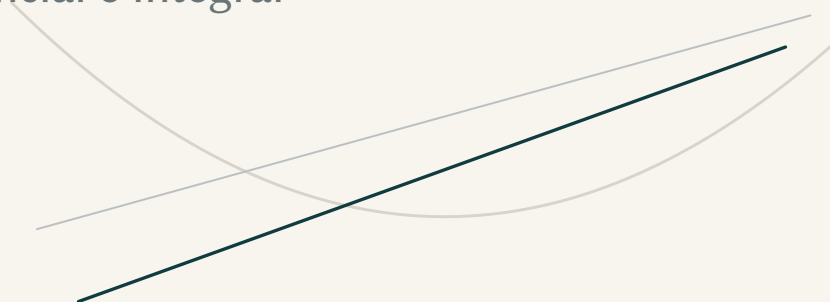


CONCEITOS, TÉCNICAS E APLICAÇÕES

Funções de uma Variável

Cálculo diferencial e integral



Daniel Miranda

Texto: Daniel Miranda.

Projeto editorial Soleira; tema de Análise em formato A4, com margens laterais de leitura.

Edição 2026.

Créditos editoriais e técnicos

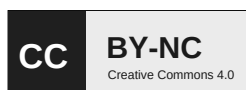
Este livro é de autoria de **Daniel Miranda** e foi desenvolvido e preparado editorialmente em colaboração com **Soleira — ChatGPT (OpenAI), GPT-5.6 Sol e Claude Sonnet 5 (Anthropic)**. Ao longo desse processo, o trabalho compreendeu o desenvolvimento e a expansão didática do texto e o sequenciamento dos conteúdos, além da revisão matemática de definições, teoremas, demonstrações e argumentos. Estendeu-se também ao aperfeiçoamento de exemplos, aplicações, exercícios, resoluções e gabaritos. A preparação editorial reuniu a revisão linguística e o aprimoramento da clareza, da fluidez e da unidade de tom, bem como a eliminação de repetições, a padronização do texto e sua preparação tipográfica.

A responsabilidade final pelo conteúdo matemático e pelas escolhas autorais permanece com o autor.

Licença

© 2026 Daniel Miranda.

Exceto quando indicado em contrário, esta obra está licenciada sob a **Creative Commons Atribuição–NãoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0)**. É permitida a cópia, redistribuição e adaptação do material, em qualquer meio ou formato, desde que seja atribuída a autoria apropriada e que o uso não tenha finalidade comercial.



Uma cópia da licença está disponível em
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>.

A obra é fornecida “como está”, sem garantias expressas ou implícitas, nos limites permitidos pela legislação aplicável. Consulte o texto integral da licença para as permissões, condições e limitações correspondentes.

Sumário

I. Números e Funções	1
1. Números	2
1.1. Dos naturais aos reais	3
1.2. Estrutura algébrica dos números reais	4
1.3. Fatoração de expressões algébricas	7
1.4. Simplificação de expressões algébricas	11
1.5. Ordem e desigualdades	15
1.6. Reta real, valor absoluto e intervalos	16
1.7. Cotas, máximos e supremos	19
1.8. Potências e raízes	21
2. Funções e gráficos	25
2.1. Pares ordenados e o plano cartesiano	25
2.2. O conceito de função	28
2.3. Gráficos de funções	31
2.4. Operações e composição	34
2.5. Propriedades qualitativas	38
2.6. Função inversa	42
2.7. Transformações e simetrias dos gráficos	45
3. Funções algébricas	52
3.1. Funções afins	52
3.2. Função módulo e definições por partes	57
3.3. Funções quadráticas	58
3.4. Funções potência e raiz	62
3.5. Funções polinomiais	65
3.6. Funções racionais	67
4. Funções exponenciais e logarítmicas	75
4.1. Da potência à função exponencial	75
4.2. Variação multiplicativa e modelos exponenciais	79
4.3. Função logarítmica	80
4.4. Propriedades dos logaritmos	82
4.5. Escalas logarítmicas e aplicações	86
5. Funções trigonométricas	89
5.1. Seno e cosseno na circunferência unitária	89
5.2. Gráficos de seno e cosseno	94
5.3. Identidades trigonométricas fundamentais	95
5.4. Amplitude, período e transformações dos gráficos	99

5.5.	Tangente e funções associadas	102
5.6.	Simplificação de expressões trigonométricas	107
5.7.	Modelos periódicos	111
5.8.	Funções trigonométricas inversas	112
5.9.	Modelos geométricos	116
6.	Equações e Inequações	118
6.1.	Equações	118
6.2.	Inequações	129
6.3.	Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas	140
6.4.	Equações e Inequações Trigonométricas	144
II.	Limites e Continuidade	150
7.	Limites e continuidade de funções	151
7.1.	Aproximação e reta tangente	151
7.2.	A noção de limite	153
7.3.	Definição de limite	160
7.4.	Limites Laterais	164
7.5.	Propriedades do Limite de Funções	169
7.6.	Continuidade	178
7.7.	Propriedades das Funções Contínuas	185
7.8.	★ Demonstração das propriedades básicas de limite	191
7.9.	★ Continuidade uniforme	194
8.	Limites Infinitos e no Infinito	198
8.1.	Limites no Infinito	198
8.2.	Limites Infinitos	201
8.3.	O número e e as funções exponencial e logarítmica	211
III.	Derivadas	219
9.	Derivadas	220
9.1.	Motivações	220
9.2.	Definição de derivada	224
9.3.	Derivadas das funções clássicas	232
9.4.	Regras de derivação	235
9.5.	A regra da cadeia	242
9.6.	Derivada da função inversa	246
10.	Tópicos em diferenciação	249
10.1.	Derivação implícita	249
10.2.	Derivadas das funções exponencial e logarítmica	255
10.3.	Derivadas das funções trigonométricas inversas	259
10.4.	Taxas relacionadas	262
10.5.	Funções hiperbólicas e suas derivadas	269
10.6.	Derivadas de ordem superior	275
10.7.	Aproximações lineares e diferenciais	277

11. Aplicações de derivadas	285
11.1. Valores extremos	285
11.2. Teorema do valor médio	294
11.3. Funções crescentes e decrescentes	298
11.4. Concavidade	303
11.5. Regra de L'Hôpital	311
11.6. Assíntotas	320
11.7. Esboço de curvas	322
11.8. Problemas de otimização	334
11.9. Polinômios de Taylor	341
 IV. Integrais	 355
12. Integral indefinida	356
12.1. Integral indefinida	356
12.2. Integração por substituição	362
12.3. Integração por partes	372
12.4. Equações diferenciais e problemas de valor inicial	380
 13. Integração definida	 389
13.1. Áreas e somas de Riemann	389
13.2. Integral Definida	396
13.3. ★ Funções Contínuas são Integráveis	401
13.4. Propriedades da Integral	404
13.5. Teorema fundamental do cálculo	412
13.6. Deslocamento e espaço percorrido	422
13.7. ★ As funções logarítmica e exponencial revisitadas	426
 14. Técnicas de integração	 433
14.1. Frações parciais	433
14.2. ★ Decomposição em frações parciais	447
14.3. Integrais trigonométricas	452
14.4. Substituição trigonométrica	461
14.5. ★ A substituição de Weierstrass $u = \operatorname{tg}(x/2)$	468
14.6. Estratégias de integração	470
 15. Aplicações da integral	 480
15.1. Construção de fórmulas integrais	480
15.2. Áreas	481
15.3. Volume	488
15.4. Trabalho	501
15.5. Forças hidrostáticas	507
15.6. Comprimento de arco e área superficial	512
15.7. Centro de massa	518
 16. Integrais impróprias	 526
16.1. Intervalos infinitos	526
16.2. Integrandos descontínuos	532

16.3.	Convergência e divergência	535
16.4.	Probabilidade	541
Respostas dos exercícios		547
Referências		663

Parte I.

Números e Funções

1

Números

O binômio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso.

Álvaro de Campos

O Cálculo se desenvolve sobre os números reais. Neles convivem três estruturas: as operações algébricas, a ordem e a propriedade de completude. Muitas regras elementares se tornam tão familiares pelo uso que sua origem acaba ficando oculta. Algumas perguntas simples permitem tornar essa estrutura visível:

- Por que $a \cdot 0 = 0$, se essa igualdade não foi colocada como axioma?
- Por que podemos cancelar um fator não nulo?
- De onde vem a regra do produto nulo?
- Por que uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos seus dois membros por um número negativo?
- Por que $\sqrt{2}$ existe em $\mathbb{R}$, embora não exista em $\mathbb{Q}$?
- Como reconhecer uma fatoração útil?
- Quando uma simplificação algébrica é realmente legítima?

Os axiomas algébricos governam as operações; os axiomas de ordem tornam comparáveis as operações e a comparação entre números; a completude exprime, de forma precisa, a ausência de lacunas na reta real. Fatoração e simplificação algébrica também se apoiam nas propriedades das operações e exigem atenção às restrições de domínio.

Neste capítulo

1.1	Dos naturais aos reais	3
1.2	Estrutura algébrica dos números reais	4
1.3	Fatoração de expressões algébricas	7
1.4	Simplificação de expressões algébricas	11
1.5	Ordem e desigualdades	15
1.6	Reta real, valor absoluto e intervalos	16
1.7	Cotas, máximos e supremos	19
1.8	Potências e raízes	21

1.1. Dos naturais aos reais

Os primeiros conjuntos numéricos aparecem quando diferentes problemas exigem novas operações. Adotaremos a convenção de que o zero é um número natural:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Escreveremos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ para o conjunto dos naturais positivos. Os naturais são adequados para contar. Entretanto, uma subtração como $3 - 5$ não tem resultado em $\mathbb{N}$. A introdução dos números negativos conduz ao conjunto dos inteiros,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Nos inteiros podemos subtrair livremente, mas uma divisão como $2/3$ ainda não produz um inteiro. Incluindo todas as razões entre inteiros, com denominador não nulo, obtemos os números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}.$$

Essas ampliações podem ser resumidas pelas inclusões

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Cada conjunto conserva as operações já existentes e acrescenta soluções para problemas que o anterior não resolvia. Ainda assim, os racionais não bastam.

Por que $\mathbb{Q}$ não basta?

O comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 é, pelo teorema de Pitágoras, um número positivo cujo quadrado vale 2. Esse número não é racional.

1.1 Proposição

Não existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$.

Demonstração. Suponha que exista $q \in \mathbb{Q}$ com $q^2 = 2$. Podemos escrever $q = m/n$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, e a fração foi reduzida, isto é, m e n não possuem divisor comum maior que 1. Da igualdade $(m/n)^2 = 2$ obtemos

$$m^2 = 2n^2.$$

Logo, m^2 é par e, portanto, m é par: se m fosse ímpar, seu quadrado também seria ímpar, pois $(2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$. Escrevendo $m = 2k$, resulta $n^2 = 2k^2$, de modo que n também é par. Assim, m e n são ambos divisíveis por 2, contrariando o fato de que a fração estava reduzida. ■

Ampliações dos conjuntos numéricos

Ao passar aos inteiros, podemos subtrair quaisquer dois números; nos racionais, podemos também dividir por qualquer número não nulo. Os reais acrescentam uma propriedade distinta: a completude, que torna precisa a ausência de lacunas na reta.

Os números reais formam o conjunto denotado por $\mathbb{R}$. Ele contém os racionais e também os irracionais, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Um número real que não pertence a $\mathbb{Q}$ é chamado de **irracional**. A propriedade de completude dará sentido preciso à ideia de que os reais “preenchem” as lacunas existentes entre os racionais.

Representações decimais

Todo número real admite uma representação decimal. Os números racionais são exatamente aqueles cuja representação decimal termina ou, a partir de alguma posição, repete periodicamente um bloco de algarismos. Por exemplo,

$$\frac{1}{8} = 0,125, \quad \frac{1}{3} = 0,333 \dots, \quad \frac{7}{11} = 0,636363 \dots$$

As representações decimais dos irracionais são infinitas e não periódicas.

Uma representação decimal não deve ser confundida com o próprio número. Um mesmo real pode possuir duas representações: por exemplo,

$$1 = 0,9999 \dots$$

Para antecipar a ideia, seja x_n o decimal formado por n algarismos iguais a 9 depois da vírgula. Então

$$x_n = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

À medida que aumentamos n , o erro $1 - x_n = 10^{-n}$ pode se tornar menor do que qualquer tolerância previamente escolhida. O capítulo de limites dará um significado formal a esse processo de aproximação.

Exercícios

Ex. 1.1 Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional, adaptando o argumento usado para $\sqrt{2}$. Em que ponto a demonstração usa o fato de 3 ser primo?

Ex. 1.2 Escreva $0,4545 \dots$ como fração e explique por que o mesmo procedimento funciona para toda re-

presentação decimal periódica.

Ex. 1.3 Seja x_n o decimal com n algarismos 9 depois da vírgula. Determine o menor n para o qual $1 - x_n < 10^{-6}$ e explique como esse cálculo se relaciona com a igualdade $1 = 0,999 \dots$

1.2. Estrutura algébrica dos números reais

As operações de adição e multiplicação associam a cada par de números reais um novo número real. As propriedades fundamentais dessas operações são chamadas

Axiomas e consequências

As regras usuais decorrem dos axiomas e conservam as hipóteses usadas na demonstração. Cancelar um fator a , por exemplo, significa multiplicar por seu inverso. Por isso,

axiomas de corpo. Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, valem:

- A1.** $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da adição);
- A2.** $a + b = b + a$ (comutatividade da adição);
- A3.** existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$ (neutro aditivo);
- A4.** para cada a , existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$ (oposto);
- A5.** $(ab)c = a(bc)$ (associatividade da multiplicação);
- A6.** $ab = ba$ (comutatividade da multiplicação);
- A7.** existe $1 \in \mathbb{R}$, com $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = a$ (neutro multiplicativo);
- A8.** para cada $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$ (inverso);
- A9.** $a(b + c) = ab + ac$ (distributividade).

Os axiomas são o ponto de partida. Muitas identidades familiares não aparecem na lista porque são consequências deles. Os resultados seguintes ilustram essa passagem dos axiomas para propriedades algébricas usuais.

Por que $a \cdot 0 = 0$?

1.2 Proposição

Para todo $a \in \mathbb{R}$, vale $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração. Como $0 + 0 = 0$, a distributividade fornece

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Somando o oposto de $a \cdot 0$ aos dois membros, obtemos $0 = a \cdot 0$. ■

Logo, a igualdade $a \cdot 0 = 0$ não constitui um axioma adicional: ela decorre da distributividade e da existência do oposto aditivo.

Por que podemos cancelar um fator não nulo?

1.3 Proposição Lei do cancelamento

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $ab = ac$, então $b = c$.

Demonstração. Como $a \neq 0$, existe a^{-1} . Multiplicando os dois membros de $ab = ac$ por a^{-1} e usando a associatividade, temos

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac), \quad (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c, \quad b = c.$$

■

A condição $a \neq 0$ é indispensável. Da igualdade $0 \cdot 2 = 0 \cdot 5$ não podemos concluir que $2 = 5$.

De onde vem a regra do produto nulo?

1.4 Proposição Regra do produto nulo

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Demonstração. Se $a = 0$, a conclusão já está satisfeita. Se $a \neq 0$, existe a^{-1} e podemos multiplicar $ab = 0$ por esse inverso:

$$b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Logo, ao menos um dos fatores é nulo.

■

É essa propriedade que permite resolver, por exemplo,

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

concluindo que $x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$, isto é, $x = 2$ ou $x = -3$.

Exercícios

Ex. 1.4 Use os axiomas algébricos para demonstrar as afirmações.

1. O elemento neutro da adição é único.

2. O oposto de cada número real é único.

3. Se $a \neq 0$ e $ax = a$, então $x = 1$.

4. $a(-b) = -(ab)$.

1.3. Fatoração de expressões algébricas

Fatorar uma expressão significa escrevê-la como um produto. A ideia fundamental já está contida na distributividade:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Quando passamos do membro direito para o esquerdo, desenvolvemos o produto; quando fazemos o caminho inverso, colocamos o fator comum em evidência. A fatoração não altera o valor da expressão. Ela apenas revela uma estrutura que pode estar escondida numa soma.

Na forma fatorada, zeros e fatores comuns tornam-se visíveis. A regra do produto nulo permite localizar zeros a partir dos fatores; em expressões fracionárias, a fatoração também identifica possíveis cancelamentos e as restrições que os acompanham.

O que a fatoração revela

A forma fatorada permite reconhecer os zeros de uma expressão pela regra do produto nulo. Também pode revelar fatores comuns em um quociente. Nesse segundo uso, o cancelamento exige que o fator seja diferente de zero.

Escolha da fatoração

A forma da expressão sugere a técnica adequada. Nos casos elementares, a sequência seguinte organiza as possibilidades mais frequentes:

1. procure um fator comum a todos os termos;
2. verifique se aparece algum produto notável;
3. com quatro termos, tente agrupá-los em pares;
4. em um trinômio quadrático, use as raízes ou decompõe o termo central;
5. examine novamente cada fator obtido.

O resultado pode sempre ser conferido desenvolvendo novamente o produto.

Fator comum

O fator comum deve dividir todos os termos da expressão. Quando os coeficientes são inteiros, convém retirar seu máximo divisor comum e, para cada letra, a menor potência que aparece em todos os termos.

Exemplo 1.5.

Fatore completamente $12x^3y - 18x^2y^2$.

<

Solução. Os dois termos são divisíveis por $6x^2y$. Colocando esse fator em evidência, obtemos

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y(2x - 3y).$$

A conferência é imediata pela distributividade. ■

Produtos notáveis e diferença de potências

Algumas identidades aparecem com frequência suficiente para merecer destaque:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2, \\a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2, \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2).\end{aligned}$$

Não são regras isoladas: todas podem ser verificadas desenvolvendo o membro direito. Por exemplo,

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

e

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

No segundo desenvolvimento, os termos intermediários se cancelam. O mesmo mecanismo aparece na identidade mais geral: para todo inteiro $n \geq 2$,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Essa identidade será especialmente útil quando aparecer um quociente com $a - b$ no denominador.

Agrupamento

Quando não existe um fator comum a todos os termos, pode existir um fator comum depois de um agrupamento adequado.

Exemplo 1.6.

Fatore $x^3 - x^2 - 4x + 4$ e resolva a equação $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

<

Solução. Agrupando os dois primeiros e os dois últimos termos,

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 4x + 4 &= x^2(x - 1) - 4(x - 1) \\&= (x - 1)(x^2 - 4) \\&= (x - 1)(x - 2)(x + 2).\end{aligned}$$

Pela regra do produto nulo, a equação é satisfeita quando

$$x = 1, \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

■

Trinômios quadráticos

Para fatorar

$$x^2 + sx + p,$$

procuramos números r e t tais que $r + t = s$ e $rt = p$. Nesse caso,

$$x^2 + sx + p = (x + r)(x + t).$$

Para um trinômio geral $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, procuramos números u e v tais que

$$u + v = b \quad \text{e} \quad uv = ac.$$

Substituímos então bx por $ux + vx$ e tentamos agrupar os quatro termos.

Exemplo 1.7.

Fatore $2x^2 + x - 3$.

<

Solução. Neste caso, $3 + (-2) = 1$ e $3(-2) = 2(-3)$. Portanto, decompomos o termo central como $x = 3x - 2x$ e escrevemos

$$\begin{aligned}2x^2 + x - 3 &= 2x^2 + 3x - 2x - 3 \\&= x(2x + 3) - (2x + 3) \\&= (2x + 3)(x - 1).\end{aligned}$$

Também poderíamos encontrar as raízes 1 e $-3/2$ e escrever $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)(x + 3/2)$. ■

De modo geral, se x_1 e x_2 são as raízes reais de $ax^2 + bx + c$, contando duas vezes uma eventual raiz dupla, então

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Nem todo polinômio se decompõe em fatores lineares reais. Por exemplo, $x^2 + 1$ não possui raiz real e, portanto, não pode ser escrito como produto de dois fatores lineares com coeficientes reais.

Completar quadrados

Fatorar destaca os zeros de uma expressão. Em outras situações, é mais útil reescrever a parte quadrática como um quadrado perfeito acrescido de uma constante. Esse procedimento é chamado de **completar o quadrado**.

Exemplo 1.8.

Reescreva $x^2 + 6x + 5$ e $2x^2 - 8x + 3$ na forma de um quadrado acrescido de uma constante.

<

Solução. Na primeira expressão, metade do coeficiente de x é 3. Somamos e subtraímos 3^2 :

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4.$$

Na segunda, colocamos primeiro o coeficiente de x^2 em evidência nos termos que contêm x :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 3 &= 2(x^2 - 4x) + 3 \\ &= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 \\ &= 2(x - 2)^2 - 5. \end{aligned}$$

Nos dois casos, o termo acrescentado foi imediatamente subtraído, de modo que o valor da expressão não se alterou. ■

De modo geral,

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Se o coeficiente quadrático é $a \neq 0$, colocamos a em evidência antes de aplicar o mesmo procedimento. A técnica reaparecerá no estudo das parábolas e na resolução de equações quadráticas.

Exercícios

Ex. 1.5 Fatore completamente.

1. $8x^3 - 12x^2$.

2. $x^2 - 16$.

3. $x^2 - 6x + 9$.

4. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$.

5. $3x^2 - 5x - 2$.

6. $x^4 - 1$.

Ex. 1.6 Resolva por fatoração.

1. $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$.

2. $2x^2 + x - 3 = 0$.

3. $x^4 - 16 = 0$ no conjunto dos números reais.

Ex. 1.7 Verifique a identidade da diferença de potências multiplicando $(a - b)$ pelo segundo fator.

Ex. 1.8 Se $a \neq 0$ e

$$a + \frac{1}{a} = b,$$

determine $a^2 + \frac{1}{a^2}$ em função de b .

Ex. 1.9 Complete o quadrado.

1. $x^2 + 8x + 3$.

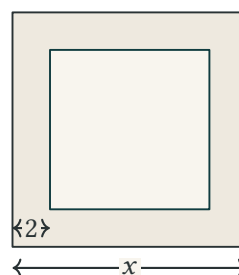
2. $x^2 - 10x + 7$.

3. $3x^2 + 12x - 1$.

Exercícios

Ex. 1.10 Fatore completamente $p(x) = x^4 - 6x^3 - x^2 + 30x$ e use a fatoração para resolver $p(x) = 0$.

Ex. 1.11 Um quadrado de lado x cm tem uma moldura interna de largura 2 cm. O desenho representa a região ocupada pela moldura.



Escreva a área da moldura em função de x , apresente-a nas formas desenvolvida e fatorada e determine os valores fisicamente admissíveis de x .

1.4. Simplificação de expressões algébricas

Simplificar uma expressão é escrevê-la de uma forma que torne sua estrutura ou seu cálculo mais transparentes, sem mudar seu valor. Há, porém, uma precaução essencial: devemos registrar desde o início os valores para os quais a expressão original não está definida. Essas restrições continuam válidas mesmo quando não aparecem na expressão simplificada.

Cancelar fatores, não parcelas

A lei do cancelamento permite escrever

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0 \quad \text{e} \quad c \neq 0.$$

O cancelamento é possível porque c multiplica todo o numerador e todo o denominador. Uma parcela de uma soma não pode ser cancelada.

Simplificação e domínio

O cancelamento de $x - a$ é válido apenas para $x \neq a$. Embora a expressão resultante possa estar definida em a , ela só representa a função original quando se conserva essa restrição. A simplificação não amplia o domínio da função.

Exemplo 1.9.

Simplifique

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

e indique as restrições sobre x .

<

Solução. Antes de simplificar, fatoramos o denominador:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

Logo, a expressão original exige $x \neq 2$ e $x \neq -1$. Fatorando também o numerador,

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{x + 2}{x + 1}, \quad x \neq 2, -1.$$

Embora a última fração esteja definida em $x = 2$, a expressão original não está. A restrição $x \neq 2$ deve, portanto, permanecer. ■

Compare com

$$\frac{x + 2}{x} = 1 + \frac{2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Não há um fator x comum a todo o numerador, de modo que “cancelar os x ” seria incorreto.

Somar e dividir frações algébricas

Para somar frações, construímos um denominador comum. Por exemplo,

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2(x + 1) + x}{x(x + 1)} = \frac{3x + 2}{x(x + 1)}, \quad x \neq 0, -1.$$

Em uma fração complexa, convém simplificar primeiro seu numerador e seu denominador ou multiplicar ambos por um denominador comum.

Exemplo 1.10.

Simplifique a fração complexa

$$\frac{2 - \frac{5}{x + 1}}{1 + \frac{1}{x - 2}}$$

e indique as restrições sobre x .

<

Solução. As frações internas exigem $x \neq -1$ e $x \neq 2$. Além disso, o denominador da fração complexa não pode ser zero:

$$1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2} \neq 0,$$

o que exclui também $x = 1$. Simplificando separadamente numerador e denominador,

$$2 - \frac{5}{x+1} = \frac{2x-3}{x+1}, \quad 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}.$$

Portanto,

$$\frac{2 - \frac{5}{x+1}}{1 + \frac{1}{x-2}} = \frac{\frac{2x-3}{x+1}}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+1)(x-1)}, \quad x \neq -1, 1, 2.$$

As três restrições pertencem ao domínio da expressão original e permanecem válidas após a simplificação. ■

Exemplo 1.11.

Simplifique o quociente

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}.$$

◀

Solução. A expressão original exige

$$x \neq 0, \quad h \neq 0, \quad x+h \neq 0.$$

Reduzindo as frações do numerador ao mesmo denominador,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} &= \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{x(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= -\frac{1}{x(x+h)}. \end{aligned}$$

O cancelamento de h é permitido precisamente porque $h \neq 0$. Expressões desse tipo aparecerão naturalmente no cálculo de derivadas. ■

Radicais e conjugados

Os fatores $a-b$ e $a+b$ são chamados de **conjugados**. Como $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, multiplicar por um conjugado permite eliminar uma diferença de raízes no numerador ou no denominador.

Exemplo 1.12.

Supondo que as raízes estejam definidas, simplifique

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

<

Solução. A expressão original requer $x \geq 0$, $x + h \geq 0$ e $h \neq 0$. Multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do numerador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &\cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

As restrições da expressão original continuam valendo. ■

Três manipulações frequentemente usadas não são identidades:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\neq a^2 + b^2, \\ \sqrt{x^2} &\neq x, \\ \sqrt{a+b} &\neq \sqrt{a} + \sqrt{b}. \end{aligned}$$

A fórmula correta para o primeiro quadrado está na seção anterior, e a identidade correta no segundo caso é $\sqrt{x^2} = |x|$. Os valores $a = b = 1$ fornecem contraexemplos para a primeira e a terceira manipulações; $x = -1$ fornece um contraexemplo para a segunda.

Roteiro de simplificação. Determine primeiro as restrições da expressão original. Em seguida, fator, reduza frações a um denominador comum e cancele apenas fatores não nulos. Ao final, mantenha explícitos todos os valores inicialmente excluídos.

Exercícios**Ex. 1.12**

ções.

Simplifique e indique todas as restrições.

3. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$

1. $\frac{x^2 - 4}{x - 2}.$

4. $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$

2. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x}.$

Ex. 1.13

Corrija as simplificações.

$$1. \frac{x+3}{x} = 3.$$

$$2. \sqrt{x^2} = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$3. \frac{x^2+2x}{x} = x+2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$4. \frac{\frac{8x^3y^2}{(x-2)^4}}{\frac{6x^2y}{(x-2)^{3/2}}}.$$

Ex. 1.14 Simplifique as expressões e preserve todas as restrições do domínio original.

$$1. \frac{(z+w)^{-1}}{(z-w)^{-1}}.$$

$$2. (p^{-1} + q^{-1})^{-1}.$$

$$3. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}.$$

Ex. 1.15 Simplifique os quocientes, supondo $h \neq 0$.

$$1. \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

$$2. \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

$$3. \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}.$$

1.5. Ordem e desigualdades

Além de somar e multiplicar números reais, podemos compará-los. A relação $a \leq b$ significa que a é menor ou igual a b . Ela satisfaz as seguintes propriedades:

A10. A ordem é reflexiva, antissimétrica, transitiva e total:

$$a \leq a, \quad (a \leq b \text{ e } b \leq a) \Rightarrow a = b, \\ (a \leq b \text{ e } b \leq c) \Rightarrow a \leq c, \quad a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$

A11. Somar o mesmo número preserva a ordem:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$$

A12. Multiplicar pelo mesmo número não negativo preserva a ordem:

$$a \leq b \text{ e } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc.$$

Por que o sinal se inverte?

Multiplicar por -1 reflete a reta real em torno de 0: números à esquerda passam para a direita e vice-versa. Por isso, de $a < b$ segue $-a > -b$; multiplicar por qualquer número negativo combina essa reflexão com uma escala positiva.

Esses são os **axiomas de ordem**. Observe que A12 fala apenas da multiplicação por números não negativos. A conhecida regra para números negativos será deduzida deles.

Por que multiplicar por um número negativo inverte a desigualdade?

1.13 Proposição

Se $a \leq b$ e $c < 0$, então $ac \geq bc$.

Demonstração. Somando $-c$ aos dois membros de $c < 0$, obtemos $0 < -c$. Pelo axioma A12,

$$a(-c) \leq b(-c).$$

Como $a(-c) = -ac$ e $b(-c) = -bc$, temos $-ac \leq -bc$. Somando $ac + bc$ aos dois membros, obtemos $bc \leq ac$, ou seja, $ac \geq bc$. ■

Por exemplo, de $2 < 5$ podemos concluir que $-6 > -15$ ao multiplicar ambos os membros por -3 . A mudança de sentido não é uma convenção gráfica: ela decorre da compatibilidade entre a ordem e as operações.

Outra consequência útil é que todo quadrado é não negativo. Se $x \geq 0$, isso decorre de A12 aplicado a $0 \leq x$. Se $x < 0$, então $-x > 0$ e $x^2 = (-x)^2 \geq 0$.

Exercícios

Ex. 1.16 Demonstre as propriedades de ordem.

1. Se $a \leq b$, então $-b \leq -a$.

2. Se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

3. Se $0 \leq a < b$, então $a^2 < b^2$.

4. Se $a, b > 0$ e $a^2 < b^2$, então $a < b$.

1.6. Reta real, valor absoluto e intervalos

A reta real oferece uma representação geométrica dos números reais. Escolhemos um ponto para representar 0, outro ponto à sua direita para representar 1 e usamos a distância entre eles como unidade. A ordem corresponde à posição: $a < b$ significa que o ponto associado a a está à esquerda daquele associado a b .

O **valor absoluto**, ou **módulo**, de $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Portanto, $|x| = x$ somente quando $x \geq 0$. Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Por exemplo,

$$|-4| = 4 \neq -4, \quad |3| = 3.$$

Módulo e distância

A expressão $|x-a|$ mede a distância de x a a . Assim, para $r > 0$, a condição $|x-a| < r$ descreve os pontos do intervalo $(a-r, a+r)$. O centro é a e a distância permitida é menor que r .



Figura 1.1. Na reta real, $\sqrt{2}$ ocupa uma posição entre 1 e 2.

Erro frequente. Não é verdade que $|x| = x$ para todo número real x . Em calculadoras e softwares, o valor absoluto costuma aparecer como $\text{abs}(x)$; essa expressão representa uma operação aplicada a x , e não outra maneira de escrever o próprio x . Portanto, o símbolo de módulo não pode simplesmente ser apagado: a operação coincide com x apenas no semieixo não negativo. Em particular,

$$|x| = x \iff x \geq 0, \quad |x| = -x \iff x \leq 0.$$

Geometricamente, $|x|$ é a distância de x até a origem. Mais geralmente, a distância entre x e y é

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Essa interpretação é mais útil do que pensar no módulo apenas como um procedimento para “retirar o sinal”.

Para $x, y \in \mathbb{R}$, valem as propriedades

$$\begin{aligned} |x| \geq 0, \quad |x| = 0 &\iff x = 0, \quad |-x| = |x|, \\ |xy| = |x| |y|, \quad |x + y| &\leq |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

A desigualdade $|x + y| \leq |x| + |y|$ é chamada de **desigualdade triangular**. De fato,

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Somando membro a membro, obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

e, portanto, $|x + y| \leq |x| + |y|$. Geometricamente, na reta, a distância do percurso direto entre dois pontos não é maior que a de um percurso feito com um desvio. Em geral, não podemos substituir a desigualdade por uma igualdade. Com $x = 1$ e $y = -1$, por exemplo,

$$|x + y| = 0, \quad |x| + |y| = 2.$$

Como retirar o módulo?

Para retirar um módulo, precisamos conhecer o sinal da expressão que está em seu interior. Quando aparecem vários módulos, os pontos em que essas expressões se anulam dividem a reta em intervalos nos quais os sinais permanecem fixos.

Exemplo 1.14.

Escreva $f(x) = |x| + |x + 1|$ sem utilizar o símbolo de módulo.

Solução. As expressões dentro dos módulos se anulam em $x = -1$ e $x = 0$. Esses pontos determinam três casos:

- se $x < -1$, então $x < 0$ e $x + 1 < 0$; logo, $f(x) = -x - (x + 1) = -2x - 1$;
- se $-1 \leq x < 0$, então $x < 0$ e $x + 1 \geq 0$; logo, $f(x) = -x + (x + 1) = 1$;
- se $x \geq 0$, então x e $x + 1$ são não negativos; logo, $f(x) = x + (x + 1) = 2x + 1$.

Portanto,

$$|x| + |x + 1| = \begin{cases} -2x - 1, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 0, \\ 2x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

■

Outro padrão importante ocorre nas equações. Se $a \geq 0$, então

$$|u| = a \iff u = a \text{ ou } u = -a.$$

Assim,

$$|2x - 3| = 5 \iff 2x - 3 = 5 \text{ ou } 2x - 3 = -5,$$

e as soluções são $x = 4$ e $x = -1$. Se $a < 0$, a equação $|u| = a$ não possui solução real.

Intervalos

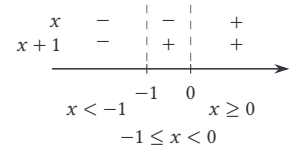
Dados $a < b$, usamos as seguintes notações:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$



Parênteses indicam que o extremo não pertence ao intervalo; colchetes indicam que pertence. Para intervalos ilimitados, escrevemos, por exemplo,

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \quad (-\infty, b] = \{x : x \leq b\}.$$

Os símbolos $\pm\infty$ nunca recebem colchetes, pois não representam números reais.

Um intervalo centrado em a , com raio $r > 0$, pode ser descrito de duas formas equivalentes:

$$x \in (a - r, a + r) \iff |x - a| < r.$$

Assim, $|x - a| < r$ significa que x aproxima a com erro menor que r . Para $r > 0$, é útil guardar também as duas traduções geométricas

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r,$$

$$|x - a| > r \iff x < a - r \text{ ou } x > a + r.$$

Na primeira, x está dentro do intervalo de raio r ; na segunda, está fora dele.

Exemplo 1.15.

Uma medição é considerada aceitável quando difere de 12 por menos de 0,05. Determine o intervalo dos valores aceitáveis.

<

Solução. A condição é $|x - 12| < 0,05$. Portanto,

$$-0,05 < x - 12 < 0,05,$$

e, somando 12 aos três membros,

$$11,95 < x < 12,05.$$

O conjunto dos valores aceitáveis é o intervalo $(11,95, 12,05)$. ■

Exercícios

Ex. 1.17 Escreva em notação de intervalo.

1. $|x - 2| + |x + 1|$.

1. $|x - 3| < 2$.

2. $|x + 1| \leq 4$.

3. $|x - 5| > 1$.

Ex. 1.19 Resolva $|3x - 1| = 5$.

Ex. 1.20 Demonstre a desigualdade $||x| - |y|| \leq |x - y|$ usando a desigualdade triangular.

Ex. 1.18 Escreva sem módulos.

Ex. 1.21 Mostre que, se $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = a$.

1.7. Cotas, máximos e supremos

Considere um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que M é uma **cota superior**, ou um **majorante**, de A quando

$$x \leq M \quad \text{para todo } x \in A.$$

Se existe uma cota superior, dizemos que A é **limitado superiormente**. De modo análogo, m é uma **cota inferior**, ou um **minorante**, quando $m \leq x$ para todo $x \in A$.

Uma cota superior pode estar muito acima dos elementos do conjunto. Por exemplo, 2, 10 e 100 são cotas superiores de $[0, 1)$. Interessa-nos a menor delas.

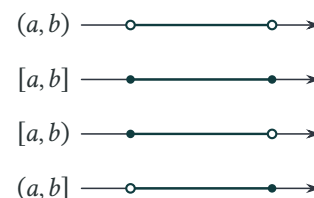


Figura 1.2. Extremos abertos são vazios; extremos pertencentes ao intervalo, preenchidos.

1.1 Definição

O **supremo** de um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$, quando existe, é a menor de suas cotas superiores e é denotado por $\sup A$. Analogamente, o **ínfimo** de A é a maior de suas cotas inferiores e é denotado por $\inf A$.

Não devemos confundir supremo com máximo. O número M é o **máximo** de A quando $M \in A$ e $x \leq M$ para todo $x \in A$. Portanto, todo máximo é um supremo que pertence ao conjunto; um supremo pode não pertencer a ele.

Conjunto	mínimo	ínfimo	máximo	supremo
$[0, 1]$	0	0	1	1
$[0, 1)$	0	0	não existe	1
$(0, 1)$	não existe	0	não existe	1
$\mathbb{N}$	0	0	não existe	não existe

A completude dos números reais

A propriedade que distingue decisivamente $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ é a completude:

A13 – Propriedade da completude. Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$.

A afirmação correspondente para conjuntos limitados inferiormente também vale: todo conjunto não vazio e limitado inferiormente possui ínfimo. Em linguagem geométrica, a completude diz que uma fronteira obtida por aproximações sucessivas não desaparece por causa de uma lacuna na reta real.

Por que $\sqrt{2}$ existe em $\mathbb{R}$, embora não exista em $\mathbb{Q}$?

Considere

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}.$$

O conjunto é não vazio, pois $1 \in S$, e é limitado superiormente, pois nenhum $x \geq 2$ pertence a S . Pela completude, existe $s = \sup S$. A posição de s é determinada pelos elementos cujos quadrados ainda são menores que 2. A propriedade de supremo força essa fronteira a satisfazer $s^2 = 2$.

A demonstração detalhada verifica separadamente que as alternativas $s^2 < 2$ e $s^2 > 2$ contradizem a definição de supremo.

Máximo e supremo

O máximo deve pertencer ao conjunto; o supremo é sua menor cota superior. Em $[0, 1)$, o número 1 é supremo, mas não é máximo: todos os elementos são menores que 1, e nenhum número menor que 1 é cota superior.

Demonstração detalhada. Se $s^2 < 2$, escolha $h > 0$ suficientemente pequeno para que

$$h < 1 \quad \text{e} \quad (2s + 1)h < 2 - s^2.$$

Como $0 < h < 1$, temos $h^2 < h$. Portanto,

$$(s + h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 < s^2 + (2s + 1)h < 2.$$

Logo, $s + h \in S$, contradizendo o fato de s ser uma cota superior.

Como $1 \in S$, vale $s \geq 1 > 0$, o que legitima a divisão por $2s$. Se $s^2 > 2$, escolha h com

$$0 < h < \min \left\{ s, \frac{s^2 - 2}{2s} \right\}.$$

Nesse caso,

$$(s - h)^2 = s^2 - 2sh + h^2 > s^2 - 2sh > 2.$$

Todo $x \in S$ satisfaz $x < s - h$; caso contrário, teríamos $x^2 \geq (s - h)^2 > 2$. Assim, $s - h$ seria uma cota superior de S menor que s , novamente uma contradição. Restando apenas a possibilidade $s^2 = 2$, concluímos que $s = \sqrt{2}$. ■

A Proposição 1.1 mostra que essa fronteira não pertence a $\mathbb{Q}$. O conjunto

$$S_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \text{ e } q^2 < 2\}$$

é limitado superiormente, mas não possui supremo racional. Se um racional p fosse seu supremo, o mesmo argumento de pequenas perturbações, agora escolhendo h racional, mostraria que $p^2 = 2$, o que é impossível. É nesse sentido preciso que os racionais possuem uma lacuna onde os reais contêm $\sqrt{2}$.

Exercícios

Ex. 1.22 Encontre mínimo, máximo, ínfimo e supremo, quando existirem.

1. $A = (2, 5]$.

2. $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

3. $C = \{n/(n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$.

4. $D = \mathbb{Z}$.

Ex. 1.23 Mostre que, se A possui máximo, então $\sup A = \max A$.

1.8. Potências e raízes

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, definimos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}.$$

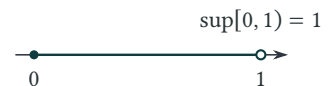


Figura 1.3. $[0, 1)$ não possui máximo, mas tem supremo igual a 1.

Se $a \neq 0$, definimos ainda

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Neste livro, como valor numérico isolado, a expressão 0^0 permanecerá indefinida. Em uma soma polinomial, porém, x^0 representa a função constante 1, inclusive quando o polinômio é avaliado em $x = 0$. Com expoentes inteiros, valem as propriedades usuais, respeitadas as condições que impedem divisões por zero:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

A **raiz n -ésima** de um número a é um número real b tal que $b^n = a$. Quando n é par, nenhum número negativo possui raiz n -ésima real, pois uma potência de expoente par de um número real é sempre não negativa. Se $a > 0$, a equação

$$b^n = a$$

possui duas soluções reais, uma positiva e outra negativa. Isso acontece porque, para n par,

$$(-b)^n = b^n :$$

assim, se b é uma solução, $-b$ também é. Quando $a = 0$, há apenas uma solução, $b = 0$.

Por convenção, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa sempre a solução não negativa. Portanto, por exemplo, $b^2 = 9$ tem as duas soluções $b = 3$ e $b = -3$, mas $\sqrt{9} = 3$. Quando n é ímpar, todo número real possui uma única raiz n -ésima real. Assim,

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[3]{-8} = -2,$$

enquanto $\sqrt{-8}$ não representa um número real.

Para uma base positiva a e um racional $q = m/n$, com $n > 0$, definimos

$$a^q = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

É possível demonstrar que o resultado não depende da fração escolhida para representar q . Por exemplo,

$$16^{3/4} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8, \quad 8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4.$$

Para bases negativas, a notação exige cuidado. Um expoente racional deve ser escrito em forma irredutível e só produz um valor real quando seu denominador é ímpar. Assim, $(-27)^{1/3} = -3$, mas não há uma definição real de $(-27)^x$ para todo expoente real x .

Para $a > 0$, a potência a^x também pode ser definida quando o expoente x é irracional. A construção utiliza aproximações racionais e a completude dos reais. Adotaremos aqui essa extensão e registraremos as propriedades que ela preserva:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x$$

para bases positivas, sempre que as expressões envolvidas estiverem definidas.

A desigualdade de Bernoulli fornece uma comparação fundamental entre uma potência e sua aproximação linear.

1.16 Proposição Desigualdade de Bernoulli

Para todo $t \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+t)^n \geq 1+nt.$$

Demonstração. Para $n = 0$, há igualdade. Suponha que a desigualdade valha para algum $n \in \mathbb{N}$. Como $1+t \geq 0$,

$$(1+t)^{n+1} \geq (1+nt)(1+t) = 1 + (n+1)t + nt^2 \geq 1 + (n+1)t.$$

A conclusão segue por indução. ■

As propriedades das potências e das raízes também permitem simplificar expressões algébricas, desde que as restrições sejam preservadas.

Exemplo 1.17.

Simplifique

$$\frac{a^5 a^{-2}}{a} \quad (a \neq 0) \quad \text{e} \quad \sqrt{12x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

<

Solução. No primeiro caso, somamos os expoentes dos fatores e subtraímos o expoente do denominador:

$$\frac{a^5 a^{-2}}{a} = a^{5-2-1} = a^2.$$

A condição $a \neq 0$ é necessária porque a expressão original contém tanto um expoente negativo quanto uma divisão por a . No segundo caso,

$$\sqrt{12x^2} = \sqrt{4 \cdot 3} \sqrt{x^2} = 2\sqrt{3} |x|.$$

O módulo é indispensável, pois x pode ser negativo. ■

Exercícios

Ex. 1.24 Calcule ou simplifique, indicando as restrições necessárias.

