) &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\frac{k!}{k_1! \cdots k_m!}\prod_{j=1}^{m} p_j^{k_j} \\ &= \prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda p_j t}\frac{(\lambda p_j t)^{k_j}}{k_j!}.\end{aligned}$$

A fatoração usa $\sum_j p_j = 1$, de modo que $e^{-\lambda t} = \prod_j e^{-\lambda p_j t}$, e separa as potências e os fatoriais por classe. Se $p_j = 0$, a respectiva contagem é zero quase certamente; essa classe pode ser retirada do cálculo e reinserida ao final. A última linha é o produto das massas de variáveis Poisson$(\lambda p_j t)$; portanto, as contagens por classe são independentes nesse intervalo.

Para concluir a afirmação sobre os processos, considere agora qualquer família finita de intervalos disjuntos $I_1, \dots, I_r$. As contagens originais nesses intervalos são independentes. Condicionado a seus valores, as classificações usam grupos disjuntos de marcas i.i.d., independentes das contagens. Por isso, o cálculo anterior se aplica a cada intervalo e a probabilidade conjunta de todas as contagens por intervalo e por classe se fatora no produto das massas de Poisson, com parâmetros $\lambda p_j |I_\ell|$. Logo, cada subprocesso tem incrementos independentes e estacionários, e as famílias de contagens das diferentes classes são independentes. Contagens acumuladas em quaisquer instantes são somas desses incrementos, o que prova também a independência dos subprocessos completos. ∎

Exemplo 5.6 — Chamadas de emergência.

Chamadas chegam a uma central de atendimento segundo um processo de Poisson com taxa 20 por hora. Cada chamada é classificada como emergência com probabilidade 0,2, independentemente das demais classificações e dos instantes de chegada.

Pelo teorema de afinamento, as chamadas de emergência formam um processo de Poisson com taxa $20 \cdot 0{,}2 = 4$ por hora; as demais formam um processo independente com taxa 16 por hora. Em particular, o tempo até a próxima emergência é Exp(4), com média $1/4$ de hora, e

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{ao menos uma emergência nos próximos 15 minutos})\\ &\quad = 1 - e^{-4(1/4)} = 1 - e^{-1}.\end{aligned}$$

◁

Exemplo 5.7 — Erros não encontrados.

Neste exemplo, adaptado de Durrett (2016), dois revisores leem um manuscrito de 300 páginas. O primeiro encontra 100 erros, o segundo encontra 120, e 80 aparecem nas duas listas. Suponha que os erros formem um processo de Poisson de taxa desconhecida λ por página e que cada erro seja encontrado pelos revisores com probabilidades p_1 e p_2. Essas probabilidades são as mesmas para todos os erros, e as detecções são independentes entre revisores, entre erros e dos locais onde os erros aparecem.

Seja X_0 o número de erros não encontrados, X_1 e X_2 os encontrados apenas pelo primeiro ou apenas pelo segundo revisor, e X_3 os encontrados por ambos. Escrevendo $\mu = 300\lambda$, o teorema de afinamento mostra que essas variáveis são Poisson independentes, com médias

$$\begin{aligned}\mu(1-p_1)(1-p_2), \qquad & \mu p_1(1-p_2),\\ \mu(1-p_1)p_2, \qquad & \mu p_1 p_2.\end{aligned}$$

Observamos $X_1 = 20$, $X_2 = 40$ e $X_3 = 80$. Estimando as probabilidades pelas proporções observadas,

$$\hat{p}_1 = \frac{80}{40+80} = \frac{2}{3}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{80}{20+80} = 0{,}8.$$

Além disso,

$$\frac{EX_0}{EX_1} = \frac{1-p_1}{p_1} = \frac{EX_2}{EX_3},$$

o que sugere $\widehat{X}_0 = 20 \cdot 40/80 = 10$ erros ainda não encontrados. Equivalentemente, $\hat{\mu} = 80/(\hat{p}_1\hat{p}_2) = 150$, ou $\hat{\lambda} = 0{,}5$ erro por página.

O valor dez estima a média do número de erros não encontrados; não determina o total que de fato restou no manuscrito. A interpretação depende das hipóteses de detecção: erros com dificuldades muito diferentes ou revisores que compartilham suas descobertas podem produzir outra relação entre as listas.

◁

Exemplo 5.8 — Poissonização dos aniversários.

Suponha que o número M de pessoas em um evento tenha distribuição Poisson(2263) e que seus aniversários sejam independentes e uniformes nos 365 dias do ano, também independentemente de M. Seja N_j o número de pessoas que fazem aniversário no dia j.

Pelo afinamento em 365 classes, as variáveis $N_1, \ldots, N_{365}$ são independentes e cada uma tem distribuição Poisson$(2263/365) =$ Poisson(6,2). Logo,

$$\mathbb{P}(N_j > 0 \text{ para todo } j) = \left(1 - e^{-6{,}2}\right)^{365} \approx 0{,}476.$$

A ideia de *poissonização* é substituir um número fixo de objetos por um total de Poisson. Com um total fixo, as contagens das classes são dependentes; com um total de Poisson, o afinamento as torna independentes e o cálculo se fatora. O resultado calculado é exato para o total aleatório M, de média 2263. Para um evento com exatamente 2263 pessoas, seria necessário condicionar em $M = 2263$; essa condição desfaz a independência das contagens, e o produto acima não fornece a probabilidade exata.

◁

5.4.2 Superposição

Afinamento divide uma corrente de chegadas em subprocessos. A operação inversa é a *superposição*: reunimos as chegadas de processos independentes e ignoramos sua origem. O resultado continua sendo um processo de Poisson, agora com taxa igual à soma das taxas.

Teorema 5.13 — Superposição

Se $N_1(t), \dots, N_k(t)$ são processos de Poisson independentes com taxas $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, então

$$N(t) = N_1(t) + \cdots + N_k(t)$$

é um processo de Poisson com taxa $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Demonstração. A soma começa em zero. Fixe intervalos disjuntos $I_1, \dots, I_r$. Para cada processo, seus incrementos nesses intervalos são independentes; a independência dos processos garante também a independência entre incrementos de origens diferentes. Portanto, todos esses incrementos formam uma família independente. Somar por intervalo preserva a independência entre os totais resultantes. Em um intervalo de comprimento h, a soma tem lei de Poisson de parâmetro $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)h$, pelo Teorema 5.4. Isso prova a lei e a independência dos incrementos, além de sua estacionariedade. Não há chegadas simultâneas de processos diferentes com probabilidade positiva: cada par de tempos de chegada independentes tem probabilidade zero de empate, pois cada instante da m-ésima chegada possui densidade gama, conforme a construção exponencial. Como os pares podem ser enumerados, a probabilidade de ocorrer algum empate também é zero. Assim, as trajetórias preservam os saltos unitários do processo de Poisson. ∎

O diagrama reúne as duas operações:



Figura 5.3: Afinamento e superposição. As cores registram a classe ou a origem de cada chegada; ao ignorá-las, as taxas se somam.

As ideias de superposição e afinamento também são úteis para simular cadeias de Markov em tempo contínuo. Por enquanto, vamos usá-las para resolver uma corrida entre dois processos de Poisson.

Exemplo 5.9 — Quantos chegam à primeira loja antes de chegar alguém à segunda?.

Na abertura do capítulo, duas lojas esperavam clientes. Suponha agora que suas chegadas formem processos de Poisson independentes N_A, N_B, de taxas $\lambda > 0$ e $\mu > 0$. Seja T o instante da primeira chegada à loja B e K o número de chegadas à loja A anteriores a T. Queremos a distribuição de K; a duração da observação é aleatória.

Reunimos as chegadas num processo de taxa $\lambda + \mu$. Podemos representar sua origem por marcas independentes: cada chegada recebe a marca A com probabilidade

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

e a marca B com probabilidade $q = 1-p = \mu/(\lambda+\mu)$. De fato, pelo afinamento independente, os dois processos marcados são Poisson independentes com as taxas originais. Assim, essa construção tem a mesma lei conjunta das chegadas às duas lojas.

O evento $\{K = k\}$ exige exatamente k marcas A antes da primeira marca B. As primeiras k marcas devem ser A e a seguinte deve ser B. Pela independência das marcas,

$$\boxed{\mathbb{P}(K = k) = p^k q, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .}$$

Não há outra restrição sobre os instantes. A soma das probabilidades é $q \sum_{k\geq 0} p^k = q/(1-p) = 1$, pois $0 < p < 1$. Essa é a distribuição geométrica no conjunto $\mathbb{N}_0$: ela conta chegadas A antes da primeira B, admitindo o valor zero. Além disso, $K \geq k$ equivale a as primeiras k marcas serem A, de modo que $\mathbb{P}(K \geq k) = p^k$. Pela fórmula da cauda,

$$E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k = \frac{p}{1-p} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Por exemplo, se chegam dois clientes por hora à loja A e um por hora à B, então $p = 2/3$. Temos $\mathbb{P}(K = 0) = 1/3$ e $\mathbb{P}(K \geq 3) = (2/3)^3 = 8/27$, enquanto $E(K) = 2$. O valor médio dois não fixa a contagem de cada realização: a espera pela primeira chegada à loja B também varia.

◁

Trocar “a primeira chegada B” por uma chegada B de ordem maior leva a contar várias sequências de marcas. O próximo exemplo combina esse mesmo raciocínio com uma condição sobre as duas cores.

Exemplo 5.10 — Uma disputa entre processos de Poisson.

Considere chegadas vermelhas segundo um processo de Poisson de taxa λ e chegadas verdes segundo um processo independente de taxa μ. Qual é a probabilidade de ocorrerem seis chegadas vermelhas antes da quarta chegada verde?

Na superposição dos dois processos, cada chegada é vermelha com probabilidade

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

e verde com probabilidade $1-p$. Pelo argumento de marcação do Exemplo 5.9, as cores sucessivas são independentes. A Seção 6.1 retomará essa conclusão pela corrida de relógios e pelas esperas residuais.

A sexta vermelha ocorre antes da quarta verde exatamente quando, entre as nove primeiras chegadas, pelo menos seis são vermelhas. Portanto, a probabilidade de interesse é

$$\sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}.$$

Se $\lambda = \mu$, então $p = 1/2$ e essa expressão se torna

$$\frac{1}{512} \sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} = \frac{130}{512} \approx 0{,}254.$$

◁

5.4.3 Condicionamento

Até aqui, separamos ou reunimos fluxos de chegadas. Agora mudaremos a informação disponível sobre um mesmo fluxo. Saber que ocorreram exatamente n chegadas até o instante t altera as probabilidades das contagens intermediárias. Veremos como essas chegadas se repartem pelo intervalo e, em seguida, como se distribuem seus instantes.

Teorema 5.14 — Contagem condicional

Se $0 \le s < t$ e $0 \le m \le n$, com m, n inteiros, então

$$\mathbb{P}(N(s) = m \mid N(t) = n) = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$

Ou seja, condicionada à contagem total $N(t) = n$, a contagem até s tem distribuição Binomial$(n, s/t)$. A taxa λ desaparece da resposta.

Demonstração. A contagem até t se divide em dois incrementos:

$$N(t) = N(s) + [N(t) - N(s)].$$

Portanto, para termos $N(s) = m$ e $N(t) = n$, devem ocorrer m chegadas em $[0, s]$ e $n - m$ em $(s, t]$. A independência dos incrementos e a definição de probabilidade condicional fornecem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(s) = m \mid N(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(N(s) = m)\mathbb{P}(N(t) - N(s) = n - m)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^m}{m!} \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!} \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} \\
&= \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-m}.
\end{aligned}$$

Cancelamos os fatores exponenciais e as potências de λ. O mesmo cálculo inclui $s = 0$ e $n = 0$, interpretando uma potência de expoente zero como 1, inclusive quando a base é zero. ∎

A fórmula binomial considera dois intervalos. Ao dividir $[0, t]$ em várias partes, obteremos uma distribuição multinomial, que também permite descrever os instantes individuais de chegada.

Sejam $T_1, T_2, \ldots$ os instantes de chegada. Fixe $t > 0$ e um inteiro $n \ge 1$. Considere $U_1, \ldots, U_n$ independentes e uniformes em $[0, t]$; escreva $V_1 < \cdots < V_n$ para esses pontos colocados em ordem crescente.

Teorema 5.15 — Tempos de chegada condicionados

Condicionado a $N(t) = n$, o vetor $(T_1, \dots, T_n)$ tem a mesma distribuição que $(V_1, \dots, V_n)$. Assim, podemos gerar os instantes das n chegadas sorteando n pontos independentes uniformes em $[0, t]$ e ordenando-os. A independência vale para os pontos antes de ordenar; os instantes ordenados são dependentes quando $n \geq 2$.

Demonstração. Divida o intervalo em partes de comprimentos $h_1, \dots, h_r$:

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_r = t, \qquad h_i = u_i - u_{i-1}.$$

Seja $C_i = N(u_i) - N(u_{i-1})$. Para inteiros não negativos $n_1 + \cdots + n_r = n$, a independência dos incrementos fornece

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(C_1 = n_1, \dots, C_r = n_r \mid N(t) = n) \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{r} e^{-\lambda h_i} \frac{(\lambda h_i)^{n_i}}{n_i!}}{e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!} \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{h_i}{t}\right)^{n_i}. \end{aligned}$$

Usamos $\sum_i h_i = t$ e $\sum_i n_i = n$. A taxa desapareceu. Essa última linha é uma probabilidade multinomial: se sorteamos n pontos independentes uniformes em $[0, t]$, cada ponto cai na parte i com probabilidade h_i/t. Portanto, para toda partição finita, as contagens dos pontos uniformes e as contagens de chegadas condicionadas a $N(t) = n$ possuem a mesma distribuição conjunta.

Resta passar das contagens aos instantes. Sob o condicionamento $N(t) = n$, todos os primeiros n instantes pertencem a $[0, t]$. Basta, portanto, comparar as condições com $1 \leq j \leq n$ e $u \in [0, t]$. Para esses valores,

$$T_j \leq u \quad \Longleftrightarrow \quad N(u) \geq j.$$

Analogamente, $V_j \leq u$ significa que pelo menos j pontos uniformes caíram até u. Várias condições dessas, em instantes u diferentes, podem ser verificadas conjuntamente a partir das contagens na partição formada por esses instantes. Como as distribuições das contagens coincidem, as distribuições dos vetores ordenados também coincidem. ∎

Conhecido apenas o total, não há uma parte do intervalo favorecida para as chegadas: seus instantes têm a lei de pontos uniformes colocados em ordem. Ela fornece uma segunda explicação para o teorema anterior: cada uniforme cai em $[0, s]$ com probabilidade s/t, independentemente dos outros, de modo que a contagem é binomial.

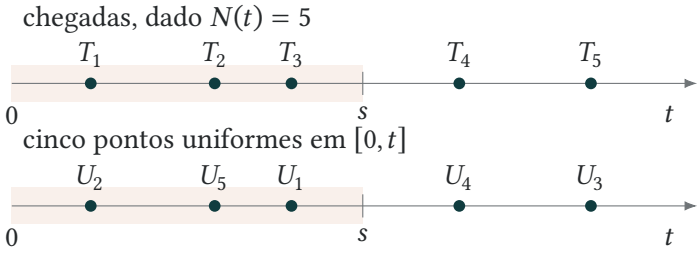


Figura 5.4: Condicionado a $N(t) = 5$, os cinco instantes de chegada têm a lei de cinco pontos uniformes colocados em ordem. A faixa destaca $[0, s]$: contar seus pontos produz a distribuição binomial de $N(s)$.

O mesmo vale para qualquer subintervalo $I \subseteq [0, t]$: condicionado a $N(t) = n$, o número de chegadas em I tem distribuição Binomial$(n, |I|/t)$.

Exemplo 5.11 — Quatro chegadas em três horas.

Uma central recebeu quatro chamadas em três horas. Sob o modelo de Poisson homogêneo, qual é a probabilidade de exatamente uma delas ter chegado na primeira hora? Pelo Teorema 5.14,

$$\mathbb{P}(N(1) = 1 \mid N(3) = 4) = \binom{4}{1}(1/3)(2/3)^3 = \frac{32}{81}.$$

A distribuição condicional completa é

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(N(1) = k \mid N(3) = 4)$	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

A primeira hora ocupa um terço do intervalo; por isso, a média condicional é $4/3$. A taxa λ não aparece: uma vez conhecido o total de chamadas, importa aqui a proporção entre as durações dos intervalos.

◁

5.5 Problemas de síntese

As ferramentas deste capítulo respondem a perguntas diferentes sobre um mesmo fluxo. O primeiro problema reúne afinamento, superposição, condicionamento e somas compostas. O segundo compara a espera pela primeira chegada antes e depois de conhecermos a contagem de um intervalo.

Exemplo 5.12 — Uma saída de rodovia.

Em um modelo adaptado de Durrett (2016) para a rodovia US 421, suponha que caminhões e carros passem segundo processos de Poisson independentes, com taxas de 40 e 100 por hora. Cada caminhão toma uma determinada saída com probabilidade $1/8$ e cada carro, com probabilidade $1/10$, independentemente dos demais veículos e dos instantes de chegada. Todas as perguntas a seguir se referem aos veículos que tomam essa saída.

(a) Qual é a probabilidade de chegarem exatamente seis caminhões em uma hora?

(b) Dado que chegaram seis caminhões nessa hora, qual é a probabilidade de exatamente dois deles chegarem durante o terço central?

(c) Qual é a probabilidade de quatro carros chegarem antes do segundo caminhão?

(d) Cada caminhão leva um passageiro, e o número de passageiros de cada carro é 1, 2 ou 4, com probabilidades 0,3, 0,5 e 0,2. Suponha que esses números sejam i.i.d. e independentes dos processos de chegada. Determine a média e o desvio padrão do total de passageiros que chegam em uma hora.

◁

Resolução. Começamos pelo afinamento: na saída, as taxas são $40/8 = 5$ caminhões e $100/10 = 10$ carros por hora. Os dois processos continuam independentes. Essa redução do fluxo será usada em todos os itens.

(a) Contar em um intervalo fixo. O número de caminhões em uma hora tem distribuição de Poisson com média 5. Portanto,

$$e^{-5}\frac{5^6}{6!} \approx 0{,}1462.$$

(b) Distribuir um total conhecido no tempo. Agora não sorteamos mais a quantidade de caminhões: ela já está fixada em seis. Pelo Teorema 5.15, podemos representar seus instantes por seis pontos uniformes independentes na hora observada, antes de ordená-los. Cada ponto cai no terço central com probabilidade $1/3$, de modo que a contagem nesse trecho é binomial. A resposta é

$$\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}3292.$$

A taxa de cinco por hora já não aparece: condicionado ao total, importa apenas a proporção do intervalo ocupada pelo trecho escolhido.

(c) Comparar a ordem das chegadas. Reunimos os dois fluxos em um processo de taxa 15 por hora. As classes sucessivas são independentes, e cada chegada é um carro com probabilidade $10/15 = 2/3$. O quarto carro precede o segundo caminhão exatamente quando pelo menos quatro das cinco primeiras chegadas são carros. Logo,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3} = \frac{112}{243} \approx 0{,}461.$$

Aqui precisamos da ordem dos veículos, não dos tempos entre eles.

(d) Somar passageiros, não veículos. Se Y é o número de passageiros de um carro, então

$$EY = 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}2 = 2{,}1, \qquad EY^2 = 0{,}3 + 4\cdot 0{,}5 + 16\cdot 0{,}2 = 5{,}5.$$

O total S soma o número de caminhões a uma soma composta de Poisson correspondente aos carros. Pela independência entre as duas origens,

$$ES = 5 + 10\cdot 2{,}1 = 26, \qquad \operatorname{Var}(S) = 5 + 10\cdot 5{,}5 = 60.$$

Assim, o desvio padrão é $\sqrt{60} \approx 7{,}746$ passageiros. O segundo momento EY^2, e não apenas a variância de Y, aparece porque tanto o número de carros quanto sua ocupação são aleatórios. ∎

Exemplo 5.13 — Uma espera vista com informações diferentes.
Um sensor registra eventos segundo um processo de Poisson de taxa 3 por hora. Seja T_1 o instante da primeira chegada. Qual é sua esperança e qual é a probabilidade de esperar mais de uma hora? Como as respostas mudam se soubermos que ocorreram exatamente duas chegadas nas primeiras duas horas?

◁

Resolução. Sem a informação adicional, T_1 é exponencial de taxa 3. Logo,

$$ET_1 = \frac{1}{3} \text{ hora}, \qquad \mathbb{P}(T_1 > 1) = e^{-3}.$$

Condicionado a $N(2) = 2$, os dois instantes têm a lei de dois pontos uniformes independentes em $[0, 2]$, colocados em ordem. O primeiro excede u precisamente quando ambos os pontos caem em $(u, 2]$. Assim, para $0 \le u \le 2$,

$$\mathbb{P}(T_1 > u \mid N(2) = 2) = \left(1 - \frac{u}{2}\right)^2.$$

Em particular, a probabilidade de esperar mais de uma hora passa a ser $1/4$. Derivando a função de distribuição, obtemos a densidade condicional $f(u) = 1 - u/2$ em $(0, 2)$; portanto,

$$E(T_1 \mid N(2) = 2) = \int_0^2 u\left(1 - \frac{u}{2}\right) du = \frac{2}{3} \text{ hora}.$$

A espera condicional não é exponencial. Isso não contraria a falta de memória: saber que nenhuma chegada ocorreu até certo instante é diferente de conhecer o total de um intervalo que inclui o futuro. A informação adicional muda a distribuição que devemos usar. ■

5.6 Exercícios

Os problemas começam pelos relógios, passam às contagens e terminam combinando afinamento com cadeias de Markov. Especifique a unidade de cada taxa e distinga independência de incrementos de independência entre contagens acumuladas.

Exercício 5.1 — Esperar mais não é envelhecer

Um atendimento tem duração exponencial de média 12 minutos. Calcule $\mathbb{P}(T > 18)$ e $\mathbb{P}(T > 18 \mid T > 9)$. Repita a comparação para U uniforme em $[0, 24]$. Qual desses modelos possui falta de memória?

Exercício 5.2 — Uma caracterização da exponencial

Seja $T > 0$ quase certamente, finito quase certamente, com sobrevivência contínua $u(t) = \mathbb{P}(T > t) > 0$ para todo $t \geq 0$. Suponha falta de memória. Mostre que $u(s+t) = u(s)u(t)$, determine $u(r)$ para r racional não negativo a partir de $u(1)$ e conclua que T é exponencial com alguma taxa estritamente positiva. Explique o papel da hipótese de finitude.

Exercício 5.3 — Quarta chegada e janela de observação

Um sensor registra eventos à taxa de 3 por hora, segundo um processo de Poisson. Calcule ET_4, $\mathbb{P}(T_4 > 1)$ e $\mathbb{P}(N(2) - N(1) \geq 2)$. Dado $N(2) = 6$, qual é a probabilidade de exatamente duas chegadas terem ocorrido na primeira meia hora?

Exercício 5.4 — Contagens acumuladas são dependentes

Para $0 \leq s \leq t$, encontre $E[N(s)N(t)]$ e $\mathrm{Cov}(N(s), N(t))$ em um processo de taxa λ. Por que a resposta é compatível com incrementos independentes?

Exercício 5.5 — Detecção parcial

Partículas chegam segundo um processo de Poisson de taxa 9 por minuto. Cada uma é detectada com probabilidade $2/3$, independentemente das demais e dos instantes. Em meio minuto, determine a probabilidade de duas detecções e uma partícula não detectada. Se soubermos que chegaram exatamente três partículas, as contagens detectada e não detectada ainda são independentes?

Exercício 5.6 — Contar pedidos e somar unidades

Pedidos chegam segundo um processo de Poisson de taxa 12 por hora. Cada pedido contém uma, duas ou quatro unidades, com probabilidades $1/2$, $1/3$ e $1/6$, independentemente de tudo o mais. Encontre a média e a variância do total de unidades em meia hora. Determine a distribuição do número de pedidos com quatro unidades nesse intervalo.

Exercício 5.7 — Pessoas em dois estados

Os números iniciais de pessoas nos estados 1 e 2 são Poisson independentes com médias 4 e 2. Cada pessoa evolui com matriz

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

As transições das pessoas são independentes entre si e das contagens iniciais. Prove que, após n passos, os números nos dois estados ainda são Poisson independentes e determine suas médias. O que muda se condicionarmos ao total inicial de pessoas ser igual a um inteiro $m \geq 0$?

Janelas curtas, marcas e durações aleatórias

Os problemas seguintes retomam os modelos resolvidos, mas mudam a informação observada ou o mecanismo de registro. Em cada caso, explique qual propriedade de Poisson está sendo usada.

Exercício 5.8 — Uma chegada ou várias em um minuto

Um servidor recebe requisições segundo um processo de Poisson de taxa 6 por hora. Calcule as probabilidades de nenhuma, exatamente uma e pelo menos duas requisições em um minuto. Compare a probabilidade de uma requisição com a aproximação λh. Para uma janela de h horas, determine

$$\lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}\big(N(h) \geq 2 \mid N(h) \geq 1\big).$$

Explique por que esse limite é compatível com a possibilidade de haver duas requisições em qualquer janela de duração positiva.

Exercício 5.9 — Antes da terceira chegada à outra loja

Nas lojas do Exemplo 5.9, seja K_r o número de chegadas A anteriores à r-ésima chegada B, com $r \geq 1$ inteiro. Mostre que, para $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(K_r = k) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^k (1 - p)^r, \qquad p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Explique o coeficiente binomial e determine $E(K_r)$ decompondo a sequência em blocos terminados por uma marca B. Para $\lambda = 2$, $\mu = 1$ por hora e $r = 3$, calcule $\mathbb{P}(K_3 = 2)$.

Exercício 5.10 — Quanto tempo esperou quem contou muitas chegadas?

Mantenha T e K do Exemplo 5.9. Usando a independência de T e do processo N_A, obtenha a densidade conjunta de T e do evento $\{K = k\}$. Mostre que, condicionado a $K = k$, T tem distribuição gama de forma $k + 1$ e taxa $\lambda + \mu$. Determine $E(T \mid K = k)$ e explique por que conhecer uma contagem A grande altera nossa informação sobre a espera pela primeira chegada B.

Exercício 5.11 — Dois detectores podem registrar a mesma partícula

Partículas chegam segundo Poisson de taxa $\lambda > 0$. Cada partícula é detectada pelo aparelho A com probabilidade a e pelo aparelho B com probabilidade b, onde $0 < a, b < 1$. Para uma mesma partícula, as duas decisões são independentes; decisões de partículas diferentes também são independentes, e todas essas decisões são independentes do processo de chegadas e dos instantes de chegada. Sejam $C_A(t)$ e $C_B(t)$ os números de registros até t. Separe as chegadas em quatro classes: detectadas por ambos, somente por A, somente por B e por nenhum. Determine as leis marginais de $C_A(t), C_B(t)$ e sua covariância. As duas contagens são independentes para $t > 0$? Explique a diferença em relação a separar cada chegada em classes mutuamente exclusivas.

Exercício 5.12 — Pacotes chegam aos pares

Um processo N de taxa λ conta lotes, cada um contendo exatamente dois pacotes. O total de pacotes é $C(t) = 2N(t)$. Calcule $E(C(t))$, $\mathrm{Var}(C(t))$ e $\mathbb{P}(C(t) = 1)$. Compare com um processo de Poisson de taxa 2λ. Determine a primeira ordem de $\mathbb{P}(C(h) \geq 2)$ quando $h \downarrow 0$ e identifique a condição de trajetória que impede C de ser um processo de Poisson.

5.7 Processos de Poisson não homogêneos*

Uma única taxa pode descrever acessos de madrugada e no horário de maior uso? Quando os logs mostram um padrão ao longo do dia, o primeiro ajuste é permitir que o relógio acelere ou desacelere de maneira determinística. A independência dos incrementos continua sendo uma hipótese separada.

Definição 5.6 — Intensidade temporal e intensidade acumulada

Seja $\lambda(t) \geq 0$ uma função determinística cuja integral de Riemann seja finita em cada intervalo limitado. Podemos tomar, por exemplo, uma função contínua por partes; também admitimos integrais impróprias finitas. É nesse sentido do cálculo que usaremos a expressão *localmente integrável*. Defina

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du.$$

Um processo de contagem $(N(t))_{t\geq 0}$ é um *processo de Poisson não homogêneo* com intensidade $\lambda(t)$ se $N(0) = 0$, tem incrementos independentes e, para $0 \leq s < t$,

$$N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}\left(\int_s^t \lambda(u)\,du\right).$$

Admitimos parâmetro zero: nesse caso a contagem é zero quase certamente. Usamos as mesmas convenções de trajetória do processo homogêneo: as trajetórias são contínuas à direita e cada chegada produz um salto unitário.

A intensidade tem unidade de eventos por unidade de tempo. Nos pontos de continuidade de λ, a probabilidade de uma chegada em $(t, t+h]$ é $\lambda(t)h + o(h)$. Já $\Lambda(t) - \Lambda(s)$ é uma quantidade acumulada, sem unidade de tempo: a área sob a intensidade no intervalo. Pela lei de Poisson,

$$E[N(t) - N(s)] = \Lambda(t) - \Lambda(s),$$
$$\text{Var}[N(t) - N(s)] = \Lambda(t) - \Lambda(s).$$

As contagens em intervalos de mesmo comprimento podem ter leis diferentes; a localização do intervalo agora importa.

Uma taxa que responde ao que já aconteceu

Uma loja pode receber mais clientes ao meio-dia, mesmo que esteja vazia: uma intensidade determinística $\lambda(t)$ descreve esse efeito do horário. Outro mecanismo seria cada chegada estimular novas chegadas. Se a contagem atual é n, podemos especificar uma espera exponencial de taxa $\nu + an$, com $\nu > 0$ e $a > 0$, até o próximo evento. Enquanto nenhum evento ocorre, o estado permanece n; por isso, nesse modelo,

$$\mathbb{P}\big(X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = n\big) = e^{-(\nu+an)h}.$$

Duas histórias que chegam ao mesmo horário com contagens diferentes produzem, portanto, leis diferentes para a espera seguinte. Essa dependência da contagem contraria a independência dos incrementos exigida no modelo de Poisson não homogêneo. O capítulo de tempo contínuo construirá processos desse tipo a partir de taxas de salto. Alterar a intensidade conforme o horário e fazê-la responder ao estado são escolhas de modelagem distintas.

Proposição 5.16 — Um relógio determinístico diferente

Se M é um processo de Poisson de taxa 1, então

$$N(t) = M(\Lambda(t))$$

é um processo de Poisson não homogêneo de intensidade $\lambda(t)$.

Demonstração. O incremento entre s e t é o incremento de M no intervalo $(\Lambda(s), \Lambda(t)]$, cujo comprimento é $\Lambda(t) - \Lambda(s)$. Ele tem a lei de Poisson exigida. Como Λ é não decrescente, intervalos de tempo disjuntos geram intervalos transformados sem sobreposição; a independência é herdada de M. Além disso, Λ é contínua e finita em cada intervalo limitado. A mudança de relógio preserva, portanto, a continuidade à direita e os saltos unitários: ela pode prolongar a espera durante uma faixa de intensidade zero, mas não salta sobre vários instantes de chegada de M. Como $M(\Lambda(t))$ é finito para cada t finito, também não há infinitas chegadas em tempo limitado. ∎

Exemplo 5.14 — Acessos estimados a partir de logs.

Registre os horários de cada acesso a um serviço em cinco dias comparáveis, com observação completa. A tabela contém contagens didáticas agregadas; as faixas horárias foram escolhidas antes do ajuste.

faixa	acessos	horas observadas	$\hat{\lambda}$
0h – −8h	40	40	1
8h – −16h	160	40	4
16h – −24h	80	40	2

Para uma faixa com duração diária Δ e contagens $C_1, \dots, C_D$ em D dias, o modelo usa $C_d \sim \text{Poisson}(\lambda\Delta)$ independentes. Como a média de cada contagem é $\lambda\Delta$, a média teórica do total é $D\lambda\Delta$. Uma estimativa natural iguala essa média ao total observado:

$$\hat{\lambda} = \frac{C_1 + \cdots + C_D}{D\Delta} = \frac{\text{total de acessos}}{\text{total de horas observadas}}.$$

A estimativa também dá taxa zero quando não houve acessos. Se há falhas de registro, o denominador deve contar apenas o tempo efetivamente observado, desde que a falta de registros não dependa dos eventos.

O modelo ajustado para um dia é

$$\hat{\lambda}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 8, \\ 4, & 8 \le t < 16, \\ 2, & 16 \le t < 24, \end{cases} \qquad \text{em acessos por hora,}$$

e supomos que esse perfil se repita a cada 24 horas. Entre 7h30 e 9h,

$$\widehat{\Lambda}(9) - \widehat{\Lambda}(7{,}5) = 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1 = 4{,}5.$$

Sob o modelo ajustado, tratando as taxas estimadas como fixas, a contagem prevista tem média e variância 4,5; a probabilidade ajustada de nenhum acesso é $e^{-4{,}5} \approx 0{,}0111$. Esses cálculos descrevem a variabilidade das chegadas para as taxas adotadas; não incluem a incerteza de estimar essas taxas a partir de apenas cinco dias.

O modelo homogêneo estimaria $280/120 = 7/3$ acessos por hora. Ele prevê os mesmos 56 acessos no dia inteiro, mas apenas $(7/3) \cdot 1{,}5 = 3{,}5$

naquele intervalo. Acertar o total diário não garante acertar sua distribuição no tempo.

◁

A transformação temporal também sugere uma verificação. Se Λ é estritamente crescente e tende a infinito, o processo $\widetilde{N}(u) = N(\Lambda^{-1}(u))$ é Poisson de taxa 1. Se T_k são os instantes das chegadas, com $T_0 = 0$, os intervalos transformados

$$Z_k = \Lambda(T_k) - \Lambda(T_{k-1})$$

são i.i.d. exponenciais de taxa 1. Se a intensidade se anula em intervalos, a construção direta $M(\Lambda(t))$ continua válida; a notação com inversa ordinária precisa ser substituída por uma inversa generalizada.

Com taxas estimadas, essas propriedades só podem ser verificadas aproximadamente. Uma comparação útil utiliza dias que não entraram no ajuste: as contagens médias de cada faixa podem ser confrontadas com as previsões, enquanto as contagens em intervalos disjuntos permitem investigar a hipótese de independência. Os intervalos transformados Z_k, calculados com $\widehat{\Lambda}$, devem apresentar comportamento próximo ao exponencial de taxa 1, sem dependência persistente entre esperas sucessivas.

Há também um cuidado com o fim da coleta. Se a observação termina antes da chegada seguinte, o último intervalo é apenas parcialmente conhecido: sabemos que a espera completa excede o trecho registrado, não qual seria sua duração. Tratar esse trecho como uma espera terminada introduziria uma distorção. Essas comparações ajudam a identificar limitações do modelo, mas não constituem, por si só, uma demonstração de sua adequação.

Por fim, se T_1 é a primeira chegada,

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = e^{-\Lambda(t)}, \qquad t \geq 0,$$

pois $\{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$. Nos pontos de continuidade de λ, derivar $1 - e^{-\Lambda(t)}$ fornece a densidade

$$f_{T_1}(t) = \lambda(t) e^{-\Lambda(t)}.$$

A interpretação integral vale para todo $0 \leq a < b$:

$$\mathbb{P}(a < T_1 \leq b) = e^{-\Lambda(a)} - e^{-\Lambda(b)} = \int_a^b \lambda(u) e^{-\Lambda(u)}\, du.$$

Em particular, os valores atribuídos à densidade nos pontos isolados de mudança de faixa não alteram as probabilidades. Em geral, os intervalos entre eventos no tempo original não são i.i.d. exponenciais. Se $\Lambda(\infty) < \infty$, há ainda massa $e^{-\Lambda(\infty)}$ em $T_1 = \infty$. A apresentação de processos de Poisson em Kingman (1993) desenvolve essas duas descrições pelo relógio e pela contagem.

Deixar a intensidade variar com o horário corrige uma limitação importante do modelo homogêneo: a manhã e a madrugada já não precisam ter a mesma taxa de chegadas. Isso pode explicar parte da variabilidade observada quando reunimos horários diferentes, mas não elimina todas as dificuldades. Mesmo depois de levar a intensidade em conta, o modelo prevê variância igual à média em cada intervalo fixo e mantém a independência dos incrementos. Se uma chegada tende a provocar outras, por exemplo, podem surgir rajadas e dependência entre intervalos, exigindo um modelo autoexcitatório. Uma heterogeneidade que não tenha sido representada pela intensidade pode igualmente requerer uma distribuição de contagens mais flexível.

5.8 Exercícios complementares*

Os exercícios usam a Seção 5.7.

Exercício 5.13 — Comparando faixas horárias*

No modelo dos logs, calcule a média, a variância e a probabilidade de pelo menos um acesso entre 15h e 17h. Compare com o modelo homogêneo de mesma média diária.

Exercício 5.14 — Uma dependência que a taxa não explica*

Suponha que, após ajustar as taxas por horário, contagens em intervalos vizinhos ainda tenham forte correlação positiva. Qual hipótese do modelo é contrariada? Por que aumentar somente a taxa nos horários mais movimentados pode não resolver o problema?

Exercício 5.15 — Simulação por um relógio quadrático*

Tome $\lambda(t) = 2t$ para $t \geq 0$. Calcule $\Lambda(t)$ e a função de sobrevivência de T_1. Se $E_1, E_2, \ldots$ são exponenciais independentes de taxa 1, mostre que $T_k = \sqrt{E_1 + \cdots + E_k}$ gera os instantes das chegadas. Se simular, observe as contagens em $[0, 1]$ e $(1, 2]$: quais médias e variâncias seus resultados devem aproximar?

Exercício 5.16 — O horário ou a contagem muda o relógio?*

Compare dois mecanismos. No primeiro, as chegadas seguem um processo de Poisson não homogêneo com intensidade determinística $\lambda(t)$. No segundo, quando a contagem é n, inicia-se uma espera exponencial de taxa $1 + 2n$ por hora até a próxima chegada; depois dela, usa-se a taxa correspondente ao novo estado. No mesmo horário t, duas execuções do segundo modelo estão nos estados 0 e 2. Calcule, em cada uma, a probabilidade de não haver chegada nas próximas h horas e a espera média até a próxima chegada. Um único valor determinístico $\lambda(t)$ pode representar as duas taxas naquele horário? Explique por que permitir uma intensidade variável no tempo não basta para descrever esse segundo mecanismo.

CAPÍTULO

6

Cadeias de Markov em tempo contínuo

Uma API recebe dez requisições por segundo, mas uma mesma requisição pode visitar o banco de dados mais de uma vez. Quando as filas permanecem controladas? Para responder, precisamos combinar os destinos dos saltos com o tempo gasto em cada estado.

Nesses sistemas, as mudanças não esperam um instante comum para ocorrer. Uma máquina pode falhar antes que outra termine um reparo; um cliente pode chegar enquanto um serviço ainda está em andamento. Para descrever a evolução, precisamos saber quais eventos podem acontecer e quanto tempo se espera por cada um. Alguns modelos ajudam a formular essas perguntas antes de introduzirmos as taxas.

Uma máquina entre operação e reparo. Uma máquina funciona durante algum tempo, falha e é enviada ao reparo. Depois do conserto, volta a funcionar. Seu estado pode registrar apenas se ela está operando ou sendo reparada. Qual é a chance de estar disponível amanhã? Que parcela de um período longo será gasta em reparos?

Uma oficina com duas etapas. Cada carro passa pela funilaria e depois pela pintura. Enquanto um carro é atendido, outros podem chegar e esperar. O número de carros informa o tamanho do trabalho acumulado, mas a etapa atual também importa: terminar a funilaria ainda não libera o carro. Que informação precisamos conservar para descrever a próxima mudança?

Uma população sem gerações sincronizadas. Em uma população, cada indivíduo pode reproduzir-se ou morrer em seu próprio instante. Uma geração já pode estar produzindo descendentes enquanto indivíduos de gerações anteriores continuam vivos. Acompanharemos o total de indivíduos presentes. Como essa população cresce? Em que situações pode desaparecer?

Um serviço que recebe clientes continuamente. Uma chegada aumenta a fila e uma conclusão de serviço a reduz. Com vários atendentes, mais de um serviço pode estar em andamento. Queremos saber como a fila varia, quanto trabalho se acumula e quando a capacidade de atendimento consegue acompanhar as chegadas.

Essas descrições ainda não fixam um modelo probabilístico. Precisaremos especificar os tempos de espera, a independência dos mecanismos e a regra adotada em cada fronteira. A corrida de relógios exponenciais fornecerá uma primeira resposta: qual dos eventos possíveis acontece antes e quanto tempo esperamos por ele? Retomaremos as máquinas, a oficina e a população à medida que as ferramentas forem construídas.

Os relógios exponenciais do Capítulo 5 permitem responder qual evento ocorre primeiro e quanto tempo esperamos por ele. A partir dessas duas informações, construiremos as trajetórias e reuniremos suas taxas em uma matriz, o gerador. As equações de Kolmogorov permitirão calcular as probabilidades de transição; o balanço de fluxos, estudar o equilíbrio. Nos problemas de saída, retomaremos a análise de primeiro passo do tempo discreto, agora levando em conta também a duração da espera. Filas de um ou vários servidores e distribuições explícitas de populações e sistemas de atendimento completam o percurso principal, seguido dos exercícios. Como extensões opcionais, estudaremos redes de Jackson, a propriedade PASTA, o modelo de Jukes–Cantor e aplicações de ramificação, imigração, energia e redundância. A rede da API mostrará como os retornos entre etapas aumentam a carga de um servidor, criando um gargalo mesmo quando há capacidade disponível na entrada. O capítulo de Martingais retomará, em tempo discreto, os problemas de saída e tempos de parada, preparando as

aplicações brownianas posteriores.

6.1 Corrida de relógios exponenciais

Em um sistema, uma chegada, uma conclusão de serviço e uma falha podem competir para produzir a próxima mudança. Cada evento tem seu relógio: precisamos saber quando ocorre o primeiro toque e qual relógio o produz. A distribuição exponencial estudada no Capítulo 5 permite responder às duas perguntas e recomeçar o cálculo depois de cada evento.

Sejam $S \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $T \sim \text{Exp}(\mu)$ independentes. Para que o mínimo de S e T seja maior que $t \geq 0$, ambos devem exceder t. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(S,T) > t) &= \mathbb{P}(S > t, T > t) = \mathbb{P}(S > t)\mathbb{P}(T > t) \\ &= e^{-\lambda t} e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t}.\end{aligned}$$

Logo, $\min(S,T) \sim \text{Exp}(\lambda+\mu)$. Para descobrir qual relógio toca primeiro, integramos a densidade de S multiplicada pela probabilidade de T ainda não ter terminado naquele instante:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S < T) &= \int_0^\infty f_S(s)\mathbb{P}(T > s)\,ds \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu s}\,ds \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^\infty (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s}\,ds = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

A última integral vale um, pois seu integrando é a densidade de uma exponencial de taxa $\lambda+\mu$.

Exemplo 6.1 — Dois atendimentos em paralelo.

Ana e Beatriz chegam simultaneamente a um salão. O tempo da manicure de Ana é exponencial com média de 20 minutos, e o corte de cabelo de Beatriz é exponencial com média de 30 minutos. Suponha os tempos independentes. (a) Qual é a probabilidade de Ana terminar primeiro? (b) Qual é o tempo esperado até que ambas tenham terminado?

(a) As taxas são $1/20$ e $1/30$ por minuto. Portanto, Ana termina primeiro com probabilidade

$$\frac{1/20}{1/20 + 1/30} = \frac{30}{30 + 20} = \frac{3}{5}.$$

(b) A taxa do primeiro término é $1/20 + 1/30 = 5/60$, de modo que o tempo médio até alguém terminar é 12 minutos. Se Ana termina primeiro, o tempo residual de Beatriz ainda tem média 30 minutos; se Beatriz termina primeiro, o tempo residual de Ana tem média 20 minutos. Condicionando em quem termina primeiro, o tempo esperado até que ambas tenham terminado é

$$12 + (3/5) \cdot 30 + (2/5) \cdot 20 = 12 + 18 + 8 = 38.$$

Podemos conferir a média sem separar os dois casos. Para quaisquer números reais, $\max(S, T) = S + T - \min(S, T)$; logo, aqui,

$$E \max(S, T) = 20 + 30 - 12 = 38 \text{ minutos}.$$

O teorema seguinte também justificará a afirmação sobre as esperas residuais dos relógios que ainda não tocaram.

◁

O mesmo raciocínio vale para qualquer número finito de relógios exponenciais independentes. O resultado seguinte reúne a lei do primeiro toque, a identidade do vencedor e as esperas que restam nos demais relógios.

Teorema 6.1 — Corrida de exponenciais

Sejam $T_1, \dots, T_n$ independentes, com $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ e $\lambda_i > 0$. Defina $V = \min(T_1, \dots, T_n)$ e seja I o índice do relógio que toca primeiro. Então

$$\mathbb{P}(V > t) = \exp\left(-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\, t\right)$$
$$\mathbb{P}(I = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

Além disso, I e V são independentes. Condicionado a $I = i$, os tempos residuais $T_j - V$, $j \neq i$, são exponenciais independentes, com suas taxas originais λ_j, e são independentes de V.

A soma das taxas determina a espera até o primeiro toque; a proporção de cada taxa na soma determina a probabilidade de aquele relógio vencer. Saber qual relógio venceu não altera a lei dessa espera. Essa separação entre o instante e o tipo do evento será usada na construção das cadeias em tempo contínuo.

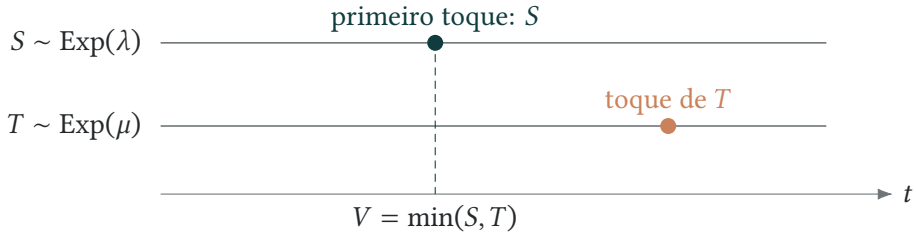


Figura 6.1: Uma realização da corrida entre dois relógios independentes. O primeiro toque ocorre em $V = \min(S, T)$; em geral, V tem taxa $\lambda + \mu$ e o relógio S vence com probabilidade $\lambda/(\lambda + \mu)$.

Demonstração. Ponha $\Lambda = \sum_i \lambda_i$. Pela independência,

$$\mathbb{P}(V > t) = \prod_i e^{-\lambda_i t} = e^{-\Lambda t}.$$

Logo, V é exponencial de taxa Λ. Dois relógios independentes com densidades contínuas empatam com probabilidade zero. Como há apenas um número finito de pares, o vencedor I está bem definido quase certamente.

Fixe i e um intervalo $0 \le a < b$. Para que o relógio i vença em um instante v desse intervalo, os demais devem exceder v. Integrando sobre o instante do toque de i,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I = i,\ a < V \le b) &= \int_a^b \lambda_i e^{-\lambda_i v} \prod_{j \neq i} \mathbb{P}(T_j > v)\, dv \\ &= \int_a^b \lambda_i e^{-\Lambda v}\, dv \\ &= \frac{\lambda_i}{\Lambda}\mathbb{P}(a < V \le b).\end{aligned}$$

Deixar b crescer e tomar $a = 0$ dá $\mathbb{P}(I = i) = \lambda_i/\Lambda$. A mesma fatoração para todos os intervalos mostra que o vencedor e o instante V são independentes.

Para examinar os relógios que perderam, fixe números $u_j \ge 0$ para $j \neq i$. Se $I = i$ e $V = v$, pedir que cada espera residual exceda u_j equivale a exigir $T_j > v + u_j$. Assim,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big(I = i,\ a < V \le b,\ T_j - V > u_j \text{ para todo } j \neq i\big) \\ &= \int_a^b \lambda_i e^{-\lambda_i v} \prod_{j \neq i} e^{-\lambda_j (v + u_j)}\, dv \\ &= \mathbb{P}(I = i,\ a < V \le b) \prod_{j \neq i} e^{-\lambda_j u_j}.\end{aligned}$$

Os fatores à direita são as probabilidades de cauda de exponenciais independentes com as taxas originais. Como a igualdade vale para quaisquer limites u_j e qualquer intervalo $(a, b]$, as esperas residuais são independentes entre si e de V, condicionado ao vencedor $I = i$. Para $n = 1$, o produto vazio vale 1. ∎

Exemplo 6.2 — Dois dispositivos precisam funcionar.

Um submarino possui três dispositivos independentes, cujos tempos de falha são exponenciais com médias de 1, 3/2 e 3 anos. Ele deve retornar quando ocorrer a segunda falha. Denote os dispositivos por A, B, C; suas taxas são, respectivamente, 1, 2/3 e 1/3 por ano.

O primeiro tempo de falha tem taxa total $1 + 2/3 + 1/3 = 2$ e, portanto, média $1/2$. Os dispositivos A, B e C falham primeiro com probabilidades

$1/2$, $1/3$ e $1/6$. Se A falha primeiro, a taxa dos relógios restantes é 1, com espera média 1. Se B falha primeiro, a taxa é $4/3$, com média $3/4$; se C falha primeiro, a taxa é $5/3$, com média $3/5$. Condicionando em qual deles falhou primeiro, o tempo médio adicional até a segunda falha é

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}.$$

Logo, o tempo médio de operação é

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10} = \frac{27}{20} = 1{,}35 \text{ anos}.$$

Para calcular uma ordem de falhas, multiplicamos a probabilidade do primeiro vencedor pela probabilidade condicional do segundo. Por exemplo,

$$\mathbb{P}(A \text{ antes de } B \text{ antes de } C) = \frac{1}{2}\,\frac{2/3}{2/3+1/3} = \frac{1}{3}.$$

As seis probabilidades, na ordem $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$, são

$$\frac{20}{60},\quad \frac{10}{60},\quad \frac{15}{60},\quad \frac{5}{60},\quad \frac{6}{60},\quad \frac{4}{60}.$$

Sua soma é 1, uma verificação rápida de que nenhuma ordem foi esquecida.

◁

Recomeçar a corrida após um evento. Retomemos o Exemplo 5.10, com chegadas vermelhas de taxa λ e verdes de taxa μ. A próxima chegada é vermelha com probabilidade $p = \lambda/(\lambda+\mu)$ e verde com probabilidade $1-p$, pela corrida dos dois relógios exponenciais. Após cada chegada, o relógio que tocou é reiniciado com uma espera exponencial nova, da mesma taxa. O relógio que perdeu conserva sua espera residual, que pela falta de memória é exponencial com a taxa original, independente da nova espera. Isso vale tanto se a chegada anterior foi vermelha quanto se foi verde: o par de esperas volta sempre a ter a lei conjunta de duas variáveis exponenciais independentes de taxas λ e μ, independentemente do tempo e da cor anteriores. Consequentemente, a próxima cor tem novamente probabilidade p de ser vermelha, sem depender das chegadas anteriores. As cores sucessivas são, portanto, Bernoulli independentes.

Essa interpretação por relógios recupera a conclusão obtida por afinamento no capítulo anterior. Nos modelos seguintes, a mesma regra determinará tanto a espera até uma mudança quanto a escolha do evento que a produz.