5. $\frac{a^6 a^{-2}}{a^3}.$

1. $27^{2/3}.$

6. $\sqrt{18x^2}.$

2. $16^{-3/4}.$

Ex. 1.25 Indique as restrições.

3. $(-27)^{1/3}.$

1. $a^0 = 1.$

4. Explique por que $(-16)^{1/2}$ não é um número real.

2. $a^{-n} = 1/a^n.$

3. a^x , para todo expoente real x , é definido pelas regras acima.

Síntese

A estrutura dos números reais reúne operações, ordem e completude. Dos axiomas algébricos decorrem propriedades como $a \cdot 0 = 0$, o cancelamento e a regra do produto nulo; a distributividade está na base da fatoração e das manipulações algébricas. Os axiomas de ordem explicam as regras das desigualdades. A completude garante a existência de fronteiras como supremos e, em particular, permite estabelecer a existência de números como $\sqrt{2}$.

Essas propriedades não são independentes das técnicas de cálculo algébrico: elas determinam quando uma transformação é válida, quais restrições de domínio devem

Raízes e restrições de domínio

Uma raiz de índice par tem radicando não negativo e valor não negativo. Por isso, $\sqrt{x^2} = |x|$, e não x para todo real. Antes de aplicar uma lei de potências ou raízes, é necessário verificar as condições em que ela vale.

2

Funções e gráficos

É preciso medir tudo o que é mensurável e tentar tornar mensurável o que não o é diretamente.

Thomas-Henri Martin, *Galilée, les droits de la science et la méthode des sciences physiques*

Neste capítulo

2.1 Pares ordenados e o plano cartesiano	25
2.2 O conceito de função	28
2.3 Gráficos de funções	31
2.4 Operações e composição	34
2.5 Propriedades qualitativas	38
2.6 Função inversa	42
2.7 Transformações e simetrias dos gráficos	45

2.1. Pares ordenados e o plano cartesiano

O plano cartesiano traduz relações numéricas em relações geométricas. Nele, uma equação pode descrever uma curva, uma desigualdade pode selecionar uma região e, mais adiante, uma função será representada por um conjunto de pontos. Para usar essa linguagem com precisão, começamos pelos pares ordenados.

Par ordenado não é conjunto

$(1, 2) \neq (2, 1)$, embora $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. A ordem das coordenadas é o que permite ao plano distinguir posições.

Pares ordenados e produto cartesiano

Um **par ordenado** (a, b) registra dois elementos numa ordem determinada: a é a primeira componente e b é a segunda. Em geral, $(a, b) \neq (b, a)$. Mais precisamente,

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d.$$

Dados dois conjuntos A e B , seu **produto cartesiano** é o conjunto de todos os pares cuja primeira componente pertence a A e cuja segunda pertence a B :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo 2.1.

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{u, v\}$, determine $A \times B$.

<

Solução. Cada elemento de A deve ser combinado com cada elemento de B :

$$A \times B = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v)\}.$$

Observe que $(1, u)$ pertence a $A \times B$, mas $(u, 1)$ não pertence. A ordem das componentes faz parte da informação. ■

Coordenadas

O produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, também escrito $\mathbb{R}^2$, pode ser representado geometricamente pelo **plano cartesiano**. No ponto $P = (x, y)$, o número x é a **abscissa** e determina a posição horizontal; o número y é a **ordenada** e determina a posição vertical. O ponto $(0, 0)$ é a origem.

Os eixos dividem o plano em quatro quadrantes. Pontos sobre os eixos não pertencem a nenhum quadrante.

Quadrante	sinal de x	sinal de y
I	positivo	positivo
II	negativo	positivo
III	negativo	negativo
IV	positivo	negativo

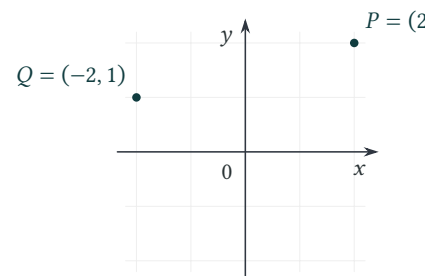


Figura 2.1. A primeira coordenada determina a posição horizontal; a segunda, a vertical.

Distância entre dois pontos

Se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, as diferenças horizontal e vertical são $x_2 - x_1$ e $y_2 - y_1$. Pelo teorema de Pitágoras, a distância entre os pontos é

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Os módulos $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$ são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo; a fórmula não precisa, portanto, ser memorizada como uma regra isolada.

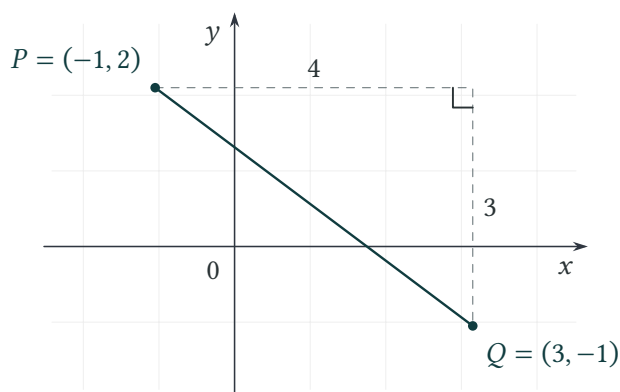


Figura 2.2. A distância entre dois pontos decorre do teorema de Pitágoras.

Exemplo 2.2.

Calcule a distância entre $P = (-1, 2)$ e $Q = (3, -1)$.

◁

Solução. As variações das coordenadas são $3 - (-1) = 4$ e $-1 - 2 = -3$. Logo,

$$d(P, Q) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Os sinais das variações podem mudar se invertermos a ordem dos pontos, mas os quadrados garantem a mesma distância. ■

Como ler regiões do plano?

Uma condição envolvendo x e y seleciona os pontos cujas coordenadas a satisfazem. A igualdade costuma descrever uma fronteira; uma desigualdade indica um dos lados ou uma região interior ou exterior.

Condição	região correspondente
$x > 1$	à direita da reta vertical $x = 1$
$y \leq 2$	abaixo da reta horizontal $y = 2$, incluindo a reta
$y > x$	acima da reta $y = x$
$x^2 + y^2 < 4$	interior do círculo de centro $(0, 0)$ e raio 2

Quando há mais de uma condição, procuramos sua interseção. Por exemplo,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } -1 < y \leq 2\}$$

é a parte do plano situada à direita do eixo y , incluindo esse eixo, entre as retas horizontais $y = -1$ e $y = 2$. A reta $y = -1$ não pertence à região; as retas $x = 0$ e $y = 2$ pertencem. A mesma região pode ser escrita de forma compacta como

$$R = [0, +\infty) \times (-1, 2].$$

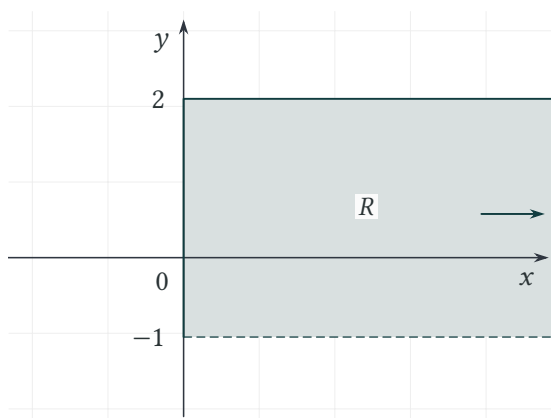


Figura 2.3. Na representação de R , linhas contínuas indicam fronteiras incluídas; a linha tracejada indica uma fronteira excluída.

Exercícios

Ex. 2.1 Considere $A = \{0, 1\}$ e $B = \{-1, 2\}$.

1. Liste os elementos de $A \times B$.
2. Liste os elementos de $B \times A$.
3. Os dois produtos são iguais?

Ex. 2.2 Considere $P = (-2, 1)$ e $Q = (1, -3)$.

1. Em que quadrante está cada ponto?
2. Calcule $d(P, Q)$.

Ex. 2.3 Descreva, em palavras, a região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } y \geq 1\}$.

2.2. O conceito de função

Os números reais permitem descrever grandezas; as funções descrevem como uma grandeza depende de outra. O volume de um gás, por exemplo, pode variar com a temperatura e a pressão, enquanto a posição de um corpo pode variar com o tempo. Essa linguagem de dependências faz das funções um dos conceitos centrais da Matemática e a base sobre a qual construiremos o Cálculo.

2.1 Definição

Sejam A e B conjuntos. Uma **função** f de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento de B . Escrevemos

$$f : A \longrightarrow B.$$

O conjunto A é o **domínio** de f , denotado por $\text{Dom } f$, e B é seu **contradomínio**. Se $x \in A$, o elemento associado a x é denotado por $f(x)$ e chamado de **imagem** de x .

Contradomínio não é imagem

O contradomínio é declarado junto com a função; a imagem é o conjunto dos valores efetivamente atingidos. Assim, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, tem contradomínio $\mathbb{R}$ e imagem $[0, \infty)$.

Uma função possui, portanto, três ingredientes: domínio, contradomínio e regra de associação. Alterar qualquer um deles pode alterar a função. Neste livro estudaremos principalmente funções reais de uma variável real, isto é, funções cujos domínios e contradomínios são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Adotaremos as convenções

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty), \quad \mathbb{R}_- = (-\infty, 0], \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Também escreveremos $\llbracket x \rrbracket$ para a **parte inteira**, ou **função piso**, de x , isto é, o maior inteiro menor ou igual a x :

$$\llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

2.2 Definição Igualdade de funções

Duas funções são iguais quando possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e atribuem a cada elemento do domínio a mesma imagem.

Embora fórmulas sejam uma maneira particularmente útil de descrever funções, elas não são a única. Uma função também pode ser especificada por uma tabela, por um gráfico, por uma definição em casos ou por um procedimento que determine univocamente cada valor.

Exemplo 2.3 — Domínio, contradomínio e imagem.

Considere as funções seguintes.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$;

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $g(x) = x^2$;

3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

4. $u(x) = \frac{x^3 + 5x + 6}{x^2 - 1}$, sem domínio indicado explicitamente.

Compare f e g como funções, determine a imagem de h e encontre o domínio natural de u .

◁

Solução. As funções f e g possuem a mesma expressão e o mesmo domínio, mas contradomínios diferentes; por isso, não são iguais. Em ambos os casos, os valores efetivamente assumidos formam o conjunto $\mathbb{R}_+$.

A função h , conhecida como função de Dirichlet, possui imagem $\{-1, 1\}$. Sua regra está bem definida, embora decidir o valor de h em um número apresentado de maneira complicada possa exigir saber se esse número é racional ou irracional.

No último item, a expressão somente representa um número real quando $x^2 - 1 \neq 0$. Pela convenção usual, o domínio de u é, portanto, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. ■

A convenção do domínio

Quando uma função é apresentada por uma fórmula e o domínio não é indicado, adotamos como domínio o maior conjunto de números reais para os quais a expressão possui sentido. Esse conjunto é chamado de **domínio natural** da função.

Uma função não precisa ser descrita por uma fórmula algébrica. A função de Euler

$$\phi : \{n \in \mathbb{N} : n > 1\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

associa a n a quantidade de inteiros positivos menores que n e coprimos com ele. Por exemplo, $\phi(2) = 1$ e $\phi(3) = \phi(4) = \phi(6) = 2$. A regra é um procedimento aritmético inequívoco, e isso basta para definir uma função.

Além da imagem de um ponto, interessa-nos acompanhar conjuntos inteiros. Se $f : A \rightarrow B$ e $X \subset A$, definimos a **imagem de X por f** por

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Em particular, o **conjunto imagem** de f é

$$\text{Im } f = f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

Observe que $\text{Im } f \subset B$, mas a igualdade não é automática.

O caminho inverso parte de um conjunto do contradomínio. Se $Y \subset B$, a **pré-imagem** de Y é

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Para um único valor $y \in B$, escrevemos

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\}.$$

Exemplo 2.4.

Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, temos

$$f([-2, 1]) = [0, 4], \quad f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}, \quad f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2].$$

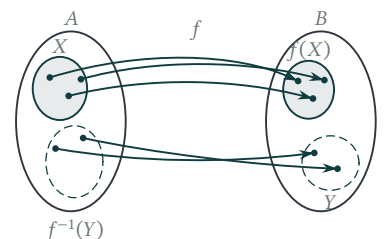


Figura 2.4. Imagem de X e pré-imagem de Y por f .

Já $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$, pois um quadrado real não pode ser negativo.

<

O símbolo f^{-1} também será usado para funções inversas. O contexto distingue os dois significados: em $f^{-1}(Y)$, o argumento é um conjunto e estamos tomando uma pré-imagem; em $f^{-1}(y)$, quando a função inversa existir, o argumento será um elemento.

Exercícios

Ex. 2.4 Determine o domínio natural de cada expressão.

1. $\frac{x+1}{x^2-4}$.

2. $\sqrt{3-x}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

4. $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Ex. 2.5 Considere as funções

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty),$$

todas dadas pela regra $x \mapsto x^2$. As funções f e g são iguais? E h e k ? Justifique pela definição de igualdade de funções.

Ex. 2.6 Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, determine $f([-1, 3])$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([-4, 0])$ e $f^{-1}((-\infty, -5))$.

2.3. Gráficos de funções

O gráfico reúne, numa única representação, os valores de entrada e as imagens produzidas por uma função. Ele registra geometricamente a dependência entre esses valores.

2.3 Definição

Se $f : A \rightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, o **gráfico** de f é

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Para cada $x \in A$, há exatamente um ponto do gráfico com abscissa x . Essa observação fornece o **teste da reta vertical**: um subconjunto do plano representa o gráfico de uma função de x quando nenhuma reta vertical o encontra em mais de um ponto. Se uma reta vertical encontra a figura duas vezes, a mesma entrada teria duas imagens.

Uma formulação em pares ordenados

Uma **relação** entre A e B é qualquer subconjunto de $A \times B$. Ela é uma função de A em B exatamente quando, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação. Assim,

$$R = \{(1, u), (2, u), (2, v)\} \subset \{1, 2, 3\} \times \{u, v\}$$

não define uma função de $\{1, 2, 3\}$ em $\{u, v\}$: o elemento 2 aparece com duas segundas componentes, e o elemento 3 não aparece com nenhuma. Essa formulação é equivalente à definição anterior de função; ela apenas explicita a regra como um conjunto de pares.

O que se lê em um gráfico

O ponto $(a, f(a))$ permite ler o valor $f(a)$. As interseções com o eixo horizontal correspondem aos zeros da função; os trechos acima e abaixo desse eixo indicam, respectivamente, onde $f(x) > 0$ e onde $f(x) < 0$. A projeção do gráfico sobre o eixo horizontal fornece o domínio, e a projeção sobre o eixo vertical fornece a imagem. Essas leituras dependem sempre dos pontos que efetivamente pertencem ao gráfico, inclusive nas extremidades de intervalos.

Exemplos 2.5.

1 $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

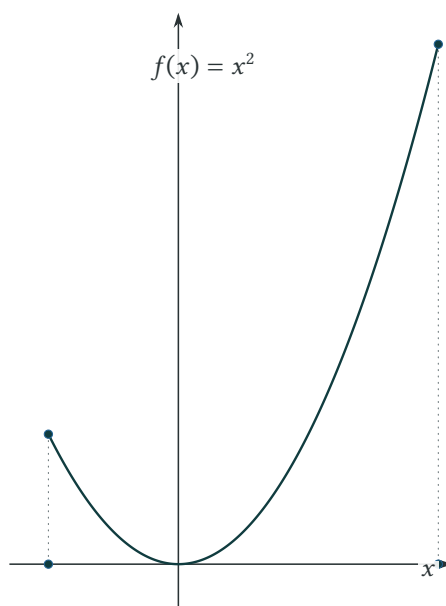


Figura 2.5. Gráfico de $f(x) = x^2$ com domínio restrito a $[-1, 2]$.

2 $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = |n|$

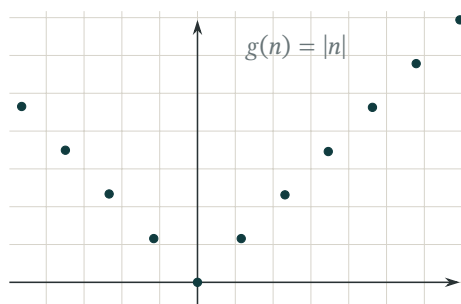


Figura 2.6. Gráfico discreto de $g(n) = |n|$.

3 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 1, \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$$

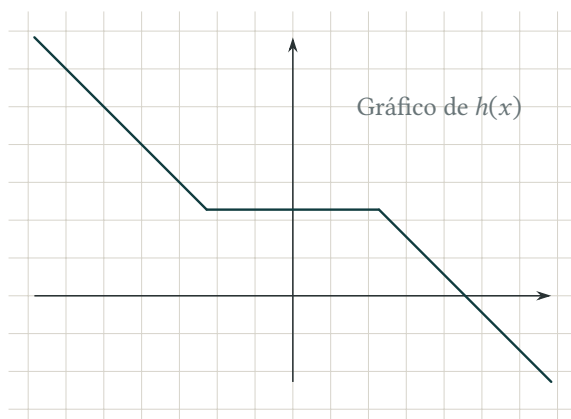


Figura 2.7. Gráfico da função h definida por partes.

◁

Comparar dois gráficos no mesmo plano também permite localizar soluções de equações e desigualdades. Uma interseção de abscissa a representa $f(a) = g(a)$. Para uma mesma abscissa b , se o ponto do gráfico de g está acima do ponto do gráfico de f , então $g(b) > f(b)$.

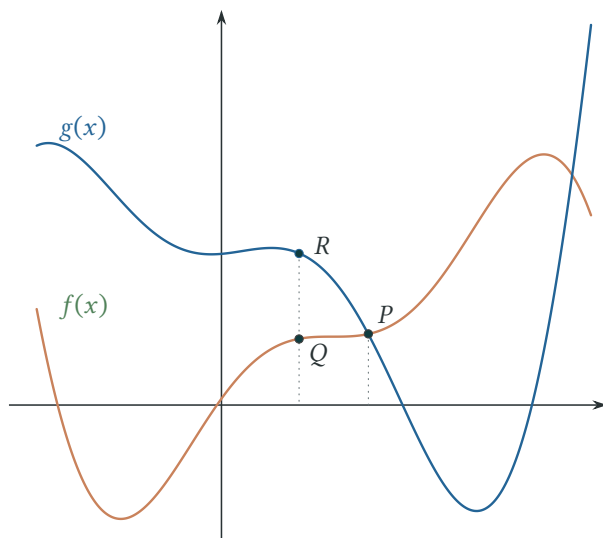


Figura 2.8. Comparação gráfica entre as funções f e g .

Exercícios

Ex. 2.7 Uma estação registra, a cada hora, a temperatura T e a umidade relativa U . Explique por que “ U como função de T ” pode falhar, ainda que ambas sejam funções do tempo. Construa uma tabela com quatro horários que ilustre sua resposta.

Ex. 2.8 Considere as duas semicircunferências do círculo $x^2 + y^2 = 16$. Escreva a semicircunferência superior como função de x e explique por que a união das duas semicircunferências não é o gráfico de uma função de x .

Ex. 2.9 Uma boia oscila suavemente durante dois minutos, é recolhida para um barco em poucos segundos e permanece no convés. Esboce sua altura em relação à superfície da água como função do tempo e descreva as hipóteses usadas no desenho.

Ex. 2.10 A função $D(n)$ fornece o número de arquivos em uma pasta depois de n operações, onde $n \in \mathbb{N}$. Explique por que um gráfico de pontos é mais apropriado que uma curva contínua e dê um exemplo em que D diminua.

2.4. Operações e composição

A maior parte das funções elementares pode ser construída a partir de famílias simples por meio de soma, produto, quociente e composição. Ao realizar essas operações, porém, é preciso acompanhar os domínios.

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$. A soma e o produto são definidos no domínio comum $D_f \cap D_g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Domínio da composição

Para calcular $f(g(x))$, é preciso que $g(x)$ exista e pertença ao domínio de f . Por exemplo, $\sqrt{1 - x^2}$ exige $1 - x^2 \geq 0$, embora a função interna $1 - x^2$ esteja definida para todo real.

O quociente possui a restrição adicional de que o denominador não se anule:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos ainda $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ em D_f . Esse produto pode ser visto como o produto de f pela função constante de valor α .

As propriedades algébricas dos números passam ponto a ponto para as funções, sempre que os dois membros estejam definidos no mesmo domínio.

2.6 Proposição

Para funções f, g, h com domínio comum, valem:

$$\begin{aligned} (f + g) + h &= f + (g + h), & (fg)h &= f(gh), \\ f + g &= g + f, & fg &= gf, \\ (f + g)h &= fh + gh. \end{aligned}$$

Exemplo 2.7 — Construindo funções polinomiais.

Toda função polinomial pode ser obtida a partir da função identidade $\iota(x) = x$ e das funções constantes. Produtos sucessivos de ι produzem as potências x^n ; a multiplicação por constantes produz os monômios $c_n x^n$; somando-os, obtemos qualquer polinômio.

◁

A **composição** encadeia duas dependências. Se $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$, definimos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

A ordem importa: primeiro aplicamos g e depois f .

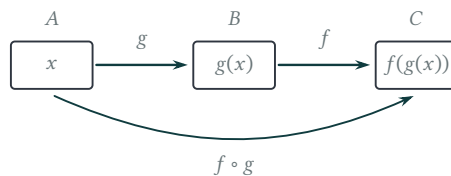


Figura 2.9. Na composição, primeiro atua g e depois atua f .

Quando as funções são dadas em domínios naturais, a condição precisa é

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom } g : g(x) \in \text{Dom } f\}.$$

Exemplo 2.8.

Se $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x - 1$, então

$$(f \circ g)(x) = 2(x - 1) + 3 = 2x + 1.$$

Em $x = 2$, calculamos primeiro $g(2) = 1$ e depois $f(1) = 5$. Na outra ordem,

$$(g \circ f)(x) = (2x + 3) - 1 = 2x + 2,$$

de modo que $(g \circ f)(2) = 6$. As duas composições estão definidas em $\mathbb{R}$, mas não são a mesma função.

<

Trocar a ordem pode alterar tanto a expressão quanto o domínio, como mostram os exemplos seguintes.

Exemplos 2.9.

1 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, então $\text{Dom } f = \mathbb{R}_+$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$ e:

■ $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(f \circ g)(x) = |x|$

■ $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}_+$ e $(g \circ f)(x) = x$

2 Se $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$, então $\text{Dom } f = \mathbb{R}^*$, $\text{Dom } g = (-\infty, 1]$ e:

■ $\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 1)$ e $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

■ $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ e $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$

<

Exemplo 2.10 — O domínio acompanha a ordem da composição.

Sejam $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = (x-2)/(x+1)$. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$, com seus domínios.

<

Solução. Na primeira ordem,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}.$$

São necessárias duas condições: $x \neq -1$, para que $g(x)$ exista, e $g(x) \geq 0$, para que seja possível aplicar a raiz quadrada. O numerador muda de sinal em 2 e o denominador em -1 . O quociente é positivo para $x < -1$ e para $x > 2$, negativo entre -1 e 2, e nulo em 2. Consequentemente,

$$\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, -1) \cup [2, \infty).$$

O ponto 2 é incluído porque a raiz de zero existe; -1 continua excluído porque anula o denominador.

Na ordem contrária,

$$(g \circ f)(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

Primeiro precisamos de $x \geq 0$. A condição seguinte seria $\sqrt{x} \neq -1$, mas ela é automaticamente satisfeita: uma raiz quadrada real é não negativa. Portanto,

$$\text{Dom}(g \circ f) = [0, \infty).$$

Por exemplo, $x = -2$ é permitido na primeira composição e não na segunda; já $x = 0$ é permitido na segunda e não na primeira. ■

Exercícios

Ex. 2.11 Para $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$, calcule $f \circ g$ e $g \circ f$, com seus domínios. $f \circ g$ e $g \circ f$, incluindo seus domínios. Compare os valores das duas composições em $x = 1$.

Ex. 2.15 *Aprofundamento.* Considere

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - (2x - 1)^2}}.$$

Ex. 2.12 Sejam $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = 3-x$. Determine as duas composições e seus domínios, indicando qual condição vem da raiz.

1. Escreva H como composição de $u(x) = 2x - 1$, $v(t) = 4 - t^2$ e uma terceira função w .

Ex. 2.13 O gráfico de f passa por $(1, 4)$ e $(3, -2)$, e $g(x) = 2x + 1$.

2. Determine seu domínio, acompanhando as três etapas.

1. Determine dois pontos do gráfico de $f \circ g$.

3. Determine sua imagem.

2. Calcule $g(f(1))$ e $g(f(3))$.

3. Use $x = 1$ para mostrar que as composições são diferentes, sem supor uma fórmula para f .

Ex. 2.16 Se $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = 1/(x-1)$, determine os domínios de $f+g$, fg , $f \circ g$ e $g \circ f$. Em cada caso, mostre como surgem as restrições.

Ex. 2.14 Para $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ e $g(x) = 1/(x-1)$,

Ex. 2.17 A função $c(g) = 1000g$ converte gramas em miligramas. O preço, em reais, de uma preparação é $p(u) = 0,018u + 7$, com u em miligramas. Interprete $p \circ c$ e determine seu domínio físico se a embalagem comporta, no máximo, 2 kg.

Ex. 2.18 Sejam f e g funções reais. Em que subconjuntos de $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ podemos definir uma função real por

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}?$$

Explique por que os domínios de f e g , sozinhos, não determinam a resposta.

Ex. 2.19 Para cada função abaixo, encontre $f(x +$

$2)$, $f(-x)$, $f(x + h)$ e

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0.$$

$$1. f(x) = x$$

$$2. f(x) = 3x + 4$$

$$3. f(x) = x^2$$

$$4. f(x) = 5x^2 + 1$$

$$5. f(x) = x^2 - x$$

$$6. f(x) = x^3 + x^2$$

2.5. Propriedades qualitativas

Uma fórmula informa como calcular valores; as propriedades qualitativas descrevem o comportamento global da função. Entre as mais importantes estão a monotonicidade e a maneira como domínio, imagem e contradomínio se correspondem.

2.5.1. Crescimento e decrescimento

Para funções reais, podemos investigar como as imagens se comportam quando a variável aumenta. Essa relação entre as ordens no domínio e na imagem é descrita pelas noções de crescimento e decrescimento:

O teste da reta horizontal

As interseções do gráfico com $y = c$ correspondem às soluções de $f(x) = c$. Logo, a função é injetiva precisamente quando cada reta horizontal encontra seu gráfico em, no máximo, um ponto. Contam-se também os encontros em que a reta apenas tangencia o gráfico.

2.4 Definição

Dada uma função f e dado um subconjunto $A \subset \text{Dom } f$, dizemos que:

- f é **crescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) < f(b)$.
- f é **não decrescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) \leq f(b)$.
- f é **decrescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) > f(b)$.
- f é **não crescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) \geq f(b)$.

Em qualquer um dos casos acima, dizemos que a função é **monótona**¹. Em particular, quando a função é crescente ou decrescente, dizemos que é **estritamente monótona**.

Exemplos 2.11.

- 1 A função identidade é crescente em $\mathbb{R}$.
- 2 A função x^2 é decrescente em $\mathbb{R}_-$ e crescente em $\mathbb{R}_+$.
- 3 A função $\llbracket x \rrbracket$ é não decrescente em $\mathbb{R}$. A mesma função é crescente em $\mathbb{Z}$.

<

2.5.2. Injetividade e sobrejetividade

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, podemos fazer duas perguntas distintas. Valores diferentes do domínio podem produzir a mesma imagem? Todo elemento do contradomínio é atingido? As noções de injetividade e sobrejetividade respondem, respectivamente, a essas perguntas.

2.5 Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **injetora** quando elementos distintos do domínio possuem imagens distintas. Equivalentemente, para quaisquer $u, v \in A$,

$$f(u) = f(v) \implies u = v.$$

¹É também usual na literatura o termo *monotônica*.

2.6 Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **sobrejetora** quando $\text{Im } f = B$, isto é, quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A .

Exemplo 2.12.

Uma mesma expressão pode determinar funções com propriedades diferentes. Para $x \mapsto x^2$, temos:

Função	Injetora?	Sobrejetora?
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	não	não
$\mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$	não	sim
$[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$	sim	não
$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$	sim	sim

De fato, em $\mathbb{R}$ temos $1^2 = (-1)^2$, o que impede a injetividade. Por outro lado, todo $y \geq 0$ pode ser escrito como $y = (\sqrt{y})^2$. Ao restringirmos o domínio a $[0, +\infty)$, eliminamos a duplicidade entre x e $-x$; ao escolhermos $[0, +\infty)$ como contradomínio, nenhum valor fica sem ser atingido.

<

No gráfico, a injetividade pode ser reconhecida pelo **teste da reta horizontal**: uma função é injetora quando nenhuma reta horizontal encontra seu gráfico em mais de um ponto. O teste apenas traduz geometricamente o fato de que uma mesma imagem não pode provir de duas entradas distintas.

2.7 Definição

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **bijetora** se é, simultaneamente, injetora e sobrejetora.

Quando uma função é bijetora, cada elemento do contradomínio corresponde a exatamente um elemento do domínio. Podemos então inverter a associação.

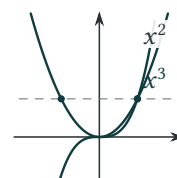


Figura 2.10. Uma reta horizontal pode encontrar x^2 duas vezes, mas encontra x^3 no máximo uma vez.

Exercícios

Ex. 2.20 Determine os intervalos nos quais $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é crescente ou decrescente. É possível dizer que f é monótona em todo o seu domínio?

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Ex. 2.22 Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, diga quais das relações abaixo definem uma função $f : A \rightarrow B$.

Ex. 2.21 Mostre que toda função estritamente

$$1. R = \{(e, 1), (o, 2)\}$$

$$2. R = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 2), (u, 2)\}$$

$$3. R = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$$

$$4. R = \{(a, 1), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (u, 2), (u, 5)\}$$

$$5. R = \{(a, 3), (e, 3), (i, 3), (o, 3), (u, 3)\}$$

$$6. R = \{(a, 1), (e, 3), (i, 3), (o, 2), (u, 2)\}$$

$$7. R = \{(a, 2), (e, 1), (i, 4), (o, 5), (u, 3)\}$$

Ex. 2.23 Para cada função que aparece no exercício acima, diga se é injetora, sobrejetora e/ou bijetora.

Ex. 2.24 Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (-1)^n n.$$

Ex. 2.25 Considerando a função f do exercício anterior, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n+1)$.

Ex. 2.26 *Aprofundamento.* Seja A um conjunto (não vazio) com n elementos e seja B um conjunto qualquer. Mostre cada uma das seguintes afirmações:

1. Se existe uma função injetora $f : A \rightarrow B$, então B possui *pelo menos* n elementos.
2. Se existe uma função sobrejetora $f : A \rightarrow B$, então B possui *no máximo* n elementos.
3. Conclua, das afirmações acima, a seguinte propriedade: dois conjuntos finitos² possuem o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma função bijetora entre tais conjuntos.

Ex. 2.27 Para cada função, determine se é injetora, sobrejetora ou bijetora. Justifique sua resposta. Os quatro últimos itens são de aprofundamento.

1. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \rightarrow A$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar,} \\ x/2, & \text{se } x \text{ é par.} \end{cases}$$

2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $g : A \rightarrow A$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 7, \\ 1, & x = 7. \end{cases}$$

$$3. f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + 1.$$

$$4. f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n - |n|.$$

$$5. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ com } a \neq 0.$$

$$6. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2.$$

$$7. f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$8. f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$9. f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}.$$

$$10. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, x).$$

$$11. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, |x|).$$

$$12. f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - |y|.$$

$$13. f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (x, y^3).$$

Ex. 2.28 Para cada função, calcule $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$ e $f^{-1}(\{2\})$. O primeiro item retoma a definição; os demais são de aprofundamento.

$$1. f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + 1.$$

$$2. f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - |(x+2)^2 - 1|.$$

$$3. f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

$$4. f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - |y|.$$

²Voltaremos a essa noção mais adiante.

2.6. Função inversa

Inverter uma função significa recuperar a entrada a partir da saída. Para que isso seja possível em todo o contradomínio, duas condições são necessárias: saídas iguais não podem provir de entradas diferentes, e todo elemento do contradomínio precisa ser atingido. Essas são precisamente a injetividade e a sobrejetividade.

Quando $C \subset A$, a função

$$f|_C : C \longrightarrow B, \quad f|_C(x) = f(x),$$

é a **restrição de f a C** . Restringir o domínio pode eliminar repetições de valores e tornar uma função injetora. Por exemplo, $x \mapsto x^2$ não é injetora em $\mathbb{R}$, mas sua restrição a $[0, +\infty)$ é uma bijeção de $[0, +\infty)$ em $[0, +\infty)$.

No sentido oposto, uma **extensão** de $g : A \rightarrow B$ a um conjunto $C \supset A$ é uma função $f : C \rightarrow B$ que coincide com g em A . A restrição a um conjunto fixado é única; uma extensão, em geral, não é.

A simetria da função inversa

Quando f admite inversa, $f(a) = b$ equivale a $f^{-1}(b) = a$. Ao ponto (a, b) corresponde, portanto, o ponto (b, a) . Essa troca de coordenadas é a reflexão em relação a $y = x$ e explica a troca entre domínio e imagem.

2.13 Proposição Bijetividade e existência da inversa

Uma função $f : A \rightarrow B$ possui uma função $g : B \rightarrow A$ tal que

$$g \circ f = \iota_A \quad \text{e} \quad f \circ g = \iota_B$$

se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração. Suponha primeiro que tal função g exista. Se $f(x_1) = f(x_2)$, aplicar g aos dois membros fornece $x_1 = x_2$; portanto, f é injetora. Além disso, para cada $y \in B$, temos $y = f(g(y))$, de modo que y é imagem de algum elemento de A ; logo, f é sobrejetora.

Reciprocamente, se f é bijetora, cada $y \in B$ é imagem de um único $x \in A$. Definindo $g(y) = x$, obtemos as duas identidades acima. ■

2.8 Definição Função inversa

Se $f : A \rightarrow B$ é bijetora, sua **função inversa** é a função

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Em particular,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in A), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in B).$$

Se $f : A \rightarrow B$ é apenas injetora, ela se torna bijetora quando substituimos o contradomínio B por sua imagem $f(A)$. Nesse caso, podemos inverter a função *sobre sua*

imagem, obtendo $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$. É exatamente o que ocorre com $x \mapsto x^2$ depois que restringimos seu domínio a $[0, +\infty)$.

Exemplo 2.14.

Considere $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3]$, $f(x) = 2x + 1$. A função é bijetora e, portanto, possui inversa $f^{-1} : [1, 3] \rightarrow [0, 1]$. Partindo de $y = 2x + 1$ e isolando x , obtemos

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

Logo,

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}, \quad 1 \leq y \leq 3.$$

◁

2.15 Observação

A composição torna precisa a ideia de desfazer uma função: se $f : A \rightarrow B$ é bijetora, então

$$f^{-1} \circ f = \iota_A, \quad f \circ f^{-1} = \iota_B,$$

onde ι_A e ι_B são as funções identidade nos conjuntos correspondentes.

Determinando a função inversa

- Escreva $y = f(x)$.
- Resolva a equação anterior obtendo x em termos de y .
- A expressão obtida é $f^{-1}(y)$. Ao desenhar f e f^{-1} no mesmo sistema de eixos, pode-se renomear uma única vez essa variável livre e escrever $f^{-1}(x)$.

Exemplo 2.16.

Calcule f^{-1} para a função $f(x) = 1 + 5x$.

◁

Solução. Como $y = 1 + 5x$, isolando x , temos

$$x = \frac{y-1}{5}.$$

Logo, $f^{-1}(y) = (y-1)/5$. Se renomearmos a variável livre para representar as duas funções no mesmo sistema de eixos, escrevemos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}.$$

2.6.1. O gráfico da inversa

Se $f : A \rightarrow B$ é bijetora, então

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Assim, a cada ponto (x, y) do gráfico de f corresponde o ponto (y, x) do gráfico de f^{-1} . Esses pontos são simétricos em relação à reta $y = x$; portanto, os gráficos de uma função e de sua inversa são reflexões um do outro em relação a essa reta.

Exemplo 2.17 — Uma função e sua inversa.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, é bijetora e sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. A figura ilustra a simetria entre os dois gráficos em relação à reta $y = x$.

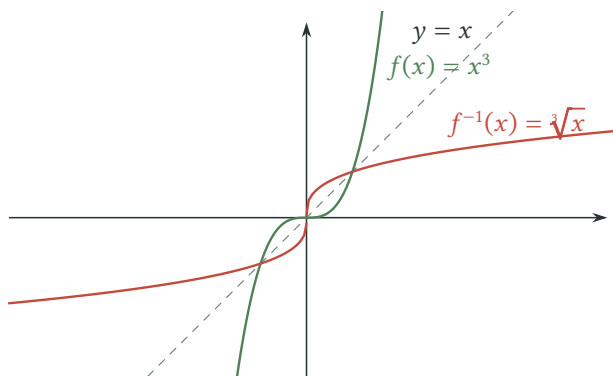


Figura 2.11. Gráficos de uma função e de sua inversa.

Exercícios

Ex. 2.29 Denotando por ι a função identidade no conjunto correspondente, mostre que:

1. $\iota \circ f = f$ e $f \circ \iota = f$;
2. se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \iota$ e $f^{-1} \circ f = \iota$. Conclua que a função identidade é o elemento neutro da composição.

Ex. 2.30 Considere $f : [0, 2] \rightarrow [0, 5]$, dada por $f(x) = x^2$. Determine o domínio, o contradomínio e a

imagem de f . Explique por que ela não possui inversa definida em todo o contradomínio. Substitua então o contradomínio pela imagem e determine a inversa da função assim obtida.

Ex. 2.31 Encontre uma expressão para a inversa de

$$f(x) = \frac{4x-1}{x+2}, \quad x \neq -2,$$

determine os domínios de f e de f^{-1} e verifique uma das composições.

Ex. 2.32 Um sensor apresenta a temperatura em Fahrenheit, $F = 1,8C + 32$. Determine a função que recupera a temperatura em Celsius a partir de F e explique como as unidades do domínio e da imagem se alteram ao inverter a função.

Ex. 2.33 Prove que toda função da forma $h(x) = a - x$, com $a \in \mathbb{R}$, é sua própria inversa e interprete geo-

metricamente o resultado.

Ex. 2.34 A distância registrada por um odômetro em função do tempo é não decrescente, mas pode apresentar trechos constantes. Discuta quando essa função admite uma inversa que forneça o tempo a partir da distância. Que informação adicional eliminaria a ambiguidade?

2.7. Transformações e simetrias dos gráficos

Conhecer um gráfico permite construir muitos outros sem recomençar o esboço ponto a ponto. Alterações simples na expressão correspondem a deslocamentos, mudanças de escala ou reflexões no plano.

2.7.1. Translações

Se $c \in \mathbb{R}$, comparemos

$$g(x) = f(x) + c, \quad h(x) = f(x + c).$$

Na primeira expressão, a constante é somada ao valor da função: cada ponto $(x, f(x))$ é levado a $(x, f(x) + c)$. O gráfico sofre uma **translação vertical** de $|c|$ unidades, para cima quando $c > 0$ e para baixo quando $c < 0$.

Na segunda expressão, a constante altera a entrada da função. Para que h assumia em x o valor que f assumia em $x + c$, o gráfico precisa deslocar-se horizontalmente no sentido oposto ao sinal de c . Assim, $f(x + c)$ corresponde a uma translação de $|c|$ unidades para a esquerda quando $c > 0$ e para a direita quando $c < 0$.

Exemplo 2.18 — Translações vertical e horizontal.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 - x$. Defina $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) + 2 = x^3 - x + 2, \quad h(x) = f(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

A figura ilustra essas transformações.

Translação horizontal

Se $g(x) = f(x - c)$, então $g(a + c) = f(a)$. Assim, o ponto $(a, f(a))$ desloca-se para $(a + c, f(a))$: para a direita se $c > 0$, para a esquerda se $c < 0$. A igualdade $x - c = a$ explica o sentido do deslocamento.

◁

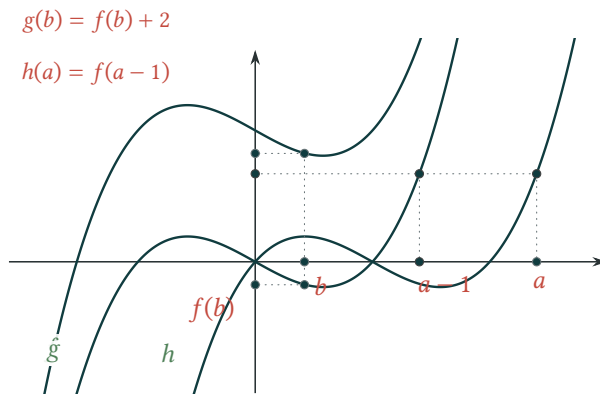


Figura 2.12. Translação horizontal e vertical do gráfico de f .

O sinal aparentemente invertido na translação horizontal decorre justamente dessa comparação das entradas. Se $c > 0$, o valor que estava na abscissa $x + c$ passa a aparecer em x , portanto mais à esquerda.

Os domínios também acompanham a transformação. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, então $f(x) + c$ continua definido em A , enquanto

$$\text{Dom}(f(x + c)) = \{x \in \mathbb{R} : x + c \in A\}.$$

2.7.2. Mudanças de escala

Multiplicar uma coordenada por uma constante positiva produz uma mudança homogênea de escala. Para $c > 0$, consideremos

$$g(x) = c f(x), \quad h(x) = f(cx).$$

No gráfico de g , todas as ordenadas são multiplicadas por c : temos uma mudança de escala vertical por fator c . No gráfico de h , o valor que f assumia em cx passa a aparecer em x ; por isso, a escala horizontal é multiplicada por $1/c$.

Consequentemente, se $c > 1$, $cf(x)$ produz uma dilatação vertical, enquanto $f(cx)$ produz uma contração horizontal. Se $0 < c < 1$, ocorre o contrário. A diferença é a mesma observada nas translações: alterações feitas fora de f atuam diretamente nos valores; alterações feitas no argumento atuam de maneira inversa no eixo horizontal.

Exemplo 2.19 — Escalas vertical e horizontal.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3 - x$. Defina $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = 2f(x) = 2x^3 - 2x, \quad h(x) = f(2x) = 8x^3 - 2x.$$

◀

A figura ilustra essas transformações.

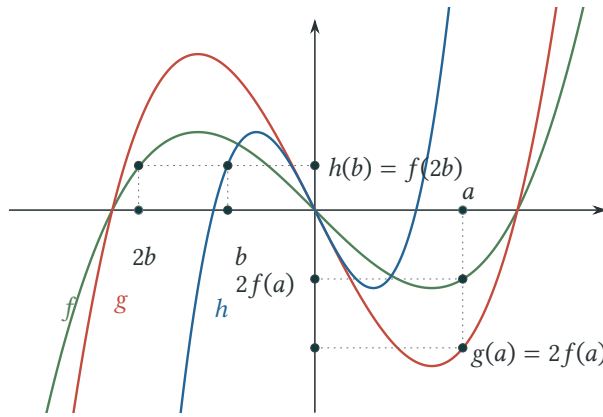


Figura 2.13. Escala vertical em $g = 2f$ e escala horizontal em $h(x) = f(2x)$.

2.7.3. Reflexões

As mudanças de escala anteriores usaram fatores positivos. A troca de sinal de uma coordenada introduz outro efeito geométrico: a reflexão. Dado um ponto P de coordenadas (x, y) , dizemos que:

- o ponto de coordenadas $(x, -y)$ é o ponto simétrico de P relativamente ao eixo x .
- o ponto de coordenadas $(-x, y)$ é o ponto simétrico de P relativamente ao eixo y .
- o ponto de coordenadas $(-x, -y)$ é o ponto simétrico de P relativamente à origem O .

Refletir em relação ao eixo x troca o sinal das ordenadas; refletir em relação ao eixo y troca o sinal das abscissas. Assim:

- o gráfico de $-f(x)$ é a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo x ;
- o gráfico de $f(-x)$ é a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo y .

Exemplo 2.20 — Reflexões nos eixos coordenados.

Seja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. As funções

$$g(x) = -f(x) = -x^2 + 3x - 2, \quad h(x) = f(-x) = x^2 + 3x + 2$$

produzem, respectivamente, as reflexões do gráfico de f nos eixos x e y .

◁

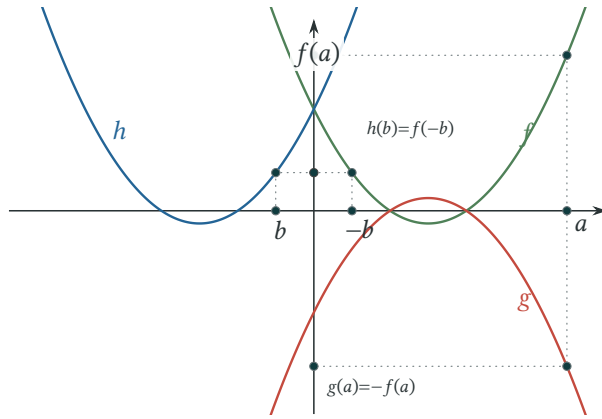


Figura 2.14. Gráficos das funções obtidas através de reflexões em relação aos eixos coordenados.

2.7.4. Paridade

Uma reflexão pode levar o gráfico de uma função ao de outra ou pode deixá-lo inalterado. Quando o gráfico permanece o mesmo após uma reflexão em relação ao eixo y , a função é chamada de **par**; quando permanece o mesmo após uma reflexão em relação à origem, a função é chamada de **ímpar**.

De fato, refletir $(x, f(x))$ em relação ao eixo y produz $(-x, f(x))$. Esse ponto pertence ao gráfico original exatamente quando $f(-x) = f(x)$. De modo semelhante, a reflexão em relação à origem produz $(-x, -f(x))$, que pertence ao gráfico original exatamente quando $f(-x) = -f(x)$.

Portanto, se $f : A \rightarrow B$ e o domínio $A \subset \mathbb{R}$ é simétrico em relação à origem, isto é, $x \in A$ implica $-x \in A$, então

- f é **par** se, e somente se, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$;
- f é **ímpar** se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplos 2.21.

- 1** A função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ é par.

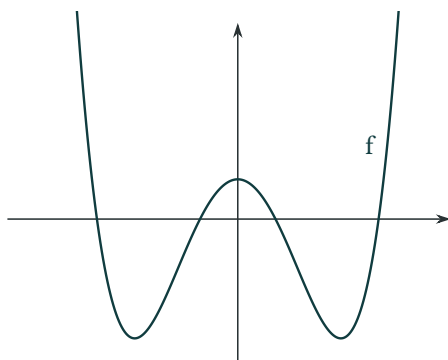


Figura 2.15. Simetria do gráfico de uma função par.

2 A função $g(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ é ímpar.

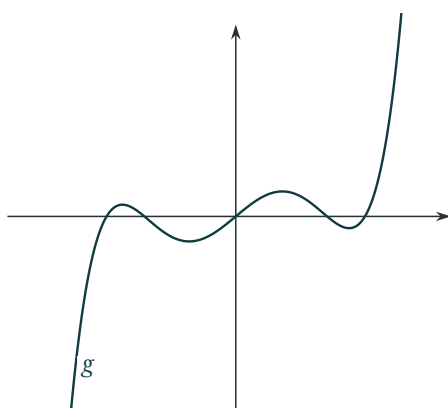


Figura 2.16. Simetria do gráfico de uma função ímpar.

3 A função $h(x) = x^3 + x^2$ não é nem par, nem ímpar.

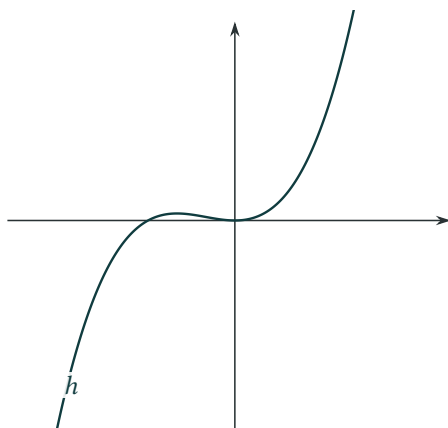


Figura 2.17. Gráfico de uma função que não é par nem ímpar.

◁

2.7.5. Periodicidade

Nem toda simetria decorre de uma reflexão. Um gráfico pode também permanecer inalterado após uma translação horizontal. Esse comportamento caracteriza as funções periódicas.

2.9 Definição

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **periódica** se existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in A \iff x + r \in A,$$

e, sempre que $x \in A$,

$$f(x + r) = f(x).$$

Todo número $r > 0$ que satisfaz as condições da definição é chamado de **período** de f . A primeira condição garante que a translação não retire pontos do domínio; ela é automática quando $A = \mathbb{R}$, mas é necessária, por exemplo, para tratar a tangente. Quando o conjunto dos períodos positivos possui um menor elemento T , esse número é chamado de **período fundamental**. Assim, T satisfaz:

1. $x \in A$ se, e somente se, $x + T \in A$, e $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in A$;
2. nenhum número de $(0, T)$ é período de f .

Uma função periódica não constante pode não ter período fundamental. A função de Dirichlet apresentada anteriormente é um exemplo: todo racional positivo é um período, mas não há um menor racional positivo. Para as funções periódicas com período fundamental que estudaremos a seguir, usaremos também a palavra *período* para designar esse menor valor, quando o contexto for claro.

Os exemplos clássicos são as funções trigonométricas, estudadas adiante. Antes delas, retomemos a parte inteira e consideremos a função

$$f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$$

em que $\llbracket x \rrbracket$ denota, como definido anteriormente, o maior inteiro menor ou igual a x . A função f é periódica, pois, para todo inteiro n ,

$$f(x + n) = (x + n) - \llbracket x + n \rrbracket = x + n - (\llbracket x \rrbracket + n) = x - \llbracket x \rrbracket = f(x)$$

Em particular, 1 é um período de f . A figura mostra esse comportamento periódico.

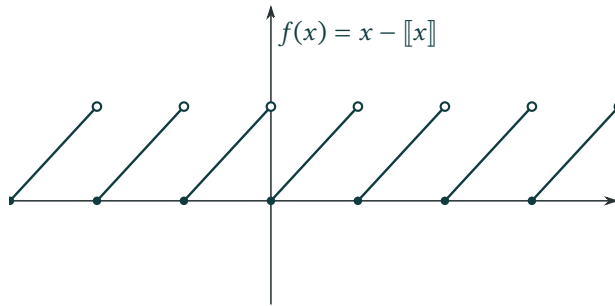


Figura 2.18. Gráfico de uma função periódica de período 1.

Exercícios

Ex. 2.35 Verifique a identidade

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4}$$

e conclua que o gráfico de $y = x^2 + bx + c$ pode ser obtido do gráfico de $y = x^2$ por uma translação horizontal seguida de uma translação vertical.

Ex. 2.36 Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $c > 0$. Para

$$g(x) = cf(x), \quad h(x) = f(cx),$$

compare os domínios de g e h com o domínio A de f .

Ex. 2.37 Descreva as transformações e acompanhe o domínio.

1. Obtenha $y = \sqrt{x} + 2$ a partir de $y = \sqrt{x}$.
2. Obtenha $y = 2\sqrt{x+3} - 1$ a partir de $y = \sqrt{x}$.

Ex. 2.38 Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Para

$$g(x) = -f(x), \quad h(x) = f(-x),$$

compare os domínios de g e h com o domínio A de f .

Ex. 2.39 Responda às questões sobre paridade.

1. O gráfico de uma função pode ser simétrico em relação ao eixo x ? Em que caso?

2. O que se pode dizer sobre o domínio de uma função par ou ímpar?
3. Num domínio simétrico fixado, qual função é simultaneamente par e ímpar?
4. Determine a paridade da soma e do produto de duas funções a partir da paridade das parcelas.
5. Se f é par, g é ímpar e $k \in \mathbb{R}$, discuta a paridade de

$$kf, \quad kg, \quad f + k, \quad g + k, \\ |f|, \quad |g|.$$

Ex. 2.40 A partir de $y = x^2$, descreva, na ordem, transformações que produzam o gráfico de $y = -3(x-2)^2 + 5$. Sem construir uma tabela de valores, localize o vértice e o eixo de simetria e determine domínio e imagem.

Ex. 2.41 Seja $u(x) = (f(x) + f(-x))/2$ e $v(x) = (f(x) - f(-x))/2$, com domínio de f simétrico em relação à origem. Mostre que u é par, v é ímpar e $f = u + v$.

Ex. 2.42 Para $f(x) = x - [x]$, mostre que os períodos positivos são exatamente os inteiros positivos e conclua que o período fundamental é 1.

3

Funções algébricas

Neste capítulo

3.1 Funções afins	52
3.2 Função módulo e definições por partes	57
3.3 Funções quadráticas	58
3.4 Funções potência e raiz	62
3.5 Funções polinomiais	65
3.6 Funções racionais	67

A matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes.

Henri Poincaré, *Ciência e Método*

Nos capítulos anteriores foram introduzidas as noções de domínio, imagem, composição, monotonicidade, inversa e transformação de gráficos. Neste capítulo, essas noções serão retomadas no estudo de algumas famílias elementares de funções.

Embora cada família possua propriedades próprias, algumas questões aparecem repetidamente: determinar o domínio e a imagem, localizar os zeros, estudar o sinal e a monotonicidade e relacionar a expressão algébrica com a forma do gráfico. A comparação entre essas diferentes descrições será utilizada ao longo de todo o capítulo.

3.1. Funções afins

3.1 Definição

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = ax + b,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$. Quando $b = 0$, a função $f(x) = ax$ é chamada de **função linear**. É comum empregar informalmente a expressão “função linear” para toda função afim; aqui manteremos a distinção entre os dois casos.

A única função com taxa constante

Para uma função afim, a razão $\Delta y / \Delta x$ independe do intervalo escolhido. Quando essa razão varia com o intervalo, o limite do quociente incremental conduz à derivada, no capítulo de derivadas.

Uma propriedade característica das funções afins é a constância da taxa de variação. Com efeito, para quaisquer x e h ,

$$f(x + h) - f(x) = ah.$$

Se $h \neq 0$, segue que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a,$$

isto é, a razão entre a variação de f e a variação da variável é sempre a mesma.

A recíproca também é verdadeira. Suponha que exista um número real a tal que

$$f(x+h) - f(x) = ah$$

para todos os valores de x e h . Tomando $x = 0$, obtemos

$$f(h) = ah + f(0).$$

Portanto, com $b = f(0)$, temos necessariamente

$$f(h) = ah + b.$$

Assim, as funções afins são precisamente as funções cuja taxa de variação é constante.

O coeficiente $b = f(0)$ determina o ponto em que o gráfico intercepta o eixo vertical, enquanto a determina sua inclinação. Da própria fórmula segue que a função é crescente quando $a > 0$, decrescente quando $a < 0$ e constante quando $a = 0$. Se $a \neq 0$, sua imagem é $\mathbb{R}$ e a função é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Dados dois pontos distintos do gráfico, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , a função afim fica determinada. Seu coeficiente angular é

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

e então $b = y_1 - ax_1$. A fórmula expressa uma ideia importante: dois valores bastam para determinar uma dependência cuja taxa de variação é constante.

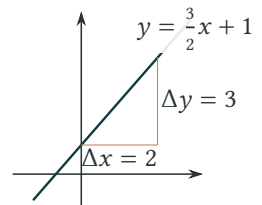


Figura 3.1. O coeficiente angular mede a razão $\Delta y/\Delta x$.

Exemplo 3.1.

A temperatura em graus Fahrenheit depende da temperatura em graus Celsius pela relação

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32.$$

Interprete os coeficientes e obtenha a conversão inversa.

◁

Solução. O termo 32 informa que 0°C corresponde a 32°F . O coeficiente $9/5$ significa que um aumento de 1°C produz um aumento de $9/5^\circ\text{F}$. Como a função é afim e seu coeficiente angular não é nulo, ela possui inversa. Isolando C em

$$F = \frac{9}{5}C + 32,$$

obtemos

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Em particular, 100°C correspondem a 212°F , e a fórmula inversa recupera 100 a partir de 212. ■

Em modelos aplicados, o domínio raramente é toda a reta. Se uma empresa cobra uma tarifa fixa de R\$ 4,80 e mais R\$ 2,70 por quilômetro percorrido, o custo é

$$C(x) = 4,80 + 2,70x, \quad x \geq 0.$$

Matematicamente, a expressão faz sentido para todo real; no modelo, porém, distâncias negativas não possuem significado. O termo constante representa o custo inicial, e o coeficiente de x representa o custo marginal por quilômetro.

3.1.1. Equações de retas

Uma função afim descreve o gráfico de toda reta não vertical. Se uma reta passa por $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m , então um ponto (x, y) pertence a ela precisamente quando

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Essa é a **forma ponto–inclinação** da equação da reta. Desenvolvendo a expressão, recuperamos a forma $y = mx + b$. Em particular, conhecer um ponto e a inclinação determina a reta.

Há, porém, retas que não são gráficos de funções de x . A reta vertical que passa por $(a, 0)$ tem equação

$$x = a.$$

Todos os seus pontos têm a mesma abscissa. Se tentássemos calcular sua inclinação usando dois pontos distintos, encontraríamos $\Delta x = 0$; a razão $\Delta y / \Delta x$ não estaria definida. Portanto, uma reta vertical **não possui coeficiente angular**. Isso não significa que sua inclinação seja zero: inclinação zero corresponde a uma reta horizontal.

Uma forma que inclui simultaneamente retas verticais e não verticais é

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Se $B \neq 0$, podemos isolar y e obter uma reta de coeficiente angular $-A/B$. Se $B = 0$, a equação representa uma reta vertical.

Duas retas não verticais distintas são **paralelas** quando têm o mesmo coeficiente angular. Duas retas verticais distintas também são paralelas. Já duas retas não verticais, de coeficientes angulares m_1 e m_2 , são **perpendiculares** quando

$$m_1 m_2 = -1.$$

Para justificar essa condição, translate o ponto de interseção para a origem e considere $A = (1, m_1)$ e $B = (1, m_2)$ sobre as duas retas. Pelo Teorema de Pitágoras e sua recíproca, o ângulo em $O = (0, 0)$ é reto se, e somente se,

$$OA^2 + OB^2 = AB^2.$$

Como

$$OA^2 = 1 + m_1^2, \quad OB^2 = 1 + m_2^2, \quad AB^2 = (m_1 - m_2)^2,$$

essa igualdade equivale a $m_1 m_2 = -1$. O caso que a fórmula não alcança deve ser registrado separadamente: toda reta vertical é perpendicular a toda reta horizontal.

3.1.2. Um primeiro olhar para a reta tangente

O coeficiente angular de uma reta é constante. Em uma curva, a direção pode mudar de ponto para ponto, mas ainda podemos perguntar qual é sua inclinação *na vizinhança* de um ponto. Essa pergunta conduz à reta tangente e, mais adiante, à derivada.

Considere $P = (x_0, f(x_0))$ no gráfico de f e um segundo ponto $Q_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, com $h \neq 0$. A reta que passa por P e Q_h é uma reta secante e tem coeficiente angular

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

À medida que Q_h se aproxima de P , observamos o comportamento dessas inclinações. Se elas se aproximam de um único número m , a reta que passa por P com coeficiente angular m é a **reta tangente** ao gráfico naquele ponto. Os limites tornarão precisa a expressão “se aproximam”; a derivada será justamente o número m .

Algumas curvas possuem uma tangente vertical. Nesse caso, as inclinações das secantes não se aproximam de um número real finito, e a tangente tem equação $x = x_0$; como toda reta vertical, ela não possui coeficiente angular real.

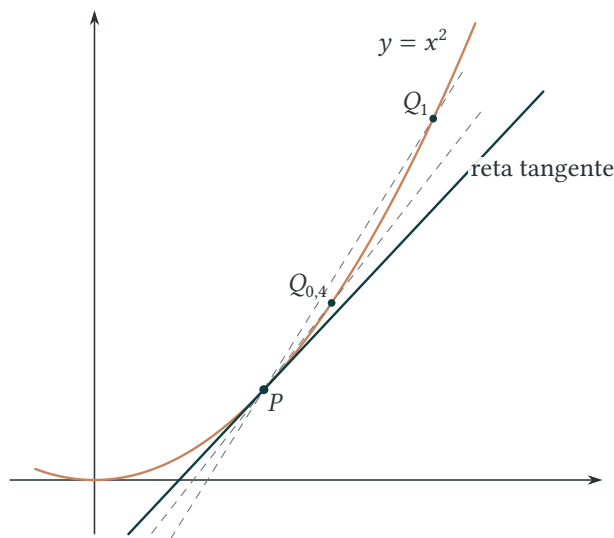


Figura 3.2. As retas secantes se aproximam da reta tangente quando o segundo ponto se aproxima de P .

Exemplo 3.2 — A inclinação da parábola em um ponto.

Para $f(x) = x^2$ e $P = (1, 1)$, o coeficiente angular da secante que passa por P e por $Q_h = (1 + h, (1 + h)^2)$ é

$$m_h = \frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = 2 + h, \quad h \neq 0.$$

Quando h se aproxima de zero, m_h se aproxima de 2. Assim, a reta tangente em $(1, 1)$ tem equação

$$y - 1 = 2(x - 1), \quad \text{ou seja,} \quad y = 2x - 1.$$

A curva não fica necessariamente toda de um mesmo lado da tangente: o que a caracteriza é a direção local obtida pelas secantes.

<

Exercícios

Ex. 3.1 Compare as inclinações e determine se as duas retas são paralelas, perpendiculares ou nenhuma das duas coisas.

1. A primeira passa por $(1, -2)$ e $(-3, -10)$; a segunda, por $(1, 5)$ e $(-1, 1)$.
2. A primeira passa por $(4, 6)$ e $(4, -2)$; a segunda, por $(-1, 5)$ e $(-1, 8)$.
3. A primeira passa por $(-2, 5)$ e $(4, 2)$; a segunda, por $(-1, -2)$ e $(3, 6)$.
4. A primeira passa por $(-1, -2)$ e $(3, 4)$; a segunda, por $(9, -6)$ e $(3, -2)$.

Ex. 3.2 Determine os parâmetros pedidos.

1. A reta que passa por $(-1, a)$ e $(3, -1)$ é paralela à reta que passa por $(3, 6)$ e $(-5, a + 2)$. Determine a .
2. A reta que passa por $(-2, 4)$ e $(1, a)$ é perpendicular à reta que passa por $(a + 4, 8)$ e $(3, -4)$. Determine a .
3. O ponto $(-5, k)$ pertence à reta que passa por $(1, 3)$ e é perpendicular a uma reta de coeficiente angular 3. Determine k .
4. Mostre que o triângulo de vértices $A = (-2, -8)$, $B = (2, 2)$ e $C = (-3, 4)$ é retângulo e identifique o vértice do ângulo reto.

Ex. 3.3 Considere as retas

$$r_i : a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

com $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ para cada i .

1. Mostre que elas têm a mesma direção se, e somente se, $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$. Explique como distinguir retas paralelas distintas de retas coincidentes.

2. Mostre que a reta que passa por $(a, 0)$ e $(0, b)$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pode ser escrita na forma segmentária

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ex. 3.4 Use secantes para antecipar uma reta tangente.

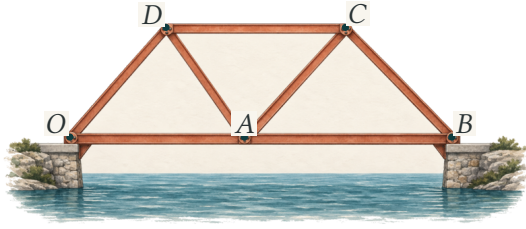
1. Para $f(x) = x^2$ e $P = (2, 4)$, calcule a inclinação da reta que passa por P e por $(2 + h, (2 + h)^2)$. Determine o número do qual essa inclinação se aproxima quando h se aproxima de zero e escreva a equação da reta tangente prevista por esse cálculo.

Ex. 3.5 Interprete o coeficiente angular em duas aplicações.

1. Um avião voa em linha reta com inclinação 0,22. Se ele ganha 1000 pés de altitude, qual é a distância horizontal percorrida?
2. Uma treliça de ponte tem nós

$$\begin{aligned} O &= (0, 0), & D &= (1, 75, 3), \\ A &= (3, 5, 0), & C &= (6, 3), \\ B &= (9, 5, 0). \end{aligned}$$

Determine as equações das retas que contêm as barras OD , AD , AC e BC . A ilustração é esquemática; use as coordenadas fornecidas.



3.2. Função módulo e definições por partes

O valor absoluto, introduzido como distância até a origem, também define uma função:

$$m(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

A função módulo é também o primeiro exemplo importante de uma função definida por partes. Essa notação não cria várias funções: ela apresenta uma única regra cuja expressão depende da região do domínio. Os intervalos devem cobrir todo o domínio pretendido, e as condições nas fronteiras precisam indicar sem ambiguidade qual expressão deve ser usada.

Seu domínio é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $[0, +\infty)$. A função decresce em $(-\infty, 0]$, cresce em $[0, +\infty)$ e não é injetora em $\mathbb{R}$, pois $m(x) = m(-x)$. O gráfico é obtido refletindo para cima a parte negativa da reta $y = x$.

As transformações estudadas anteriormente permitem ler a família

$$g(x) = a|x - h| + k, \quad a \neq 0.$$

O ponto (h, k) é o vértice do gráfico e a reta $x = h$ é seu eixo de simetria. Quando $a > 0$, a imagem é $[k, +\infty)$; quando $a < 0$, é $(-\infty, k]$. O valor $|a|$ controla a escala vertical.

Exemplo 3.3.

Uma peça deve medir 12 mm, com tolerância de 0,05 mm. Expresse a condição de aceitação usando módulo e determine os comprimentos admissíveis.

Valores nas junções

No ponto em que a expressão muda, o valor da função é dado pelo ramo cuja condição inclui esse ponto. No gráfico, ele aparece preenchido. Prolongar a expressão do outro ramo até a junção não determina o valor da função ali.

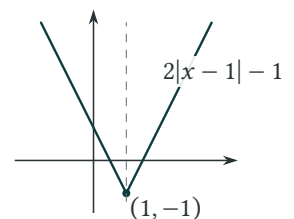


Figura 3.3. Translação e mudança de escala da função módulo.

Solução. Se x é o comprimento medido, seu erro absoluto em relação a 12 é $|x - 12|$. A peça é aceita quando

$$|x - 12| \leq 0,05.$$

Essa desigualdade afirma que a distância de x a 12 não ultrapassa 0,05. Portanto,

$$11,95 \leq x \leq 12,05.$$

O módulo e o intervalo são duas maneiras de registrar a mesma condição. ■

O mesmo princípio transforma posição em distância. Se a posição de uma partícula numa reta é $s(t) = 2t - 6$, sua distância até a origem é

$$d(t) = |s(t)| = |2t - 6|, \quad t \geq 0.$$

A partícula aproxima-se da origem até $t = 3$ e afasta-se depois desse instante. A mudança de comportamento corresponde ao vértice do gráfico de d .

Exercícios

Ex. 3.6 A tarifa de um estacionamento é R\$ 6,00 por partes e faça um esboço compatível com a cobrança na entrada e R\$ 3,50 por hora iniciada, até o limite diário de R\$ 34,00. Modele o preço por uma função definida por hora iniciada.

3.3. Funções quadráticas

3.2 Definição

Uma **função quadrática** é uma função da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Seu gráfico é uma parábola. A forma canônica permite obter diretamente da expressão algébrica o vértice, o eixo de simetria e a imagem. Para obtê-la, retomamos a técnica de completar o quadrado apresentada no Capítulo 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a(x - h)^2 + k, \end{aligned}$$

onde

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Por que completar quadrados?

Ao escrever $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$, isolamos um quadrado, e $(x - h)^2 \geq 0$. Assim, se $a > 0$, o menor valor ocorre quando $x = h$; se $a < 0$, ocorre o maior. Em ambos os casos, o ponto extremo é (h, k) .

A forma $a(x - h)^2 + k$ é chamada de **forma canônica**. Ela mostra que o vértice da parábola é (h, k) e que $x = h$ é seu eixo de simetria.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, k é seu valor mínimo e $\text{Im } f = [k, +\infty)$. Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo, k é o valor máximo e $\text{Im } f = (-\infty, k]$. Sem recorrer a derivadas, a simetria também mostra que a monotonicidade muda no vértice.

As três formas mais úteis de uma função quadrática destacam informações diferentes:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{forma geral}}, \quad \underbrace{a(x - h)^2 + k}_{\text{forma canônica}}, \quad \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada, quando há raízes reais}}.$$

A forma geral exhibe $f(0) = c$; a canônica, o vértice; a fatorada, as interseções reais com o eixo horizontal. Estas são duas se $\Delta > 0$, uma se $\Delta = 0$ e nenhuma se $\Delta < 0$.

Quando há duas raízes reais r_1 e r_2 , o eixo de simetria passa pelo ponto médio entre elas. Portanto,

$$h = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Assim, se as raízes já são conhecidas, encontramos a abscissa do vértice sem memorizar uma fórmula adicional. Quando as raízes não são conhecidas, completar o quadrado continua sendo o caminho mais direto para localizar o vértice.

Exemplo 3.4.

A altura, em metros, de um objeto lançado verticalmente é modelada por

$$h(t) = 2 + 12t - 5t^2,$$

onde t é medido em segundos. Determine a altura máxima e discuta o domínio fisicamente relevante.

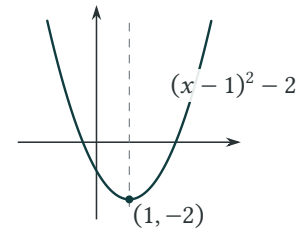
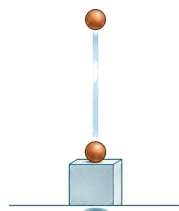


Figura 3.4. A forma canônica torna visíveis o vértice e o eixo de simetria.



Solução. Completando o quadrado,

$$h(t) = -5(t - 1,2)^2 + 9,2.$$

Como o coeficiente do termo quadrático é negativo, o vértice fornece o valor máximo. O objeto atinge 9,2 m no instante $t = 1,2$ s.

A fórmula algébrica está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, mas o modelo começa no lança-

mento, em $t = 0$, e termina quando o objeto alcança o solo. A raiz positiva de $h(t) = 0$ é

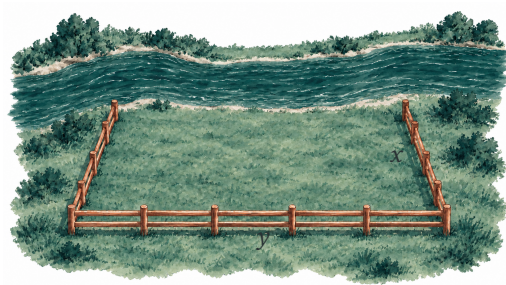
$$t = \frac{6 + \sqrt{46}}{5} \approx 2,56.$$

Assim, o domínio físico é aproximadamente $[0, 2,56]$. Valores anteriores ao lançamento ou posteriores ao impacto pertencem à parábola matemática, não ao fenômeno modelado. ■

Exemplo 3.5 — Cercando uma área.

A proprietária do Rancho Los Feliz dispõe de 3000 jardas de cerca para cercar um pasto retangular junto a um trecho retilíneo da margem de um rio. Não é necessário construir uma cerca ao longo do rio. Seja x a largura do retângulo, perpendicular à margem. Encontre uma função f da variável x que forneça a área do pasto, supondo que toda a cerca seja utilizada.

<



Solução. Se y é o comprimento do lado paralelo ao rio, a cerca é usada nos dois lados de largura x e no lado de comprimento y . Portanto,

$$2x + y = 3000, \quad \text{isto é,} \quad y = 3000 - 2x.$$

Como a área do retângulo é xy , obtemos

$$f(x) = x(3000 - 2x) = -2x^2 + 3000x, \quad 0 < x < 1500.$$

O intervalo indicado garante que as duas dimensões do pasto sejam positivas. ■

Exercícios

Ex. 3.7 Retome as funções afins, modulares e quadráticas.

t em minutos e T em graus Celsius. Interprete o coeficiente angular.

- Determine a função afim cujo gráfico passa por $(1, 3)$ e $(4, 9)$.
- A temperatura de um líquido é $T(t) = 20 + 3t$, com

- Duas funções têm vértice $(2, -1)$: uma é da forma $m(x) = a|x - 2| - 1$ e a outra, $q(x) = a(x - 2)^2 - 1$. Determine a em cada caso se o gráfico também passa por $(4, 7)$.

Exercícios

Ex. 3.8 Considere a função afim $f(x) = -3x + 7$.

1. Calcule $f(-2)$.
2. Determine o zero de f .
3. Resolva $f(x) = 16$.
4. Determine a função inversa de f .
5. Resolva a inequação $f(x) \geq 1$.

Ex. 3.9 Determine a função afim cujo gráfico passa pelos pontos $(-2, 5)$ e $(4, -7)$. Em seguida, determine sua interseção com cada eixo coordenado.

Ex. 3.10 Para $g(x) = 2|x + 1| - 3$:

1. escreva g como função definida por partes;
2. determine o vértice, o eixo de simetria e a imagem;
3. encontre os zeros;
4. resolva $g(x) \leq 1$.

Ex. 3.11 Considere $q(x) = -2x^2 + 8x - 5$.

1. Escreva q na forma canônica.
2. Determine o vértice, o eixo de simetria e a ima-

gem.

3. Encontre os zeros de q .

4. Resolva $q(x) \geq 0$.

Ex. 3.12 Duas empresas de transporte cobram, para uma viagem de x quilômetros,

$$\begin{aligned} A(x) &= 18 + 1,40x, \\ B(x) &= 6 + 1,90x, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

com os valores em reais.

1. Interprete os coeficientes de cada função.
2. Para qual distância os preços são iguais?
3. Em quais distâncias cada empresa é mais econômica?
4. Compare os preços para uma viagem de 40 km.

Ex. 3.13 Uma sala de espetáculos comporta 600 pessoas. Ao preço de p reais, estima-se uma procura de $600 - 20p$ ingressos, com $0 \leq p \leq 30$. Admita que todos os ingressos procurados sejam vendidos.

1. Escreva a receita $R(p)$.
2. Determine o preço que maximiza a receita e o número correspondente de ingressos vendidos.
3. Interprete os zeros do modelo.

Exercícios

Ex. 3.14 A altura, em metros, de um drone que decola do telhado é modelada por $h(t) = 12 + 4t - t^2$ durante os quatro primeiros segundos. Determine o domínio físico, a imagem nesse intervalo, o instante de maior altura e os instantes em que $h(t) = 15$.

3.4. Funções potência e raiz

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, a função potência de expoente n é

$$p_n(x) = x^n.$$

A distinção entre expoentes pares e ímpares decorre diretamente da igualdade

$$p_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n.$$

Se n é par, então $p_n(-x) = p_n(x)$. A função é, portanto, par e seus valores são não negativos. Além disso, para $0 \leq x < y$,

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) > 0.$$

Logo, p_n cresce em $[0, +\infty)$ e, pela simetria, decresce em $(-\infty, 0]$. Recordemos ainda que todo número real não negativo possui uma raiz n -ésima não negativa. Portanto, todo valor de $[0, +\infty)$ é atingido por p_n , e

$$\text{Im } p_n = [0, +\infty).$$

Se n é ímpar, então $p_n(-x) = -p_n(x)$, de modo que p_n é ímpar. Para $x < y$ de mesmo sinal, a mesma fatoração mostra que $x^n < y^n$; se $x < 0 < y$, a desigualdade é imediata. Portanto, p_n é estritamente crescente em toda a reta. Se $y > 0$, a existência da raiz n -ésima fornece um único $x > 0$ tal que $x^n = y$. Para $y < 0$, aplicamos o mesmo fato a $-y$ e usamos a paridade ímpar para obter uma única solução negativa. O valor 0 é atingido em $x = 0$. Assim,

$$\text{Im } p_n = \mathbb{R},$$

e p_n é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Essas mesmas propriedades determinam o aspecto global dos gráficos. Para expoentes pares, os dois extremos apontam para cima e o gráfico é simétrico em relação ao eixo vertical. Para expoentes ímpares, o extremo esquerdo aponta para baixo, o direito para cima, e o gráfico é simétrico em relação à origem.

As figuras comparam alguns representantes de cada caso.

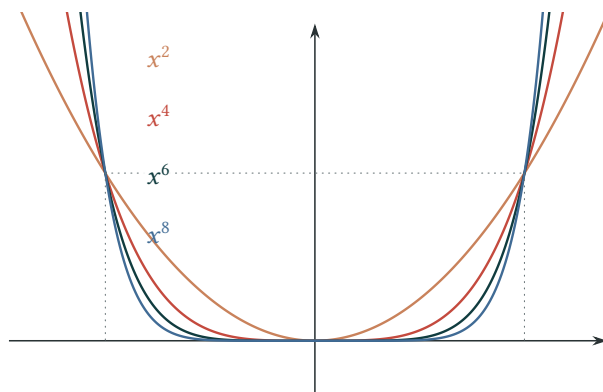


Figura 3.5. Comparação das potências x^n para expoentes pares.

Paridade e função raiz

Para n par, x e $-x$ têm a mesma potência. A função x^n só admite inversa após uma restrição de domínio; a escolha usual é $[0, \infty)$. Para n ímpar, x^n é estritamente crescente em toda a reta e sua inversa está definida em $\mathbb{R}$.

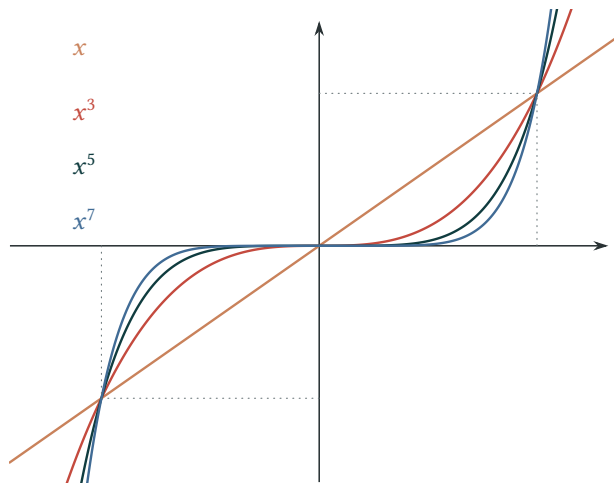


Figura 3.6. Comparação das potências x^n para expoentes ímpares.

As funções raiz aparecem como inversas dessas potências. Para entender a restrição necessária quando n é par, considere primeiro $x \mapsto x^2$ em $\mathbb{R}$. Uma saída positiva não determina uma entrada única: por exemplo, $2^2 = (-2)^2 = 4$. Portanto, essa função não é injetora e não pode ser invertida em toda a reta.

Ao restringirmos o domínio a $[0, +\infty)$, cada valor não negativo passa a ter uma única origem. A função $x \mapsto x^n$, para n par, torna-se então uma bijeção de $[0, +\infty)$ em $[0, +\infty)$, cuja inversa é

$$r_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0.$$

Para n ímpar, a potência já é estritamente crescente e bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, de modo que nenhuma restrição é necessária. Nesse caso, $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida para todo real. Em ambos os casos, os gráficos da potência restringida e da raiz correspondente são simétricos em relação à reta $y = x$.

No caso da raiz quadrada, essa simetria dá uma leitura direta do gráfico de $y = \sqrt{x}$: ele é o reflexo, em relação à reta $y = x$, do ramo da parábola $y = x^2$ correspondente a $x \geq 0$. Por isso o gráfico começa em $(0, 0)$, fica na região $x \geq 0, y \geq 0$, passa por pontos como $(1, 1)$, $(4, 2)$ e $(9, 3)$ e é crescente em todo o seu domínio. À medida que x aumenta, são necessários acréscimos cada vez maiores em x para produzir o mesmo acréscimo em $\sqrt{x}$; geometricamente, o gráfico vai se tornando mais horizontal.

A raiz desfaz a potência com o domínio correto

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

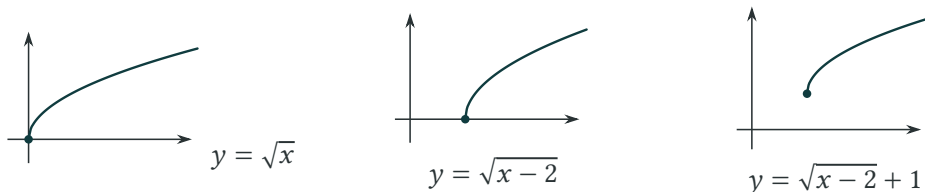
e não necessariamente x . Já $(\sqrt{x})^2 = x$ para $x \geq 0$. A diferença vem do fato de que a raiz quadrada representa sempre a raiz não negativa.

Exemplo 3.6.

A função

$$g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

é construída em duas etapas a partir de $y = \sqrt{x}$:



Primeiro, a troca de x por $x-2$ desloca o gráfico duas unidades para a direita e leva o ponto inicial de $(0,0)$ a $(2,0)$. Depois, a soma de 1 desloca o gráfico uma unidade para cima e leva esse ponto a $(2,1)$. Assim, o domínio de g é $[2, +\infty)$ e sua imagem é $[1, +\infty)$.

◀

Exercícios

Ex. 3.15

Retome as funções potência e raiz.

inversa e seu domínio.

1. Determine o domínio e a imagem de $p(x) = x^4$ e de $r(x) = \sqrt[3]{x}$.
2. Para $h(x) = \sqrt{x+1} - 2$, determine o domínio, a imagem e o zero. Descreva as translações a partir de $y = \sqrt{x}$.
3. Restrinja $p(x) = x^4$ ao domínio $[0, +\infty)$ e tome sua imagem como contradomínio. Determine a

Ex. 3.16

Em estudos de alometria, uma relação aproximada entre a massa corporal M de um animal e sua taxa metabólica B é

$$B(M) = B_0 M^{3/4},$$

em que $B_0 > 0$ é uma constante. Compare $B(16M)$ com $B(M)$ e compare também as taxas metabólicas por unidade de massa, $B(16M)/(16M)$ e $B(M)/M$.

Exercícios

Ex. 3.17

gem de

Determine o domínio natural e a ima- Justifique algebricamente sua resposta.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}.$$

3.5. Funções polinomiais

As funções afins e quadráticas são os primeiros casos de uma família mais ampla. Polinômios são construídos por somas de potências inteiras não negativas e, por isso, estão definidos em toda a reta real.

As **funções polinomiais** são as funções da forma

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

em que $c_0, c_1, \dots, c_n$ são números reais chamados **coeficientes** do polinômio; $n \in \mathbb{N}$ é um número natural que, se $c_n \neq 0$, é chamado de grau do polinômio. As funções polinomiais possuem como domínio natural de definição a totalidade de $\mathbb{R}$ ainda que frequentemente nos interessará estudar uma função polinomial em um intervalo. A soma, o produto e a composição de funções polinomiais continuam sendo polinomiais. O quociente será estudado separadamente, pois os zeros do denominador introduzem restrições no domínio.

Antes de desenhar um gráfico polinomial, há duas informações que podem ser lidas diretamente na expressão. A primeira vem do termo de maior grau. Se

$$P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

então, para valores de x muito afastados da origem, o termo c_nx^n predomina sobre os demais. Assim, a paridade de n determina se os dois extremos do gráfico apontam no mesmo sentido ou em sentidos opostos, enquanto o sinal de c_n determina qual desses sentidos é para cima. Essa descrição intuitiva será formalizada no estudo de limites.

A segunda informação vem dos zeros. Um número real r é um **zero**, ou uma **raiz**, de P quando $P(r) = 0$. A relação entre raízes e fatores é expressa pelo resultado seguinte.

3.7 Proposição Teorema do fator

O número r é raiz de P se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - r$.

Demonstração. Dividindo $P(x)$ por $x - r$, obtemos

$$P(x) = (x - r)Q(x) + s,$$

onde o resto s é constante. Substituindo $x = r$, encontramos $P(r) = s$. Logo, o resto é zero exatamente quando r é raiz. ■

Se

$$P(x) = (x - r)^m Q(x), \quad Q(r) \neq 0,$$

dizemos que r é uma raiz de **multiplicidade** m . Uma raiz de multiplicidade ímpar faz o sinal do polinômio mudar quando atravessamos r ; geometricamente, o gráfico cruza o eixo horizontal. Em uma raiz de multiplicidade par, o sinal não muda e o

Por que o termo de maior grau domina?

Se $p(x) = a_nx^n + \dots + a_0$, podemos fatorar a_nx^n : os demais termos aparecem multiplicados por $1/x, 1/x^2, \dots$. Para $|x|$ grande, essas razões ficam pequenas; por isso a_nx^n determina o comportamento das pontas do gráfico.

gráfico apenas toca esse eixo. A justificativa formal de que o fator $Q(x)$ conserva seu sinal perto de r virá com a continuidade; a diferença entre potências pares e ímpares já torna o comportamento visível.

As funções polinomiais de grau 1 ou 2 têm gráficos conhecidos: retas, no primeiro caso, parábolas no segundo. Em graus maiores, termo dominante, raízes, multiplicidades e a interseção $(0, c_0)$ fornecem o esqueleto do gráfico, mas não determinam ainda todos os seus detalhes. As derivadas permitirão localizar posteriormente máximos, mínimos e mudanças de concavidade. As três funções a seguir mostram como polinômios do mesmo grau podem ter comportamentos diferentes.

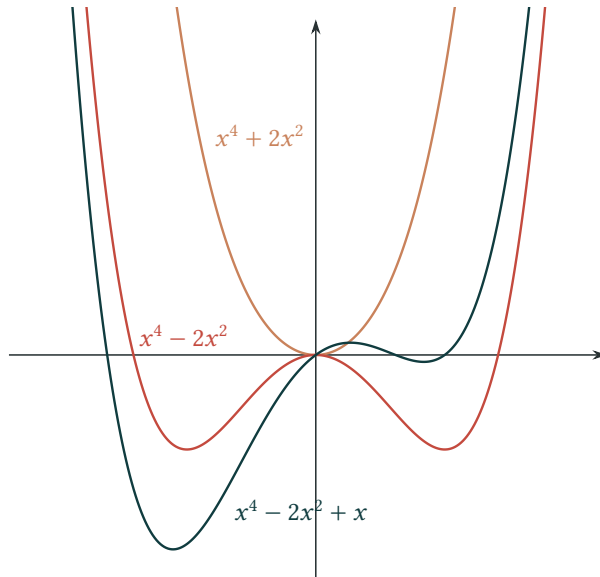


Figura 3.7. Comportamentos possíveis de funções polinomiais de quarto grau.

Nos três casos, o grau é par e o coeficiente dominante é positivo; por isso, os dois extremos dos gráficos apontam para cima. As informações da expressão permitem reconstruir o esboço de um deles.

Exemplo 3.8.

Descreva o esboço geral de $P(x) = x^4 - 2x^2$, sem recorrer a derivadas.

◁

Solução. O domínio é $\mathbb{R}$. Fatorando,

$$P(x) = x^2(x^2 - 2) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

As raízes $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são simples; a raiz 0 tem multiplicidade 2 e fornece também a interseção com o eixo vertical. Fora de 0, o fator x^2 é positivo. Assim, $P(x) > 0$ quando $|x| > \sqrt{2}$ e $P(x) < 0$ quando $0 < |x| < \sqrt{2}$.