6.2 Definições e exemplos

No Capítulo 2 o tempo assumia valores inteiros. Agora o parâmetro é $t \geq 0$, uma descrição mais natural para chegadas, falhas, serviços e reações.

A propriedade de Markov continua sendo a mesma: conhecido o estado atual, o passado não acrescenta informação para prever o futuro. O que muda é o relógio. Como o tempo varia continuamente, descrever apenas a probabilidade do "próximo passo" já não basta; precisamos dizer também quanto se espera até esse passo.

Definição 6.1 — Cadeia de Markov homogênea em tempo contínuo

Um processo $(X_t)_{t\geq 0}$ com espaço de estados contável S é uma *cadeia de Markov homogênea em tempo contínuo* se, para $0 \leq s_0 < \cdots < s_n < s$, $t \geq 0$ e escolhas de estados para as quais os condicionamentos tenham probabilidade positiva,

$$\mathbb{P}\left(X_{t+s} = j \mid X_s = i, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_0} = i_0\right) = \mathbb{P}\left(X_t = j \mid X_0 = i\right).$$

A homogeneidade aparece no lado direito: a transição depende da duração t, não do instante s em que começamos a observar. Trabalharemos com trajetórias constantes entre saltos, contínuas à direita e com limites à esquerda, até uma possível explosão. As taxas de saída de cada estado serão finitas.

Definição 6.2 — Probabilidades de transição

Para $t \geq 0$, escrevemos

$$P_t(i,j) = \mathbb{P}_i(X_t = j), \qquad P_t = (P_t(i,j))_{i,j \in S}.$$

Não existe um menor intervalo positivo que faça o papel de um passo: precisamos da família inteira $(P_t)_{t \geq 0}$.

Comecemos por modelos já conhecidos, agora observados com outro relógio. Em cada um deles, as taxas indicam quais mudanças são possíveis e com que frequência elas são tentadas. Depois construiremos a trajetória diretamente a partir dessas taxas.

Exemplo 6.3 — Uma cadeia com relógio de Poisson.

Imagine que uma cadeia de Markov dê seus passos sempre que toca um relógio de Poisson. Se N é esse processo de contagem, de taxa $\lambda > 0$, e Y é uma cadeia discreta independente, com matriz U, a evolução observada em tempo contínuo é $X_t = Y_{N(t)}$. Ela é uma cadeia homogênea e suas probabilidades de transição são

$$P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} U^n(i,j).$$

A fórmula reúne duas escolhas: a probabilidade de o relógio tocar n vezes até t e a probabilidade $U^n(i,j)$ de a cadeia passar de i a j em n passos. Um toque pode conservar o estado, se $U(i,i) > 0$; por isso nem todo toque aparece como um salto na trajetória de X.

◁

Demonstração. Há um cuidado aqui: observar apenas X até o instante s não revela quantos toques o relógio deu, pois um passo de Y pode conservar o estado. Condicionemos, então, numa informação maior: toda a trajetória de N até s e os estados $Y_0, \ldots, Y_m$, onde $m = N(s)$ e $Y_m = i$. Pelos incrementos independentes do processo de Poisson, $N(s+t) - N(s)$ tem lei Poisson(λt), independente desse histórico. Pela propriedade de Markov, os próximos passos de Y dependem dele apenas por $Y_m = i$. Assim, mesmo com essa

informação adicional, a probabilidade de observar $X_{s+t} = j$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} U^n(i, j).$$

Como a expressão depende do histórico somente por $X_s = i$, isso também vale quando conhecemos apenas o passado de X. Para $s = 0$ obtemos a fórmula de P_t no enunciado. ∎

Teorema 6.2 — Equação de Chapman–Kolmogorov

Para uma cadeia homogênea, $s, t \geq 0$ e $i, j \in S$,

$$\sum_{k} P_s(i, k) P_t(k, j) = P_{s+t}(i, j).$$

Para ir de i a j em tempo $s+t$, a cadeia passa por algum estado k no instante s. Condicionado a esse estado intermediário, a propriedade de Markov reinicia o cálculo para o intervalo de comprimento t. Não há independência das duas partes sem esse condicionamento.

Demonstração. Os eventos $\{X_s = k\}$, com $k \in S$, formam uma partição das trajetórias no instante intermediário. Decompondo segundo esse estado, temos

$$\mathbb{P}\left(X_{s+t} = j \mid X_0 = i\right) = \sum_{k} \mathbb{P}\left(X_{s+t} = j, X_s = k \mid X_0 = i\right).$$

Usando a definição de probabilidade condicional e a propriedade de Markov, a expressão anterior torna-se

$$\begin{aligned} &\sum_{k} \mathbb{P}\left(X_{s+t} = j \mid X_s = k, X_0 = i\right) \mathbb{P}\left(X_s = k \mid X_0 = i\right) \\ &\qquad = \sum_{k} P_t(k, j) P_s(i, k). \end{aligned}$$

Se um estado k tem probabilidade zero no instante s, sua parcela é zero e não precisamos definir uma probabilidade condicional sobre esse evento. As demais parcelas usam exatamente a propriedade de Markov e a homogeneidade temporal. Como são não negativas, a soma é bem definida também quando S é enumerável. Isso dá $P_{s+t} = P_s P_t$. ∎

A equação de Chapman–Kolmogorov sugere que as probabilidades de transição podem ser recuperadas de seu comportamento infinitesimal em 0.

Definição 6.3 — Taxas de salto e gerador

Uma matriz $Q = (q(i,j))$ é um gerador conservativo com taxas finitas se

$$q(i,j) \geq 0 \ (j \neq i), \qquad \lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i,j) < \infty, \qquad q(i,i) = -\lambda_i.$$

As entradas fora da diagonal especificam a intensidade das transições entre estados; a entrada diagonal é o oposto da taxa total de saída. Depois de construir a cadeia por meio de relógios exponenciais, demonstraremos que essas taxas podem ser recuperadas dos limites de $P_h(i,j)$ quando $h \downarrow 0$. Uma taxa tem unidade inversa à do tempo: $q(i,j) = 2$ por hora significa probabilidade $2h + o(h)$ de estar em j após um intervalo de h horas, partindo de i. O termo diagonal negativo registra a saída total; não é uma probabilidade negativa. A finitude de cada λ_i não exige um limite uniforme sobre todos os estados. Essa diferença será decisiva ao discutir explosão.

Ideia — Do mecanismo ao gerador

Para escrever as taxas de um modelo, seguiremos quatro passos.

1. Escolher um estado que conserve a informação necessária para a próxima mudança. Em uma oficina, isso pode exigir a etapa do serviço, além do número de carros.
2. Listar os eventos que podem ocorrer a partir desse estado e identificar o estado produzido por cada um.
3. Atribuir a cada evento sua taxa. Quando eventos distintos levam ao mesmo destino, suas taxas se somam, pela corrida de relógios.
4. Somar as taxas das mudanças reais de estado e colocar o oposto dessa soma na diagonal. Um evento que conserva o estado não entra nessa soma; ele pode aparecer como um toque sem salto na uniformização.

Cada taxa deve ser expressa na mesma unidade inversa de tempo. Depois de montar a matriz, conferimos que suas entradas fora da diagonal são não negativas e que cada linha soma zero.

Exemplo 6.4 — Taxas de salto no Exemplo 6.3.

Se $N(h)$ conta os toques de um relógio de Poisson de taxa λ, então a probabilidade de dois ou mais toques pode ser limitada sem uma expansão de Taylor:

$$\mathbb{P}(N(h) \geq 2) \leq \frac{E[N(h)(N(h)-1)]}{2} = \frac{(\lambda h)^2}{2}.$$

Usamos $\mathbf{1}_{\{N(h)\geq 2\}} \leq N(h)(N(h)-1)/2$ e a fórmula já demonstrada para os momentos fatoriais da Poisson. Em particular, ao dividir essa probabilidade por h, o resultado tende a zero.

Para $j \neq i$, se houver exatamente um toque, a cadeia passa de i a j com probabilidade $U(i,j)$. Se houver dois ou mais, a contribuição total é no máximo a probabilidade acima. Portanto,

$$P_h(i,j) = e^{-\lambda h}\lambda h\, U(i,j) + \varepsilon_{ij}(h), \qquad 0 \leq \varepsilon_{ij}(h) \leq \frac{(\lambda h)^2}{2}.$$

Dividindo por h e fazendo $h \downarrow 0$, encontramos $q(i,j) = \lambda U(i,j)$ para $j \neq i$. No caso diagonal, um toque pode conservar o estado; como a soma de cada linha de U é 1, a taxa total de saída real é

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} \lambda U(i,j) = \lambda[1 - U(i,i)], \qquad q(i,i) = -\lambda_i.$$

Portanto o relógio de eventos toca à taxa λ, mas nem todo toque corresponde a uma mudança do estado.

◁

Ideia — Taxas como especificação do modelo

No Exemplo 6.3 começamos com uma cadeia e calculamos suas taxas. Em aplicações, o caminho usual é o inverso: descrevemos diretamente $q(i,j)$ para $i \neq j$ e, a partir dessas taxas, construímos a cadeia.

Exemplo 6.5 — Processo de Poisson.

Seja X_t o número de chegadas até o instante t em um processo de Poisson de taxa λ. A contagem permanece no estado n até a próxima chegada; quando ela ocorre, passa necessariamente a $n+1$. Como a espera é exponencial de taxa λ,

$$q(n, n+1) = \lambda \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Não há saltos para estados menores nem para $n+2$ diretamente. A taxa não depende de n: esperar a próxima chegada quando já ocorreram cem eventos tem a mesma lei que esperar a primeira.

◁

Exemplo 6.6 — Fila $M/M/s$.

Imagine um banco com s caixas. Quando todos estão ocupados, os clientes aguardam em uma fila única. Suponha que as chegadas formem um processo de Poisson de taxa λ e que os tempos de serviço sejam exponenciais independentes de taxa μ. Como no Exemplo 6.5, $q(n, n+1) = \lambda$. Para modelar as saídas, consideramos a taxa total de conclusão dos serviços.

$$q(n, n-1) = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n < s, \\ s\mu, & n \geq s. \end{cases}$$

Se há menos de s clientes, todos recebem serviço, e cada um contribui com um relógio de taxa μ; a taxa total de conclusão é $n\mu$. Com s ou mais clientes, todos os caixas estão ocupados e a taxa se estabiliza em $s\mu$. Assim, aumentar a fila não aumenta indefinidamente a capacidade de atendimento. É a corrida de relógios exponenciais estudada na Seção 6.1.

◁

Exemplo 6.7 — Processo de ramificação.

Retomemos a população da Seção 4.3, mas sem esperar que todos os indivíduos se reproduzam ao mesmo tempo. Cada indivíduo gera um novo indivíduo à taxa λ e morre à taxa μ, independentemente dos demais. Quando há n indivíduos, existem n relógios de nascimento e n relógios de morte. A soma de suas taxas dá

$$q(n, n+1) = \lambda n, \qquad q(n, n-1) = \mu n \quad (n \geq 1).$$

A população muda uma unidade por vez. A espera até a próxima mudança tem média $1/[n(\lambda+\mu)]$, quando $\lambda+\mu > 0$: populações maiores mudam mais rapidamente. Já a probabilidade de a próxima mudança ser um nascimento é $\lambda/(\lambda+\mu)$, independentemente de n.

O estado zero é absorvente. Se $\mu = 0$, a população nunca diminui e obtemos o processo de Yule.

◁

6.2.1 Escolher o estado antes de escrever as taxas

Antes de escrever uma taxa, precisamos saber a partir de qual estado o evento pode ocorrer. Os dois modelos a seguir retomam as máquinas e a oficina da abertura. Em ambos, uma descrição aparentemente suficiente — o número de máquinas funcionando ou de carros na oficina — pode omitir informação necessária para determinar a próxima mudança.

Exemplo 6.8 — Duas máquinas diferentes e um reparador.

Duas máquinas operam simultaneamente. Enquanto funciona, a máquina i falha com taxa $\lambda_i > 0$, para $i = 1, 2$. Um único técnico repara a máquina que falhou, com tempo exponencial de taxa $\mu > 0$. Se as duas máquinas ficarem avariadas, o sistema é desligado definitivamente e os reparos são interrompidos. Todos os tempos novos de falha e reparo são independentes. As taxas são medidas na mesma unidade inversa de tempo.

Registremos separadamente as duas máquinas. O valor 1 indica operação e 0, avaria. Usaremos os estados

$$A = (1, 1), \qquad B = (1, 0), \qquad C = (0, 1), \qquad F = (0, 0).$$

Em B, a máquina 1 funciona e a máquina 2 está em reparo; em C ocorre o contrário. O estado F representa o desligamento definitivo.

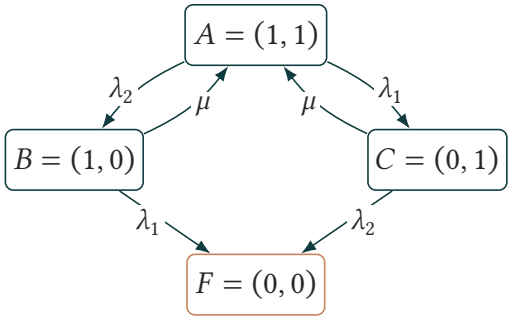


Figura 6.2: A identidade da máquina que ainda funciona determina o relógio da próxima falha. O estado F é absorvente por causa da regra de desligamento.

Em A, competem os dois relógios de falha. A falha da máquina 2 leva a B, com taxa λ_2, e a da máquina 1 leva a C, com taxa λ_1. A espera pelo primeiro evento é exponencial de taxa $\lambda_1 + \lambda_2$. Não existe uma transição direta $A \to F$: as falhas são independentes e não ocorrem simultaneamente com probabilidade positiva.

Em B, o reparo da máquina 2 compete com a falha da máquina 1. O reparo leva a A, com taxa μ, e a falha leva a F, com taxa λ_1. Portanto a espera é exponencial de taxa $\mu + \lambda_1$. Em C, as mesmas alternativas têm taxas μ e λ_2. Em F, a regra do modelo não permite novas mudanças. Na ordem

(A, B, C, F), obtemos

$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu & -(\lambda_1+\mu) & 0 & \lambda_1 \\ \mu & 0 & -(\lambda_2+\mu) & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cada diagonal é o negativo da soma das demais entradas de sua linha. As entradas nulas também dizem algo sobre o modelo: em um único evento, não se passa de B para C, nem se troca uma máquina avariada por outra. Essas mudanças exigiriam mais de um evento.

Conhecidos B ou C, não precisamos guardar há quanto tempo o reparo começou. A falta de memória conserva sua lei exponencial; a mesma propriedade vale para a máquina que continua funcionando. Isso justifica usar os quatro estados, sem acrescentar idades aos relógios.

Podemos guardar somente o número de máquinas funcionando? Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, os estados B e C têm a mesma taxa λ para o desligamento e a mesma taxa μ para voltar a duas máquinas em operação. O número N_t de máquinas funcionando é, então, uma cadeia nos estados $0, 1, 2$, com gerador

$$Q_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

A taxa 2λ vem dos dois relógios de falha quando ambas funcionam. Em zero, o sistema continua absorvido: a agregação não muda a regra de desligamento.

Com taxas de falha diferentes, essa redução em geral não é válida. Partindo de A, a primeira falha deixa o sistema em B com probabilidade $w = \lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$ e em C com probabilidade $1-w$. Se H é o tempo da permanência seguinte com uma única máquina funcionando, sua sobrevivência é

$$u(t) = \mathbb{P}(H > t) = we^{-(\lambda_1+\mu)t} + (1-w)e^{-(\lambda_2+\mu)t}.$$

O observador que guarda apenas $N_t = 1$ não sabe qual dos dois relógios de falha está ativo. Para ver que a espera resultante não tem falta de memória, fixe $s > 0$ e expanda o quadrado de $u(s)$:

$$u(2s) - u(s)^2 = w(1-w)\big(e^{-(\lambda_1+\mu)s} - e^{-(\lambda_2+\mu)s}\big)^2 > 0$$

quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Uma espera sem memória satisfaria $u(2s) = u(s)^2$. O tempo já transcorrido fornece informação sobre qual máquina provavelmente permanece em operação; o número de máquinas, sozinho, perdeu informação necessária.

◁

Exemplo 6.9 — Uma oficina com funilaria e pintura.

Uma oficina recebe carros segundo um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$. Um único profissional atende os carros por ordem de chegada. Para cada carro, primeiro faz a funilaria, com duração exponencial de taxa $\mu_F > 0$, e depois a pintura, com duração exponencial de taxa $\mu_P > 0$. Só depois da pintura o carro sai e, se houver outro esperando, sua funilaria começa imediatamente. As durações das etapas são independentes entre si, entre carros e das chegadas.

O estado vazio será denotado por 0. Quando há carros, escrevemos (n, F) ou (n, P): $n \geq 1$ é o total de carros na oficina e a letra identifica a etapa do carro em atendimento. Todos os carros em espera ainda precisam iniciar a funilaria. O espaço de estados é

$$S = \{0\} \cup \{(n, F), (n, P) \,:\, n \geq 1\}.$$

Essa descrição evita estados artificiais como "oficina vazia com uma pintura em andamento".

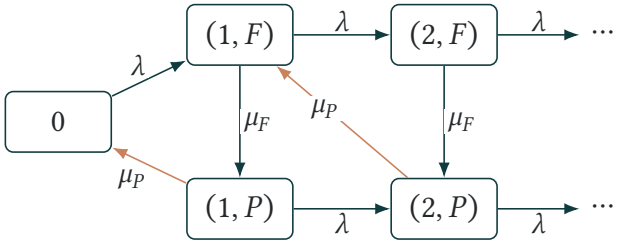


Figura 6.3: Uma chegada aumenta o total e conserva a etapa atual. Terminar a funilaria muda a etapa; terminar a pintura libera um carro. A mesma regra se repete nas colunas seguintes.

Na oficina vazia, só uma chegada muda o estado:

$$q(0, (1, F)) = \lambda, \qquad q(0, 0) = -\lambda.$$

Em (n, F), competem a próxima chegada e a conclusão da funilaria. A chegada conserva o carro em atendimento e sua etapa; a conclusão da funilaria inicia a pintura do mesmo carro. Portanto,

$$\begin{aligned} q((n,F),(n+1,F)) &= \lambda, \\ q((n,F),(n,P)) &= \mu_F, \\ q((n,F),(n,F)) &= -(\lambda+\mu_F). \end{aligned}$$

Em (n, P), uma chegada também aumenta apenas o total. Quando a pintura termina, um carro sai. Se $n \geq 2$, o próximo começa a funilaria; se $n = 1$, a oficina fica vazia:

$$\begin{aligned} q((n,P),(n+1,P)) &= \lambda && (n \geq 1), \\ q((n,P),(n-1,F)) &= \mu_P && (n \geq 2), \\ q((1,P),0) &= \mu_P, \\ q((n,P),(n,P)) &= -(\lambda+\mu_P) && (n \geq 1). \end{aligned}$$

Todas as demais taxas entre estados distintos são zero. A taxa de saída de um estado é a soma dos dois relógios que podem tocá-lo. A falta de memória permite usar a etapa atual sem registrar seu tempo já decorrido.

O total n sozinho, em geral, não fornece essa informação. Se a etapa é pintura, a chance de uma saída em um intervalo de comprimento h é $\mu_P h + o(h)$. Se a etapa é funilaria, uma saída exige concluir duas etapas nesse intervalo. Sua probabilidade é no máximo

$$(1 - e^{-\mu_F h})(1 - e^{-\mu_P h}) = O(h^2) = o(h),$$

pois ambas as durações precisam ser menores que h. A taxa de uma saída imediata depende, portanto, da etapa escondida. Além disso, o tempo total de serviço é a soma de duas exponenciais, não uma única espera exponencial. Guardar a fase recupera uma descrição de Markov.

◁

6.2.2 Construção a partir das taxas

Nos exemplos anteriores, especificamos o modelo por meio das taxas $q(i, j)$. Agora vamos transformar essas taxas em uma trajetória. A construção separa duas perguntas: por quanto tempo a cadeia permanece no estado atual e para onde ela vai quando sai.

Definição 6.4 — Taxa de saída e matriz de roteamento

Definimos a taxa total de saída de i por

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i, j),$$

e supomos $\lambda_i < \infty$. Se $\lambda_i > 0$, definimos

$$r(i, j) = \frac{q(i, j)}{\lambda_i}, \qquad j \neq i, \quad \text{e} \quad r(i, i) = 0.$$

A matriz $R = (r(i, j))$ é a *matriz de roteamento*: condicionada à saída de i, ela fornece a distribuição do próximo estado. Se $\lambda_i = 0$, completamos a linha com $r(i, i) = 1$ e $r(i, j) = 0$ para $j \neq i$; o estado é absorvente.

Informalmente, ao chegar a i a cadeia liga um relógio exponencial de taxa λ_i. Quando esse relógio toca, escolhe o próximo estado segundo a linha $r(i, \cdot)$ e repete o procedimento.

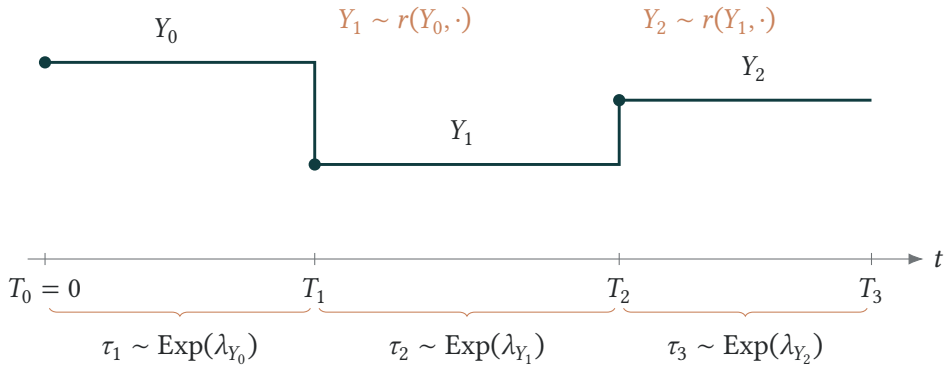


Figura 6.4: A construção separa o relógio e o destino. No estado Y_n, a taxa λ_{Y_n} determina o tempo de permanência τ_{n+1}; quando o relógio toca, a linha $r(Y_n, \cdot)$ escolhe o estado seguinte.

Para formalizar, seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ a cadeia de Markov em tempo discreto com matriz R, chamada de *cadeia de saltos*. Sejam $E_0, E_1, \ldots$ exponenciais de taxa 1, independentes entre si e de Y. Quando $\lambda_{Y_n} > 0$, ponha

$$\tau_{n+1} = \frac{E_n}{\lambda_{Y_n}}, \qquad T_0 = 0, \qquad T_{n+1} = \tau_1 + \cdots + \tau_{n+1}.$$

Então τ_{n+1} é exponencial de taxa λ_{Y_n}, e definimos

$$X_t = Y_n \quad \text{se } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

Se a cadeia alcança um estado com taxa de saída zero, ela permanece ali para sempre.

Proposição 6.3 — A cadeia construída e seu gerador

A construção por relógios exponenciais define uma cadeia de Markov homogênea, com um estado cemitério se ocorrer explosão. Para cada estado ordinário i e cada estado ordinário $j \neq i$, suas probabilidades satisfazem

$$P_h(i,j) = q(i,j)h + o(h), \qquad P_h(i,i) = 1 - \lambda_i h + o(h) \quad (h \downarrow 0).$$

Em particular, a matriz Q é o gerador dessa cadeia:

$$q(i,j) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_h(i,j)}{h} \quad (j \neq i), \qquad q(i,i) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_h(i,i) - 1}{h}.$$

Demonstração. Fixe um instante determinístico $s \geq 0$ e um estado i com $\lambda_i > 0$. Para verificar a propriedade de Markov, precisamos levar em conta não só o estado observado, mas também tudo o que aconteceu antes de s.

Decomponha a situação $\{X_s = i\}$ segundo os eventos

$$\{T_n \leq s < T_{n+1},\, Y_n = i\}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Em cada um desses eventos, consideramos os estados já visitados, $Y_0, \ldots, Y_n$, e as esperas já concluídas, $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Essa história não inclui o próximo destino Y_{n+1} nem o relógio E_n, que determina a permanência atual. Conhecemos T_n; saber que ainda estamos em i no instante s acrescenta apenas a informação $\tau_{n+1} > s - T_n$. Como a próxima espera é exponencial de taxa λ_i, independente da história anterior, para todo $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(\tau_{n+1} - (s - T_n) > u \mid \tau_{n+1} > s - T_n,\ \text{história até } T_n\big) \\ &\qquad = \frac{e^{-\lambda_i (s - T_n + u)}}{e^{-\lambda_i (s - T_n)}} = e^{-\lambda_i u}. \end{aligned}$$

Para reunir as histórias, integramos essa conta contra as densidades das esperas concluídas, como na construção do processo de Poisson. O fator $e^{-\lambda_i u}$ não depende dos seus valores. Assim, mesmo conhecendo a duração já transcorrida da permanência, a espera restante tem lei $\mathrm{Exp}(\lambda_i)$.

Além disso, pela propriedade de Markov da cadeia de saltos Y e pela independência dos relógios, o próximo destino tem distribuição $r(i, \cdot)$ e os sorteios posteriores recomeçam com a mesma regra, sem depender daquela história. Isso vale em cada um dos eventos da decomposição; somando sobre n, a evolução após s depende do passado apenas por $X_s = i$.

Se $\lambda_i = 0$, o estado é absorvente. No caso de explosão, o estado cemitério também é absorvente. Portanto, a propriedade de Markov vale para a cadeia construída, como afirmado. Para verificar os limites, partimos de i com $\lambda_i > 0$. Se os dois primeiros saltos ocorrem até h, então ambas as esperas são menores que h, pois

$$\{\tau_1 + \tau_2 \leq h\} \subseteq \{\tau_1 \leq h,\ \tau_2 \leq h\}.$$

Condicionado ao primeiro destino k, as esperas são independentes, com taxas λ_i e λ_k. Se k é absorvente, não há segundo salto. Ao somar sobre os destinos, obtemos a cota

$$(1 - e^{-\lambda_i h}) \sum_{k \neq i} r(i,k)(1 - e^{-\lambda_k h}).$$

Escreva

$$A(h) = \sum_{k \neq i} r(i,k)(1 - e^{-\lambda_k h}).$$

Para cada k, a finitude de λ_k dá $1 - e^{-\lambda_k h} \to 0$ quando $h \downarrow 0$. Além disso,

$$0 \leq 1 - e^{-\lambda_k h} \leq 1,$$

e os pesos $r(i,k)$ somam 1. Dado $\varepsilon > 0$, escolha um conjunto finito F de destinos tal que $\sum_{k \notin F} r(i,k) < \varepsilon/2$. Nos destinos de F, cada parcela tende a zero; logo, para h suficientemente pequeno, $\sum_{k \in F} r(i,k)(1 - e^{-\lambda_k h}) < \varepsilon/2$. A parcela fora de F é menor que $\varepsilon/2$, pois $1 - e^{-\lambda_k h} \leq 1$. Portanto $A(h) \to 0$ por um argumento de soma finita e cauda. Não é necessário supor que as taxas λ_k sejam uniformemente limitadas: a finitude estado a estado é suficiente neste passo. Como

$$1 - e^{-\lambda_i h} = \lambda_i h + o(h)$$

e $A(h) \to 0$, a probabilidade de dois ou mais saltos, limitada pelo produto dessas duas quantidades, é $o(h)$. De fato, ao dividir o produto por h, o primeiro fator tende a λ_i e o segundo tende a zero.

A chance de o primeiro salto ir a j até h é $(1 - e^{-\lambda_i h}) r(i,j) = q(i,j)h + o(h)$. Para $j \neq i$, a diferença entre esse evento e $\{X_h = j\}$ só pode ocorrer em caminhos com pelo menos dois saltos: ou o primeiro salto foi a j e a cadeia voltou a sair, ou ela chegou a j depois de passar por outro estado. A diferença das probabilidades é, portanto, $o(h)$, e $P_h(i,j) = q(i,j)h + o(h)$.

Para a diagonal, a ausência de salto tem probabilidade $e^{-\lambda_i h}$. Sair de i e estar novamente em i até h exige pelo menos dois saltos. Assim,

$$P_h(i,i) = e^{-\lambda_i h} + o(h) = 1 - \lambda_i h + o(h).$$

Dividir as diferenças por h fornece todos os limites do gerador. Se $\lambda_i = 0$, a trajetória permanece em i e os limites são imediatos. ∎

Ideia — Como simular a cadeia

Podemos obter os relógios a partir de variáveis U_n independentes e uniformes em $(0,1)$: as variáveis $E_n = -\log U_n$ são exponenciais de taxa 1. Em um estado Y_n com taxa positiva, a permanência é E_n/λ_{Y_n}; o próximo destino é sorteado segundo $r(Y_n,\cdot)$, independentemente desse relógio. Se a taxa é zero, a trajetória permanece no estado e a simulação termina.

Pode acontecer de T_n convergir para um valor finito T_∞. Nesse caso, a cadeia realiza infinitos saltos em tempo finito; dizemos que ocorre uma *explosão*. Para completar a trajetória depois de T_∞, acrescentamos um estado cemitério Δ e definimos $X_t = \Delta$ para $t \geq T_\infty$. O próximo exemplo mostra que explosões não são apenas uma possibilidade abstrata.

Exemplo 6.10 — Processos de nascimento puro com taxas de potência.

Sejam $\lambda > 0$ e $p \in \mathbb{R}$. Suponha que a cadeia comece em 1 e que

$$q(i, i+1) = \lambda i^p,$$

sem outros saltos. O tempo τ_i passado no estado i é exponencial de taxa λi^p, e os tempos τ_i podem ser tomados independentes. Logo,

$$T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$$

é o instante em que a cadeia deixa o estado n.

O processo explode quase certamente se $p > 1$ e não explode se $p \leq 1$.

◁

Demonstração. Se $p > 1$, então

$$E(T_\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} E(\tau_m) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p} < \infty.$$

Para explicitar a última implicação, a desigualdade de Markov dá $\mathbb{P}(T_\infty > M) \leq E(T_\infty)/M$. Ao fazer $M \to \infty$, obtemos $\mathbb{P}(T_\infty = \infty) = 0$. Portanto, o processo explode quase certamente.

Quando $p = 1$, caso do processo de Yule,

$$E(T_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} \sim \frac{\log n}{\lambda}.$$

Ainda precisamos mostrar que as flutuações não anulam esse crescimento. Como

$$\mathrm{Var}(T_n) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} \le C < \infty,$$

a desigualdade de Chebyshev fornece

$$\mathbb{P}\left(T_n \le \frac{E(T_n)}{2}\right) \le \frac{4C}{E(T_n)^2} \longrightarrow 0.$$

Para cada $M < \infty$, quando $E(T_n)/2 > M$, $\mathbb{P}(T_\infty \le M) \le \mathbb{P}(T_n \le M) \le 4C/E(T_n)^2 \to 0$. Tomando a união sobre M inteiro, obtemos $T_\infty = \infty$ quase certamente. Para $p < 1$, use os mesmos $E_i \sim \mathrm{Exp}(1)$: $E_i/(\lambda i^p) \ge E_i/(\lambda i)$ para $i \ge 1$. As esperas são maiores que no caso $p = 1$, portanto também não há explosão. ■

Exemplo 6.11 — Uniformização.

Se todas as taxas são zero, a trajetória é constante. Caso contrário, suponha $0 < \Lambda = \sup_i \lambda_i < \infty$ e defina

$$\begin{aligned} U(i,j) &= q(i,j)/\Lambda \quad \text{para } j \neq i \\ U(i,i) &= 1 - \lambda_i/\Lambda \end{aligned}$$

Em palavras, a partir de cada estado são feitas tentativas de salto à taxa Λ, mas a cadeia permanece no mesmo estado com probabilidade $1 - \lambda_i/\Lambda$, de modo que a taxa de saída do estado i é λ_i. Se Y_n for uma cadeia de Markov com probabilidades de transição $U(i,j)$ e $N(t)$ for um processo de Poisson de taxa Λ, independente de Y, então $X_t = Y_{N(t)}$ terá as taxas de transição desejadas. A trajetória dá no máximo $N(t)$ mudanças até t, logo não explode. A mesma construção fundamenta as equações a seguir.

◁

6.3 Calculando as probabilidades de transição

Conhecer uma taxa responde a uma pergunta local. Para prever o estado daqui a uma hora, precisamos somar caminhos com diferentes números de saltos. As equações de Kolmogorov organizam essa soma. Começaremos pelo caso finito, em que a exponencial de uma matriz fornece uma descrição completa.

Teorema 6.4 — Equações de Kolmogorov

Para uma cadeia com espaço de estados finito e taxas finitas,

$$\frac{d}{dt}P_t = QP_t = P_tQ, \qquad P_0 = I.$$

Além disso,

$$P_t = e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}.$$

A equação *regressiva*, $P_t' = QP_t$, examina primeiro o pequeno intervalo inicial; a *progressiva*, $P_t' = P_tQ$, examina o intervalo final. São duas decomposições da mesma trajetória, não duas convenções para a orientação dos vetores.

Demonstração. Se todas as taxas forem nulas, então $Q = 0$ e $P_t = I$. Caso contrário, escolha $\Lambda \geq \max_i \lambda_i$, com $\Lambda > 0$, e defina $U = I + Q/\Lambda$. Essa matriz possui entradas não negativas e linhas de soma 1; portanto é uma matriz de transição.

Vamos construir a cadeia com um relógio de Poisson de taxa Λ. A cada toque, aplicamos uma transição segundo U. Alguns toques deixam o estado inalterado. Quando estamos em i, a probabilidade de que um toque produza uma mudança real é λ_i/Λ. Logo, a probabilidade de nenhuma mudança real até t é

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda t}\frac{(\Lambda t)^n}{n!}\left(1-\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^n = e^{-\Lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(\Lambda-\lambda_i)t]^n}{n!} = e^{-\lambda_i t}.$$

A espera até a próxima mudança é, portanto, exponencial de taxa λ_i. Quando ela acontece, o destino $j \neq i$ tem probabilidade

$$\frac{U(i,j)}{1-U(i,i)} = \frac{q(i,j)}{\lambda_i} = r(i,j).$$

Isso concorda com a construção por taxas (quando $\lambda_i = 0$, o estado permanece absorvente). A independência dos novos toques permite recomeçar a mesma regra depois de cada mudança real.

Condicionando ao número de toques até t, obtemos

$$P_t = e^{-\Lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} U^n.$$

Cada entrada de U^n está entre zero e um; por comparação com a série exponencial usual, podemos derivar termo a termo em intervalos limitados:

$$\begin{aligned} P_t' &= -\Lambda P_t + \Lambda e^{-\Lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} U^{n+1} \\ &= -\Lambda P_t + \Lambda P_t U = P_t Q. \end{aligned}$$

Como P_t é soma de potências de U, comuta com U e, portanto, com $Q = \Lambda(U - I)$. Isso também dá $P_t' = QP_t$; a condição inicial é $P_0 = I$.

Finalmente, expandimos $U^n = (I + Q/\Lambda)^n$ pela fórmula binomial e reagrupamos:

$$\begin{aligned} P_t &= e^{-\Lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{Q^k}{\Lambda^k} \\ &= e^{-\Lambda t} \left(\sum_{m \geq 0} \frac{(\Lambda t)^m}{m!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{t^k Q^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{t^k Q^k}{k!} = e^{tQ}. \end{aligned}$$

A troca das somas é válida porque o espaço é finito: se $M = \max_i \sum_j |q(i,j)|$, cada entrada de Q^k tem módulo no máximo M^k. Assim, os valores absolutos são dominados por séries exponenciais. ∎

Extensão a espaços enumeráveis*

O argumento por uniformização também funciona em um espaço enumerável, desde que as taxas de saída tenham um limite comum $\Lambda = \sup_i \lambda_i < \infty$. Se $\Lambda > 0$, escreva $U = I + Q/\Lambda$. Como na prova anterior,

$$P_t(i,j) = e^{-\Lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} U^n(i,j).$$

Para cada i, j temos $0 \le U^n(i,j) \le 1$. Assim, a série e sua série de derivadas são dominadas, em qualquer intervalo $0 \le t \le b$, pelas séries exponenciais escalares correspondentes. Podemos, portanto, derivar termo a termo.

A associatividade das multiplicações e a não negatividade das parcelas dão

$$\begin{aligned} P_t'(i,j) &= -\Lambda P_t(i,j) + \Lambda \sum_k P_t(i,k) U(k,j) \\ &= -\Lambda P_t(i,j) + \Lambda \sum_k U(i,k) P_t(k,j). \end{aligned}$$

As duas somas convergem absolutamente: na primeira, as parcelas são limitadas por $P_t(i,k)$; na segunda, por $U(i,k)$. Cada uma dessas famílias de pesos soma 1. Como $Q = \Lambda(U - I)$, obtemos ambas as equações de Kolmogorov também neste caso. Se $\Lambda = 0$, a cadeia não salta e $P_t = I$.

Para cadeias finitas, e também sob as hipóteses da extensão opcional, as duas equações assumem em coordenadas a forma

$$\begin{aligned} P_t'(i,j) &= \sum_{k \neq i} q(i,k) P_t(k,j) - \lambda_i P_t(i,j), \\ P_t'(i,j) &= \sum_{k \neq j} P_t(i,k) q(k,j) - \lambda_j P_t(i,j). \end{aligned}$$

No caso finito, as somas têm um número finito de termos; na extensão enumerável, elas são absolutamente convergentes. Matrizes em geral não comutam; aqui P_t é construído a partir de potências de Q ou de $I + Q/\Lambda$. Com taxas não limitadas, existem versões mais gerais, mas elas exigem justificativas próprias. Não aplicaremos esses enunciados fora de suas hipóteses.

Exemplo 6.12 — Processo de Poisson.

Se X_t conta as chegadas de um processo de Poisson de taxa λ, então, partindo de i chegadas,

$$P_t(i,j) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

O gerador possui $q(i,i+1) = \lambda$ e $q(i,i) = -\lambda$. Embora o espaço de estados seja infinito, podemos diferenciar diretamente a fórmula explícita e obter

$$\frac{d}{dt}P_t(i,j) = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j).$$

Para $j > i$, diferenciar a fórmula explícita produz exatamente os dois termos acima: o primeiro vem da derivada de $e^{-\lambda t}$ e o segundo, da derivada de $(\lambda t)^{j-i}$. O caso $j = i$ também vale porque $P_t(i+1,i) = 0$.

◁

Exemplo 6.13 — Uma máquina entre funcionamento e reparo.

Na abertura, uma máquina alternava entre funcionamento e reparo. Usaremos o estado 1 para funcionamento e o estado 2 para reparo. A taxa λ mede as falhas quando ela funciona; a taxa μ mede as conclusões de reparo quando ela está parada. A falta de memória das esperas exponenciais permite conservar apenas esse estado.

Considere $S = \{1, 2\}$, com taxas positivas λ de 1 para 2 e μ de 2 para 1, medidas na mesma unidade inversa de tempo. Então

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $r = \lambda + \mu$, a matriz de transição é

$$P_t = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{r} + \dfrac{\lambda}{r} e^{-rt} & \dfrac{\lambda}{r}(1 - e^{-rt}) \\ \dfrac{\mu}{r}(1 - e^{-rt}) & \dfrac{\lambda}{r} + \dfrac{\mu}{r} e^{-rt} \end{pmatrix}.$$

◁

Cálculo pela equação progressiva. Pela equação progressiva e pela identidade que soma cada linha de P_t, temos, para $a = 1, 2$,

$$\frac{d}{dt} P_t(a, 1) = \mu - (\lambda + \mu) P_t(a, 1).$$

Para resolver a equação, subtraia o valor constante μ/r e ponha $z_a(t) = P_t(a, 1) - \mu/r$. Então $z_a'(t) = -r z_a(t)$, de modo que $z_a(t) = z_a(0) e^{-rt}$. Portanto,

$$P_t(a, 1) = \frac{\mu}{r} + \left[P_0(a, 1) - \frac{\mu}{r} \right] e^{-rt}.$$

Usar $P_0(1, 1) = 1$ e $P_0(2, 1) = 0$ fornece a primeira coluna. Como $P_t(a, 1) + P_t(a, 2) = 1$, a segunda coluna é o complemento da primeira em cada linha. Finalmente, $e^{-rt} \to 0$ porque $r > 0$, e as duas linhas tendem a $(\mu/r, \lambda/r)$.

■

O termo exponencial mede quanto da informação sobre o estado inicial ainda permanece.

6.4 Comportamento limite

Daqui em diante, supomos que as cadeias consideradas sejam não explosivas. Assim, a trajetória permanece no espaço de estados em todo tempo finito e as probabilidades de transição conservam massa total 1.

Os tempos exponenciais permitem permanecer no estado atual por qualquer duração finita, com probabilidade positiva. Ao observar a cadeia a cada h unidades de tempo, essa permanência elimina a obstrução da periodicidade. Ainda precisamos de irredutibilidade e de uma distribuição estacionária para obter convergência ao equilíbrio.

Definição 6.5 — Irredutibilidade em tempo contínuo

A cadeia $(X_t)_{t\geq 0}$ é *irredutível* se, para quaisquer estados i e j, existe um caminho finito

$$i = k_0, k_1, \dots, k_n = j$$

tal que $q(k_{m-1}, k_m) > 0$ para $1 \leq m \leq n$. Em outras palavras, o grafo formado pelas setas de taxa positiva permite ir de qualquer estado a qualquer outro.

Lema 6.5 — Positividade das transições

Se X_t é irredutível e $t > 0$, então $P_t(i, j) > 0$ para todos os estados i, j.

Demonstração. Se $i = j$, basta considerar a possibilidade de não sair desse estado: $P_t(i, i) \geq e^{-\lambda_i t} > 0$. Para $i \neq j$, escolha um caminho $i = k_0, k_1, \dots, k_n = j$ com taxas positivas. Para cada uma das suas arestas, $P_h(k_{m-1}, k_m)/h \to q(k_{m-1}, k_m) > 0$. Como há apenas um número finito de arestas, podemos escolher um mesmo $h > 0$ suficientemente pequeno para que

$$P_h(k_{m-1}, k_m) > 0,$$

para todo m, e ainda exigir $nh < t$. Ao aplicar repetidamente Chapman–Kolmogorov, a probabilidade total contém, entre suas parcelas não negativas, a de passar por k_m no instante mh. Depois disso, podemos permanecer em j durante o tempo restante, com probabilidade ao menos $e^{-\lambda_j(t-nh)} > 0$.

Portanto,

$$P_t(i,j) \geq \left(\prod_{m=1}^{n} P_h(k_{m-1}, k_m) \right) P_{t-nh}(j,j) > 0.$$

■

Definição 6.6 — Distribuição estacionária

Uma distribuição de probabilidade π em S é *estacionária* se

$$\pi P_t = \pi \qquad \text{para todo } t \geq 0.$$

Se X_0 tem distribuição π, então X_t tem a mesma distribuição em qualquer instante. A trajetória se move, mas a fotografia probabilística do sistema não muda.

Verificar a definição diretamente exigiria conhecer P_t em todos os tempos. Com taxas de saída limitadas, o gerador oferece um teste local.

Lema 6.6 — Equações de equilíbrio

Suponha $\sup_i \lambda_i < \infty$. Uma distribuição π é estacionária se, e somente se, $\pi Q = 0$, isto é,

$$\sum_{k \neq j} \pi(k) q(k,j) = \pi(j) \lambda_j \quad \text{para todo } j.$$

Em cada estado, o fluxo total de entrada iguala o fluxo total de saída. A hipótese inclui filas $M/M/s$ com número fixo de servidores, embora seus espaços de estados sejam infinitos.

Demonstração. Ponha $\Lambda = \sup_i \lambda_i$. Se $\Lambda = 0$, então $Q = 0$, a cadeia não muda de estado e toda distribuição é estacionária. Suponha $\Lambda > 0$ e defina

$$U = I + \frac{Q}{\Lambda}.$$

Se $\pi Q = 0$, então $\pi U = \pi$ e, por indução, $\pi U^n = \pi$ para todo n. Pela uniformização,

$$\pi P_t = e^{-\Lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} \pi U^n = \pi e^{-\Lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} = \pi.$$

Portanto, π é estacionária.

Para a recíproca, basta olhar um intervalo muito curto. Na representação por um relógio Poisson de taxa Λ, separe os casos de zero, um e pelo menos dois toques:

$$P_t(i,j) = e^{-\Lambda t}\mathbf{1}_{\{i=j\}} + \Lambda t e^{-\Lambda t} U(i,j) + R_t(i,j).$$

O resto $R_t(i,j) \geq 0$ corresponde a dois ou mais toques e satisfaz

$$0 \leq R_t(i,j) \leq \mathbb{P}(N(t) \geq 2) \leq \frac{(\Lambda t)^2}{2}.$$

A última desigualdade usa $\mathbf{1}_{\{N\geq 2\}} \leq N(N-1)/2$ e $E[N(N-1)] = (\Lambda t)^2$ para uma Poisson.

Se π é estacionária, multiplique essa identidade por $\pi(i)$ e some em i. A contribuição do resto não excede $(\Lambda t)^2/2$, mesmo em um espaço enumerável, pois as massas $\pi(i)$ somam 1. Em cada coordenada j obtemos

$$0 = \lim_{t\downarrow 0} \frac{(\pi P_t)(j) - \pi(j)}{t} = \Lambda\big[(\pi U)(j) - \pi(j)\big] = (\pi Q)(j).$$

Isso prova $\pi Q = 0$, sem derivar séries de matrizes infinitas. ∎

Exemplo 6.14 — A máquina revisitada: funcionamento e reparo em equilíbrio.

Retomemos a máquina do Exemplo 6.13. O estado 1 indica funcionamento e o estado 2, reparo. Uma máquina em funcionamento falha à taxa $\lambda > 0$; uma máquina em reparo volta a funcionar à taxa $\mu > 0$. Queremos saber a probabilidade de encontrá-la funcionando em um instante de equilíbrio.

Como o espaço tem apenas dois estados, podemos usar o Lema 6.6. A primeira coordenada de $\pi Q = 0$ é

$$-\lambda\pi(1) + \mu\pi(2) = 0.$$

O fluxo de falhas, $\lambda\pi(1)$, deve compensar o fluxo de reparos concluídos, $\mu\pi(2)$. Substituindo $\pi(2) = 1 - \pi(1)$, obtemos

$$\lambda\pi(1) = \mu[1 - \pi(1)], \qquad \pi(1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \pi(2) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

A segunda coordenada de $\pi Q = 0$ é a mesma equação com sinal trocado; portanto não impõe uma condição adicional. As duas massas são positivas e somam um, de modo que a distribuição encontrada é estacionária.

Se o funcionamento dura, em média, oito dias e o reparo dura dois, as taxas por dia são $\lambda = 1/8$ e $\mu = 1/2$. Logo,

$$\pi(1) = \frac{1/2}{1/8 + 1/2} = \frac{4}{5}, \qquad \pi(2) = \frac{1}{5}.$$

Em equilíbrio, a probabilidade de encontrar a máquina disponível é $4/5$. Esse número é chamado de *disponibilidade em equilíbrio*. Ele não é a probabilidade de atravessar um intervalo inteiro sem falhar: uma máquina pode falhar, ser reparada e estar funcionando no instante em que a consultamos.

Essa distinção aparece em duas contas. Partindo do funcionamento, a fórmula de P_t já obtida fornece

$$\mathbb{P}_1(X_t = 1) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}e^{-5t/8},$$

com t medido em dias. Já não ocorrer nenhuma falha até t significa que a primeira espera exponencial ainda não terminou; sua probabilidade é

$$\mathbb{P}_1(\text{nenhuma falha até } t) = e^{-t/8}.$$

A primeira probabilidade tende a $4/5$; a segunda tende a zero. Disponibilidade em uma data e funcionamento sem interrupção respondem a perguntas diferentes sobre o mesmo modelo.

Podemos também responder à pergunta da abertura sobre a fração do tempo gasta em reparos. Comecemos com a máquina funcionando. No ciclo j, sejam U_j a duração do funcionamento e D_j a duração do reparo seguinte. Pela construção com novos relógios independentes, os pares (U_j, D_j) são independentes e têm a mesma lei, com $EU_j = 1/\lambda$ e $ED_j = 1/\mu$. Para acompanhar os ciclos completos, escrevemos

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} (U_j + D_j), \qquad R_n = \sum_{j=1}^{n} U_j.$$

O instante S_n encerra o ciclo n, e R_n é o tempo de funcionamento acumulado até ele. Pela lei forte dos grandes números,

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} > 0, \qquad \frac{R_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{quase certamente.}$$

Portanto $S_n \to \infty$. Se $R(t)$ é o tempo total de funcionamento até t e $S_n \le t < S_{n+1}$, então, para $n \ge 1$,

$$\frac{R_n}{S_{n+1}} \le \frac{R(t)}{t} \le \frac{R_{n+1}}{S_n}.$$

Os dois extremos têm o mesmo limite: basta dividir numeradores e denominadores por n e usar $(n+1)/n \to 1$ nas somas com índice $n+1$. Como o ciclo que contém t tem índice crescente quando $t \to \infty$, a desigualdade fornece

$$\frac{R(t)}{t} \longrightarrow \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{quase certamente.}$$

A fração de tempo em reparo é o complemento, cujo limite é $\lambda/(\lambda+\mu)$. No caso numérico, as frações observadas ao longo de uma realização tendem, portanto, a $4/5$ em funcionamento e $1/5$ em reparo. A lei forte justifica essa interpretação temporal das probabilidades de equilíbrio neste modelo.

◁

O Lema 6.5 implica que, para qualquer $h > 0$, a cadeia amostrada nos instantes $0, h, 2h, \ldots$ tem matriz P_h irredutível. Ela também é aperiódica, pois $P_h(i,i) > 0$. Se existe uma distribuição estacionária π, o Teorema 3.10 fornece

$$\lim_{n\to\infty} P_{nh}(i,j) = \pi(j).$$

Teorema 6.7 — Convergência para o equilíbrio

Se uma cadeia de Markov em tempo contínuo X_t é não explosiva, irredutível e tem distribuição estacionária π, então

$$\lim_{t\to\infty} P_t(i,j) = \pi(j).$$

Demonstração. Se $nh \le t \le (n+1)h$, Chapman–Kolmogorov e a não negatividade das parcelas dão

$$P_t(i,j) \ge P_{nh}(i,j) P_{t-nh}(j,j).$$

Uma maneira de permanecer em j é não realizar nenhum salto durante o intervalo restante. Como esse intervalo tem duração no máximo h,

$$P_{t-nh}(j,j) \ge e^{-\lambda_j (t-nh)} \ge e^{-\lambda_j h}.$$

Logo, $P_t(i,j) \ge P_{nh}(i,j) e^{-\lambda_j h}$. Fixado $h > 0$, o inteiro $n = \lfloor t/h \rfloor$ cresce sem limite quando $t \to \infty$. A convergência da cadeia amostrada fornece então $\liminf_{t\to\infty} P_t(i,j) \ge \pi(j) e^{-\lambda_j h}$. Como isso vale para todo $h > 0$, podemos fazer $h \downarrow 0$, obtendo

$$\liminf_{t\to\infty} P_t(i,j) \ge \pi(j).$$

Se A é um conjunto finito de estados que não contém j, então

$$\limsup_{t\to\infty} P_t(i,j) \le 1 - \sum_{k\in A} \liminf_{t\to\infty} P_t(i,k) \le 1 - \sum_{k\in A} \pi(k).$$

A primeira desigualdade usa $P_t(i,j) \le 1 - \sum_{k\in A} P_t(i,k)$ e a finitude de A; a segunda usa a cota inferior já obtida em cada estado k. Escolhendo conjuntos finitos crescentes que esgotem $S \setminus \{j\}$, a soma das massas $\pi(k)$ tende a $1 - \pi(j)$, pois π é uma distribuição de probabilidade. Assim, $\limsup_{t\to\infty} P_t(i,j) \le \pi(j)$. O limite inferior e o limite superior coincidem, provando a convergência. ∎

Exemplo 6.15 — Sol, nuvens e chuva.