O gráfico, portanto, atravessa o eixo horizontal em $\pm\sqrt{2}$ e o toca em 0, permanecendo abaixo dele nos dois lados próximos da origem. Como $P(-x) = P(x)$, há simetria em relação ao eixo vertical. Por fim, o termo x^4 faz os dois extremos apontarem para cima. Essas informações explicam o esboço da figura; não localizam, por si sós, todos

os seus máximos e mínimos. ■

O primeiro polinômio da figura,

$$x^4 + 2x^2 = x^2(x^2 + 2),$$

tem como única raiz real 0, com multiplicidade 2; já

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2 + x - 1)$$

possui quatro raízes reais simples; por isso, atravessa o eixo em cada uma delas. A fatoração explica boa parte da diferença entre os três desenhos.

Exercícios

Ex. 3.18 Use a fatoração para descrever o esboço geral.

1. Para $P(x) = -(x+1)^2(x-2)$, determine o grau, as raízes e suas multiplicidades, $P(0)$ e o sentido dos dois extremos do gráfico. Em qual raiz o gráfico

cruza o eixo horizontal?

2. Fatore $Q(x) = x^3 - 4x$. Encontre os zeros, determine o sinal entre eles e descreva a simetria e os extremos do gráfico.

3.6. Funções racionais

Uma **função racional** é um quociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

em que p e q são polinômios e q não é identicamente nulo.¹ Seu domínio natural exclui precisamente os zeros reais do denominador. Se $Z(q) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$, então

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus Z(q).$$

São exemplos de funções racionais

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^4 + x^3 - 2x - 1}, \quad \frac{3}{x^2}, \quad \frac{5x^5 - 3x^3 + x}{x^4}.$$

A fatoração de p e q fornece as primeiras informações sobre o gráfico. Um zero do numerador que não anule o denominador é um zero da função. Um zero do denominador, por sua vez, não pertence ao domínio. Se o mesmo fator ocorre no numerador e no denominador, o cancelamento simplifica a expressão, mas não restitui o ponto excluído. Se um fator permanece no denominador após a simplificação, os valores da função podem crescer em módulo nas proximidades de sua raiz.

Zeros, pontos ausentes e assíntotas verticais podem, portanto, ser estudados a partir da fatoração do numerador e do denominador.

Cancelamento e comportamento do gráfico

Considere um zero do denominador original. Após cancelar todos os fatores comuns, se o denominador não se anula nesse ponto, há uma lacuna removível; se ainda se anula, há uma assíntota vertical. O ponto permanece fora do domínio original em ambos os casos.

¹Quando q é constante e não nulo, o quociente também é uma função polinomial.

Pontos excluídos e comportamento lateral

A determinação do domínio deve preceder a construção do gráfico. Considere

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, temos $f(x) = x + 1$ sempre que $x \neq 1$. O cancelamento simplifica a expressão, mas não devolve ao domínio o ponto que foi excluído: em $x = 1$, a expressão original continua sem sentido. Assim, o gráfico é a reta $y = x + 1$ com um ponto ausente em $(1, 2)$.

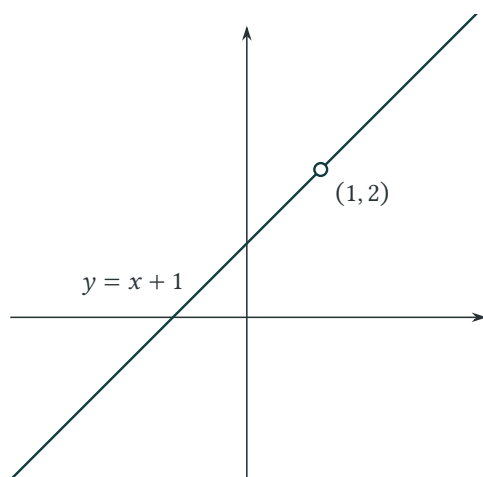


Figura 3.8. Um buraco removível: o valor ausente é indicado pelo círculo vazio.

Quando x assume valores cada vez mais próximos de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos de 2. Diremos, informalmente, que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de 1 é 2. O buraco é chamado **removível** porque bastaria definir $f(1) = 2$ para completá-lo.

Nem todo ponto excluído produz um buraco removível. Os gráficos de funções racionais podem ter formas globais muito diferentes. Um comportamento recorrente, que será formalizado no estudo de limites, já aparece em $f(x) = 1/x$:

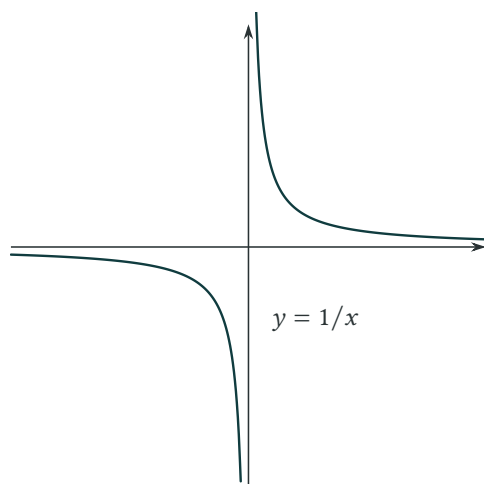


Figura 3.9. Comportamento típico de uma função racional.

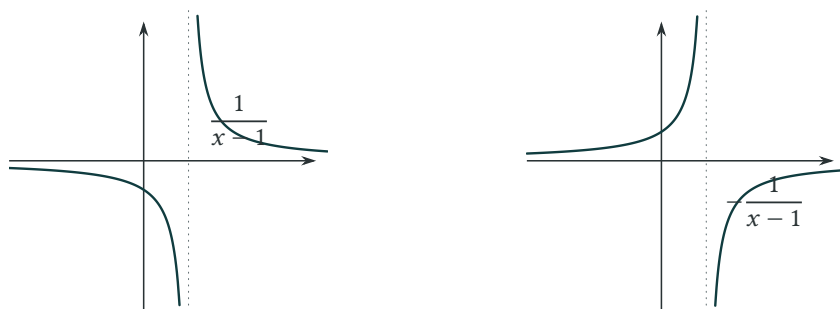
O gráfico é uma hipérbole equilátera com centro na origem. Quando x se aproxima de 0 pela direita, $1/x$ cresce sem limite; pela esquerda, decresce sem limite. Os dois ramos ficam cada vez mais próximos da reta vertical $x = 0$. Já quando $|x|$ cresce, os valores de $1/x$ se aproximam de 0, e o gráfico se aproxima da reta horizontal $y = 0$.

Chamamos $x = 0$ de **assíntota vertical** e $y = 0$ de **assíntota horizontal**. Essa descrição ainda é intuitiva: os limites darão um significado preciso a “aproximar-se”. Outras funções racionais podem possuir assíntotas oblíquas, isto é, retas que não são verticais nem horizontais.

O sinal também importa. Em $x = 1$, por exemplo, as funções

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{1}{x-1}$$

não apresentam o mesmo comportamento dos dois lados: de um lado os valores crescem sem limite e, do outro, decrescem sem limite. A troca de sinal inverte os dois comportamentos. Para f , o denominador é negativo à esquerda de 1 e positivo à direita: por exemplo, $f(0,9) = -10$ e $f(1,1) = 10$. Ao aproximarmos ainda mais x de 1, o módulo desses valores aumenta sem limite, mantendo o sinal correspondente a cada lado. Para g , os sinais são trocados.

**Figura 3.10.** Comportamentos laterais invertidos pela troca de sinal.

Já em $1/(x-1)^2$, os valores crescem sem limite dos dois lados de 1. Também aqui não há aproximação a um valor real finito, mas o comportamento é o mesmo dos dois lados. Esses exemplos mostram por que é necessário dizer *por qual lado* x se aproxima do ponto.

Esboço de gráficos racionais

Os gráficos de funções racionais podem apresentar formas bastante distintas. Ainda assim, algumas informações organizam seu esboço:

1. Quais pontos são excluídos do domínio por anularem o denominador?

2. Após cancelar os fatores comuns, quais pontos excluídos correspondem a buracos e quais correspondem a assíntotas verticais?
3. Onde estão as interseções com os eixos?
4. Em quais intervalos a função é positiva ou negativa?
5. O que acontece quando x assume valores positivos ou negativos de módulo muito grande?

Exemplo 3.9.

Use o roteiro para esboçar o gráfico de $f(x) = x/(x+1)$.

<

Solução. O denominador se anula apenas em -1 , de modo que o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Não há fator comum para cancelar e não há buraco removível. Reescrevemos a função como

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

A segunda forma mostra como obter seu gráfico a partir de $y = 1/x$: uma translação de uma unidade para a esquerda, seguida de uma reflexão no eixo x e de uma translação de uma unidade para cima.

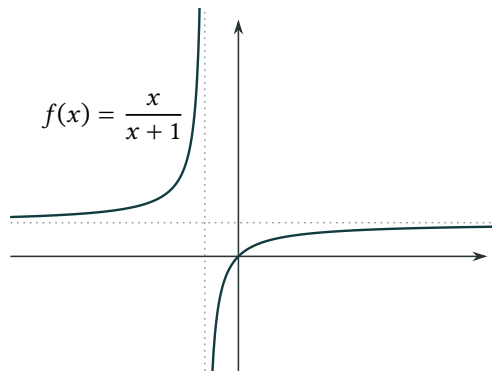


Figura 3.11. Gráfico de $f(x) = x/(x+1)$ e suas assíntotas.

O gráfico passa pela origem, sua única interseção com os eixos, e as retas $x = -1$ e $y = 1$ são suas assíntotas. Comparando os sinais de x e $x+1$, obtemos $f(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$, enquanto $f(x) < 0$ em $(-1, 0)$.

Pela forma $1 - 1/(x+1)$, quando x se aproxima de -1 pela esquerda, $f(x)$ cresce sem limite; pela direita, decresce sem limite. Quando x se afasta muito da origem, $1/(x+1)$ fica próximo de zero. Assim, $f(x)$ se aproxima de 1, por valores maiores que 1 à esquerda e menores que 1 à direita. O esboço reúne essas informações. ■

O comportamento distante também pode ser lido algebricamente. Se o grau do numerador é menor que o do denominador, o quociente se aproxima de 0 para valores de $|x|$ muito grandes. Se os graus são iguais, ele se aproxima da razão entre os coeficientes dominantes. Quando o grau do numerador é uma unidade maior, a divisão

polinomial revela uma assíntota oblíqua. Mais geralmente, essa divisão separa uma parte polinomial de uma fração que se torna pequena quando $|x|$ cresce.

Por exemplo,

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}.$$

O domínio exclui -1 e 1 , que produzem assíntotas verticais. Para valores de $|x|$ muito grandes, a segunda parcela fica próxima de 0 ; por isso, o gráfico se aproxima de $y = 1$. A determinação completa do gráfico não é necessária para essa análise. Domínio, fatoração e divisão algébrica já fornecem uma parte considerável de sua forma global.

Exemplo 3.10 — Duas assíntotas verticais e comportamento no infinito.

Estude os elementos principais do gráfico de

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}.$$

Determine o domínio, as interseções com os eixos, as assíntotas e o sinal da função.

◁

Solução. Começamos pelo denominador:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Não há fatores comuns com o numerador. Portanto,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$$

e os dois pontos excluídos produzem candidatos a assíntotas verticais. Como o numerador vale -3 em $x = -2$ e 5 em $x = 2$, não ocorre cancelamento; assim,

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = 2$$

são assíntotas verticais.

A interseção com o eixo horizontal é obtida anulando o numerador:

$$2x + 1 = 0,$$

de modo que o gráfico cruza o eixo x em $(-1/2, 0)$. Para $x = 0$,

$$f(0) = -\frac{1}{4},$$

e portanto $(0, -1/4)$ é a interseção com o eixo vertical.

Para estudar o sinal, usamos os três pontos em que numerador ou denominador mudam de sinal:

$$-2, \quad -\frac{1}{2}, \quad 2.$$

Da comparação dos fatores $2x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, obtemos

$$f(x) < 0 \quad \text{em} \quad (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

e

$$f(x) > 0 \quad \text{em} \quad \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

Esse quadro de sinais também esclarece o comportamento junto às assíntotas. Perto de $x = -2$, os valores decrescem sem limite pela esquerda e crescem sem limite pela direita. Perto de $x = 2$, decrescem sem limite pela esquerda e crescem sem limite pela direita.

Resta observar o que acontece longe da origem. O denominador tem grau 2, enquanto o numerador tem grau 1. Dividindo numerador e denominador por x^2 , obtemos

$$f(x) = \frac{2/x + 1/x^2}{1 - 4/x^2}.$$

Para valores de $|x|$ muito grandes, as frações $1/x$ e $1/x^2$ tornam-se pequenas. Assim, $f(x)$ aproxima-se de 0, e

$$y = 0$$

é uma assíntota horizontal.

O esboço pode agora ser construído sem uma tabela extensa de valores: domínio, interseções, sinais e assíntotas já determinam sua forma essencial. ■

Exemplo 3.11 — Uma assíntota oblíqua.

Determine as assíntotas e descreva o comportamento global de

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

<

Solução. O domínio é

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Como o numerador vale 2 em $x = 1$, não há cancelamento. Logo,

$$x = 1$$

é uma assíntota vertical.

Neste caso o grau do numerador é uma unidade maior que o grau do denominador. A divisão polinomial fornece

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Essa escrita separa duas partes com papéis distintos. A reta

$$y = x + 1$$

descreve o comportamento dominante, enquanto o termo

$$\frac{2}{x - 1}$$

torna-se pequeno quando $|x|$ cresce. Portanto, à medida que nos afastamos da origem, o gráfico de g se aproxima cada vez mais da reta $y = x + 1$. Essa reta é uma **assíntota oblíqua**.

A mesma decomposição permite ler de que lado da reta o gráfico se encontra. Se $x > 1$, então $2/(x-1) > 0$, e portanto

$$g(x) > x + 1.$$

Se $x < 1$, então $2/(x-1) < 0$, e

$$g(x) < x + 1.$$

Assim, o ramo à direita de $x = 1$ permanece acima da assíntota oblíqua, e o ramo à esquerda permanece abaixo dela.

Perto da assíntota vertical, o sinal do termo $2/(x-1)$ domina: quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $g(x)$ decresce sem limite; quando se aproxima pela direita, $g(x)$ cresce sem limite.

Finalmente, $x^2 + 1$ nunca se anula para $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a função não possui zeros reais. Sua interseção com o eixo vertical é

$$g(0) = -1.$$

Mais uma vez, a divisão algébrica fornece informação geométrica: ela não serve apenas para efetuar um cálculo, mas revela diretamente a reta que governa o gráfico longe da origem. ■

Exemplo 3.12 — Um buraco e uma assíntota na mesma função.

Determine o domínio, a imagem e as assíntotas de

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}.$$

Descreva o gráfico a partir de uma expressão mais simples.

◁

Solução. Fatorando antes de cancelar, encontramos

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}, \quad x \neq 3, -2.$$

No domínio original,

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

O gráfico é o de $y = 1/x$ deslocado duas unidades para a esquerda e uma para cima, com um ponto retirado. A reta $x = -2$ permanece como assíntota vertical; em $x = 3$, porém, a expressão simplificada teria o valor $1 + 1/5 = 6/5$. Há, portanto, um buraco em $(3, 6/5)$, não uma segunda assíntota vertical. A assíntota horizontal é $y = 1$.

Para determinar a imagem, resolvemos

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

O valor $y = 1$ é impossível. Para $y \neq 1$, há uma única entrada candidata,

$$x = \frac{1}{y-1} - 2.$$

Ela nunca é -2 , mas é igual a 3 precisamente quando $y = 6/5$. Assim, retirar $x = 3$ também retira esse valor da imagem:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, \quad \text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{1, 6/5\}.$$

A fatoração distingue os dois pontos excluídos, e a equação em y permite verificar que não há outros valores ausentes na imagem. ■

Exercícios

Ex. 3.19 Descreva os pontos excluídos e o comportamento dos gráficos.

1. Simplifique $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, mantendo o domínio original. Qual é o ponto ausente? De que valor $g(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 2 por cada lado?
2. Para $h(x) = (x + 1)/(x - 2)$, encontre o domínio,

as interseções com os eixos e as assíntotas. Descreva os sinais e o comportamento dos dois lados de 2 e esboce o gráfico.

3. Compare o comportamento de $j(x) = -1/(x-2)^2$ dos dois lados de 2. O que acontece quando x assume valores positivos ou negativos de módulo muito grande?

Exercícios

Ex. 3.20 A pressão P , em kPa, de um gás mantido a temperatura constante e seu volume V , em litros, satisfazem $PV = 720$. Determine a pressão quando o volume passa de 12 L para 8 L e calcule a variação percentual de P .

Exercícios

Ex. 3.21 Sejam $f(x) = 1/(x - 2)$ e $g(x) = x^2 + 1$.

1. Determine $f \circ g$ e $g \circ f$, com seus domínios.

2. Determine a imagem de $g \circ f$.

3. Explique por que o valor 1 não é atingido por $g \circ f$, embora g atinja esse valor.

4

Funções exponenciais e logarítmicas

Neste capítulo

4.1 Da potência à função exponencial	75
4.2 Variação multiplicativa e modelos exponenciais	79
4.3 Função logarítmica	80
4.4 Propriedades dos logaritmos	82
4.5 Escalas logarítmicas e aplicações	86

Embora mudada, ressurgiu a mesma.

Jakob Bernoulli

As funções estudadas até aqui foram construídas principalmente a partir de somas, produtos, potências inteiras e raízes. Nas funções exponenciais, a base é mantida fixa e a variável ocupa o expoente. Essa diferença, embora simples na escrita, produz um comportamento distinto daquele observado nas funções potência. Compare, por exemplo,

$$x^2 \quad \text{e} \quad 2^x.$$

A função exponencial descreve uma variação de natureza multiplicativa. Sua inversão conduz à função logarítmica: determinar x a partir de uma igualdade da forma $a^x = y$ significa determinar o logaritmo de y na base a . As propriedades das duas funções decorrem, em grande parte, das mesmas leis das potências.

4.1. Da potência à função exponencial

Anteriormente foram construídas as potências de expoentes inteiros e racionais e admitida, para bases positivas, sua extensão aos expoentes reais. Essa extensão será agora tomada como ponto de partida para o estudo da função $x \mapsto a^x$. Continuam válidas as propriedades

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a > 0.$$

Potência e exponencial

Em x^a , o expoente é fixo e a base varia; em a^x , a base é fixa e o expoente varia. Por exemplo, x^2 é uma função potência, enquanto 2^x é exponencial. As restrições de domínio devem ser examinadas em cada caso.

4.1 Definição Função exponencial

Fixe $a > 0$, com $a \neq 1$. A **função exponencial de base a** é

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty), \quad f(x) = a^x.$$

Quatro fatos orientam a leitura de qualquer gráfico exponencial:

1. $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $a^0 = 1$, portanto o gráfico passa por $(0, 1)$;
3. se $a > 1$, a função é estritamente crescente;
4. se $0 < a < 1$, a função é estritamente decrescente.

O valor da base determina o sentido da variação. Para $a > 1$, a função é crescente; para $0 < a < 1$, é decrescente. Em ambos os casos, seus valores são positivos e o gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$.

Se $y > x$, então $a^y/a^x = a^{y-x}$; esse quociente é maior que 1 quando $a > 1$ e está entre 0 e 1 quando $0 < a < 1$, o que explica, respectivamente, o crescimento e o decrescimento.

Usaremos também um fato sobre essa extensão das potências, admitido aqui sem demonstração: todo número positivo é atingido por $x \mapsto a^x$. Portanto,

$$\text{Im}(x \mapsto a^x) = (0, +\infty).$$

A monotonicidade garante que cada valor é atingido *no máximo uma vez*; a afirmação sobre a imagem garante que todo valor positivo é atingido. Juntas, essas duas propriedades permitem inverter a função exponencial.

Geometricamente, o segundo caso é uma reflexão do primeiro. Se $0 < a < 1$, então $1/a > 1$ e

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Assim, uma exponencial de base menor que 1 é obtida refletindo horizontalmente uma exponencial de base maior que 1.



Figura 4.1. Para $a > 1$, a^x cresce; para $0 < a < 1$, decresce. Em ambos os casos, o gráfico permanece acima do eixo horizontal e passa por $(0, 1)$.

O eixo x funciona como assíntota horizontal. Quando $a > 1$, os valores de a^x tornam-se muito pequenos para x negativo e muito grandes para x positivo. Para $0 < a < 1$, os papéis se invertem. A linguagem de limites tornará essas afirmações precisas mais adiante.

Exemplo 4.1 — Comparando a^x e a^{-x} .

Fixe $a > 0$, $a \neq 1$. Compare os gráficos de a^x e a^{-x} .

<

Solução. Substituir x por $-x$ reflete um gráfico em relação ao eixo y . Portanto, os gráficos de

$$f(x) = a^x \quad \text{e} \quad g(x) = a^{-x} = f(-x)$$

são simétricos em relação a esse eixo e se encontram em $(0, 1)$. Se $a > 1$, f é crescente e g é decrescente; se $0 < a < 1$, ocorre o contrário. ■

4.1.1. Transformações do gráfico exponencial

Para

$$F(x) = A a^{B(x-h)} + k, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0,$$

o parâmetro h produz uma translação horizontal, k uma translação vertical, A controla a escala vertical e seu sinal pode refletir o gráfico, enquanto B altera a escala horizontal.

Há uma diferença importante em relação aos polinômios: como $a^{B(x-h)} > 0$, a função nunca cruza a reta $y = k$. Essa reta é a assíntota horizontal do gráfico transformado.

Exemplo 4.2.

Determine domínio, imagem e assíntota horizontal de

$$f(x) = 2^{x-1} + 3.$$

Descreva seu gráfico a partir de $y = 2^x$.

<

Solução. Temos $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Como $2^{x-1} > 0$, segue $f(x) > 3$, e todo valor maior que 3 é atingido. Logo,

$$\text{Im } f = (3, +\infty).$$

O gráfico de $y = 2^x$ é deslocado uma unidade para a direita e três para cima; a assíntota horizontal passa de $y = 0$ para $y = 3$. ■

Exemplo 4.3 — Reflexões, escalas e deslocamentos.

Considere

$$f(x) = 4 - 3 \cdot 2^{-2(x-1)}.$$

Descreva seu gráfico a partir de $y = 2^x$ e determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota horizontal.

◁

Solução. A expressão é construída em etapas: de x passamos a $-2(x-1)$, aplicamos a exponencial, multiplicamos por -3 e somamos 4. Para acompanhar o gráfico sem confundir os deslocamentos, tome um ponto $(t, 2^t)$ da curva original. Como $t = -2(x-1)$ equivale a $x = 1 - t/2$, o ponto correspondente no novo gráfico é

$$\left(1 - \frac{t}{2}, 4 - 3 \cdot 2^t\right).$$

Na horizontal há uma reflexão, uma redução das distâncias por fator $1/2$ e um deslocamento de uma unidade para a direita. Na vertical há uma reflexão, uma ampliação por fator 3 e um deslocamento de quatro unidades para cima. Por exemplo,

$$(0, 1) \mapsto (1, 1), \quad (2, 4) \mapsto (0, -8), \quad (-2, 1/4) \mapsto (2, 13/4).$$

O domínio é $\mathbb{R}$. A potência assume todos os valores positivos; multiplicar por -3 e somar 4 produz exatamente os valores menores que 4. Assim, $\text{Im } f = (-\infty, 4)$.

Quando x aumenta, $-2(x-1)$ diminui e a potência de 2 também diminui. A multiplicação por -3 inverte novamente a desigualdade: f é estritamente crescente. Para valores positivos cada vez maiores de x , a potência se aproxima de zero, e $f(x)$ se aproxima de 4 por baixo. A assíntota horizontal é, portanto, $y = 4$. ■

Exercícios

Ex. 4.1 Para cada função, determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota horizontal.

1. $f(x) = 3^x$.

2. $g(x) = (1/4)^x$.

3. $h(x) = 2^{x+2} - 1$.

4. $q(x) = 5 - 3^{-x}$.

Ex. 4.2 Mostre que $a^{-x} = 1/a^x$ e use isso para explicar a simetria entre os gráficos de a^x e a^{-x} .

Exercícios

Ex. 4.3 Para $f(x) = (3/2)^x$, calcule $f(-2)$, $f(0)$ e $f(3)$ e use os valores para confirmar a monotonicidade da função.

Ex. 4.4 Compare 2^x e 4^x nos casos $x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$.

Ex. 4.5 Resolva sem usar logaritmos:

$$2^x = \frac{1}{8}.$$

Ex. 4.7 Descreva as transformações que levam $y = 2^x$ ao gráfico de

$$h(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 4$$

Ex. 4.6 Determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota horizontal de

$$g(x) = -2^x.$$

4.2. Variação multiplicativa e modelos exponenciais

Uma função afim acrescenta sempre a mesma quantidade quando a variável cresce uma unidade. Uma função exponencial, em contraste, multiplica sempre pelo mesmo fator:

$$a^{x+1} = a \cdot a^x.$$

Se uma grandeza Q é multiplicada por um fator $r > 0$ a cada unidade de tempo, um modelo exponencial natural é

$$Q(t) = Q_0 r^t.$$

Se $r > 1$, temos crescimento; se $0 < r < 1$, temos decaimento.

Exemplo 4.4 — Crescimento por duplicação.

Uma cultura contém inicialmente 250 bactérias e dobra a cada 3 horas. Construa um modelo exponencial e determine a população após 12 horas.

<

Solução. Em t horas ocorrem $t/3$ períodos de duplicação. Assim,

$$N(t) = 250 \cdot 2^{t/3}, \quad t \geq 0.$$

Logo,

$$N(12) = 250 \cdot 2^4 = 4000.$$

O modelo supõe recursos e espaço suficientes; não deve ser extrapolado indefinidamente. ■

Exercícios

Ex. 4.8 Uma população inicial de 1200 indivíduos cresce 8% ao ano. Escreva o modelo e calcule a população prevista após cinco anos.

Ex. 4.9 Uma substância perde 12% de sua massa a cada hora. Se a massa inicial é 50 g, determine a massa prevista após seis horas.

Ex. 4.10 Duas populações são modeladas por

$$A(t) = 1000(1,05)^t, \quad B(t) = 1500(1,02)^t.$$

Explique por que descobrir quando $A(t) = B(t)$ é um problema inverso da exponenciação.

Exercícios

Ex. 4.11 Uma grandeza exponencial satisfaz $Q(0) = 80$ e $Q(3) = 640$. Sabendo que o fator multiplicativo é constante a cada unidade de tempo, determine $Q(t)$.

Ex. 4.12 Qual dos modelos abaixo representa variação exponencial? Explique.

$$A(t) = 100 + 20t, \quad B(t) = 100(1,2)^t.$$

4.3. Função logarítmica

Considere a equação

$$2^x = 10.$$

Não há uma potência inteira de 2 igual a 10, mas a função 2^x é estritamente crescente e sua imagem é $(0, +\infty)$. Existe, portanto, um único número real x que resolve a equação.

Esse número é, por definição, $\log_2 10$.

De modo geral, em uma igualdade $a^x = y$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$, o logaritmo fornece o expoente x . Trata-se, portanto, da operação inversa da exponenciação.

O expoente procurado

Para $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$, escrever $\log_a y = x$ equivale a escrever $a^x = y$. O logaritmo indica, portanto, o expoente necessário para obter y a partir da base a .

4.2 Definição Função logarítmica

Fixe $a > 0$, com $a \neq 1$. A **função logarítmica de base a** é a inversa da função exponencial de base a :

$$\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por definição,

$$\log_a y = x \iff a^x = y, \quad y > 0.$$

A definição já contém duas informações fundamentais: o argumento do logaritmo precisa ser positivo, e o valor de um logaritmo é um expoente. Por exemplo,

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_{10}(0,01) = -2, \quad \log_3 1 = 0,$$

porque

$$2^3 = 8, \quad 10^{-2} = 0,01, \quad 3^0 = 1.$$

Como exponencial e logaritmo são inversas,

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$$

e

$$\log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

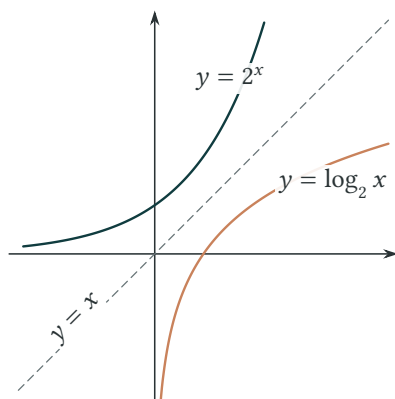


Figura 4.2. Os gráficos de $y = a^x$ e $y = \log_a x$ são reflexos um do outro em relação à reta $y = x$.

A inversão troca domínio e imagem:

$$\text{Dom}(\log_a) = (0, +\infty), \quad \text{Im}(\log_a) = \mathbb{R}.$$

Também troca o comportamento horizontal e vertical: a assíntota horizontal $y = 0$ da exponencial corresponde à assíntota vertical $x = 0$ do logaritmo. Quando $a > 1$, as duas funções são crescentes; quando $0 < a < 1$, ambas são decrescentes.

Exemplo 4.5.

Calcule

$$\log_2 32, \quad \log_{10}(0,001), \quad \log_3 \left(\frac{1}{27} \right).$$

<

Solução. Perguntamos a que expoente devemos elevar a base:

$$2^5 = 32, \quad 10^{-3} = 0,001, \quad 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Logo,

$$\log_2 32 = 5, \quad \log_{10}(0,001) = -3, \quad \log_3(1/27) = -3.$$

■

Exercícios

Ex. 4.13 Reescreva cada afirmação na forma exponencial.

1. $\log_2 16 = 4$.

2. $\log_5(1/25) = -2$.

3. $\log_{10} 1000 = 3$.

1. $3^4 = 81$.

2. $10^{-5} = 0,00001$.

3. $7^0 = 1$.

Ex. 4.15 Determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota vertical de $f(x) = \log_{1/3} x$.

Ex. 4.14 Reescreva cada afirmação na forma logarítmica.

Ex. 4.16 Explique por que $\log_a(-2)$ não é um número real para nenhuma base real admissível a .

Exercícios

Ex. 4.17 Calcule diretamente pela definição.

1. $\log_4 64$.

2. $\log_9(1/3)$.

3. $\log_{1/2} 8$.

Ex. 4.18 Determine domínio, imagem e assíntota vertical de

$$f(x) = \log_2(x - 3) + 1.$$

Ex. 4.19 Escreva a solução de $5^x = 17$ usando logaritmos.

4.4. Propriedades dos logaritmos

As leis dos logaritmos são traduções das leis das potências. Suponha $x, y > 0$ e escreva

$$u = \log_a x, \quad v = \log_a y.$$

Então $x = a^u$ e $y = a^v$. Multiplicando,

$$xy = a^{u+v},$$

e, pela definição de logaritmo,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Do mesmo modo,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Para potências,

$$x^r = (a^u)^r = a^{ru},$$

de onde

$$\log_a(x^r) = r \log_a x,$$

sempre que as expressões reais envolvidas estejam definidas.

A mudança de base decorre da mesma ideia. Se $u = \log_a x$, então $a^u = x$. Aplicando $\log_b$,

$$u \log_b a = \log_b x,$$

e portanto

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Essa identidade permite calcular logaritmos em qualquer base usando, por exemplo, $\log_{10}$.

Usaremos também a constante $e > 1$, cujo valor é aproximadamente 2,71828 e cuja construção será apresentada na Seção 8.3, no estudo de limites. A função $x \mapsto e^x$ é a **exponencial natural**; sua inversa é o **logaritmo natural**, denotado por $\ln x = \log_e x$. As propriedades já obtidas valem também para essa base. Em particular,

$$\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

As condições são diferentes porque o domínio do logaritmo é $(0, \infty)$, enquanto o da exponencial é $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.6 — Simplificação de expressões logarítmicas.

Determine o domínio de cada expressão e reescreva-a usando as propriedades dos logaritmos:

$$1. \log_2 \left(\frac{x^2 + 1}{2^x} \right);$$

$$2. \ln \left(\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{e^x} \right).$$

◀

Solução. (a) Como $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o argumento do logaritmo é sempre positivo. Portanto, o domínio é $\mathbb{R}$. Pela propriedade do quociente e pela relação entre logaritmo e exponencial,

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + 1}{2^x} \right) = \log_2(x^2 + 1) - \log_2(2^x) = \log_2(x^2 + 1) - x.$$

O termo $\log_2(x^2 + 1)$ permanece assim: a propriedade do produto não se aplica a uma soma.

(b) A raiz exige $x^2 - 1 \geq 0$. Nos extremos $x = \pm 1$, porém, o argumento do logaritmo

Logaritmos de somas

A propriedade do produto não se estende à soma. Por exemplo, $\log_2(1 + 1) = 1$, enquanto $\log_2 1 + \log_2 1 = 0$. Uma soma dentro do logaritmo não pode, em geral, ser separada em uma soma de logaritmos.

é zero. Como $e^x > 0$, a expressão está definida exatamente quando $x^2 - 1 > 0$, isto é,

$$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Nesse domínio, x^2 e $x^2 - 1$ são positivos. Aplicando as propriedades do produto, do quociente e da potência, obtemos

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x}\right) &= \ln(x^2) + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \ln(e^x) \\ &= 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - x. \end{aligned}$$

Usamos $\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2\ln|x|$, pois o domínio também contém valores negativos de x . Escrever $2\ln x$ excluiria esses valores. ■

Exemplo 4.7 — Uma composição exponencial-logarítmica.

Considere

$$G(x) = \log_2(4 - 2^x).$$

Determine o domínio, a imagem, a monotonicidade e as assíntotas de G . Em seguida, encontre sua inversa.

◁

Solução. O primeiro cuidado é com a ordem da composição. Para que o logaritmo exista, seu argumento deve ser positivo:

$$4 - 2^x > 0 \iff 2^x < 4 = 2^2.$$

Como 2^x é crescente,

$$\text{Dom } G = (-\infty, 2).$$

Nesse domínio, 2^x percorre $(0, 4)$; portanto, $4 - 2^x$ percorre também $(0, 4)$, mas no sentido contrário. Como $\log_2$ transforma $(0, 4)$ em $(-\infty, 2)$,

$$\text{Im } G = (-\infty, 2).$$

A função $x \mapsto 4 - 2^x$ é estritamente decrescente, enquanto $\log_2$ é estritamente crescente. Logo, G é estritamente decrescente.

Quando x se aproxima de 2 pela esquerda, o argumento $4 - 2^x$ permanece positivo e se aproxima de zero; os valores de $G(x)$ decrescem sem limite. Assim, $x = 2$ é uma assíntota vertical. Para valores negativos de x com módulo cada vez maior, 2^x se aproxima de zero e $G(x)$ se aproxima de $\log_2 4 = 2$ por valores menores. Portanto, $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Para inverter a função, escrevemos

$$y = \log_2(4 - 2^x).$$

Então

$$2^y = 4 - 2^x \iff 2^x = 4 - 2^y,$$

e portanto

$$x = \log_2(4 - 2^y).$$

Como y percorre $(-\infty, 2)$,

$$G^{-1}(y) = \log_2(4 - 2^y), \quad y < 2.$$

Curiosamente, a inversa tem a mesma regra de G : neste domínio, G é sua própria inversa. Isso também significa que seu gráfico é simétrico em relação à reta $y = x$.■

Exercícios

Ex. 4.20 Simplifique, indicando antes o domínio.

1. $\log_2(8x)$.

2. $\ln(x^2)$.

3. $\ln(\sqrt{x}/e^{2x})$.

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ para $x, y > 0$.

2. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.

3. $\log_a(x^2) = 2 \log_a |x|$ para $x \neq 0$.

Ex. 4.22 Use mudança de base para escrever $\log_7 20$ em termos de logaritmo natural.

Ex. 4.21 Decida quais afirmações são verdadeiras e corrija as falsas.

Exercícios

Ex. 4.23 Para $x, y > 0$, expanda

$$\log_2 \left(\frac{8x^3}{y} \right).$$

Ex. 4.24 Para $x > 0$, escreva como um único logaritmo:

$$2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(x + 1).$$

Ex. 4.25 Considere

$$E(x) = \log_2(x - 1) + \log_2(x + 2) - \log_2(x + 1).$$

1. Determine o domínio da expressão original.

2. Nesse domínio, escreva $E(x)$ como um único logaritmo.

3. Determine o domínio natural da expressão obtida e explique por que a simplificação não autoriza ampliar o domínio de E .

Ex. 4.26 Use apenas a definição de logaritmo para mostrar que

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_a a = 1.$$

Exercícios

Ex. 4.27 Sejam $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^{x-1}$. Determine as duas composições com seus domínios. Explique por que as expressões simplificadas não tornam esses domínios iguais.

Ex. 4.29 *Aprofundamento.* Seja

$$F(x) = \log_{1/2}(3 - 2^x) + 1.$$

Ex. 4.28 Considere $L(x) = \ln(1 + \sqrt{4 - x^2})$.

1. Descreva as etapas que compõem L e determine seu domínio.
2. Determine a imagem de L e os pontos em que seus valores extremos são atingidos.
1. Determine o domínio e justifique a monotonicidade pela ordem das operações.
2. Determine a imagem e as assíntotas vertical e horizontal.
3. Encontre a inversa de F sobre sua imagem, indicando o domínio da inversa.

4.5. Escalas logarítmicas e aplicações

O logaritmo transforma razões multiplicativas em diferenças. Essa propriedade é particularmente adequada à construção de escalas que comparam grandezas distribuídas por muitas ordens de magnitude.

Exemplo 4.8 — Decibéis.

O nível de intensidade sonora, medido em decibéis, pode ser modelado por

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2,$$

em que I é a intensidade do som e I_0 é uma intensidade de referência. Se a intensidade é multiplicada por 100, qual é a variação do nível?

◁

Solução. Se o nível inicial é L , o novo nível é

$$10 \log_{10} \left(\frac{100I}{I_0} \right) = 10 \left(2 + \log_{10} \frac{I}{I_0} \right) = L + 20.$$

Portanto, multiplicar a intensidade por 100 acrescenta 20 decibéis. A escala é logarítmica; isso não significa que a percepção de volume aumente na mesma proporção que a intensidade física. ■

Exemplo 4.9 – pH.

Uma solução tem concentração de íons hidrogênio

$$[H^+] = 2,5 \times 10^{-6} \text{ mol/L.}$$

Usando

$$\text{pH} = -\log_{10}[H^+],$$

calcule o pH.

<

Solução.

$$\text{pH} = -\log_{10}(2,5 \times 10^{-6}) = 6 - \log_{10}(2,5) \approx 5,60.$$

Uma diferença de uma unidade de pH corresponde a um fator 10 na concentração de H^+ . ■

Exercícios

Ex. 4.30 Retome as funções exponenciais e logarítmicas.

1. Explique a relação de inversão entre $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$, indicando domínio e imagem de cada uma.
2. Uma quantidade é modelada por $N(t) = 800(1/2)^{t/4}$, com $t \geq 0$. Calcule $N(12)$ e interprete o resultado.

Ex. 4.31 Após uma fonte sonora ser desligada, a intensidade do som em uma sala é modelada por

$$I(t) = I_0 e^{-kt}, \quad k > 0.$$

O tempo de reverberação T_{60} é o instante em que a intensidade se reduz a 10^{-6} de seu valor inicial. Mostre que

$$T_{60} = \frac{6 \ln 10}{k}.$$

Exercícios

Ex. 4.32 Calcule ou resolva, indicando as restrições necessárias.

1. $\log_2 32$.
2. $\log_{10}(0,001)$.

$$3. 3^{x-1} = 27.$$

$$4. \ln(e^{2x-1}) = 5.$$

$$5. \log_3(x-1) = 2.$$

$$6. 2^{x+1} = 5.$$

Exercícios

Ex. 4.33 O valor de um equipamento é modelado por $V(t) = 48\,000(0,82)^t$, em reais, t anos após a compra. Determine o valor após cinco anos e o primeiro ano inteiro em que ele fica abaixo de 15 000 reais.

Ex. 4.34 Uma solução tem concentração de íons hidrogênio $[H^+] = 2,5 \times 10^{-6}$ mol/L. Usando $\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$, calcule o pH e compare-o com o de uma solução de pH 5,1. Qual solução é mais ácida? Por qual fator suas concentrações de H^+ diferem?

Ex. 4.35 Reescreva

$$\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-3)^3}\right)$$

como combinação de logaritmos. Determine antes o domínio da expressão original.

Ex. 4.36 A intensidade de dois ruídos é, respectivamente, $I_1 = 10^{-6}$ W/m² e $I_2 = 4 \cdot 10^{-5}$ W/m². Usando $\beta = 10 \log_{10}(I/10^{-12})$, compare seus níveis em decibéis e explique por que a diferença entre eles não é proporcional à diferença das intensidades.

Relação entre exponencial e logaritmo

A função logarítmica é a inversa da função exponencial. Consequentemente, o domínio de uma corresponde à imagem da outra, e seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$. Em termos algébricos, essa relação aparece nas propriedades dos logaritmos: produtos correspondem a somas, quocientes a diferenças e potências a produtos.

5

Funções trigonométricas

Está escrito em linguagem matemática, e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas.

Galileu Galilei, *Il Saggiatore*

Na geometria elementar, seno e cosseno aparecem inicialmente como relações entre ângulos e lados de triângulos. Para estudá-los como funções de variável real, é necessário estender essa definição a ângulos arbitrários.

A circunferência unitária fornece essa extensão. A cada número real associa-se um percurso orientado sobre a circunferência; as coordenadas do ponto final definem o cosseno e o seno desse número. Periodicidade, sinais, paridade e diversas identidades decorrem das simetrias dessa construção.

5.1. Seno e cosseno na circunferência unitária

Uma volta completa mede 360° quando se utiliza a medida em graus. A medida em radianos é definida geometricamente. Se um arco de comprimento s pertence a uma circunferência de raio r , a medida do ângulo central correspondente é

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Portanto,

$$s = r\theta.$$

Como a circunferência completa tem comprimento $2\pi r$,

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianos}.$$

Em particular,

$$180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

Quando $r = 1$, acontece o ponto decisivo:

$$\theta = s.$$

Neste capítulo

5.1 Seno e cosseno na circunferência unitária	89
5.2 Gráficos de seno e cosseno	94
5.3 Identidades trigonométricas fundamentais	95
5.4 Amplitude, período e transformações dos gráficos	99
5.5 Tangente e funções associadas	102
5.6 Simplificação de expressões trigonométricas	107
5.7 Modelos periódicos	111
5.8 Funções trigonométricas inversas	112
5.9 Modelos geométricos	116

Medida em radianos

A medida em radianos é a razão entre o comprimento do arco e o raio. Na circunferência unitária, essa medida coincide com o comprimento do arco. Para percursos orientados, o sinal distingue os sentidos de rotação.

No círculo unitário, o número que mede o ângulo em radianos coincide com o comprimento orientado do arco percorrido. É isso que permite tratar seno e cosseno como funções de uma variável real.

Exemplo 5.1.

Converta 150° para radianos e $7\pi/6$ radianos para graus.

◁

Solução. Como $180^\circ = \pi$,

$$150^\circ = 150 \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

Na direção inversa,

$$\frac{7\pi}{6} \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ.$$

■

Exercícios

Ex. 5.1 Faça as conversões.

1. 120° para radianos.
2. 225° para radianos.
3. $3\pi/4$ para graus.
4. $7\pi/4$ para graus.

Ex. 5.2 Uma circunferência tem raio 5 cm. Calcule o comprimento do arco interceptado por um ângulo de $2\pi/3$ radianos.

Ex. 5.3 Uma roda gira com velocidade angular constante de $\pi/3$ rad/s. Quantos radianos e quantas voltas ela percorre em 12 segundos?