Considere um modelo simplificado de tempo meteorológico com três estados: sol, nuvens e chuva. Depois de um período ensolarado, vem um período nublado; depois, chuva; e, por fim, o sol retorna. As permanências são exponenciais e independentes, com médias de 3, 4 e 1 dia, respectivamente.

Como a taxa de saída é o inverso do tempo médio de permanência, o gerador, na ordem sol, nuvens, chuva, é

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a fração de tempo que o modelo passa em cada condição? Em equilíbrio, o fluxo que sai de um estado para o seguinte deve ser o mesmo nas três transições:

$$\frac{\pi(1)}{3} = \frac{\pi(2)}{4} = \pi(3).$$

Juntando essas relações à normalização $\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$, obtemos

$$\boxed{\pi(1) = \frac{3}{8}, \qquad \pi(2) = \frac{4}{8}, \qquad \pi(3) = \frac{1}{8}.}$$

Essas igualdades são precisamente as equações $\pi Q = 0$ com a condição de soma unitária. A interpretação também é simples: cada ciclo visita os três estados uma vez e dura, em média, $3 + 4 + 1 = 8$ dias. O período nublado ocupa a maior fração do tempo porque sua permanência média é a mais longa, não porque o sistema passe por ele mais vezes.

◁

6.4.1 Condição de balanço detalhado

Definição 6.7 — Balanço detalhado e reversibilidade

Uma distribuição π satisfaz as *equações de balanço detalhado* se

$$\pi(k)q(k,j) = \pi(j)q(j,k) \quad \text{para todos } j \neq k. \tag{6.1}$$

Dizemos que uma cadeia é *reversível em relação a* π se π é estacionária e

$$\pi(i)P_t(i,j) = \pi(j)P_t(j,i) \quad \text{para todos } i, j \text{ e } t \geq 0.$$

O lado esquerdo é o fluxo de k para j; o direito, o fluxo contrário. Equilibrar cada par é mais forte que equilibrar a entrada e a saída totais. O próximo resultado explica a relação com a reversão do tempo.

Teorema 6.8 — Balanço detalhado implica reversibilidade

Se uma cadeia não explosiva com taxas finitas admite uma distribuição π que satisfaz (6.1), então

$$\pi(i)P_t(i,j) = \pi(j)P_t(j,i) \quad (t \geq 0).$$

Em particular, π é estacionária.

Não exigimos taxas uniformemente limitadas. A demonstração aproxima o processo por cadeias finitas, onde o balanço detalhado já pode ser verificado usando apenas matrizes de transição. Depois retiramos a restrição com a hipótese de não explosão.

Demonstração. Primeiro consideremos uma cadeia em um conjunto *finito* de estados $F \subseteq S$. Conservamos as taxas de salto $q(i,j)$ entre estados de F e suprimimos os demais saltos:

$$q_F(i,j) = q(i,j) \quad (i \neq j,\ i,j \in F), \qquad q_F(i,i) = -\sum_{\substack{j \in F \\ j \neq i}} q(i,j).$$

As equações de balanço detalhado ainda valem para essas taxas, com os pesos $\pi(i)$, $i \in F$; não precisamos normalizar os pesos nem supor que sejam positivos.

Escolha $\Lambda_F > 0$ maior ou igual a todas as taxas de saída da cadeia restrita e uniformize:

$$U_F = I + \frac{Q_F}{\Lambda_F}.$$

Para $i \neq j$, a igualdade $\pi(i)U_F(i,j) = \pi(j)U_F(j,i)$ segue do balanço das taxas; para $i = j$, é automática. Ao multiplicar essas igualdades ao longo de um caminho de n passos, vemos que um caminho de i a j e o mesmo caminho percorrido no sentido contrário satisfazem a mesma relação. Somando sobre todos os estados intermediários, obtemos, para todo $n \geq 0$,

$$\pi(i)U_F^n(i,j) = \pi(j)U_F^n(j,i).$$

Pela fórmula de uniformização, a matriz de transição P_t^F é uma soma dessas

potências, com pesos de Poisson que não dependem dos estados:

$$P_t^F = e^{-\Lambda_F t} \sum_{n\geq 0} \frac{(\Lambda_F t)^n}{n!} U_F^n.$$

Portanto,

$$\pi(i)P_t^F(i,j) = \pi(j)P_t^F(j,i).$$

Passamos agora ao espaço de estados completo. Tomamos conjuntos finitos crescentes $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$ cuja união seja S (se S é finito, basta usar $F = S$). Para comparar as trajetórias, escolhemos $\Lambda_m > 0$ com

$$\Lambda_m \geq \max_{x\in F_m} \lambda_x, \qquad \lambda_x = \sum_{y\neq x} q(x,y).$$

A cota usa as taxas de saída da cadeia *original*, incluindo os destinos fora de F_m. Enquanto as duas cadeias estão no mesmo estado $x \in F_m$, usamos um relógio comum de taxa Λ_m. Em cada toque, sorteamos o destino $y \neq x$ com probabilidade $q(x,y)/\Lambda_m$; com a probabilidade restante, conservamos x.

Se o destino pertence a F_m, ambas realizam o mesmo salto. Se fica fora de F_m, a cadeia original sai e a restrita permanece em x; a partir daí, não precisamos manter as trajetórias juntas. Na cadeia restrita, ignorar as tentativas para fora conserva exatamente as taxas q_{F_m} entre estados distintos e ajusta a diagonal à soma dessas taxas. É a construção por uniformização, agora com um mesmo relógio para comparar os dois processos.

As duas trajetórias assim construídas coincidem até a primeira saída da cadeia original de F_m. Por isso, para $i, j \in F_m$,

$$\left|P_t^{F_m}(i,j) - P_t(i,j)\right| \leq \mathbb{P}_i(\text{sair de } F_m \text{ até } t).$$

A não explosão garante que, até cada tempo fixo t, há apenas um número finito de saltos quase certamente. Cada trajetória visita, portanto, apenas um conjunto finito de estados nesse intervalo e acaba contida em algum F_m. Pela continuidade das probabilidades, a cota à direita tende a zero. Logo $P_t^{F_m}(i,j) \to P_t(i,j)$.

Passando ao limite na identidade obtida para cada cadeia finita, concluímos

$$\pi(i)P_t(i,j) = \pi(j)P_t(j,i).$$

Somando em i e usando que a não explosão faz cada linha de P_t somar 1, obtemos

$$(\pi P_t)(j) = \pi(j) \sum_i P_t(j,i) = \pi(j).$$

Assim, π é estacionária, como afirmado. ∎

As equações de balanço detalhado costumam ser mais fáceis de resolver do que $\pi Q = 0$, mas são uma condição suficiente, não necessária. No Exemplo 6.15, por exemplo,

$$\pi(2)q(2,1) = 0 < \pi(1)q(1,2),$$

portanto a cadeia meteorológica não é reversível, embora tenha distribuição estacionária.

6.4.2 Cadeias de nascimento e morte

Uma cadeia de nascimento e morte só pode andar entre estados vizinhos. Quando está em n, salta para $n+1$ à taxa λ_n e, se $n > 0$, para $n-1$ à taxa μ_n. A estrutura linear do espaço de estados torna o balanço detalhado especialmente simples.

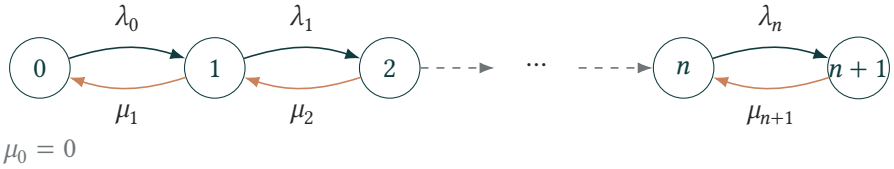


Figura 6.5: Numa cadeia de nascimento e morte, apenas estados vizinhos se comunicam. A taxa λ_n produz o salto $n \to n+1$, enquanto μ_n produz $n \to n-1$; na fronteira, $\mu_0 = 0$.

Teorema 6.9 — Forma produto da distribuição estacionária

Considere uma cadeia de nascimento e morte não explosiva e irredutível em $S = \{0, 1, \dots, N\}$, com N finito ou infinito. Suponha $\lambda_n > 0$ para $n < N$, $\mu_n > 0$ para $n > 0$, $\mu_0 = 0$ e, se $N < \infty$, $\lambda_N = 0$. Defina

$$w_0 = 1, \qquad w_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, \quad n \geq 1.$$

Se $Z = \sum_{n \in S} w_n < \infty$, então

$$\pi(n) = \frac{w_n}{Z}$$

é uma distribuição estacionária.

Verificação. Os pesos são positivos pelas hipóteses sobre as taxas. Como $Z = \sum_{n \in S} w_n < \infty$ e $w_0 = 1$, a normalização $\pi(n) = w_n / Z$ é não negativa e soma um. Na razão entre dois pesos consecutivos, todos os fatores comuns se cancelam:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}.$$

Multiplicar por $w_n \mu_{n+1}/Z$ dá, para todo n tal que $n, n+1 \in S$,

$$\pi(n)\lambda_n = \pi(n+1)\mu_{n+1}.$$

As demais taxas entre estados distintos são nulas, de modo que π satisfaz o balanço detalhado de (6.1). Essa igualdade diz que, em equilíbrio, o fluxo pela aresta $n \leftrightarrow n+1$ é o mesmo nos dois sentidos. Pelo Teorema 6.8, π é estacionária; a hipótese de não explosão do enunciado é a exigida ali. ■

Exemplo 6.16 — Cadeia com dois estados.

Retomemos a máquina do Exemplo 6.13, com taxas $q(1,2) = \lambda > 0$ e $q(2,1) = \mu > 0$. Já encontramos sua distribuição limite resolvendo as equações de Kolmogorov e a recuperamos por $\pi Q = 0$ no Exemplo 6.14. Agora a mesma distribuição aparece diretamente no balanço entre os únicos dois estados:

$$\pi(1)\lambda = \pi(2)\mu, \qquad \pi(1) + \pi(2) = 1.$$

Portanto,

$$\pi(1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \pi(2) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Recuperamos o mesmo equilíbrio sem calcular P_t. O estado do qual se sai mais devagar recebe maior massa estacionária.

◁

Exemplo 6.17 — Reparo de três máquinas.

Três máquinas operam simultaneamente. Cada máquina em funcionamento falha à taxa $1/60$ por dia, e um único reparador conclui reparos à taxa $1/4$ por dia. Se X_t é o número de máquinas em operação, então

$$q(i, i-1) = \frac{i}{60} \ (i \geq 1), \qquad q(i, i+1) = \frac{1}{4} \ (i \leq 2).$$

Tomando pesos proporcionais, a forma produto fornece

$$w_0 = 1, \quad w_1 = 15, \quad w_2 = \frac{225}{2}, \quad w_3 = \frac{1125}{2}.$$

Após normalizar,

$$(\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3)) = \frac{1}{1382}(2, 30, 225, 1125).$$

Em equilíbrio, a probabilidade de observar as três máquinas funcionando é $1125/1382 \approx 0{,}814$. Em uma trajetória longa, essa é também a fração de tempo correspondente.

◁

6.5 Distribuições e tempos de saída

As perguntas de saída em tempo contínuo são as mesmas de tempo discreto: por qual fronteira a cadeia escapa e quanto tempo isso leva? A cadeia de saltos decide o destino; os relógios exponenciais também entram no cálculo do tempo.

Definição 6.8 — Tempo de chegada e tempo de retorno

Para $A \subseteq S$, definimos o primeiro instante de chegada a A por

$$H_A = \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \in A\}.$$

Se a cadeia começa em k, então $H_{\{k\}} = 0$ e esse instante não conta como retorno. Para exigir que a cadeia saia antes de voltar, definimos

$$\sigma_k = \inf\{t > 0 \,:\, X_t \neq k\}, \qquad T_k^+ = \inf\{t > \sigma_k \,:\, X_t = k\}.$$

Usamos $\inf \emptyset = \infty$: a posição inicial não conta como nova visita. Para estados que admitem saída, essa definição também permite classificar a frequência dos retornos.

Definição 6.9 — Recorrência em tempo contínuo

Suponha $\lambda_k > 0$. O estado k é *recorrente* se $\mathbb{P}_k(T_k^+ < \infty) = 1$, e *transiente* se essa probabilidade é menor que um. Um estado recorrente é *recorrente positivo* se $E_k T_k^+ < \infty$ e *recorrente nulo* se $E_k T_k^+ = \infty$.

A diferença em relação ao tempo discreto é a unidade da espera: o tempo médio de retorno é medido em tempo físico, não pelo número de saltos. A

cadeia de saltos tem as mesmas probabilidades de retorno, mas pode ter classificação diferente entre recorrência positiva e nula, pois as esperas dependem do estado. Um estado absorvente é tratado separadamente: como não há saída, o tempo T_k^+ acima não se aplica.

Teorema 6.10 — Equação de Dirichlet para probabilidades de saída

Sejam A e B conjuntos disjuntos, $C = S \setminus (A \cup B)$ finito, e suponha que $H_A \wedge H_B < \infty$ quase certamente quando a cadeia começa em C. Então

$$h(i) = \mathbb{P}_i(H_A < H_B)$$

é a única solução de

$$\begin{cases} h = 1 & \text{em } A, \\ h = 0 & \text{em } B, \\ Qh = 0 & \text{em } C. \end{cases}$$

Se $Q_C = (q(i,j))_{i,j\in C}$ e $\nu(i) = \sum_{a\in A} q(i,a)$, a parte desconhecida de h satisfaz

$$-Q_C h_C = \nu, \qquad \text{isto é,} \qquad h_C = (-Q_C)^{-1}\nu.$$

Demonstração. A hipótese de saída implica $\lambda_i > 0$ para $i \in C$. Seja $U_C = (r(i,j))_{i,j\in C}$ a restrição da matriz da cadeia de saltos. De cada estado de C existe um caminho de probabilidade positiva até a fronteira. Para cada estado inicial em C, escolha um desses caminhos e multiplique suas probabilidades de transição; o produto é positivo. Como há um número finito de estados iniciais, o maior comprimento dos caminhos é algum $m < \infty$, e o menor dos produtos é algum $\varepsilon > 0$. Assim, a saída ocorre em até m saltos com probabilidade ao menos ε, qualquer que seja a partida em C. Se ainda não houve saída, a propriedade de Markov permite repetir a mesma estimativa no bloco seguinte de m saltos. Por indução,

$$\|U_C^{km}\| \le (1-\varepsilon)^k,$$

onde a norma é a maior soma absoluta de uma linha. A soma de uma linha de U_C^n é a probabilidade de permanecer em C por n saltos. A cota geométrica

implica a convergência de $\sum_{n\ge 0} U_C^n$. Como $(I-U_C)\sum_{n=0}^{N} U_C^n = I - U_C^{N+1}$ e $U_C^{N+1}\to 0$, concluímos que $(I-U_C)^{-1} = \sum_{n\ge 0} U_C^n$.

Condicionar no primeiro salto dá

$$h(i) = \sum_{j\neq i} \frac{q(i,j)}{\lambda_i} h(j), \qquad i \in C.$$

Multiplicar por λ_i e usar $q(i,i) = -\lambda_i$ produz $Qh(i) = 0$. Nas parcelas de $Qh(i)$ que correspondem à fronteira, h vale um em A e zero em B. Portanto,

$$0 = \sum_{j\in C} q(i,j)h(j) + \sum_{a\in A} q(i,a),$$

ou seja, $-Q_C h_C = \nu$. Se D é a matriz diagonal com entradas λ_i, temos $-Q_C = D(I-U_C)$. Os dois fatores são invertíveis: D tem diagonal estritamente positiva e a inversa de $I-U_C$ foi construída acima. Assim, o sistema tem exatamente uma solução, a probabilidade de saída indicada. ∎

Teorema 6.11 — Equação de Poisson para o tempo de saída

Se C é finito e $\tau = H_{S\setminus C} < \infty$ quase certamente para toda partida em C, então $E_i\tau < \infty$ e $g(i) = E_i\tau$ é a única solução de

$$g = 0 \text{ fora de } C, \qquad Qg = -\mathbf{1} \text{ em } C.$$

Escrevendo $Q_C = (q(i,j))_{i,j\in C}$, temos $g_C = (-Q_C)^{-1}\mathbf{1}$.

O termo -1 registra a passagem do tempo: antes de recomeçar o problema no destino do primeiro salto, gastamos uma espera de média $1/\lambda_i$.

Demonstração. Seja J o número de saltos até a saída. Pela construção em blocos da prova anterior, $\mathbb{P}_i(J > km) \le (1-\varepsilon)^k$. Consequentemente,

$$E_i J = \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}_i(J>n) \le m \sum_{k\ge 0} (1-\varepsilon)^k = \frac{m}{\varepsilon} < \infty.$$

A hipótese de saída também garante $\lambda_i > 0$ em C. Como C é finito, $a = \min_{i\in C}\lambda_i > 0$. Cada espera anterior à saída tem média no máximo $1/a$,

mas o número de esperas também é aleatório. Para somá-las, usamos a construção $\tau_{n+1} = E_n/\lambda_{Y_n}$. No evento $\{J > n\}$, temos $Y_n \in C$, de modo que

$$\tau_{n+1}\mathbf{1}_{\{J>n\}} \le \frac{E_n}{a}\mathbf{1}_{\{J>n\}}.$$

O evento $\{J > n\}$ depende apenas da cadeia de saltos e é independente de E_n, cuja média é um. Somando os termos não negativos e tomando esperanças, obtemos

$$E_i\tau = \sum_{n\ge 0} E_i[\tau_{n+1}\mathbf{1}_{\{J>n\}}] \le \frac{1}{a}\sum_{n\ge 0}\mathbb{P}_i(J > n) = \frac{E_i J}{a} < \infty.$$

Condicionando no primeiro salto,

$$g(i) = \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{j\neq i}\frac{q(i,j)}{\lambda_i}g(j).$$

A primeira parcela é a duração média da espera inicial. A soma representa o tempo que ainda falta depois do salto; se o destino já está fora de C, esse tempo é zero. Multiplicar por λ_i e reunir o termo $-\lambda_i g(i)$ fornece $Qg(i) = -1$. Como $g = 0$ fora de C, a equação se escreve $-Q_C g_C = \mathbf{1}$. A invertibilidade de $-Q_C$, demonstrada acima, prova a unicidade e a fórmula $g_C = (-Q_C)^{-1}\mathbf{1}$. ∎

A mesma conta identifica cada entrada da matriz fundamental:

$$(-Q_C)^{-1}(i,j) = E_i\left[\int_0^{\tau}\mathbf{1}_{\{X_t=j\}}\,dt\right].$$

Essa interpretação também aparece diretamente na cadeia de saltos. Com $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$ e $U_C = (r(i,j))_{i,j\in C}$, já vimos que $-Q_C = D(I - U_C)$; portanto,

$$(-Q_C)^{-1}(i,j) = \frac{1}{\lambda_j}\sum_{n=0}^{\infty}U_C^n(i,j).$$

A soma conta o número esperado de visitas da cadeia de saltos ao estado j antes da saída, incluindo a visita inicial. Cada visita a j dura, em média, $1/\lambda_j$ unidades de tempo, o que explica a identidade de ocupação. Também podemos obtê-la pelas equações de primeiro salto: para j fixo, o vetor de tempos de ocupação satisfaz $Qa = -\mathbf{1}_{\{j\}}$ em C, com valor zero na fronteira. Sua solução é a coluna j de $(-Q_C)^{-1}$. Somar as colunas recupera o tempo total esperado de saída.

Exemplo 6.18 — Quanto tempo as duas máquinas funcionam antes do desligamento?.

Voltemos às duas máquinas do Exemplo 6.8. Nos estados $A = (1,1)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$, o sistema ainda funciona. O estado $F = (0,0)$ representa o desligamento definitivo. O reparador trabalha quando exatamente uma máquina está parada; depois de atingir F, o sistema não volta a funcionar. Suponha agora taxas de falha $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ por dia e taxa de reparo $\mu = 3$ por dia.

Primeiro verificamos que o desligamento ocorre e tem média finita. De B, a chance de a máquina restante falhar antes do reparo é $1/(1+3) = 1/4$; de C, é $2/(2+3) = 2/5$. De A, o primeiro salto leva a B ou a C, e a probabilidade de o salto seguinte levar a F é ao menos $1/4$. Portanto, de qualquer estado ainda operacional, há probabilidade ao menos $1/4$ de desligamento nos próximos dois saltos. Se J conta os saltos até F, o argumento de tentativas repetidas dá

$$\mathbb{P}(J > 2k) \le (3/4)^k, \qquad EJ \le 2\sum_{k\ge 0}(3/4)^k = 8.$$

As taxas de saída de A, B, C são $3, 4, 5$ por dia; cada permanência antes do desligamento tem, assim, média no máximo $1/3$ de dia. Somando as médias ao longo das visitas, como na prova do teorema anterior, concluímos que $E_i H_{\{F\}} \le EJ/3 < \infty$. As hipóteses da equação de Poisson para saída estão verificadas.

Escreva $a = E_A H_{\{F\}}$, $b = E_B H_{\{F\}}$ e $c = E_C H_{\{F\}}$. Em A, as falhas das máquinas 1 e 2 competem: a espera média é $1/3$ de dia; a falha da máquina 2 leva a B com probabilidade $2/3$, e a falha da máquina 1 leva a C com probabilidade $1/3$. Em B e C, competem o reparo e a falha da máquina que ainda funciona. Logo,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c, \\ b &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}a, \\ c &= \frac{1}{5} + \frac{3}{5}a. \end{aligned}$$

Nos dois últimos casos, o salto para F não acrescenta tempo futuro, pois o tempo de chegada a F já foi encerrado. Substituindo essas duas expressões

na primeira, obtemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}a\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}a\right) \\ &= \frac{17}{30} + \frac{7}{10}a. \end{aligned}$$

Portanto $3a/10 = 17/30$, e

$$a = \frac{17}{9}, \qquad b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{17}{9} = \frac{5}{3}, \qquad c = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\frac{17}{9} = \frac{4}{3},$$

em dias. Quando apenas uma máquina funciona, importa qual é ela: $b > c$ porque em B permanece a máquina de menor taxa de falha. O número de máquinas em funcionamento seria o mesmo nos dois estados, mas o tempo que ainda resta não tem a mesma distribuição.

◁

Exemplo 6.19 — Passeio em tempo contínuo entre duas barreiras.
Considere $S = \{0, 1, \dots, N\}$. Nos estados internos, a cadeia salta para cada vizinho à taxa 1; os extremos 0 e N são absorventes. A cadeia de saltos é o passeio simétrico em tempo discreto, logo

$$\mathbb{P}_i(H_N < H_0) = \frac{i}{N}.$$

Para o tempo $g(i) = E_i(H_0 \wedge H_N)$, a equação $Qg = -1$ torna-se

$$g(i+1) - 2g(i) + g(i-1) = -1, \qquad g(0) = g(N) = 0.$$

A solução é

$$g(i) = \frac{i(N-i)}{2}.$$

O fator $1/2$ tem uma explicação simples: no interior há dois relógios de taxa 1, de modo que cada salto demora em média $1/2$ unidade de tempo.

◁

6.6 Filas markovianas

Uma fila é markoviana quando o estado atual contém tudo de que precisamos para descrever seu futuro. Com chegadas de Poisson e serviços exponenciais, a falta de memória permite usar apenas o número de clientes no sistema: não precisamos guardar há quanto tempo o cliente em serviço está sendo atendido.

Definição 6.10 — Fila $M/M/1$
Na notação $M/M/1$, o primeiro M indica chegadas de Poisson, o segundo indica tempos de serviço exponenciais e o número 1 indica um único servidor. Suponha chegadas e serviços independentes, com taxas $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ na mesma unidade. Então o número X_t de clientes no sistema possui taxas

$$q(n, n+1) = \lambda \quad (n \geq 0), \qquad q(n, n-1) = \mu \quad (n \geq 1).$$

Uma chegada aumenta o estado em uma unidade; uma conclusão de serviço o reduz em uma unidade.

Escreva $\rho = \lambda/\mu$. A forma produto das cadeias de nascimento e morte dá pesos $w_n = \rho^n$. Eles podem ser normalizados somente se $\rho < 1$, isto é, se a capacidade média de serviço excede a taxa de chegada.

Teorema 6.12 — Equilíbrio da fila $M/M/1$

Se $0 < \lambda < \mu$, a única distribuição estacionária é

$$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n, \qquad \rho = \lambda/\mu, \quad n \geq 0,$$

e o número médio de clientes em equilíbrio é

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Se $\lambda \geq \mu > 0$, não existe distribuição estacionária de probabilidade.

Quando λ se aproxima de μ por baixo, a margem para dissipar o trabalho acumulado diminui e L cresce sem limite. Ter a mesma capacidade e demanda médias não basta para manter uma distribuição de equilíbrio.

Demonstração. A taxa total de saída é limitada por $\lambda + \mu$, portanto não há explosão. A equação de equilíbrio em zero é $\pi(0)\lambda = \pi(1)\mu$; para $n \geq 1$, temos

$$\pi(n-1)\lambda + \pi(n+1)\mu = \pi(n)(\lambda + \mu).$$

A primeira igualdade equilibra o fluxo entre 0 e 1. Substituindo-a na equação de $n = 1$, obtemos o mesmo equilíbrio entre 1 e 2; repetindo o argumento, chegamos a

$$\pi(n+1)\mu = \pi(n)\lambda, \qquad \text{isto é,} \qquad \pi(n) = \pi(0)\rho^n.$$

Se $\rho < 1$, a soma da série geométrica determina $\pi(0) = 1 - \rho$. Esses pesos satisfazem o balanço detalhado, que garante a estacionariedade, e a irredutibilidade garante sua unicidade. Além disso,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Para justificar a soma que calcula L sem derivar uma série, escreva $n = \sum_{k=1}^{n} 1$ e reagrupe os termos não negativos:

$$\sum_{n\geq 0} n\rho^n = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq k} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}\sum_{k\geq 1}\rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Multiplicar por $1-\rho$ dá o valor anunciado de L. Se $\rho \geq 1$ e $\pi(0) > 0$, a série $\pi(0)\sum_{n\geq 0}\rho^n$ diverge; se $\pi(0) = 0$, a recursão força $\pi(n) = 0$ em todos os estados. Nenhum caso produz uma distribuição de probabilidade, provando a inexistência afirmada. ■

Exemplo 6.20 — Capacidade finita.

Suponha que no máximo K clientes possam permanecer numa fila $M/M/1$. Uma chegada que encontra K clientes é recusada. O espaço de estados agora é finito e existe uma distribuição estacionária para quaisquer taxas positivas. Se $\rho \neq 1$,

$$\pi(n) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n, \qquad 0 \leq n \leq K;$$

se $\rho = 1$, então $\pi(n) = 1/(K+1)$. A fração de chegadas recusadas a longo prazo é $\pi(K)$.

◁

A última afirmação é uma aplicação da propriedade *PASTA* (*Poisson arrivals see time averages*): quando as tentativas de chegada são Poisson e não antecipam o estado da fila, as proporções observadas pelas chegadas coincidem com as proporções de tempo. A taxa de tentativas permanece λ mesmo quando a capacidade está esgotada.

A propriedade pode ser entendida primeiro por um cálculo em médias. Considere o sistema iniciado em equilíbrio e divida $(0, t]$ em pequenos intervalos de duração h. Se a fila está cheia no início de um deles, a probabilidade de uma tentativa de chegada nesse intervalo é $\lambda h + o(h)$. O erro ao usar apenas o estado inicial é da ordem de h^2: para produzir uma diferença, precisam ocorrer tanto uma mudança de estado quanto uma tentativa de chegada nesse mesmo intervalo. As taxas são limitadas porque a capacidade é finita. Somando os intervalos e fazendo $h \downarrow 0$, obtemos

$$E_\pi R(t) = \lambda t\, \pi(K), \qquad E_\pi A(t) = \lambda t,$$

onde $R(t)$ conta as recusas e $A(t)$ todas as tentativas. A razão dessas esperanças é $\pi(K)$. A afirmação mais forte, de convergência quase certa da fração observada $R(t)/A(t)$, será demonstrada na Seção 6.10, usando apenas ciclos independentes e a lei dos grandes números. Uma referência para a formulação geral é Wolff (1982).

Chegadas que dependam do estado da fila não satisfazem, em geral, as hipóteses de PASTA.

6.6.1 Vários servidores

Na fila $M/M/s$ do Exemplo 6.6, há s servidores, cada um com taxa de serviço μ. Se existem $n < s$ clientes, somente n servidores estão ocupados e a taxa total de saída é $n\mu$. Se $n \geq s$, todos trabalham e a taxa total é $s\mu$. Assim,

$$q(n, n+1) = \lambda, \qquad q(n, n-1) = \min(n, s)\mu.$$

Escreva $a = \lambda/\mu$. Pela forma produto, a razão entre pesos consecutivos é

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\lambda}{\min(n+1, s)\mu}.$$

Enquanto $n < s$, cada nova razão é $a/(n+1)$. Depois que todos os servidores estão ocupados, as razões são constantes, iguais a a/s. Começando com $w_0 = 1$, obtemos

$$w_n = \begin{cases} a^n/n!, & 0 \leq n \leq s, \\ \dfrac{a^n}{s!\, s^{n-s}}, & n \geq s. \end{cases}$$

A cauda é geométrica com razão $\lambda/(s\mu)$. Portanto, a condição de estabilidade é

$$\lambda < s\mu,$$

e, sob essa condição, $\pi(n) = w_n / \sum_{k \geq 0} w_k$. A desigualdade apenas diz que, a longo prazo, a demanda média deve ser menor que a capacidade total dos servidores.

6.7 Distribuições explícitas em modelos enumeráveis

Os modelos de população e de atendimento também permitem acompanhar a distribuição em um instante fixo. Nos dois casos seguintes, a independência dos mecanismos transforma uma cadeia com infinitos estados em contas com distribuições conhecidas.

6.7.1 Yule: nascer em tempos diferentes

Retomemos o processo de Yule: cada indivíduo produz um novo indivíduo à taxa $a > 0$, independentemente dos demais, e não há mortes. Se há n indivíduos, os n relógios competem e a população passa de n a $n+1$ à taxa an. A não explosão já foi provada no Exemplo 6.10, no caso em que a potência é um. Podemos, portanto, contar a população em todo instante finito.

Proposição 6.13 — Lei e tamanho médio da população de Yule
Se $Z_0 = 1$, então, para $t > 0$ e $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}_1(Z_t = n) = e^{-at}(1 - e^{-at})^{n-1}.$$

Assim, Z_t tem distribuição geométrica em $\{1, 2, \ldots\}$ e $E_1 Z_t = e^{at}$. Com $k \geq 1$ indivíduos iniciais,

$$E_k Z_t = k e^{at} \qquad (t \geq 0).$$

Demonstração. Escreva $p_n(t) = \mathbb{P}_1(Z_t = n)$. Para ficar no estado 1 até t, o primeiro relógio não pode ter tocado; logo, $p_1(t) = e^{-at}$. Para os demais estados, usaremos as esperas já presentes na construção, em vez de derivar uma soma infinita.

Seja H_n o primeiro instante em que a população atinge n, com $H_1 = 0$. O tempo $W_n = H_{n+1} - H_n$ é exponencial de taxa an, e essas esperas são independentes. Para cada $n \geq 2$, H_n é uma soma finita de exponenciais independentes e tem uma densidade g_n. Como $H_2 = W_1$, temos $g_2(s) =$

$ae^{-as} = ap_1(s)$. Para $n \geq 3$, a convolução de H_{n-1} com W_{n-1} dá

$$g_n(s) = \int_0^s g_{n-1}(u)(n-1)ae^{-(n-1)a(s-u)}\,du.$$

Por outro lado, estar no estado $n-1$ em s significa ter chegado a ele em algum $u \leq s$ e não ter saído até s. A independência da nova espera fornece

$$p_{n-1}(s) = \int_0^s g_{n-1}(u)e^{-(n-1)a(s-u)}\,du.$$

Comparar as duas integrais mostra que $g_n(s) = (n-1)ap_{n-1}(s)$, também válido para $n = 2$. Para estar em n no instante t, precisamos chegar em algum $s \leq t$ e permanecer ali até t. Portanto,

$$p_n(t) = (n-1)a\int_0^t p_{n-1}(s)e^{-na(t-s)}\,ds, \qquad n \geq 2.$$

Esse argumento usa somente somas e integrais de um número finito de esperas para cada n fixado.

Façamos indução em n. Já provamos o caso $n = 1$. Substituir a fórmula do caso $n-1$ na última integral dá

$$\begin{aligned} p_n(t) &= (n-1)ae^{-nat}\int_0^t e^{(n-1)as}(1-e^{-as})^{n-2}\,ds \\ &= (n-1)ae^{-nat}\int_0^t e^{as}(e^{as}-1)^{n-2}\,ds \\ &= e^{-nat}(e^{at}-1)^{n-1} \\ &= e^{-at}(1-e^{-at})^{n-1}. \end{aligned}$$

Na terceira linha, fizemos $v = e^{as}-1$, de modo que $dv = ae^{as}\,ds$, e integramos v^{n-2}. Isso completa a indução. Para $t > 0$, ponha $p = e^{-at}$ e $r = 1-p$, com $0 < r < 1$. As massas obtidas somam $p\sum_{n\geq 1} r^{n-1} = 1$. Além disso,

$$\mathbb{P}_1(Z_t \geq j) = \sum_{n=j}^{\infty} pr^{n-1} = r^{j-1}.$$

Pela fórmula da cauda para variáveis inteiras não negativas (Lema 2.13),

$$E_1 Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_1(Z_t \geq j) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{j-1} = \frac{1}{1-r} = e^{at}.$$

Não foi preciso trocar uma derivada com uma série. Em $t = 0$, o valor é $Z_0 = 1$, e a fórmula da média continua válida.

Com k indivíduos iniciais, separe as famílias descendentes de cada um. Os relógios são independentes entre famílias; cada família segue uma cópia do processo iniciado em um indivíduo. A soma dessas k populações tem taxa total de nascimento an quando o total é n, reproduzindo a construção do processo iniciado em k. A linearidade de uma soma finita de esperanças dá $E_k Z_t = ke^{at}$. ■

Exemplo 6.21 — Média de crescimento e chance de dobrar.

Se a taxa por indivíduo é $a = \log 2$ por dia e começamos com um indivíduo, então $E_1 Z_1 = 2$. A população no fim do primeiro dia, entretanto, não é necessariamente igual a dois. Pela proposição,

$$\mathbb{P}_1(Z_1 = n) = 2^{-n}, \qquad n \geq 1.$$

Assim, a chance de não ter ocorrido nenhum nascimento é $1/2$, a de haver exatamente dois indivíduos é $1/4$, e a de haver pelo menos dois é $1 - 1/2 = 1/2$. A média dois combina trajetórias que ainda têm um indivíduo com outras que já possuem vários. Um tempo de duplicação da média não é um prazo de duplicação de cada trajetória.

◁

6.7.2 Atendimento imediato e a fila $M/M/\infty$

Imagine um serviço em que cada chegada inicia seu atendimento imediatamente. Pode representar um conjunto de tarefas executadas em paralelo quando não há uma restrição relevante de vagas. A expressão "infinitos servidores" especifica essa regra matemática: não há espera por um atendente. O estado ainda conta quantos clientes estão no sistema.

Exemplo 6.22 — Uma população de clientes com distribuição de Poisson.

Suponha chegadas de Poisson de taxa $\lambda > 0$ e serviços exponenciais independentes de taxa $\mu > 0$, também independentes das chegadas. Quando há n clientes, os n serviços em curso competem; portanto,

$$q(n, n+1) = \lambda \quad (n \geq 0), \qquad q(n, n-1) = n\mu \quad (n \geq 1).$$

A taxa de saída é ilimitada quando n cresce, mas isso não produz explosão. Até um instante t, o número $A(t)$ de chegadas é finito quase certamente. Começando com $n_0 < \infty$ clientes, o número de conclusões de serviço não pode exceder $n_0 + A(t)$. Logo, o número total de mudanças até t é no máximo $n_0 + 2A(t)$ e também é finito.

Podemos descobrir a distribuição de X_t separando duas origens dos clientes presentes: os que já estavam no sistema no instante zero e os que chegaram depois. Fixe $t > 0$ e escreva

$$p = e^{-\mu t}, \qquad a = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Cada cliente inicial permanece até t com probabilidade p, independentemente dos demais. O número B_t de sobreviventes iniciais tem, portanto, distribuição Binomial(n_0, p).

Para contar os clientes que chegaram depois de zero, condicione no total $A(t) = m$. Pelo Teorema 5.15, os instantes das chegadas são uniformes no intervalo, colocados em ordem. Como queremos apenas um total de sobreviventes, podemos primeiro usar m uniformes independentes, atribuir serviços independentes a esses clientes e depois ordenar os instantes; a ordenação não altera o total. Um cliente que chega em s ainda está presente em t com probabilidade $e^{-\mu(t-s)}$. A probabilidade média, para uma chegada uniforme em $[0, t]$, é

$$\bar{p}_t = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\mu(t-s)}\,ds = \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu t}.$$

Os pares formados pelo instante uniforme e pelo serviço são independentes entre clientes. Assim, condicionado a $A(t) = m$, o número C_t desses clientes ainda presentes é binomial com parâmetros m e $\bar{p}_t$. Afinar a contagem de Poisson de média λt dá

$$C_t \sim \text{Poisson}(\lambda t \bar{p}_t) = \text{Poisson}\big(a(1-p)\big).$$

Os serviços dos clientes iniciais são independentes das novas chegadas e de seus serviços; logo, B_t e C_t são independentes. Obtivemos a descrição completa

$$\boxed{\begin{array}{c} X_t = B_t + C_t, \qquad B_t \text{ e } C_t \text{ independentes}, \\ B_t \sim \text{Binomial}(n_0, e^{-\mu t}), \\ C_t \sim \text{Poisson}\big(a(1 - e^{-\mu t})\big). \end{array}}$$

Em particular,

$$E_{n_0} X_t = n_0 e^{-\mu t} + a(1 - e^{-\mu t}).$$

O primeiro termo mede o que resta da população inicial. O segundo mede os clientes recebidos desde o início que ainda estão em serviço.

Agora podemos verificar o equilíbrio de duas maneiras. As taxas $\lambda > 0$ e $n\mu > 0$ permitem percorrer qualquer trecho finito de estados vizinhos; portanto, a cadeia é irredutível. Os pesos de nascimento e morte são $w_n = a^n/n!$, e sua soma é e^a. Pelo Teorema 6.9,

$$\pi(n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \qquad n \geq 0,$$

é estacionária. Também podemos começar com um número inicial $X_0 \sim \text{Poisson}(a)$, independente de todos os relógios futuros. O afinamento dos clientes iniciais dá $B_t \sim \text{Poisson}(ap)$; os novos sobreviventes têm lei $\text{Poisson}(a(1-p))$, independentemente de B_t. A soma volta a ser $\text{Poisson}(a)$ para todo t.

Partindo de um n_0 fixado, essa distribuição também é o limite. Para cada $k \geq 0$, a independência dá a soma finita

$$\mathbb{P}_{n_0}(X_t = k) = \sum_{j=0}^{\min(n_0,k)} \mathbb{P}(B_t = j)\mathbb{P}(C_t = k - j).$$

Quando $t \to \infty$, $p \to 0$, de modo que a parcela $j = 0$ tende a $e^{-a}a^k/k!$ e as demais tendem a zero. Isso prova a convergência sem trocar uma soma infinita com um limite. A estacionária é única: se outra estacionária ν existisse, escolheríamos primeiro um conjunto finito de estados iniciais com massa de ν maior que $1-\varepsilon$. Nesse conjunto a convergência pode passar pela soma finita. Mais explicitamente, para esse conjunto F,

$$\begin{aligned} |\nu(k) - \pi(k)| &\leq \sum_{n\in F} \nu(n)|P_t(n,k) - \pi(k)| + \sum_{n\notin F} \nu(n)|P_t(n,k) - \pi(k)| \\ &\leq \sum_{n\in F} \nu(n)|P_t(n,k) - \pi(k)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

A soma finita tende a zero. Como ε é arbitrariamente pequeno, a identidade $\nu P_t = \nu$ dá $\nu(k) = \pi(k)$ para todo k.

Por fim, o número médio em equilíbrio é $a = \lambda/\mu$, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-a} \frac{a^n}{n!} = a \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^m}{m!} = a.$$

Ao contrário de uma fila com um número fixo de atendentes, o modelo não impõe um limite à taxa total de serviço: ela cresce com o número de clientes presentes. Por isso há equilíbrio para quaisquer taxas positivas de chegada e de serviço.

◁

6.8 Exercícios

Os primeiros problemas trabalham relógios, geradores, probabilidades e equilíbrio. Em seguida, os modelos da oficina e das populações pedem escolher o estado e explicar o efeito de uma mudança nas hipóteses. As taxas devem usar unidades compatíveis; toda conclusão deve ser acompanhada da propriedade que a justifica.

6.8.1 Relógios, taxas e equilíbrio

Exercício 6.1 — Dois componentes e uma falha do sistema

Dois componentes independentes têm vidas exponenciais com taxas $1/4$ e $1/6$ por ano. O sistema para quando ambos falham. Encontre a distribuição e a média de sua vida M. Calcule a probabilidade de o primeiro componente falhar antes do segundo. Use $\max(S,T) = S+T-\min(S,T)$ como conferência da média.

Exercício 6.2 — Gerador, permanência e fluxo

Um equipamento alterna entre três modos, com gerador por hora

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Descreva as esperas e os destinos dos primeiros saltos. Calcule a distribuição estacionária, verifique se há reversibilidade e obtenha a taxa média

de transições de 1 para 2 em equilíbrio. Por que $q(1,2) = 2$ não pode ser interpretado como probabilidade de transição em uma hora?

Exercício 6.3 — Kolmogorov, uniformização e ocupação

Uma máquina passa de funcionamento (1) a reparo (2) à taxa 2 por hora e retorna à taxa 3 por hora. Partindo de 1, calcule $P_t(1,2)$ e

$$E_1 \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s=1\}}\, ds.$$

Uniformize com um relógio de taxa 5 por hora. Escreva U e explique por que a espera entre mudanças reais de estado não é sempre exponencial de taxa 5.

Exercício 6.4 — Duas máquinas e um reparador

Duas máquinas falham independentemente à taxa $1/8$ por dia quando estão funcionando. Um reparador atende uma máquina por vez, com serviços exponenciais de taxa $1/2$ por dia. Todos os relógios são independentes. Usando o número de máquinas em funcionamento, escreva o gerador e calcule a distribuição estacionária, o número médio de máquinas em funcionamento e a fração de tempo em que o reparador trabalha.

Exercício 6.5 — Saída e tempo de ocupação

Nos estados internos de $\{0,1,2,3,4\}$, uma cadeia salta para cada vizinho à taxa 2 por hora. Os extremos são absorventes. Partindo de 1, calcule a probabilidade de absorção em 4, o tempo médio até a absorção e o tempo total esperado passado em cada estado interno. Confira que os tempos de ocupação somam o tempo de saída.

Exercício 6.6 — Recusas em um atendimento limitado

Chegadas exógenas Poisson têm taxa 6 por hora e um atendente presta serviços exponenciais de taxa 8 por hora, independentemente das chegadas. Cabem no máximo três clientes, incluindo o que está em serviço. Determine a distribuição estacionária, a fração de tentativas recusadas, a taxa de clientes atendidos e o número médio de clientes. Compare este último com o de uma fila sem limite de capacidade. Identifique a hipótese que permite usar PASTA.

Exercício 6.7 — O caso crítico da fila

Na fila $M/M/1$ com $\lambda, \mu > 0$, classifique a recorrência quando $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ e $\lambda > \mu$. Use a cadeia de saltos e o passeio entre barreiras para provar o retorno quase certo no caso crítico. Explique por que ausência de distribuição estacionária, sozinha, não distinguiria recorrência nula de transiência.

Exercício 6.8 — Infinitos servidores e observação dos saltos

As chegadas a um sistema são Poisson de taxa 4 por hora. Cada cliente é atendido imediatamente e permanece um tempo exponencial de taxa 2 por hora, independentemente dos demais. Mostre que o número de clientes tem taxas $q(n, n+1) = 4$ e $q(n, n-1) = 2n$. Justifique a não explosão e encontre sua estacionária π. A distribuição nos instantes de salto é proporcional a $(4+2n)\pi(n)$. Normalize-a e verifique o balanço detalhado da cadeia de saltos. Por que ela difere da distribuição vista em um instante fixo?

Exercício 6.9 — Uma mudança de relógio

Multiplique todas as taxas de uma cadeia não explosiva por $c > 0$. Relacione a nova trajetória à original por uma mudança de tempo. Quais destas quantidades mudam: distribuição estacionária, probabilidades de saída, duração média até uma fronteira e distribuição da cadeia de saltos? Dê as relações exatas quando as médias forem finitas.

6.8.2 Modelagem e variações dos exemplos

Os problemas seguintes retomam os modelos descritivos da abertura. Antes de calcular, explique por que os estados escolhidos conservam a informação necessária e indique a unidade de cada taxa.

Exercício 6.10 — A primeira mudança e o desligamento

No Exemplo 6.8, tome $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\mu = 2$ por dia, partindo de A. Calcule a média da espera pela primeira mudança e a probabilidade de essa mudança deixar apenas a máquina 1 funcionando. Encontre, por análise de primeiro passo, o tempo médio até o desligamento definitivo. Justifique previamente por que essa média é finita. Compare as duas médias e explique quais eventos a primeira conta deixa de acompanhar.

Exercício 6.11 — Máquinas iguais, reparos diferentes

Modifique o Exemplo 6.8: as duas taxas de falha são iguais a $\lambda > 0$, mas reparar a máquina 1 tem taxa $\mu_1 > 0$ e reparar a máquina 2 tem taxa $\mu_2 > 0$. O desligamento continua definitivo se ambas falharem. Escreva o gerador nos estados (A, B, C, F). Partindo de A, obtenha a sobrevivência do tempo da primeira permanência com uma só máquina funcionando. Se $\mu_1 \neq \mu_2$, o número de máquinas funcionando é uma cadeia homogênea de Markov? Justifique usando a falta de memória, em vez de apenas comparar os nomes dos estados.

Exercício 6.12 — A etapa muda antes de o carro sair

Na oficina do Exemplo 6.9, tome $\lambda = 1$, $\mu_F = 2$ e $\mu_P = 4$ por hora. Comece com um único carro, no início da funilaria. Calcule a probabilidade de esse carro sair antes de chegar outro. Calcule também o tempo médio até que o *número* de carros mude pela primeira vez. Por que esse tempo não tem simplesmente média $1/(\lambda + \mu_F)$?

Exercício 6.13 — Duas vagas na oficina

A oficina anterior admite no máximo dois carros, incluindo o que está em atendimento. Chegadas que encontram duas vagas ocupadas são recusadas. Mantenha as taxas $(\lambda, \mu_F, \mu_P) = (1, 2, 4)$ por hora. Escreva o gerador na ordem $0, (1, F), (1, P), (2, F), (2, P)$ e encontre a distribuição estacionária. Qual é a probabilidade de duas vagas ocupadas em equilíbrio? As tentativas recusadas entram na diagonal do gerador como mudanças de estado? Explique.

Exercício 6.14 — Média constante antes do equilíbrio

Numa fila $M/M/\infty$, as taxas são $\lambda = 6$ por hora e $\mu = 2$ por hora. Há exatamente três clientes no instante zero. Para $t = (\log 2)/2$ hora, encontre a distribuição de X_t como soma de variáveis independentes. Calcule $\mathbb{P}(X_t = 0)$, $E(X_t)$ e $\mathrm{Var}(X_t)$. A média já é igual à média estacionária: isso basta para que a distribuição esteja em equilíbrio?

Exercício 6.15 — Duas famílias no processo de Yule

Um processo de Yule começa com dois indivíduos e cada indivíduo produz um novo à taxa $a > 0$. Usando a independência das famílias, obtenha $\mathbb{P}_2(Z_t = n)$ para $n \geq 2$ e $t > 0$. Para $t = (\log 2)/a$, calcule $\mathbb{P}_2(Z_t \geq 5)$. Encontre o tempo médio para a população atingir cinco indivíduos e compare-o com o instante em que a população *média* atinge cinco.

6.9 Redes de filas*

Uma requisição pode passar por autenticação, consultar um banco de dados e executar um processamento antes de sair. Se parte delas retorna a uma etapa anterior, quantas visitas cada servidor recebe por requisição externa? Essa contabilidade vem antes de qualquer cálculo de congestionamento.

Definição 6.11 — Uma rede aberta de filas

Considere K estações, cada uma com um servidor e espaço ilimitado de espera. Na estação i, as chegadas externas formam um processo de Poisson de taxa $\lambda_i \geq 0$, e cada visita exige um serviço exponencial de taxa $\mu_i > 0$, atendido por ordem de chegada. Ao terminar em i, o cliente segue para j com probabilidade R_{ij} ou sai da rede com probabilidade

$$r_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{K} R_{ij} \geq 0.$$

As chegadas externas são independentes entre estações. Tempos de serviço de todas as visitas e decisões de roteamento são independentes entre si e das chegadas. As taxas e probabilidades são fixas, sem depender dos comprimentos das filas. Não há bloqueio, perda de clientes nem classes com serviços distintos. Para simplificar a notação, tomamos $R_{ii} = 0$.

A matriz R é subestocástica: a massa que falta em cada linha representa a saída da rede. Aqui R roteia *clientes entre estações*; não é a matriz da cadeia de saltos do vetor de comprimentos das filas. Suponha que, de toda estação, exista um caminho de roteamento com probabilidade positiva até a saída. Como K é finito, há um número de serviços e uma probabilidade positiva uniformes para sair: tentativas repetidas mostram que $R^n \to 0$ com uma cota geométrica. Assim,

$$(I - R)^{-1} = I + R + R^2 + \cdots$$

existe. Equivalentemente, o raio espectral de R é menor que 1.

As *taxas efetivas de chegada* γ_i contam todas as visitas, inclusive retornos. A conservação do fluxo requer as equações de tráfego

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_i \gamma_i R_{ij}, \qquad \text{ou} \qquad \gamma = \lambda + \gamma R,$$

com vetores-linha. Portanto,

$$\gamma = \lambda(I - R)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \lambda R^n.$$

O termo λR^n conta visitas depois de n encaminhamentos. A fórmula calcula a demanda média que cada estação deverá sustentar; não afirma, por si só, que a rede suporte essa demanda.

Teorema 6.14 — Forma produto de Jackson para estações $M/M/1$

Sob as hipóteses acima, suponha ainda que toda estação possa ser alcançada a partir de alguma chegada externa de taxa positiva. Se

$$\gamma_i < \mu_i \quad \text{para todo } i, \qquad \rho_i = \gamma_i/\mu_i,$$

a cadeia $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^K)$ dos números de clientes nas estações é irredutível, não explosiva e positivamente recorrente. Sua única distribuição estacionária é

$$\pi(n_1, \dots, n_K) = \prod_{i=1}^{K} (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}, \qquad n_i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Em equilíbrio, os comprimentos das filas em um mesmo instante são independentes, e $E_\pi X^i = \rho_i/(1-\rho_i)$. Nessas condições de acessibilidade, se alguma $\gamma_i \geq \mu_i$, a rede não tem distribuição estacionária de probabilidade.

A forma produto foi estabelecida por Jackson (1957); Kelly (1979) desenvolve suas relações com redes estocásticas. A prova a seguir explicita o balanço global. Ao contrário do caso de uma única fila de nascimento e morte, os fluxos não precisam se compensar par a par.

Demonstração. **Primeiro passo: construção e acessibilidade.** Escreva $n = (n_1, \dots, n_K)$ e denote por e_i o vetor unitário da estação i. As transições possíveis são

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow n + e_i && \text{à taxa } \lambda_i, && \text{chegada externa,} \\ n &\longrightarrow n - e_i && \text{à taxa } \mu_i r_{i0}, && n_i > 0, \\ n &\longrightarrow n - e_i + e_j && \text{à taxa } \mu_i R_{ij}, && n_i > 0, \quad j \neq i. \end{aligned}$$

Se mais de um mecanismo leva ao mesmo destino, somamos suas taxas. A

taxa total é limitada por $\sum_i \lambda_i + \sum_i \mu_i$. A uniformização fornece, portanto, uma construção não explosiva.

De todo vetor n é possível chegar ao vetor vazio: escolhemos um cliente e o encaminhamos por um caminho de roteamento até a saída, repetindo o procedimento para os demais. Cada passo desse caminho tem taxa positiva, e podemos exigir a ausência de chegadas externas e das outras conclusões de serviço durante essa sequência finita. Reciprocamente, a hipótese de acessibilidade a partir de uma chegada externa permite acrescentar um cliente a qualquer estação escolhida. Basta realizar uma chegada numa estação de taxa externa positiva e conduzi-la por um caminho até a estação desejada, sem realizar outros eventos. Nos estados intermediários, o incremento e o decremento do número de clientes se compensam; apenas a estação de destino ganha uma unidade. Repetir essas operações constrói qualquer vetor de comprimentos de fila. Toda sequência finita de eventos assim prescrita tem probabilidade positiva. Logo, a cadeia é irredutível.

Como de alguma chegada externa se alcança cada estação, a série $\gamma = \sum_{m\geq 0} \lambda R^m$ também mostra que $\gamma_i > 0$ para todo i. Sob a hipótese $\gamma_i < \mu_i$, temos então $0 < \rho_i < 1$.

Segundo passo: normalização e balanço. A candidata do enunciado é positiva e soma um, pois há apenas K coordenadas e cada fator é a massa de uma distribuição geométrica:

$$\sum_{n_1,\dots,n_K\geq 0} \pi(n_1,\dots,n_K) = \prod_{i=1}^{K} \left[(1-\rho_i) \sum_{m\geq 0} \rho_i^m \right] = 1.$$

Fixe um vetor n. Podemos entrar nele por uma chegada externa a partir de $n - e_j$, por uma saída da rede a partir de $n + e_i$ ou por uma transferência de i para j a partir de $n + e_i - e_j$. Nos casos que exigem $n_j > 0$, essa condição exclui coordenadas negativas. As razões das massas são

$$\frac{\pi(n-e_j)}{\pi(n)} = \rho_j^{-1}, \qquad \frac{\pi(n+e_i)}{\pi(n)} = \rho_i, \qquad \frac{\pi(n+e_i-e_j)}{\pi(n)} = \frac{\rho_i}{\rho_j}.$$

Assim, o fluxo total de entrada, dividido por $\pi(n)$, é

$$\sum_j \frac{\lambda_j}{\rho_j} \mathbf{1}_{\{n_j>0\}} + \sum_i \mu_i r_{i0} \rho_i + \sum_{i,j} \mu_i R_{ij} \frac{\rho_i}{\rho_j} \mathbf{1}_{\{n_j>0\}}.$$

Como $\mu_i \rho_i = \gamma_i$, agrupamos os termos que contêm a mesma indicadora e aplicamos as equações de tráfego:

$$\frac{\lambda_j + \sum_i \gamma_i R_{ij}}{\rho_j} = \frac{\gamma_j}{\rho_j} = \mu_j.$$

Somar as mesmas equações em j dá

$$\sum_i \gamma_i r_{i0} = \sum_j \lambda_j.$$

Portanto, o fluxo de entrada dividido por $\pi(n)$ se reduz a

$$\sum_j \mu_j \mathbf{1}_{\{n_j > 0\}} + \sum_j \lambda_j,$$

que é exatamente a taxa total de saída de n. Isso prova $\pi Q = 0$. Como as taxas são limitadas, o Lema 6.6 garante que π é estacionária.

Terceiro passo: recorrência e médias. Escolha na uniformização uma taxa estritamente maior que a cota das taxas de saída. A cadeia discreta uniformizada é irredutível e tem a mesma estacionária π. Pelo resultado dos capítulos anteriores para cadeias enumeráveis, ela é positivamente recorrente e sua estacionária é única. Para passar à noção de retorno em tempo contínuo, fixemos um estado a. A espera até a saída real de a tem média finita, e há apenas um número finito de destinos possíveis para esse salto, pois o número de estações é finito. De cada destino $b \neq a$, a cadeia uniformizada atinge a em um número médio finito de passos, pela recorrência positiva discreta. Cada passo consome uma espera independente de média igual ao inverso da taxa de uniformização. O tempo físico médio até atingir a a partir de b é, portanto, finito. Somar a espera inicial e a média sobre os finitos destinos prova que o retorno depois de uma saída real também tem média finita. A cadeia em tempo contínuo é, assim, positivamente recorrente. Qualquer outra estacionária em tempo contínuo satisfaria $\nu Q = 0$ e, portanto, seria estacionária para a mesma matriz uniformizada; logo, coincidiria com π. A fatoração de π prova a independência dos comprimentos num instante em equilíbrio. A média geométrica já calculada para a fila $M/M/1$ fornece $E_\pi X^i = \rho_i/(1-\rho_i)$.

Quarto passo: necessidade da condição de carga. Suponha agora que exista alguma distribuição estacionária ν, sem admitir de antemão a forma

produto. Defina a taxa média de serviços concluídos na estação i por

$$d_i = \mu_i \, \mathbb{P}_\nu(X^i > 0).$$

Vamos justificar a conservação dessas taxas sem supor finita a média do comprimento das filas. Para cada inteiro $M \geq 1$, use a função limitada $f_M(n) = \min(n_j, M)$. A estacionariedade e a expansão uniforme $P_h = I + hQ + O(h^2)$ dão $E_\nu(Qf_M) = 0$. Quando $n_j < M$, uma chegada externa ou uma transferência para j aumenta f_M em um. Quando $1 \leq n_j \leq M$, uma conclusão de serviço em j a reduz em um: usamos aqui $R_{jj} = 0$, pois o cliente sai da rede ou segue para outra estação. A taxa total dessas reduções é, portanto, μ_j. Assim,

$$0 = \lambda_j \mathbb{P}_\nu(X^j < M) + \sum_i \mu_i R_{ij} \mathbb{P}_\nu(X^i > 0,\ X^j < M) - \mu_j \mathbb{P}_\nu(1 \leq X^j \leq M).$$

Ao fazer $M \to \infty$, cada probabilidade converge pela continuidade em sequências crescentes de eventos. As somas têm apenas K termos e as taxas são finitas; obtemos

$$d_j = \lambda_j + \sum_i d_i R_{ij}.$$

A abertura do roteamento garante que $I - R$ é invertível, logo a única solução dessas equações é $d = \gamma$.

Finalmente, a irredutibilidade implica que qualquer estacionária atribui massa positiva a todo estado. De fato, se $\nu(a) > 0$, a positividade de $P_t(a, b)$ e a identidade $\nu P_t = \nu$ dão $\nu(b) > 0$. Em particular, o vetor vazio tem massa positiva e $\mathbb{P}_\nu(X^j = 0) > 0$. Portanto,

$$\gamma_j = d_j = \mu_j \mathbb{P}_\nu(X^j > 0) < \mu_j \quad \text{para toda estação } j.$$

Se alguma $\gamma_j \geq \mu_j$, chegamos a uma contradição. Isso prova a inexistência de uma distribuição estacionária nesse caso. ∎

O caso de duas estações em série permite conferir o balanço geral com apenas três mecanismos de entrada.

Verificação em duas estações em série. Chegadas externas de taxa $\lambda > 0$ ocorrem apenas na estação 1; toda saída de 1 entra em 2 e toda saída de 2 deixa a rede. Então $\gamma = (\lambda, \lambda)$. Suponha $\lambda < \min(\mu_1, \mu_2)$ e ponha $\rho_i = \lambda/\mu_i$. A candidata $\pi(m,n) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^m \rho_2^n$ soma 1.

Há três formas de entrar em (m,n): uma chegada a partir de $(m-1,n)$, um serviço em 1 a partir de $(m+1,n-1)$ e um serviço em 2 a partir de $(m,n+1)$. Dividindo o fluxo de entrada por $\pi(m,n)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\lambda \rho_1^{-1} \mathbf{1}_{\{m>0\}} + \mu_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \mathbf{1}_{\{n>0\}} + \mu_2 \rho_2 \\ &\qquad = \mu_1 \mathbf{1}_{\{m>0\}} + \mu_2 \mathbf{1}_{\{n>0\}} + \lambda. \end{aligned}$$

Esse é exatamente o fluxo de saída dividido por $\pi(m,n)$. As indicadoras tratam também as bordas $m=0$ e $n=0$, sem recorrer a estados negativos. Logo $\pi Q = 0$; como as taxas são limitadas, isso garante estacionariedade. ■

A forma produto descreve uma fotografia em equilíbrio. Não torna independentes as trajetórias das filas: a saída de uma alimenta a outra. Também não implica balanço detalhado, pois a transferência $(m,n) \to (m-1,n+1)$ da rede em série não possui uma transferência direta inversa.

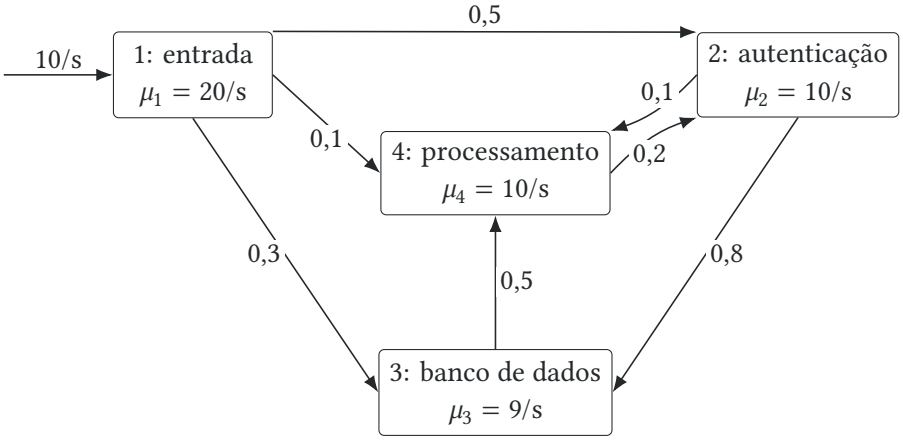


Figura 6.6: Roteamento da API. As setas internas indicam probabilidades após um serviço; a entrada e os serviços têm taxas por segundo. As probabilidades de saída são 0,1, 0,1, 0,5 e 0,8, nas estações 1 a 4.

Exemplo 6.23 — Uma API com retornos entre etapas.

Retomemos a API da abertura, com o roteamento da Figura 6.6. As estações são 1 = entrada da API, 2 = autenticação, 3 = banco de dados e 4 = processamento. As taxas, medidas por segundo, e as probabilidades de roteamento são

$$\lambda = (10, 0, 0, 0), \qquad \mu = (20, 10, 9, 10), \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, metade das requisições que terminam a entrada segue para autenticação, e 20% das que terminam o processamento voltam à autenticação. A probabilidade de saída é o que falta para completar cada linha.

As equações são

$$\gamma_1 = 10, \qquad \gamma_2 = 5 + 0{,}2\gamma_4,$$
$$\gamma_3 = 3 + 0{,}8\gamma_2, \quad \gamma_4 = 1 + 0{,}1\gamma_2 + 0{,}5\gamma_3.$$

Substituindo a terceira na quarta, resulta $\gamma_4 = 2{,}5 + 0{,}5\gamma_2$. Logo $0{,}9\gamma_2 = 5{,}5$ e

$$\gamma = (10, 55/9, 71/9, 50/9), \qquad \rho = (1/2, 11/18, 71/81, 5/9).$$

A rede é estável, mas o banco de dados é o gargalo: sua utilização é $71/81 \approx 0{,}877$, e o número médio de clientes nessa estação, incluindo o que está em serviço, é

$$E_\pi X^3 = \frac{71/81}{1 - 71/81} = 7{,}1.$$

Se a entrada externa crescer 20% com o mesmo roteamento, todas as taxas γ_i crescem 20%. O banco passa a receber $142/15 > 9$ visitas por segundo: a rede perde estabilidade embora a estação de entrada ainda tenha capacidade disponível.

◁

Para confrontar a rede com dados reais, é importante distinguir o tempo de espera do tempo de serviço. Um registro útil identifica cada requisição e os instantes em que ela chega, começa a ser atendida e termina o atendimento em cada estação. Com esses dados, a taxa externa λ_i pode ser estimada

dividindo as chegadas pelo tempo de observação, e R_{ij} pela proporção de serviços que encaminham o cliente de i para j. As saídas da rede também precisam ser contabilizadas. Já μ_i é estimada por serviços concluídos divididos pelo tempo em que o servidor esteve ocupado: incluir o tempo de espera nesse denominador confundiria congestionamento com velocidade de serviço.

O passo seguinte é comparar a ocupação e os comprimentos de fila previstos com os registros de um período posterior, verificando também se as durações dos serviços se aproximam da lei exponencial. Um cache pode evitar etapas inteiras; o processamento em lotes, as prioridades e os limites de conexão podem mudar a dinâmica de atendimento. Tempos de serviço muito variáveis também enfraquecem a hipótese exponencial. A forma produto é um resultado exato para o modelo especificado, mas sua aplicação a uma arquitetura real depende de essas escolhas representarem adequadamente o sistema.

6.10 PASTA: demonstração por ciclos*

Retomemos a fila com capacidade $K \geq 1$, tentativas de chegada Poisson de taxa $\lambda > 0$ e um servidor exponencial de taxa $\mu > 0$. Vamos justificar por que a fração de tentativas recusadas tende a $\pi(K)$ quase certamente. O argumento emprega apenas a construção por relógios e a lei forte dos grandes números para variáveis independentes.

Convergência da fração de recusas. Comece com o sistema vazio. Um *ciclo* começa em uma visita ao estado 0 e termina na próxima volta a 0 depois de pelo menos uma chegada. Ao retornar a 0, todos os relógios relevantes recomeçam, pela falta de memória e pelas independências do modelo. As durações dos ciclos, as contagens de tentativas e as contagens de recusas formam, portanto, sequências de variáveis aleatórias i.i.d. por ciclos.

Cada ciclo tem duração média finita. De qualquer estado ocupado, existe probabilidade positiva, limitada abaixo uniformemente nos K estados ocupados, de chegar a 0 em no máximo K mudanças: basta que ocorram serviços sucessivos sem novas chegadas aceitas. Repetindo tentativas em blocos de K mudanças, obtemos uma cauda geométrica para o número de mudanças até esvaziar a fila. Cada espera entre mudanças tem média no máximo

$1/\min\{\lambda, \mu\}$; logo, o tempo médio do ciclo é finito.

Dentro de um ciclo, denote por D sua duração, por O_i o tempo total no estado i, por V_i o número de permanências nesse estado, por A o total de tentativas de chegada e por R o total de recusas. As taxas de mudança *real* de estado são

$$\delta_0 = \lambda, \qquad \delta_i = \lambda + \mu \ (1 \le i < K), \qquad \delta_K = \mu.$$

Em cada visita a i, a permanência tem média $1/\delta_i$; a escolha do destino é independente dessa espera. Há um cuidado ao somar essas contribuições: o número de visitas é aleatório. Para cada $r \ge 1$, o evento de ocorrer uma r-ésima visita já está decidido antes dos sorteios dessa visita. Sua contribuição esperada é, portanto, $\mathbb{P}(V_i \ge r)/\delta_i$. Somando em r, obtemos

$$EO_i = \frac{EV_i}{\delta_i}, \qquad ED = \sum_{i=0}^{K} EO_i < \infty.$$

Da mesma forma, o número esperado de transições reais de i para j durante o ciclo é

$$EV_i \, \frac{q(i,j)}{\delta_i} = q(i,j)\, EO_i.$$

O ciclo começa e termina em 0, de modo que, para cada estado j, as entradas e saídas ocorrem no mesmo número. Tomando esperanças,

$$\sum_{i \ne j} q(i,j) EO_i = \delta_j EO_j.$$

Logo, os pesos $w_i = EO_i$ satisfazem $wQ = 0$. Ao normalizá-los pela soma ED, obtemos uma distribuição estacionária. Como a fila finita é irredutível, essa distribuição é a única estacionária π. Portanto,

$$\frac{EO_K}{ED} = \pi(K).$$

Agora contemos as tentativas de chegada segundo o estado encontrado *imediatamente antes* de cada tentativa. Os mecanismos são diferentes no interior da fila e quando ela está cheia.

Se $i < K$, uma chegada é aceita e encerra a permanência em i. A visita contribui com uma tentativa se termina por chegada e com zero se termina

por serviço. Essa contagem é Bernoulli de parâmetro λ/δ_i, incluindo o caso $i = 0$, em que o parâmetro é um.

Em $i = K$, uma tentativa é recusada e não produz salto da cadeia. A mesma permanência pode, portanto, conter várias recusas. Sua duração S é exponencial de taxa μ, independente das tentativas de chegada. Condicionada a $S = s$, a contagem de recusas tem lei Poisson(λs), com média λs. Sem condicionar na duração, ela é geométrica em $\mathbb{N}_0$: contamos chegadas antes do primeiro serviço, pelo mesmo argumento do Exemplo 5.9. Em particular, sua média é

$$\lambda ES = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\delta_K}.$$

Assim, embora as contagens por visita tenham leis diferentes, sua média é λ/δ_i nos dois casos. Somando por visitas, com a mesma justificativa usada para os tempos de ocupação, obtemos

$$EA = \lambda \sum_{i=0}^{K} EO_i = \lambda ED, \qquad ER = \lambda EO_K.$$

Assim,

$$\frac{ER}{EA} = \frac{EO_K}{ED} = \pi(K).$$

Para os primeiros m ciclos completos, a lei forte dos grandes números dá

$$\frac{R_1 + \cdots + R_m}{A_1 + \cdots + A_m} \longrightarrow \frac{ER}{EA} = \pi(K) \quad \text{quase certamente.}$$

O número de ciclos completos até o instante t tende a infinito quando $t \to \infty$, pois os ciclos têm duração média finita e positiva. Se m ciclos terminaram até t, as contagens crescentes de tentativas e recusas permitem limitar a razão $R(t)/A(t)$ entre

$$\frac{R_1 + \cdots + R_m}{A_1 + \cdots + A_{m+1}} \quad \text{e} \quad \frac{R_1 + \cdots + R_{m+1}}{A_1 + \cdots + A_m}.$$

Ambos os extremos têm o mesmo limite $\pi(K)$. Isso estende a convergência a todo $t \to \infty$. Se a fila começa ocupada, basta descartar o trecho inicial até sua primeira visita a 0, que é finito quase certamente. ∎

6.11 Modelo de Jukes–Cantor*

A uniformização também aparece em modelos de evolução molecular. Neste exemplo, um mesmo sítio pode sofrer várias substituições, e a base observada no final não informa diretamente quantas mudanças ocorreram.

Exemplo 6.24 — Quatro nucleotídeos e substituições.

Considere os quatro nucleotídeos A, C, G, T. No modelo de Jukes–Cantor, cada base muda para cada uma das outras três à mesma taxa $\mu > 0$ por unidade de tempo. Assim, o gerador tem entradas μ fora da diagonal e -3μ na diagonal.

Podemos uniformizar a cadeia com um relógio de taxa 4μ: quando ele toca, escolhemos uniformemente uma das quatro bases, permitindo que a base sorteada seja a atual. Depois do primeiro toque, o estado é uniforme. Portanto,

$$P_t(x,y) = e^{-4\mu t}\mathbf{1}_{\{x=y\}} + \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\mu t}\right).$$

Em particular, a probabilidade de a base observada ser diferente da inicial é

$$f = \frac{3}{4}\left(1 - e^{-4\mu t}\right).$$

Se $v = 3\mu t$ é o número esperado de substituições reais por sítio, então, para $0 \le f < 3/4$,

$$v = -\frac{3}{4}\log\left(1 - \frac{4f}{3}\right).$$

O logaritmo corrige o fato de que várias substituições no mesmo sítio podem esconder umas às outras: observar uma diferença não é o mesmo que contar todas as mudanças ocorridas.

◁

O modelo foi proposto por Jukes e Cantor (1969) no estudo da evolução molecular.

6.12 Ramificação e imigração *

Uma população pode crescer por reprodução dos indivíduos presentes ou pela chegada de indivíduos de fora. Essa distinção altera o significado de encontrar a população vazia. Sem imigração, zero é absorvente; com imigração, novas chegadas podem repovoar o sistema. Estudaremos primeiro a reprodução e a morte e, depois, acrescentaremos a entrada externa.

6.12.1 Famílias que evoluem em seus próprios relógios

Retomemos o modelo do Exemplo 6.7. Cada indivíduo produz um novo indivíduo à taxa $\lambda > 0$ e morre à taxa $\mu > 0$, independentemente dos demais. Se Z_t é o tamanho da população, suas taxas são

$$q(n, n+1) = \lambda n, \qquad q(n, n-1) = \mu n, \qquad n \geq 1,$$

e zero é absorvente. Um nascimento aumenta o total em um, enquanto uma morte o diminui em um. Os tempos entre mudanças dependem do tamanho atual: com n indivíduos, há n pares de relógios competindo.

Há uma descrição equivalente que deixa a árvore de descendência mais visível. Ponha $a = \lambda + \mu$. Cada indivíduo vive até tocar um relógio exponencial de taxa a. Nesse instante, é substituído por dois indivíduos com probabilidade λ/a ou por nenhum com probabilidade μ/a. A corrida de exponenciais justifica as probabilidades. Na primeira opção, substituir um por dois produz o mesmo aumento de uma unidade que um nascimento; na segunda, retirar o indivíduo produz a morte. Depois de uma substituição por dois, as duas famílias usam sorteios independentes e obedecem à mesma regra original.

Precisamos primeiro saber que essa construção não acumula infinitos eventos em tempo finito. Podemos construí-la dentro de uma árvore maior: nela, todo indivíduo vive um tempo exponencial de taxa a e é sempre substituído por dois. Essa população maior é um processo de Yule de taxa a. Marcamos inicialmente seu indivíduo. Quando um indivíduo marcado se divide, marcamos os dois filhos se o sorteio do modelo original indica nascimento; se indica morte, não marcamos nenhum. Filhos de indivíduos não marcados continuam sem marca. O número de indivíduos marcados tem as taxas de Z. Como o processo de Yule é não explosivo, pelo Exemplo 6.10, há apenas finitas divisões da árvore maior em cada intervalo limitado. O mesmo vale para os eventos da população marcada.

Essa construção fornece também duas estimativas que usaremos nas provas. Se Y é a população maior, iniciada em um indivíduo, então

$$0 \leq Z_t \leq Y_t, \qquad E(Y_t) = e^{at},$$

pela Proposição 6.13. Além disso, cada mudança de Z corresponde a uma divisão de Y. Para $h \geq 0$,

$$|Z_{t+h} - Z_t| \leq Y_{t+h} - Y_t.$$

A desigualdade conta eventos: cada mudança do total marcado tem módulo um, e cada divisão da árvore maior aumenta seu total em um. Tomando esperanças,

$$E|Z_{t+h} - Z_t| \le e^{a(t+h)} - e^{at}.$$

Em particular, a média de Z_t é finita e depende continuamente de t.

Proposição 6.15 — Geradora da população e primeiro evento
Para $0 \le s \le 1$, defina

$$F(t,s) = E_1[s^{Z_t}], \qquad 0^0 = 1.$$

Então a geradora a partir de k indivíduos é $F(t,s)^k$, e

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = \mu - (\lambda+\mu)F(t,s) + \lambda F(t,s)^2, \qquad F(0,s) = s.$$

Demonstração. Começando com k indivíduos, podemos acompanhar k famílias independentes, cada uma iniciada por um indivíduo. Seus tamanhos somam Z_t. A geradora de uma soma de variáveis independentes é o produto de suas geradoras; portanto, o produto tem k fatores iguais a $F(t,s)$.

Agora começamos com um indivíduo e condicionamos no instante U de seu primeiro evento. Se $U > t$, ainda há um indivíduo em t, contribuindo com s. Se o primeiro evento ocorre em $u \le t$, há duas possibilidades. A morte deixa população zero, contribuindo com 1 à geradora. Um nascimento deixa duas famílias independentes, que evoluem durante $t-u$ e contribuem com $F(t-u,s)^2$. A densidade de U é ae^{-au}; multiplicá-la pelas probabilidades μ/a e λ/a dá

$$F(t,s) = se^{-at} + \int_0^t e^{-au}\big[\mu + \lambda F(t-u,s)^2\big]\,du.$$

Todos os valores de F estão entre zero e um. Também há continuidade em t: se não ocorre evento entre t e $t+h$, os valores de s^Z são iguais; em qualquer trajetória sua diferença tem módulo no máximo um. Assim,

$$\begin{aligned}|F(t+h,s) - F(t,s)| &\le \mathbb{P}(\text{há evento de } Z \text{ entre } t \text{ e } t+h)\\ &\le E(Y_{t+h} - Y_t),\end{aligned}$$

e a última expressão tende a zero. A mesma estimativa, aplicada de $t-h$ a t, fornece continuidade à esquerda.

Na integral, faça $v = t - u$ e multiplique a identidade por e^{at}:

$$e^{at}F(t,s) = s + \int_0^t e^{av}\big[\mu + \lambda F(v,s)^2\big]\,dv.$$

O integrando agora é uma função contínua. Pelo teorema fundamental do cálculo, a derivada do lado direito é $e^{at}[\mu + \lambda F(t,s)^2]$. A regra do produto no lado esquerdo fornece

$$aF(t,s) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = \mu + \lambda F(t,s)^2,$$

que é a equação anunciada. Em $t = 0$, temos $Z_0 = 1$ e $F(0,s) = s$. ∎

A equação tem solução única entre as funções com valores em $[0,1]$ e com a condição inicial dada. Para conferir isso diretamente, sejam F e G duas soluções, com s fixado, e ponha $d(t) = F(t,s) - G(t,s)$. Subtrair as equações dá

$$d'(t) = \big[\lambda(F(t,s) + G(t,s)) - a\big]d(t), \qquad d(0) = 0.$$

Multiplicar pelo fator

$$\exp\left(-\int_0^t [\lambda(F(v,s) + G(v,s)) - a]\,dv\right)$$

produz uma função de derivada zero e valor inicial zero. Logo $d(t) = 0$. Essa verificação permite reconhecer uma solução calculada por separação de variáveis ou conferir uma fórmula candidata.

Proposição 6.16 — Média e extinção da população
Se $Z_0 = k \geq 1$, então

$$E_k Z_t = k e^{(\lambda-\mu)t}.$$

A probabilidade de extinção a partir de um indivíduo é

$$q = \begin{cases} 1, & \lambda \leq \mu, \\ \mu/\lambda, & \lambda > \mu, \end{cases}$$

e, a partir de k indivíduos, é q^k.

Demonstração. Para a média, começamos com um indivíduo e escrevemos $m(t) = E_1 Z_t$. Ela é finita e contínua pelas estimativas da árvore maior. Condicionar no primeiro evento, como na prova anterior, dá uma contribuição um se esse evento ainda não ocorreu, zero se ele é uma morte e duas médias $m(t-u)$ se ele é um nascimento. Portanto,

$$m(t) = e^{-at} + 2\lambda \int_0^t e^{-au} m(t-u)\, du.$$

Substituindo $v = t - u$ e multiplicando por e^{at},

$$e^{at} m(t) = 1 + 2\lambda \int_0^t e^{av} m(v)\, dv.$$

Podemos derivar essa integral porque seu integrando é contínuo. Obtemos $m'(t) = (2\lambda - a)m(t) = (\lambda - \mu)m(t)$ e $m(0) = 1$. A solução é $m(t) = e^{(\lambda-\mu)t}$. As k famílias independentes somam suas médias, dando a fórmula geral.

Para a extinção, olhemos para a árvore de descendência, esquecendo por um momento os comprimentos das vidas. Cada indivíduo tem zero filhos com probabilidade μ/a e dois com probabilidade λ/a. É uma árvore de Galton–Watson com geradora

$$f(s) = \frac{\mu}{a} + \frac{\lambda}{a} s^2.$$

O evento de extinção dessa árvore é o mesmo que o de extinção em tempo contínuo. Se a árvore é finita, as finitas vidas que a compõem terminam em

tempo finito quase certamente. Reciprocamente, se a população fica vazia em tempo finito, a não explosão garante que somente finitos indivíduos nasceram até esse instante; não haverá descendentes depois.

Pelo Teorema 4.11, q é o menor ponto fixo de f em $[0,1]$. A equação se fatora como

$$\lambda q^2 - (\lambda+\mu)q + \mu = (q-1)(\lambda q - \mu) = 0.$$

Se $\lambda \le \mu$, a outra raiz μ/λ é pelo menos um, e a menor raiz no intervalo é um. Se $\lambda > \mu$, essa raiz pertence a $(0,1)$ e é a menor. Finalmente, as k famílias precisam desaparecer para que o total desapareça; pela independência, a probabilidade é q^k. ■

Exemplo 6.25 — Uma população crítica pode crescer enquanto sobrevive.

Tome $\lambda = \mu = b > 0$ e $Z_0 = 1$. A média é $EZ_t = 1$ para todo t, mas a extinção eventual tem probabilidade um. Podemos enxergar as duas afirmações no mesmo cálculo. A probabilidade de já estar extinta em t é $q(t) = F(t,0)$. A equação da geradora dá

$$q'(t) = b(1-q(t))^2, \qquad q(0) = 0.$$

A função $q(t) = bt/(1+bt)$ satisfaz a equação e a condição inicial: sua derivada é $b/(1+bt)^2$, enquanto $1 - q(t) = 1/(1+bt)$. Pela unicidade verificada acima, essa é a solução. Logo,

$$\mathbb{P}(Z_t > 0) = \frac{1}{1+bt}.$$

Como $Z_t = 0$ no complemento desse evento, a esperança total fornece

$$1 = EZ_t = \mathbb{P}(Z_t>0)E(Z_t \mid Z_t > 0),$$

e, portanto, $E(Z_t \mid Z_t > 0) = 1 + bt$. Entre as populações que ainda sobrevivem, o tamanho médio aumenta; a probabilidade de pertencer a esse grupo diminui na proporção inversa.

◁

6.12.2 Quando chegam indivíduos de fora

Suponha agora que novos indivíduos cheguem por um processo de Poisson de taxa $\nu > 0$, independente dos nascimentos e mortes da população. As taxas passam a ser

$$b_n = \lambda n + \nu, \qquad d_n = \mu n, \quad n \geq 0,$$

com $d_0 = 0$. Usamos b_n, d_n nesta subseção para distinguir as taxas totais das taxas individuais λ, μ. Em zero, o próximo evento é uma imigração; o estado deixou de ser absorvente.

Esse processo também não explode. Para ver isso, ignore as mortes e domine os nascimentos e imigrações por um processo cuja taxa, quando o total é n, é $c(n+1)$, com $c = \lambda + \nu$. Se o total original é n e o total maior é m, mantemos $n \leq m$. Em uma tentativa do processo maior, aumentamos seu total em um e aceitamos também um nascimento ou imigração no processo original com probabilidade

$$\frac{\lambda n + \nu}{c(m+1)}.$$

Essa razão está entre zero e um, pois $\lambda n + \nu \leq c(n+1) \leq c(m+1)$. As mortes só diminuem o total original, portanto a desigualdade entre os totais é preservada. Acrescentar um ao seu estado produz um processo de Yule de taxa c, que não explode. Assim, em tempo limitado há apenas finitos nascimentos e imigrações no processo original. O número de mortes não pode exceder o total inicial mais esses nascimentos e imigrações. Portanto, o número de todos os eventos também é finito.

Proposição 6.17 — Equilíbrio com reprodução e imigração
Suponha $0 < \lambda < \mu$ e $\nu > 0$. Defina

$$w_0 = 1, \qquad w_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda j + \nu}{\mu(j+1)}, \quad n \geq 1.$$

Então $C = \sum_{n\geq 0} w_n < \infty$, e $\pi(n) = w_n/C$ é estacionária. Sua média é

$$E_\pi X = \frac{\nu}{\mu - \lambda}.$$

No caso particular $\nu = \lambda$, a distribuição é geométrica:

$$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n, \qquad \rho = \lambda/\mu, \quad n \geq 0.$$

Demonstração. Todas as taxas de subida são positivas e as de descida são positivas fora de zero; logo, a cadeia é irredutível. Já verificamos a não explosão. Os pesos são exatamente os do Teorema 6.9. Falta justificar sua soma e, para calcular a média, a soma dos pesos multiplicados por n.

O quociente entre pesos consecutivos satisfaz

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\lambda n + \nu}{\mu(n+1)} \longrightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1.$$

Escolha um número r entre ρ e um. A partir de algum n_0, temos $w_{n+1} \leq r w_n$. Repetir a desigualdade dá $w_{n_0+j} \leq w_{n_0} r^j$, e a cauda da série dos pesos é limitada por uma série geométrica convergente. Assim, $C < \infty$ e o teorema citado fornece a estacionária.

A mesma comparação garante média finita. De fato,

$$\sum_{j\geq 0} (n_0 + j) w_{n_0+j} \leq w_{n_0} \sum_{j\geq 0} (n_0 + j) r^j < \infty.$$

Na última soma, usamos $\sum r^j = 1/(1-r)$ e $\sum j r^j = r/(1-r)^2$. Essas identidades seguem da soma geométrica e de sua derivada para $0 \leq r < 1$.

Por construção dos pesos, o balanço detalhado em cada aresta é

$$\pi(n)(\lambda n + \nu) = \pi(n+1)\mu(n+1).$$

Somamos em $n \geq 0$. As duas somas são finitas pela integrabilidade que acabamos de provar; mudar o índice $m = n + 1$ no lado direito dá

$$\lambda E_\pi X + \nu = \sum_{m \geq 1} \mu m \pi(m) = \mu E_\pi X.$$

Isolar a média fornece $\nu/(\mu - \lambda)$.

Se $\nu = \lambda$, cada fator do produto é $\lambda(j+1)/[\mu(j+1)] = \rho$. Portanto $w_n = \rho^n$, $C = 1/(1-\rho)$ e $\pi(n) = (1-\rho)\rho^n$. ■

Exemplo 6.26 — Mesma chegada externa, diferentes tamanhos médios.

Considere taxas por dia $\nu = 1$, $\mu = 3$ e $\lambda = 1$. Os pesos são $(1/3)^n$, a estacionária é $\pi(n) = (2/3)(1/3)^n$ e a média é $1/2$ indivíduo. Se a reprodução individual aumenta para $\lambda = 2$, mantendo as outras taxas, os pesos passam a ser

$$w_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2j+1}{3(j+1)},$$

cuja série continua convergente, mas a média sobe para $1/(3-2) = 1$. A entrada externa não mudou: a diferença vem dos descendentes produzidos depois da chegada.

O evento $\{X_t = 0\}$ agora significa que a população está vazia naquele instante. Ele não significa extinção definitiva, porque uma chegada externa poderá repovoá-la. O modelo sem imigração e o modelo com imigração respondem, portanto, a perguntas diferentes sobre o desaparecimento.

◁

6.12.3 Uma ponte para vidas que dependem da idade

As vidas exponenciais permitem descrever a população apenas pelo número de indivíduos: o tempo que cada um já viveu não altera sua espera residual. Com outras leis, essa redução pode deixar de funcionar. Por exemplo, se as vidas são uniformes entre um e dois anos, um indivíduo com poucos meses não morrerá nas próximas semanas, enquanto um que já viveu quase dois anos tem uma espera residual curta. Famílias nascidas em instantes diferentes podem ter o mesmo número de indivíduos e idades diferentes. A

contagem sozinha deixa de distinguir essas situações e pode não conservar a informação necessária para prever o próximo intervalo.

Processos de Bellman–Harris permitem vidas com distribuição mais geral, seguidas de reprodução no fim da vida. Para acompanhar o mecanismo, precisamos guardar informações sobre as idades, ou usar ferramentas de renovação. Essa extensão mostra o papel da hipótese exponencial no modelo estudado aqui. A contagem e os relógios individuais voltam a ser uma escolha de estado que deve ser justificada.

6.13 Dormir, aguardar ou trabalhar*

Um equipamento pode consumir pouca energia enquanto dorme e mais energia quando está disponível para trabalhar. Acordá-lo frequentemente melhora sua disponibilidade, mas também altera o consumo. Vamos construir um modelo pequeno em que as duas quantidades podem ser calculadas.

Exemplo 6.27 — Três estados de um equipamento.

O estado é D quando o equipamento dorme, P quando está pronto e T quando executa uma tarefa. As tentativas de chegada de tarefas formam um processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$. Uma tarefa é aceita somente em P; nesse caso, começa imediatamente e o estado passa a T. Tentativas em D ou em T são recusadas. Não há fila de espera.

Enquanto dorme, o equipamento acorda depois de um tempo exponencial de taxa $\alpha > 0$ e passa a P. Enquanto está pronto, um relógio independente de taxa $\beta > 0$ pode mandá-lo dormir. Uma tarefa aceita exige serviço exponencial de taxa $\mu > 0$; ao terminar, o equipamento volta a P. Todos esses relógios, as chegadas e os novos sorteios após cada mudança são independentes. Os tempos exponenciais são hipóteses deste modelo simplificado; não descrevemos os temporizadores de um protocolo específico de comunicação.

Na ordem D, P, T, o gerador é

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -(\beta+\lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Em D, as tentativas recusadas não mudam o estado, e a única saída real é o despertar, de taxa α. Em P, os relógios de dormir e de receber uma tarefa

competem, dando saída total $\beta + \lambda$. Em T, a única mudança real é o fim do serviço, de taxa μ. Cada diagonal é o negativo da soma das outras entradas de sua linha.

◁

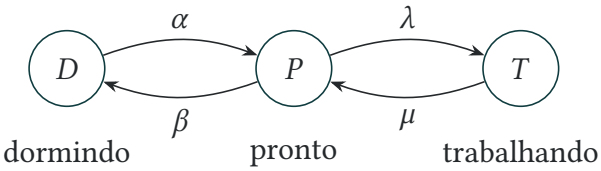


Figura 6.7: Os relógios determinam mudanças reais de estado. Tentativas recusadas em D e T não aparecem como setas.

Proposição 6.18 — Disponibilidade e potência em equilíbrio

Escreva

$$L = 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\lambda}{\mu}.$$

A distribuição estacionária do equipamento é

$$\pi(D) = \frac{\beta/\alpha}{L}, \qquad \pi(P) = \frac{1}{L}, \qquad \pi(T) = \frac{\lambda/\mu}{L}.$$

Se as potências consumidas nos estados são c_D, c_P, c_T, a potência esperada quando o equipamento está em equilíbrio é

$$\bar{c} = \frac{c_D\beta/\alpha + c_P + c_T\lambda/\mu}{L}.$$

Demonstração. O espaço é finito, todas as quatro taxas das setas são positivas e as setas ligam os três estados nos dois sentidos. Assim, a cadeia é irredutível e não explosiva. O balanço detalhado nas duas arestas exige

$$\pi(D)\alpha = \pi(P)\beta, \qquad \pi(P)\lambda = \pi(T)\mu.$$

Logo $\pi(D) = (\beta/\alpha)\pi(P)$ e $\pi(T) = (\lambda/\mu)\pi(P)$. A normalização dá

$$1 = \pi(D) + \pi(P) + \pi(T) = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\lambda}{\mu}\right)\pi(P),$$

fornecendo as três probabilidades. Como satisfazem o balanço detalhado, formam uma distribuição estacionária, pelo Teorema 6.8. Finalmente, em equilíbrio a potência é uma variável que assume os valores c_D, c_P, c_T com essas três probabilidades. Sua esperança é $c_D\pi(D) + c_P\pi(P) + c_T\pi(T)$, que é a expressão anunciada. ∎

A probabilidade de encontrar o equipamento pronto para aceitar uma tarefa, quando o estado observado tem lei estacionária, é $\pi(P)$. O fluxo estacionário de tarefas aceitas é $\lambda\pi(P)$: a taxa de transição $P \to T$ é λ. O mesmo balanço dá $\lambda\pi(P) = \mu\pi(T)$, igualando os fluxos de início e de término de serviço. A potência calculada é uma esperança sob a lei estacionária.

Podemos tornar o compromisso do modelo explícito. Mantendo as outras taxas fixas, aumentar α diminui β/α, portanto aumenta $\pi(P) = 1/L$ e o fluxo de tarefas aceitas. Se dormir consome menos que os outros dois estados, isto é, $c_D < c_P$ e $c_D < c_T$, escrevemos

$$\bar{c} = c_D + \frac{(c_P - c_D) + (\lambda/\mu)(c_T - c_D)}{1 + \beta/\alpha + \lambda/\mu}.$$

O numerador da fração é positivo e permanece fixo; seu denominador diminui quando α aumenta. Portanto, a potência esperada também aumenta. A melhoria no atendimento tem um custo de energia que o modelo permite quantificar.

Exemplo 6.28 — Acordar mais depressa.

Tome taxas por minuto $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/4$, $\lambda = 2$ e $\mu = 4$. Os pesos relativos dos estados são $1/2, 1, 1/2$, cuja soma é dois. Assim, $\pi = (1/4, 1/2, 1/4)$ na ordem D, P, T. Se $c_D = 1$, $c_P = 3$ e $c_T = 7$ watts, então

$$\bar{c} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2} \text{ watts},$$
$$\lambda\pi(P) = 1 \text{ tarefa por minuto}.$$

Duplicar a taxa de despertar para $\alpha = 1$ muda os pesos para $1/4, 1, 1/2$, cuja soma é $7/4$. Agora

$$\pi = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right),$$
$$\bar{c} = \frac{27}{7} \text{ watts},$$
$$\lambda\pi(P) = \frac{8}{7} \text{ tarefa por minuto}.$$

A probabilidade estacionária de estar dormindo diminui; o equipamento atende um fluxo maior e consome mais potência esperada.

◁

Outra aplicação tecnológica é a redundância: um servidor reserva pode assumir o serviço quando o principal falha. A comutação automática pode falhar, pode haver intervenção manual e o servidor danificado pode ser reparado. O Exercício 6.22 propõe um modelo de quatro estados para construir o gerador e calcular previsões por uniformização. Ele separa três perguntas: se ocorreu perda definitiva, se o serviço está disponível no instante observado e se o serviço já sofreu alguma interrupção. Reparos tornam essas perguntas diferentes.

6.14 Exercícios complementares*

Os primeiros exercícios usam a Seção 6.9; os seguintes retomam as aplicações opcionais de ramificação, energia e redundância.

Exercício 6.16 — Duas estações em série*

Na rede de duas estações em série, tome $\lambda = 3$, $\mu_1 = 5$ e $\mu_2 = 4$, em clientes por hora. Calcule a probabilidade de a rede estar vazia e o número médio total de clientes em equilíbrio. Qual estação tem maior utilização?

Exercício 6.17 — Independência e reversibilidade na rede*

Explique por que independência dos comprimentos das filas em um instante de equilíbrio não implica independência de suas trajetórias. Na rede em série, dê uma transição de taxa positiva cujo movimento inverso tenha taxa zero.

Exercício 6.18 — O limite de capacidade da API*

Mantenha o roteamento e os serviços da API e denote sua taxa externa por a. Determine o maior intervalo de valores $a > 0$ para o qual a rede é estável. Se a taxa do banco de dados aumentar de 9 para 12, encontre o novo limite para a e identifique o gargalo.

6.14.1 Ramificação, energia e redundância*

Exercício 6.19 — Famílias em tempo contínuo*

Cada indivíduo de uma população produz um novo indivíduo à taxa 2 por dia e morre à taxa 3 por dia, independentemente dos demais. Comece com dois indivíduos.

1. Determine a média da população no dia t e a probabilidade de extinção eventual.

2. Começando com um indivíduo, verifique pela equação da geradora que a probabilidade de extinção até t é

$$q(t) = \frac{3(1 - e^{-t})}{3 - 2e^{-t}}.$$

   Use-a para calcular a probabilidade de a população inicial de dois indivíduos ainda estar viva no dia t.

3. Calcule o tamanho esperado no dia t, condicionado a ainda haver indivíduos, e interprete o seu limite quando t cresce.

Exercício 6.20 — Estar vazia e desaparecer*

Uma população tem taxas individuais de reprodução $\lambda = 2$ e de morte $\mu = 5$ por dia, e recebe imigrantes à taxa $\nu = 2$ por dia.

1. Determine as taxas totais a partir de n, a distribuição estacionária, a probabilidade estacionária de população vazia e a média estacionária.

2. Se a taxa de imigração sobe para $\nu = 4$, mantendo as demais, escreva os pesos estacionários e calcule a nova média. Simplifique os pesos e sua soma para obter a probabilidade estacionária de vazio.

3. Explique por que, neste modelo com imigração, estar em zero em um instante não é o mesmo evento que a extinção definitiva do modelo sem imigração. Calcule a probabilidade de permanecer em zero durante mais de meio dia, partindo de zero, nos dois valores de ν.

Exercício 6.21 — Energia e atendimento*

No modelo da Seção 6.13, tome taxas por minuto $\alpha = \beta = 1$, $\lambda = 2$ e $\mu = 3$. As potências nos estados D, P, T são, respectivamente, 0, 1 e 4 watts.

1. Escreva Q e calcule a estacionária, a potência esperada em equilíbrio e o fluxo estacionário de tarefas aceitas.

2. Repita os cálculos quando α é duplicada. Qual é o ganho no fluxo e qual é o aumento de potência esperada?

3. Suponha que o projetista substitua o despertar exponencial por um despertar que ocorre exatamente um minuto depois de entrar em D. Explique por que os três estados já não conservam toda a informação necessária para prever o próximo intervalo.

Exercício 6.22 — Um servidor reserva: projeto computacional*

Um serviço tem um servidor principal e um reserva. Use os estados: A, principal funcionando e reserva pronto; B, reserva funcionando enquanto o principal é reparado; M, serviço interrompido enquanto se realiza comutação manual; F, perda definitiva, um estado absorvente.

Em A, o principal falha à taxa $1/10$ por hora. Uma falha é seguida de comutação automática instantânea para B com probabilidade $4/5$, ou exige comutação manual e leva a M com probabilidade $1/5$. Em B, o reparo termina à taxa 1 por hora e devolve o sistema a A; o reserva falha à taxa $1/5$ por hora e leva a F. Em M, a comutação manual termina à taxa 2 por hora e leva a B; o reserva pode falhar antes dela, à taxa $1/5$ por hora, levando a F. Todos os tempos são exponenciais independentes e todos os novos sorteios também são independentes. Neste modelo, o reserva não falha enquanto aguarda em A, e não há reparo nem recuperação a partir de F. O serviço está disponível em A e B. Comece em A.

1. Construa Q na ordem A, B, M, F, justificando inclusive as duas taxas que saem de A.

2. Defina $S(t) = \mathbb{P}_A(H_F > t)$, $D(t) = \mathbb{P}_A(X_t \in \{A, B\})$ e $I(t) = \mathbb{P}_A(H_{\{M,F\}} > t)$. Explique as três medidas e prove $I(t) \le D(t) \le S(t)$. Por que uma trajetória que entra em M e depois volta a B contribui diferentemente para elas?

3. Use uniformização com taxa $\Lambda = 3$ por hora para calcular as três medidas em $t = 1, 5, 10$ horas, com erro de truncamento inferior a 10^{-6}. Para S, D, use a cadeia de quatro estados. Para I, crie um estado absorvente de interrupção que reúna M e F assim que um deles é atingido. Justifique o controle do erro pela cauda de uma Poisson de média Λt.

4. Calcule $E_A H_F$ e $E_A H_{\{M,F\}}$ por análise de primeiro passo. Explique por que mudar somente a taxa de comutação manual pode mudar S e D, mas não muda I.

CAPÍTULO

7

Martingais

É possível transformar um jogo justo em uma fonte de lucro escolhendo melhor as apostas ou o instante de parar? Para responder, precisamos examinar a informação disponível em cada decisão e o capital necessário para manter a estratégia.

A esperança condicional permite distinguir o que já foi observado do que ainda pode acontecer. Com ela, descreveremos jogos cuja média é preservada a cada passo e estudaremos o efeito de escolher as apostas ou interromper a partida. A ruína do jogador, resolvida por primeiro passo no Capítulo 2, ganhará uma nova demonstração: em lugar de resolver uma recorrência, procuraremos uma função do estado cuja média se conserve.

Esse caminho levará às probabilidades de saída, às durações médias e à identidade de Wald. Em cada aplicação, será preciso verificar quando uma identidade válida em tempos fixos continua válida no instante aleatório da parada. As seções opcionais retomam essas ideias no controle de falsos positivos em testes sequenciais e na seleção de caminhos em modelos de reforço.

7.1 Esperança condicional: da partição à informação

Um dado equilibrado foi lançado, mas alguém revela apenas se o resultado está em $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$ ou $A_3 = \{5, 6\}$. Que valor devemos prever para o resultado Y?

Exemplo 7.1 — Uma informação parcial sobre um dado.

A previsão média é $3/2$ em A_1, $7/2$ em A_2 e $11/2$ em A_3. Antes de receber a informação, a própria previsão é a variável

$$Z = \frac{3}{2}\mathbf{1}_{A_1} + \frac{7}{2}\mathbf{1}_{A_2} + \frac{11}{2}\mathbf{1}_{A_3}.$$

Cada parte tem probabilidade $1/3$, de modo que $E(Z) = 7/2 = E(Y)$.

◁

Revelar a parte muda a previsão de cada observador, mas preserva a média global. Não precisamos conhecer o resultado exato para construir uma previsão que use toda a informação recebida.

Para uma variável integrável Y e um evento A, escrevemos $E(Y; A) = E(Y\mathbf{1}_A)$. Se $\mathbb{P}(A) > 0$, a média de Y entre os resultados que pertencem a A é o número

$$E(Y \mid A) = \frac{E(Y; A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Agora considere uma partição $A_1, \dots, A_k$ do espaço de resultados. Se a informação $\mathcal{G}$ revela em qual dessas partes estamos, a previsão deixa de ser um único número: seu valor depende da parte revelada. Definimos

$$E(Y \mid \mathcal{G}) = \sum_{i\,:\,\mathbb{P}(A_i)>0} \frac{E(Y; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)}\mathbf{1}_{A_i}.$$

Nas partes de probabilidade zero podemos atribuir qualquer valor finito.