Com os radianos, a circunferência unitária transforma diretamente números reais em pontos do plano: o próprio número mede o comprimento orientado do arco percorrido.

Considere a circunferência de centro na origem e raio 1. Fixe

$$U = (1, 0).$$

Para $x > 0$, partimos de U e percorremos a circunferência no sentido anti-horário por um arco de comprimento x . Para $x < 0$, percorremos $|x|$ no sentido horário. Denotaremos por P_x o ponto final desse percurso.

De ângulo a função

Para cada número real x , a circunferência unitária determina um único ponto P_x . Suas coordenadas são, por definição, $(\cos x, \sin x)$.

5.1 Definição Seno e cosseno

Se

$$P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x),$$

as coordenadas de P_x definem as funções

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \operatorname{sen} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

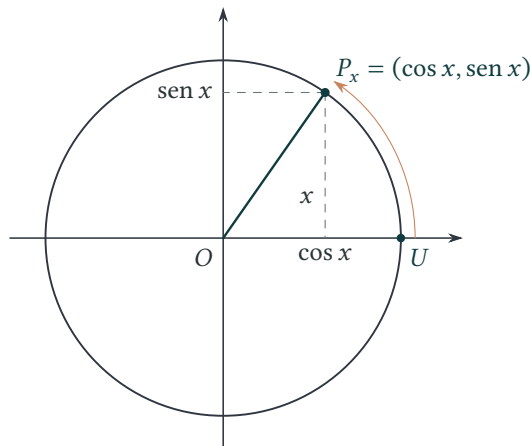


Figura 5.1. No círculo unitário, o cosseno é a coordenada horizontal de P_x e o seno é sua coordenada vertical.

A construção vale para qualquer número real. Uma volta completa tem comprimento 2π , portanto

$$P_{x+2\pi} = P_x.$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x}, \quad \boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}.$$

Seno e cosseno são funções periódicas de período 2π . O **período fundamental**, quando existe, é o menor período positivo. Para seno e cosseno ele é 2π : os valores 4π , 6π e os demais múltiplos inteiros positivos também são períodos, mas não são fundamentais.

Se trocamos x por $-x$, percorremos a mesma distância no sentido oposto. Os pontos P_x e P_{-x} são simétricos em relação ao eixo horizontal. Assim,

$$\boxed{\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x}, \quad \boxed{\cos(-x) = \cos x}.$$

O seno é ímpar e o cosseno é par.

Como P_x está na circunferência unitária,

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1.$$

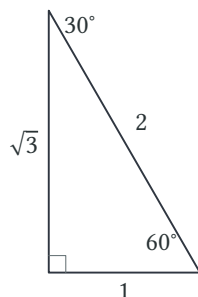
Portanto,

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}.$$

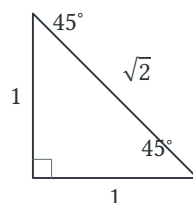
Essa identidade é simplesmente a equação $X^2 + Y^2 = 1$ aplicada ao ponto P_x .

5.1.1. Valores notáveis e sinais

Os valores de seno e cosseno em $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ podem ser deduzidos de dois triângulos retângulos.



Metade de um triângulo equilátero de lado 2.



Triângulo retângulo isósceles.

Figura 5.2. Os dois triângulos que produzem os valores notáveis.

No primeiro triângulo, partimos de um equilátero de lado 2 e traçamos uma altura. Ela divide a base ao meio e, pelo teorema de Pitágoras, tem comprimento $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Portanto,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

O ângulo complementar fornece

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

No triângulo retângulo isósceles de catetos 1, a hipotenusa vale $\sqrt{2}$. Assim,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Reunindo os três casos, no primeiro quadrante temos

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{sen} x$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\operatorname{cos} x$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

Os demais valores surgem por simetria na circunferência. Os sinais são determinados diretamente pelas coordenadas do ponto $P_x = (\operatorname{cos} x, \operatorname{sen} x)$:

quadrante	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
$\operatorname{sen} x$	+	+	−	−
$\operatorname{cos} x$	+	−	−	+

Exemplo 5.2.

Calcule $\sin(5\pi/6)$ e $\cos(5\pi/6)$ a partir da circunferência unitária.

<

Solução. O ângulo $5\pi/6$ está no segundo quadrante e tem ângulo de referência $\pi/6$. Nesse quadrante, a coordenada horizontal é negativa e a vertical é positiva. Portanto,

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■

Exercícios

Ex. 5.4 Use a circunferência unitária para calcular.

1. $\sin(2\pi/3)$ e $\cos(2\pi/3)$.
2. $\sin(5\pi/4)$ e $\cos(5\pi/4)$.
3. $\sin(11\pi/6)$ e $\cos(11\pi/6)$.

4. $\cos(-2\pi/3)$.

Ex. 5.6 Use periodicidade para reduzir cada argumento a $[0, 2\pi)$.

1. $\sin(13\pi/6)$.
2. $\cos(9\pi/4)$.

Ex. 5.5 Sem usar calculadora, determine o sinal de cada expressão.

1. $\sin(7\pi/6)$.
2. $\cos(4\pi/3)$.
3. $\sin(-\pi/4)$.

3. $\sin(-7\pi/6)$.

Ex. 5.7 Explique geometricamente por que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios

Ex. 5.8 Determine as coordenadas de $P_x = (\cos x, \sin x)$ para

$$P_x = (0, -1).$$

$$x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

Ex. 5.10 Sabendo que $P_x = (3/5, 4/5)$, determine

$$P_{-x}$$

Ex. 5.9 Liste todos os números reais x para os quais $\sin(-x) = \sin x$ e os valores de $\sin(-x)$ e $\cos(-x)$.

5.2. Gráficos de seno e cosseno

A definição na circunferência unitária permite construir diretamente os gráficos de seno e cosseno. À medida que x varia, o ponto P_x percorre a circunferência; sua coordenada vertical fornece os valores de $\sin x$ e sua coordenada horizontal fornece os valores de $\cos x$.

Em uma volta, a coordenada vertical de P_x passa por

$$0, 1, 0, -1, 0$$

nos pontos

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

O cosseno acompanha a coordenada horizontal e passa, nos mesmos instantes, por

$$1, 0, -1, 0, 1.$$

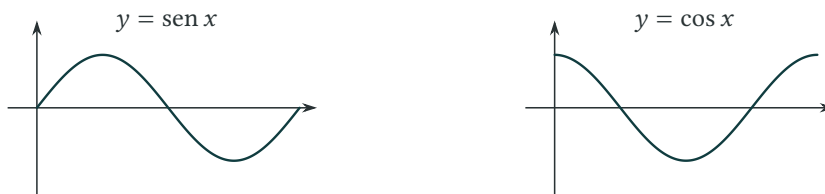


Figura 5.3. Um período de seno e cosseno.

Da construção,

$$\text{Dom}(\sin) = \text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(\sin) = \text{Im}(\cos) = [-1, 1].$$

Os zeros do seno são os múltiplos inteiros de π ; os zeros do cosseno são os pontos $\pi/2 + k\pi$.

Exercícios

Ex. 5.11 Determine domínio, imagem, período fundamental e zeros de $\sin x$ e de $\cos x$.

Ex. 5.13 Verifique no círculo unitário e nos gráficos que

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ex. 5.12 Esboce um período de $y = \sin x$ e de $y = \cos x$ marcando primeiro os cinco pontos principais em $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

Interprete a identidade como uma translação horizontal.

Exercícios

- Ex. 5.14** Em um período $[0, 2\pi]$, indique onde $\sin x$ é positivo, negativo e nulo.
- Ex. 5.15** Em um período $[0, 2\pi]$, indique onde $\cos x$ é positivo, negativo e nulo.
- Ex. 5.16** Determine todos os pontos de máximo e mínimo de $\sin x$.
- Ex. 5.17** Explique por que os gráficos de $\sin x$ e $\cos x$ ficam completamente determinados quando conhecemos apenas um intervalo de comprimento 2π .

Exercícios

- Ex. 5.18** *Aprofundamento.* Dadas $f(x) = \sin x$, $f \circ g$ e $g \circ f$, e $g(x) = \pi \llbracket x \rrbracket$, determine os domínios e as imagens de

5.3. Identidades trigonométricas fundamentais

A identidade pitagórica decorre diretamente da equação da circunferência unitária. As fórmulas de adição também podem ser obtidas geometricamente.

5.3 Proposição Fórmulas de adição

Para todos $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

e

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Demonstração. Começamos com $0 < a, b < \pi/2$. No triângulo da Figura 5.4, a altura $CD = h$ divide o ângulo em C em duas partes, a e b . Os dois triângulos retângulos fornecem

$$CA = \frac{h}{\cos a}, \quad CB = \frac{h}{\cos b},$$

e, multiplicando essas hipotenusas pelos senos correspondentes,

$$AD = \frac{h \sin a}{\cos a}, \quad DB = \frac{h \sin b}{\cos b}.$$

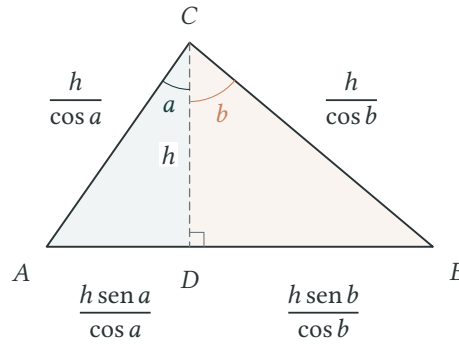


Figura 5.4. A altura divide o triângulo em duas partes. A mesma área também pode ser calculada a partir dos lados CA , CB e do ângulo $a + b$.

Usando a base $AB = AD + DB$, a área é

$$\frac{AB \cdot h}{2} = \frac{h^2}{2} \left(\frac{\sen a}{\cos a} + \frac{\sen b}{\cos b} \right).$$

Se usamos CA como base, a altura correspondente mede $CB \sen(a + b)$. De fato, quando $a + b$ é agudo, essa relação vem de um triângulo retângulo; quando é obtuso, usamos o ângulo suplementar e $\sen(\pi - (a + b)) = \sen(a + b)$. Para $a + b = \pi/2$, a altura é o próprio lado CB . Assim, a mesma área também é

$$\frac{CA \cdot CB \sen(a + b)}{2} = \frac{h^2 \sen(a + b)}{2 \cos a \cos b}.$$

Igualando as duas expressões e multiplicando por $2 \cos a \cos b / h^2$, obtemos a fórmula do seno da soma para os ângulos agudos a e b .

Para chegar ao cosseno e às diferenças, usaremos apenas as simetrias da circunferência. A fórmula já provada, aplicada a a e $\pi/2 - b$, dá

$$\cos(a - b) = \sen\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \sen a \sen b + \cos a \cos b.$$

Se $a > b$, aplicamos ainda a fórmula do seno a $(a - b) + b$ e isolamos $\sen(a - b)$:

$$\begin{aligned} \sen(a - b) &= \frac{\sen a - \cos(a - b) \sen b}{\cos b} \\ &= \sen a \cos b - \cos a \sen b. \end{aligned}$$

Para $a = b$ a igualdade é imediata; para $a < b$, trocamos os dois ângulos e usamos a paridade do seno. A fórmula da diferença vale, portanto, para quaisquer $a, b \in (0, \pi/2)$. Aplicando-a a $\pi/2 - a$ e b ,

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \sen\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos a \cos b - \sen a \sen b. \end{aligned}$$

Resta explicar por que não há restrição a ângulos agudos nas fórmulas. Se um ou ambos os ângulos são negativos, escrevemos seus opostos, reduzindo o cálculo a uma soma ou diferença de ângulos não negativos. Usamos então as fórmulas anteriores e $\sen(-t) = -\sen t$, $\cos(-t) = \cos t$. Os casos em que algum ângulo é 0 ou $\pm\pi/2$

seguem diretamente das simetrias de um quarto de volta. Por fim, qualquer ângulo real pode ser escrito como $t + k\pi$, com $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $k \in \mathbb{Z}$. Uma meia-volta muda simultaneamente os sinais do seno e do cosseno:

$$\sin(t + \pi) = -\sin t, \quad \cos(t + \pi) = -\cos t.$$

Acrescentar π a qualquer um dos argumentos muda o sinal dos dois lados de cada fórmula. Logo, as identidades valem para todos os ângulos reais. ■

As fórmulas de diferença foram obtidas no mesmo argumento. Fazendo $a = b = x$ nas fórmulas de adição, obtemos

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

e

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Isolando os quadrados,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Duas identidades de transformação serão particularmente úteis nos capítulos de limites e integrais:

$$\sin u - \sin v = 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right),$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Para deduzir essas identidades, escreva

$$p = \frac{u+v}{2}, \quad q = \frac{u-v}{2}.$$

Então $u = p + q$ e $v = p - q$. Pelas fórmulas de adição e de diferença,

$$\begin{aligned} \sin u - \sin v &= (\sin p \cos q + \cos p \sin q) \\ &\quad - (\sin p \cos q - \cos p \sin q) \\ &= 2 \cos p \sin q. \end{aligned}$$

Substituir p e q dá a primeira identidade. Para o cosseno, a mesma subtração fornece

$$\cos(p + q) - \cos(p - q) = -2 \sin p \sin q,$$

o que dá a segunda.

Em particular,

$$1 - \cos u = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right).$$

Exemplo 5.4.

Mostre que

$$\operatorname{sen}(3x) = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x.$$

<

Solução. Escrevemos $3x = 2x + x$:

$$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(2x) \cos x + \cos(2x) \operatorname{sen} x.$$

Substituindo as fórmulas de ângulo duplo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3x) &= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x \\ &= 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x \\ &= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x. \end{aligned}$$

■

Exemplo 5.5 – Um valor exato pela fórmula de adição.

Calcule exatamente $\operatorname{sen}(7\pi/12)$.

<

Solução. Como $7\pi/12 = \pi/3 + \pi/4$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12} &= \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 5.6 – Usando as fórmulas para simplificar.

Simplifique

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)}{2 \cos x}, \quad \cos x \neq 0.$$

<

Solução. Expandindo os dois senos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) &= (\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y) \\ &\quad - (\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y) \\ &= 2 \cos x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Portanto, no domínio indicado, a expressão simplifica para $\operatorname{sen} y$.

■

Exercícios

Ex. 5.19 Calcule exatamente.

1. $\sin(5\pi/12)$.
2. $\cos(\pi/12)$.
3. $\sin(\pi/12)$.

Ex. 5.21 Use as fórmulas de soma-produto.

1. Fatore $\sin(5x) - \sin x$ e determine seus zeros em $[0, \pi]$.
2. Para $h \neq 0$, reescreva $(\sin(x+h) - \sin x)/h$ como produto de um cosseno por $\sin(h/2)/(h/2)$.

Ex. 5.20 Verifique que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ e obtenha dessa igualdade as duas expressões para $\cos^2 x$ e $\sin^2 x$.

Ex. 5.22 Mostre que

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Exercícios

Ex. 5.23 Derive as fórmulas de diferença

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

e

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Ex. 5.25 Mostre que

$$1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x.$$

Ex. 5.24 Mostre que

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2 \cos u \cos v.$$

Ex. 5.26 Use as fórmulas de adição para mostrar as identidades de cofunção

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

5.4. Amplitude, período e transformações dos gráficos

Considere, inicialmente,

$$f(x) = A \sin(Bx) \quad \text{ou} \quad f(x) = A \cos(Bx), \quad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

O fator A multiplica todos os valores da função. Por isso, a imagem é $[-|A|, |A|]$ e a **amplitude**, definida como metade da distância entre o valor máximo e o mínimo, é

$$\boxed{\text{amplitude} = |A|}.$$

Quando $A < 0$, ocorre também uma reflexão em relação ao eixo horizontal.

Já o fator B altera a escala horizontal. Uma oscilação completa ocorre quando o argumento varia 2π . O menor deslocamento positivo necessário para isso é

$$T = \frac{2\pi}{|B|}.$$

Esse é o período fundamental tanto de $A \sin(Bx)$ quanto de $A \cos(Bx)$. O valor absoluto é necessário porque o sinal de B apenas muda a orientação com que o ciclo é percorrido. Para o cosseno isso também decorre de sua paridade; para o seno, o sinal pode ser incorporado ao fator A .

Por exemplo, em $g(x) = 2 \sin(3x)$, a amplitude é 2 e o período é $2\pi/3$. Um período pode ser construído marcando seus quartos:

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$g(x)$	0	2	0	-2	0.

Entre esses pontos, o gráfico conserva a forma suave do seno.

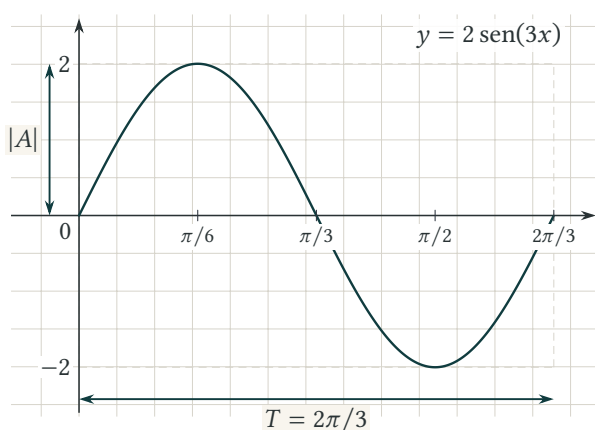


Figura 5.5. O fator A controla a amplitude; o fator B , o período.

Para $B > 0$, os cinco pontos principais de um período podem ser organizados sem novos cálculos:

x	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
$A \sin(Bx)$	0	A	0	$-A$	0
$A \cos(Bx)$	A	0	$-A$	0	A .

Se houver translações, usamos as regras já estudadas para gráficos. Na forma

$$F(x) = A \sin(B(x - h)) + k \quad \text{ou} \quad F(x) = A \cos(B(x - h)) + k,$$

a amplitude continua sendo $|A|$, o período continua sendo $2\pi/|B|$, a linha média passa a ser $y = k$ e o gráfico é deslocado horizontalmente por h . Uma expressão $Bx + C$ pode ser escrita como $B(x - h)$ tomando $h = -C/B$.

Exemplo 5.7.

Analise a função

$$f(x) = 3 \cos(2(x - \pi/4)) - 1.$$

Determine amplitude, período, deslocamento horizontal, linha média e imagem.

<

Solução. A amplitude é $|3| = 3$. Como o coeficiente do argumento é 2,

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

O gráfico está deslocado $\pi/4$ para a direita e sua linha média é $y = -1$. Como oscila três unidades acima e abaixo dessa linha,

$$\text{Im } f = [-4, 2].$$

■

Exemplo 5.8 – Reconstruindo um modelo periódico.

Uma oscilação tem valor máximo 7, valor mínimo -1 e período fundamental 6. No instante $t = 0$, seu valor é 5 e está aumentando. Determine A , B , D e φ no modelo

$$f(t) = D + A \sin(Bt + \varphi), \quad A, B > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

<

Solução. O máximo e o mínimo determinam primeiro a linha média e a amplitude:

$$D = \frac{7 + (-1)}{2} = 3, \quad A = \frac{7 - (-1)}{2} = 4.$$

Como o período é 6,

$$\frac{2\pi}{B} = 6 \implies B = \frac{\pi}{3}.$$

Resta determinar a fase. A condição $f(0) = 5$ fornece

$$3 + 4 \sin \varphi = 5,$$

logo

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

No intervalo $[0, 2\pi)$ há duas possibilidades:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

O valor inicial, sozinho, não distingue essas duas fases. A informação de que a oscilação está aumentando resolve a ambiguidade: perto de $\pi/6$ o seno cresce, enquanto perto de $5\pi/6$ ele decresce. Portanto,

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

e um modelo é

$$f(t) = 3 + 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{6} \right).$$

Um modelo escrito com cosseno seria igualmente possível; seno e cosseno diferem apenas por uma mudança de fase. O que os dados determinam é a oscilação, não uma forma única de escrevê-la. ■

Exercícios

Ex. 5.27 Determine a amplitude e o período e esboce um período de cada função. Antes de desenhar, marque os cinco pontos separados por um quarto de período.

1. $y = -2 \cos(3x)$.

2. $y = -3 \operatorname{sen}(-4x)$.

3. $y = 3 \cos(2x)$.

4. $y = 2 \operatorname{sen}(2x + \pi/2)$.

5. $y = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

6. $y = -3 \operatorname{sen}(\pi x + \pi)$.

Exercícios

Ex. 5.28 Determine amplitude, período, linha média e deslocamento horizontal de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(3(x - \pi/6)) + 4.$$

Ex. 5.29 Determine amplitude, período e imagem de

$$g(x) = -4 \cos(\pi x) + 2.$$

Ex. 5.30 Reescreva

$$h(x) = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi) + 1$$

na forma $A \operatorname{sen}(B(x - h_0)) + k$ e identifique os parâmetros.

Ex. 5.31 Uma função cossenoidal tem amplitude 5, período 4π e linha média $y = -2$. Dê um exemplo de fórmula com essas características.

Ex. 5.32 Considere as duas fórmulas

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + 1, \quad g(x) = 3 \cos \left(2x - \frac{5\pi}{6} \right) + 1.$$

1. Mostre que f e g definem a mesma função.

2. Determine amplitude, período, linha média e imagem dessa função.

3. Explique por que os deslocamentos aparentes nas duas fórmulas são diferentes, embora o gráfico seja o mesmo.

5.5. Tangente e funções associadas

Seno e cosseno estão definidos para todo número real. As demais funções trigonométricas serão obtidas a partir deles por quocientes e recíprocos. Consequentemente,

Domínios das funções associadas

Tangente e secante exigem $\cos x \neq 0$; cotangente e cossecante exigem $\operatorname{sen} x \neq 0$. Seus domínios são obtidos excluindo os zeros desses

seus domínios dependem dos zeros dos denominadores envolvidos.

A tangente admite ainda uma interpretação geométrica: ela fornece a inclinação do raio que liga a origem ao ponto correspondente da circunferência.

5.5.1. Tangente e secante

5.2 Definição

Nos pontos em que $\cos x \neq 0$, definimos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Assim,

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{sec}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A definição também possui uma interpretação geométrica direta. Se

$$P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

e $\cos x \neq 0$, então o coeficiente angular da reta que passa por $O = (0, 0)$ e P_x é

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Assim, a tangente pode ser lida como a inclinação do raio OP_x sempre que esse raio não é vertical.

Há uma construção que reúne tangente e secante e explica seus nomes. Para $0 < x < \pi/2$, prolongue o raio OP_x até encontrar a reta vertical $X = 1$, que é tangente à circunferência no ponto $(1, 0)$. Se chamarmos o ponto de interseção de T , então

$$T = (1, \operatorname{tg} x).$$

O triângulo com vértices O , $(1, 0)$ e T é retângulo. Sua base mede 1, sua altura mede $\operatorname{tg} x$ e, pelo teorema de Pitágoras,

$$OT = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{sec} x.$$

No primeiro quadrante, portanto, a tangente aparece como a altura do ponto T e a secante como o comprimento do segmento OT .

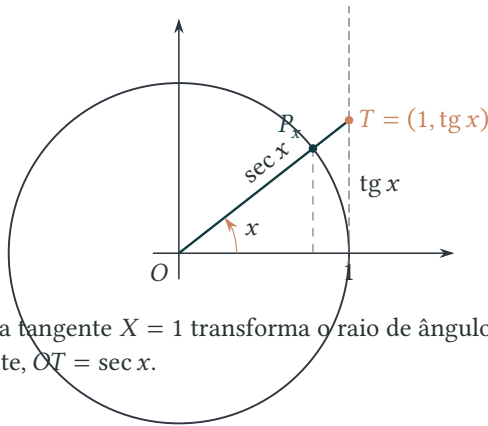


Figura 5.6. A reta tangente $X = 1$ transforma o raio de ângulo x no ponto $T = (1, \operatorname{tg} x)$. No primeiro quadrante, $OT = \sec x$.

Quando $\cos x = 0$, o raio é vertical e não encontra a reta $X = 1$ em um ponto finito. Esse é exatamente o motivo geométrico para tangente e secante não estarem definidas nesses valores.

A tangente tem período π , pois

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Em cada intervalo entre dois zeros consecutivos do cosseno, seu gráfico forma um ramo. As retas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

são assíntotas verticais.

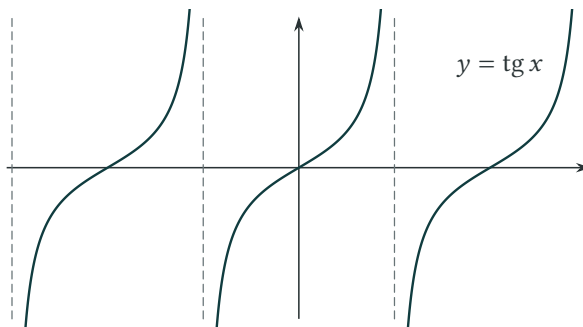


Figura 5.7. A tangente tem período π e assíntotas verticais nos zeros do cosseno.

A secante é o recíproco da coordenada horizontal de P_x . Portanto, quando P_x se aproxima dos pontos superior ou inferior da circunferência, essa coordenada se aproxima de zero e o módulo da secante cresce. Como $|\cos x| \leq 1$, onde a secante está definida temos

$$|\sec x| \geq 1.$$

Portanto,

$$\operatorname{Im}(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Exemplo 5.9.

Determine o domínio de

$$g(x) = \sec(2x)$$

e explique geometricamente por que esses pontos precisam ser excluídos.

<

Solução. A secante exige $\cos(2x) \neq 0$. Os zeros do cosseno ocorrem quando

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

isto é,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nesses pontos o denominador da secante se anula; no gráfico, eles correspondem às retas verticais que separam seus ramos. ■

5.5.2. Cotangente e cossecante**5.3 Definição**

Nos pontos em que $\sin x \neq 0$, definimos

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{cossec } x = \frac{1}{\sin x}.$$

Assim,

$$\text{Dom}(\cotg) = \text{Dom}(\text{cossec}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

A cotangente troca os papéis das coordenadas:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tg x},$$

nos pontos em que ambas as expressões estão definidas.

A construção anterior também tem uma versão horizontal. Para $0 < x < \pi/2$, prolongue o raio OP_x até a reta $Y = 1$, tangente à circunferência em $(0, 1)$. O ponto de interseção é

$$C = (\cotg x, 1),$$

e o comprimento OC vale $\text{cossec } x$. Assim, tangente/secante e cotangente/cossecante são construções simétricas: numa usamos a reta tangente vertical $X = 1$; na outra, a reta tangente horizontal $Y = 1$.

No primeiro quadrante, esses comprimentos coincidem com os próprios valores de $\sec x$ e $\text{cossec } x$. Fora dele, as fórmulas algébricas preservam os sinais corretos, enquanto comprimentos geométricos correspondem a valores absolutos.

A cotangente tem período π . Seus zeros ocorrem quando $\cos x = 0$, isto é,

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e as retas $x = k\pi$ são assíntotas verticais, pois nesses pontos o seno se anula.

A cossecante, como recíproco do seno, tem o mesmo sinal do seno e satisfaz

$$|\operatorname{cosec} x| \geq 1$$

onde está definida. As retas $x = k\pi$ são suas assíntotas verticais. De modo análogo, a secante tem o mesmo sinal do cosseno e suas assíntotas são $x = \pi/2 + k\pi$.

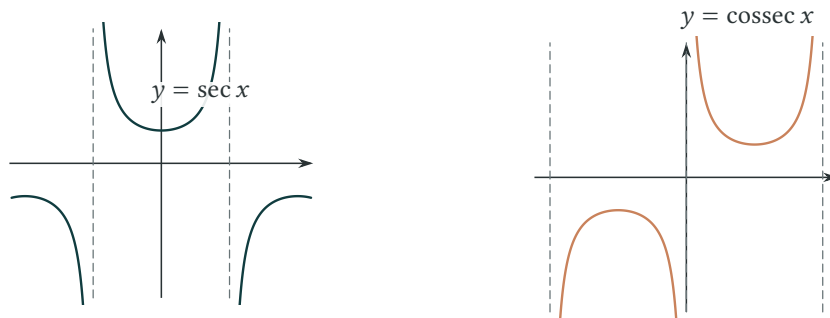


Figura 5.8. Secante e cossecante são recíprocos de cosseno e seno. Os zeros do denominador se tornam assíntotas verticais, e os gráficos permanecem fora da faixa $-1 < y < 1$.

Exercícios

Ex. 5.33 Determine o domínio natural.

1. $\operatorname{tg} x$.

2. $\sec(3x - \pi/4)$.

3. $\cotg(x - \pi/3)$.

4. $\operatorname{cosec}(3x)$.

1. $\operatorname{tg}(\pi/4)$.

2. $\operatorname{tg}(5\pi/6)$.

3. $\sec(2\pi/3)$.

4. $\operatorname{cosec}(7\pi/6)$.

Ex. 5.35 Mostre que tg é ímpar e que $\sec$ é par.

Ex. 5.34 Calcule exatamente.

Exercícios

Ex. 5.36 Verifique as identidades e indique exatamente onde valem.

$$1. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x.$$

$$2. 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Quadro de consulta

Na tabela, o domínio é $\mathbb{R}$ sem os pontos indicados na segunda coluna, e k percorre $\mathbb{Z}$. Para tangente, cotangente, secante e cossecante, cada ponto excluído c corresponde à assíntota vertical $x = c$. Seno e cosseno não possuem assíntotas. A coluna T_0 registra o período fundamental.

Função	Pontos excluídos do domínio	Imagem	T_0	Paridade
$\operatorname{sen} x$	nenhum	$[-1, 1]$	2π	ímpar
$\operatorname{cos} x$	nenhum	$[-1, 1]$	2π	par
$\operatorname{tg} x$	$\pi/2 + k\pi$	$\mathbb{R}$	π	ímpar
$\operatorname{cotg} x$	$k\pi$	$\mathbb{R}$	π	ímpar
$\operatorname{sec} x$	$\pi/2 + k\pi$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	2π	par
$\operatorname{cossec} x$	$k\pi$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	2π	ímpar

5.6. Simplificação de expressões trigonométricas

As identidades trigonométricas permitem simplificar expressões, mas é necessário preservar as restrições da expressão original. Por exemplo, se $\operatorname{sen} x \neq 0$,

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x.$$

A expressão simplificada está definida para todo x , mas a original não está definida nos múltiplos inteiros de π ; a igualdade vale apenas fora desses pontos. Do mesmo modo, se $\cos x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sec} x} = \frac{\operatorname{sen} x / \cos x}{1 / \cos x} = \operatorname{sen} x.$$

Novamente, a simplificação não acrescenta ao domínio os pontos excluídos no início.

Exemplo 5.10.

Simplifique

$$E = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}.$$

<

Solução. No domínio da expressão original, $\cos x \neq \pm 1$. Tomando denominador comum,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x) + \operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 \operatorname{cosec} x. \end{aligned}$$

Os pontos com $\operatorname{sen} x = 0$ já estavam excluídos da expressão original. ■

Exemplo 5.11.

Simplifique

$$E = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sec x \operatorname{cosec} x}.$$

<

Solução. Quando $\operatorname{sen} x \cos x \neq 0$,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x},$$

enquanto

$$\sec x \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

Logo, $E = 1$ em todo o domínio da expressão original. ■

Exemplo 5.12.

Simplifique

$$E = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

<

Solução. No domínio original, $\operatorname{sen} x \neq \pm 1$. Assim,

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x \sec x. \end{aligned}$$

■

Exemplo 5.13.

Simplifique

$$E = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2 \operatorname{sen} x}, \quad \operatorname{sen} x \neq 0.$$

<

Solução. Pelas fórmulas de adição,

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y.$$

Portanto, $E = \cos y$ no domínio indicado. ■**Exercícios****Ex. 5.37** Considere

$$F(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

1. Determine o domínio da expressão original e simplifique-a.
2. Compare esse domínio com o da expressão simplificada.
3. Resolva $F(x) = 0$ e explique o que aconteceria se as restrições originais fossem esquecidas.

Ex. 5.38 Verifique cada identidade no domínio em que os dois lados estão definidos.

1. $\sec t - \cos t = \operatorname{tg} t \operatorname{sen} t.$
2. $\frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{cosec} y} + \frac{\cos y}{\sec y} = 1.$
3. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}.$
4. $\operatorname{cosec} t - \operatorname{sen} t = \cos t \cotg t.$
5. $\operatorname{sen}(3t) = 3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t.$
6. $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta.$

Exercícios**Ex. 5.39** Determine a imagem de $\sec x$ e de $\operatorname{cosec} x$ a partir das desigualdades $|\cos x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.

1.

Ex. 5.40 Mostre que a cotangente tem período π .**Ex. 5.41** Determine o sinal de $\operatorname{tg} x$ em cada quadrante.

Escolha da forma algébrica

Uma identidade trigonométrica pode ser empregada para colocar uma expressão em uma forma mais adequada ao problema considerado. Dependendo da expressão, pode ser conveniente preservar um fator, reduzir potências ou transformar produtos em somas.

Exemplo 5.14 — Três maneiras de reconhecer a estrutura.

Reescreva as expressões abaixo de uma forma que destaque uma estrutura simples:

$$A = \sin^3 x \cos^2 x, \quad B = \sin^2 x \cos^2 x, \quad C = \sin(3x) \cos x.$$

<

Solução. Em A , a potência do seno é ímpar. Convém separar um fator $\sin x$ e converter o restante usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned} A &= \sin x \sin^2 x \cos^2 x \\ &= \sin x(1 - \cos^2 x) \cos^2 x \\ &= \sin x(\cos^2 x - \cos^4 x). \end{aligned}$$

A expressão ficou escrita como um fator $\sin x$ multiplicando um polinômio em $\cos x$. Em B , as duas potências são pares. A identidade de ângulo duplo é mais natural:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4x)).$$

Em C , os argumentos são diferentes. Das fórmulas de adição,

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v.$$

Tomando $u = 3x$ e $v = x$,

$$\sin(3x) \cos x = \frac{1}{2} (\sin(4x) + \sin(2x)).$$

Os três cálculos usam identidades conhecidas, mas com objetivos diferentes: preservar um fator, reduzir potências ou transformar um produto em soma. ■

Exercícios

Ex. 5.42 Reorganize

$$\sin^5 x \cos^4 x$$

de modo a deixar um único fator $\sin x$ e escrever todo o restante apenas em termos de $\cos x$.

Ex. 5.43 Reorganize

$$\operatorname{tg}^3 x \sec^5 x$$

de modo a deixar em evidência um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e escrever o fator restante apenas em termos de $\sec x$.

Ex. 5.44 Use identidades de produto e soma para reescrever.

1. $\sin(5x) \cos(2x)$ como soma de senos.

2. $\cos(3x) \cos x$ como soma de cossenos.

3. $\sin^2 x \cos^2 x$ usando apenas uma constante e $\cos(4x)$.

5.7. Modelos periódicos

Exemplo 5.15 — Massa presa a uma mola.

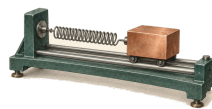
Em um modelo idealizado de massa presa a uma mola, a posição em relação ao equilíbrio é

$$s(t) = 0,08 \cos(4t),$$

com s em metros e $t \geq 0$ em segundos. Determine a amplitude, o período e os instantes em que a massa passa pela posição de equilíbrio.

<

Solução.



A amplitude é 0,08 metro, ou 8 centímetros. Como o argumento aumenta 2π quando o tempo aumenta T , temos $4T = 2\pi$ e, portanto, $T = \pi/2$ segundo. A massa está no equilíbrio quando $s(t) = 0$, isto é,

$$\cos(4t) = 0 \iff 4t = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Logo,

$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},$$

para os inteiros k que tornam $t \geq 0$. Neste caso, $k = 0, 1, 2, \dots$ ■

Exercícios

Ex. 5.45 Uma roda-gigante tem raio 18 m, seu centro está a 20 m do solo e completa uma volta a cada 40 s. Um passageiro inicia no ponto mais baixo. Dê uma função que modele sua altura.

Ex. 5.46 A temperatura de uma câmara varia periodicamente entre 16°C e 24°C , com período de 8 horas. Determine a amplitude e a linha média e dê um modelo cossenoidal que comece no valor máximo.

Ex. 5.47 Uma maré é modelada por

$$h(t) = 2,5 + 1,2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

com h em metros e t em horas. Determine altura média, amplitude e período.

Ex. 5.48 Um sinal sonoro puro é modelado por

$$s(t) = A \cos(2\pi ft), \quad f > 0.$$

Mostre que seu período é $1/f$.

Ex. 5.49 Uma oscilação senoidal tem máximo 9, mínimo 1 e período fundamental 10. No instante $t = 0$, seu valor é 3 e está diminuindo.

1. Determine A , B , D e φ no modelo $f(t) = D + A \sin(Bt + \varphi)$, com $A, B > 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

2. Explique por que informar apenas $f(0) = 3$ não determinaria a fase.

3. Determine o primeiro instante $t \geq 0$ em que ocorre um mínimo.

Ex. 5.50 A tensão de uma rede elétrica idealizada é modelada por

$$V(t) = 170 \sin(120\pi t),$$

com t em segundos. Determine a amplitude, o período e a frequência da oscilação.

Ex. 5.51 O número médio de horas de luz por dia em certa localidade é modelado, de forma simplificada, por

$$D(t) = 12 + 2,5 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 172)\right),$$

em que t é o número de dias após o início do ano. Determine a linha média, a amplitude, o período e o instante em que o modelo prevê o máximo.

5.8. Funções trigonométricas inversas

Senô, cosseno e tangente repetem seus valores. Por exemplo, há infinitos ângulos com seno igual a $1/2$. Assim, a pergunta “qual é o ângulo cujo seno é $1/2$?” não possui resposta única enquanto considerarmos toda a reta.

Para construir uma inversa, precisamos escolher um trecho do gráfico em que cada valor apareça uma única vez. Fazemos aqui o mesmo tipo de restrição que apareceu nas potências pares: restringimos o domínio a um intervalo em que a função seja bijetora e então invertemos essa restrição.

As escolhas usuais são as seguintes:

Função	domínio escolhido	imagem	inversa
seno	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	arcsen
cosseno	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	arccos
tangente	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\mathbb{R}$	arctg

A imagem de cada restrição é o domínio da inversa; o intervalo escolhido é a imagem da inversa. Outros intervalos poderiam ser usados, mas dariam outras escolhas de ângulo.

Por exemplo, $\arcsen(1/2)$ é o único ângulo de $[-\pi/2, \pi/2]$ cujo seno vale $1/2$: portanto, $\arcsen(1/2) = \pi/6$. A função **arco-seno** inverte o seno nesse intervalo, onde ele é estritamente crescente. Assim,

$$\begin{aligned}\sen(\arcsen x) &= x \quad (-1 \leq x \leq 1), \\ \arcsen(\sen x) &= x \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2).\end{aligned}$$

Exemplo 5.16.

Calcule

$$\arcsen\left(\sen \frac{3\pi}{4}\right)$$

e explique por que o resultado não é $3\pi/4$.

◁

Solução. Temos

$$\sen \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O arco-seno devolve o único ângulo de $[-\pi/2, \pi/2]$ cujo seno vale $\sqrt{2}/2$. Esse ângulo é $\pi/4$. Logo,

$$\arcsen\left(\sen \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

A composição $\arcsen(\sen x) = x$ só vale quando x pertence ao ramo $[-\pi/2, \pi/2]$ usado para definir a inversa. ■

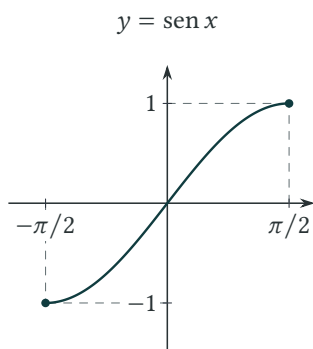


Figura 5.9. A função seno em $[-\pi/2, \pi/2]$

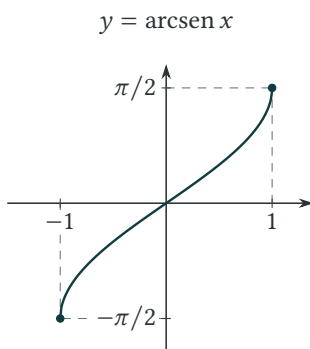


Figura 5.10. A função arco-seno

A mesma construção vale para cosseno e tangente. A função **arco-cosseno** inverte o cosseno em $[0, \pi]$, onde ele é estritamente decrescente e assume todos os valores

de $[-1, 1]$:

$$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad \arccos(\cos x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

A função **arco-tangente** inverte a tangente em $(-\pi/2, \pi/2)$, intervalo em que ela é estritamente crescente e assume todos os valores reais:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2).$$

Em ambos os casos, como no par seno/arco-seno mostrado acima, o gráfico da função inversa é o reflexo do gráfico da função restringida em relação à reta $y = x$.

Exemplo 5.17 — O intervalo principal do arco-cosseno.

Descreva $F(x) = \arccos(\cos x)$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$ e calcule $F(7\pi/6)$.

◁

Solução. O arco-cosseno deve devolver um ângulo de $[0, \pi]$. Se $-\pi \leq x \leq 0$, a paridade fornece $\cos x = \cos(-x)$, e $-x$ pertence ao intervalo principal. Se $0 \leq x \leq \pi$, o próprio x já está nesse intervalo. Finalmente, para $\pi \leq x \leq 2\pi$, vale $\cos x = \cos(2\pi - x)$, com $2\pi - x \in [0, \pi]$. Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 2\pi - x, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Em particular, $F(7\pi/6) = 5\pi/6$. O cosseno preserva o valor procurado, mas a inversa escolhe seu representante no intervalo principal. ■

Exemplo 5.18 — Arco-tangente e composição algébrica.

Calcule $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(5\pi/3))$ e reescreva $G(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(2x - 1))$ usando apenas operações algébricas.

◁

Solução. A tangente tem período π , e $5\pi/3 - 2\pi = -\pi/3$ pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim,

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Para a segunda parte, ponha $\theta = \operatorname{arctg}(2x - 1)$. Então $\operatorname{tg} \theta = 2x - 1$ e $-\pi/2 < \theta < \pi/2$; em particular, $\cos \theta > 0$. Da identidade $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2x - 1)^2}}.$$

Como $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{tg} \theta \cos \theta$, concluímos que

$$G(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{1 + (2x - 1)^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

O sinal positivo da raiz foi determinado pelo intervalo de θ . O numerador preserva o sinal do seno: $G(x)$ é negativo para $x < 1/2$, nulo em $1/2$ e positivo para $x > 1/2$. ■

As restrições impedem que a inversa devolva um ângulo fora do intervalo escolhido. Por exemplo, $5\pi/6$ tem seno $1/2$, mas

$$\arcsen(\sin(5\pi/6)) = \arcsen(1/2) = \pi/6.$$

É o mesmo cuidado com o domínio que apareceu em $\sqrt{x^2} = |x|$. Inverter uma função também não significa tomar seu recíproco: $\arcsen x$ não é $1/\sin x$.

Exercícios

- Ex. 5.52** Indique domínio e imagem de $\arcsen$, $\arccos$ e $\arctg$. **Ex. 5.53** Explique por que $\arcsen x$ não significa $1/\sin x$ e dê o nome da função $1/\sin x$.

Exercícios

- Ex. 5.54** Calcule

$$\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arctg(-1).$$

- Ex. 5.56** Calcule

$$\arctg\left(\tg \frac{3\pi}{4}\right).$$

- Ex. 5.55** Calcule

$$\sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right).$$

- Ex. 5.57** Determine o domínio da função

$$f(x) = \arcsen(2x - 1).$$

Exercícios

- Ex. 5.58** Determine as expressões nos intervalos indicados e justifique as escolhas de sinal e de ramo.

- $\arccos(\cos x)$ para $\pi \leq x \leq 3\pi$.
- $\arctg(\tg x)$ para $-3\pi/2 < x < -\pi/2$.
- $\sin(\arccos x)$ e $\cos(\arcsen x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.