A fórmula tem uma propriedade que explica por que é a previsão adequada: em cada parte A_i, ela preserva a média de Y. De fato,

$$E\big(E(Y \mid \mathcal{G}); A_i\big) = E(Y; A_i).$$

O mesmo vale para qualquer união dessas partes: basta somar as igualdades. Assim, a previsão usa as distinções permitidas pela informação, sem distinguir resultados dentro de uma mesma parte.

Usaremos letras como $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ para representar informações e escreveremos $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$ quando $\mathcal{G}$ revela tudo o que já era conhecido em $\mathcal{H}$. Se a informação distingue uma quantidade enumerável de histórias, a mesma definição vale, com uma soma enumerável sobre partes de probabilidade positiva. Nesse caso, $E|Y| < \infty$ garante a convergência absoluta das médias ponderadas.

Há uma segunda situação recorrente: o passado pode conter valores reais, mas a próxima variável aleatória ξ é independente dele. Nesse caso, *mantemos fixa a história* e fazemos a média apenas sobre o novo incremento. Por exemplo, se S_n é conhecido e $E\xi_{n+1} = \mu$, com ξ_{n+1} independente de todo o passado, então

$$E(S_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + \mu.$$

Isso é apenas a média de uma soma com uma parcela conhecida e outra independente. Para funções mais gerais dos incrementos, usaremos do mesmo modo somas ou integrais usuais de uma variável.

Esse tratamento por histórias enumeráveis e novos incrementos independentes é suficiente para os modelos deste capítulo. Não pretendemos aqui desenvolver a definição de esperança condicional para informações completamente gerais. Todas as igualdades e desigualdades entre previsões condicionais são entendidas quase certamente.

Calcular a média de um incremento independente

Suponha que X possa ser determinado a partir de uma informação $\mathcal{G}$ e que Y seja independente de tudo o que ela revela. Para uma função g com as esperanças abaixo bem definidas e $g(X, Y)$ integrável, vale a regra

$$E[g(X, Y) \mid \mathcal{G}] = \varphi(X), \qquad \varphi(x) = E[g(x, Y)].$$

Primeiro mantemos fixo o valor já conhecido de X. Depois calculamos a média de $g(x, Y)$ usando somente a distribuição do novo incremento Y. Por exemplo, se Y tem densidade f_Y, essa média é a integral usual

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) f_Y(y)\, dy.$$

Para históricos enumeráveis, a regra segue da definição por partições e da independência. Para históricos de valores reais, admitiremos sua

validade nas situações descritas, sem desenvolver a teoria geral da esperança condicional.

Proposição 7.1 — Regras de cálculo

Nas situações de condicionamento descritas acima, se Y, Z são integráveis, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathscr{H} \preceq \mathscr{G}$, então

$$\begin{aligned} E(aY + bZ \mid \mathscr{G}) &= aE(Y \mid \mathscr{G}) + bE(Z \mid \mathscr{G}), \\ E\big(E(Y \mid \mathscr{G})\big) &= E(Y), \\ E\big(E(Y \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{H}\big) &= E(Y \mid \mathscr{H}). \end{aligned}$$

Se X pode ser determinada com a informação $\mathscr{G}$ e XY é integrável, então

$$E(XY \mid \mathscr{G}) = XE(Y \mid \mathscr{G}).$$

Se Y é independente de tudo o que foi revelado por $\mathscr{G}$, então $E(Y \mid \mathscr{G}) = E(Y)$. Se $Y \leq Z$, então $E(Y \mid \mathscr{G}) \leq E(Z \mid \mathscr{G})$. Também vale $|E(Y \mid \mathscr{G})| \leq E(|Y| \mid \mathscr{G})$.

A terceira identidade é a *propriedade da torre*: prever com mais informação e depois voltar à informação menor dá a mesma previsão que começar pela menor.

Demonstração. Comecemos por uma partição $\{A_i\}$ que descreve $\mathscr{G}$. Nesta demonstração, omitimos das somas as partes de probabilidade zero, que não contribuem para nenhuma esperança. Em cada parte de probabilidade positiva, a esperança condicional é uma média usual. Assim, a linearidade decorre de

$$\frac{E(aY + bZ; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} = a\frac{E(Y; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} + b\frac{E(Z; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)}.$$

Multiplicar cada média por $\mathbb{P}(A_i)$ e somar fornece $E(E(Y \mid \mathscr{G})) = \sum_i E(Y; A_i) = E(Y)$.

Para a propriedade da torre, seja B uma parte de probabilidade positiva

da partição que descreve $\mathscr{H}$. Como $\mathscr{H} \preceq \mathscr{G}$, ela é união de partes A_i. Logo,

$$E\big(E(Y \mid \mathscr{G}); B\big) = \sum_{i\colon A_i \subseteq B} \frac{E(Y; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{P}(A_i) = E(Y; B).$$

Dividir por $\mathbb{P}(B)$ prova a identidade em cada parte de $\mathscr{H}$. A integrabilidade de Y garante a convergência absoluta das somas, pois $\sum_i |E(Y; A_i)| \leq E|Y|$.

Se X é determinado por $\mathscr{G}$, ele assume algum valor constante x_i em cada parte A_i. Por isso,

$$E(XY; A_i) = x_i E(Y; A_i),$$

e, ao dividir por $\mathbb{P}(A_i)$, obtemos $E(XY \mid \mathscr{G}) = XE(Y \mid \mathscr{G})$. Não estamos supondo que X seja limitado. Para conferir que a expressão do lado direito é integrável, observe que

$$\sum_i |x_i|\, |E(Y; A_i)| \leq \sum_i E(|XY|; A_i) = E|XY| < \infty.$$

A independência, por sua vez, dá $E(Y; A_i) = E(Y)\mathbb{P}(A_i)$, de onde $E(Y \mid \mathscr{G}) = E(Y)$. A ordem $Y \leq Z$ é preservada ao tomar médias em cada parte. Finalmente, a desigualdade triangular dá

$$\left|\frac{E(Y; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)}\right| \leq \frac{E(|Y|; A_i)}{\mathbb{P}(A_i)},$$

que é a última regra.

Isso demonstra as propriedades quando a informação é descrita por uma partição finita ou enumerável. Para informações produzidas por históricos de valores reais, admitiremos essas mesmas propriedades nas situações usadas no livro, juntamente com a regra da Observação 7.1. Continuaremos a manter fixa a história e integrar somente o novo incremento. A demonstração por partições, contudo, não constitui uma demonstração desse caso mais geral. ■

7.2 Filtrações e informação

Ao acompanhar um processo, reunimos as observações feitas até cada instante. Para formular quais decisões podem usar essas observações, precisamos registrar como a informação se acumula.

Definição 7.1 — Filtração

Uma *filtração* é uma sequência de informações acumuladas

$$\mathcal{F}_0 \preceq \mathcal{F}_1 \preceq \mathcal{F}_2 \preceq \cdots.$$

Aqui $\mathcal{F}_n$ representa tudo o que está disponível até o instante n. A *filtração natural* de um processo (X_n) é a informação revelada pela história $X_0, \ldots, X_n$.

A relação $\mathcal{F}_n \preceq \mathcal{F}_{n+1}$ diz que, ao avançar um passo, podemos aprender algo novo, mas não esquecemos o que já era conhecido.

Definição 7.2 — Processo adaptado

Um processo (M_n) é *adaptado* à filtração $(\mathcal{F}_n)$ se, para cada n, seu valor M_n pode ser determinado com a informação $\mathcal{F}_n$; isto é, o processo não antecipa o futuro.

Exemplo 7.2 — Informação revelada por lançamentos.

Se $\xi_1, \xi_2, \ldots$ são lançamentos independentes de uma moeda, tome como $\mathcal{F}_n$ a história dos n primeiros resultados. A soma $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ é adaptada, enquanto ξ_{n+1} não pode ser determinada com $\mathcal{F}_n$: o próximo lançamento ainda não foi observado.

◁

Definição 7.3 — Martingal, submartingal e supermartingal

Seja (M_n) um processo adaptado a $(\mathcal{F}_n)$ e tal que $E|M_n| < \infty$ para todo n. Dizemos que (M_n) é um *martingal* se

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n.$$

Ele é um *submartingal* se a igualdade é substituída por $\geq$, e um *supermartingal* se é substituída por $\leq$.

A condição $E|M_n| < \infty$ garante que as previsões condicionais sejam integráveis e que possamos tomar suas médias. Sem esse controle, as expressões poderiam envolver diferenças indefinidas, como $\infty - \infty$.

Condicionada à informação disponível em n, a média do incremento $M_{n+1} - M_n$ é zero em um martingal, não negativa em um submartingal e não positiva em um supermartingal. Os prefixos podem parecer invertidos à primeira leitura: em um submartingal, o valor atual fica abaixo da previsão do próximo valor; em um supermartingal, fica acima. Eles descrevem essa desigualdade, não a qualidade do jogo.

Proposição 7.2 — Propriedades básicas

Se (M_n) e (N_n) são martingais relativamente à mesma filtração e $a, b \in \mathbb{R}$, então $(aM_n + bN_n)$ é um martingal. Além disso, para $m \le n$,

$$E(M_n \mid \mathcal{F}_m) = M_m \qquad \text{e} \qquad E(M_n) = E(M_0).$$

Para submartingais, $E(M_n)$ é não decrescente; para supermartingais, é não crescente.

Demonstração. Primeiro, $aM_n + bN_n$ é adaptado à filtração comum e integrável, pois

$$E|aM_n + bN_n| \le |a|E|M_n| + |b|E|N_n| < \infty.$$

Pela linearidade da esperança condicional,

$$E(aM_{n+1} + bN_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = aM_n + bN_n,$$

o que verifica todas as condições de martingal. Na segunda afirmação, o caso $m = n$ é imediato, pois M_n já é determinado por $\mathcal{F}_n$. Se $m < n$, aplicamos repetidamente a propriedade da torre:

$$E(M_n \mid \mathcal{F}_m) = E\big(E(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_m\big) = E(M_{n-1} \mid \mathcal{F}_m) = \cdots = M_m.$$

Tomando esperanças, obtemos $E(M_n) = E(M_m)$ e, em particular, $E(M_n) = E(M_0)$. Para um submartingal, a preservação da ordem e a propriedade da torre dão

$$E(M_{n+1}) = E\big(E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\big) \ge E(M_n).$$

Iterar essa desigualdade prova a monotonicidade anunciada. Para um supermartingal, o mesmo cálculo tem a desigualdade invertida. ∎

7.3 Exemplos

Nos exemplos a seguir, a filtração natural contém tudo o que foi observado até o instante n. Para verificar a propriedade de martingal, separaremos a parte já conhecida do próximo incremento e calcularemos sua média condicional. Essa mesma operação aparecerá em formas distintas: retirar uma deriva, compensar o crescimento de um quadrado ou normalizar um produto.

Exemplo 7.3 — Uma caminhada sem deriva.

Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots$ variáveis i.i.d. integráveis, com $E(\xi_i) = \mu$, e seja

$$S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n,$$

onde S_0 é constante. Em relação à informação $\mathcal{F}_n$ revelada por $\xi_1, \dots, \xi_n$, o processo

$$M_n = S_n - n\mu$$

é um martingal. Sem retirar a deriva, S_n é um supermartingal quando $\mu \le 0$ e um submartingal quando $\mu \ge 0$.

◁

Demonstração. O valor de M_n depende somente dos incrementos já observados, logo é adaptado. A soma finita de incrementos integráveis garante a integrabilidade, com a estimativa

$$E|M_n| \le |S_0| + \sum_{k=1}^{n} E|\xi_k| + n|\mu| < \infty.$$

Como ξ_{n+1} é independente da história até n, temos

$$E(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1} - \mu \mid \mathcal{F}_n) = 0.$$

Como M_n é conhecido em $\mathcal{F}_n$, a igualdade acima equivale a $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$. Para o processo sem compensação,

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + \mu.$$

Se $\mu \le 0$, o lado direito é no máximo S_n; se $\mu \ge 0$, é no mínimo S_n. Isso prova as duas classificações. ■

Exemplo 7.4 — Quadrado de uma caminhada centrada.
Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d., com $E(\xi_i) = 0$ e $E(\xi_i^2) = \sigma^2 < \infty$. Para $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, com S_0 constante, o processo

$$M_n = S_n^2 - n\sigma^2$$

é um martingal em relação à filtração natural.

◁

Demonstração. A soma tem segundo momento finito, de modo que M_n é integrável e adaptado. Para calcular o próximo incremento, expandimos o quadrado:

$$M_{n+1} - M_n = (S_n + \xi_{n+1})^2 - S_n^2 - \sigma^2 = 2\xi_{n+1}S_n + \xi_{n+1}^2 - \sigma^2.$$

Condicionando por $\mathcal{F}_n$,

$$\begin{aligned} E\left(2\xi_{n+1}S_n + \xi_{n+1}^2 - \sigma^2 \mid \mathcal{F}_n\right) \\ = 2S_n E(\xi_{n+1}) + E(\xi_{n+1}^2) - \sigma^2 = 0. \end{aligned}$$

Na primeira parcela, S_n pode sair do condicionamento porque já é conhecido; a média de ξ_{n+1} é zero pela independência. A segunda parcela tem média σ^2, que é cancelada pela compensação. Assim, a esperança condicional do incremento é zero, como exige a definição. A correção $n\sigma^2$ retira exatamente o crescimento médio de S_n^2. ■

Exemplo 7.5 — Produtos de variáveis aleatórias independentes.
Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis independentes, não negativas e com $E(X_i) = 1$. Se $M_0 \geq 0$ é constante, então

$$M_n = M_0 X_1 \cdots X_n$$

é um martingal para a informação $\mathcal{F}_n$ revelada por $X_1, \ldots, X_n$.

◁

Demonstração. O produto depende somente de $X_1, \dots, X_n$ e, portanto, é adaptado. A não negatividade permite calcular a esperança absoluta como a própria esperança. Pela independência dos fatores,

$$E|M_n| = M_0 \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = M_0 < \infty.$$

Além disso, X_{n+1} é independente da informação $\mathscr{F}_n$, de modo que $E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = 1$. Consequentemente,

$$E(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = M_n E(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = M_n.$$

■

Esse tipo de modelo é natural quando as variações são proporcionais ao valor atual, como em modelos financeiros multiplicativos. A não negatividade dos fatores também impede preços negativos.

Exemplo 7.6 — Martingal exponencial.

Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots$ i.i.d. e suponha que

$$\varphi(\theta) = E(e^{\theta \xi_1}) < \infty.$$

Para $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, com S_0 constante, o processo

$$M_n = \frac{e^{\theta S_n}}{\varphi(\theta)^n}$$

é um martingal. Em particular, se $\varphi(\theta) = 1$, então $e^{\theta S_n}$ é um martingal.

◁

Demonstração. Como $e^{\theta \xi_1} > 0$, temos $0 < \varphi(\theta) < \infty$. Tome os fatores $X_i = e^{\theta \xi_i}/\varphi(\theta)$ e $M_0 = e^{\theta S_0}$. Eles são independentes, não negativos e satisfazem

$$E(X_i) = \frac{E(e^{\theta \xi_i})}{\varphi(\theta)} = 1.$$

Além disso,

$$M_0 \prod_{i=1}^{n} X_i = \frac{e^{\theta S_0} e^{\theta(\xi_1 + \cdots + \xi_n)}}{\varphi(\theta)^n} = \frac{e^{\theta S_n}}{\varphi(\theta)^n}.$$

O exemplo anterior fornece adaptação, integrabilidade e a identidade condicional de martingal. Se $\varphi(\theta) = 1$, o denominador simplesmente desaparece. ■

Exemplo 7.7 — Ruína do jogador.
Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ independentes, com

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1 - p,$$

onde $p \in (0,1)$ e $p \neq 1/2$. Para $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$,

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$$

é um martingal, com S_0 constante.

◁

Demonstração. Para verificar, escolha θ de modo que $e^\theta = (1-p)/p$. Então

$$\varphi(\theta) = Ee^{\theta\xi_i} = p\frac{1-p}{p} + (1-p)\frac{p}{1-p} = 1.$$

O resultado segue do Exemplo 7.6, pois $e^{\theta S_n} = ((1-p)/p)^{S_n}$. A escolha de θ faz a contribuição média de um passo positivo e a de um passo negativo somarem um; por isso, a multiplicação por esse novo fator preserva a média condicional da potência. ■

Nos exemplos anteriores, escolhemos funções da caminhada para compensar sua evolução média. Para uma cadeia de Markov, a mesma ideia se expressa pela comparação entre o valor atual de uma função e sua média após um passo.

Teorema 7.3 — Funções super-harmônicas
Seja (X_n) uma cadeia de Markov em S, com matriz de transição P, e $f : S \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Suponha que $f(X_n, n)$ seja integrável em cada n, que $\sum_y p(x,y)|f(y,n+1)| < \infty$ e que

$$f(x,n) \geq \sum_y p(x,y) f(y,n+1),$$

para todo x, n. Então $M_n = f(X_n, n)$ é um supermartingal em relação à filtração natural de X. Se a desigualdade é invertida, obtemos um submartingal; se vale a igualdade, obtemos um martingal.

Demonstração. Como f é determinística, $f(X_n, n)$ é determinado pela história até n e o processo é adaptado. Sua integrabilidade é uma das hipóteses. Fixada uma história com $X_n = x$, a propriedade de Markov diz que o próximo estado tem distribuição $p(x, \cdot)$, independentemente dos estados anteriores. A convergência absoluta da soma, também assumida, permite calcular essa média. Portanto,

$$E\big(f(X_{n+1}, n+1) \mid \mathcal{F}_n\big) = \sum_y p(X_n, y) f(y, n+1) \le f(X_n, n).$$

A desigualdade da hipótese foi aplicada ao estado aleatório X_n. Juntamente com adaptação e integrabilidade, essa é exatamente a condição de supermartingal. Se a desigualdade da hipótese é invertida, a desigualdade condicional também se inverte; se há igualdade, a média condicional coincide com $f(X_n, n)$, dando um martingal. ∎

Os dois exemplos seguintes são úteis para estudar probabilidades de atingir conjuntos e tempos de saída.

Exemplo 7.8 — Uma função super-harmônica até a entrada.
Considere uma cadeia de Markov (X_n) em um espaço finito S. Para $A \subset S$, seja

$$H_A = \inf\{n \ge 0 \,:\, X_n \in A\}.$$

Se, para $x \in S \setminus A$,

$$h(x) \ge \sum_y p(x, y) h(y),$$

então $h(X_{n \wedge H_A})$ é um supermartingal.

◁

Demonstração. Torne absorventes os estados de A. A nova cadeia coincide com X até a entrada e depois permanece no estado atingido, de modo que seu valor no instante n é $X_{n \wedge H_A}$. Fora de A, a desigualdade para h é a da hipótese; em A, a transição é para o próprio estado e a média seguinte é exatamente $h(x)$. Aplique, portanto, o Teorema 7.3 à cadeia absorvida.

Também podemos verificar a identidade diretamente na informação da cadeia original. Como $\{H_A > n\}$ já é conhecido em $\mathcal{F}_n$,

$$E\big(h(X_{(n+1)\wedge H_A}) - h(X_{n \wedge H_A}) \mid \mathcal{F}_n\big) = \mathbf{1}_{\{H_A > n\}}\big[(Ph)(X_n) - h(X_n)\big] \le 0.$$

Depois da entrada o incremento é zero; antes dela usamos a hipótese. O processo é adaptado, e a finitude de S limita $|h|$ por uma constante, garantindo a integrabilidade em cada instante. ∎

Exemplo 7.9 — Função de estado e relógio parados.

Nas condições do exemplo anterior, sejam $g : S \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Suponha que, para $x \notin A$,

$$g(x) \geq \alpha + \sum_{y} p(x,y)g(y).$$

Então o processo

$$Z_n = g(X_{H_A \wedge n}) + \alpha(H_A \wedge n)$$

é um supermartingal em relação à filtração natural de X.

◁

Os dois termos precisam parar juntos: depois da chegada a A, nem o estado observado nem o relógio acumulado mudam.

Demonstração. A variável Z_n depende somente de $X_0, \dots, X_n$, pois H_A é uma parada. Assim, o processo é adaptado. Além disso,

$$|Z_n| \leq \max_{x \in S} |g(x)| + |\alpha| n,$$

portanto cada Z_n é integrável. No evento $\{H_A \leq n\}$, o incremento é zero. No evento $\{H_A > n\}$, a propriedade de Markov fornece

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} - Z_n \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{1}_{\{H_A > n\}} \big[(Pg)(X_n) - g(X_n) + \alpha \big] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Isso prova a afirmação, inclusive quando a chegada ocorre no instante $n+1$. ∎

7.4 Estratégias de jogo e tempos de parada

Até aqui, construímos martingais escolhendo funções do estado ou dos incrementos. Agora estudaremos o que acontece quando usamos esses

processos para decidir quanto apostar e quando interromper o jogo. Uma estratégia pode usar tudo o que aconteceu até agora, mas não pode escolher a aposta depois de ver o resultado da rodada. Essa restrição é o conteúdo da previsibilidade.

Definição 7.4 — Processo previsível

Um processo $(H_n)_{n\geq 1}$ é *previsível* em relação a $(\mathcal{F}_n)$ se H_n pode ser determinado com a informação disponível no instante $n-1$, para todo $n \geq 1$. Assim, o valor de H_n precisa estar decidido imediatamente antes de observar o que ocorre entre $n-1$ e n.

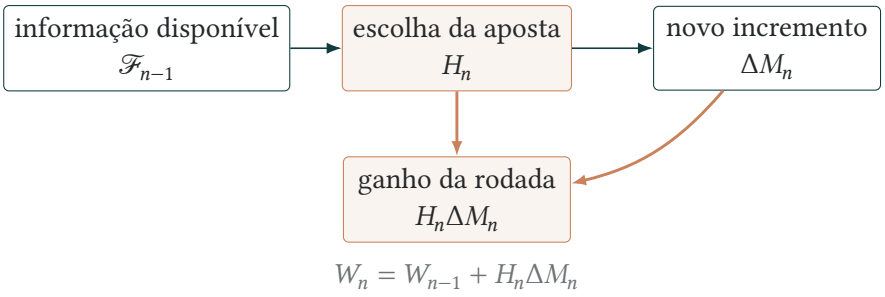


Figura 7.1: A aposta H_n é escolhida com a informação disponível em $n-1$, antes de observar o incremento $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. A riqueza incorpora então o ganho $H_n \Delta M_n$.

Se M_n representa o ganho acumulado por unidade apostada e H_n é a quantidade apostada na rodada n, a riqueza resultante é

$$V_n = V_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m (M_m - M_{m-1}). \tag{7.1}$$

A soma acima é chamada de *transformada de martingal*. Cada parcela usa uma decisão tomada com a informação anterior.

Exemplo 7.10 — A estratégia de duplicação.

Em um jogo justo com ganhos $+1$ e -1, um jogador pode apostar 1 unidade e dobrar a aposta depois de cada derrota. Se a primeira vitória ocorre após k derrotas, o saldo da sequência é

$$-(1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) + 2^k = 1.$$

Isso pode sugerir lucro garantido. A falha está nas apostas necessárias: uma sequência longa de derrotas exige capital exponencialmente grande. Com horizonte ou capital limitados, o evento raro de uma longa sequência de derrotas compensa exatamente os pequenos ganhos frequentes. A estratégia muda a distribuição do ganho, mas não cria média positiva.

◁

Teorema 7.4 — Transformada de martingal

Seja V_0 integrável e determinado pela informação inicial $\mathcal{F}_0$. Se M é um supermartingal e H é previsível, com $0 \le H_m \le C_m < \infty$ quase certamente para cada m, onde C_m é uma constante, então a riqueza de (7.1) é um supermartingal. Se M é um martingal, V é um martingal para qualquer H previsível tal que $H_m(M_m - M_{m-1})$ seja integrável em cada m, permitindo ambos os sinais.

As constantes C_m podem crescer com m: não há exigência de limitação uniforme no tempo. Cada riqueza V_n contém apenas uma soma finita. No caso de martingal, a condição sobre os produtos permite inclusive apostas não limitadas, desde que cada ganho continue integrável.

Demonstração. Cada parcela até n depende apenas da informação disponível nesse instante, pois H_m é conhecido em $m-1$ e $M_m - M_{m-1}$ é conhecido em m. Logo, V é adaptado.

No caso de supermartingal, a limitação de cada aposta dá

$$E|H_m(M_m - M_{m-1})| \le C_m(E|M_m| + E|M_{m-1}|) < \infty.$$

Como V_n contém apenas n parcelas, isso garante sua integrabilidade. No caso de martingal, a integrabilidade decorre da hipótese explícita sobre cada produto.

Para calcular a previsão do próximo ganho, escrevemos

$$V_{n+1} - V_n = H_{n+1}(M_{n+1} - M_n).$$

A aposta H_{n+1} já está decidida com a informação $\mathcal{F}_n$ e, portanto, pode sair da média condicional:

$$E(V_{n+1} - V_n \mid \mathcal{F}_n) = H_{n+1}E(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n).$$

Se M é supermartingal, a média do incremento é não positiva. Como $H_{n+1} \geq 0$, o produto também é não positivo. Se M é martingal, a média do incremento é zero, e o produto continua tendo média zero mesmo quando a aposta pode ser negativa. Isso prova as duas afirmações. ∎

Definição 7.5 — Tempo de parada

Uma variável aleatória T com valores em $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ é um *tempo de parada* se, para todo n, é possível decidir se $T \leq n$ usando apenas a informação disponível em $\mathcal{F}_n$.

O primeiro instante em que uma caminhada atinge um nível é um tempo de parada: basta examinar a trajetória já observada para saber se a chegada ocorreu. O último instante em que ela visita esse nível, em geral, não é, pois sua identificação exige conhecer o futuro.

Para qualquer processo M, escrevemos $M_n^T = M_{T \wedge n}$ para o processo observado até T e congelado depois da parada. A Figura 7.2 mostra essa operação em uma realização.

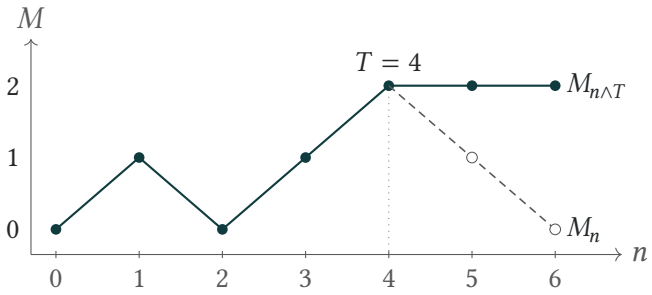


Figura 7.2: Uma trajetória e sua versão parada na primeira chegada ao nível 2, aqui $T = 4$. Depois de T, a trajetória original continua em tracejado, enquanto a parada permanece no mesmo valor. Os segmentos apenas guiam a leitura dos valores em instantes inteiros.

Teorema 7.5 — Processo parado

Se (M_n) é um martingal e T é um tempo de parada, então $(M_{T\wedge n})$ também é um martingal. A mesma afirmação vale para submartingais e supermartingais.

Demonstração. Ponha

$$H_m = \mathbf{1}_{\{T \geq m\}}.$$

No instante $m-1$, já podemos decidir se $T \leq m-1$ e, portanto, se $T \geq m$. Assim, H_m é previsível e satisfaz $0 \leq H_m \leq 1$.

Para cada trajetória,

$$M_0 + \sum_{m=1}^{n} H_m(M_m - M_{m-1}) = M_{T\wedge n}.$$

De fato, se $T = k \leq n$, apenas os k primeiros incrementos entram na soma, que se reduz a $M_0 + (M_1 - M_0) + \cdots + (M_k - M_{k-1}) = M_k$. Se $T > n$, entram todos os incrementos até n e a soma vale M_n.

Logo, $M_{T\wedge n}$ é a transformada de M pela estratégia que acompanha o processo até a parada. O Teorema 7.4 mostra que essa transformada é martingal se M é martingal e supermartingal se M é supermartingal. Para um submartingal, aplicamos o mesmo resultado ao supermartingal $-M$ e trocamos os sinais. ∎

O teorema garante $E(M_{T\wedge n}) = E(M_0)$ para todo n. Passar ao limite e concluir $E(M_T) = E(M_0)$ exige uma hipótese adicional; esse cuidado é essencial nas aplicações.

7.4.1 Convergência de martingais limitados

O controle das médias, por si só, não garante que uma sequência aleatória convirja. Para martingais, uma limitação uniforme dos valores impede oscilações persistentes. Vamos demonstrar primeiro uma desigualdade para contar quantas vezes uma trajetória atravessa um intervalo.

Lema 7.6 — Desigualdade de cruzamentos de Doob

Se (S_n) é um supermartingal com $|S_n| \le C$ quase certamente para todo n e $a < b$, denote por $U_N[a,b]$ o número de cruzamentos completos de $[a,b]$ de baixo para cima realizados pela trajetória $S_0, \dots, S_N$. Então

$$(b-a)E\,U_N[a,b] \le E(a - S_N)^+ \le C + |a|.$$

Em particular, $E\,U_N[a,b]$ é limitado uniformemente em N.

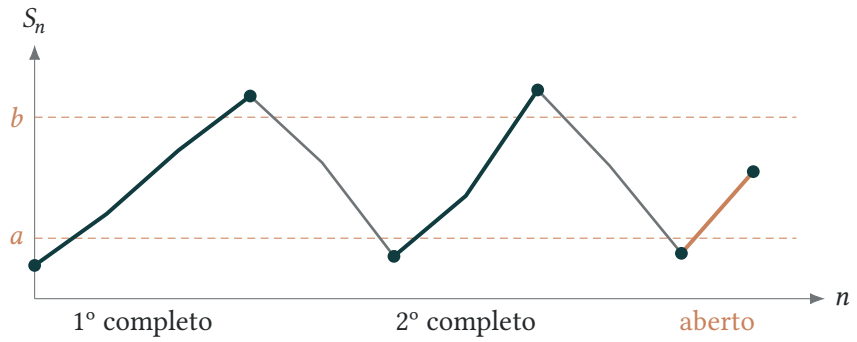


Figura 7.3: Uma trajetória com dois cruzamentos completos de $[a,b]$ de baixo para cima e um terceiro ainda aberto no instante final. A contagem $U_N[a,b]$ inclui apenas os completos.

Demonstração. Considere a seguinte estratégia: quando a trajetória atinge um valor menor ou igual a a, passamos a acompanhar uma unidade do processo; deixamos de acompanhá-la na primeira visita posterior a um valor maior ou igual a b e repetimos o procedimento. Se $H_m \in \{0,1\}$ indica se estamos acompanhando o processo entre os instantes $m-1$ e m, então H_m é determinado pela história até $m-1$. O ganho acumulado até N é

$$G_N = \sum_{m=1}^{N} H_m (S_m - S_{m-1}).$$

Como S é um supermartingal e $H_m \geq 0$ é decidido antes do incremento,

$$EG_N = \sum_{m=1}^{N} E[H_m E(S_m - S_{m-1} \mid \mathscr{F}_{m-1})] \leq 0.$$

Cada cruzamento completo rende pelo menos $b-a$. No instante N pode restar, no máximo, um cruzamento aberto. Se ele começou em $m_0 < N$, com $S_{m_0} \leq a$, seu ganho até o instante final é

$$S_N - S_{m_0} \geq S_N - a \geq -(a - S_N)^+.$$

Quando não há cruzamento aberto, a contribuição residual é zero. Portanto, trajetória por trajetória,

$$G_N \geq (b-a) U_N[a,b] - (a - S_N)^+.$$

Todos os termos são integráveis: H_m é limitado e os incrementos são integráveis; além disso, $U_N[a,b] \leq N$. Tomando esperanças e usando $EG_N \leq 0$, obtemos

$$(b-a)\, E\, U_N[a,b] \leq EG_N + E(a - S_N)^+ \leq E(a - S_N)^+.$$

Por fim, $(a - S_N)^+ \leq |a| + |S_N| \leq |a| + C$, o que prova a segunda desigualdade e a uniformidade da cota em N. ∎

Dizemos que M_n converge para M_∞ *em média* ou *em* L^1 quando

$$E|M_n - M_\infty| \longrightarrow 0.$$

Essa condição controla a magnitude média do erro, enquanto a convergência quase certa acompanha as trajetórias. Em geral, nenhuma dessas duas convergências implica a outra. No próximo teorema, a limitação uniforme permitirá concluir ambas.

Teorema 7.7 — Convergência de Doob para processos limitados
Se (M_n) é um submartingal e existe uma constante $C < \infty$ tal que $|M_n| \le C$ quase certamente para todo n, então existe uma variável aleatória integrável M_∞ para a qual

$$M_n \longrightarrow M_\infty \quad \text{quase certamente e em } L^1.$$

A mesma conclusão vale para supermartingais e, em particular, para martingais limitados.

Demonstração. Comece pelo submartingal M e ponha $S_n = -M_n$. Então S é um supermartingal limitado. Fixe racionais $a < b$ e escreva $U_N[a,b]$ para o número de cruzamentos completos de $[a,b]$ por S até o instante N. Como $U_N[a,b]$ cresce com N, existe o limite $U_\infty[a,b] \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Para cada inteiro $k \ge 1$, a desigualdade de Markov e o lema anterior dão

$$\mathbb{P}(U_N[a,b] \ge k) \le \frac{E\,U_N[a,b]}{k} \le \frac{C + |a|}{k(b-a)}.$$

Os eventos $\{U_N[a,b] \ge k\}$ crescem com N. Pela continuidade das probabilidades, a mesma cota vale para $\mathbb{P}(U_\infty[a,b] \ge k)$. Fazendo $k \to \infty$, obtemos $\mathbb{P}(U_\infty[a,b] = \infty) = 0$. Há apenas uma quantidade enumerável de pares racionais $a < b$, portanto, com probabilidade um, todos esses números de cruzamentos são finitos simultaneamente.

Agora considere uma trajetória nesse evento. Se

$$\liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n,$$

podemos escolher racionais $a < b$ estritamente entre esses dois valores. A trajetória visita valores abaixo de a e valores acima de b arbitrariamente tarde. Escolhendo alternadamente uma visita abaixo de a e a primeira visita posterior acima de b, obtemos infinitos cruzamentos completos de $[a,b]$, contradizendo $U_\infty[a,b] < \infty$. Portanto, limite inferior e limite superior coincidem. Como $|S_n| \le C$, o limite é finito, e assim $M_n = -S_n$ converge quase certamente para alguma variável M_∞ com $|M_\infty| \le C$.

Por fim, ponha $D_n = |M_n - M_\infty|$. Temos $0 \le D_n \le 2C$ e $D_n \to 0$ quase certamente. Para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$E D_n \le \varepsilon + 2C\,\mathbb{P}(D_n > \varepsilon).$$

A probabilidade à direita tende a zero: os eventos $\{\sup_{m\geq N} D_m > \varepsilon\}$ decrescem para um evento de probabilidade zero. Portanto $ED_n \to 0$, isto é, há convergência em L^1. Para um supermartingal, aplicamos diretamente o mesmo argumento de cruzamentos; martingais são casos particulares de ambos. ∎

7.5 Aplicações

Voltaremos às probabilidades de saída e às durações já estudadas por primeiro passo. Antes, precisamos distinguir duas afirmações: parar em $T \wedge n$ conserva a média de um martingal; passar à identidade em T exige justificar o limite. A caminhada seguinte mostra por que a finitude quase certa da parada não basta.

Exemplo 7.11 — Retorno quase certo sem conservação da média.
Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ independentes, com

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1/2,$$

e defina a caminhada aleatória simples simétrica $S_n = 1 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Seja

$$T = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\}.$$

A recorrência da caminhada, demonstrada anteriormente, implica $\mathbb{P}_1(T < \infty) = 1$. Portanto, $S_T = 0$ e

$$E_1(S_T) = 0 \neq 1 = E_1(S_0).$$

Isso não contradiz o Teorema 7.5, que trata de $S_{T\wedge n}$, não diretamente de S_T. Antes de atingir 0, a caminhada pode fazer excursões arbitrariamente altas. ◁

Ausência de uma dominadora integrável. Para $m \geq 1$, escreva $H_m = \inf\{n \geq 0 : S_n = m\}$. A fórmula da ruína do jogador, já demonstrada por primeiro passo no Capítulo 2, fornece

$$\mathbb{P}_1(H_m < T) = \frac{1}{m}.$$

Se $R = \max_{0 \le n \le T} S_n$, então

$$ER = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(R \ge m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_1(H_m < T) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

A igualdade entre os eventos usados nessa soma merece atenção. Como os passos são de tamanho um, alcançar um máximo pelo menos m antes de chegar a zero equivale a visitar o nível m antes de T. Além disso, T é finito quase certamente, de modo que esse máximo é finito em cada uma dessas trajetórias, embora tenha esperança infinita.

Se uma variável integrável dominasse todos os $S_{T\wedge n}$, também dominaria seu supremo ao longo dos instantes inteiros, que é R. Isso contradiz $E(R) = \infty$. O exemplo distingue, assim, a finitude quase certa do máximo da integrabilidade desse máximo. ■

Para justificar as passagens ao limite nas próximas aplicações, usaremos duas regras que podem ser demonstradas com probabilidades de eventos e séries de caudas.

Proposição 7.8 — Duas regras elementares para esperanças

Se $Z_n \to Z$ quase certamente e $|Z_n| \le Y$ para uma variável não negativa com $EY < \infty$, então Z é integrável e $E|Z_n - Z| \to 0$. Se T assume valores em $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, então

$$E(T \wedge n) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(T \ge m) \longrightarrow E(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \ge m),$$

admitindo o valor $+\infty$.

Demonstração. Na primeira afirmação, $|Z| \le Y$ quase certamente. Para $D_n = |Z_n - Z|$, temos $D_n \le 2Y$. Dados $K, \varepsilon > 0$,

$$ED_n \le \varepsilon + 2K\,\mathbb{P}(D_n > \varepsilon) + 2E(Y; Y > K).$$

Como $D_n \to 0$ quase certamente, os eventos $\{\sup_{m\ge n} D_m > \varepsilon\}$ decrescem para um evento de probabilidade zero. Pela continuidade das probabilidades,

$$\mathbb{P}(D_n > \varepsilon) \le \mathbb{P}\left(\sup_{m \ge n} D_m > \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

Logo, para K e ε fixos, o segundo termo da cota tende a zero. A cauda $E(Y; Y > K)$ também tende a zero quando $K \to \infty$, pois $EY < \infty$. Isso se vê repartindo os valores de Y nos intervalos $[m, m+1)$: como $m+1 \le Y+1$ nesse intervalo,

$$\sum_{m \ge 0} (m+1)\mathbb{P}(m \le Y < m+1) \le EY + 1 < \infty.$$

As caudas dessa série tendem a zero e controlam $E(Y; Y > K)$ quando K cresce. Fazendo primeiro $n \to \infty$, depois $K \to \infty$ e, por fim, $\varepsilon \downarrow 0$, concluímos que $ED_n \to 0$.

A segunda afirmação resulta, para cada n, da identidade $T \wedge n = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{\{T \ge m\}}$ e da fórmula da esperança de uma variável inteira não negativa pela soma das probabilidades de cauda. ∎

A primeira regra permite passar das identidades em $T \wedge n$ à identidade no tempo final T, desde que haja uma cota integrável para os valores parados. Uma cota constante fornece a versão mais direta desse princípio.

Teorema 7.9 — Parada com processo limitado

Se (M_n) é um martingal, T é um tempo de parada finito quase certamente e existe uma constante K tal que

$$|M_{T \wedge n}| \le K \quad \text{para todo } n,$$

então $E(M_T) = E(M_0)$.

Demonstração. Pelo Teorema 7.5, $E(M_{T\wedge n}) = E(M_0)$. Como $T < \infty$ quase certamente, temos $M_{T\wedge n} \to M_T$ quase certamente. O limite também satisfaz $|M_T| \le K$, e a primeira regra da Proposição 7.8, com $Y = K$, fornece

$$E(M_0) = \lim_{n \to \infty} E(M_{T \wedge n}) = E(M_T).$$

∎

Exemplo 7.12 — Uma parada limitada em um passo.
Uma caminhada simétrica começa em 1 e para ao atingir $\{0, 2\}$. Aqui $T = 1$ e $|S_{T\wedge n}| \le 2$. A parada com processo limitado dá $1 = E(S_T) = 2\mathbb{P}(S_T = 2)$, portanto $\mathbb{P}(S_T = 2) = 1/2$.

◁

7.5.1 Distribuições de saída

No capítulo de cadeias finitas, calculamos probabilidades de saída resolvendo equações de primeiro passo. A interpretação por martingais oferece outro caminho: procuramos uma função do estado cuja média permaneça constante e a observamos no instante da saída. As condições de fronteira transformam essa média em uma equação para a probabilidade desejada.

Proposição 7.10 — Saída e funções harmônicas
Seja X uma cadeia de Markov em S, com matriz P. Sejam $A, B \subset S$ disjuntos, $C = S \setminus (A \cup B)$ finito e

$$H_A = \inf\{n \ge 0 : X_n \in A\}, \qquad H_B = \inf\{n \ge 0 : X_n \in B\}.$$

Suponha que $H_A \wedge H_B < \infty$ quase certamente a partir de todo $x \in C$. Se $h : S \to \mathbb{R}$ satisfaz $h = 1$ em A, $h = 0$ em B e

$$h(x) = \sum_y p(x, y)h(y) \qquad (x \in C),$$

então $h(x) = \mathbb{P}_x(H_A < H_B)$ para $x \in C$.

Demonstração. Fixe $x \in C$ e ponha $T = H_A \wedge H_B$. Antes de T, a cadeia está em C e a equação $Ph = h$ conserva a média condicional de $h(X_n)$. Depois de T, a função observada fica congelada. Portanto, $h(X_{T\wedge n})$ é um martingal, pelo mesmo cálculo dos exemplos de funções harmônicas paradas. Ele é limitado pela constante

$$K = \max\{1, \max_{y\in C} |h(y)|\},$$

pois em A e B os valores são, respectivamente, um e zero. A hipótese garante

$T < \infty$ quase certamente. Pelo Teorema 7.9,

$$h(x) = E_x h(X_T) = \mathbb{P}_x(H_A < H_B).$$

O argumento explica por que as condições de fronteira são 0 e 1: no instante da saída, a variável $h(X_T)$ é exatamente a indicadora de sair por A. ■

Este é o Teorema 2.20, agora obtido sem resolver o sistema linear: a parada de um martingal limitado substitui a inversão de $I - R$.

Exemplo 7.13 — Distribuição de saída da caminhada aleatória simples.

Seja (S_n) uma caminhada aleatória simples simétrica iniciada em $x \in (a, b)$, onde $a < b$ são inteiros, e ponha

$$T = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n \in \{a, b\}\}.$$

As probabilidades de saída são

$$\mathbb{P}_x(S_T = a) = \frac{b - x}{b - a}, \qquad \mathbb{P}_x(S_T = b) = \frac{x - a}{b - a}. \tag{7.2}$$

Essas são as mesmas probabilidades obtidas pelo cálculo por primeiro passo. ◁

Demonstração. Para explicitar a finitude de T, ponha $L = b - a$. Partindo de qualquer estado interno, L passos consecutivos para a direita forçam a chegada a b antes do fim do bloco. A probabilidade dessa sequência é 2^{-L}, independentemente do passado. Assim,

$$\mathbb{P}_x(T > kL) \leq (1 - 2^{-L})^k \longrightarrow 0.$$

Logo $T < \infty$ quase certamente. Como S_n é martingal e $S_{T \wedge n} \in [a, b]$, o Teorema 7.9 dá

$$x = E_x(S_T) = a\mathbb{P}_x(S_T = a) + b\mathbb{P}_x(S_T = b).$$

Escreva $u = \mathbb{P}_x(S_T = b)$. Os passos de tamanho um impedem ultrapassar as barreiras, logo $S_T \in \{a, b\}$ e a probabilidade de saída por a é $1 - u$. A identidade anterior fica $x = a(1-u) + bu = a + (b-a)u$. Isolando u, obtemos $u = (x - a)/(b - a)$ e $1 - u = (b - x)/(b - a)$, as fórmulas de (7.2). ■

A posição S_n já é um martingal no passeio simétrico. Por isso a chance de alcançar a barreira superior é simplesmente a fração do intervalo que separa x da barreira inferior.

Exemplo 7.14 — Ruína do jogador.
Considere agora a caminhada assimétrica $S_n = x + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, com

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\xi_i = -1) = q = 1 - p.$$

Suponha $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$, escreva $r = q/p$ e seja

$$T = \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{a, b\}\}, \qquad a < x < b, \quad a, b, x \in \mathbb{Z}.$$

As probabilidades de saída são

$$\mathbb{P}_x(S_T = a) = \frac{r^b - r^x}{r^b - r^a}, \qquad \mathbb{P}_x(S_T = b) = \frac{r^x - r^a}{r^b - r^a}. \tag{7.3}$$

◁

Demonstração. Novamente $T < \infty$ quase certamente: em um bloco de $L = b-a$ passos, a sequência de apenas passos positivos tem probabilidade $p^L > 0$ e força a saída. Portanto, $\mathbb{P}_x(T > kL) \leq (1 - p^L)^k \to 0$. Pelo Exemplo 7.7, $M_n = r^{S_n}$ é um martingal. Como $M_{T \wedge n}$ permanece entre r^a e r^b, o Teorema 7.9 fornece

$$r^x = E_x(r^{S_T}) = r^a \mathbb{P}_x(S_T = a) + r^b \mathbb{P}_x(S_T = b).$$

Se $u = \mathbb{P}_x(S_T = b)$, a identidade se escreve $r^x = r^a(1 - u) + r^b u$. Como $r \neq 1$, os números r^a e r^b são distintos. Assim,

$$u = \frac{r^x - r^a}{r^b - r^a}, \qquad 1 - u = \frac{r^b - r^x}{r^b - r^a},$$

que são as fórmulas de (7.3). O cálculo vale tanto para $r > 1$ quanto para $0 < r < 1$: neste último caso, numerador e denominador mudam de sinal juntos. ■

No passeio assimétrico, a própria posição já não é um martingal. A função r^{S_n} compensa a tendência da caminhada e desempenha o papel que S_n tinha no caso simétrico. Em lugar de resolver novamente uma recorrência, usamos a constância da esperança e os dois valores de fronteira.

E se as probabilidades de subir e descer mudarem de estado para estado? Em geral, uma única potência r^{S_n} já não compensa a deriva. A função de escala do próximo exemplo constrói a transformação adequada para cada cadeia.

Exemplo 7.15 — Função de escala de nascimento e morte.
Considere uma cadeia em $\{0, 1, 2, \ldots\}$ com

$$p(x, x+1) = p_x, \quad p(x, x-1) = q_x \ (x \geq 1), \quad p(x, x) = 1 - p_x - q_x,$$

sem outras transições. Suponha $q_0 = 0$, $0 \leq p_0 \leq 1$ e, para $x \geq 1$, $p_x, q_x > 0$ e $p_x + q_x \leq 1$. Defina

$$\phi(0) = 0, \qquad \phi(z) = \sum_{y=1}^{z} \prod_{k=1}^{y-1} \frac{q_k}{p_k}, \quad z \geq 1,$$

com produto vazio igual a 1. Para inteiros $0 \leq a < x < b$,

$$\mathbb{P}_x(H_a < H_b) = \frac{\phi(b) - \phi(x)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

Se $p_0 > 0$, o estado 0 é recorrente se, e somente se, $\phi(b) \to \infty$. Se $p_0 = 0$, ele é absorvente e recorrente, qualquer que seja esse limite.

◁

A escala ajusta as distâncias entre estados para compensar a deriva local. A hipótese de saída de 0 é essencial no critério de recorrência: a escala mede a possibilidade de voltar *depois de sair*. A fórmula entre barreiras vale também quando $p_0 = 0$.

Demonstração. Pela definição da soma, para $x \geq 1$,

$$\phi(x) - \phi(x-1) = \prod_{k=1}^{x-1} \frac{q_k}{p_k} > 0, \qquad \phi(x+1) - \phi(x) = \frac{q_x}{p_x}\,[\phi(x) - \phi(x-1)].$$

As diferenças consecutivas de ϕ satisfazem

$$p_x[\phi(x+1) - \phi(x)] = q_x[\phi(x) - \phi(x-1)], \qquad x \geq 1.$$

De fato,

$$(P\phi)(x) - \phi(x) = p_x[\phi(x+1) - \phi(x)] - q_x[\phi(x) - \phi(x-1)] = 0.$$

A probabilidade de permanência não aparece nessa diferença, pois produz incremento zero. Logo $P\phi(x) = \phi(x)$ no interior das barreiras. De cada estado interno existe um caminho de probabilidade positiva até uma barreira.

Como há apenas finitos estados internos, o argumento por blocos geométricos usado na ruína garante que $T = H_a \wedge H_b$ é finito quase certamente. O martingal parado $\phi(X_{T\wedge n})$ é limitado por $\phi(b)$. Pela parada com processo limitado,

$$\phi(x) = \phi(a)\mathbb{P}_x(H_a < H_b) + \phi(b)\mathbb{P}_x(H_b < H_a),$$

o que dá a fórmula, pois ϕ é estritamente crescente.

Tomando $a = 0$ e $x = 1$, obtemos $\mathbb{P}_1(H_0 < H_b) = 1 - 1/\phi(b)$. Esses eventos aumentam para $\{H_0 < \infty\}$: toda trajetória que chega a 0 em tempo finito tem máximo finito até a chegada. Assim, $\mathbb{P}_1(H_0 < \infty) = 1$ exatamente quando $\phi(b) \to \infty$. No primeiro passo a partir de 0,

$$\mathbb{P}_0(T_0^+ < \infty) = 1 - p_0 + p_0\mathbb{P}_1(H_0 < \infty).$$

Para $p_0 > 0$, essa expressão é 1 precisamente no caso anunciado. Para $p_0 = 0$, o retorno em tempo positivo ocorre já no passo 1. ∎

7.5.2 Tempos de saída

Para calcular *por onde* a cadeia sai, bastou encontrar uma função harmônica. Para calcular *quando* ela sai, precisamos também contabilizar o tempo gasto em cada passo. É esse custo de uma unidade por etapa que aparece na equação de Poisson: a função de estado deve compensá-lo com uma queda média de uma unidade.

Proposição 7.11 — Saída e equação de Poisson

Seja X uma cadeia de Markov em S, com matriz P. Seja $A \subset S$, suponha que $C = S \setminus A$ seja finito e defina

$$H_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}.$$

Suponha $\mathbb{P}_x(H_A < \infty) = 1$ para todo $x \in C$. Se $g = 0$ em A e

$$g(x) = 1 + \sum_y p(x,y) g(y) \quad \text{para } x \in C,$$

então $g(x) = E_x(H_A)$ para $x \in C$.

Demonstração. O cálculo do Exemplo 7.9 vale aqui porque g é limitada em C e nula em A. Ele mostra que

$$g(X_{H_A \wedge n}) + (H_A \wedge n)$$

é um martingal. Tomando esperanças,

$$g(x) = E_x g(X_{H_A \wedge n}) + E_x(H_A \wedge n).$$

Como C é finito, $g(X_{H_A \wedge n})$ é limitado e converge quase certamente para $g(X_{H_A}) = 0$. Além disso,

$$E_x(H_A \wedge n) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(H_A \geq m) \uparrow E_x(H_A).$$

A primeira regra da Proposição 7.8, com a cota constante de $|g|$ em C, faz o primeiro termo tender a zero. A fórmula das probabilidades de cauda da mesma proposição faz o segundo tender a $E_x(H_A)$ e conclui o argumento. ∎

Este é o Teorema 2.21, agora obtido pela parada do martingal que combina a função de estado com o tempo acumulado.