- Mostre que o argumento do arco-cosseno pertence a $(-1, 1]$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e determine o domínio de H .
- Tome $\theta = \arctg |x|$. Determine o intervalo de 2θ e use a fórmula do cosseno do ângulo duplo para calcular $\cos(2\theta)$.
- Conclua que $H(x) = 2 \arctg |x|$ e determine a imagem de H .

- Ex. 5.59** *Aprofundamento.* Considere

$$H(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

5.9. Modelos geométricos

As funções trigonométricas também aparecem quando uma grandeza depende de uma direção. Nesses problemas, o passo principal é identificar o triângulo ou a projeção que traduz a situação física em seno, cosseno ou tangente.

Exemplo 5.19 — Altura de um prédio.

De um ponto situado a 35 m de um prédio, o ângulo de elevação até o topo é 58° . A câmera está a 1,6 m do chão. Estime a altura do prédio.

<

Solução. No modelo de terreno horizontal e prédio vertical, se H é a altura total,

$$\operatorname{tg} 58^\circ = \frac{H - 1,6}{35}.$$

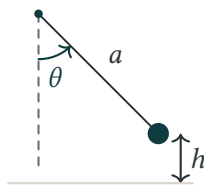
Logo,

$$H = 1,6 + 35 \operatorname{tg} 58^\circ \approx 57,6 \text{ m}.$$

O termo 1,6 é indispensável: a tangente fornece a diferença de altura entre a câmera e o topo, não a altura total do prédio. ■

Exercícios

Ex. 5.60 Para $a > 0$, um pêndulo de comprimento a é afastado de um ângulo θ da vertical, como na figura.



Obtenha a elevação vertical da massa em relação à posição mais baixa e indique um domínio adequado para θ

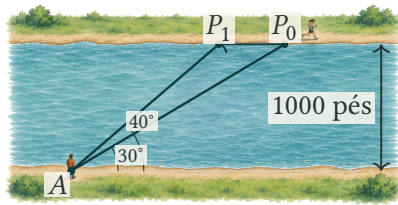
em uma oscilação sem voltas completas.

Ex. 5.61 Um observador está a 40 m da base de uma torre. O ângulo de elevação até o topo é 37° , e seus olhos estão a 1,7 m do chão. Estime a altura da torre, explicitando o modelo geométrico empregado.

Ex. 5.62 Após a decolagem, um avião sobe em linha reta, formando um ângulo de 20° com a horizontal, com velocidade de 200 pés por segundo. Quanto tempo ele leva para atingir uma altitude de 10 000 pés?

Exercícios

Ex. 5.63 Um observador está no ponto A , em uma das margens retas de um rio de 1000 pés de largura. Quando vê pela primeira vez uma corredora na margem oposta, a linha de visão forma um ângulo de 30° com a margem. Um minuto depois, esse ângulo é de 40° . Supondo que ela corra em linha reta, com velocidade constante e na direção indicada, determine sua velocidade.



Exercícios

Ex. 5.64 Uma escada de 6 m está apoiada numa parede vertical e forma um ângulo de 65° com o chão. A que altura a escada toca a parede?

Ex. 5.65 Uma rampa sobe 1,2 m ao longo de um deslocamento horizontal de 8 m. Determine o ângulo

que a rampa forma com a horizontal.

Ex. 5.66 Uma árvore projeta uma sombra de 14 m quando o ângulo de elevação do Sol é 38° . Estime a altura da árvore em terreno horizontal.

Síntese

A construção desenvolvida neste capítulo parte da circunferência unitária. Seno e cosseno são definidos pelas coordenadas de seus pontos; tangente, secante, cotangente e cossecante são obtidas por quocientes e recíprocos; para definir as funções inversas, restringem-se os domínios a intervalos de injetividade. A descrição completa dessas funções envolve, assim, sua origem geométrica, seus domínios, suas propriedades algébricas e seus gráficos.

6

Equações e Inequações

Neste capítulo

6.1	Equações	118
6.2	Inequações	129
6.3	Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas	140
6.4	Equações e Inequações Trigonométricas	144

Eu usava cada verdade encontrada como uma regra para descobrir outras verdades.

René Descartes, *Discurso do Método*

Conhecidas as principais famílias de funções, passamos a comparar seus valores. Uma equação pergunta onde duas funções coincidem; uma inequação pergunta onde uma delas fica acima ou abaixo da outra. Assim, os problemas deste capítulo podem ser lidos tanto algebricamente quanto por meio de gráficos. Essa dupla leitura será útil ao longo de todo o livro.

6.1. Equações

Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}$. Uma **equação** na incógnita x é uma igualdade da forma

$$f(x) = g(x).$$

O conjunto D é o **domínio da equação**. Resolver a equação significa determinar todos os valores $a \in D$ para os quais $f(a) = g(a)$. Esses valores são suas **soluções** ou **raízes**, e o conjunto de todas elas é o **conjunto-solução**:

$$\text{Sol}_{f(x)=g(x)} = \{a \in D \mid f(a) = g(a)\}.$$

Quando não houver risco de ambiguidade, escreveremos apenas Sol.

Há duas interpretações que convém manter em mente. No gráfico, as soluções são as abscissas dos pontos em que as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se intersectam. Equivalentemente, se $h = f - g$, resolver $f(x) = g(x)$ é determinar a imagem inversa de zero por h , isto é, encontrar os zeros de h .

As soluções de uma equação dependem do domínio considerado. Por exemplo, $2x = 1$ tem a solução $1/2$ quando o domínio é $\mathbb{R}$, mas não tem solução quando o domínio é $\mathbb{N}$. Quando o enunciado não especificar o domínio, adotaremos o domínio real máximo

Transformações e soluções

De $x = 1$ segue $x^2 = 1$, mas a segunda equação admite também $x = -1$. Elevar ao quadrado pode, portanto, acrescentar soluções. Quando uma transformação não é reversível, os valores encontrados devem ser verificados na equação original.

das expressões envolvidas. Assim, em $1/x = 2$, o valor $x = 0$ deve ser excluído antes de qualquer manipulação.

Em geral, resolvemos uma equação transformando-a em outra mais simples. Duas equações são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto-solução. Operações reversíveis, como somar o mesmo número aos dois membros ou multiplicá-los por um número não nulo, preservam a equivalência. Outras operações podem produzir apenas uma consequência da equação original. Elevar os dois membros ao quadrado, por exemplo, pode criar candidatos que não satisfazem a igualdade inicial.

Um roteiro para resolver equações

1. Determine o domínio em que todas as expressões estão definidas.
2. Simplifique a equação, indicando se cada transformação é uma equivalência ou apenas uma implicação.
3. Encontre os candidatos a solução.
4. Verifique no problema original os candidatos obtidos quando alguma etapa não for reversível ou quando houver restrições de domínio.
5. Apresente o conjunto-solução.

Por exemplo, -2 satisfaz $4x + 8 = 0$, pois $4(-2) + 8 = 0$. Nesse caso, as operações usadas para isolar x são reversíveis e mostram também que não há outra solução.

6.1.1. Equações Polinomiais

Equação linear

Uma **equação linear** na variável x pode ser escrita como

$$ax + b = 0,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Somar $-b$ aos dois membros e, em seguida, dividir por a produz apenas equações equivalentes:

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}.$$

Logo, $\text{Sol} = \{-b/a\}$.

Exemplo 6.1 — Uma equação linear.

Resolva $3x - 7 = 8$.

<

Solução. Somando 7 aos dois membros e dividindo o resultado por 3, obtemos

$$3x - 7 = 8 \iff 3x = 15 \iff x = 5.$$

Portanto, $\text{Sol} = \{5\}$. A substituição $3 \cdot 5 - 7 = 8$ confirma o resultado. ■

Antes de tratar das equações quadráticas, recordemos a propriedade do produto nulo: um produto de números reais é zero se, e somente se, ao menos um de seus fatores é zero. Quando um polinômio já está fatorado, essa propriedade costuma ser o caminho mais curto para encontrar suas raízes.

Exemplo 6.2 — Um polinômio fatorado.

Resolva $(x - 2)(x + 3) = 0$.

<

Solução. Pela propriedade do produto nulo,

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0.$$

Assim, $x = 2$ ou $x = -3$, e $\text{Sol} = \{-3, 2\}$. ■

Equação quadrática

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Uma **equação quadrática** é uma equação que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

A fórmula de resolução pode ser obtida completando um quadrado. Multiplicamos os dois membros por $4a \neq 0$ e reorganizamos os termos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \\ &\iff (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\iff (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Denotamos por $\Delta = b^2 - 4ac$ o **discriminante**. Se $\Delta < 0$, o quadrado do membro esquerdo não pode ser igual a Δ , e a equação não tem soluções reais. Se $\Delta \geq 0$, então

$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta},$$

de onde obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto,

$$\text{Sol}_{ax^2+bx+c=0} = \begin{cases} \emptyset, & \Delta < 0, \\ \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}, & \Delta \geq 0. \end{cases}$$

Exemplo 6.3 – Aplicação da fórmula quadrática.

Resolva $2x^2 + x - 3 = 0$.

◁

Solução. Neste caso, $a = 2$, $b = 1$ e $c = -3$. Logo,

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$$

e

$$x = \frac{-1 \pm 5}{4}.$$

As duas soluções são $x = 1$ e $x = -3/2$. Portanto, $\text{Sol} = \{-3/2, 1\}$. ■

Equações biquadráticas

Uma equação **biquadrática** na variável x é uma expressão da forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Para resolver uma equação biquadrática, fazemos a substituição $t = x^2$ e, portanto, $t^2 = x^4$. A equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ transforma-se na quadrática $at^2 + bt + c = 0$. Há, contudo, uma restrição que deve acompanhar a substituição: como $t = x^2$, necessariamente $t \geq 0$. Descartamos, assim, as raízes negativas em t . Para cada raiz $t > 0$, obtemos $x = \pm\sqrt{t}$; se $t = 0$, obtemos apenas $x = 0$.

Exemplo 6.4.

Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

◁

Solução. Fazendo a substituição $t = x^2$ obtemos $t^2 - 13t + 36 = 0$, cujas raízes são $t_1 = 4$ e $t_2 = 9$. Agora resolvemos na incógnita x . Lembrando que $t = x^2$ temos:

$$x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 9$$

e logo

$$\text{Sol} = \{-3, -2, 2, 3\}.$$

■

Equações polinomiais de grau mais alto nem sempre admitem uma fórmula simples de resolução. A fatoração, as substituições adequadas e informações sobre as raízes

tornam-se então especialmente importantes. Em um contexto mais amplo, temos o resultado seguinte.

6.5 Proposição

Um polinômio real não nulo de grau n possui no máximo n raízes reais distintas. Contadas as multiplicidades, o número de raízes reais também não pode exceder n .

Demonstração. Pelo Teorema do Fator, cada raiz distinta r fornece um fator $x - r$. Se $r_1, \dots, r_k$ são raízes distintas, então

$$(x - r_1) \cdots (x - r_k)$$

divide o polinômio. Esse produto tem grau k , logo $k \leq n$. Se uma raiz tem multiplicidade m , seu fator aparece m vezes; o mesmo argumento mostra que a soma das multiplicidades reais é no máximo n . ■

Em $\mathbb{R}$, o limite superior dado pela proposição não precisa ser atingido. Por exemplo, $x^2 + 1$ não possui raízes reais. Para o que faremos neste livro, basta distinguir fatores lineares reais de fatores quadráticos sem raízes reais.

Exercícios

Ex. 6.1 Dada uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com raízes x_1, x_2 mostre que:

1. A soma das raízes é igual a $-\frac{b}{a}$, isto é, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
2. O produto das raízes é igual a $\frac{c}{a}$, isto é, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Ex. 6.2 Na equação $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ determine m de modo que:

1. as raízes sejam opostas, isto é, $x_1 = -x_2$
2. as raízes sejam inversas, isto é, $x_1 = \frac{1}{x_2}$

Exercícios

Ex. 6.3 Resolva as seguintes equações polinômiais:

1. $2x - 3(x - 1) = 8(x + 3)$.
2. $x(x^2 - 4) = 0$.

$$3. (x^2 - 2)(x^2 - 9) = 0.$$

$$4. x^4 - 24x^2 - 25 = 0.$$

$$5. 2x^4 - 5x^2 + 3 = 0.$$

$$6. (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

(Dica: na última equação, faça $y = x^2 - 3x + 2$.)

Exercícios

Ex. 6.4 Sem efetuar a divisão, determine o resto da divisão de $q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 7$ por $x - 2$ e por $x + 1$. Justifique pelo teorema do resto.

Ex. 6.5 Determine todos os valores reais de k para os quais $x + 2$ seja fator de $r(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 8$. Para cada valor encontrado, fatore completamente r .

6.1.2. Equações Envolvendo Expressões Racionais

Ao resolver uma equação com expressões racionais $p(x)/q(x)$, começamos excluindo os valores para os quais algum denominador se anula. Depois disso, podemos multiplicar os dois membros por um denominador comum: essa multiplicação é uma equivalência no domínio já estabelecido, pois o fator usado é diferente de zero em todos os pontos desse domínio. Ao final, os candidatos devem ser comparados com as exclusões iniciais.

Exemplo 6.6 — Um primeiro exemplo.

Resolva

$$\frac{1}{x-1} = 2.$$

◁

Solução. O denominador impõe $x \neq 1$, de modo que $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Em D , podemos multiplicar os dois membros por $x - 1$:

$$\frac{1}{x-1} = 2 \iff 1 = 2(x-1) \iff x = \frac{3}{2}.$$

Como $3/2 \in D$, temos $\text{Sol} = \{3/2\}$. ■

O exemplo seguinte mostra por que a restrição de domínio deve ser registrada antes de eliminar denominadores.

Exemplo 6.7 — Um candidato excluído pelo domínio.

Resolva

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

◁

Solução. O domínio é $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Multiplicando por $x-1$, operação válida somente nesse domínio, obtemos $x = 1$. Esse é o único candidato, mas ele não pertence a D . Portanto, a equação não possui solução: $\text{Sol} = \emptyset$. ■

No próximo exemplo, o denominador comum elimina as frações, mas conduz a uma equação quadrática. Convém separar com clareza essas duas etapas.

Exemplo 6.8.

Resolva a equação:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

◁

Solução. *Domínio.* Os denominadores se anulam em $x = 0$ e $x = 1$. Logo,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Redução algébrica. Em D , colocamos as parcelas sobre o denominador comum $x(1-x)$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 &= \frac{x^2 + (x-2)(1-x) - x(1-x)}{x(1-x)} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2}{x(1-x)} = 0 \end{aligned}$$

Como o denominador não se anula em D , a última fração é zero exatamente quando seu numerador é zero. Assim,

$$x^2 + 2x - 2 = 0,$$

cujas raízes são $-1 - \sqrt{3}$ e $-1 + \sqrt{3}$.

Verificação. Nenhuma das duas raízes é 0 ou 1; ambas pertencem ao domínio. Portanto,

$$\text{Sol} = \{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}.$$

■

Exercícios

Ex. 6.6 Resolva as seguintes equações:

1. $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 5$

2. $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = 1$

3. $6x^{-2} - 17x^{-1} + 12 = 0.$

6.1.3. Equações Envolvendo Raízes

Nas equações com radicais, o domínio e o sinal dos membros orientam cada passo. Para uma raiz de índice par, o radicando deve ser não negativo; raízes de índice ímpar estão definidas para todo radicando real. Além disso, de $u = v$ sempre podemos concluir $u^2 = v^2$, mas a recíproca não vale sem informações sobre os sinais. Por exemplo, $x^2 = 1$ tem as soluções -1 e 1 , enquanto $x = 1$ tem apenas a segunda.

Em particular, a igualdade $\sqrt{u(x)} = v(x)$ equivale ao sistema

$$u(x) = v(x)^2, \quad u(x) \geq 0, \quad v(x) \geq 0.$$

Também é possível elevar ao quadrado, obter candidatos e substituí-los na equação original. A formulação pelo sistema, porém, ajuda a localizar desde o início as condições que tornam a operação reversível.

Exemplo 6.9 — Isolando uma raiz.

Resolva $\sqrt{x+5} = 3$.

<

Solução. O domínio exige $x \geq -5$. Como ambos os membros da igualdade são não negativos, podemos elevá-los ao quadrado preservando a equivalência:

$$\sqrt{x+5} = 3 \iff x+5 = 9 \iff x = 4.$$

O valor 4 pertence ao domínio, e $\text{Sol} = \{4\}$. ■

Exemplo 6.10 — Uma raiz e uma expressão variável.

Resolva $\sqrt{x+1} = x-1$.

<

Solução. O radical exige $x \geq -1$. Como o membro esquerdo é não negativo, uma solução também precisa satisfazer $x-1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Sob essa condição, quadrar preserva a equivalência:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = x-1 &\iff x+1 = (x-1)^2 \\ &\iff x(x-3) = 0. \end{aligned}$$

A equação polinomial fornece os candidatos 0 e 3, mas somente 3 satisfaz $x \geq 1$. De fato, $\sqrt{3+1} = 3-1$. Portanto, $\text{Sol} = \{3\}$. ■

Quando há mais de um radical, a estratégia usual é isolar um deles antes de elevar ao quadrado. Esse procedimento pode precisar ser repetido; a cada repetição, as condições de domínio e de sinal devem continuar visíveis.

Exemplo 6.11.

Resolva a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$.

<

Solução. *Domínio.* Os três radicandos devem ser não negativos:

$$D = \left[-\frac{4}{9}, \infty\right) \cap \left[\frac{4}{3}, \infty\right) \cap [0, \infty) = \left[\frac{4}{3}, \infty\right).$$

Redução. Em D , os dois membros são não negativos. Podemos, portanto, elevar a igualdade ao quadrado sem perder a equivalência:

$$\begin{aligned} (\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4})^2 &= (2\sqrt{3x})^2, \\ 12x + 2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} &= 12x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{(9x+4)(3x-4)} = 0,$$

o que fornece $x = -4/9$ ou $x = 4/3$.

Seleção e verificação. O primeiro valor não pertence ao domínio, de modo que é descartado. Para $x = 4/3$, a igualdade original se torna $4 + 0 = 4$. Assim,

$$\text{Sol} = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

■

Uma outra técnica frequentemente usada na resolução de equações envolvendo raízes é multiplicar a equação por uma expressão diferente de zero, em especial pelo conjugado.

Exemplo 6.12.

Resolva a equação $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 1$.

<

Solução. Escrevamos

$$A = \sqrt{3x^2 - 2x + 15} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{3x^2 - 2x + 8}.$$

Os dois radicandos são positivos para todo $x \in \mathbb{R}$: seus discriminantes são negativos e os coeficientes de x^2 são positivos. Portanto, o domínio é $\mathbb{R}$, e o conjugado $A + B$ é sempre positivo.

A equação original é

$$A - B = 1. \tag{6.1}$$

Multiplicando seus dois membros por $A + B$, obtemos

$$(A - B)(A + B) = A + B.$$

Como $A^2 - B^2 = 7$, segue que

$$A + B = 7. \tag{6.2}$$

Somando (6.1) e (6.2), encontramos $2A = 8$ e, portanto, $A = 4$. Logo,

$$3x^2 - 2x + 15 = 16 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

As raízes dessa equação são $x = -1/3$ e $x = 1$. Em ambos os casos, $A = 4$ e $B = 3$, de modo que $A - B = 1$. Portanto,

$$\text{Sol} = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}.$$

■

Exercícios

Ex. 6.7 Resolva as equações com radicais:

$$3. \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{15x+4}.$$

$$1. \sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x-1}.$$

$$4. \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1.$$

$$2. \sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4.$$

6.1.4. Equações Envolvendo Módulos

O módulo $|u|$ representa a distância entre u e 0 na reta real. Por isso, se $a > 0$, a equação $|u| = a$ descreve dois valores possíveis para u :

$$|u| = a \iff u = a \text{ ou } u = -a.$$

Se $a = 0$, temos apenas $u = 0$; se $a < 0$, não há solução. Quando aparecem vários módulos, os zeros das expressões internas dividem a reta em intervalos. Em cada intervalo, o sinal dessas expressões é conhecido e os módulos podem ser retirados de acordo com sua definição.

Exemplo 6.13.

Determine os números reais que satisfazem a igualdade

$$|x+1| = 3.$$

<

Solução. Aqui podemos aplicar diretamente a equivalência fundamental:

$$|x+1| = 3 \iff x+1 = 3 \text{ ou } x+1 = -3.$$

O primeiro caso fornece $x = 2$; o segundo, $x = -4$. Logo, $\text{Sol} = \{-4, 2\}$. Geometricamente, $x+1$ deve estar a uma distância 3 da origem. ■

Exemplo 6.14.

Resolva a equação

$$|x - 1| - 2|x - 2| = -3.$$

<

Solução. As expressões internas se anulam em $x = 1$ e $x = 2$. Esses dois pontos dividem a reta em três intervalos, que analisamos separadamente.

Caso (i): $x < 1$. Temos $|x - 1| = 1 - x$ e $|x - 2| = 2 - x$. Logo,

$$1 - x - 2(2 - x) = -3 \iff x = 0.$$

Como $0 < 1$, o valor encontrado é válido neste caso.

Caso (ii): $1 \leq x < 2$. Agora, $|x - 1| = x - 1$ e $|x - 2| = 2 - x$. Assim,

$$x - 1 - 2(2 - x) = -3 \iff x = \frac{2}{3}.$$

Esse valor não pertence ao intervalo considerado e deve ser descartado.

Caso (iii): $x \geq 2$. Os dois termos internos são não negativos, e

$$x - 1 - 2(x - 2) = -3 \iff x = 6.$$

Como $6 \geq 2$, esse valor é válido. Reunindo os casos, obtemos

$$\text{Sol} = \{0, 6\}.$$

■

Exercícios

Ex. 6.8 Resolva as seguintes equações com módulos:

1. $|x| = x^2$

2. $|x^2 - 3| = 2$

3. $|x| = x + 2$

4. $|-x + 2| = 2x + 1$

5. $|x + 1| + |x - 2| = 1$

6. $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$

7. $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.$

Exercícios

Ex. 6.9 Resolva $|2x - 5| + |x + 1| = 11$ mediante uma divisão em intervalos e represente as soluções na reta real.

6.2. Inequações

Nas equações, procuramos os valores em que duas expressões são iguais. Nas inequações, procuramos os valores em que uma delas é maior ou menor que a outra. Graficamente, resolver $f(x) > g(x)$ significa determinar as abscissas para as quais o gráfico de f está acima do gráfico de g .

Uma inequação em uma variável compara duas expressões por meio de um dos símbolos $<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$:

$$f(x) < g(x), \quad f(x) \leq g(x), \quad f(x) > g(x), \quad f(x) \geq g(x).$$

Seu domínio é $D = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$. Uma **solução** é um valor de D que torna verdadeira a desigualdade; o conjunto de todos esses valores é o **conjunto-solução**. Assim,

$$\text{Sol}_{f(x) < g(x)} = \{a \in D \mid f(a) < g(a)\},$$

$$\text{Sol}_{f(x) \leq g(x)} = \{a \in D \mid f(a) \leq g(a)\},$$

$$\text{Sol}_{f(x) > g(x)} = \{a \in D \mid f(a) > g(a)\},$$

$$\text{Sol}_{f(x) \geq g(x)} = \{a \in D \mid f(a) \geq g(a)\}.$$

Quando estiver claro a qual inequação nos referimos, usaremos simplesmente Sol.

Subtraindo $g(x)$ dos dois membros, toda inequação pode ser convertida em um estudo do sinal de $h(x) = f(x) - g(x)$. Por exemplo,

$$f(x) > g(x) \iff h(x) > 0.$$

Essa observação explica por que zeros, pontos excluídos do domínio e quadros de sinais aparecem repetidamente nesta seção.

Um roteiro para resolver inequações

1. Determine o domínio.
2. Leve todos os termos para um dos membros e, quando possível, fatore a expressão.
3. Identifique os pontos críticos: zeros do numerador, zeros do polinômio e valores excluídos por denominadores ou radicais.
4. Estude o sinal nos intervalos determinados por esses pontos.
5. Selecione os intervalos desejados e decida, ponto a ponto, quais extremos podem ser incluídos.

Intervalos de sinal constante

Os zeros dos fatores e os pontos excluídos do domínio dividem a reta em intervalos. Em cada um deles, o produto ou quociente de polinômios tem sinal constante. Basta, portanto, testar um ponto de cada intervalo; o sinal não precisa mudar ao passar por cada zero.

É especialmente perigoso multiplicar uma inequação por uma expressão cujo sinal é desconhecido: se ela for negativa, o sentido da desigualdade deve ser invertido; se

for zero, a operação pode nem sequer ser reversível. O quadro de sinais evita esse problema.

Exemplo 6.15.

Resolva $|x - 1| < |x + 3|$ e interprete geometricamente a desigualdade.

◁

Solução. Como ambos os membros são não negativos, podemos elevar ao quadrado:

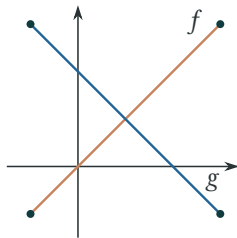
$$(x - 1)^2 < (x + 3)^2 \iff -2x + 1 < 6x + 9 \iff x > -1.$$

Geometricamente, comparamos as distâncias de x aos pontos 1 e -3 . O ponto médio é -1 ; à direita dele, x está mais perto de 1 do que de -3 , exatamente como indica o conjunto-solução $(-1, +\infty)$. ■

Exercícios

Ex. 6.10 No gráfico, estão representadas $f(x) = x$ e $g(x) = 2 - x$ no domínio $[-1, 3]$. Determine os conjuntos-solução de $f(x) = g(x)$, $f(x) > g(x)$ e $f(x) \leq g(x)$.

Ex. 6.11 Uma peça deve medir 25 mm, com tolerância estrita de 0,02 mm. Escreva uma inequação modular e determine os comprimentos aceitos.



6.2.1. Inequações Envolvendo Polinômios

Inequação linear

Uma inequação linear é uma inequação que pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax + b < 0 \quad ax + b \leq 0$$

$$ax + b > 0 \quad ax + b \geq 0$$

onde a, b são números reais e $a \neq 0$. Para resolvê-la, usamos as propriedades de ordem de $\mathbb{R}$.

Propriedades das desigualdades

1. Compatibilidade com a soma:

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c.$$

2. Compatibilidade com a multiplicação por número não negativo:

$$a \leq b, c \geq 0 \implies ac \leq bc.$$

3. Compatibilidade com a multiplicação por número não positivo:

$$a \leq b, c \leq 0 \implies ac \geq bc.$$

As propriedades também valem com $\geq$, invertendo as desigualdades correspondentes. Para desigualdades estritas, a soma preserva o sinal; a multiplicação preserva o sinal se $c > 0$ e o inverte se $c < 0$. Se $c = 0$, os dois produtos são iguais.

Exemplo 6.16 — Uma primeira inequação linear.

Resolva $2x - 3 < 5$.

<

Solução. Somar 3 aos dois membros e dividir por $2 > 0$ preserva o sentido da desigualdade:

$$2x - 3 < 5 \iff 2x < 8 \iff x < 4.$$

Logo, $\text{Sol} = (-\infty, 4)$.

■

Exemplo 6.17.

Resolva a inequação $\frac{1}{5}x + 125 \leq 335$.

<

Solução. Subtraímos 125 dos dois membros e multiplicamos por $5 > 0$. As duas operações preservam o sentido da desigualdade:

$$\frac{1}{5}x + 125 \leq 335 \iff \frac{1}{5}x \leq 210 \iff x \leq 1050.$$

Logo, $\text{Sol} = (-\infty, 1050]$.

■

Exemplo 6.18.

Resolva a inequação $-3x + 12 > 15$.

<

Solução. Subtraindo 12 dos dois membros, obtemos $-3x > 3$. Em seguida, dividimos por -3 . Como esse número é negativo, o sentido da desigualdade se inverte:

$$-3x > 3 \iff x < -1.$$

Portanto, $\text{Sol} = (-\infty, -1)$. ■

Para polinômios de grau maior, a fatoração transforma o problema em um estudo dos sinais dos fatores. Suponha, por exemplo, que

$$p(x) = a(x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_k)^{m_k}, \quad r_1 < \cdots < r_k.$$

Em cada intervalo determinado pelas raízes, o sinal de cada fator $x - r_i$ é fixo; por isso, o sinal do produto também é fixo. Ao atravessar uma raiz de multiplicidade ímpar, o sinal do fator correspondente muda; ao atravessar uma raiz de multiplicidade par, ele permanece o mesmo. Essa observação algébrica é suficiente para todos os quadros de sinais construídos a seguir.

Inequações quadráticas e polinomiais

Uma **inequação quadrática** é uma desigualdade que pode ser colocada em uma das formas:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c < 0 & \quad ax^2 + bx + c \leq 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 & \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \end{aligned}$$

onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Se $\Delta \geq 0$, resolvemos $ax^2 + bx + c = 0$ e fatoramos o polinômio por meio de suas raízes. Os fatores obtidos determinam o sinal em cada intervalo. Se $\Delta < 0$, a identidade

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

mostra diretamente que a expressão tem sempre o sinal de a , pois o termo entre colchetes é positivo.

Nos casos $<$ e $>$, as raízes não são incluídas. Nos casos $\leq$ e $\geq$, elas são incluídas, pois tornam o polinômio igual a zero.

Exemplo 6.19.

Resolva a inequação $x^2 - 7x + 10 < 0$.

<

Solução. As raízes de $x^2 - 7x + 10 = 0$ são 2 e 5, de modo que

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

Ambas têm multiplicidade 1; portanto, o sinal do produto muda ao atravessar cada uma delas. À direita de 5, os dois fatores são positivos. Percorrendo a reta para a esquerda, obtemos os sinais indicados no quadro.



Figura 6.1. Quadro de sinais de $(x - 2)(x - 5)$.

Queremos os pontos em que o produto é negativo. Isso ocorre exatamente entre as duas raízes. Como a desigualdade é estrita, 2 e 5 não pertencem ao conjunto-solução. Logo,

$$\text{Sol} = (2, 5).$$



Figura 6.2. Representação do conjunto-solução na reta real.

■

Exemplo 6.20 — Discussão geral da inequação quadrática.

Suponha $a > 0$. Para que valores de x vale

$$ax^2 + bx + c < 0?$$

◁

Solução. Escreva $\Delta = b^2 - 4ac$. Há três casos.

Caso (i): $\Delta > 0$. Sejam $x_1 < x_2$ as duas raízes reais. A fatoração

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

permite ler o sinal de cada fator. Como $a > 0$, o produto é positivo fora do intervalo entre as raízes e negativo dentro dele, conforme mostra o quadro.

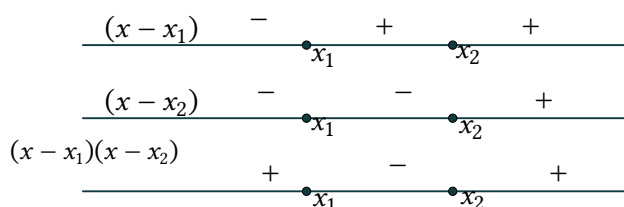


Figura 6.3. Quadro de sinais de $(x - x_1)(x - x_2)$.

Portanto, neste caso, $\text{Sol} = (x_1, x_2)$.

Caso (ii): $\Delta = 0$. Há uma raiz dupla $r = -b/(2a)$, e

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2 \geq 0.$$

O polinômio nunca é estritamente negativo; logo, $\text{Sol} = \emptyset$.

Caso (iii): $\Delta < 0$. Pela forma de quadrado completado apresentada acima, $ax^2 + bx + c$ tem sempre o sinal de a . Como $a > 0$, ele é positivo para todo x , e novamente $\text{Sol} = \emptyset$. ■

Exercícios

Ex. 6.12 Dado $a > 0$, para que valores de x , $ax^2 + bx + c > 0$? **Ex. 6.13** Dado $a < 0$, para que valores de x , $ax^2 + bx + c < 0$?

Exemplo 6.21.

Determine as soluções de

$$(x - 1)(x - 5)^3(x - 9)(x^2 + 9) \geq 0.$$

<

Solução. O fator $x^2 + 9$ é estritamente positivo para todo número real. Dividir por esse fator não altera o sentido da desigualdade; portanto, o problema equivale a

$$(x - 1)(x - 5)^3(x - 9) \geq 0.$$

Os pontos críticos são 1, 5 e 9. Todos têm multiplicidade ímpar: as multiplicidades são, respectivamente, 1, 3 e 1. Assim, o sinal do produto muda ao atravessar cada um desses pontos.

À direita de 9, todos os fatores são positivos, e o produto é positivo. Ao percorrer a reta para a esquerda, os sinais nos quatro intervalos são, portanto,

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, 9)$	$(9, \infty)$
$(x - 1)(x - 5)^3(x - 9)$	-	+	-	+

Escolhemos os intervalos de sinal positivo. Como a desigualdade é não estrita, incluímos também os três pontos em que o produto vale zero. Logo,

$$\text{Sol} = [1, 5] \cup [9, \infty).$$

■

Exercícios

Ex. 6.14 Resolva as seguintes desigualdades polinomiais:

1. $6 + x - x^2 \geq 0$

2. $x^2 - 1 > 0$

3. $x^2 - 4 \leq 0$

4. $2 - x - x^2 \geq 0$

5. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$

6. $(2x + 3)^2 \leq 4$

7. $(3x - 1)^2 > 9$

8. $(x - \pi)^3(x + \pi)(x + \sqrt{\pi})^{16} > 0$

9. $(x - \frac{\pi}{2})(x + \pi)(x + \sqrt{3})^{15} > 0$

10. $5 < 2x + 7 \leq 13$

11. $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 \geq 0$

6.2.2. Inequações Envolvendo Expressões Racionais

Uma inequação racional combina dois cuidados. Primeiro, os zeros dos denominadores são excluídos do domínio. Depois de reunir os termos em uma única fração, estudamos separadamente o sinal do numerador e o do denominador. Os zeros do numerador podem pertencer à solução de uma desigualdade não estrita; os zeros do denominador nunca pertencem, pois a expressão não está definida neles.

Exemplo 6.22 — Uma fração com dois pontos críticos.

Resolva

$$\frac{x - 1}{x + 2} \leq 0.$$

<

Solução. O domínio é $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. O numerador se anula em $x = 1$ e o denominador, em $x = -2$. Esses pontos dividem a reta em três intervalos:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x - 1$	—	—	+
$x + 2$	—	+	+
$\frac{x - 1}{x + 2}$	+	—	+

Escolhemos o intervalo de sinal negativo e incluímos $x = 1$, que zera o numerador. O ponto $x = -2$ permanece excluído. Logo,

$$\text{Sol} = (-2, 1].$$

■

Exemplo 6.23 — Três pontos críticos.

Resolva

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-3} > 0.$$

<

Solução. Os pontos críticos são -1 e 2 , que anulam o numerador, e 3 , que anula o denominador. À direita de 3 , todos os fatores são positivos. Como cada ponto crítico corresponde a um fator de multiplicidade ímpar, o sinal muda ao atravessar cada um deles. Assim, a fração é positiva em $(-1, 2)$ e em $(3, \infty)$. A desigualdade é estrita, portanto os zeros do numerador não são incluídos; o ponto 3 já estava fora do domínio. Concluimos que

$$\text{Sol} = (-1, 2) \cup (3, \infty).$$

■

Exercícios

Ex. 6.15 Resolva as seguintes desigualdades racionais:

1. $\frac{3}{2-2x} + \frac{15}{2+4x} < 1$

2. $\frac{2}{2-x} > \frac{6}{3-x}$

3. $\frac{4x^2 - 6x + 2}{4x^2 + 6x + 2} \geq 1$

4. $\frac{x-5}{4x^2 - 4x - 3} < 0$

5. $\frac{x+4}{2x} < 3$

6. $\frac{1}{x} < 3$

7. $-2 < \frac{1}{x} < 3$

8. $\frac{2x+3}{3x+1} < 1$

9. $\frac{4x-2}{x+4} \geq 2$

10. $2 \leq \frac{4x-2}{x+4} < 3$

11. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$

12. $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$

13. $\frac{2-x^2}{1-x} < x$

14. $\frac{x-\pi}{4x^2-3x-3} > 0$

15. $\frac{1-x}{2-x^2} \leq \frac{1}{x}$

16. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} > 1$

Exercícios

Ex. 6.16

Resolva a inequação

$$\frac{(x-3)(x+2)^2}{(x-1)(x+4)} \leq 0.$$

Apresente uma tabela de sinais e explique por que $x = -2$ pertence ao conjunto solução, ao passo que $x = 1$ não pertence.

6.2.3. Inequações Envolvendo Raízes

Para resolver inequações com raízes quadradas, precisamos controlar tanto o domínio quanto o efeito de elevar os dois membros ao quadrado. Em uma equação com um número finito de candidatos, podemos testar cada valor obtido. Nas inequações, em que as soluções costumam formar intervalos, é mais conveniente preservar a equivalência em cada etapa.

A função quadrado é estritamente crescente em $[0, \infty)$. Portanto, se $u, v \geq 0$, temos $u < v$ se, e somente se, $u^2 < v^2$; o mesmo vale com $\leq$, $>$ ou $\geq$. Assim, podemos elevar os dois membros ao quadrado depois de garantir que ambos são não negativos. Se um deles puder ser negativo, separamos os casos antes dessa operação. Vejamos como aplicar esse cuidado.

Exemplo 6.24 — Uma primeira inequação com raiz.

Resolva $\sqrt{x+1} \leq 2$.

◁

Solução. O domínio exige $x \geq -1$. Nesse domínio, os dois membros são não negativos, de modo que podemos quadrar preservando a equivalência:

$$\sqrt{x+1} \leq 2 \iff x+1 \leq 4 \iff x \leq 3.$$

Intersectando essa condição com o domínio, obtemos $\text{Sol} = [-1, 3]$. ■

Exemplo 6.25.

Resolva a desigualdade $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} > 1$.

◁

Solução. O domínio da inequação é $D = [-2, 3]$. Nesse domínio, a desigualdade equivale a

$$\sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{3-x}.$$

Os dois membros são não negativos. Elevando-os ao quadrado e simplificando, obtemos a desigualdade equivalente

$$2x - 2 > 2\sqrt{3-x}.$$

Temos dois casos a considerar.

Caso (i): Se $x \leq 1$, o membro esquerdo é não positivo e o direito é positivo. Logo, não há solução nesse caso.

Caso (ii): Se $x > 1$, os dois membros são não negativos. Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$4(x-1)^2 > 4(3-x) \iff 4x^2 - 4x - 8 > 0.$$

Essa inequação tem conjunto-solução $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Intersectando-o com a condição $x > 1$ e com o domínio $[-2, 3]$, encontramos

$$\text{Sol} = (2, 3].$$

■

Exemplo 6.26.

Resolva a desigualdade $\sqrt{9 - \sqrt{2 - x}} - \sqrt{6 - x} > 0$.

◁

Solução. A inequação está definida quando as três condições seguintes são satisfeitas:

- $6 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 6$;
- $2 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 2$;
- $9 - \sqrt{2 - x} \geq 0$, isto é, $\sqrt{2 - x} \leq 9$, que, sob a condição anterior, equivale a $x \geq -79$.

Portanto, o domínio é $D = [-79, 2]$. Nesse domínio, os dois membros da desigualdade

$$\sqrt{9 - \sqrt{2 - x}} > \sqrt{6 - x}$$

são não negativos. Elevando-os ao quadrado, obtemos a condição equivalente

$$x + 3 > \sqrt{2 - x}. \quad (6.3)$$

Como o membro direito é não negativo, precisamos ter $x > -3$. Para esses valores, podemos elevar novamente os dois membros ao quadrado, preservando a equivalência:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 &> 2-x, \\ x^2 + 7x + 7 &> 0. \end{aligned}$$

As raízes do polinômio são $(-7 - \sqrt{21})/2$ e $(-7 + \sqrt{21})/2$. Portanto, a última desigualdade equivale a

$$x \in \left(-\infty, \frac{-7 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7 + \sqrt{21}}{2}, \infty\right).$$

Resta intersectar esse conjunto com o domínio $[-79, 2]$ e com a condição $x > -3$ obtida em (6.3). Como as duas raízes são aproximadamente $-5,7913$ e $-1,2087$, respectivamente, concluímos que

$$\text{Sol} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} < x \leq 2\right\} = \left(\frac{-7 + \sqrt{21}}{2}, 2\right].$$



Exercícios

Ex. 6.17 Resolva as inequações com radicais:

$$2. \sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} > 0.$$

$$1. \sqrt{1 - 3x} - \sqrt{5 + x} > 1.$$

6.2.4. Inequações Envolvendo Módulos

A interpretação de $|u|$ como distância fornece equivalências úteis. Para $a > 0$,

$$|u| < a \iff -a < u < a,$$

$$|u| \leq a \iff -a \leq u \leq a,$$

$$|u| > a \iff u < -a \text{ ou } u > a,$$

$$|u| \geq a \iff u \leq -a \text{ ou } u \geq a.$$

Quando há vários módulos ou expressões mais complexas dentro deles, retomamos a separação em casos. Em cada intervalo determinado pelos zeros das expressões internas, retiramos os módulos e resolvemos a inequação correspondente, respeitando a condição que define o intervalo.

Exemplo 6.27 — Uma inequação modular simples.

Resolva $|2x - 1| < 5$.



Solução. Pela primeira equivalência,

$$|2x - 1| < 5 \iff -5 < 2x - 1 < 5.$$

Somando 1 aos três membros e dividindo-os por $2 > 0$, obtemos

$$-2 < x < 3.$$

Logo, $\text{Sol} = (-2, 3)$.



Exemplo 6.28.

Resolva a desigualdade $|x^2 - 1| - 2x \leq 0$



Solução. Temos dois casos a considerar.

Caso (i): Se $x^2 - 1 \geq 0$, então $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. A inequação torna-se

$$x^2 - 2x - 1 \leq 0,$$

cujo conjunto-solução é $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$. Intersectando-o com a condição deste caso, obtemos $[1, 1 + \sqrt{2}]$.

Caso (ii): Se $x^2 - 1 < 0$, então $x \in (-1, 1)$ e $|x^2 - 1| = 1 - x^2$. A inequação torna-se

$$1 - x^2 - 2x \leq 0 \iff x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

A última condição é satisfeita em $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, \infty)$. Intersectando esse conjunto com $(-1, 1)$, obtemos $[-1 + \sqrt{2}, 1)$.

Reunindo os dois casos, chegamos a

$$\text{Sol} = [-1 + \sqrt{2}, 1) \cup [1, 1 + \sqrt{2}] = [-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}].$$

Os dois extremos pertencem ao conjunto-solução: em ambos, $|x^2 - 1| - 2x = 0$, como exige a desigualdade não estrita do enunciado. ■

Exercícios

Ex. 6.18 Resolva as seguintes desigualdades com módulos:

1. $|x - 2| - |x + 2| > 2$.

2. $|x - 2| - x|x + 2| < 1$.

3. $|x^2 - 2| + 2x + 1 \geq 0$.

4. $\frac{9}{|x - 5| - 3} > |x - 2|$.

6.3. Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas

As funções exponenciais e logarítmicas estudadas no capítulo de funções exponenciais e logarítmicas permitem resolver novos tipos de comparação. Em ambos os casos, a monotonicidade é o princípio central: ela garante a injetividade usada nas equações e determina se o sentido de uma desigualdade deve ser preservado ou invertido.

6.3.1. Equações Exponenciais e Logarítmicas

Fixe uma base $a > 0$, com $a \neq 1$. Como a função $x \mapsto a^x$ é injetiva,

$$a^{u(x)} = a^{v(x)} \iff u(x) = v(x).$$

Por que a base muda o sentido?

Para $a > 1$, as funções exponencial e logarítmica são crescentes e preservam a ordem; para $0 < a < 1$, são decrescentes e a ordem se inverte. Nos logaritmos, os argumentos permanecem positivos.

O primeiro objetivo, portanto, é escrever os dois membros com a mesma base. Se isso não for possível diretamente, uma substituição pode converter a equação exponencial em uma equação polinomial.

Exemplo 6.29 — Expoentes com a mesma base.