No passeio simétrico, a posição tem média constante, mas o seu quadrado cresce em média uma unidade a cada passo. Subtrair esse crescimento produz $S_n^2 - n$, o martingal apropriado para calcular a duração média do jogo.

Exemplo 7.16 — Duração de jogos justos.
Seja (S_n) uma caminhada aleatória simples simétrica, iniciada em $x \in (a, b)$, com a, b, x inteiros, e seja

$$T = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n \in \{a, b\}\}.$$

A duração média é

$$E_x(T) = (x - a)(b - x).$$

◁

Demonstração. Pelo Exemplo 7.4, $S_n^2 - n$ é um martingal. Aplicando o Teorema 7.5 no tempo $T \wedge n$,

$$x^2 = E_x(S_{T\wedge n}^2) - E_x(T \wedge n).$$

A finitude quase certa de T foi verificada no exemplo da distribuição de saída simétrica. O processo $S_{T\wedge n}$ permanece no intervalo $[a, b]$ e, em cada trajetória com $T < \infty$, é igual a S_T a partir de algum instante. Assim, converge quase certamente para S_T. Seus quadrados são limitados pela constante $\max\{a^2, b^2\}$; a primeira regra da Proposição 7.8 faz suas esperanças convergirem. Pela fórmula de caudas da mesma proposição, $E(T \wedge n) \to E(T)$. Portanto,

$$E_x(T) = E_x(S_T^2) - x^2.$$

Usando as probabilidades de saída de (7.2), obtemos

$$\begin{aligned} E_x(T) &= a^2 \frac{b - x}{b - a} + b^2 \frac{x - a}{b - a} - x^2 \\ &= (x - a)(b - x). \end{aligned}$$

■

A diferença em relação ao cálculo das probabilidades de saída é instrutiva: S_n acompanha a posição, enquanto $S_n^2 - n$ carrega também a passagem do tempo.

Para incrementos independentes de média μ, uma soma com n parcelas tem média $n\mu$. A identidade seguinte mostra em que condições podemos substituir esse número fixo por um tempo de parada. O ponto decisivo é que a decisão de incluir a próxima parcela seja tomada antes de observá-la.

Teorema 7.12 — Equação de Wald

Sejam $\xi_1, \xi_2, \dots$ variáveis i.i.d. com $E|\xi_1| < \infty$ e $E(\xi_1) = \mu$. Seja $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, com S_0 constante. Se T é um tempo de parada para a filtração natural e $E(T) < \infty$, então

$$E(S_T - S_0) = \mu E(T).$$

Demonstração. O evento $\{T \geq m\}$ pode ser decidido com a história até $m-1$; como o próximo incremento é independente dessa história, sua indicadora é independente de ξ_m. Além disso,

$$E\left(\sum_{m=1}^{N} |\xi_m| \mathbf{1}_{\{T \geq m\}}\right) = E|\xi_1| \sum_{m=1}^{N} \mathbb{P}(T \geq m) \leq E|\xi_1| E(T) < \infty.$$

Para $K > N$, a desigualdade triangular fornece

$$E\left|\sum_{m=N+1}^{K} \xi_m \mathbf{1}_{\{T \geq m\}}\right| \leq E|\xi_1| \sum_{m=N+1}^{K} \mathbb{P}(T \geq m).$$

A cauda à direita tende a zero uniformemente em K, pela fórmula de caudas para $E(T)$. Para explicitar o controle do valor final, note primeiro que $E(T) < \infty$ implica $T < \infty$ quase certamente. Repartindo segundo os eventos $\{T = k\}$ e reordenando apenas parcelas não negativas, temos

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{m=N+1}^{T} |\xi_m|\right) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{k} E(|\xi_m|; T = k) \\ &= \sum_{m=N+1}^{\infty} E(|\xi_m|; T \geq m) \\ &= E|\xi_1| \sum_{m=N+1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq m) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

A soma é entendida como zero quando $T \leq N$. Esse cálculo, também com $N = 0$, prova a integrabilidade de $S_T - S_0$ e mostra que as somas parciais convergem em média a esse valor. Passando ao limite nas esperanças das

somas finitas, obtemos

$$\begin{aligned} E(S_T - S_0) &= \sum_{m=1}^{\infty} E\big(\xi_m \mathbf{1}_{\{T \geq m\}}\big) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \mu \mathbb{P}(T \geq m) = \mu E(T). \end{aligned}$$

■

No Exemplo 7.11, temos $\mu = 0$ e $E_1(S_T) \neq E_1(S_0)$. Pela contrapositiva da equação de Wald, necessariamente $E_1(T) = \infty$.

Já num passeio com deriva para baixo, a esperança do tempo de chegada pode ser finita. O martingal $S_n - (p-q)n$ permite calculá-la, mas primeiro precisamos verificar essa finitude: não seria legítimo aplicar Wald antes de estabelecer sua hipótese.

Exemplo 7.17 — Duração de jogos injustos.

Considere a caminhada aleatória simples assimétrica $S_n = x + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, com

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\xi_i = -1) = q = 1 - p.$$

Suponha $0 < p < 1/2$, $x \geq 1$ inteiro e seja $T = \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\}$. Então $E_x(T) = x/(q-p)$.

◁

Demonstração. Como $E(\xi_i) = p - q < 0$, o processo $S_n - (p-q)n$ é um martingal. Parando em $T \wedge n$,

$$x = E_x(S_{T\wedge n}) + (q-p)E_x(T \wedge n) \geq (q-p)E_x(T \wedge n),$$

pois $S_{T\wedge n} \geq 0$: antes de atingir zero, a caminhada não pode ficar negativa, e na parada seu valor é zero. Pela fórmula de caudas, $E_x(T \wedge n) \uparrow E_x(T)$; fazendo $n \to \infty$, obtemos $E_x(T) \leq x/(q-p) < \infty$. Em particular, T é finito quase certamente. A equação de Wald pode agora ser aplicada e dá

$$E_x(S_T - S_0) = (p-q)E_x(T).$$

Como $S_T = 0$ e $S_0 = x$, essa igualdade é $-x = (p-q)E_x(T)$, isto é,

$$E_x(T) = \frac{x}{q-p}.$$

■

Os exemplos de saída ilustram uma escolha que vale lembrar: a ferramenta não é sempre o mesmo martingal. A posição, uma potência, uma função de escala ou um quadrado compensado respondem a perguntas distintas. O que permanece é o cuidado com a parada e com a passagem ao limite.

7.6 Problemas de síntese

Os dois problemas seguintes reúnem a escolha do martingal, a justificação da parada e a interpretação do resultado. No primeiro, duas perguntas sobre a mesma partida exigem martingais diferentes. No segundo, voltamos à estratégia de duplicação para calcular o efeito de um limite de apostas.

Exemplo 7.18 — Uma partida: chance de vitória e duração.
Um jogador começa com duas unidades e, a cada rodada, ganha uma unidade com probabilidade $2/3$ ou perde uma unidade com probabilidade $1/3$, independentemente das rodadas anteriores. Ele para quando seu capital atinge zero ou cinco unidades. Qual é a probabilidade de alcançar cinco? Quantas rodadas a partida dura, em média?

◁

Resolução. Escreva $S_n = 2 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ e $T = \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{0, 5\}\}$. Antes das contas, verifiquemos que a partida termina e que $E(T) < \infty$. A partir de qualquer capital interno, uma sequência de cinco vitórias força a saída pela barreira superior em, no máximo, cinco rodadas. Essa sequência tem probabilidade $\alpha = (2/3)^5$, independentemente do passado. O argumento por blocos dá

$$\mathbb{P}(T > 5k) \leq (1-\alpha)^k, \qquad E(T) \leq 5 \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k < \infty.$$

Para a probabilidade de vitória, usamos o martingal 2^{-S_n}. Até a parada, ele permanece entre 2^{-5} e 1. Se $h = \mathbb{P}(S_T = 5)$, a parada com processo

limitado fornece

$$\frac{1}{4} = E(2^{-S_T}) = (1-h) + \frac{h}{32}, \qquad h = \frac{24}{31}.$$

Para a duração, precisamos de um martingal que registre o tempo. Como $E(\xi_1) = 1/3$, esse papel cabe a $S_n - n/3$. Já provamos a integrabilidade de T, portanto a equação de Wald dá

$$E(S_T) - 2 = \frac{1}{3}E(T).$$

O capital final vale cinco na vitória e zero na ruína. Logo,

$$E(T) = 3\left(5 \cdot \frac{24}{31} - 2\right) = \frac{174}{31}.$$

A chance de vitória é aproximadamente 0,774, e a duração média é aproximadamente 5,61 rodadas. A primeira conta usa os valores da função exponencial nas barreiras; a segunda combina a posição final com o ganho médio por rodada. Não foi necessário resolver uma nova equação de diferenças para a duração. ■

Exemplo 7.19 — Duplicar com um limite de apostas.

Retomemos o Exemplo 7.10, com rodadas independentes, resultados $+1$ e -1 equiprováveis e um limite de $m \geq 1$ apostas. O jogador aposta $1, 2, 4, \ldots$ até a primeira vitória ou até completar m derrotas. Qual é a distribuição do ganho final G_m? O que acontece quando permitimos cada vez mais apostas?

◁

Resolução. Se a primeira vitória ocorre até a rodada m, ela cobre todas as perdas anteriores e deixa uma unidade de ganho. Se as m rodadas terminam em derrota, a perda acumulada é $1 + 2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$. Assim,

$$\mathbb{P}(G_m = 1) = 1 - 2^{-m}, \qquad \mathbb{P}\big(G_m = -(2^m - 1)\big) = 2^{-m},$$

e

$$E(G_m) = (1 - 2^{-m}) - (2^m - 1)2^{-m} = 0.$$

Também podemos chegar à média pela transformada de martingal. Se τ é a rodada da primeira vitória e $\xi_k \in \{-1, 1\}$ é o resultado da rodada k, então

$$G_m = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \mathbf{1}_{\{\tau \geq k\}} \xi_k.$$

A aposta da rodada k é decidida com os resultados até $k-1$. Para cada m fixo, todos os ganhos envolvidos são integráveis; portanto a transformada preserva a média zero.

Agora use a mesma sequência infinita de resultados para comparar os diferentes limites m. A primeira vitória ocorre quase certamente em tempo finito. Em cada uma dessas trajetórias, $G_m = 1$ para todo $m \geq \tau$, de modo que $G_m \to 1$ quase certamente. Apesar disso, $E(G_m) = 0$ para todo m. Não há contradição: a perda possível cresce como 2^m, e não existe uma variável integrável que domine todos os $|G_m|$; se existisse, a Proposição 7.8 obrigaria as médias a convergir para 1. Aumentar o limite torna o ganho mais provável, mas também aumenta a perda que pode ocorrer. Convergência quase certa, sozinha, não permite trocar limite e esperança. ■

7.7 Exercícios

Exercício 7.1 — Previsão e informação revelada

Escolha uniformemente Y em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Inicialmente sabemos apenas se $Y \leq 4$; essa é a informação $\mathcal{F}_0$. Depois descobrimos também se Y é par, obtendo $\mathcal{F}_1$, e por fim observamos o próprio valor de Y, obtendo $\mathcal{F}_2$. Calcule $M_n = E(Y \mid \mathcal{F}_n)$ para $n = 0, 1, 2$ e verifique diretamente a propriedade de martingal. A variável Y é adaptada se a tomarmos como um processo constante desde o instante zero?

Exercício 7.2 — Aposta decidida antes ou depois

Sejam ξ_n independentes com valores ± 1 equiprováveis e $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Compare as riquezas de capital inicial zero geradas pelas apostas $H_1 = 1$, $H_n = \xi_{n-1}$ para $n \geq 2$, e pelas apostas $K_n = \xi_n$. Qual estratégia é previsível para a filtração natural? Calcule a esperança da riqueza em cada caso e explique por que não há contradição com o teorema da transformada.

Exercício 7.3 — Duas barreiras e dois martingais

Uma caminhada simétrica começa em zero e para ao atingir -2 ou 3. Use S_n e $S_n^2 - n$ para calcular a probabilidade de saída por 3 e a duração média. Em cada passagem ao limite, indique a cota uniforme ou a soma de probabilidades de cauda utilizada.

Exercício 7.4 — Um número prescrito de sucessos

Ensaios independentes têm probabilidade 0,3 de sucesso. Seja T o número de ensaios até o quarto sucesso. Prove primeiro $E(T) < \infty$, comparando blocos de quatro ensaios, e só então use Wald para calcular $E(T)$. Por que escrever diretamente $4 = 0{,}3E(T)$ sem verificar essa hipótese deixaria uma lacuna?

Exercício 7.5 — Wright–Fisher e fixação

Em uma população com seis cópias de um gene, X_n conta as cópias de um alelo. Condicionado ao passado, X_{n+1} tem lei Binomial$(6, X_n/6)$. Suponha $X_0 = 2$. Mostre que X_n e

$$U_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n X_n(6 - X_n)$$

são martingais. Prove que a absorção em $\{0, 6\}$ ocorre quase certamente e calcule a probabilidade de fixação em 6. Obtenha também $E[X_n(6 - X_n)]$.

Exercício 7.6 — Média constante e limite zero

Sejam U_n independentes e uniformes em $(0, 1)$, e $M_n = \prod_{k=1}^{n}(2U_k)$, com $M_0 = 1$. Prove que M é um martingal não negativo de média 1, mas $M_n \to 0$ quase certamente. Use a lei dos grandes números para $\log(2U_k)$. Explique por que não existe uma variável integrável que domine todos os M_n.

Exercício 7.7 — Escala e uma fronteira absorvente

Para $x \geq 1$, tome $p_x = 3/4$ e $q_x = 1/4$. Calcule $\phi(b)$ e $\mathbb{P}_1(H_0 < \infty)$. Compare a recorrência de 0 quando $p_0 = 0$ e quando $p_0 = 2/5$, calculando $\mathbb{P}_0(T_0^+ < \infty)$ nos dois casos.

Exercício 7.8 — Segunda identidade de Wald para parada limitada

Sejam ξ_k i.i.d., centrados e com variância $\sigma^2 < \infty$, e $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Se T é um tempo de parada limitado por um inteiro N, prove, usando somas finitas e esperanças condicionais,

$$E(S_T^2) = \sigma^2 E(T).$$

Dica: escreva $S_T = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mathbf{1}_{\{T \geq k\}}$, explique por que as indicadoras são previsíveis e calcule os termos diagonais e cruzados do quadrado. O caso geral $E(T) < \infty$, sem limite determinístico para T, será retomado no capítulo de Integração Estocástica.

Exercício 7.9 — População dividida por sua média

Em Galton–Watson, suponha $Z_0 = k \geq 1$ e média de descendentes $0 < m < \infty$. Prove que $W_n = Z_n / m^n$ é um martingal para o histórico das gerações. Se $0 < m < 1$, mostre que $W_n \to 0$ quase certamente, embora $E(W_n) = k$. Qual fenômeno esse exemplo compartilha com o Exercício 7.6?

7.8 Testes sequenciais e martingais*

O que acontece com o nível de significância quando observamos repetidamente os dados e paramos assim que o resultado parece favorável? Um teste planejado para um tamanho fixo de amostra controla a probabilidade de rejeitar uma hipótese verdadeira naquele instante. Essa garantia não se estende automaticamente à procura de um instante favorável entre muitos.

Por exemplo, vinte testes independentes em blocos distintos, cada um com probabilidade de falso positivo 0,05, produzem pelo menos um falso positivo com probabilidade $1 - 0{,}95^{20} \approx 0{,}642$. Quando os testes reutilizam os dados acumulados, as decisões são dependentes e essa fórmula não se aplica; ainda assim, repetir um teste fixo até aparecer $p < 0{,}05$ em geral infla o erro. Precisamos de uma garantia para toda a trajetória da estatística.

Definição 7.6 — Razão de verossimilhanças sequencial

Considere observações $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. sob cada uma das hipóteses simples H_0 e H_1, com funções de massa no caso discreto ou densidades no contínuo, f_0 e f_1. Os dois modelos são fixados antes de observar os dados. Suponha que $f_1(x) = 0$ sempre que $f_0(x) = 0$, isto é, que o segundo modelo não atribua massa a valores impossíveis sob o primeiro. A *razão de verossimilhanças* acumulada é

$$L_0 = 1, \qquad L_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_1(X_k)}{f_0(X_k)}.$$

Denote por $\mathcal{F}_n$ a informação revelada por $X_1, \dots, X_n$. Sob H_0, os denominadores são positivos quase certamente; valores nos conjuntos nulos restantes podem ser definidos arbitrariamente.

Um valor grande de L_n indica que os dados observados favorecem H_1 em relação a H_0. Não é a probabilidade de H_1 ser verdadeira: é uma comparação entre as probabilidades dos dados em dois modelos especificados.

Proposição 7.13 — Verossimilhança como martingal

Sob H_0, (L_n) é um martingal não negativo e $E_0 L_n = 1$ para todo n.

Demonstração. A razão de uma observação tem esperança

$$E_0\left[\frac{f_1(X_{n+1})}{f_0(X_{n+1})}\right] = \int_{\{f_0>0\}} f_1(x)\,dx = 1,$$

onde escrevemos uma soma no caso discreto e uma integral usual no contínuo. A última igualdade usa a hipótese sobre os suportes. Cada fator é uma função da nova observação e, portanto, é independente dos fatores anteriores. Pela não negatividade e pela independência,

$$E_0|L_n| = E_0 L_n = \prod_{k=1}^{n} E_0\left[\frac{f_1(X_k)}{f_0(X_k)}\right] = 1.$$

Isso prova a integrabilidade em cada instante. Como L_n é determinado pelos

dados observados até n, é também adaptado. Logo,

$$E_0(L_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = L_n E_0\left[\frac{f_1(X_{n+1})}{f_0(X_{n+1})}\middle| \mathscr{F}_n\right] = L_n.$$

■

Teorema 7.14 — Desigualdade de Ville

Se (L_n) é um martingal não negativo com $L_0 = 1$, então, para $0 < \alpha < 1$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} L_n \geq \frac{1}{\alpha}\right) \leq \alpha.$$

Demonstração. Fixe $c > 0$ e $T_c = \inf\{n \geq 0 : L_n \geq c\}$. Esse é um tempo de parada, pois saber se $T_c \leq m$ exige apenas examinar $L_0, \ldots, L_m$. Para cada inteiro m, o Teorema 7.5 sobre o processo parado dá

$$1 = EL_{T_c \wedge m} \geq E[L_{T_c}; T_c \leq m] \geq c\mathbb{P}(T_c \leq m).$$

A primeira desigualdade usa não negatividade, sem supor que L_{T_c} seja limitado ou que T_c seja finito. Os eventos $\{T_c \leq m\}$ crescem para $\{T_c < \infty\}$, logo $\mathbb{P}(T_c < \infty) \leq 1/c$ por continuidade da probabilidade.

Resta incluir a possibilidade de o supremo não ser atingido. Para todo $c < 1/\alpha$,

$$\left\{\sup_n L_n \geq 1/\alpha\right\} \subseteq \{T_c < \infty\}.$$

Portanto, a probabilidade do evento à esquerda é no máximo $1/c$. Fazendo $c \uparrow 1/\alpha$, obtemos a desigualdade desejada. O argumento usa apenas as identidades nos tempos limitados $T_c \wedge m$ e a continuidade das probabilidades; não exige passar ao limite na esperança do processo parado. ■

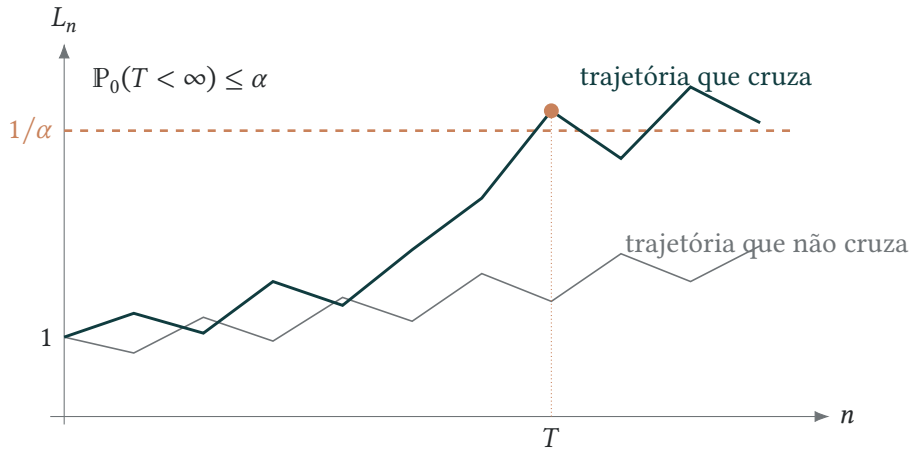


Figura 7.4: A desigualdade de Ville controla o evento de a trajetória cruzar a barreira $1/\alpha$ em algum instante. O controle vale para o supremo ao longo de todo o monitoramento, não apenas para um tempo previamente escolhido.

A regra "rejeite H_0 na primeira vez em que $L_n \ge 1/\alpha$" tem, assim, probabilidade de falso positivo no máximo α, mesmo com monitoramento após cada observação e sem horizonte máximo. A desigualdade é uma cota, não uma promessa de erro exatamente igual a α. O tratamento clássico de razões de verossimilhanças sequenciais está em Wald (1947); a desigualdade para martingais remonta a Ville (1939).

Exemplo 7.20 — Monitoramento de uma taxa de conversão.

Acompanhe usuários distintos com a mesma janela completa de observação e registre $X_k = 1$ se o usuário k realiza a ação definida como conversão, e $X_k = 0$ caso contrário. Suponha independência entre usuários e probabilidade constante de conversão. Considere o valor de referência conhecido $H_0 : p = 1/2$ e a alternativa previamente escolhida $H_1 : p = 0{,}7$.

Se $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, a estatística é

$$L_n = 1{,}4^{S_n}\, 0{,}6^{n-S_n}, \qquad \log L_n = S_n \log 1{,}4 + (n - S_n) \log 0{,}6.$$

Cada conversão multiplica a evidência por 1,4; cada não conversão a multiplica por 0,6. Para os dados $(1, 1, 0, 1)$, os valores sucessivos são

$$1{,}4, \quad 1{,}96, \quad 1{,}176, \quad 1{,}6464.$$

Com $\alpha = 0{,}05$, o limiar é 20, portanto não rejeitamos nesse trecho. Em outro trecho iniciado em $n = 0$, nove conversões consecutivas bastariam: $1{,}4^9 \approx 20{,}66$. A garantia de Ville considera todos os caminhos possíveis sob H_0, inclusive a procura contínua por um cruzamento.

◁

A garantia matemática depende também da forma como os dados são produzidos. Para cada usuário, o registro deve conservar o que conta como conversão, qual foi sua janela completa de observação e em que ordem ele entrou na amostra. A proporção S_n/n descreve a taxa observada, mas não autoriza reajustar livremente as hipóteses f_0 e f_1 usando os próprios resultados que estão sendo monitorados. Do mesmo modo, uma taxa de referência estimada de dados históricos carrega incerteza; tratá-la como conhecida muda as condições sob as quais o teste é válido.

As hipóteses de independência e de taxa constante merecem ser confrontadas com os registros. Taxas muito diferentes entre períodos ou grupos, assim como observações repetidas do mesmo indivíduo, podem indicar que a sequência de Bernoulli independentes não descreve bem o experimento. Um estudo A/B ainda exigiria considerar a alocação e os resultados dos dois grupos: o exemplo acima trata apenas do monitoramento contra uma referência fixa.

A desigualdade de Ville controla o risco de decidir *quando* interromper esse monitoramento, mas não corrige escolhas feitas depois de observar os

dados, mudanças na população ou dependências ignoradas. Por outro lado, não cruzar o limiar até certa data não demonstra H_0; a rapidez da detecção depende, entre outros fatores, da alternativa H_1 escolhida. Se mudamos o experimento ou as hipóteses, precisamos verificar novamente a propriedade de martingal que sustenta a garantia.

7.9 Reforço e seleção nas colônias de formigas*

Retomamos o modelo de dois caminhos da Seção 3.8, sem evaporação. A escolha obedece a (3.6) e a atualização é dada por (3.7) com $\delta = 0$. O histórico $\mathscr{H}_n$ da colônia até a iteração n forma uma filtração, e as proporções de feromônio são adaptadas a ela. Agora podemos demonstrar os resultados de convergência anteriormente anunciados.

7.9.1 Reforços iguais: a urna de Pólya

Primeiro suponha que os dois caminhos recebam o mesmo reforço $q > 0$ e que não haja evaporação. Temos então

$$\tau_i(n+1) = \tau_i(n) + q\mathbf{1}_{\{J_{n+1}=i\}}.$$

Dividindo todas as quantidades por q, recuperamos uma urna de Pólya: quando as quantidades iniciais divididas por q são inteiras, escolher o caminho i corresponde a retirar uma bola da cor i, devolvê-la e acrescentar outra da mesma cor. Para valores iniciais positivos não inteiros, a mesma regra usa massas de cada cor em lugar de números de bolas; a escolha é proporcional à massa e o reforço acrescenta uma unidade.

Teorema 7.15 — Feromônio como uma urna de Pólya

Defina

$$Z_n = \frac{\tau_1(n)}{\tau_1(n) + \tau_2(n)}.$$

No modelo sem evaporação e com reforços iguais, $(Z_n)_{n\geq 0}$ é um martingal limitado. Portanto, existe uma variável aleatória Z_∞ tal que $Z_n \to Z_\infty$ quase certamente.

Mais precisamente, se $\tau_1(0) = aq$ e $\tau_2(0) = bq$, com $a, b > 0$, então

$$Z_\infty \sim \mathrm{Beta}(a, b).$$

Em particular,

$$E[Z_\infty] = \frac{a}{a+b}, \qquad \mathrm{Var}(Z_\infty) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Demonstração. Escreva $S_n = \tau_1(n) + \tau_2(n)$ e $Z_n = \tau_1(n)/S_n$. Se o caminho 1 é escolhido, o novo valor da proporção é $(\tau_1(n) + q)/(S_n + q)$; caso contrário, é $\tau_1(n)/(S_n + q)$. Como a probabilidade da primeira alternativa é Z_n,

$$\begin{aligned} E[Z_{n+1} \mid \mathscr{H}_n] &= Z_n \frac{\tau_1(n) + q}{S_n + q} + (1 - Z_n)\frac{\tau_1(n)}{S_n + q} \\ &= Z_n. \end{aligned}$$

Logo, (Z_n) é um martingal. Como $0 \le Z_n \le 1$, o Teorema 7.7 garante a convergência quase certa.

Para identificar a distribuição do limite, considere uma sequência particular de $r + s$ escolhas, com r escolhas do caminho 1 e s do caminho 2. Escreva $(c)_k = c(c+1)\cdots(c+k-1)$, com $(c)_0 = 1$. Multiplicando as probabilidades condicionais, encontramos para qualquer sequência com essas contagens

$$\frac{(a)_r (b)_s}{(a+b)_{r+s}}.$$

De fato, cada escolha do caminho 1 acrescenta uma unidade à sua massa e cada escolha do caminho 2 faz o mesmo com a outra. Os denominadores crescem sucessivamente de $a + b$ até $a + b + r + s - 1$. Assim, a ordem das escolhas não altera essa probabilidade.

Para reconhecer a expressão, precisamos apenas de uma integral de uma variável. Para $a, b > 0$, defina

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\, du.$$

A integral imprópria é finita e positiva: perto de 0 o integrando se comporta como u^{a-1} e perto de 1, como $(1-u)^{b-1}$. A distribuição $\mathrm{Beta}(a, b)$ tem

densidade

$$f(p) = \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a,b)}, \qquad 0 < p < 1.$$

Não precisaremos da função Gama para calcular com essa distribuição. Da identidade $u + (1-u) = 1$, segue

$$B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1).$$

Uma integração por partes fornece

$$\begin{aligned} B(a+1,b) &= \int_0^1 u^a (1-u)^{b-1}\, du \\ &= \left[-\frac{u^a(1-u)^b}{b} \right]_0^1 + \frac{a}{b} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^b\, du \\ &= \frac{a}{b} B(a,b+1). \end{aligned}$$

O termo de fronteira é zero porque $a, b > 0$. Combinando as duas relações,

$$B(a+1,b) = \frac{a}{a+b} B(a,b), \qquad B(a,b+1) = \frac{b}{a+b} B(a,b).$$

Repetindo essas fórmulas r e s vezes, obtemos

$$\frac{B(a+r,b+s)}{B(a,b)} = \frac{(a)_r (b)_s}{(a+b)_{r+s}}.$$

Considere agora outro experimento. Primeiro sorteamos $P \sim \text{Beta}(a,b)$; depois, condicionado ao valor de P, fazemos escolhas independentes com probabilidade P de escolher o caminho 1. Uma sequência particular com r escolhas do primeiro caminho e s escolhas do segundo tem probabilidade

$$\begin{aligned} E[P^r(1-P)^s] &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 p^{a+r-1}(1-p)^{b+s-1}\, dp \\ &= \frac{(a)_r (b)_s}{(a+b)_{r+s}}. \end{aligned}$$

Portanto, toda sequência finita de escolhas tem a mesma probabilidade nos dois modelos.

Denote por $N_1(n)$ o número de escolhas do primeiro caminho até a etapa n. Então

$$Z_n = \frac{a + N_1(n)}{a + b + n}.$$

Esse valor depende apenas das primeiras n escolhas. Como cada sequência dessas escolhas tem a mesma probabilidade nos dois modelos, também Z_n tem a mesma distribuição em ambos, para cada n.

No modelo com parâmetro sorteado, a lei forte dos grandes números, aplicada com o valor de P fixado, dá $N_1(n)/n \to P$ e, consequentemente, $Z_n \to P$ quase certamente. No modelo de reforço original já provamos $Z_n \to Z_\infty$ quase certamente. Resta mostrar que a igualdade das distribuições em cada etapa identifica também a distribuição do limite.

Podemos fazer isso sem um teorema de convergência de distribuições. Fixe $u \in (0,1)$ e $\varepsilon > 0$. No modelo de reforço,

$$\mathbb{P}(Z_\infty \le u) \le \mathbb{P}(Z_n \le u + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Z_n - Z_\infty| > \varepsilon),$$

e, invertendo os papéis dos limiares,

$$\mathbb{P}(Z_n \le u - \varepsilon) \le \mathbb{P}(Z_\infty \le u) + \mathbb{P}(|Z_n - Z_\infty| > \varepsilon).$$

Os termos de desvio tendem a zero pela convergência quase certa. As probabilidades $\mathbb{P}(Z_n \le u \pm \varepsilon)$ são as mesmas nos dois modelos, pela igualdade de distribuições já demonstrada. No modelo com P, o mesmo argumento mostra que $\mathbb{P}(Z_n \le v) \to \mathbb{P}(P \le v)$ para todo v, pois P possui densidade. Deixando $n \to \infty$ e depois $\varepsilon \downarrow 0$, obtemos $\mathbb{P}(Z_\infty \le u) = \mathbb{P}(P \le u)$, isto é, $Z_\infty \sim \mathrm{Beta}(a,b)$.

Finalmente, as mesmas integrais dão, para $k = 1, 2$,

$$E(P^k) = \frac{B(a+k,b)}{B(a,b)} = \frac{(a)_k}{(a+b)_k}.$$

Em particular,

$$E(P) = \frac{a}{a+b}, \qquad E(P^2) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.$$

Subtraindo o quadrado da média,

$$\mathrm{Var}(P) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)},$$

como anunciado. ∎

O caso $a = b = 1$ permite interpretar o resultado: Z_∞ é uniforme em $[0,1]$. Embora os caminhos sejam simétricos, a proporção de feromônio não converge necessariamente a $1/2$. O reforço pode preservar indefinidamente flutuações ocorridas nas primeiras escolhas. Por exemplo,

$$\mathbb{P}(Z_\infty > 0{,}9) = 0{,}1.$$

Simetria das regras implica simetria da distribuição dos resultados, mas não obriga cada execução a terminar em uma configuração simétrica.

7.9.2 Reforços diferentes: deriva e seleção

Voltemos aos reforços $q_i = Q/L_i$, ainda sem evaporação. Suponha que $L_1 < L_2$; equivalentemente, $q_1 > q_2$. Agora o caminho 1 recebe mais feromônio toda vez que é percorrido.

Proposição 7.16 — Deriva em direção ao caminho menor

Seja

$$Z_n = \frac{\tau_1(n)}{\tau_1(n) + \tau_2(n)}.$$

No modelo (3.6) sem evaporação,

$$E[Z_{n+1} - Z_n \mid \mathscr{H}_n] = Z_n(1 - Z_n)\left(\frac{q_1}{S_n + q_1} - \frac{q_2}{S_n + q_2}\right), \tag{7.4}$$

em que $S_n = \tau_1(n) + \tau_2(n)$. Se $L_1 < L_2$, então (Z_n) é um submartingal limitado e, pelo Teorema 7.7, converge quase certamente.

Demonstração. Condicionado ao passado, a escolha do caminho 1 produz o incremento

$$\frac{\tau_1(n) + q_1}{S_n + q_1} - Z_n = \frac{q_1(1 - Z_n)}{S_n + q_1},$$

enquanto a escolha do caminho 2 produz

$$\frac{\tau_1(n)}{S_n + q_2} - Z_n = -\frac{q_2 Z_n}{S_n + q_2}.$$

Multiplicando esses incrementos pelas probabilidades Z_n e $1 - Z_n$, obtemos (7.4). Como a função $q \mapsto q/(S_n + q)$ é crescente, a deriva é positiva quando $q_1 > q_2$ e $0 < Z_n < 1$. Explicitamente,

$$\frac{q_1}{S_n + q_1} - \frac{q_2}{S_n + q_2} = \frac{S_n(q_1 - q_2)}{(S_n + q_1)(S_n + q_2)} > 0.$$

O valor Z_n é determinado pelo histórico e está entre zero e um; logo é adaptado e integrável. A deriva não negativa verifica a condição de submartingal, e a limitação permite aplicar o teorema de convergência citado no enunciado. ∎

A deriva positiva favorece, a cada etapa, o caminho mais curto. Ela também torna Z_n um submartingal limitado, mas isso garante apenas a existência de um limite, não que esse limite seja 1. Precisamos de uma ideia adicional para mostrar que o caminho mais curto acaba dominando.

A demonstração do Teorema 3.17, anunciado anteriormente, usa uma ligação com os processos de nascimento puro do Capítulo 6. Em vez de comparar diretamente as escolhas sucessivas, observaremos o crescimento de dois processos independentes que reproduzem as mesmas proporções de feromônio. Uma visão geral da teoria das urnas reforçadas está em Pemantle (2007).

Demonstração do Teorema 3.17. Primeiro passo: representar as escolhas por relógios. Para $i = 1, 2$, considere um processo de nascimento puro $Y_i(t)$ que, quando está no estado y, salta para $y + q_i$ a uma taxa igual a y. Tome os dois processos independentes, com os mesmos valores iniciais de feromônio do modelo discreto.

Se, em determinado instante, os processos estão em (y_1, y_2), seus relógios têm taxas y_1 e y_2. A corrida de exponenciais mostra que o primeiro toca antes do segundo com probabilidade $y_1/(y_1 + y_2)$, exatamente a probabilidade de escolher o caminho 1. Depois do toque, o relógio correspondente recomeça com a nova taxa; pela falta de memória, a espera residual do outro relógio conserva sua lei exponencial. Assim, a sequência dos pares observados nos instantes de salto tem a mesma lei que $(\tau_1(n), \tau_2(n))$. O relógio contínuo não altera a ordem probabilística das escolhas; apenas permite estudar separadamente o crescimento dos dois componentes.

Segundo passo: medir o crescimento de cada componente. Se $Y_i(0) = y_i > 0$, depois de m saltos sua massa é $y_i + q_i m$, e o tempo médio até o salto seguinte é $1/(y_i + q_i m)$. Podemos, portanto, escrever o instante do k-ésimo salto como

$$T_{i,k} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{E_{i,m}}{y_i + q_i m},$$

onde os $E_{i,m}$ são independentes e exponenciais de taxa 1. As esperas médias são comparáveis à série harmônica. Como $x \mapsto 1/(y_i + q_i x)$ é positiva e decrescente, a comparação entre soma e integral fornece

$$\int_0^k \frac{dx}{y_i + q_i x} \le \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{y_i + q_i m} \le \frac{1}{y_i} + \int_0^{k-1} \frac{dx}{y_i + q_i x}.$$

Essas integrais são diferenças de logaritmos. Logo, existe uma constante $D_i < \infty$ tal que, para todo $k \ge 2$,

$$\left| ET_{i,k} - \frac{\log k}{q_i} \right| \le D_i.$$

Pela independência, as variâncias se somam:

$$\operatorname{Var}(T_{i,k}) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{(y_i + q_i m)^2} \le C_i < \infty,$$

pois a série é comparável à de $1/m^2$. Assim, a média cresce na escala $\log k$, mas a variância permanece limitada.

Escolhemos primeiro a subsequência $k = 2^j$: nela, $\log k$ é proporcional a j, e a estimativa de Chebyshev se torna somável. Para $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|T_{i,2^j} - ET_{i,2^j}| > \varepsilon j\big) \le \frac{C_i}{\varepsilon^2 j^2}.$$

Como a série $\sum_{j \ge 1} j^{-2}$ converge, a soma dessas probabilidades é finita. Pelo primeiro lema de Borel–Cantelli, para cada $\varepsilon > 0$, os desvios maiores que εj ocorrem apenas finitas vezes, quase certamente. Aplicando o resultado a $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, obtemos

$$\frac{T_{i,2^j} - ET_{i,2^j}}{j} \longrightarrow 0 \qquad \text{quase certamente.}$$

A estimativa para a média também mostra que $ET_{i,2^j}/(j\log 2) \to 1/q_i$. Juntando os dois limites, $T_{i,2^j}/\log(2^j) \to 1/q_i$.

Resta passar das potências de dois a todos os índices. Para $2^j \le k \le 2^{j+1}$ e $j \ge 1$, a monotonicidade dá

$$\frac{T_{i,2^j}}{(j+1)\log 2} \le \frac{T_{i,k}}{\log k} \le \frac{T_{i,2^{j+1}}}{j\log 2}.$$

Os dois extremos tendem a $1/q_i$, pois os fatores $j/(j+1)$ e $(j+1)/j$ tendem a 1. Portanto,

$$\frac{T_{i,k}}{\log k} \longrightarrow \frac{1}{q_i} \qquad \text{quase certamente.}$$

Esse limite mostra também que os instantes de salto tendem a infinito: não há explosão. Por outro lado, cada número finito de saltos ocorre em tempo finito, de modo que sua contagem $K_i(t)$ cresce sem limite quando $t \to \infty$.

Precisamos agora converter o tempo necessário para k saltos na quantidade de saltos observada até t. Ponha $k = K_i(t)$. Para t suficientemente grande, $k \ge 2$ e $T_{i,k} \le t < T_{i,k+1}$; portanto,

$$\frac{T_{i,k}}{\log k} \le \frac{t}{\log k} < \frac{T_{i,k+1}}{\log(k+1)}\frac{\log(k+1)}{\log k}.$$

Os extremos tendem a $1/q_i$. Assim, $t/\log K_i(t) \to 1/q_i$ e, tomando os recíprocos, $\log K_i(t)/t \to q_i$. Como $Y_i(t) = y_i + q_i K_i(t)$, a diferença $\log Y_i(t) - \log K_i(t)$ tende a $\log q_i$. Dividida por t, essa diferença tende a zero. Portanto, os dois logaritmos divididos por t têm o mesmo limite:

$$\frac{\log Y_i(t)}{t} \longrightarrow q_i \qquad \text{quase certamente.}$$

Terceiro passo: comparar os caminhos. Cada componente cresce exponencialmente em escala logarítmica, com taxa q_i. Se $q_1 > q_2$, então

$$\frac{1}{t}\log\frac{Y_2(t)}{Y_1(t)} \longrightarrow q_2 - q_1 < 0,$$

e por isso $Y_2(t)/Y_1(t) \to 0$. Os instantes da sequência conjunta de saltos também tendem a infinito. Neles, a proporção de feromônio do primeiro caminho é $Z_n = Y_1/(Y_1+Y_2)$; portanto $Z_n \to 1$. ∎

A mesma estimativa fornece a ordem da velocidade em escala logarítmica:

$$\frac{\log(1 - Z_n)}{\log n} \longrightarrow -\left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right) \qquad \text{quase certamente.}$$

De fato, até o tempo t houve $(Y_i(t) - y_i)/q_i$ saltos do processo i; como $Y_2(t)/Y_1(t) \to 0$, o número total $n(t)$ de saltos satisfaz $\log n(t)/t \to q_1$. Por outro lado, $t^{-1}\log(1 - Z_{n(t)}) \to q_2 - q_1$. Como $q_i = Q/L_i$, o expoente é $1 - L_1/L_2$. Quando os comprimentos são muito próximos, a distinção entre os caminhos pode ser lenta. Esse fenômeno aparece com frequência em otimização: soluções quase equivalentes exigem muitas amostras para serem separadas de modo consistente.

O caminho mais longo continua sendo usado infinitas vezes quase certamente. Na representação em tempo contínuo, o segundo processo também realiza infinitos saltos; sua quantidade de feromônio apenas cresce em uma ordem menor. Assim, a fração das escolhas correspondentes ao caminho 2 converge a zero, embora o número total dessas escolhas cresça sem limite.

7.10 Exercícios complementares*

Os três primeiros exercícios usam a Seção 7.8; o último retoma a Seção 7.9.

Exercício 7.10 — Evidência e limiar*

No monitoramento de conversões, calcule L_n para os cinco dados $(0, 1, 1, 1, 1)$. Quantas conversões consecutivas desde o início seriam necessárias para cruzar o limiar de um teste com $\alpha = 0{,}01$?

Exercício 7.11 — O papel da não negatividade*

Na prova de Ville, explique por que basta parar em $T_c \wedge m$ e por que não foi necessário provar $E_0 L_{T_c} = 1$. Qual passagem falharia se os valores do martingal pudessem ser negativos?

Exercício 7.12 — Mistura de alternativas*

Para $H_0 : p = 1/2$, sejam $L_n^{(a)}$ e $L_n^{(b)}$ as razões contra as alternativas fixas $p = a$ e $p = b$, com $0 < a, b < 1$. Mostre que $M_n = (L_n^{(a)} + L_n^{(b)})/2$ é um martingal não negativo iniciado em 1. Use Ville para justificar o limiar $1/\alpha$ para M_n. Por que a mesma prova não autoriza substituir a média por $\max(L_n^{(a)}, L_n^{(b)})$?

Exercício 7.13 — Deriva do feromônio*

No modelo de dois caminhos sem evaporação, tome $\tau_1(0) = \tau_2(0) = 1$, $Q = 1$, $L_1 = 2$ e $L_2 = 4$. Calcule os dois valores possíveis de Z_1, suas probabilidades, $E[Z_1]$ e $E[Z_1 - Z_0]$. Em seguida, para feromônios positivos e reforços gerais $q_1, q_2 > 0$, obtenha a fórmula da deriva (7.4) condicionando à próxima escolha. Por que a convergência de um submartingal limitado com deriva positiva, por si só, não identifica o limite como um?

Respostas e indicações

As respostas registram os resultados e os passos que sustentam o argumento. Uma simulação pode conferir numericamente uma conta, mas não substitui a justificativa de uma identidade ou de um limite.

Cadeias de Markov finitas

Exercício 2.1. A fórmula da probabilidade de um caminho fornece

$$\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Como a segunda coluna de P é constante e igual a $1/2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 3) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Para $A = \{X_0 \in \{1, 3\}\}$, temos $\mathbb{P}(A, X_1 = 2) = 3/8 > 0$. A probabilidade do caminho que prossegue até $X_2 = 3$ é $3/32$, e, portanto,

$$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid A, X_1 = 2) = \frac{3/32}{3/8} = \frac{1}{4} = p(2, 3).$$

Conhecido X_1, o passado parcial não altera a lei do próximo passo.

Exercício 2.2. Partindo de 1, a cadeia permanece nele enquanto não dá o salto para 0. Assim, $P^n(1, 1) = r^n$, inclusive em $n = 0$. Se V conta todas as visitas ao estado 1,

$$E_1 V = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(1, 1) = \frac{1}{1 - r} < \infty.$$

O primeiro passo retorna a 1 com probabilidade r; se vai a 0, o retorno se torna impossível. Portanto, $\mathbb{P}_1(T_1^+ < \infty) = r < 1$, e o estado 1 é transiente. O estado 0 é absorvente, logo recorrente, e $\sum_n P^n(0,0) = \infty$.

Exercício 2.3. Com $Y_n = 1$, a chance do próximo valor um é 0,6 se o anterior foi zero e 0,8 se foi um. A informação anterior ainda importa. O par atual contém a informação necessária e tem matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

De (a, b), o próximo estado tem obrigatoriamente a forma (b, c).

Exercício 2.4. As linhas interiores têm 0,4 na coluna anterior e 0,6 na seguinte; as linhas de 0 e 4 são absorventes. Para chegar a 4 em três passos, o único caminho é $1, 2, 3, 4$, de probabilidade $0{,}6^3 = 0{,}216$. Para terminar em zero, pode-se sair diretamente para zero e permanecer ou percorrer $1, 2, 1, 0$: $P^3(1,0) = 0{,}4 + 0{,}6(0{,}4)^2 = 0{,}496$. A multiplicação $P^3 = P^2 P$ soma exatamente esses casos.

Exercício 2.5. No jogo justo, a chance de atingir seis é $1/3$ e a duração média é oito apostas. Para $p = 3/5$, a razão $q/p = 2/3$ dá

$$u_2 = \frac{1 - (2/3)^2}{1 - (2/3)^6} = \frac{81}{133}, \qquad v_2 = \frac{6u_2 - 2}{1/5} = \frac{1100}{133} \approx 8{,}271.$$

Há mais chance de alcançar a barreira distante, o que pode aumentar o tempo gasto; sucesso e duração medem aspectos diferentes.

Exercício 2.6. Para decidir se $T \le n$, basta observar $X_0, \ldots, X_n$; logo, T é um tempo de parada. A fórmula da ruína com barreiras 0 e 3 dá $\mathbb{P}_2(X_T = 3) = 2/3$. No evento $\{X_T = 3\}$, a propriedade forte de Markov permite recomeçar em 3, agora com as barreiras originais 0 e 5. Portanto,

$$\mathbb{P}_2(X_\tau = 5 \mid X_T = 3) = \mathbb{P}_3(X_\tau = 5) = \frac{3}{5},$$
$$E_2[\tau - T \mid X_T = 3] = E_3[\tau] = 3(5 - 3) = 6.$$

Toda trajetória que chega a 5 antes de 0 precisa passar por 3. Assim, $\mathbb{P}_2(X_\tau = 5) = (2/3)(3/5) = 2/5$, de acordo com a fórmula direta.

Exercício 2.7. Se R é a submatriz nos estados $1, 2, 3, 4$, a linha de $(I - R)^{-1}$ correspondente a 2 é $(6/5, 12/5, 8/5, 4/5)$. Assim, são esperadas $8/5$ visitas ao estado 3; a soma da linha é seis, igual a $2(5 - 2)$.

Exercício 2.8. Depois do silêncio, $r_0 = (1/9, 8/9)$. A previsão seguinte é $(16/45, 29/45)$; após o clique, $r_1 = (72/101, 29/101)$. A probabilidade desse clique, dado o silêncio anterior, é $101/225$.

Exercício 2.9. O fator de emissão $b(y)$ multiplica todas as coordenadas previstas e se cancela na normalização, quando $b(y) > 0$. Com emissões idênticas, a lei das observações é o produto desses mesmos fatores, sem depender de P: as ações não identificam as transições ocultas.

Exercício 2.10. As probabilidades são $383/550$ e $101/225$, respectivamente. A observação inicial muda a distribuição do estado oculto, que persiste até o próximo dia. A independência exigida pelo HMM é condicional à trajetória oculta, não uma independência marginal entre os cliques.

Distribuições estacionárias e comportamento limite

Exercício 3.1. Da equação $\pi P = \pi$, resulta $\pi = (2/3, 1/3)$. A cadeia é finita, irredutível e aperiódica. Pelo teorema ergódico,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c(X_n) \longrightarrow \pi(0)c(0) + \pi(1)c(1) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \quad \text{quase certamente.}$$

Em contraste, $E_0 c(X_1) = 3/4 + 4/4 = 7/4$: a previsão para um passo não é a média de longo prazo.

Para o acoplamento proposto, se as duas cópias estão em estados diferentes, permanecem diferentes somente quando $1/4 < U_n \le 1/2$, evento de

probabilidade $1/4$. Quando se encontram, o mesmo uniforme conserva a igualdade. Como $\mathbb{P}(X_0 \neq Y_0) = \pi(1) = 1/3$,

$$\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

A desigualdade de acoplamento dá

$$\|P^n(0,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Aqui a cota é exata: se $p_n = P^n(0,1)$, a recorrência $p_{n+1} = 1/4 + p_n/4$, com $p_0 = 0$, fornece $p_n = (1 - 4^{-n})/3$.

Exercício 3.2. As classes são $\{1,2\}$, $\{3\}$ e $\{4,5\}$. A primeira e a terceira são fechadas e recorrentes; 3 é transiente. Os períodos são dois em $\{1,2\}$ e um nos demais estados, pois $p(3,3) > 0$ e $p(4,4) > 0$. Todas as estacionárias são

$$t(1/2, 1/2, 0, 0, 0) + (1-t)(0, 0, 0, 2/3, 1/3), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

A lei iniciada em 1 alterna entre as massas em 1 e 2.

Exercício 3.3. Os graus são $(1,2,2,1)$, logo $\pi = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$. Em cada aresta, o fluxo nos dois sentidos é $1/6$. A cadeia tem período dois; $E_1 T_1^+ = 6$ e $E_2 T_2^+ = 3$. A versão preguiçosa tem a mesma estacionária e os mesmos tempos médios de primeiro retorno, mas é aperiódica e suas distribuições convergem para π. Permanências no primeiro passo contam como retorno.

Exercício 3.4. Temos $(0,1,0) = \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{3}(1,-2,1)$. O modo de autovalor $3/4$ não aparece. Portanto a distância é $\frac{2}{3}(1/4)^n$. Em dois passos ela é $1/24 > 0{,}02$ e, em três, $1/96 < 0{,}02$: o primeiro instante é $n = 3$. Partindo de 1, permanece o modo mais lento, de autovalor $3/4$, e a distância é

$$d_1(n) = \tfrac{1}{2}(3/4)^n + \tfrac{1}{6}(1/4)^n.$$

Essa expressão decresce com n. Como $d_1(11) \approx 0{,}02112$ e $d_1(12) \approx 0{,}01584$, o primeiro instante que satisfaz o mesmo limiar é $n = 12$. A escolha do estado inicial reduz, neste exemplo, a espera de doze para três passos ao eliminar o modo mais lento.

Exercício 3.5. As probabilidades de subir, descer e permanecer são $(3-i)^2/9$, $i^2/9$ e $2i(3-i)/9$, respectivamente. Nas fronteiras, use apenas os destinos possíveis. A estacionária é $(1, 9, 9, 1)/20$. A identidade $\binom{3}{i}(3-i) = \binom{3}{i+1}(i+1)$ verifica o balanço detalhado entre vizinhos. Se a primeira urna é um subconjunto uniforme de três das seis bolas identificadas, há $\binom{3}{i}\binom{3}{3-i}$ configurações com i pretas, entre $\binom{6}{3}$ igualmente prováveis. Uma troca preserva essa uniformidade.

Exercício 3.6. A segunda iteração é $(0{,}39, 0{,}19, 0{,}35, 0{,}07)$. A estacionária é $\pi = (305, 175, 315, 53)/848 \approx (0{,}35967, 0{,}20637, 0{,}37146, 0{,}06250)$. Substituí-la em $\pi G = \pi$ verifica o resultado. A décima iteração está próxima, mas ainda não coincide com o equilíbrio.

Exercício 3.7. Se $\alpha = 0$, cada linha de G é v e $\pi = v$. Se $\alpha = 1$ e cada um de dois vértices aponta somente para si mesmo, $G = I$ e toda distribuição é estacionária. A positividade de v junto de $\alpha < 1$ garante comunicação e permanência; a finitude garante a existência pelo argumento de compacidade.

Exercício 3.8. A primeira iteração passa a $(2/5, 1/6, 11/30, 1/15)$. Os links são os mesmos; a alteração decorre de v, tanto no teletransporte quanto na linha da página sem saída.

Exercício 3.9. Sem evaporação, os feromônios não diminuem e permanecem em $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$. A probabilidade de cada escolha é pelo menos $\varepsilon = \tau_{\min}/(2\tau_{\max})$. A probabilidade de evitar um caminho nas próximas r escolhas é, condicionada a qualquer história, no máximo $(1-\varepsilon)^r$; portanto, cada caminho é visitado infinitas vezes quase certamente. Após no máximo $\lceil(\tau_{\max} - \tau_i(0))/q_i\rceil$ escolhas do caminho i, seu feromônio chega ao teto e ali permanece. Esse número de escolhas é alcançado em tempo finito quase certamente para ambos os caminhos. A partir daí, as probabilidades são $1/2$ e $1/2$, apesar de $q_1 > q_2$. O teorema de seleção pressupõe a atualização sem truncamento, na qual os feromônios podem crescer sem limite. A exploração persistente assegura novas visitas, mas não compara a qualidade das soluções nem garante concentração no melhor caminho.

Cadeias de Markov enumeráveis

Exercício 4.1. $P^{2n}(0,0) = \binom{2n}{n}[p(1-p)]^n \sim [4p(1-p)]^n/\sqrt{\pi n}$. Para $p = 1/2$, a série diverge e o passeio é recorrente; para $p = 7/10$, o fator é $0{,}84 < 1$ e o passeio é transiente. No caso simétrico, $P^n(0,0) \to 0$, portanto

$$E_0\left[\frac{N_n(0)}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^m(0,0) \longrightarrow 0.$$

Pelo teorema de frequência, $Z_n = N_n(0)/n$ converge quase certamente para $c = 1/E_0T_0^+$. Como $0 \le Z_n \le 1$, o Lema 3.5 dá $E_0Z_n \to c$: basta usar $|E_0Z_n - c| \le \varepsilon + \mathbb{P}_0(|Z_n - c| > \varepsilon)$. Logo $c = 0$ e o retorno tem média infinita: a recorrência é nula.

Exercício 4.2. A estacionária é $\pi(i) = \frac{1}{3}(2/3)^i$, o retorno médio a zero é três e a média temporal de X_n tende a $\sum_i i\pi(i) = 2$. Já $\sum_i 2^i\pi(i) = \frac{1}{3}\sum_i (4/3)^i = \infty$. Para cada inteiro b, o teorema ergódico aplicado a $f \wedge b$ dá

$$\liminf_n \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(X_m) \ge \sum_i (f(i)\wedge b)\pi(i).$$

Essas afirmações valem simultaneamente para todos os inteiros b, pois a união enumerável de eventos de probabilidade zero ainda tem probabilidade zero. Para ver que as médias truncadas podem ser arbitrariamente grandes, fixe K e escolha $b \ge 2^K$. Então

$$\sum_i (f(i)\wedge b)\pi(i) \ge \sum_{i=0}^{K} 2^i\pi(i) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{K}(4/3)^i.$$

As somas finitas à direita crescem sem limite quando K aumenta. Logo o limite inferior da média temporal é maior que qualquer número real, o que prova sua divergência para $+\infty$.

Processos de ramificação

Exercício 4.3. As três probabilidades são $1/16$, $3/8$ e $9/16$. Além disso, $E_2Z_3 = 2(3/2)^3 = 27/4$. Para uma semente, $q_1 = 1/4$ e $q_2 = f(1/4) = 19/64 < 1/3 = q$. Extinção até a segunda geração é um evento menor que extinção eventual.

Exercício 4.4. Se $p_0 > 0$, a extinção na primeira geração tem probabilidade positiva: para uma semente, $q \geq p_0 > 0$, e para $k \geq 1$ sementes essa probabilidade é $p_0^k > 0$. Logo a extinção eventual também tem probabilidade positiva. Se $p_0 = 0$, cada indivíduo tem pelo menos um filho, a população nunca zera e $q = 0$. Como $\mathbb{P}_k(H_0 < \infty) = q^k$, para todo $k \geq 1$ finito a probabilidade de extinção é zero exatamente quando $q = 0$, ou seja, quando $p_0 = 0$. Quando $Y \equiv 1$, a média é um e a população permanece constante: criticidade, sem excluir esse caso, não implica extinção.

Exercício 4.5. Temos $m = r/(1-r)$ e $f(s) = (1-r)/(1-rs)$. A equação de ponto fixo tem raízes 1 e $(1-r)/r$. Portanto $q = 1$ para $r \leq 1/2$, e $q = (1-r)/r$ para $r > 1/2$. Quando $r = 2/3$, $q = 1/2$ e a sobrevivência com três sementes é $1 - q^3 = 7/8$.

Exercício 4.6. Para $B_M = \sum_{n=0}^{M} Z_n$, a linearidade de somas finitas e o Teorema 4.7 dão

$$E(B_M) = k \sum_{n=0}^{M} m^n.$$

Como B_M cresce para $B = \sum_{n \geq 0} Z_n$, o argumento de contagem e caudas do Lema 2.15 mostra que $E(B) = \sup_M E(B_M)$, inclusive se a soma for infinita. Portanto, para $m < 1$,

$$E(B) = k \sum_{n=0}^{\infty} m^n = \frac{k}{1-m} < \infty.$$

Uma variável não negativa com esperança finita não pode ser infinita com probabilidade positiva. Logo $B < \infty$ quase certamente.

Exercício 4.7. $\widehat{m} = 1{,}3$, $\widehat{f}(s) = 0{,}3 + 0{,}1s + 0{,}6s^2$ e $\hat{q} = 1/2$; com duas sementes, a extinção ajustada é $1/4$. O máximo de verossimilhança atribui zero à categoria três, mas dados finitos não provam que ela seja impossível. As contagens somam 78 filhos; uma árvore encerrada com 60 vértices teria exatamente 59 arestas.

Percolação em árvores e grafos aleatórios

Exercício 4.8. A descendência é binomial com parâmetros 3 e p, de modo que $m = 3p$ e $p_c = 1/3$. Para $p = 1/4$,

$$E\big(|C(o)|\big) = \frac{1}{1 - 3/4} = 4.$$

Em $p = 1/3$, o processo é crítico e não degenerado. Logo, $\mathbb{P}(|C(o)| = \infty) = 0$, mas $E(|C(o)|) = \sum_{n \geq 0} 1 = \infty$.

Exercício 4.9. A partir de um vizinho da raiz, a exploração que não volta ao pai é uma ramificação com descendência $Y \sim \text{Binomial}(d-1, p)$. Seja q sua probabilidade de extinção, isto é, a menor solução de

$$q = (1 - p + pq)^{d-1}.$$

Cada uma das d direções da raiz deixa de conduzir a uma componente infinita se sua primeira aresta estiver fechada ou se estiver aberta e a ramificação seguinte se extinguir. Essa probabilidade é $1 - p + pq$. Como as direções usam conjuntos disjuntos de arestas,

$$\mathbb{P}(|C(o)| = \infty) = 1 - (1 - p + pq)^d.$$

Ela é positiva exatamente quando $(d-1)p > 1$. Portanto, $p_c = 1/(d-1)$, e não $1/d$. A raiz oferece d tentativas iniciais, mas a continuidade de cada tentativa depende da reprodução com $d - 1$ filhos possíveis nas gerações seguintes.

Exercício 4.10. Escreva $I_n = \sum_{v=1}^{n} \mathbf{1}_{\{v \text{ isolado}\}}$. Cada vértice é isolado se suas $n-1$ arestas possíveis estiverem ausentes. Pela linearidade da esperança, sem exigir independência entre essas indicadoras,

$$E(I_n) = n\left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n-1}, \qquad \frac{E(I_n)}{n} \longrightarrow e^{-c}.$$

Uma componente gigante ocupa uma fração positiva, não necessariamente a totalidade dos vértices. Para $c > 1$ fixo, o teorema dá $L_1(n)/n \to \rho(c) < 1$ em probabilidade. Tomando $\varepsilon = (1 - \rho(c))/2 > 0$, obtemos

$$\mathbb{P}\big(G(n, c/n) \text{ é conexo}\big) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{L_1(n)}{n} - \rho(c)\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

Assim, a componente gigante pode coexistir com várias outras componentes. O cálculo de $E(I_n)$, sozinho, é uma afirmação sobre a média, não uma prova de concentração do número de vértices isolados.

Processos de Poisson

Exercício 5.1. As probabilidades exponenciais são $e^{-3/2}$ e $e^{-3/4}$. Para a uniforme, são $6/24 = 1/4$ e $6/15 = 2/5$. A exponencial tem falta de memória. Na uniforme, por exemplo, $\mathbb{P}(U > 18 \mid U > 9) = 2/5 \neq \mathbb{P}(U > 9) = 5/8$.

Exercício 5.2. A regra de probabilidade condicional dá $u(s+t) = u(s)u(t)$. Como $0 < u(1) \leq 1$, podemos definir $\alpha = -\log u(1) \geq 0$. Para inteiros $m \geq 1$ e $k \geq 0$, temos $u(1/m)^m = u(1)$ e, portanto, $u(k/m) = e^{-\alpha k/m}$. A continuidade estende a identidade aos reais não negativos. Os eventos $\{T > n\}$ decrescem para $\{T = \infty\}$; pela continuidade das probabilidades e pela finitude de T, suas probabilidades tendem a zero. Logo $\alpha > 0$: se $\alpha = 0$, teríamos $u \equiv 1$, que descreveria uma espera infinita. Assim, $T \sim \text{Exp}(\alpha)$.

Exercício 5.3. A média é $4/3$ de hora. Como $T_4 > 1$ equivale a $N(1) \leq 3$, a probabilidade é $13e^{-3} \approx 0{,}6472$. A terceira resposta é $1 - 4e^{-3} \approx 0{,}8009$. Condicionado ao total seis, a contagem na meia hora é binomial de parâmetros 6 e $1/4$, logo a probabilidade é $\binom{6}{2}(1/4)^2(3/4)^4 = 1215/4096$.

Exercício 5.4. Escreva $N(t) = N(s) + [N(t) - N(s)]$, com parcelas independentes. Então

$$E[N(s)N(t)] = \lambda s + \lambda^2 st, \qquad \text{Cov}(N(s), N(t)) = \lambda s.$$

As contagens acumuladas compartilham os eventos anteriores a s; são os incrementos em intervalos disjuntos que são independentes.

Exercício 5.5. As duas contagens são Poisson independentes de médias 3 e $3/2$. A probabilidade é $(e^{-3}3^2/2)(e^{-3/2}3/2) = 27e^{-9/2}/4$. Dado o total três, a detectada é binomial de parâmetros 3 e $2/3$, e a outra vale três menos a primeira: são dependentes.

Exercício 5.6. O número de pedidos tem média seis, $EY = 11/6$ e $EY^2 = 9/2$. A soma tem média 11 e variância 27. O número de pedidos com quatro unidades é Poisson de média $6(1/6) = 1$.

Exercício 5.7. Fixe $n \geq 0$ e denote por $C_j(n)$ o número de pessoas no estado j. Os indivíduos inicialmente em i se dividem por destino com probabilidades $P^n(i, j)$. O afinamento gera contagens independentes em cada destino e grupo de origem. Somando os grupos, obtemos Poisson independentes com vetor de médias $(4, 2)P^n = (4, 2)$, pois $(4, 2)P = (4, 2)$. Assim, $C_1(n) \sim$ Poisson(4) e $C_2(n) \sim$ Poisson(2) para cada instante fixado. Isso não afirma independência entre contagens em instantes diferentes.

Se M é o total inicial, a conservação do número de pessoas dá $M = C_1(n) + C_2(n)$. Como a soma tem lei Poisson(6), para $0 \leq r \leq m$,

$$\mathbb{P}(C_1(n) = r \mid M = m) = \frac{e^{-4}4^r/r!\; e^{-2}2^{m-r}/(m-r)!}{e^{-6}6^m/m!} = \binom{m}{r}\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{m-r}.$$

Logo, condicionado a $M = m$, o par tem distribuição multinomial com total m e probabilidades $(2/3, 1/3)$; a segunda contagem vale $m - C_1(n)$. Para $m > 0$, sua covariância condicional é $-2m/9$, e elas são dependentes. Para $m = 0$, ambas são identicamente zero.

Exercício 5.13. A média e a variância são $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$, e a probabilidade é $1 - e^{-6}$. O modelo homogêneo dá $14/3$ e $1 - e^{-14/3}$.

Exercício 5.14. É contrariada a independência dos incrementos em intervalos disjuntos. Mudar uma intensidade determinística altera as marginais, mas preserva essa independência; não produz a correlação residual observada.

Exercício 5.15. Temos $\Lambda(t) = t^2$ e $\mathbb{P}(T_1 > t) = e^{-t^2}$. Se $S_k = E_1 + \cdots + E_k$ são as chegadas do processo de taxa um, então $N(t) = M(t^2)$ chega quando $t^2 = S_k$, isto é, $T_k = \sqrt{S_k}$. As duas contagens são independentes com médias e variâncias 1 e 3.

Exercício 5.8. Um minuto corresponde a $h = 1/60$ de hora, portanto $\lambda h = 1/10$. A lei do incremento dá, respectivamente,

$$e^{-1/10}, \qquad \frac{1}{10}e^{-1/10}, \qquad 1 - \frac{11}{10}e^{-1/10}.$$

Os valores aproximados são 0,90484, 0,09048 e 0,00468. A aproximação linear para exatamente uma chegada é 0,1, cerca de 0,00952 acima do valor exato. Para $h > 0$,

$$\mathbb{P}(N(h) \geq 2 \mid N(h) \geq 1) = \frac{1 - e^{-6h}(1 + 6h)}{1 - e^{-6h}}.$$

Pela Proposição 5.10, o numerador é $18h^2 + O(h^3)$ e o denominador é $6h + O(h^2)$. Dividindo ambos por h, o quociente tende a zero. Para cada $h > 0$, o numerador é positivo; o limite apenas compara a velocidade com que as probabilidades diminuem.

Exercício 5.9. Para $K_r = k$, a chegada de ordem $k + r$ na superposição deve ter marca B. Nas $k + r - 1$ posições anteriores deve haver exatamente $r - 1$ marcas B e k marcas A. Há $\binom{k+r-1}{r-1}$ escolhas para as posições B. Cada sequência, incluindo a marca B final, tem probabilidade $p^k(1-p)^r$, pela independência das marcas. Isso prova a fórmula, conhecida como distribuição binomial negativa para o número de marcas A antes da r-ésima B.

Entre duas marcas B sucessivas, conte as marcas A. Cada bloco tem a lei geométrica do Exemplo 5.9, pois usa uma nova parte da sequência independente de marcas; sua média é $p/(1-p) = \lambda/\mu$. O mesmo vale para o bloco anterior à primeira B. Pela linearidade da esperança, somar os r blocos dá $E(K_r) = r\lambda/\mu$. A decomposição pode ser justificada para quaisquer comprimentos fixados: a probabilidade da lista de comprimentos $(k_1, \ldots, k_r)$ é $\prod_{j=1}^{r} p^{k_j}(1-p)$, que se fatora nas massas geométricas. No caso numérico, $p = 2/3$ e

$$\mathbb{P}(K_3 = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}.$$

Exercício 5.10. A primeira chegada B tem densidade $\mu e^{-\mu t}$, $t > 0$, e é independente de N_A. Se essa chegada ocorre no instante t, a contagem A

anterior a ela tem lei Poisson(λt). Empates entre chegadas têm probabilidade zero. Portanto a densidade conjunta do instante T e do evento $\{K = k\}$ é

$$g_k(t) = \mu e^{-\mu t}\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{\mu \lambda^k}{k!} t^k e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

No exemplo já obtivemos $\mathbb{P}(K = k) = \mu\lambda^k/(\lambda + \mu)^{k+1} > 0$. Dividir a densidade conjunta por essa massa dá

$$f_{T|K=k}(t) = \frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{k!} t^k e^{-(\lambda+\mu)t}, \qquad t > 0.$$

É a densidade gama de forma $k + 1$ e taxa $\lambda + \mu$. Como essa lei também é a de uma soma de $k + 1$ exponenciais com essa taxa, a linearidade fornece $E(T \mid K = k) = (k + 1)/(\lambda + \mu)$. O processo A e T eram independentes antes da observação; a variável $K = N_A(T)$ usa ambos. Fixar K modifica a informação disponível sobre T, e a média condicional cresce com o valor contado.

Exercício 5.11. Escreva U, V, W, Z para as quatro contagens indicadas no enunciado. As probabilidades das marcas são ab, $a(1 - b)$, $(1 - a)b$ e $(1 - a)(1 - b)$. O afinamento fornece contagens independentes com médias iguais a essas probabilidades multiplicadas por λt. Os registros dos aparelhos são

$$C_A(t) = U + V, \qquad C_B(t) = U + W.$$

Somar Poisson independentes dá leis marginais Poisson($a\lambda t$) e Poisson($b\lambda t$). Para a covariância, expandimos os produtos. Pela independência entre U, V, W, todos os termos cruzados se cancelam ao subtrair o produto das médias; resta

$$\operatorname{Cov}(C_A(t), C_B(t)) = \operatorname{Var}(U) = ab\lambda t.$$

Como essa quantidade é positiva para $t > 0$, as contagens não são independentes. A independência das duas decisões para uma partícula permite que ambos registrem a mesma chegada: é a parcela comum U. No afinamento em classes mutuamente exclusivas, essa parcela não existe.

Exercício 5.12. Multiplicar uma variável por dois multiplica sua média por dois e sua variância por quatro. Assim,

$$E(C(t)) = 2\lambda t, \qquad \operatorname{Var}(C(t)) = 4\lambda t.$$

A contagem $C(t)$ é sempre par, de modo que $\mathbb{P}(C(t) = 1) = 0$. Já uma Poisson de parâmetro $2\lambda t$ tem variância $2\lambda t$ e, para $t > 0$, atribui massa positiva a um. Além disso,

$$\mathbb{P}(C(h) \geq 2) = \mathbb{P}(N(h) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + O(h^2).$$

Aqui duas chegadas de pacotes têm probabilidade de primeira ordem em h, e cada salto de C tem tamanho dois. Portanto, C não satisfaz a condição de saltos unitários do processo de Poisson, embora conte lotes por meio de um processo de Poisson.

Exercício 5.16. No estado zero, a espera é exponencial de taxa 1 por hora; a probabilidade pedida é e^{-h} e a média é uma hora. No estado dois, a taxa é $1 + 2 \cdot 2 = 5$ por hora; a probabilidade é e^{-5h} e a média é $1/5$ de hora. A taxa permanece fixa durante cada uma dessas esperas porque nenhuma chegada ainda alterou o estado.

No modelo não homogêneo, a probabilidade de não haver chegadas entre t e $t + h$ é

$$\exp\left(-\int_t^{t+h} \lambda(u)\, du\right),$$

qualquer que seja a contagem anterior. Se λ é contínua em t, essa probabilidade é $1 - \lambda(t)h + o(h)$. Um mesmo valor $\lambda(t)$ não pode ser simultaneamente 1 e 5. A intensidade determinística pode mudar com o relógio, mas é comum às histórias que atingem o mesmo horário; a taxa do segundo mecanismo muda com a contagem de cada história.

Cadeias de Markov em tempo contínuo

Exercício 6.1. Para $t \geq 0$, $\mathbb{P}(M \leq t) = (1 - e^{-t/4})(1 - e^{-t/6})$. A média é $4 + 6 - 12/5 = 38/5$ anos. O primeiro componente falha antes com probabilidade $(1/4)/(1/4 + 1/6) = 3/5$.

Exercício 6.2. As médias de permanência são $1/3$, $1/3$ e $1/4$ de hora. Os destinos têm probabilidades $(r(1,2), r(1,3)) = (2/3, 1/3)$, $(r(2,1), r(2,3)) = (1/3, 2/3)$ e $r(3,1) = 1$. Resolver $\pi Q = 0$ e normalizar dá $\pi = (12, 8, 7)/27$. Como $q(2,3) > 0$ e $q(3,2) = 0$, não há reversibilidade. O fluxo de 1 para 2 é $\pi(1)q(1,2) = 8/9$ por hora. A taxa 2 é o coeficiente de h em $P_h(1,2) = 2h + o(h)$; durante uma hora podem ocorrer vários saltos.

Exercício 6.3. Temos $P_t(1,2) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$. Em $[0,t]$, a cadeia faz apenas um número finito de saltos quase certamente. As somas de Riemann da indicadora de permanência em 1 convergem para seu tempo de ocupação e são limitadas por t. A estimativa elementar para convergência de variáveis limitadas permite passar ao limite nas esperanças dessas somas. Como a esperança de cada parcela é $P_s(1,1)$, a esperança da ocupação é a integral usual de $P_s(1,1) = 3/5 + (2/5)e^{-5s}$, portanto

$$\frac{3}{5}t + \frac{2}{25}(1 - e^{-5t}).$$

A uniformização dá $U = \left(\begin{smallmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{smallmatrix}\right)$. Toques que conservam o estado são descartados ao contar mudanças reais; a taxa efetiva é $5(2/5) = 2$ em 1 e $5(3/5) = 3$ em 2.

Exercício 6.4. Na ordem $0, 1, 2$, o gerador por dia e a estacionária são

$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & -5/8 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \frac{1}{13}(1, 4, 8).$$

O número médio em funcionamento é $20/13$. O reparador trabalha quando há menos de duas máquinas funcionando: fração $5/13$.

Exercício 6.5. A cadeia de saltos é simétrica, logo a probabilidade é $1/4$. A restrição do gerador tem diagonal -4 e vizinhos de taxa 2. A primeira linha de sua inversa negativa é $(3/8, 1/4, 1/8)$, em horas. A soma é $3/4$ de hora, também obtida de $i(4 - i)/4$ em $i = 1$.

Exercício 6.6. Normalizar os pesos $(3/4)^n$, $0 \le n \le 3$, dá

$$\pi = (64, 48, 36, 27)/175.$$

A fração recusada é $27/175$ e a taxa aceita, igual à atendida a longo prazo, é $6(148/175) = 888/175$ por hora. O número médio é $201/175$; sem limite seria $6/(8-6) = 3$. PASTA usa a intensidade condicional constante das tentativas de chegada, inclusive com o sistema cheio, e serviços que não antecipam essas chegadas.

Exercício 6.7. A cadeia de saltos, fora de zero, sobe com probabilidade $p = \lambda/(\lambda+\mu)$ e desce com $q = \mu/(\lambda+\mu)$. Partindo de 1, a probabilidade de atingir 0 antes de b tende a 1 se $p \le q$, e a $q/p < 1$ se $p > q$, pela fórmula da ruína. Assim, o caso crítico é recorrente, mas não admite estacionária. Para ver que sua média de retorno é infinita, o tempo de atingir $\{0, b\}$ a partir de 1 tem média $(b-1)/(2\lambda)$, que tende a infinito e é limitado pelo tempo de atingir 0. O caso $\lambda < \mu$ é recorrente positivo: a média de descida a partir de 1 é $1/(\mu-\lambda)$, obtida pela equação de primeiro passo com barreira b e passagem monótona ao limite; somamos a espera $1/\lambda$ em zero. O caso $\lambda > \mu$ é transiente. Não possuir estacionária ocorre nos dois últimos regimes e não basta para distingui-los.

Exercício 6.8. Até t, há finitas chegadas quase certamente, e o número de saídas não pode exceder a população inicial mais essas chegadas. Portanto não há explosão. Os pesos de nascimento e morte são $2^n/n!$, de modo que $\pi(n) = e^{-2}2^n/n!$. A taxa média de saída é $\sum_n (4+2n)\pi(n) = 8$ por hora. Logo a estacionária da cadeia de saltos é $\alpha(n) = (n+2)\pi(n)/4$. De fato,

$$\alpha(n)\frac{4}{4+2n} = \frac{\pi(n)}{2} = \alpha(n+1)\frac{2(n+1)}{4+2(n+1)},$$

pois $\pi(n+1) = 2\pi(n)/(n+1)$. Observar saltos dá maior peso a estados em que o relógio toca mais depressa.

Exercício 6.9. Podemos tomar $\widetilde{X}_t = X_{ct}$, portanto $\widetilde{P}_t = P_{ct}$. A estacionária, as probabilidades de saída e a matriz da cadeia de saltos permanecem iguais. As durações são divididas por c, trajetória a trajetória; em particular, $E_i\widetilde{H}_A = E_iH_A/c$ quando finito.

Exercício 6.16. As utilizações são $3/5$ e $3/4$. A probabilidade de rede vazia é $(2/5)(1/4) = 1/10$; o número médio total é $3/2 + 3 = 9/2$. A segunda estação tem maior utilização.

Exercício 6.17. Em (m, n) com $m > 0$, a transferência para $(m-1, n+1)$ ocorre à taxa μ_1. Sua inversa direta não é uma transição permitida. As filas são dependentes ao longo do tempo porque uma conclusão na primeira produz uma chegada na segunda; a fatoração da lei em um instante não altera esse mecanismo.

Exercício 6.18. O vetor de visitas médias é $(1, 11/18, 71/90, 5/9)$ por requisição externa. Com os serviços originais, estabilidade exige $0 < a < 810/71$ por segundo, e o banco é o gargalo. Com serviço 12 no banco, os quatro limites são 20, $180/11$, $1080/71$ e 18. Assim, $0 < a < 1080/71 \approx 15{,}211$ por segundo; o banco continua sendo o gargalo. A igualdade nos limites não é estável.

Exercício 6.10. Em A, a taxa total é $1+3 = 4$ por dia. A média da primeira espera é $1/4$ de dia, e a máquina 2 falha primeiro com probabilidade $3/4$, deixando o estado B.

Antes de resolver as equações para o desligamento, verifiquemos a finitude. Em B, a chance de o próximo evento ser a falha definitiva é $1/(1+2) = 1/3$; em C, é $3/(3+2) = 3/5$. Partindo de A, o primeiro salto chega a B ou C, e o seguinte desliga o sistema com probabilidade ao menos $1/3$. Logo, de qualquer estado ainda ativo, a chance de absorção nos próximos dois saltos é ao menos $1/3$. Se J conta os saltos até a absorção,

$$\mathbb{P}(J > 2m) \le (2/3)^m, \qquad E(J) \le 2 \sum_{m \ge 0} (2/3)^m = 6.$$

As taxas de saída de A, B, C são $4, 3, 5$; cada espera tem média no máximo $1/3$ de dia. Somando as esperas até J, ou primeiro somando até $J \wedge n$ e depois usando a fórmula das caudas, concluímos que o tempo médio é no máximo $E(J)/3 \le 2$ dias.

Sejam m_A, m_B, m_C as médias até F. Pela análise do primeiro passo,

$$m_B = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} m_A, \qquad m_C = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} m_A, \qquad m_A = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} m_B + \frac{1}{4} m_C.$$

As parcelas omitidas levam a F, onde o tempo restante é zero. Substituindo as duas primeiras equações na última,

$$m_A = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{5} + \left(\frac{3}{4}\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{2}{5}\right) m_A = \frac{11}{20} + \frac{3}{5} m_A.$$

Assim, $(2/5)m_A = 11/20$ e

$$m_A = \frac{11}{8} \text{ dias}, \qquad m_B = \frac{5}{4} \text{ dias}, \qquad m_C = \frac{3}{4} \text{ de dia}.$$

A média $1/4$ termina na primeira falha. A média $11/8$ inclui esperas posteriores e possíveis reparos que devolvem o sistema a A.

Exercício 6.11. Em B, a máquina em reparo é a 2; em C, é a 1. Portanto,

$$Q = \begin{pmatrix} -2\lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda+\mu_2) & 0 & \lambda \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda+\mu_1) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira falha deixa o sistema em B ou C com probabilidades $1/2$ e $1/2$. Se H é a permanência seguinte com apenas uma máquina funcionando, sua sobrevivência é

$$u(t) = \frac{1}{2} e^{-(\lambda+\mu_2)t} + \frac{1}{2} e^{-(\lambda+\mu_1)t}.$$

Para $s > 0$,

$$u(2s) - u(s)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-(\lambda+\mu_2)s} - e^{-(\lambda+\mu_1)s}\right)^2.$$

Se $\mu_1 \neq \mu_2$, a diferença é positiva, contrariando a identidade de falta de memória. Portanto o número de máquinas funcionando, iniciado em duas, não fornece uma cadeia homogênea de Markov nesse modelo. Mesmo com taxas de falha iguais, os reparos diferentes conservam uma informação escondida. Se também $\mu_1 = \mu_2$, as taxas das duas alternativas coincidem e a redução a três estados volta a ser válida.

Exercício 6.12. Para o carro sair antes de uma nova chegada, a funilaria precisa terminar antes dessa chegada e, depois, a pintura precisa vencer a chegada ainda não ocorrida. Pela falta de memória e independência dos relógios,

$$\mathbb{P}(\text{saída antes da chegada}) = \frac{2}{1+2}\frac{4}{1+4} = \frac{8}{15}.$$

A primeira competição tem taxa 3 e média $1/3$ de hora. Se a chegada vence, o número de carros já mudou. Se a funilaria vence, evento de probabilidade $2/3$, continua havendo um carro; a competição seguinte entre chegada e pintura tem taxa 5 e média $1/5$ de hora. Logo,

$$E(\text{tempo até mudar o total}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{5} = \frac{7}{15} \text{ de hora.}$$

O valor $1/3$ acompanha apenas o primeiro evento, que pode ser uma mudança de etapa sem alteração do total.

Exercício 6.13. Na ordem indicada, o gerador é

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

As duas últimas diagonais não contêm a taxa de chegadas: uma tentativa recusada conserva o estado. Todos os estados podem chegar ao vazio por conclusões de serviço, e do vazio podemos alcançar os demais por chegadas e mudanças de etapa. A cadeia é finita e irredutível.

Escreva as massas estacionárias como $\pi_0, \pi_{1F}, \pi_{1P}, \pi_{2F}, \pi_{2P}$. As equações para $0, (2,F), (2,P), (1,F)$ dão, nessa ordem,

$$\pi_0 = 4\pi_{1P}, \qquad 2\pi_{2F} = \pi_{1F},$$
$$4\pi_{2P} = \pi_{1P} + 2\pi_{2F}, \quad 3\pi_{1F} = \pi_0 + 4\pi_{2P}.$$

Pelas duas últimas equações e pelas substituições anteriores, $3\pi_{1F} = 4\pi_{1P} + \pi_{1P} + \pi_{1F}$, de modo que $\pi_{1F} = (5/2)\pi_{1P}$. Consequentemente,

$$\pi_{2F} = \frac{5}{4}\pi_{1P}, \qquad \pi_{2P} = \frac{7}{8}\pi_{1P}.$$

A soma das cinco massas é $(4 + 5/2 + 1 + 5/4 + 7/8)\pi_{1P} = (77/8)\pi_{1P}$. Normalizar fornece

$$\pi = \frac{1}{77}(32, 20, 8, 10, 7).$$

A equação restante, $5\pi_{1P} = 2\pi_{1F}$, também é satisfeita. A probabilidade de duas vagas ocupadas em equilíbrio é $\pi_{2F} + \pi_{2P} = 17/77$. A diagonal registra a taxa de mudança real do estado, e não todas as tentativas externas.

Exercício 6.14. Temos $a = \lambda/\mu = 3$ e $p = e^{-\mu t} = 1/2$. Pela decomposição do Exemplo 6.22,

$$X_t = B + C, \qquad B \sim \text{Binomial}(3, 1/2), \quad C \sim \text{Poisson}(3/2),$$

com B e C independentes. A soma é zero somente se ambas as parcelas forem zero; portanto,

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{-3/2} = \frac{1}{8}e^{-3/2}.$$

As médias e variâncias somam por independência:

$$E(X_t) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3, \qquad \text{Var}(X_t) = 3\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

No equilíbrio, a lei seria Poisson de parâmetro 3, com variância 3. As variâncias diferentes provam que a distribuição ainda não é a estacionária, apesar da igualdade das médias. De fato, neste exemplo, $E(X_s) = 3$ para todo $s \geq 0$; a média constante não descreve toda a evolução da distribuição.

Exercício 6.15. Ponha $p = e^{-at}$ e $r = 1-p$. As duas famílias independentes têm massas pr^{j-1} para $j \geq 1$. Para um total $n \geq 2$, a primeira família pode ter $j = 1, \ldots, n-1$ indivíduos e a segunda, $n - j$. Somando essas possibilidades disjuntas,

$$\mathbb{P}_2(Z_t = n) = \sum_{j=1}^{n-1} pr^{j-1} pr^{n-j-1} = (n-1)p^2 r^{n-2}.$$

Quando $t = (\log 2)/a$, temos $p = r = 1/2$; logo,

$$\mathbb{P}_2(Z_t \geq 5) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right) = \frac{5}{16}.$$

Até atingir cinco indivíduos, a população passa sucessivamente por 2, 3 e 4. As três esperas têm médias $1/(2a), 1/(3a), 1/(4a)$. A média do tempo de chegada a cinco é, assim,

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{12a}.$$

Já $E_2 Z_t = 2e^{at}$ chega ao valor 5 no instante $t = \log(5/2)/a$. Esse instante é aproximadamente $0{,}9163/a$, enquanto a média do tempo de chegada é aproximadamente $1{,}0833/a$. Atravessar um nível em uma trajetória e atingir esse nível na média são operações diferentes; uma não se obtém invertendo a outra.

Exercício 6.19. A diferença entre as taxas individuais é $2-3=-1$ por dia. Pela Proposição 6.16,

$$E_2 Z_t = 2e^{-t}, \qquad \mathbb{P}_2(\text{extinção eventual}) = 1.$$

Para verificar a probabilidade de já estar extinta, ponha $x = e^{-t}$. Então $q = 3(1-x)/(3-2x)$ e $x' = -x$, de modo que a regra do quociente dá

$$q'(t) = \frac{3x}{(3-2x)^2}.$$

A equação da geradora em $s=0$ é $q' = 3 - 5q + 2q^2$. Seu lado direito se fatora como $(1-q)(3-2q)$. Na fórmula proposta,

$$1-q = \frac{x}{3-2x}, \qquad 3-2q = \frac{3}{3-2x},$$

cujo produto é a derivada acima. A condição $q(0)=0$ também vale; pela unicidade, essa é a probabilidade pedida.

As duas famílias iniciais são independentes. O total fica vazio até t exatamente quando ambas estão vazias nesse instante. Portanto,

$$\mathbb{P}_2(Z_t > 0) = 1 - q(t)^2.$$

Para calcular a média condicionada à sobrevivência, usamos que a população vale zero no evento complementar:

$$E_2(Z_t \mid Z_t > 0) = \frac{2e^{-t}}{1-q(t)^2}.$$

Em termos de $x = e^{-t}$,

$$1 - q(t)^2 = \frac{(3-2x)^2 - 9(1-x)^2}{(3-2x)^2} = \frac{x(6-5x)}{(3-2x)^2}.$$

Assim, a média condicionada é $2(3-2x)^2/(6-5x)$ e tende a 3 quando $t \to \infty$. A média incondicional tende a zero porque a sobrevivência se torna rara; nas trajetórias que ainda sobrevivem, o tamanho médio não tende a zero.

Exercício 6.20. As taxas são $b_n = 2n + 2$ e $d_n = 5n$. Como $\nu = \lambda = 2$, os pesos são $w_n = (2/5)^n$, cuja soma é $5/3$. Logo,

$$\pi(n) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad \pi(0) = \frac{3}{5}, \quad E_\pi X = \frac{2}{5-2} = \frac{2}{3}.$$

Com $\nu = 4$, o produto dos pesos se simplifica:

$$w_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2j+4}{5(j+1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n} = (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Para $0 \le r < 1$, a soma geométrica e sua derivada dão $\sum_{n\ge 0}(n+1)r^n = 1/(1-r)^2$. Portanto,

$$\pi(n) = \frac{9}{25}(n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n, \qquad \pi(0) = \frac{9}{25}, \qquad E_\pi X = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

Em zero, a espera até a próxima imigração é exponencial de taxa ν. Logo a probabilidade de continuar em zero, sem sair dele durante meio dia, é $e^{-\nu/2}$: vale e^{-1} no primeiro caso e e^{-2} no segundo. Isso não é a probabilidade de estar de volta em zero após meio dia, pois esta última permite chegadas e mortes intermediárias. Sem imigração, zero é absorvente e significa o fim da população. Com imigração, a permanência em zero é somente uma espera por nova chegada.

Exercício 6.21. O gerador é

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Os pesos relativos $\beta/\alpha, 1, \lambda/\mu$ são $1, 1, 2/3$, cuja soma é $8/3$. Portanto,

$$\begin{aligned} \pi &= \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right), \\ \bar{c} &= 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{8}, \\ \lambda\pi(P) &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

A potência está em watts e o fluxo em tarefas por minuto. Duplicar α dá pesos $1/2, 1, 2/3$ e soma $13/6$. Assim,

$$\begin{aligned} \pi &= \left(\frac{3}{13}, \frac{6}{13}, \frac{4}{13}\right), \\ \bar{c} &= \frac{22}{13}, \\ \lambda\pi(P) &= \frac{12}{13}. \end{aligned}$$

O fluxo aumenta em $12/13 - 3/4 = 9/52$ tarefa por minuto, e a potência esperada aumenta em $22/13 - 11/8 = 33/104$ watt. Com uma espera determinística de um minuto, é necessário saber há quanto tempo o equipamento já dorme. Se acabou de entrar em D, não acordará nos próximos poucos segundos; se entrou há quase um minuto, acordará nesse intervalo. O mesmo estado D passa a admitir previsões diferentes conforme o passado. Acrescentar a idade do sono ao estado conserva a informação que a descrição de três estados perdeu.

Exercício 6.22. Quando o principal falha em A, o sorteio de comutação divide a taxa $1/10$ nas proporções $4/5$ e $1/5$. Portanto, $q(A, B) = 2/25$ e $q(A, M) = 1/50$. As taxas restantes foram especificadas diretamente no enunciado, e cada diagonal é o negativo da saída total:

$$Q = \begin{pmatrix} -1/10 & 2/25 & 1/50 & 0 \\ 1 & -6/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 2 & -11/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A taxa de saída em M é $2 + 1/5 = 11/5$, menor que $\Lambda = 3$. As outras saídas também são menores que três, logo a uniformização é válida. Sua matriz é

$$U = I + Q/3 = \begin{pmatrix} 29/30 & 2/75 & 1/150 & 0 \\ 1/3 & 3/5 & 0 & 1/15 \\ 0 & 2/3 & 4/15 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como F é absorvente, $H_F > t$ equivale a estar em A, B ou M em t. Assim, $S(t)$ é a probabilidade de ainda não ter ocorrido perda definitiva, mesmo que o

serviço esteja temporariamente interrompido. A disponibilidade $D(t)$ conta somente A, B no instante t. Já $I(t)$ exige que nenhum estado de interrupção tenha sido visitado até t. Pelas inclusões de eventos,

$$\{H_{\{M,F\}} > t\} \subseteq \{X_t \in \{A, B\}\} \subseteq \{H_F > t\},$$

e obtemos as desigualdades. Uma trajetória que já passou por M e voltou a B é contada por S e D, mas foi excluída de I para sempre.

Para computar I, use estados A, B, L, em que L registra a primeira interrupção e é absorvente. O gerador dessa cadeia é

$$Q_I = \begin{pmatrix} -1/10 & 2/25 & 1/50 \\ 1 & -6/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_I = I + Q_I/3.$$

Até atingir M ou F, a cadeia original e essa cadeia percorrem os mesmos estados A, B com as mesmas taxas. Depois disso, a segunda permanece em L; portanto $I(t)$ é a soma das suas probabilidades em A, B.

Para qualquer uma das duas matrizes $V = U, U_I$, comece com o vetor-linha v_0 concentrado em A e calcule sucessivamente

$$v_{n+1} = v_n V, \qquad w_0 = e^{-3t}, \qquad w_{n+1} = w_n \frac{3t}{n+1}.$$

A aproximação da distribuição em t é $\sum_{n=0}^{m} w_n v_n$. Isso requer somente produtos de vetor por matriz e a recorrência dos pesos de Poisson. Cada v_n é um vetor de probabilidade, pois V é estocástica. Logo, para qualquer conjunto C de estados,

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathbb{P}(X_t \in C) - \sum_{n=0}^{m} w_n v_n(C) \\ &\le \sum_{n>m} w_n \\ &= \mathbb{P}(\text{Poisson}(3t) > m). \end{aligned}$$

Para controlar a cauda sem somar infinitamente, escreva $b = 3t$. Se $m+2 > b$, a razão entre pesos consecutivos a partir de w_{m+1} é no máximo $b/(m+2)$. Comparar com a série geométrica dá

$$\sum_{n>m} w_n \le \frac{e^{-b} b^{m+1}/(m+1)!}{1 - b/(m+2)}.$$

Para $t \le 10$ e $m = 70$, essa cota é menor que $1{,}5 \cdot 10^{-10}$. Pode-se conferir a cota em $b = 30$ usando a mesma recorrência dos pesos; ela é crescente para $0 < b \le 30$, pois $b^{71}e^{-b}$ é crescente nesse intervalo e $1 - b/72$ é decrescente.

O resultado numérico, arredondado a seis casas, é

t (horas)	$S(t)$	$D(t)$	$I(t)$
1	0,992940	0,985250	0,975370
5	0,931710	0,923892	0,862079
10	0,856258	0,849077	0,736342

O erro de truncamento é muito menor que o erro de arredondamento da tabela.

Para as médias de chegada, escreva t_A, t_B, t_M para as esperanças até F. Os estados transientes formam um conjunto finito, e de cada um há um caminho de taxas positivas até F. O argumento de tentativas repetidas usado nos problemas de saída garante chegada quase certa e média finita. Uma análise de primeiro passo dá

$$t_A = 10 + \frac{4}{5}t_B + \frac{1}{5}t_M,$$
$$t_B = \frac{5}{6} + \frac{5}{6}t_A,$$
$$t_M = \frac{5}{11} + \frac{10}{11}t_B.$$

Por exemplo, em B a espera média é $1/(6/5) = 5/6$, e o reparo vence a falha com probabilidade $1/(6/5) = 5/6$; a outra opção chega a F e não acrescenta tempo futuro. Substituindo a terceira equação na primeira,

$$t_A = \frac{111}{11} + \frac{54}{55}t_B.$$

Substituir $t_B = (5/6)(1 + t_A)$ fornece $t_A = 120/11 + (9/11)t_A$, logo $t_A = 60$ horas. As demais médias são $t_B = 305/6$ e $t_M = 140/3$ horas.

Para a primeira interrupção, os estados-alvo são M, F e restam somente s_A, s_B:

$$s_A = 10 + \frac{4}{5}s_B, \qquad s_B = \frac{5}{6} + \frac{5}{6}s_A.$$

Portanto $s_A = 10 + 2/3 + (2/3)s_A$, dando $s_A = 32$ horas. A taxa de comutação manual só governa o que acontece depois da primeira visita a M. Por isso ela pode mudar a recuperação do serviço e a probabilidade de perda definitiva, mas não muda a lei do primeiro tempo de interrupção nem $I(t)$.

Martingais

Exercício 7.1. Em $\{Y \le 4\}$, $M_0 = 5/2$; no complemento, $M_0 = 13/2$. As quatro partes de $\mathscr{F}_1$ são $\{1,3\}$, $\{2,4\}$, $\{5,7\}$ e $\{6,8\}$; nelas, M_1 vale, respectivamente, $2, 3, 6, 7$. Finalmente, $M_2 = Y$. Dentro de cada parte de $\mathscr{F}_0$, as duas novas partes têm probabilidades condicionais iguais, dando médias $5/2$ e $13/2$. Dentro de cada parte de $\mathscr{F}_1$, a média de Y é o valor indicado para M_1. Isso verifica as duas identidades condicionais. O processo constante igual a Y não é adaptado, pois seu valor não pode ser determinado com a informação $\mathscr{F}_0$.

Exercício 7.2. A primeira estratégia é previsível e limitada; sua riqueza é um martingal de média zero. Na segunda, cada ganho é $K_n\xi_n = \xi_n^2 = 1$, logo a riqueza vale n. Essa escolha usa o resultado da própria rodada e não é previsível. Integrabilidade e limitação não corrigem a antecipação.

Exercício 7.3. O tempo T é finito quase certamente pelo argumento de caminhos em um intervalo finito. Se $u = \mathbb{P}(S_T = 3)$, a parada de S_n dá $0 = -2(1-u) + 3u$, logo $u = 2/5$. A dominadora é a constante 3. Para $S_n^2 - n$, primeiro paramos em $T \wedge n$ e usamos $S_{T\wedge n}^2 \le 9$ e $T \wedge n \uparrow T$:

$$E(T) = E(S_T^2) = 4\frac{3}{5} + 9\frac{2}{5} = 6.$$

Não se aplica diretamente o teorema da parada limitada ao processo $S_n^2 - n$, pois seu termo temporal não é limitado uniformemente em n.

Exercício 7.4. Um bloco de quatro ensaios contém quatro sucessos com probabilidade $0{,}3^4 > 0$, independentemente dos outros blocos. Se G é o índice do primeiro bloco assim, $T \le 4G$ e $E(T) \le 4/0{,}3^4 < \infty$. Para ξ_k indicadora de sucesso, $\sum_{k=1}^{T} \xi_k = 4$. Wald fornece $E(T) = 4/0{,}3 = 40/3$ ensaios. A verificação prévia permite usar a identidade sem pressupor a finitude da média que queremos encontrar.

Exercício 7.5. A média condicional da binomial é X_n, de modo que X é martingal limitado. Usando sua variância condicional,

$$E[X_{n+1}(6 - X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n] = \frac{5}{6} X_n(6 - X_n),$$

o que prova a afirmação sobre U_n, integrável em cada instante por $0 \le X_n(6-X_n) \le 9$. De qualquer estado interno, a probabilidade de saltar para 0 no passo seguinte é ao menos $(1/6)^6$. Assim, a cauda do tempo T de absorção é limitada por uma cauda geométrica. Pela parada limitada de X, $2 = E(X_T) = 6\mathbb{P}(X_T = 6)$, logo a fixação tem probabilidade $1/3$. Finalmente, $E[X_n(6-X_n)] = 8(5/6)^n$.

Exercício 7.6. Os fatores são independentes, não negativos e de média 1. Portanto $E(M_n) = 1$ e a propriedade de martingal segue ao condicionar no próximo fator. Além disso,

$$\frac{\log M_n}{n} \longrightarrow E\log(2U_1) = \log 2 - 1 < 0 \quad \text{quase certamente.}$$

A lei dos grandes números se aplica porque $E|\log(2U_1)| < \infty$. Logo $M_n \to 0$. Se uma variável integrável Y dominasse todos os M_n, a primeira regra da Proposição 7.8 daria $E(M_n) \to 0$, contradizendo a média constante 1.

Exercício 7.7. Temos $\phi(b) = \sum_{j=0}^{b-1} 3^{-j} = \frac{3}{2}(1-3^{-b})$, portanto $\mathbb{P}_1(H_0 < \infty) = 1/3$. Com $p_0 = 0$, o estado é absorvente e $\mathbb{P}_0(T_0^+ < \infty) = 1$. Com $p_0 = 2/5$, essa probabilidade é $3/5 + (2/5)(1/3) = 11/15 < 1$: o estado é transiente. O mesmo limite finito de ϕ produz classificações diferentes porque a regra na fronteira mudou.

Exercício 7.8. Pelo limite $T \le N$,

$$S_T = \sum_{k=1}^{N} D_k, \qquad D_k = \xi_k \mathbf{1}_{\{T \ge k\}}.$$

A indicadora de $\{T \ge k\}$ é determinada pela informação até $k-1$. Portanto, $ED_k^2 = \sigma^2 \mathbb{P}(T \ge k)$. Para $j < k$, o produto $D_j \mathbf{1}_{\{T \ge k\}}$ também é conhecido até $k-1$, enquanto $E(\xi_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Logo $E(D_j D_k) = 0$. Somando, pela fórmula de caudas para variáveis inteiras limitadas,

$$ES_T^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T \ge k) = \sigma^2 ET.$$

Não foi necessária nenhuma passagem ao limite.

Exercício 7.9. O mecanismo de reprodução dá $E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = mZ_n$. Dividir por m^{n+1} prova a propriedade de martingal; $E(W_n) = k$ garante integrabilidade. No regime $m < 1$, a extinção ocorre quase certamente, e depois dela $W_n = 0$. Logo $W_n \to 0$ quase certamente, sem convergência das médias. Como no exemplo do produto, não existe dominadora integrável para toda a sequência.

Exercício 7.10. Para $(0, 1, 1, 1, 1)$, os valores são 0,6, 0,84, 1,176, 1,6464 e 2,30496. Para $\alpha = 0{,}01$, o limiar é 100; são necessárias $\lceil \log(100)/\log(1{,}4) \rceil = 14$ conversões consecutivas desde o início.

Exercício 7.11. Para cada m, o processo parado ainda é martingal e tem esperança 1. A não negatividade permite descartar a contribuição de $\{T_c > m\}$ e obter $1 \geq c\mathbb{P}(T_c \leq m)$. Passamos ao limite nas probabilidades de eventos crescentes, não na esperança de L_{T_c}. Se o martingal pudesse ser negativo, a contribuição descartada poderia ser negativa, invalidando a desigualdade.

Exercício 7.12. Linearidade preserva a propriedade de martingal, e a média das duas razões é não negativa e começa em 1; Ville se aplica. O máximo não preserva a média condicional: com $a = 0{,}7$, $b = 0{,}3$ e uma única observação Bernoulli$(1/2)$, o máximo das razões é sempre 1,4, embora o máximo inicial seja 1. Logo nem sequer é um supermartingal.

Exercício 7.13. Os reforços são $q_1 = 1/2$ e $q_2 = 1/4$. As duas escolhas têm probabilidade $1/2$. Se o caminho 1 é escolhido, $Z_1 = (3/2)/(5/2) = 3/5$; se o caminho 2 é escolhido, $Z_1 = 1/(9/4) = 4/9$. Logo,

$$E[Z_1] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{9}\right) = \frac{47}{90}, \qquad E[Z_1 - Z_0] = \frac{47}{90} - \frac{1}{2} = \frac{1}{45}.$$

Em um passo geral, os incrementos possíveis são $q_1(1 - Z_n)/(S_n + q_1)$ e $-q_2 Z_n/(S_n + q_2)$, com probabilidades Z_n e $1 - Z_n$. Sua média condicionada é

$$Z_n(1 - Z_n)\left(\frac{q_1}{S_n + q_1} - \frac{q_2}{S_n + q_2}\right).$$

A convergência quase certa, mesmo com incrementos de esperança condicional positiva, não determina o valor do limite. Por exemplo, a sequência

determinística $W_n = 3/4 - 1/[4(n+1)]$ começa em $1/2$, tem incrementos positivos e converge a $3/4$. No modelo dos caminhos, a conclusão $Z_n \to 1$ exige o argumento adicional do teorema de seleção.

Métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov

Exercício ??. A matriz é simétrica, portanto a estacionária é $\pi = (1/2, 1/2)$. Em equilíbrio, $E_\pi f = 0$ e $\mathrm{Var}_\pi(f) = 1$. Em ambos os estados, a esperança do sinal após um passo é o sinal atual multiplicado por $1 - 2\delta$. Iterando,

$$E[f(X_k) \mid X_0] = (1-2\delta)^k f(X_0).$$

Consequentemente,

$$\rho_k = E_\pi[f(X_0)f(X_k)] = (1-2\delta)^k, \qquad \tau_f = 1 + 2\sum_{k\geq 1}(1-2\delta)^k = \frac{1-\delta}{\delta}.$$

Para $\delta = 1/5$, temos $\tau_f = 4$ e $N_{\mathrm{ef}} \approx 1900/4 = 475$. Para $\delta = 1/20$, temos $\tau_f = 19$ e $N_{\mathrm{ef}} \approx 1900/19 = 100$. A distribuição estacionária é a mesma, mas a cadeia que troca de estado com menor frequência guarda correlação por mais tempo e produz uma média menos precisa com o mesmo número de passos.

Exercício ??. Os pesos são $\theta^2(1-\theta)^2$, proporcionais a $(9, 16, 9)$. Assim, $\pi = (9, 16, 9)/34$ e a média é $1/2$. A matriz é

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 9/32 & 7/16 & 9/32 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nas duas arestas, os fluxos valem $9/68$; logo há balanço detalhado e $\pi P = \pi$. Por linearidade, $\pi P_\varepsilon = \pi$. Para $\varepsilon > 0$, a cadeia é irredutível e tem permanências. Para $\varepsilon = 0$, $P_0 = I$: cada trajetória fica onde começou e as médias geralmente não convergem para a esperança posterior, embora π ainda seja estacionária.

Exercício ??. Dado que a outra variável vale 0, a probabilidade de sortear 1 é $3/10$; dado 1, é $7/10$. Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} 7/10 & 3/20 & 3/20 & 0 \\ 7/20 & 3/10 & 0 & 7/20 \\ 7/20 & 0 & 3/10 & 7/20 \\ 0 & 3/20 & 3/20 & 7/10 \end{pmatrix}, \qquad \pi = (7,3,3,7)/20.$$

Por exemplo, $\pi(00)P(00,01) = 21/400 = \pi(01)P(01,00)$; as outras arestas seguem pela simetria e dão $\pi P = \pi$. A chance de mudar a partir de 00 é $3/10$. Toda proposta é aceita, mas a condicional pode sortear o valor atual. No caso de massa somente em 00 e 11, cada condicional é determinística: os dois estados são absorventes, e a cadeia não percorre o suporte inteiro.

Exercício ??. A média-alvo é zero. A discordância entre execuções mostra que elas ainda não atravessaram adequadamente as duas regiões de massa. Os tamanhos efetivos são aproximadamente $8000/2{,}934 \approx 2727$ e $8000/77{,}676 \approx 103$. A estabilidade dentro de um único modo não demonstra equilíbrio global.

Exercício ??. Dos extremos para o centro, a aceitação é $1/2$; do centro para os extremos, é 1. Logo

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A matriz é simétrica, e os fluxos sob a uniforme são $1/6$ nas arestas. A proposta sem correção teria estacionária $(1,2,1)/4$, proporcional aos graus. Num espaço unitário, definimos $q(x,x) = 1$.

Exercício ??. A condição $\frac{1}{2}(0{,}96)^n \le 0{,}05$ dá

$$t_{\mathrm{mix}}(0{,}05) = \left\lceil \frac{\log(0{,}1)}{\log(0{,}96)} \right\rceil = 57,$$

em comparação com 11 para $\delta = 0{,}1$. Condicionalmente à separação inicial, T é geométrico em $\{1,2,\dots\}$ com parâmetro 2δ, logo sua média é 25 passos.

Exercício ??. Se as cópias podem se separar, o evento $\{T \le n\}$ não garante igualdade em n; assim $\{X_n \neq Y_n\}$ pode conter trajetórias que já se encontraram. Rode cópias independentes até o primeiro encontro e, depois dele, use uma nova sequência comum de uniformes para as transições. O par independente é Markov e seu encontro é um tempo de parada. A propriedade forte de Markov permite recomeçar do estado encontrado com a lei correta; a nova aleatoriedade comum mantém as duas cópias juntas e preserva cada lei marginal.

Exercício ??. Se $\mathscr{F}_n$ contém a história do par até n, a hipótese dá

$$\mathbb{P}(T > n+1) = E[\mathbf{1}_{\{T>n\}}\mathbb{P}(T > n+1 \mid \mathscr{F}_n)] \le (1-\eta)\mathbb{P}(T > n).$$

Iterar prova a cota. Para $0 < \eta < 1$ e $0 < \varepsilon < 1$, basta escolher $B = \lceil \log(\varepsilon)/\log(1-\eta) \rceil$, usando $\mathbb{P}(T > 0) \le 1$ e a desigualdade de acoplamento. A distância marginal é então no máximo ε para todo estado inicial e todo $n \ge B$. Para $\eta = 1$, o encontro ocorre até o primeiro passo e $B = 1$ basta. A garantia não torna independentes as observações retidas.

Movimento browniano

Exercícios principais

Exercício ??. Por $\mathrm{Cov}(W_s, W_t) = s$, $\mathrm{Corr}(W_s, W_t) = \sqrt{s/t}$. Além disso, $W_t = W_s + (W_t - W_s)$, com o segundo termo independente do primeiro; logo $W_t \mid W_s = b \sim N(b, t-s)$. A correlação tende a zero quando $t \to \infty$, pois a parcela de variância produzida depois de s cresce, enquanto a covariância permanece igual a s.

Exercício ??. Escreva $2W_1 - W_3 = W_1 - (W_3 - W_1)$. Os termos à direita são independentes, com variâncias 1 e 2; portanto a diferença tem distribuição $N(0,3)$. W_1 e $W_3 - W_1$ são independentes pelos incrementos brownianos. Já $\mathrm{Cov}(W_1, 2W_1 - W_3) = 2 - 1 = 1$, de modo que esse segundo par não é independente.

Exercício ??. Para $Z = W_t - W_s$, temos $EZ = EZ^3 = 0$ e $EZ^2 = t - s$, independentemente da informação $\mathscr{F}_s$. Assim,

$$E(W_t^3 - 3tW_t \mid \mathscr{F}_s) = W_s^3 + 3W_s(t-s) - 3tW_s = W_s^3 - 3sW_s.$$

O processo é adaptado e integrável, pois normais possuem todos os momentos absolutos finitos.

Exercício ??. O limite é $\sigma^2 T$ nos dois casos. Para explicitar o efeito da deriva, escreva $h_j = t_{j+1} - t_j$ e $\Delta_j W = W_{t_{j+1}} - W_{t_j}$. Então

$$\sum_j (\Delta_j Y)^2 = \sigma^2 \sum_j (\Delta_j W)^2 + 2\mu\sigma \sum_j h_j \Delta_j W + \mu^2 \sum_j h_j^2.$$

O primeiro termo converge em média quadrática para $\sigma^2 T$. O último é limitado por $\mu^2 T|\pi|$. O termo intermediário é centrado e tem variância $4\mu^2\sigma^2 \sum_j h_j^3 \le 4\mu^2\sigma^2 T|\pi|^2$, que tende a zero. Isso justifica o mesmo limite em média quadrática.

Exercício ??. Para $t > 0$ e $x \ge 0$, $\mathbb{P}(M_t \le x) = 2\Phi(x/\sqrt{t}) - 1$; para $x < 0$, a probabilidade é zero. A densidade em $x > 0$ é

$$f_{M_t}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{-x^2/(2t)}.$$

Como $M_t \overset{d}{=} |W_t|$, $EM_t = \sqrt{2t/\pi}$ e $\mathrm{Var}(M_t) = t(1-2/\pi)$. Em comparação, $EW_t = 0$ e $\mathrm{Var}(W_t) = t$.

Exercício ??. Pela reflexão, $2[1 - \Phi(b/(0{,}6\sqrt{9}))] = 0{,}02$. Portanto $b = 1{,}8\Phi^{-1}(0{,}99) \approx 4{,}1874$.

Exercício ??. Em $(0,1)$, use $\mathbb{P}(T_a > t) \le 1$ e $\int_0^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t = 1/p$. Para t grande, $\mathbb{P}(T_a > t) \sim \sqrt{2/\pi}\,a\,t^{-1/2}$. O integrando da fórmula de caudas é, portanto, comparável a $t^{p-3/2}$. Sua integral em $(1,\infty)$ é finita exatamente quando $p < 1/2$. Para $p = 1/2$, a divergência é logarítmica.

Exercício ??. A probabilidade de saída por 8 é $(2+1)/(8+1) = 1/3$. O tempo médio é $(2+1)(8-2)/\sigma^2 = 18/\sigma^2$. Igualá-lo a 6 fornece $\sigma = \sqrt{3}$.

Exercício ??. Pelo Exemplo **??**,

$$a = \sigma\sqrt{\frac{mp}{1-p}}, \qquad b = \sigma\sqrt{\frac{m(1-p)}{p}}.$$

Duplicar σ, mantendo p e m, exige duplicar as duas distâncias. Quadruplicar m, mantendo p e σ, também exige duplicá-las. Quando $p \downarrow 0$, temos $a \downarrow 0$ e $b \to \infty$, com $ab = m\sigma^2$ constante. A fronteira inferior se aproxima do ponto inicial e torna mais provável a saída por baixo; a fronteira superior se afasta para conservar a duração média prescrita.

Exercício ??. O tempo $t \wedge T_a$ é limitado, então a Proposição **??**, com a cota do supremo demonstrada na mesma seção, fornece $EW_{t\wedge T_a} = EW_0 = 0$. Como $T_a < \infty$ quase certamente, em quase toda trajetória o processo parado acaba constante e igual a a. Para cada t, $W_{t\wedge T_a} \le a$; logo

$$E|W_{t\wedge T_a} - a| = E(a - W_{t\wedge T_a}) = a.$$

A esperança do erro absoluto permanece positiva, apesar da convergência quase certa. Na saída de um intervalo, os valores parados ficam entre duas constantes e a primeira regra da Proposição 7.8 preserva a esperança no limite. Aqui há apenas uma barreira superior.

Exercícios complementares

Exercício ??. Combinações lineares de vetores gaussianos são gaussianas, e as condições nas extremidades seguem da definição. Expandindo a covariância,

$$\operatorname{Cov}(\beta_s, \beta_t) = \min(s,t) - \frac{t}{T}s - \frac{s}{T}t + \frac{st}{T^2}T = \min(s,t) - \frac{st}{T}.$$

Também $\operatorname{Cov}(\beta_t, W_T) = t - (t/T)T = 0$ para todo t. Cada vetor finito da ponte é conjuntamente gaussiano com W_T e tem covariâncias cruzadas nulas; pela Observação **??**, é independente de W_T. Isso dá a independência do processo e do valor final.

Exercício ??. As somas de Riemann da área têm média zero e convergem quase certamente. Seus módulos são limitados por tR_t; os produtos de duas somas são limitados por $t^2R_t^2$, que tem esperança finita. A Proposição 7.8 justifica, portanto, passar as médias e covariâncias ao limite. Para $0 < s \le t$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(A_s, A_t) &= \int_0^s \left(\int_0^t \min(u,v)\ \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^s \left(ut - \frac{u^2}{2} \right) \mathrm{d}u = \frac{ts^2}{2} - \frac{s^3}{6}.\end{aligned}$$

Tomando $s = t$, obtemos $\operatorname{Var}(A_t) = t^3/3$.

Exercício ??. Completando o quadrado no expoente da integral gaussiana,

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda t}} \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{1+2\lambda t} \right).$$

Pondo $D = 1 + 2\lambda t$, temos $u_t/u = -\lambda/D + 2\lambda^2 x^2/D^2$ e $u_{xx}/u = -2\lambda/D + 4\lambda^2 x^2/D^2$. Logo $u_t = u_{xx}/2$, e $u(0,x) = e^{-\lambda x^2}$.

Exercício ??. A condição $(r/\rho)^{d-2} = 1/4$ fornece $\rho/r = 4^{1/(d-2)}$. As razões são 4, 2 e $\sqrt{2}$ para $d = 3, 4, 6$, respectivamente.

Exercício ??. No plano, a probabilidade é $\log(9/3)/\log(9/1) = 1/2$. Em dimensão três,

$$\mathbb{P}(T_1 < T_9) = \frac{3^{-1} - 9^{-1}}{1^{-1} - 9^{-1}} = \frac{1}{4}.$$

Exercício ??. Fixe $n \geq 1$. No instante $1/n$, a posição tem densidade e é diferente da origem quase certamente. Condicionando nessa posição e usando Markov, a probabilidade de atingir a origem depois de $1/n$ é zero, pois um movimento browniano planar iniciado fora de um ponto fixado não o alcança. Assim, quase certamente não há retornos após $1/n$. A união dos eventos excepcionais sobre n continua tendo probabilidade zero e cobre a possibilidade de qualquer retorno em um instante positivo.

Integração estocástica

Exercícios principais

Exercício ??. As variáveis $(-1)^{k-1}\xi_k$ continuam independentes, com probabilidades $1/2$ de valer 1 ou -1. Portanto I_n tem a mesma distribuição de S_n, média zero e variância n. Mais explicitamente,

$$\mathbb{P}(I_n = 2j - n) = \binom{n}{j} 2^{-n}, \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Exercício ??. A integral é $W_1(W_2 - W_1) + 2W_2(W_4 - W_2)$. Sua média é zero e, pela isometria, sua variância é

$$EW_1^2(2-1) + 4EW_2^2(4-2) = 1 + 16 = 17.$$

No produto cruzado, $W_1(W_2 - W_1)2W_2$ já é conhecido no tempo 2. Condicionar em $\mathscr{F}_2$ deixa o fator $W_4 - W_2$, de média condicional zero. A dependência entre os coeficientes não impede esse cancelamento.

Exercício ??. O vetor é gaussiano, pois qualquer combinação linear de suas coordenadas é uma integral com integrando determinístico. Sua matriz de covariâncias é

$$\begin{pmatrix} t & t^2/2 & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 & t^3/6 \\ t^2/2 & t^3/6 & t^3/3 \end{pmatrix}.$$

A soma da segunda e da terceira coordenadas é tW_t. Assim, o vetor está contido em um plano e a matriz é singular.

Exercício ??. A condição da fórmula de Itô é satisfeita, pois

$$\int_0^T E(4W_s^3)^2 \, \mathrm{d}s = 60T^4 < \infty.$$

Itô fornece

$$W_t^4 = 4\int_0^t W_s^3 \, \mathrm{d}W_s + 6\int_0^t W_s^2 \, \mathrm{d}s.$$

Portanto a integral pedida é $W_t^4/4 - (3/2)\int_0^t W_s^2 \, \mathrm{d}s$. A isometria e o sexto momento da normal dão

$$E\left(\int_0^t W_s^3 \, \mathrm{d}W_s\right)^2 = \int_0^t 15s^3 \, \mathrm{d}s = \frac{15t^4}{4}.$$

Exercício ??. Para $f(t,x) = e^{t/2}\operatorname{sen} x$, temos $f_t + f_{xx}/2 = 0$. Assim,

$$M_t = \int_0^t e^{s/2}\cos W_s \, \mathrm{d}W_s.$$

O integrando satisfaz $E\int_0^T e^s \cos^2 W_s \, \mathrm{d}s \le e^T - 1 < \infty$, portanto o processo é um martingal. Como $E\cos(2W_t) = e^{-2t}$,

$$EM_t^2 = e^t E\operatorname{sen}^2 W_t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh} t.$$

Exercício ??. A diferença entre as somas é

$$\sum_k [f(W_{t_{k+1}}) - f(W_{t_k})]\Delta W_k.$$

Taylor dá

$$\sum_k f'(W_{t_k})(\Delta W_k)^2 + R_n, \qquad |R_n| \le \omega\left(\max_k |\Delta W_k|\right)\sum_k (\Delta W_k)^2,$$

onde ω é um módulo de continuidade de f' no compacto visitado pela trajetória. O primeiro fator tende a zero quase certamente, e a soma dos quadrados converge a t em probabilidade; por isso o resto tende a zero em probabilidade. Como f' é limitada, (**??**) mostra que a soma principal tem o mesmo limite que $\sum_k f'(W_{t_k})\Delta t_k$, isto é, $\int_0^t f'(W_s)\,\mathrm{d}s$. A soma à esquerda converge à integral de Itô pela aproximação de integrandos contínuos limitados. Logo a soma à direita converge à integral de Itô mais esse termo.

Exercício ??. Pela identidade (??) com $K_s = 1$, a integral é $W_{t\wedge\tau}$. A isometria fornece

$$EW_{t\wedge\tau}^2 = E\int_0^t \mathbf{1}_{\{s\le\tau\}}\,\mathrm{d}s = E(t\wedge\tau).$$

O lado esquerdo é no máximo a^2. Pela fórmula de caudas,

$$E(t\wedge\tau) = \int_0^t \mathbb{P}(\tau > u)\,\mathrm{d}u \le a^2.$$

O limite dessa integral imprópria dá $E\tau \le a^2$; logo $\tau < \infty$ quase certamente. A continuidade dá $W_\tau^2 = a^2$. Como $W_{t\wedge\tau}^2 \le a^2$, a regra para variáveis limitadas da Proposição 7.8, aplicada à identidade anterior, conclui $E\tau = a^2$.

Exercício ??. A distribuição lognormal fornece, para todo $p \in \mathbb{R}$,

$$EX_t^p = x^p \exp\left[p\mu t + \frac{p(p-1)}{2}\sigma^2 t\right].$$

Pelo limite de $t^{-1}\log X_t$ obtido no texto, se $\mu < \sigma^2/2$, então $X_t \to 0$ quase certamente; se $\mu > \sigma^2/2$, então $X_t \to \infty$ quase certamente. Na igualdade, $X_t = xe^{\sigma W_t}$. A recorrência, aplicada simultaneamente aos níveis inteiros positivos e negativos, dá

$$\liminf_{t\to\infty} X_t = 0, \qquad \limsup_{t\to\infty} X_t = \infty \quad \text{quase certamente.}$$

Se $0 < \mu < \sigma^2/2$, as trajetórias tendem a zero, embora $EX_t = xe^{\mu t} \to \infty$. Não existe, nesse caso, uma variável integrável que domine todos os X_t; tal cota faria as esperanças convergirem a zero pela Proposição 7.8.

Exercício ??. Para $s \le t$ e condição inicial determinística, a isometria polarizada dá

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \sigma^2 \int_0^s e^{-\theta(s-r)}e^{-\theta(t-r)}\,\mathrm{d}r = \frac{\sigma^2}{2\theta}e^{-\theta(t-s)}(1 - e^{-2\theta s}).$$

Com a condição inicial normal independente, ampliamos a informação inicial para incluir X_0. Os incrementos brownianos continuam independentes

do passado, pela independência de X_0 e W. O termo inicial acrescenta $(\sigma^2/(2\theta))e^{-\theta(s+t)}$ à covariância. O resultado é

$$EX_t = m, \qquad \operatorname{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|t-s|}.$$

O processo é gaussiano: toda combinação linear de suas posições é a soma de um múltiplo da condição inicial normal com uma integral de integrando determinístico independente dela. Sua média é constante e suas covariâncias dependem apenas das diferenças de tempo. Pela Observação **??**, todas as distribuições em um número finito de instantes são invariantes por translação temporal.

Exercício ??. Para $Y_t = X_t - m$, Itô dá

$$\mathrm{d}(Y_t^2) = (-2\theta Y_t^2 + \sigma^2)\ \mathrm{d}t + 2\sigma Y_t\ \mathrm{d}W_t.$$

A representação explícita fornece segundos momentos contínuos e limitados em horizontes compactos. Assim, $E\int_0^T 4\sigma^2 Y_s^2\ \mathrm{d}s < \infty$, e a integral estocástica tem esperança zero. Segue que $q'(t) = -2\theta q(t) + \sigma^2$, com $q(0) = (x-m)^2$. Portanto,

$$q(t) = (x-m)^2 e^{-2\theta t} + \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta t}).$$

Subtrair $[E(X_t - m)]^2$ recupera a variância indicada no capítulo.

Exercício ??. Escreva $r = 1 - \theta h$. A recorrência é $X_{k+1}^{(h)} - m = r(X_k^{(h)} - m) + \sigma\sqrt{h}\, Z_{k+1}$. Portanto,

$$EX_k^{(h)} = m + r^k(x-m), \qquad \operatorname{Var}(X_k^{(h)}) = \sigma^2 h \sum_{j=0}^{k-1} r^{2j}.$$

Se $r^2 \neq 1$, a soma é $(1-r^{2k})/(1-r^2)$. Os valores exatos em $t = kh$ substituem r^k por $e^{-\theta kh}$ e a variância pela expressão (**??**). Para $h > 0$, a variância numérica permanece limitada se, e somente se, $|r| < 1$, isto é, $0 < \theta h < 2$. Na fronteira $\theta h = 2$, ela cresce como $k\sigma^2 h$.

Exercício ??. Pela isometria, o erro quadrático médio é

$$\sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} E(W_s - W_{t_k})^2 \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} \sum_k (t_{k+1} - t_k)^2.$$

Como $\sum_k (t_{k+1} - t_k) = t$, Cauchy–Schwarz dá $\sum_k (t_{k+1} - t_k)^2 \geq t^2/n$. A igualdade ocorre precisamente quando todos os intervalos têm comprimento t/n. Logo a partição uniforme minimiza o erro, cujo mínimo é $t^2/(2n)$.

Exercícios complementares

Exercício ??. Escreva $D_k = \xi_k \mathbf{1}_{\{T \geq k\}}$. A indicadora é conhecida no instante $k-1$. Logo $ED_k^2 = \sigma^2 \mathbb{P}(T \geq k)$ e, para $j < k$, condicionar na história até $k-1$ dá $E(D_j D_k) = 0$. Portanto,

$$E\left(\sum_{k=m+1}^{n} D_k \right)^2 = \sigma^2 \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}(T \geq k) = \sigma^2 E[(T \wedge n) - (T \wedge m)].$$

A cauda da série que representa ET tende a zero. Pela completude, $S_{T \wedge n}$ tem um limite em média quadrática. Como $ET < \infty$, temos $T < \infty$ quase certamente e $S_{T \wedge n} \to S_T$ quase certamente. A unicidade do limite em probabilidade identifica os dois limites. Em particular, $E|S_{T \wedge n} - S_T|^2 \to 0$. Pela desigualdade triangular para a norma quadrática,

$$\left| \sqrt{ES_{T \wedge n}^2} - \sqrt{ES_T^2} \right| \leq \sqrt{E|S_{T \wedge n} - S_T|^2} \longrightarrow 0.$$

A identidade para a parada limitada dá $ES_{T \wedge n}^2 = \sigma^2 E(T \wedge n)$. A fórmula de caudas faz $E(T \wedge n) \to ET$, concluindo $ES_T^2 = \sigma^2 ET$.

Exercício ??. Pela representação $A_t = \int_0^t (t - r) \, \mathrm{d}W_r$,

$$\mathrm{Cov}(A_t, W_s) = \int_0^s (t - r) \, \mathrm{d}r = s\left(t - \frac{s}{2}\right).$$

O par (A_t, W_s) é gaussiano. Pela Observação **??**, a variável $R = A_t - (t - s/2)W_s$ é independente de W_s. Sua variância é

$$v = \frac{t^3}{3} - s\left(t - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^3}{12} + \frac{(t-s)^3}{3}.$$

Logo $A_t \mid W_s = b$ tem distribuição normal com média $(t - s/2)b$ e variância v. Quando $s \uparrow t$, recuperamos a média $tb/2$ e a variância $t^3/12$ do Exemplo **??**.

Exercício ??. Aqui $-2\mu/\sigma^2 = 0{,}625$. Logo

$$u(1) = \frac{1 - e^{0{,}625}}{1 - e^{1{,}875}} \approx 0{,}15727, \qquad E_1\tau = \frac{3u(1) - 1}{-0{,}2} \approx 2{,}64099.$$

Numerador e denominador da primeira razão são negativos, dando uma probabilidade positiva. A deriva negativa reduz a chance de sair pelo extremo superior em relação ao valor $1/3$ sem deriva.

Exercício ??. Com p_u a densidade normal de variância u,

$$w(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) p_{T-t}(y - x)\, \mathrm{d}y.$$

As derivadas do núcleo são integráveis para $t < T$. Diferenciar sob a integral e usar $\partial_u p_u = \frac{1}{2}\partial_{xx} p_u$ dá $w_t + \frac{1}{2} w_{xx} = 0$. Em $[0, T - \varepsilon]$, w_x é limitada, portanto Itô mostra que $w(t, W_t)$ é um martingal nesse intervalo. Além disso, $|w| \le \|g\|_\infty$. Quando $t \uparrow T$, temos $W_t \to W_T$ e a normal usada na integral tem variância $T - t \to 0$. A continuidade de g perto de W_T, junto com sua limitação fora dessa vizinhança, dá $w(t, W_t) \to g(W_T)$ quase certamente. A limitação permite passar ao limite em esperança e em esperança condicional. Assim, $w(t, W_t) = E[g(W_T) \mid \mathcal{F}_t]$.

Modelos estocásticos em inteligência artificial

Exercícios principais

Exercício ??. A fórmula segue de $J_{ij} = \xi_i \xi_j / 4$. Escreva $q_j = \xi_j s_j$, igual a 1 no acerto e a -1 no erro. Se há um erro, a soma dos outros três q_j vale 3 para a unidade incorreta e 1 para cada unidade correta. A primeira troca para o sinal da memória; as demais conservam seus sinais. Com dois erros, atualizar uma unidade incorreta produz um estado com um erro, que termina em ξ. Atualizar uma correta produz três erros, e a mesma análise relativa a $-\xi$ mostra a recuperação dessa outra memória. Cada tipo de unidade é escolhido primeiro com probabilidade $1/2$, e as escolhas posteriores acabam visitando a unidade que falta corrigir quase certamente.

Exercício ??. Enquanto a unidade 2 não é sorteada, o estado não muda. Logo $\mathbb{P}(\tau = k) = (1-p_2)^{k-1}p_2$ para $k \geq 1$, $\mathbb{P}(\tau > n) = (1-p_2)^n$ e $E\tau = 1/p_2$. Para $p_2 = 1/2$, a exigência $1 - 2^{-n} \geq 0{,}99$ equivale a $n \geq \log(100)/\log 2$. O menor inteiro é 7.

Exercício ??. Com dois erros, $\sum_j q_j = 0$. Portanto, para cada unidade, $\sum_{j \neq i} q_j = -q_i$, e a atualização simultânea troca todos os q_i de sinal. O novo estado é $-s$, que também tem dois erros; a atualização seguinte retorna a s. Os estados s e $-s$ são distintos, de modo que o período é dois. A Proposição **??** supõe que apenas uma unidade muda por vez. Quando várias mudam simultaneamente, os termos de interação entre elas não são calculados pela mesma diferença de uma coordenada.

Exercício ??. Em ξ, cada unidade tem campo de módulo $3/4$ e sinal correto. A probabilidade de sair no próximo passo é $\ell(-3\beta/2) = 1/(1+e^{3\beta/2})$. A probabilidade de observar especificamente ξ no equilíbrio é

$$\pi_\beta(\xi) = \frac{e^{3\beta/2}}{2e^{3\beta/2} + 8 + 6e^{-\beta/2}}.$$

Quando $\beta \to 0$, essas probabilidades tendem, respectivamente, a $1/2$ e $1/16$. Quando $\beta \to \infty$, tendem a 0 e $1/2$. No segundo limite, a massa de equilíbrio se divide entre as duas diagonais. Esses são limites das fórmulas para temperaturas positivas.

Exercício ??. Os dois valores da oculta têm probabilidade $1/2$. Assim, $EV_1 = (3/4 + 1/4)/2 = 1/2$, e o mesmo vale para todos os pixels. Condicionalmente à oculta, os pixels são independentes. Logo,

$$E(V_1V_4) = \frac{1}{2}\left[(3/4)^2 + (1/4)^2\right] = \frac{5}{16},$$
$$E(V_1V_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4}\right] = \frac{3}{16}.$$

Subtraindo $(1/2)^2$, obtemos $\mathrm{Cov}(V_1, V_4) = 1/16$ e $\mathrm{Cov}(V_1, V_2) = -1/16$. A oculta favorece conjuntamente dois pixels concordantes e favorece sinais opostos nos pixels de posições distintas da diagonal. A mistura sobre a oculta introduz dependência nas marginais.

Exercício ??. A razão dos pesos ocultos é $e^{b_1 - 2\lambda}$. Para que ela seja $r/(1-r)$, tome

$$b_1 = 2\lambda + \log \frac{r}{1-r}.$$

Com $r = 4/5$, as chances iniciais a favor de T são quatro. A imagem com o pixel 8 apagado tem razão de verossimilhanças $3^4 = 81$. As chances posteriores são 324, e a probabilidade é $324/325$.

Exercício ??. Como $\partial \mathscr{E} / \partial a_i = -v_i$, a derivada do termo dos dados é o próprio pixel observado; a derivada da normalização é a média do pixel no modelo. Portanto,

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} v_i^{(r)} - E_\vartheta V_i.$$

Analogamente, $\partial \mathscr{E} / \partial b_j = -h_j$ fornece

$$\frac{\partial L}{\partial b_j} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} E_\vartheta (H_j \mid V = v^{(r)}) - E_\vartheta H_j.$$

No segundo caso, os dados não revelam a oculta, e por isso sua contribuição é uma esperança condicional. As médias finais nas duas fórmulas são tomadas sob a distribuição conjunta do modelo.

Exercício ??. A média do produto dos k sinais de ruído é $(1/2)^k$. Assim,

$$e_k = \frac{1 - 2^{-k}}{2}.$$

A condição $e_k \geq 0{,}49$ equivale a $2^{-k} \leq 0{,}02$, cujo menor inteiro é $k = 6$. Para cada valor inicial do pixel, a probabilidade de cada sinal tende a $1/2$. Em dimensão finita, a independência condicional das corrupções também leva à convergência da distribuição da imagem para a uniforme.

Exercício ??. As chances iniciais são $(4/5)/(1/5) = 4$. Com um erro em relação a ξ, a razão de verossimilhanças é $3^2 = 9$, e as chances posteriores são 36. Logo a probabilidade de ξ é $36/37$. Com dois erros, as verossimilhanças são iguais; a probabilidade posterior permanece $4/5$.

Exercício ??. Para quaisquer x, y, $Q_K(x,y) = 2^{-d}$. Portanto,

$$\mathbb{P}(X_{K-1} = x, X_K = y) = p_{K-1}(x) 2^{-d},$$

o que prova a independência e a uniformidade. Pela fórmula de Bayes, $R_K(y,x) = p_{K-1}(x)$. O novo sorteio escolhe um predecessor dessa distribuição. A ausência de informação em y deixa a distribuição anterior inalterada, em vez de determinar um predecessor único.

Exercício ??. Temos $EX_0 = 0$ e $\mathrm{Cov}(X_0) = \xi\xi^{\mathsf{T}}$. Pela representação marginal com ruído independente,

$$EX_k = 0, \qquad \mathrm{Cov}(X_k) = \overline{\alpha}_k \xi\xi^{\mathsf{T}} + (1 - \overline{\alpha}_k) I_4.$$

A distribuição não é normal multivariada para $0 < \overline{\alpha}_k < 1$. Para verificar, projete sobre $u = \xi/\|\xi\|$ e ponha $a = \sqrt{\overline{\alpha}_k}\|\xi\| > 0$, $v = 1 - \overline{\alpha}_k$. A projeção tem a lei de $aC + \sqrt{v}Z$, com C um sinal justo independente da normal padrão Z. Seu segundo momento é $a^2 + v$, e seu quarto momento é $a^4 + 6a^2 v + 3v^2$. Uma normal centrada com a mesma variância teria quarto momento $3(a^2 + v)^2$, maior por $2a^4$. Logo ao menos uma projeção não é normal.

Exercício ??. Como $\overline{\alpha}_k = \alpha_k \overline{\alpha}_{k-1}$,

$$\frac{c_k}{\sqrt{\overline{\alpha}_k}} = \frac{\delta_k}{\sqrt{\alpha_k}(1 - \overline{\alpha}_k)}.$$

Ao substituir m_k em $c_k m_k + d_k x$, o coeficiente de x é

$$\frac{\delta_k + \alpha_k(1 - \overline{\alpha}_{k-1})}{\sqrt{\alpha_k}(1 - \overline{\alpha}_k)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}},$$

e o de ϵ_* é $-\delta_k / [\sqrt{\alpha_k}\sqrt{1 - \overline{\alpha}_k}]$. Isso prova a identidade. Pela propriedade da torre em (**??**), $c_k m_k(x) + d_k x$ é exatamente $E(X_{k-1} \mid X_k = x)$; logo a previsão ideal fornece essa média. A covariância e, de modo mais geral, a distribuição condicional inteira não são determinadas apenas por essa média.

Exercícios complementares

Exercício ??. Usando a identidade sugerida,

$$\pi_V(v)K(v,v') = \sum_h \pi_H(h)\pi(v \mid h)\pi(v' \mid h).$$

A expressão é simétrica em v, v', logo vale o balanço detalhado. O resultado vale para a cadeia visível em blocos; não afirma que qualquer composição de atualizações na cadeia conjunta seja reversível.

Exercício ??. Somando primeiro sobre o estado antigo da unidade oculta,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V' = v', H' = h') &= \sum_{v,h} \pi(v,h)\pi(h' \mid v)\pi(v' \mid h') \\ &= \sum_v \pi_V(v)\pi(h' \mid v)\pi(v' \mid h') \\ &= \pi_H(h')\pi(v' \mid h') = \pi(v', h').\end{aligned}$$

Assim, a distribuição conjunta é estacionária. A invariância não implica reversibilidade: na conjunta proposta, a varredura tem $K(00,01) = (1/5)(1/5) = 1/25$ e $K(01,00) = (4/5)(4/5) = 16/25$. Os fluxos são $(2/5)(1/25) = 2/125$ e $(1/10)(16/25) = 8/125$, portanto diferentes. Cada atualização isolada é reversível, mas a composição em ordem fixa pode deixar de ser. A cadeia formada apenas pelas configurações visíveis, após as duas etapas, é reversível, como foi mostrado no exercício anterior.

Exercício ??. Nos estados relevantes, Bayes dá

$$R_k(y,x) = \frac{p_{k-1}(x)Q_k(x,y)}{p_k(y)}, \qquad p_{k-1}(x)r_{k-1}(x) = \mathbb{P}(X_0 = \xi, X_{k-1} = x).$$

Multiplicando e somando em x, a propriedade de Markov fornece

$$\begin{aligned}\sum_x R_k(y,x)r_{k-1}(x) &= \frac{\sum_x \mathbb{P}(X_0 = \xi, X_{k-1} = x)Q_k(x,y)}{p_k(y)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = \xi, X_k = y)}{p_k(y)} = r_k(y).\end{aligned}$$

Ponha $k = K - j$. Condicionalmente a $\mathscr{G}_j$, o estado seguinte Y_{k-1} tem lei $R_k(Y_k, \cdot)$; a identidade anterior implica $E(M_{j+1} \mid \mathscr{G}_j) = M_j$. O processo é

adaptado e está entre zero e um. Além disso, $EM_0 = \sum_y p_K(y) r_K(y) = 1/2$, e $M_K = r_0(Y_0) = \mathbf{1}_{\{Y_0=\xi\}}$. Cada novo estado pode favorecer uma ou outra diagonal; a propriedade de martingal conserva a previsão em média, não a torna monótona.

Exercício ??. Condicionalmente ao padrão inicial, as duas componentes têm a mesma covariância $\tilde{\delta}_k I_d$ e médias $c_k\xi + d_k x$ e $-c_k\xi + d_k x$. A média dessas duas componentes é $c_k(2w-1)\xi + d_k x$. A variância adicional entre as médias é

$$c_k^2\big[1-(2w-1)^2\big]\xi\xi^{\mathsf{T}} = 4c_k^2 w(1-w)\xi\xi^{\mathsf{T}}.$$

Somá-la à covariância dentro de cada componente dá a resposta. Essa parcela representa a incerteza sobre qual padrão originou a observação. Ela é maior em $w = 1/2$ e desaparece quando o padrão é conhecido com certeza.

Exercício ??. Diferenciando cada parcela,

$$\nabla p(x) = -\frac{1}{v}\sum_j \omega_j (x - a x^j)\varphi_v(x - a x^j).$$

Divida por $p(x)$ e use $\sum_j r_j(x) = 1$. Se o padrão inicial x^j tem probabilidade ω_j e a observação, dado esse padrão, tem lei $N(ax^j, vI_d)$, a regra de Bayes dá $r_j(x) = \mathbb{P}(X_0 = x^j \mid X_t = x)$.

Exercício ??. A solução é a soma de $a(t)X_0$ e de uma normal centrada independente, com covariância $[1-a(t)^2]I_d$. Portanto a soma é centrada, normal e tem covariância I_d. Seu score é $-x$. A deriva reversa é $b(T-u)x/2 - b(T-u)x = -b(T-u)x/2$. Trocar somente o sinal da deriva direta daria $+b(T-u)x/2$, que afasta o processo da origem e não preserva a distribuição normal padrão. O termo do score compensa essa mudança.

Referências

Ackley, D. H., G. E. Hinton e T. J. Sejnowski (1985). «A Learning Algorithm for Boltzmann Machines». Em: *Cognitive Science* 9.1, pp. 147–169. DOI: 10.1207/s15516709cog0901_7.

Austin, J., D. D. Johnson, J. Ho, D. Tarlow e R. van den Berg (2021). «Structured Denoising Diffusion Models in Discrete State-Spaces». Em: *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 34, pp. 17981–17993. URL: https://arxiv.org/abs/2107.03006.

Brémaud, P. (2020). *Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*. 2ª ed. Cham: Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-45982-6.

Dorigo, M., V. Maniezzo e A. Colorni (1996). «Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents». Em: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics* 26.1, pp. 29–41. DOI: 10.1109/3477.484436.

Dorigo, M. e T. Stützle (2004). *Ant Colony Optimization*. Cambridge: MIT Press.

Durrett, R. (2016). *Essentials of Stochastic Processes*. 3ª ed. Cham: Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-45614-0.

Frieze, A. e M. Karoński (2016). *Introduction to Random Graphs*. Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781316339831.

Geman, S. e D. Geman (1984). «Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images». Em: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* PAMI-6.6, pp. 721–741. DOI: 10.1109/TPAMI.1984.4767596.

Hastings, W. K. (1970). «Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications». Em: *Biometrika* 57.1, pp. 97–109. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97.

Hertz, J. A., A. S. Krogh e R. G. Palmer (1991). *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Redwood City: Addison-Wesley.

Hinton, G. E. (2002). «Training Products of Experts by Minimizing Contrastive Divergence». Em: *Neural Computation* 14.8, pp. 1771–1800. DOI: 10.1162/089976602760128018.

Hinton, G. E. (2010). *A Practical Guide to Training Restricted Boltzmann Machines*. Rel. téc. UTML TR 2010–003. Department of Computer Science, University of Toronto. URL: https://www.cs.toronto.edu/~hinton/absps/guideTR.pdf.

Ho, J., A. Jain e P. Abbeel (2020). «Denoising Diffusion Probabilistic Models». Em: *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 33, pp. 6840–6851. URL: https://arxiv.org/abs/2006.11239.

Hopfield, J. J. (1982a). «Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities». Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79.8, pp. 2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.

Hopfield, J. J. (1982b). «Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities». Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 79.8, pp. 2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.

Jackson, J. R. (1957). «Networks of Waiting Lines». Em: *Operations Research* 5.4, pp. 518–521. DOI: 10.1287/opre.5.4.518.

Jukes, T. H. e C. R. Cantor (1969). «Evolution of Protein Molecules». Em: *Mammalian Protein Metabolism*. Ed. por H. N. Munro. Vol. 3. New York: Academic Press, pp. 21–132.

Kelly, F. P. (1979). *Reversibility and Stochastic Networks*. Chichester: John Wiley & Sons. URL: https://www.statslab.cam.ac.uk/~fpk1/rsn.html.

Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson Processes*. Oxford Studies in Probability 3. Oxford: Oxford University Press. URL: https://research-information.bris.ac.uk/en/publications/poisson-processes/.

Lawler, G. F. (2006). *Introduction to Stochastic Processes*. 2ª ed. Boca Raton: Chapman e Hall/CRC.

Le Cam, L. (1960). «An approximation theorem for the Poisson binomial distribution». Em: *Pacific Journal of Mathematics* 10.4, pp. 1181–1197. URL: https://msp.org/pjm/1960/10-4/pjm-v10-n4-p11-p.pdf.

Levin, D. A. e Y. Peres (2017). *Markov Chains and Mixing Times*. 2ª ed. Com contribuições de Elizabeth L. Wilmer. Providence: American Mathematical Society. DOI: 10.1090/mbk/107.

Metropolis, N., A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller e E. Teller (1953). «Equation of State Calculations by Fast Computing Machines». Em: *The Journal of Chemical Physics* 21.6, pp. 1087–1092. DOI: 10.1063/1.1699114.

Page, L., S. Brin, R. Motwani e T. Winograd (1999). *The PageRank Citation Ranking. Bringing Order to the Web*. Technical Report 1999-66. Stanford InfoLab. URL: http://ilpubs.stanford.edu:8090/422/.

Pemantle, R. (2007). «A survey of random processes with reinforcement». Em: *Probability Surveys* 4, pp. 1–79. DOI: 10.1214/07-PS094.

Privault, N. (2024). *Discrete Stochastic Processes. Tools for Machine Learning and Data Science*. Cham: Springer. DOI: 10.1007/978-3-031-65820-4.

Rabiner, L. R. (1989). «A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition». Em: *Proceedings of the IEEE* 77.2, pp. 257–286. DOI: 10.1109/5.18626.

Rasmussen, C. E. e C. K. I. Williams (2006). *Gaussian Processes for Machine Learning*. Adaptive Computation and Machine Learning. Cambridge: MIT Press. URL: https://gaussianprocess.org/gpml/.

Ross, S. M. (2007). *Introduction to Probability Models*. 9ª ed. Academic Press.

Schinazi, R. B. (1999). *Classical and Spatial Stochastic Processes*. Boston: Birkhäuser. DOI: 10.1007/978-1-4612-1582-0.

Song, Y., J. Sohl-Dickstein, D. P. Kingma, A. Kumar, S. Ermon e B. Poole (2021). «Score-Based Generative Modeling through Stochastic Differential Equations». Em: *International Conference on Learning Representations*. URL: https://arxiv.org/abs/2011.13456.

Ville, J. (1939). *Étude critique de la notion de collectif*. Thèses de l'entre-deux-guerres 218. URL: https://numdam.org/item/THESE_1939__218__1_0/.

Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*. New York: John Wiley & Sons.

Wolff, R. W. (1982). «Poisson Arrivals See Time Averages». Em: *Operations Research* 30.2, pp. 223–231. DOI: 10.1287/opre.30.2.223.

Zucchini, W., I. L. MacDonald e R. Langrock (2016). *Hidden Markov Models for Time Series. An Introduction Using R*. 2ª ed. Boca Raton: CRC Press.

Índice remissivo

acessibilidade, 49
acoplamento, 128
afinamento
    independente, 235
algoritmo forward, 93
Aloha, protocolo, 172
análise de primeiro passo, 73
aperiodicidade, 64
aproximação
    de Poisson, 221
autovalor, 139

balanço detalhado, 110
    tempo contínuo, 292
Bellman–Harris, processo de, 337

cadeia de Ehrenfest, 26
cadeia de Markov
    definição, 20
    enumerável, 161
    finita
        decomposição, 57
    homogênea, 21
    tempo contínuo, 264
cadeia de nascimento e morte, 112, 296
    função de escala, 371
cadeia de saltos, 275
    projeção de passeio, 171
cadeia reversa, 118
caminho amostral, 3
canal de comunicação, 30
censura
    em cascatas, 195
churn, 39
classe de comunicação, 49
    fechada, 51
componente
    aberta, 201
    gigante, 209
    tamanho esperado, 205
comunicação entre estados, 49
confiabilidade
    máquinas diferentes, 271
    tempo até o desligamento, 302
conjunto de parâmetros, 2
contagem
    condicional, 242
contração espectral, 139
convergência
    ao equilíbrio
        tempo contínuo, 290
    de Cesàro, 135
    em probabilidade, 208

cruzamentos
desigualdade de Doob, 362

disponibilidade
equipamento reparável, 288
distância de variação total, 137
aproximação de Poisson, 222
distribuição
Beta, 386
binomial
contagem condicional, 242
de descendentes, 176
de Poisson, 217
soma, 219
de saída, 67, 368
empírica, 193
estacionária, 101
existência, 103
forma produto, 296
normalização, 112
tempo contínuo, 287
exponencial, 215
momentos, 215
finito-dimensional, 4
gama, 230
geométrica, 240
limite, 128
uniforme, 109
Doob
desigualdade de cruzamentos, 362
teorema de convergência, 364

energia
modelo de três estados, 339
potência média, 339
equação de Chapman–Kolmogorov, 33
tempo contínuo, 266
equação de Poisson, 75, 373
tempo de saída, 300
equação harmônica
menor solução não negativa, 196
equações de equilíbrio, 287
equações de tráfego, 318
equipamento reparável, 285
Erdős–Rényi, grafo de, 206
espaço de estados, 2
esperança
condicional, 348
propriedade da torre, 348
passagem ao limite, 366
estacionariedade
de segunda ordem, 14
estrita, 14
estado
absorvente, 24, 177
recorrente, 47
transiente, 47
estatísticas de ordem
uniformes, 243
estimador
de máxima verossimilhança, 194
estratégia de duplicação, 359
excursão, 125
exploração persistente, 156
explosão, 279
exponencial de matriz, 281

falta de memória, 216
feromônio, 151
deriva, 390
evaporação, 154
fila
capacidade finita, 306
equilíbrio, 113
estabilidade, 305
estado e fase do serviço, 273

$M/M/1$, 304
$M/M/\infty$, 310
$M/M/s$, 269
filtração, 350
natural, 350
fluxo
de entrada e de saída, 287
fórmula da cauda, 59
frequência assintótica, 121
função de covariância, 5
função de escala, 371
função geradora
continuidade, 183
convexidade, 183
de probabilidades, 183
derivada e média, 183
iteração, 185
ramificação em tempo contínuo, 331
função harmônica, 67, 368
função média, 5
função super-harmônica, 355

Galton–Watson, processo de, 176
gerador
conservativo, 267
grafo
aleatório, 206
grau de um vértice, 206

HMM, *ver* modelo oculto de Markov

imigração, 335
incrementos
estacionários, 14, 220
independentes, 11, 220
intensidade
acumulada, 251
dependente do estado, 252
temporal, 251

irredutibilidade, 51
tempo contínuo, 286

Jackson, teorema de, 319
Jukes–Cantor, modelo de, 329

Kolmogorov, equações de, 281

lacuna espectral, 139
Le Cam, desigualdade de, 222

marcas
de um processo de Poisson, 233
martingal, 350
caminhada compensada, 352
convergência, 364
exponencial, 354
parada e esperança, 365
parado, 361
produto, 353
quadrado compensado, 353
razão de verossimilhanças, 382
transformada, 359
matriz
de roteamento, 275
matriz de transição, 21
estimação, 39
potências, 32
matriz duplamente estocástica, 109
matriz fundamental, 78
modelo oculto de Markov, 92
filtragem, 93
momentos fatoriais
da Poisson, 217
movimento browniano, 13
mudança de tempo
processo de Poisson, 252

número de visitas, 60
antes da saída, 78

otimização por colônias de formigas, 151

PageRank, 148
parada
  com processo limitado, 367
passeio aleatório, 7
  em grafos, 115
  média e covariância, 8
  recorrência em dimensão dois, 165
  recorrência em dimensão um, 164
  simples e simétrico, 162
  transiência em dimensão três, 168
PASTA, 306
percolação, 200
  em árvores, 202
  por arestas, 201
  probabilidade crítica, 203
período, 64
pesos de ocupação, 125
poissonização, 238
Pólya
  teorema de recorrência, 171
ponto fixo
  menor, 186
probabilidade de saída
  tempo contínuo, 299
probabilidade de transição
  em vários passos, 32
  tempo contínuo, 265
probabilidades de cauda, 366
problema de Dirichlet, 67
  tempo contínuo, 299
processo
  adaptado, 350
  parado, 361
  previsível, 358
processo autorregressivo, 9
processo de contagem, 10
processo de nascimento puro, 279
processo de Poisson, 11
  afinamento, 235
  composto, 233
  condicionamento, 243
  construção por relógios, 224
  homogêneo, 220
  intervalos curtos, 232
  não homogêneo, 251
  relógios e contagens, 229
  superposição, 239
processo de ramificação, 174
  com imigração, 335
  extinção, 186
  extinção em tempo contínuo, 333
  regime crítico, 188
  regime subcrítico, 188
  regime supercrítico, 188
  tamanho esperado, 179
  tempo contínuo, 270, 330
  variância da geração, 179
processo estocástico, 2
processo gaussiano, 13
propriedade de Markov, 15, 20
  escolha do estado, 30, 271
propriedade forte de Markov, 44

razão de verossimilhanças, 382
recompensa
  média temporal, 131
recorrência, 47
  critério por visitas, 63
  nula, 123, 166
  positiva, 123
    e distribuição estacionária, 126

rede de filas
aberta, 318
forma produto, 319
reforço
desigual, 390
igual, 386
seleção, 155
relógios exponenciais
cadeia de Markov, 265
corrida, 261
retenção de usuários, 39
reversibilidade, 110
tempo contínuo, 293
ruína do jogador, 24
duração média, 84, 374
martingal exponencial, 355
probabilidade de ruína, 73
sem barreira superior, 196

serviço por fases, 273
soma aleatória
média e variância, 234
Stirling, fórmula de, 164
submartingal, 350
supermartingal, 350
função super-harmônica, 356
superposição
de processos de Poisson, 239

taxa
de saída, 267
de salto, 267
exponencial, 215
teletransporte, 148
tempo
de chegada, 298
de entrada, 42
de parada, 42, 360
de retorno, 42
sucessivos, 46
tempo contínuo, 298
de saída, 75
tempo contínuo, 300
médio de retorno, 124
médio de saída, 373
tempos entre chegadas, 224
soma, 230
teorema
da convergência, 128
ergódico, 131
teste
sequencial, 382
trajetória, 3
transformada de martingal, 359
transiência, 47

uniformização, 280
urna
de Pólya, 386

Vandermonde, identidade de, 165
verossimilhança, 193
vértice
isolado, 210
viés de seleção
em cascatas, 195
Ville
desigualdade, 383

Wald
equação, 375

Yule, processo de, 270
distribuição geométrica, 308