Resolva $2^{x+1} = 16$.

<

Solução. Como $16 = 2^4$, a injetividade da função exponencial fornece

$$2^{x+1} = 2^4 \iff x + 1 = 4.$$

Logo, $\text{Sol} = \{3\}$. ■

Exemplo 6.30 — Uma substituição exponencial.

Resolva

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

<

Solução. Faça $t = 3^x$. Como $3^x > 0$, a nova incógnita deve satisfazer $t > 0$. Além disso, $3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, e a equação se torna

$$t^2 - 10t + 9 = 0 \iff (t - 1)(t - 9) = 0.$$

As duas raízes, $t = 1$ e $t = 9$, são positivas. Retornando à variável original,

$$3^x = 1 = 3^0 \quad \text{ou} \quad 3^x = 9 = 3^2.$$

Portanto, $\text{Sol} = \{0, 2\}$. ■

Nas equações logarítmicas, as condições de existência vêm antes do uso das propriedades algébricas. Para que $\log_a u(x)$ esteja definido, precisamos de $u(x) > 0$. Sob essa condição, a função logarítmica também é injetiva:

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \iff u(x) = v(x),$$

desde que $u(x) > 0$ e $v(x) > 0$.

Exemplo 6.31 — Isolando o logaritmo.

Resolva em $\mathbb{R}$ a equação

$$2 \ln(3x - 5) = 15.$$

<

Solução. O argumento do logaritmo deve ser positivo: $3x - 5 > 0$, ou seja, $x > 5/3$. Nesse domínio, isolamos o logaritmo e usamos sua relação com a exponencial:

$$\begin{aligned} 2 \ln(3x - 5) = 15 &\iff \ln(3x - 5) = \frac{15}{2} \\ &\iff 3x - 5 = e^{15/2} \\ &\iff x = \frac{e^{15/2} + 5}{3}. \end{aligned}$$

Como $e^{15/2} > 0$, o valor encontrado é maior que $5/3$ e satisfaz a restrição inicial. Portanto,

$$\text{Sol} = \left\{ \frac{e^{15/2} + 5}{3} \right\}, \quad x \approx 604,347.$$

■

Exemplo 6.32 — Domínio de uma equação logarítmica.

Resolva

$$\log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = 3.$$

<

Solução. *Domínio.* Precisamos de $x - 1 > 0$ e $x - 3 > 0$; portanto, $D = (3, \infty)$.

Redução. No domínio, podemos usar a propriedade do logaritmo do produto. Como $3 = \log_2 8$, temos

$$\begin{aligned} \log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = 3 &\iff \log_2((x - 1)(x - 3)) = \log_2 8 \\ &\iff (x - 1)(x - 3) = 8. \end{aligned}$$

Assim, $x^2 - 4x - 5 = 0$, cujas raízes são -1 e 5 . Somente 5 pertence ao domínio. Logo, $\text{Sol} = \{5\}$.

■

Exercícios

Ex. 6.19 Resolva em $\mathbb{R}$:

1. $5^{2x-1} = 125$.

2. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

3. $\log_3(x + 6) = 2$.

4. $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$.

Ex. 6.20 Explique por que

$$\log_2(x - 1) + \log_2(x - 5) = \log_2((x - 1)(x - 5))$$

não é uma equivalência válida em todo o domínio real da expressão à direita. Dê um valor de x que satisfaça o membro direito e não o esquerdo.

6.3.2. Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Quando $a > 1$, as funções a^x e $\log_a x$ são estritamente crescentes e preservam a ordem. Quando $0 < a < 1$, ambas são estritamente decrescentes e invertem a ordem. Em símbolos,

$$\begin{aligned} a > 1 : \quad a^u < a^v &\iff u < v, \quad \log_a u < \log_a v \iff u < v, \\ 0 < a < 1 : \quad a^u < a^v &\iff u > v, \quad \log_a u < \log_a v \iff u > v, \end{aligned}$$

com $u, v > 0$ nas comparações logarítmicas. As mesmas regras valem para os outros símbolos de desigualdade.

Exemplo 6.33 — Base maior que 1.

Resolva $3^{2x-1} \leq 9$.

<

Solução. Escrevendo $9 = 3^2$ e usando o fato de que $3 > 1$, obtemos

$$3^{2x-1} \leq 3^2 \iff 2x - 1 \leq 2 \iff x \leq \frac{3}{2}.$$

Portanto, $\text{Sol} = (-\infty, 3/2]$.

■

Exemplo 6.34 — Base entre 0 e 1.

Resolva

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 4.$$

<

Solução. Como $4 = (1/2)^{-2}$ e a função de base $1/2$ é decrescente, a comparação dos expoentes inverte o sentido da desigualdade:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \iff x - 1 < -2.$$

Logo, $\text{Sol} = (-\infty, -1)$.

■

Exemplo 6.35 — Uma inequação logarítmica.

Resolva

$$\log_{1/2}(x+1) \geq -1.$$

<

Solução. O domínio exige $x > -1$. Como $-1 = \log_{1/2} 2$ e a função logarítmica de base $1/2$ é decrescente,

$$\log_{1/2}(x+1) \geq \log_{1/2} 2 \iff x+1 \leq 2.$$

Intersectando $x \leq 1$ com o domínio, obtemos

$$\text{Sol} = (-1, 1].$$



Exercícios

Ex. 6.21 Resolva as equações e inequações a seguir:

1. $5^{x-1} = 25.$

2. $4^x = 8.$

3. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$

4. $\ln(x-1) = 0.$

5. $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1.$

6. $2^{x+1} < 8.$

7. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq 9.$

8. $\ln(x+2) > 0.$

Exercícios

Ex. 6.22 Resolva em x a equação

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 5 = 0.$$

Explique a substituição que a transforma em uma equação quadrática.

Exercícios

Ex. 6.23 Uma receita usa x gramas de concentrado e $3x + 18$ mL de água. A massa final deve estar entre 450 g e 630 g. Admitindo que 1 mL de água tenha massa de 1 g, modele a restrição por uma inequação e determine os valores admissíveis de x .

6.4. Equações e Inequações Trigonométricas

As funções trigonométricas apresentam uma diferença importante em relação às funções exponenciais e logarítmicas: elas são periódicas e, portanto, repetem seus valores. Assim, uma equação trigonométrica pode ter infinitas soluções, mesmo quando

Valor principal e solução geral

A função trigonométrica inversa fornece um valor principal, não a lista completa de soluções. Por exemplo, $\arcsen 0 = 0$, mas $\sen x = 0$ tem as soluções $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A solução geral

sua forma é muito simples. O procedimento natural é encontrar as soluções em um período e, em seguida, usar a periodicidade para descrever todas as demais.

As funções trigonométricas inversas fornecem um ângulo principal, mas não resolvem sozinhas o problema. Por exemplo, $\arcsen(1/2) = \pi/6$, embora o seno também valha $1/2$ em $5\pi/6$ e nos ângulos obtidos desses dois pela adição de voltas completas.

6.4.1. Equações Trigonômétricas

Considere primeiro uma equação da forma $\sen x = a$. Se $|a| > 1$, não há solução real, pois a imagem do seno é $[-1, 1]$. Se $|a| \leq 1$ e $\alpha = \arcsen a$, então

$$\sen x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

As duas famílias correspondem aos pontos de mesma altura na circunferência unitária. De modo semelhante, se $|a| \leq 1$ e $\alpha = \arccos a$, então

$$\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por fim, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\tg x = a \iff x = \arctg a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pois o período da tangente é π .

Exemplo 6.36 — Uma equação elementar.

Resolva em $\mathbb{R}$ a equação

$$\sen x = \frac{1}{2}.$$

◁

Solução. Em uma volta da circunferência unitária, o seno vale $1/2$ nos ângulos $\pi/6$ e $5\pi/6$. Como o seno tem período 2π , todas as soluções são

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se o problema restringisse x a um intervalo, bastaria selecionar dessas famílias os valores que pertencem a ele. ■

Quando a incógnita aparece dentro do argumento da função, resolvemos primeiro a equação trigonométrica no argumento e somente depois voltamos à variável original.

Exemplo 6.37 — Uma transformação no argumento.

Resolva em $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

◁

Solução. O cosseno vale $\sqrt{3}/2$ quando seu argumento é congruente a $\pi/6$ ou a $-\pi/6$, módulo 2π . Portanto,

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Resolvendo as duas equações lineares, obtemos

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

■

Algumas equações podem ser tratadas como equações algébricas em $\sin x$ ou $\cos x$. A substituição auxilia a fatoração, mas as raízes encontradas ainda precisam pertencer à imagem da função trigonométrica.

Exemplo 6.38 — Uma equação algébrica em $\cos x$.

Resolva em $\mathbb{R}$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

◁

Solução. Pondo $u = \cos x$, obtemos

$$2u^2 + u - 1 = (2u - 1)(u + 1) = 0.$$

As duas raízes, $u = 1/2$ e $u = -1$, pertencem a $[-1, 1]$. Logo, precisamos resolver

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -1.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

■

Exemplo 6.39 — Ângulo duplo e soluções em um intervalo.

Determine as soluções de

$$\cos(2x) - \cos x = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

◁

Solução. A identidade de ângulo duplo $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ permite escrever a equação apenas em termos de $\cos x$:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \iff (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

Pela propriedade do produto nulo,

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = 1.$$

Na circunferência unitária, o cosseno é a coordenada horizontal. No intervalo dado, essa coordenada vale $-1/2$ nos ângulos $2\pi/3$ e $4\pi/3$, e vale 1 nos ângulos 0 e 2π . Assim,

$$\text{Sol} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

Os dois extremos pertencem ao conjunto-solução: embora 0 e 2π correspondam ao mesmo ponto da circunferência, são valores distintos de x e ambos estão no intervalo pedido. ■

Exercícios

Ex. 6.24 Resolva em $\mathbb{R}$:

1. $2\sin x + 1 = 0$.

2. $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

3. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Ex. 6.25 Determine as soluções de $\cos(2x) = \sin x$ em $[0, 2\pi]$.

6.4.2. Inequações Trigonômicas

Nas inequações, a ideia é a mesma: analisamos primeiro um período e depois repetimos o conjunto obtido. O gráfico ou a circunferência unitária permitem identificar não apenas os pontos de igualdade, mas também os arcos nos quais a função fica acima ou abaixo do valor de referência.

Exemplo 6.40 — Uma inequação vista no gráfico.

Resolva em $\mathbb{R}$

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

<

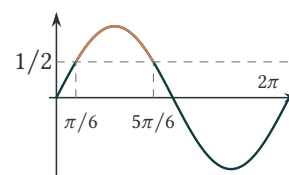


Figura 6.4. Em um período, $\sin x > 1/2$ entre $\pi/6$ e $5\pi/6$.

Solução. No intervalo $[0, 2\pi]$, a igualdade $\sin x = 1/2$ ocorre em $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$. Entre esses pontos, o gráfico do seno fica acima da reta $y = 1/2$. Como a desigualdade é estrita, os extremos não são incluídos. Repetindo esse intervalo a cada 2π , obtemos

$$\text{Sol} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

■

Quando aparece uma função que não está definida em todos os reais, seus pontos excluídos continuam fora do conjunto-solução. Em particular, nas inequações com tangente devemos respeitar os pontos $\pi/2 + k\pi$, nos quais $\cos x = 0$.

Exemplo 6.41 — Uma inequação com tangente.

Resolva $\text{tg } x > 1$ em $\mathbb{R}$, indicando explicitamente os pontos excluídos do domínio.

<

Solução. A tangente não está definida em $x = \pi/2 + k\pi$. Em cada intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ela é estritamente crescente e vale 1 em $\pi/4 + k\pi$. Portanto,

$$\text{Sol} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

■

Exercícios

Ex. 6.26 Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

1. $\sin x = \sqrt{3}/2$.

2. $\cos x = -\sqrt{2}/2$.

3. $\text{tg } x = -1$.

4. $\sin(2x) = 1$.

5. $\cos(x - \pi/3) = 1/2$.

6. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Exercícios

Ex. 6.27 Resolva as equações no intervalo $[0, 2\pi)$, usando as identidades trigonométricas antes de recorrer às funções inversas.

1. $\cos x + 2 \sec x = -3$.

2. $\text{tg}^2 x - \sec x - 1 = 0$.

3. $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.

4. $\text{cossec}^2 x - \cotg x - 1 = 0$.

Exercícios

Ex. 6.28 Resolva as inequações no intervalo $[0, 2\pi)$:

1. $\cos x < 0$.

2. $\sin x \leq -1/2$.

3. $\cos(2x) \geq 0$.

4. $\operatorname{tg} x > 1$.

Parte II.

Limites e Continuidade

7

Limites e continuidade de funções

Há muito tempo é um axioma meu que as pequenas coisas são infinitamente as mais importantes.

Sherlock Holmes, em *Um Caso de Identidade*, de Arthur Conan Doyle

Até aqui, funções, equações e inequações foram utilizadas para descrever valores e estabelecer relações entre eles. O conceito de limite introduz uma questão de natureza distinta: o comportamento de uma função quando a variável se aproxima de determinado ponto.

O problema da reta tangente fornece uma primeira interpretação geométrica dessa aproximação. Exemplos numéricos e gráficos ajudam a formular a definição de limite, da qual decorrerão as propriedades básicas e a noção de continuidade.

7.1. Aproximação e reta tangente

7.1.1. A reta tangente

Seja f uma função e seja P um ponto de seu gráfico. O problema consiste em determinar, quando existir, a reta tangente ao gráfico de f em P , como na Figura 7.1.

Quando a tangente possui inclinação finita em $P = (a, f(a))$, sua inclinação pode ser obtida a partir das inclinações das retas secantes que passam por P e por um segundo ponto Q do gráfico. Ao fazer Q aproximar-se de P , estudamos o comportamento dessas inclinações. A definição de limite permitirá formular essa aproximação de maneira precisa.

Neste capítulo

7.1 Aproximação e reta tangente	151
7.2 A noção de limite	153
7.3 Definição de limite	160
7.4 Limites Laterais	164
7.5 Propriedades do Limite de Funções	169
7.6 Continuidade	178
7.7 Propriedades das Funções Contínuas	185
7.8 * Demonstração das propriedades básicas de limite	191
7.9 * Continuidade uniforme	194

Das secantes à tangente

Mantemos P fixo e aproximamos Q ao longo do gráfico. Se as inclinações das secantes tendem a um mesmo número real, esse número determina a inclinação da tangente. Não é necessário que alguma secante chegue a coincidir com ela.

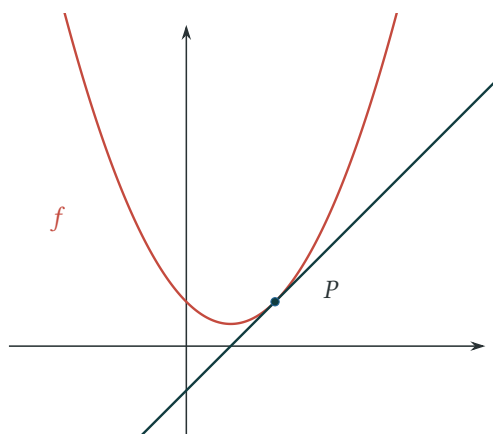


Figura 7.1. Reta tangente a f em P .

Quando a tangente não é vertical, sua determinação reduz-se ao cálculo de seu coeficiente angular. Para aproximá-lo, consideramos as retas secantes que passam por P e por um segundo ponto Q do gráfico.

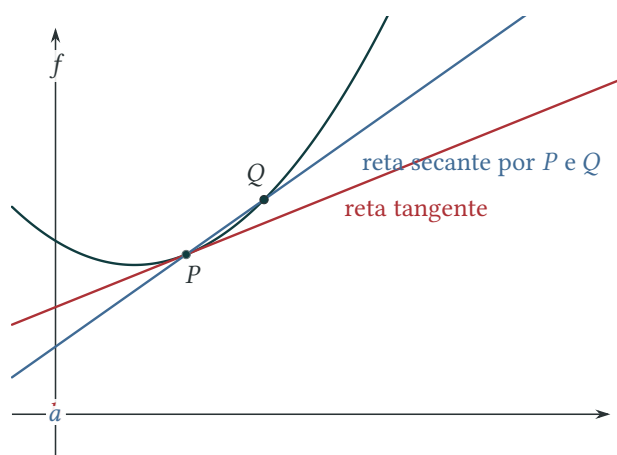


Figura 7.2. Retas secante e tangente ao gráfico de f .

Se considerarmos o ponto P com coordenadas $P : (x, f(x))$ e o ponto Q com coordenadas $Q : (x + h, f(x + h))$, então o coeficiente angular da reta secante é dado por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

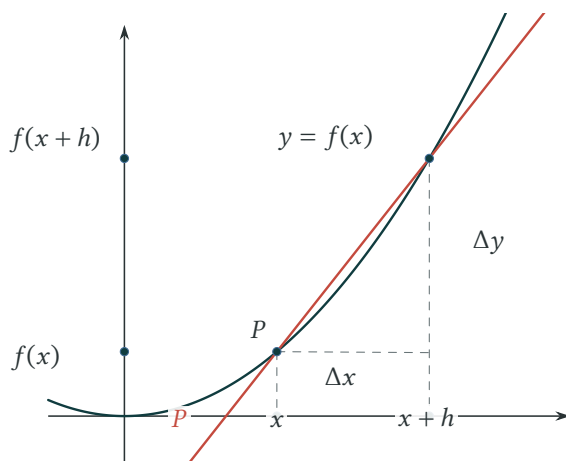


Figura 7.3. Quociente incremental entre os pontos P e Q .

Quando as inclinações das secantes por P e Q se aproximam de um único valor finito à medida que Q se aproxima de P , esse valor define a inclinação da reta tangente. Escrevemos então:

$$m_{\text{tg}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O limite anterior, se existir como número real, é denominado derivada da função f no ponto x .

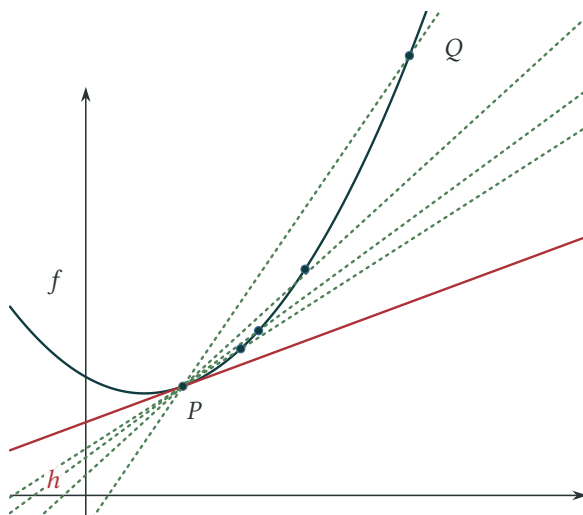


Figura 7.4. Conforme o ponto Q se aproxima de P as retas secantes se aproximam da reta tangente.

7.2. A noção de limite

O problema da reta tangente conduz ao estudo de uma função nas proximidades de um ponto. A noção de limite formaliza esse tipo de comportamento: interessa determinar como se comportam os valores de $f(x)$ quando x se aproxima de a , sem exigir que $x = a$.

O limite e o valor no ponto

O limite em a depende dos valores da função próximos de a , com $x \neq a$. Alterar apenas $f(a)$ não altera esse limite. Assim, o limite pode existir mesmo que $f(a)$ seja diferente dele ou não esteja definido.

Descrição Informal de Limite

Dizemos que o **limite da função** $f(x)$ é L quando x tende a a se a função $f(x)$ torna-se arbitrariamente próxima de L quando x está suficientemente próximo de a , mas diferente de a . Denotaremos tal fato por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

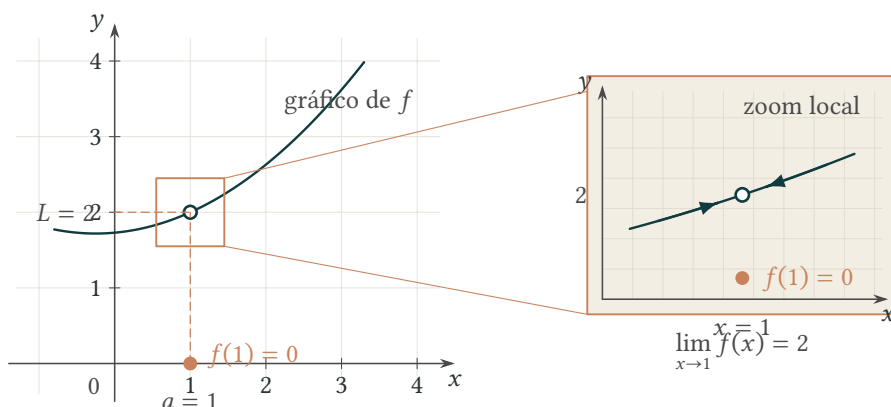


Figura 7.5. O limite descreve o comportamento local da função nas proximidades do ponto, independentemente do valor assumido nele. No exemplo, $f(1) = 0$, mas $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Para estudar o limite de f em a , é necessário que existam pontos do domínio, distintos de a , arbitrariamente próximos de a . O valor da função no próprio ponto, quando existe, não participa dessa análise. Os gráficos da Figura 7.6 mostram três exemplos de funções para as quais os limites existem e são L . No primeiro caso, a função f está definida em a e $f(a) = L$, na segunda, a função g não está definida em a e, na terceira, apesar da função estar definida em a temos que $h(a) \neq L$. Já os gráficos da Figura 7.7 ilustram duas situações nas quais o limite em a não existe.

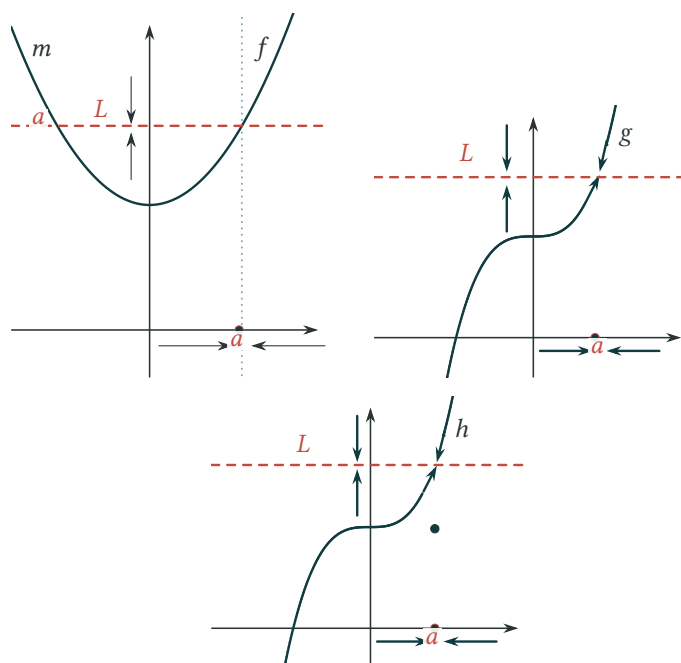


Figura 7.6. Exemplos de funções para as quais o limite quando x tende a a é L .

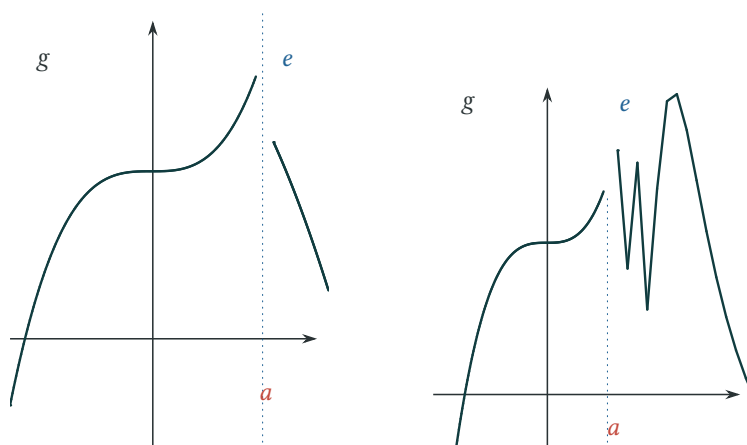


Figura 7.7. Exemplos de funções para as quais o limite não existe.

Consideremos inicialmente alguns exemplos em que o limite existe.

Exemplo 7.1.

Conjecture o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)$.

◁

Solução. Para valores de x próximos de 2, a tabela abaixo registra os valores correspondentes de $3x + 1$:

x	$3x + 1$	x	$3x + 1$
3	10	1	4
2,1	7,3	1,9	6,7
2,01	7,03	1,99	6,97
2,001	7,003	1,999	6,997
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	7	2	7

A tabela sugere que os valores da função se aproximam de 7 quando x se aproxima de 2. Essa observação pode ser expressa quantitativamente. Por exemplo,

$$|3x + 1 - 7| < 10^{-3}$$

é equivalente a

$$|x - 2| < \frac{10^{-3}}{3}.$$

De modo geral, dado $\varepsilon > 0$,

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \implies |3x + 1 - 7| < \varepsilon.$$

A distância entre os valores da função e 7 pode, portanto, ser controlada pela distância entre x e 2. Essa relação será formalizada na definição de limite. ■

Exemplo 7.2.

Conjecture o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

◁

Solução. A função não está definida em $x = 1$. Isso não impede o estudo do limite, pois interessam os valores assumidos em pontos do domínio próximos de 1. A tabela abaixo registra alguns desses valores.

x	$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$	x	$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$
10	20	0,5	1
1,1	2,2	0,9	1,8
1,01	2,02	0,99	1,98
1,001	2,002	0,999	1,998
1,0001	2,0002	0,9999	1,9998
1,00001	2,00002	0,99999	1,99998
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

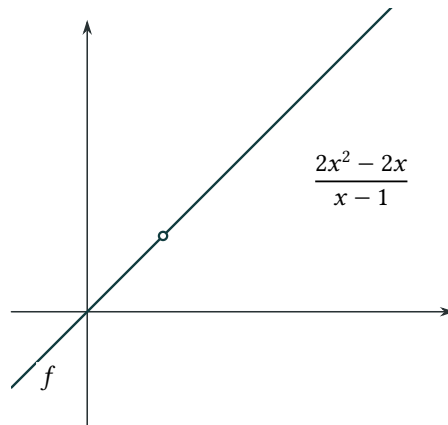


Figura 7.8. Gráfico de $\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

A tabela e a Figura 7.8 sugerem que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2.$$

Para $x \neq 1$,

$$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2x.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2 \right| = 2|x - 1|.$$

Consequentemente,

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \left| \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

O ponto $x = 1$ permanece fora do domínio, mas isso não interfere no comportamento da função em suas proximidades. ■

Exemplo 7.3.

Conjecture o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$.

◁

Solução. A expressão $\frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$ não está definida em $x = 0$.

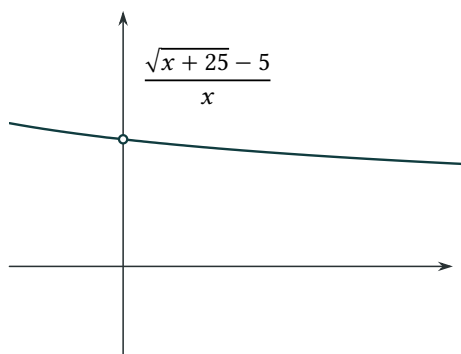


Figura 7.9. Gráfico de $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ nas proximidades de $x=0$, com o ponto removido.

Calculando valores dos dois lados de zero, obtemos:

$x < 0$	$\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$	$x > 0$	$\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$
-1	0,10102	1	0,09902
-0,1	0,10010	0,1	0,09990
-0,01	0,10001	0,01	0,09999
-0,001	0,10000	0,001	0,10000

Nesse caso, tanto o numerador quanto o denominador se anulam em $x=0$. Os valores dos dois lados sugerem a mesma aproximação, o que nos leva a conjecturar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = 0,1.$$

Calcularemos esse limite mais adiante no Exercício Resolvido 7.23. ■

Exemplos em que o limite não existe

Exemplo 7.4 — Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita.

Seja $g(x) = \frac{|x|}{x}$ então $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existe.

◁

Solução. Para valores positivos de x temos que

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1, \quad x > 0$$

e para valores negativos de x

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1, \quad x < 0$$

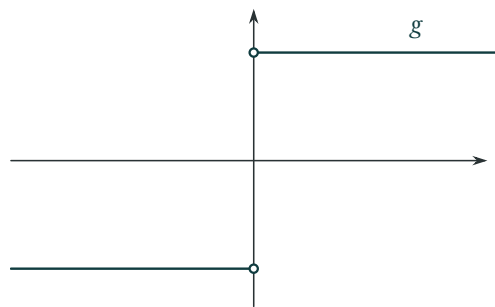


Figura 7.10. Não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

As igualdades anteriores mostram que mesmo para valores próximos a zero, teremos valores de x tais que $g(x) = 1$ e tais que $g(x) = -1$. Desse fato podemos intuir que o limite não existe, pois, independentemente do quão próximo x fique do zero, $g(x)$ não se aproxima de um único valor. Provaremos esse fato no Exercício Resolvido 7.10. ■

Exemplo 7.5 — Comportamento Ilimitado.

Não existe limite finito para $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$.

◁

Solução.

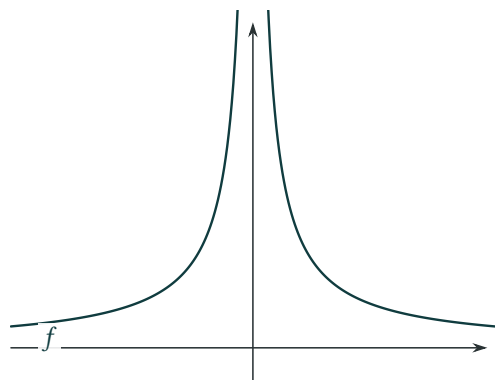


Figura 7.11. A função $1/|x|$ não tem limite finito quando x tende a zero.

Seja $h(x) = \frac{1}{|x|}$. Analisando a Figura 7.11 podemos perceber que quando x se aproxima de 0, tanto pela direita, isto é, por valores maiores que 0, como pela esquerda, isto é, por valores menores que 0, temos que $h(x)$ cresce de modo ilimitado. Ou seja, podemos fazer $h(x)$ maior que qualquer número real tomando x próximo de 0. Como $h(x)$ não se aproxima de nenhum número real, não existe limite finito. Esse comportamento será descrito adiante pela notação $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$. ■

7.3. Definição de limite

Os exemplos anteriores indicam que a distância entre $f(x)$ e L pode ser controlada impondo uma condição sobre a distância entre x e a . A definição de limite formaliza essa relação.

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ao estudar o limite em a , supomos apenas que existem pontos de $A \setminus \{a\}$ arbitrariamente próximos de a . Dizemos que um ponto y aproxima a com erro menor que δ quando $|y - a| < \delta$. De modo análogo, queremos tornar $|f(x) - L|$ menor que qualquer erro prescrito, tomando $x \in A \setminus \{a\}$ suficientemente próximo de a .

Os dois exemplos anteriores ilustram exatamente essa ideia. O Exercício Resolvido 7.2 mostra que $\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$ aproxima 2 com erro menor que 10^{-5} sempre que $x \neq 1$ aproxima 1 com erro menor que $10^{-5}/2$. O Exercício Resolvido 7.1 mostra que $3x + 1$ aproxima 7 com erro menor que ε sempre que x aproxima 2 com erro menor que $\varepsilon/3$. Chegamos, assim, à definição formal.

7.1 Definição Limite

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{a\}$,

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

O valor de $f(a)$, quando definido, não participa da definição do limite.

7.6 Observação

A notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que o limite existe e é igual a L .

A ordem de escolha

Dada qualquer tolerância $\varepsilon > 0$, procuramos $\delta > 0$ que garanta $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$, com x no domínio. O mesmo δ deve servir para todos esses pontos, não apenas para um valor escolhido de x .

Pela definição anterior, para demonstrar que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , teremos que garantir que os valores de $f(x)$ estão a uma distância menor que ε acima ou abaixo do valor limite L , como mostrado nos gráficos de 7.12. Para fazer isso, devemos escolher os valores de x que estão suficientemente perto de a , digamos, a uma distância $\delta > 0$ para a esquerda ou direita de a , como mostrado no segundo gráfico. A terceira figura ilustra que a escolha de um $x \neq a$ dentro do intervalo azul $(a - \delta, a + \delta)$ determina um $f(x)$ dentro do intervalo vermelho $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

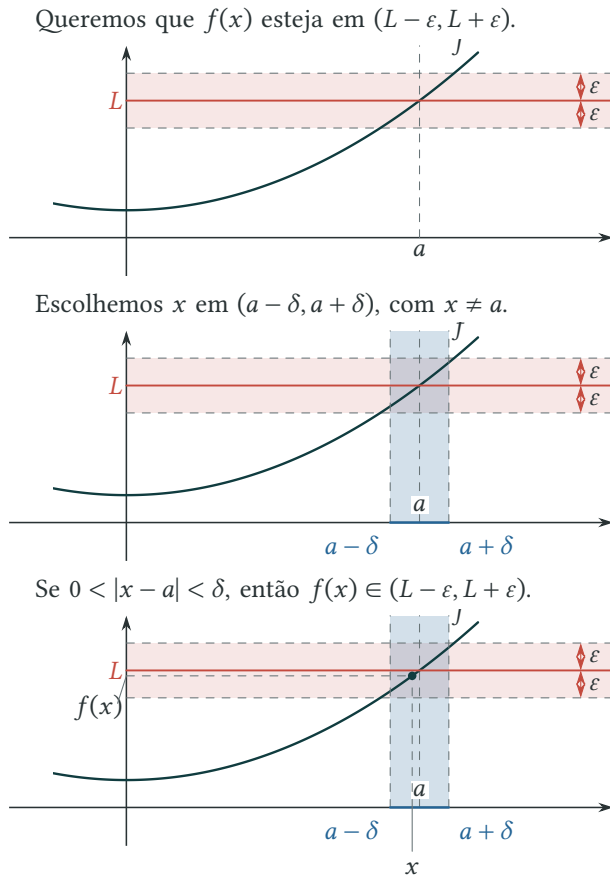


Figura 7.12. Definição de Limite

A definição de limite pode ser reescrita em linguagem simbólica como:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{a\}) \\ [|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

A afirmação anterior pode ser analisada separando-se suas diferentes condições:

- A afirmação de que $|f(x) - L| < \varepsilon$ nos diz que a função em x estará perto do número real L . Quão próximo? Menos de ε de distância.
- As condições $x \in A \setminus \{a\}$ e $|x - a| < \delta$ dizem que x é um ponto do domínio, diferente de a , a uma distância menor que δ de a .
- A implicação “se $x \in A \setminus \{a\}$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$ ” afirma que a condição de que x esteja δ próximo de a força a função $f(x)$ a estar ε próximo de L . Em outras palavras, ao controlar x permitindo uma variação inferior a δ , controlamos $f(x)$ com uma variação inferior a ε .
- Finalmente a afirmação inteira nos diz que para qualquer valor de ε , podemos encontrar um δ que satisfaz o item anterior.

Merece ser ressaltado que a definição de limite não nos fornece modos de determinar

o valor do limite L . Em uma demonstração a partir da definição o valor do limite deve ser conjecturado. Mais adiante forneceremos uma série de ferramentas que nos permitirão efetivamente calcular os limites. Assim, deve estar claro que uma etapa crucial na demonstração de um limite a partir da definição (por ε e δ) é encontrar o δ de modo que

$$x \in A \setminus \{a\}, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Para realizar tal tarefa uma estratégia é partir da desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ para entender como esse termo pode ser controlado por $0 < |x - a| < \delta$, em particular encontrar uma fatoração de $|f(x) - L|$ na qual $|x - a|$ é fator. Essa estratégia nos permite encontrar o δ . A etapa seguinte é mostrar que esse δ funciona. Ilustraremos essa estratégia nos exemplos a seguir.

Exemplo 7.7.

Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 10$

<

Solução. Começamos estimando $|f(x) - L| < \varepsilon$:

$$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon$$

Ou seja, $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Agora podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Fazemos essa escolha pois, assim, se $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ então

$$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

e logo

$$|3x + 4 - 10| < \varepsilon.$$

■

Exemplo 7.8.

Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

<

Solução. Como dito anteriormente, para demonstrar um limite temos que estimar $|f(x) - L|$ numa vizinhança de a . Nesse caso temos que $|f(x) - L| = |c - c| = 0$, independentemente dos valores de x . Ou seja, para qualquer δ , se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

■

Exemplo 7.9.

Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

<

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, como:

$$|f(x) - L| = |x - a|$$

Podemos escolher o valor de δ , fazendo $\delta = \varepsilon$. Assim, temos que: se $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$ então

$$|f(x) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

Ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$. ■

Exemplo 7.10 – Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita.

Seja $g(x) = \frac{|x|}{x}$ então $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existe.

<

Solução. Como:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Suponha, por absurdo, que exista um limite real L . Aplicando a definição com $\varepsilon = 1$, existiria $\delta > 0$ tal que $|g(x) - L| < 1$ para todo $0 < |x| < \delta$.

Escolhendo $x = \delta/2 > 0$, teríamos $|1 - L| < 1$, isto é, $0 < L < 2$. Escolhendo $x = -\delta/2 < 0$, teríamos $|-1 - L| < 1$, isto é, $-2 < L < 0$. As duas condições são incompatíveis. Portanto, o limite bilateral não existe. ■

Exercícios

Ex. 7.1 Calcule a função nos pontos dados. Use os resultados para conjecturar o valor do limite:

Ex. 7.2

Mostre a partir da definição os seguintes limites.

1. $f(x) = x^2 + 2x$ nos pontos 1,1 1,01 1,001;
 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x)$

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$

2. $g(x) = \frac{x-4}{x^2-x-12}$ nos pontos 4,1 4,01 4,001;
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

3. $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ nos pontos 1,1 1,01 1,001;
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Ex. 7.3 Calcule, se existir, o limite, ou demonstre que não existe:

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} |x - 2|$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

Ex. 7.4 Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Prove que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

7.4. Limites Laterais

A definição de limite considera todos os pontos do domínio que se aproximam de a . Quando o domínio tem pontos dos dois lados e o comportamento da função muda ao atravessar esse ponto, é útil examinar separadamente o que acontece à esquerda e à direita. Essa distinção também permite estudar o comportamento nos extremos de um intervalo.

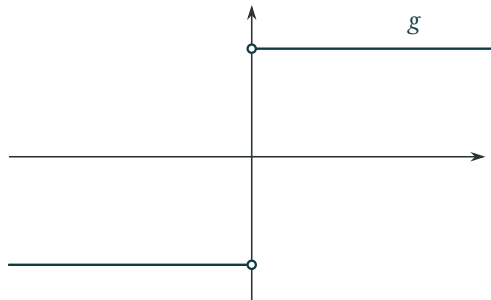


Figura 7.13. Gráfico de uma função com limites laterais distintos na origem.

Os dois lados devem concordar

Se o domínio permite aproximar a pela esquerda e pela direita, o limite em a só existe quando os dois limites laterais existem e têm o mesmo valor.

No Exercício Resolvido 7.10, vimos que a função g definida como

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

possui dois comportamentos distintos na vizinhança da origem. Se considerarmos valores maiores que 0 teremos que $g(x) = 1$ e logo

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = 1,$$

enquanto que se consideramos valores menores que 0 teremos que $g(x) = -1$ e logo

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} g(x) = -1.$$

Indicaremos tais fatos por:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$$

7.2 Definição

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, L \in \mathbb{R}$, e suponha que existam pontos de A arbitrariamente próximos de a pela esquerda. Dizemos que o **limite lateral** de $f(x)$ quando x tende a a **pela esquerda** é L

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in A, \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) [a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

De modo análogo, temos:

7.3 Definição

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, L \in \mathbb{R}$, e suponha que existam pontos de A arbitrariamente próximos de a pela direita. Dizemos que o **limite lateral** de $f(x)$ quando x tende a a **pela direita** é L

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in A, \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) [a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

A diferença essencial da definição de limites laterais em relação à definição de limites é que, nos limites laterais, estamos considerando apenas valores menores que a (ou seja, intervalos da forma $a - \delta < x < a$) nos limites pela esquerda e valores maiores que a (ou seja, intervalos da forma $a < x < a + \delta$) nos limites pela direita.

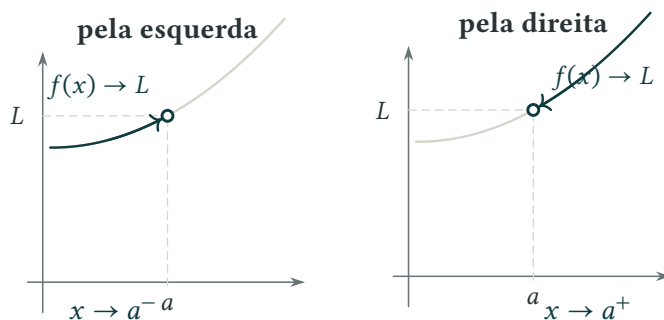


Figura 7.14. Interpretação geométrica dos limites laterais em $x = a$.

A próxima proposição relaciona a existência dos limites laterais e do limite para uma função f .

7.11 Teorema

Seja f definida em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em a , e seja $L \in \mathbb{R}$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

O teorema anterior pode ser usado para demonstrar a existência ou não de alguns limites, como ilustrado nos exemplos seguintes:

Exemplo 7.12.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

◁

Solução. A existência do limite será verificada por meio dos limites laterais. Para isso, começaremos calculando o limite pela direita. Como $|x| = x$ se $x > 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

De maneira análoga, calculemos o limite pela esquerda. Como $|x| = -x$ se $x < 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0.$$

Como ambos os limites laterais existem e são iguais, temos pelo teorema 7.11 que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

■

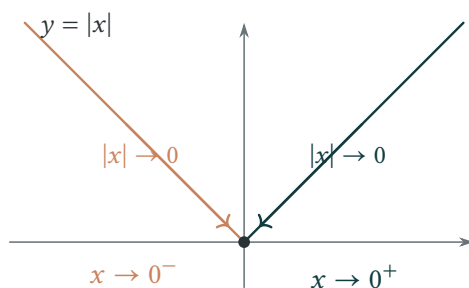


Figura 7.15. Limite $|x|$ quando x tende a 0.

Exemplo 7.13.

Considere a função *maior inteiro menor ou igual a x* , i.e.,

$$\llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, encontre

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket$$

◁

Solução. Começaremos calculando o limite $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket$. Para isso, seja x tal que $x > n$. Como estamos interessados no comportamento numa vizinhança de n , podemos assumir sem perda de generalidade que $x < n + 1$ e, assim, que $n < x < n + 1$. Dessa forma, como para todo número real x , com $n \leq x < n + 1$, tem-se que $\llbracket x \rrbracket = n$ e assim:

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket = n$$

Para o limite pela esquerda, se $n - 1 < x < n$, então $\llbracket x \rrbracket = n - 1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket = n - 1.$$

Como os limites laterais são distintos, $\lim_{x \rightarrow n} \llbracket x \rrbracket$ não existe para nenhum $n \in \mathbb{Z}$. ■

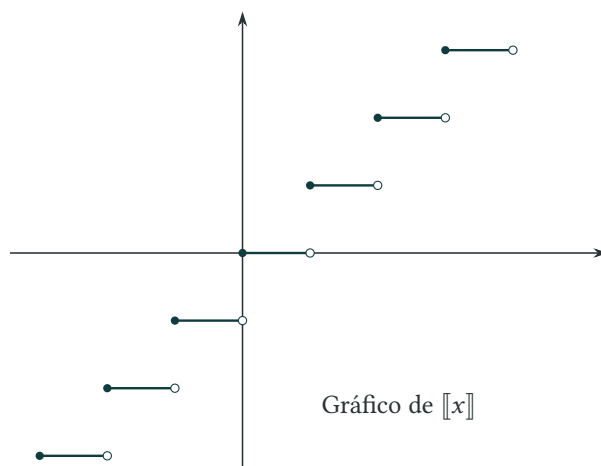


Figura 7.16. Comportamento lateral da função maior inteiro.

Exemplo 7.14 — Uma dose aplicada instantaneamente.

Imediatamente após a primeira dose de um medicamento, sua concentração no sangue é de 4 mg/L. A contribuição dessa dose decai, em função do tempo t medido em horas, segundo $4e^{-0,1t}$. No instante $t = 2$, uma segunda dose aumenta instantaneamente a concentração em 6 mg/L; a contribuição adicional passa então a decair

segundo $6e^{-0,1(t-2)}$. Construa uma função por partes para a concentração total $C(t)$, determine seus limites laterais em $t = 2$ e interprete a diferença entre eles.

◁

Solução. Antes de $t = 2$, apenas a primeira dose contribui para a concentração. A partir desse instante, somam-se as contribuições das duas doses. Portanto,

$$C(t) = \begin{cases} 4e^{-0,1t}, & 0 \leq t < 2, \\ 4e^{-0,1t} + 6e^{-0,1(t-2)}, & t \geq 2. \end{cases}$$

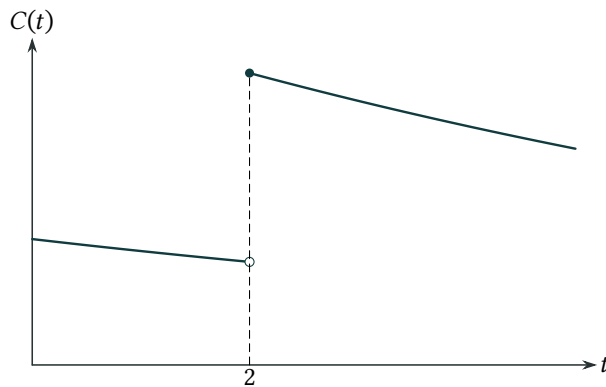
Antes da aplicação,

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} C(t) = 4e^{-0,2}.$$

Depois da aplicação,

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} C(t) = 4e^{-0,2} + 6.$$

Os limites laterais diferem em 6 mg/L; portanto, C é descontínua em $t = 2$. Nesse modelo idealizado, o salto representa uma dose que entra instantaneamente na corrente sanguínea.



■

Exercícios

Ex. 7.5 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Calcule os limites laterais em 0 e decida se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe.

quando $x \rightarrow 2$ e conclua sobre o limite bilateral.

Ex. 7.7 Determine C para que a função

$$h(x) = \begin{cases} 3x + C, & x < 1, \\ x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ex. 7.6 Calcule os limites laterais de

$$g(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

tenha limite quando $x \rightarrow 1$.

7.5. Propriedades do Limite de Funções

A definição permite justificar um limite controlando diretamente as distâncias envolvidas. Para calcular limites de expressões mais elaboradas, podemos aproveitar limites já conhecidos: as propriedades seguintes mostram como eles se combinam por meio das operações algébricas.

7.15 Proposição Propriedades do Limite

Seja c um número real e f e g duas funções reais tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Então:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B. \quad (\text{Limite da Soma})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B. \quad (\text{Limite da Diferença})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB. \quad (\text{Limite do Produto})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA. \quad (\text{Limite do Produto por Escalar})$$

$$5. \text{ Se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0 \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}. \quad (\text{Limite do Quociente})$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|. \quad (\text{Limite do Módulo})$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} (f(x)^n) = A^n \text{ para todo inteiro } n \geq 1 \quad (\text{Limite de Potências})$$

$$8. \text{ Se } f(x) \geq 0 \text{ numa vizinhança perfurada de } a, \text{ então } A \geq 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A} \quad (\text{Limite da Raiz})$$

A indeterminação 0/0

A forma 0/0 não determina um limite. Quando $x \rightarrow 0$, os quocientes x/x e x^2/x têm essa forma, mas seus limites são 1 e 0. Uma simplificação válida para $x \neq 0$ permite distinguir os dois comportamentos.

Usaremos as propriedades anteriores para calcular alguns limites:

Exemplo 7.16.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 2)$

<

Solução.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^3 + \lim_{x \rightarrow 2} (3x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2 && \text{por 1.} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^3 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 && \text{por 4. e 7.} \\ &= 8 + 6 + 2 = 16 \end{aligned}$$

■

Exemplo 7.17.

Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1}$

<

Solução. Se $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1) \neq 0$ então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^4 + 2)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)} && \text{por 5.} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^4 + \lim_{x \rightarrow a} 2}{\lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 1} && \text{por 1.} \\ &= \frac{a^4 + 2}{a^2 + 1} && \text{por 7.} \end{aligned}$$

■

De modo geral, para um polinômio $p(x)$ podemos calcular o seu limite no ponto a calculando simplesmente $p(a)$, ou seja, por substituição direta de x por a .

7.18 Teorema

Dado um polinômio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre o grau do polinômio. Se $p(x)$ é um polinômio de grau zero, ou seja, constante, a igualdade é clara. Por hipótese indutiva, suponha que a igualdade anterior seja válida para os polinômios de grau menor ou igual a $n - 1$. Agora, usando a hipótese indutiva, 1. e 3. temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} p(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} c_n x^{n-1} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right) + \lim_{x \rightarrow a} (c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0) \\ &= c_n a^{n-1} a + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0 = p(a). \end{aligned}$$

■

Usando a propriedade 5. temos que para funções racionais também vale substituição direta para o cálculo de limites:

7.19 Teorema

Sejam p e q polinômios, com $q(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Exemplo 7.20.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2}$.

<

Solução. Como $4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = 22 \neq 0$, o Teorema 7.19 permite calcular o limite por substituição direta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2} = \frac{8 + 24 + 2}{16 + 8 - 2} = \frac{34}{22} = \frac{17}{11}.$$

■

Ressaltamos que nem todos os limites podem ser calculados por substituição direta.

Quando tivermos $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ dizemos que temos uma

indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Nesses casos para o cálculo do limite temos que realizar uma simplificação antes da utilização das propriedades do limite. Duas estratégias de simplificação usuais são a fatoração e a multiplicação pelo conjugado, como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 7.21.

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{se } x < 2 \\ 2x - C & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determine o valor de C de modo que o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista.

<

Solução. Começemos pelo cálculo dos limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 5) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - C) = 4 - C$$

Pelo Teorema 7.11, para que o limite exista devemos ter:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

E assim $1 = 4 - C$, e logo $C = 3$.

■

Exemplo 7.22 — Indeterminação do tipo 0/0.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6}$.

<

Cancelamento no cálculo do limite

Para $x \neq 2$, o fator $x - 2$ é não nulo e pode ser cancelado. A expressão simplificada coincide

Solução. Nesse caso não podemos realizar substituição direta, tampouco usar a propriedade 5, pois o limite do denominador é 0. Como o limite do numerador também é 0, temos que 2 é raiz de ambos os polinômios e assim:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)}.$$

No cálculo do limite interessam apenas os pontos com $x \neq 2$, nos quais o fator $(x-2)$ pode ser simplificado. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{2}{5}.$$

■

Agora retornaremos ao Exercício Resolvido 7.3

Exemplo 7.23 — Indeterminação do tipo 0/0.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x}$.

<

Solução. Novamente não podemos realizar substituição direta nem tampouco usar a propriedade 5, pois o limite do denominador é 0. Nesse caso, multiplicaremos o numerador e o denominador pelo conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+25} - 5)(\sqrt{x+25} + 5)}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 25 - 25}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+25} + 5} \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x} = \frac{1}{10}$$

■

O papel do conjugado

A identidade $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ elimina a diferença de radicais. Neste exemplo, o produto do numerador por seu conjugado é x , que pode ser cancelado para $x \neq 0$. Multiplicar também o denominador pelo mesmo fator não nulo preserva o quociente.

7.24 Teorema Teorema do Confronto

Sejam f , g e h definidas em um intervalo contendo a , exceto possivelmente no próprio ponto, e suponha que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Ao aplicar o teorema a estimativas com módulos, usaremos repetidamente a desigualdade triangular $|u + v| \leq |u| + |v|$, estabelecida no capítulo *Números*.

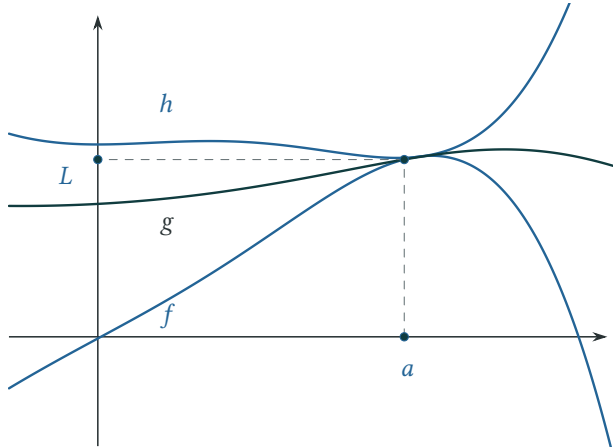


Figura 7.17. Teorema do Confronto

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, a hipótese $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fornece $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < |x - a| < \delta_1$. Analogamente, a hipótese $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ fornece $\delta_2 > 0$ para o qual $|h(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < |x - a| < \delta_2$.

Escolhemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, onde $(a-r, a+r)$ está contido no intervalo das hipóteses. Se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Subtraindo L , obtemos $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$, ou seja, $|g(x) - L| < \varepsilon$. Isso prova, pela definição, que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. ■

Exemplo 7.25.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

◁

Solução.

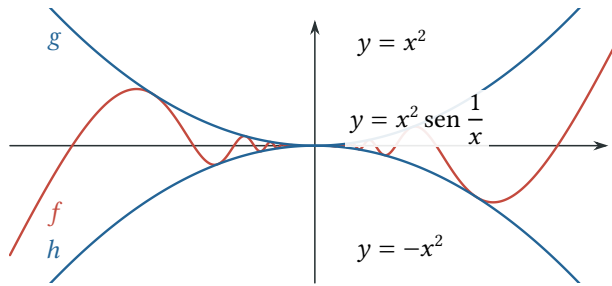


Figura 7.18. Confronto de $x^2 \sin(1/x)$ entre $-x^2$ e x^2 .

Como

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

temos que

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

■

7.26 Teorema Primeiro Limite Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

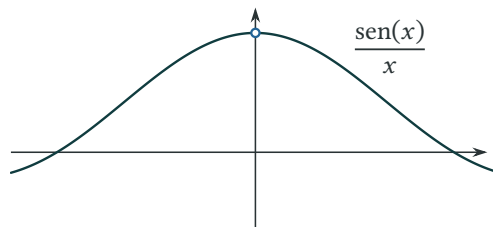


Figura 7.19. Gráfico de $\frac{\sin(x)}{x}$

Demonstração. Começaremos provando que, para $0 < |x| < \pi/2$, valem as desigualdades

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

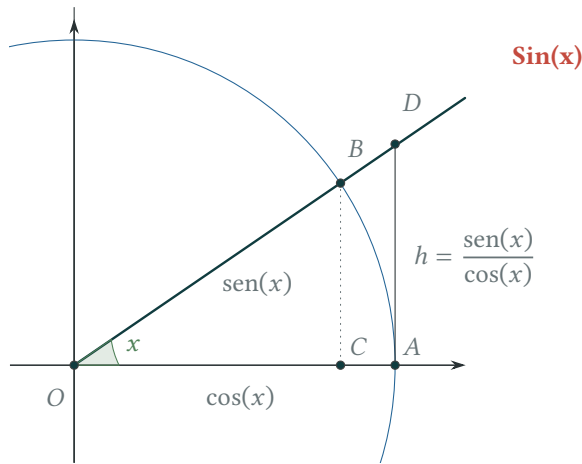


Figura 7.20. $\cos(x) < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$

Considere no círculo trigonométrico um ângulo x com $0 < x < \pi/2$, conforme apresentado na Figura 7.20. Como os triângulos $\triangle OCB$ e $\triangle OAD$ são semelhantes, se denotarmos por h o tamanho do segmento AD , por semelhança de triângulos temos que

$$\frac{h}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

e logo $\text{Área}(\triangle OAD) = \frac{\sin(x)}{2 \cos(x)}$. Se denotarmos a área do setor circular delimitado pelos pontos O, A, B por $\text{Área}(OAB)$, pela Figura 7.20, vemos que valem as desigualdades para $x < \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Área}(\triangle OBC) < \text{Área}(OAB) < \text{Área}(\triangle OAD).$$

$$\frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{\sin x}{2 \cos x}.$$

Dividindo por $\frac{\sin(x)}{2}$ temos:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Finalmente, comparando os inversos dos três termos, obtemos:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

O caso $-\pi/2 < x < 0$ segue substituindo x por $-x$, pois tanto $\cos x$ quanto $(\sin x)/x$ são funções pares.

Falta ainda estabelecer que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Comparando o triângulo OAB com o setor circular, obtemos $0 < \sin x < x$ para $0 < x < \pi/2$. Pela paridade, $|\sin x| \leq |x|$ para $|x| < \pi/2$. Como $\cos x > 0$ nesse intervalo,

$$0 \leq 1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \leq x^2.$$

O confronto mostra que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$; pela regra do quociente, $\lim_{x \rightarrow 0} 1/\cos x = 1$. Aplicando o Teorema do Confronto à desigualdade anterior, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

■

Exemplo 7.27.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

<

Solução. Não podemos usar diretamente a regra do quociente, pois $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Para eliminar a indeterminação, multiplicaremos o numerador e o denominador por $1 + \cos x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \frac{(1 + \cos(x))}{(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \frac{1}{(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

7.28 Teorema Mudança de Variáveis

Suponha que

- $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$,
- $g(x) \in \text{Dom } f$ para x numa vizinhança perfurada de a ,
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$,
- $g(x) \neq b$ numa vizinhança de a , com exceção, possivelmente, de a .

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$, existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < |y - b| < \eta \implies |f(y) - L| < \varepsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ e $g(x) \neq b$ numa vizinhança perfurada de a , existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies 0 < |g(x) - b| < \eta.$$

Logo, $|f(g(x)) - L| < \varepsilon$, como desejado.

■

Exemplo 7.29.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{sen}(x-2)}{x-2} = 1$.

<

Solução. Podemos aplicar o Teorema 7.28 com $f(y) = \text{sen}(y)/y$ para $y \neq 0$, $g(x) = x - 2$, $a = 2$ e $b = 0$. Para esse fim, observamos que $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de 2, excluindo o próprio 2. Dessa forma, como $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \text{sen}(y)/y = 1$, pelo Teorema 7.28, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{sen}(x-2)}{x-2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1$$

Exercícios

Ex. 7.8 Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 + x + 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x + 2)(x^3 + 2)$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{8x^3 + 4x + 4}$

6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$

7. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$

8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

Ex. 7.9 Forneça exemplos de funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ exista, mas que não existam $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Ex. 7.10 Determine a de modo que o limite exista.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax^2 - 9x + 9a}{x^2 - 5x + 6}$$

Ex. 7.11 Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0$.

Ex. 7.12 Use o limite fundamental para calcular os seguintes limites:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } 4x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 5x}{\text{sen } 3x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x - \text{sen } 3x}{x}$

Ex. 7.13 Calcule os limites, indicando a transformação algébrica empregada.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - 1}{x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{3x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2}.$$

Ex. 7.14 Calcule, quando fizer sentido em relação ao domínio, os limites laterais e depois determine o limite da função no ponto indicado.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x| + x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}.$$

7.6. Continuidade

O limite descreve o comportamento de uma função nas proximidades de um ponto, sem levar em conta necessariamente o valor assumido nesse ponto. A continuidade exige a compatibilidade entre esses dois dados.

Intuitivamente, uma função $f : A \rightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, é **contínua** em a quando valores de x suficientemente próximos de a produzem valores de $f(x)$ próximos de $f(a)$. Antes da definição formal, consideremos dois exemplos de descontinuidade.

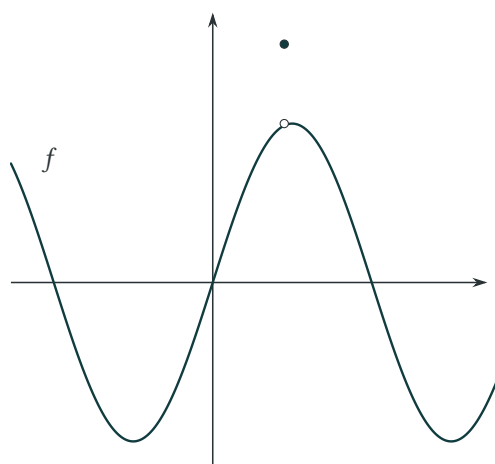


Figura 7.21. Função descontínua em $x = 1$.

Valor, limite e continuidade

A continuidade em a exige que $f(a)$ esteja definido e coincida com o limite da função nesse ponto. A existência do limite, sozinha, não basta: um valor atribuído de forma diferente pode produzir uma descontinuidade removível.

Na Figura 7.21, quando tomamos valores de x diferentes de 1, porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2, porém o valor de $f(1)$ é 3 e,

consequentemente, temos uma descontinuidade nesse ponto. Na Figura 7.22 temos um tipo distinto de descontinuidade. Quando nos aproximamos de 1 por valores maiores que 1, temos que $f(x)$ se aproxima de 2, enquanto que se aproximarmos de 1 por valores menores que 1, então $f(x)$ se aproxima de 1. Veja que isso se manifesta no “salto” da função no ponto $x = 1$.

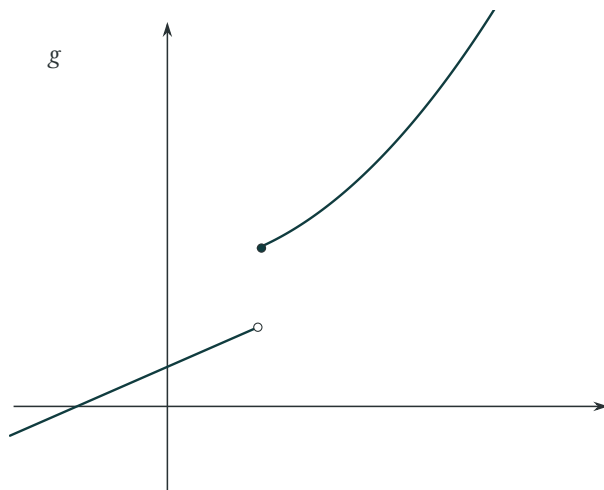


Figura 7.22. Função descontinua em $x = 1$

Considere agora a função $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 1$.

x	x^2
2	4
1,5	2,25
1,3	1,69
1,2	1,44
1,1	1,21
1,01	1,0201
1,001	1,002001

Intuitivamente, quando tomamos valores de x diferentes de 1 porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(1) = 1$ e, logo, a função $f(x) = x^2$ é contínua nesse ponto.

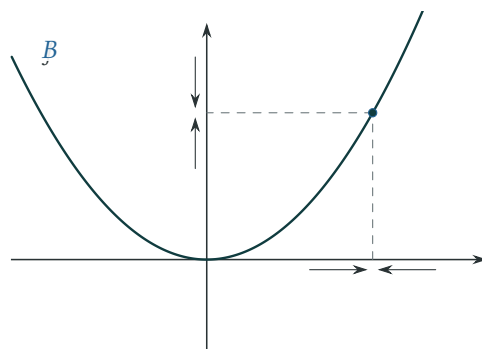


Figura 7.23. Continuidade de $f(x) = x^2$ em $x = 1$.

7.4 Definição

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $a \in A$. Dizemos que f é **contínua** em a quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad |x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Quando há pontos de $A \setminus \{a\}$ arbitrariamente próximos de a , essa condição equivale a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a).$$

Nos extremos de um intervalo, isso corresponde ao limite pelo lado pertencente ao domínio. Em pontos isolados, a condição é automaticamente satisfeita. Uma função contínua em todos os pontos de seu domínio é dita **contínua**.

7.5 Definição

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **contínua por partes** se existe uma partição finita $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que f é contínua em cada intervalo (x_{i-1}, x_i) e possui limites laterais finitos em seus extremos, tomados pelo interior desse intervalo. Os valores de f nos pontos da partição podem diferir desses limites. A exigência de limites finitos exclui, por exemplo, singularidades ilimitadas em pontos da partição.

Utilizaremos a definição de continuidade apresentada anteriormente para provarmos que algumas funções clássicas são contínuas:

7.30 Teorema

As seguintes funções são contínuas (em todo o seu domínio):

1. Funções Polinomiais.
2. Funções Racionais.
3. $\text{sen}(x)$

4. $\cos(x)$
5. c^x , com $c > 0$.

Demonstração. A demonstração da continuidade das funções polinomiais e racionais já foi feita implicitamente nos teoremas 7.18 e 7.19, nos quais provamos que dados polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com $q(a) \neq 0$ então:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Provaremos que $\sin(x)$ é contínua. Para isso começamos mostrando que $|\sin x| \leq |x|$ para $|x| < \pi/2$, com desigualdade estrita quando $x \neq 0$. Considere no círculo trigonométrico um ângulo x tal que $-\pi/2 < x < \pi/2$, conforme apresentado na Figura 7.24.

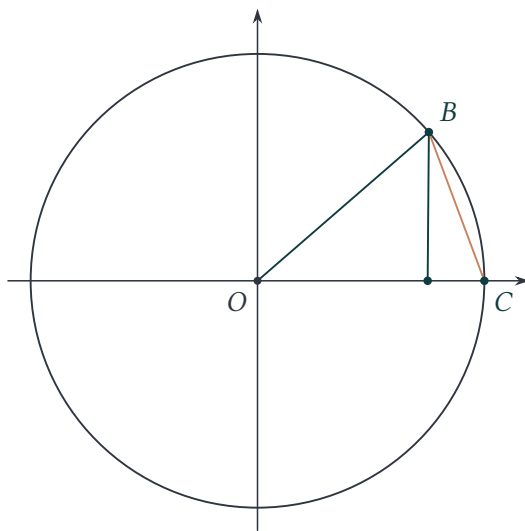


Figura 7.24. Comparação entre o triângulo e o setor circular para $0 < |x| < \pi/2$.

Geometricamente, considerando o círculo unitário, a área do triângulo OBC , que vale $|\sin(x)/2|$, é menor que a área do setor circular OBC , cujo valor é $|x|/2$. Consequentemente, $|\sin x| \leq |x|$ para $|x| < \pi/2$, incluindo o caso $x = 0$, no qual ambos os membros se anulam. Fixado $a \in \mathbb{R}$, a identidade da diferença de senos fornece, para $|x - a| < \pi$,

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2 \left| \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \min\{\pi, \varepsilon\}$. Se $|x - a| < \delta$, então $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Isso prova a continuidade do seno em qualquer a .

Para o cosseno, a identidade da diferença dá, de modo semelhante,

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &= 2 \left| \sin \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \left| \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \\ &\leq |x-a| \quad (|x-a| < \pi). \end{aligned}$$

A mesma escolha de δ prova a continuidade do cosseno. A continuidade da função exponencial será demonstrada no Teorema 8.22. ■

Como consequência das propriedades do limite, temos as seguintes propriedades da continuidade de funções.

7.31 Teorema

Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a , então:

1. $f(x) + g(x)$ é contínua em a
2. $f(x)g(x)$ é contínua em a
3. Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

Demonstração. Como f e g são contínuas em a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

As regras da soma e do produto fornecem

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = f(a)g(a) = (fg)(a).$$

Se $g(a) \neq 0$, a regra do quociente também se aplica:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Logo, as três funções são contínuas em a nas hipóteses indicadas. ■

Como corolário do teorema anterior, temos que a função $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, isto é, em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

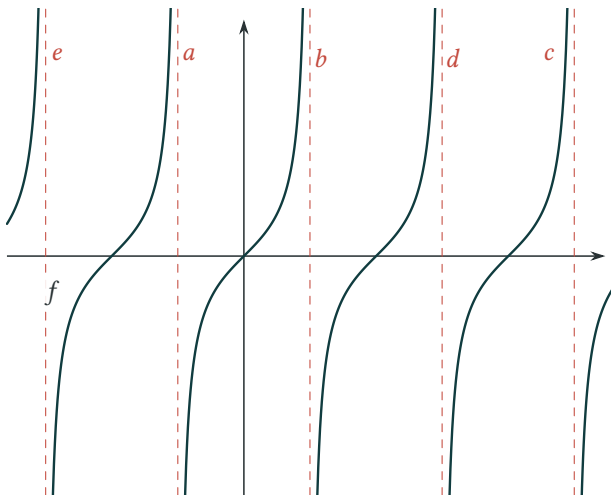


Figura 7.25. Gráfico da função tangente e suas assíntotas verticais.

Podemos calcular o limite de funções compostas $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x)$, desde que a função f seja contínua, calculando $f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$.

7.32 Teorema Limite da Composta

Sejam f e g funções tais que $\text{Im } g \subset \text{Dom } f$. Se f é contínua em b e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de f em b fornece $\eta > 0$ tal que $y \in \text{Dom } f$ e $|y - b| < \eta$ implicam $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|g(x) - b| < \eta$. Além disso, $g(x) \in \text{Dom } f$ pela hipótese. Logo,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon.$$

Esse argumento inclui os pontos em que $g(x) = b$, pois neles a última diferença é zero. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$. ■

O Teorema do Limite da Composta permite calcular limites utilizando a mudança de variáveis, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 7.33.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = 2$.

◁

Solução. Como já dissemos, as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas em todos os pontos. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4x + \pi) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^5) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4x + \pi)\right) + 2 = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^3 + x^5) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^5)\right) = 1.$$

Logo, por 5. temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^3 + x^5)} = 2$$

■

Como consequência do Teorema do Limite da Composta (Teorema 7.32), a composição de funções contínuas é contínua:

7.34 Teorema

Sejam $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$, definidas em vizinhanças adequadas de a e $g(a)$. Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a .

Finalmente, uma função contínua e estritamente monótona em um intervalo tem inversa contínua em sua imagem.

7.35 Teorema

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e estritamente monótona. Então $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ é contínua em $f(I)$, com a continuidade entendida relativamente ao domínio.

Como consequência do Teorema 7.35, temos que as funções trigonométricas inversas $\arcsen(x)$, $\arccos(x)$, $\arctg(x)$, etc. e a função $\log$ são contínuas em todos os pontos de seus respectivos domínios de definição. Ainda como consequência do Teorema 7.34, temos que as funções elementares, isto é, as funções que são obtidas por soma, produto, quociente e composição de funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos os pontos nos quais estão definidas.

Exercícios

Ex. 7.15 Use o limite da composta para calcular os seguintes limites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(x^2 + x + \frac{1}{1+x} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sen(x^2)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \arcsen \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \arctg \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} |-5x^3 + x|$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$6. \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4-t}{2-\sqrt{t}}$$

$$7. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a+t)^3 - a^3}{t}$$

Ex. 7.16 Calcule os seguintes limites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(3x^3 + \frac{1}{x} + 4 \right)$$

$$8. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+t} - 2}{t}$$

$$9. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+t} - \sqrt{2}}{t}$$

$$10. \text{ Prove que } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 2^{\cos(x)} = 0.$$

Ex. 7.17 Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a , então:

1. $f(x) + g(x)$ é contínua em a
2. $f(x) \cdot g(x)$ é contínua em a
3. Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

Ex. 7.18 Seja $f(x)$ a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ ax + 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine, se existir, o valor de a que torna f contínua em 0.

Ex. 7.19 Dado $g(x)$ a função definida como:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 1 & \text{se } x < b \\ ax^2 + 3 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Determine, se existir, o valor de a que torna g contínua em b , separando o caso $b = 0$.

Ex. 7.20 Dado $h(x)$ a função definida como:

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x) + 1 & \text{se } x < b \\ ax^2 + b & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Determine, se existir, o valor de a que torna h contínua em b , separando o caso $b = 0$.

Ex. 7.21 Uma tabela progressiva fictícia isenta os primeiros R\$ 2.000 de renda mensal, tributa em 10% apenas a parcela entre R\$ 2.000 e R\$ 4.000 e, acima disso, tributa em 20% somente a parcela excedente. O imposto total $T(x)$ sobre uma renda $x \geq 0$ é, portanto,

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2000, \\ 0,10(x - 2000), & 2000 < x \leq 4000, \\ 200 + 0,20(x - 4000), & x > 4000. \end{cases}$$

1. Calcule $T(3500)$ e $T(5000)$.
2. Calcule os limites laterais de T em 2000 e 4000. A função é contínua nesses pontos?
3. Para $x > 0$, defina a alíquota efetiva por $E(x) = T(x)/x$. Ela é contínua nos dois pontos de corte? Calcule $E(3500)$ e $E(5000)$.
4. Explique por que a alíquota marginal muda nos pontos de corte sem que o imposto total dê um salto.

7.7. Propriedades das Funções Contínuas

A continuidade é definida ponto a ponto, mas, quando vale em todo um intervalo, impõe condições ao comportamento da função nesse conjunto. Os próximos resultados mostram como ela garante a existência de valores intermediários e, em intervalos fechados e limitados, de valores extremos.

7.7.1. Teorema do Valor Intermediário

Geometricamente, o Teorema do Valor Intermediário nos diz que o gráfico de uma função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, ou, dito de outra forma,

Continuidade no intervalo

Em um intervalo fechado e limitado, a continuidade garante tanto valores intermediários quanto a existência de máximo e mínimo. Sem essas hipóteses, as conclusões podem falhar. Isso não significa que toda função fora dessas condições deixe de ter extremos.

dado d entre $f(a)$ e $f(b)$, o gráfico de $f(x)$ deve interceptar a reta horizontal $y = d$.

7.36 Teorema Teorema do Valor Intermediário

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, para todo d estritamente entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

A demonstração desse teorema será apresentada adiante, nesta seção. Antes, apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Valor Intermediário na demonstração de existência de soluções para equações. Para tanto, por sua utilidade, enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário em uma forma especial e mais restrita: o Teorema de Bolzano.

7.37 Teorema Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos. Então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

O teorema anterior nos diz que o gráfico de uma função contínua que, em a está abaixo do eixo x e em b está acima dele (ou vice-versa), em algum ponto do intervalo $[a, b]$ deve cruzar o eixo x .

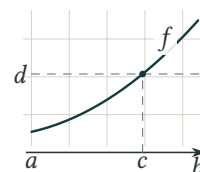


Figura 7.26. Interpretação geométrica do Teorema do Valor Intermediário.

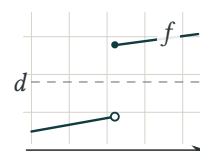


Figura 7.27. O Teorema do Valor Intermediário só é válido para funções contínuas.

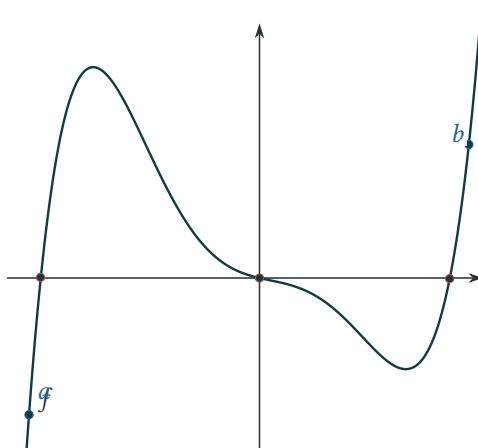


Figura 7.28. Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano.

Exemplo 7.38.

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, \pi]$.

◁

Solução. A equação é equivalente a

$$\cos x - x = 0.$$

Considere $g(x) = \cos x - x$, função contínua em $[0, \pi]$. Temos

$$g(0) = 1 > 0 \quad \text{e} \quad g(\pi) = -1 - \pi < 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $g(c) = 0$. Portanto, $\cos c = c$. ■

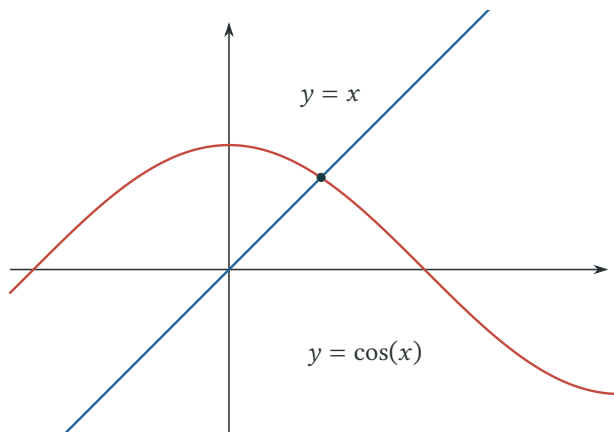


Figura 7.29. Intersecção dos gráficos de $y = x$ e $y = \cos(x)$

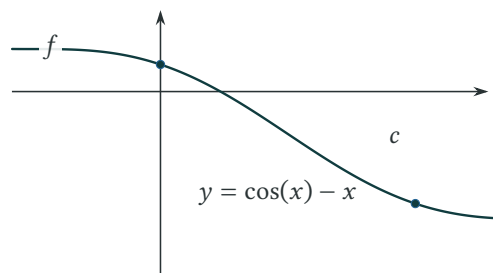


Figura 7.30. Gráfico de $y = \cos(x) - x$.

Exemplo 7.39.

Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$.

◁

Solução. A equação é equivalente a

$$3^x - x^2 - 4 = 0.$$

Considere $g(x) = 3^x - x^2 - 4$, que é contínua em $[1, 2]$. Como

$$g(1) = -2 < 0 \quad \text{e} \quad g(2) = 1 > 0,$$

o Teorema de Bolzano garante a existência de $c \in (1, 2)$ tal que $g(c) = 0$. Logo, $3^c = c^2 + 4$. ■

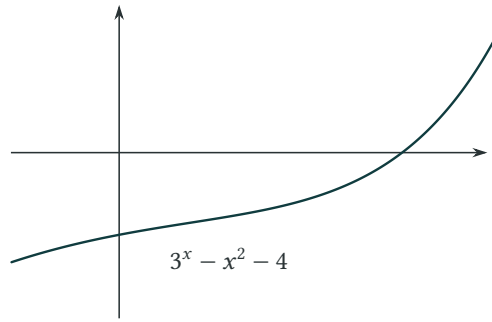


Figura 7.31. Gráfico de $y = 3^x - x^2 - 4$.

Demonstração do Teorema 7.36. Suponha primeiro que $f(a) < d < f(b)$ e considere

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < d\}.$$

Esse conjunto é não vazio, pois $a \in S$, e é limitado superiormente por b . Pela completude dos reais, existe $c = \sup S$.

A continuidade em a e a desigualdade $f(a) < d$ garantem que alguns pontos à direita de a ainda pertencem a S ; logo, $c > a$. Analogamente, a continuidade em b e $f(b) > d$ garantem um intervalo à esquerda de b que não contém pontos de S ; portanto, $c < b$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ de modo que $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$ e $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ para $|x - c| < \delta$. Pela propriedade do supremo, existe $x^* \in S$ com $c - \delta < x^* \leq c$. Assim,

$$f(c) < f(x^*) + \varepsilon < d + \varepsilon.$$

Por outro lado, qualquer $\hat{x} \in (c, c + \delta)$ não pertence a S , pois c é cota superior. Logo, $f(\hat{x}) \geq d$ e

$$f(c) > f(\hat{x}) - \varepsilon \geq d - \varepsilon.$$

Portanto, $|f(c) - d| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Pelo Exercício 1.21, concluímos que $f(c) = d$.

Se $f(b) < d < f(a)$, aplicamos o caso já provado à função contínua $-f$ e ao valor $-d$. Obtemos novamente um ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = d$. ■

7.40 Proposição

Uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de um intervalo fechado $I = [a, b]$ em $\mathbb{R}$ é injetiva se e somente se a função f é estritamente monotônica em $[a, b]$.

Demonstração. Se f é estritamente monótona e $x < y$, então $f(x) \neq f(y)$; logo, f é injetora.

Reciprocamente, suponha f contínua e injetora. Para quaisquer $x_1 < x_2 < x_3$ em $[a, b]$, afirmamos que $f(x_2)$ está estritamente entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Se isso não ocorresse, as três imagens seriam distintas, e uma das imagens dos extremos estaria entre as outras duas. Se $f(x_1)$ estivesse entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$, o Teorema do Valor Intermediário em $[x_2, x_3]$ daria um ponto x' com $f(x') = f(x_1)$, contradizendo a injetividade. Se $f(x_3)$ estivesse entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, aplicaríamos o mesmo argumento em $[x_1, x_2]$.

Se $a = b$, a conclusão é imediata. Caso contrário, suponha primeiro $f(a) < f(b)$. A propriedade que acabamos de provar mostra que $f(a) < f(x) < f(b)$ para $a < x < b$. Para $a < x < y < b$, aplicada ao trio a, x, y , ela fornece $f(a) < f(x) < f(y)$. Incluindo os extremos, concluímos que f é estritamente crescente em $[a, b]$. Se $f(a) > f(b)$, aplicamos esse raciocínio a $-f$ e concluímos que f é estritamente decrescente. ■

Exercícios

- Ex. 7.22** Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$
- Ex. 7.25** Mostre que a equação $x^2 = \sqrt{x+2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$
- Ex. 7.23** Mostre que a equação $4^{x^2} - 2(x+1)^2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$
- Ex. 7.26** Mostre que a equação $\operatorname{tg}(x) = x$ tem pelo menos 3 soluções.
- Ex. 7.24** Mostre que a equação $x^5 - x^2 - 2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$
- Ex. 7.27** Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número real b tal que $b^2 = 2$, conclua que existe raiz quadrada de 2.

Exercícios

- Ex. 7.28** Construa uma tabela de valores à esquerda e à direita de 2 para $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Conjecture o limite e explique por que o valor de $f(2)$ não é necessário para calculá-lo.
- Ex. 7.29** Calcule, se existir,
- $$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}.$$
- No primeiro item, compare explicitamente os limites laterais.
- Ex. 7.30** Determine a e b de modo que
- $$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 2, \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$
- seja contínua em 2 e tenha limite 1 nesse ponto. Há mais de uma solução?
- Ex. 7.31** A vazão de uma bomba é $Q(t) = 18 - 3t$ L/min para $0 \leq t < 4$. No instante $t = 4$ min, ela é
- desligada, e $Q(t) = 0$ para $t \geq 4$. Esboce Q em $[0, 6]$ e classifique sua continuidade em $t = 4$.
- Ex. 7.32** Pela definição ε - δ , demonstre que
- $$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$
- Escolha um δ em função de ε e verifique a implicação completa.
- Ex. 7.33** Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que $x^3 + x - 5 = 0$ tem pelo menos uma raiz em $(1, 2)$. Em seguida, explique por que o teorema não afirma que a raiz seja única.
- Ex. 7.34** Determine todos os pontos de descontinuidade de
- $$g(x) = \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(x + 1)}.$$
- Classifique cada um como removível ou infinita e proponha uma redefinição que elimine a removível.

Ex. 7.35 Um termostato mantém a temperatura entre $20,0^\circ\text{C}$ e $20,5^\circ\text{C}$, ligando o aquecedor ao atingir o limite inferior e desligando-o no superior. Discuta se a temperatura e o estado *ligado/desligado* são funções contínuas do tempo.

Ex. 7.36 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(3x))/x^2$ usando uma identidade trigonométrica e o primeiro limite fundamental.

Ex. 7.37 Dê um contraexemplo para cada afirmação: “a soma de duas funções descontínuas é descontínua” e “se f^2 é contínua, então f é contínua”.

7.7.2. Valores Extremos

O Teorema do Valor Intermediário garante que a função não omite valores entre duas imagens. Outra questão é saber se ela atinge um maior e um menor valor. Em um intervalo fechado e limitado, a continuidade também fornece essa garantia.

7.41 Teorema

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f é limitada nesse intervalo.

Demonstração. Suponha que f não seja limitada em $[a, b]$. Divida o intervalo ao meio e escolha uma metade na qual f continue ilimitada; se isso ocorrer nas duas, escolha a metade esquerda. Repetindo o processo, obtemos intervalos encaixados

$$[a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n},$$

em cada um dos quais f é ilimitada.

Seja

$$A = \{a_n : n \geq 0\} \quad \text{e} \quad \alpha = \sup A.$$

Como os intervalos são encaixados, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para todo n . Pela continuidade de f em α , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - \alpha| < \delta \implies |f(x)| < 1 + |f(\alpha)|.$$

Escolha n com $(b - a)/2^n < \delta$. Então todo $x \in [a_n, b_n]$ satisfaz $|x - \alpha| < \delta$, e portanto f é limitada em $[a_n, b_n]$, contradizendo a escolha desse intervalo. ■

7.6 Definição

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo global (ou absoluto)** de f , se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **máximo global**.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo global** de f , se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo global**.
- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

7.42 Teorema Teorema de Weierstrass do Valor Extremo

Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então f atinge seus valores máximos e mínimos em $[a, b]$.

Demonstração. Como f é limitada em $[a, b]$, sua imagem possui supremo; denotemos esse número por M . Suponha que f não atinja M . Então $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$, e a função

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

é contínua no intervalo. Pelo Teorema 7.41, ela também é limitada: existe $K > 0$ tal que $g(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Logo,

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K \implies f(x) \leq M - \frac{1}{K}.$$

Isso produz uma cota superior para $f([a, b])$ menor que M , contrariando a definição de supremo. Portanto, f atinge seu máximo. Aplicando o mesmo argumento a $-f$, concluímos que f também atinge seu mínimo. ■

Exercícios

Ex. 7.38 Determine o máximo e o mínimo absolutos de

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

em $[-1, 5]$.

Ex. 7.39 Determine os valores máximo e mínimo de $f(x) = 1/x$ em $[1, 4]$.

Ex. 7.40 Explique por que o Teorema de Weierstrass não garante máximo e mínimo para $f(x) = x$ no intervalo aberto $(0, 1)$, e verifique diretamente o que ocorre.

7.8. ★ Demonstração das propriedades básicas de limite

As propriedades algébricas dos limites decorrem diretamente da definição. Mostraremos, em particular, as propriedades da soma e do produto.

7.43 Teorema

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Suponha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2.$$

A desigualdade triangular fornece

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|.$$

Basta, portanto, controlar cada parcela por $\varepsilon/2$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Se $0 < |x - a| < \delta$, então as duas desigualdades anteriores valem e, pela desigualdade triangular,

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2.$$

■

7.44 Teorema

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Demonstração. Escreva

$$F = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad G = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |G|)}$$

quando $0 < |x - a| < \delta_1$. Escolha também $\delta_2 > 0$ de modo que, quando $0 < |x - a| < \delta_2$,

$$|g(x) - G| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(1 + |F|)}\right\}.$$

A segunda desigualdade implica

$$|g(x)| \leq |g(x) - G| + |G| < 1 + |G|.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - FG| &\leq |g(x)| |f(x) - F| + |F| |g(x) - G| \\ &< (1 + |G|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |G|)} + (1 + |F|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |F|)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = FG.$$

■

7.45 Teorema Limite do Quociente

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Demonstração. Escreva $M = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. Basta provar que $\lim_{x \rightarrow a} 1/g(x) = 1/M$, pois então $f/g = f \cdot (1/g)$ e a regra do produto fornece a conclusão.

Dado $\varepsilon > 0$, a definição de limite fornece $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon|M|^2}{2} \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta_1, \quad (7.1)$$

e

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2} \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Pela desigualdade triangular reversa, a segunda condição implica

$$|g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > \frac{|M|}{2} > 0.$$

Em particular, $g(x)$ não se anula nessa vizinhança e

$$\left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{2}{|M|}. \quad (7.2)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $0 < |x - a| < \delta$ as estimativas (7.1) e (7.2) dão

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \frac{|g(x) - M|}{|M| |g(x)|} \\ &\leq \frac{2|g(x) - M|}{|M|^2} < \frac{2}{|M|^2} \frac{\varepsilon|M|^2}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova o limite do inverso e, portanto, o do quociente.

■

7.9. ★ Continuidade uniforme

Na continuidade em um ponto, o tamanho da vizinhança no domínio pode depender do ponto considerado. A continuidade uniforme exige um controle único para todo o conjunto: fixado o erro permitido nos valores da função, escolhemos uma mesma escala no domínio que funciona em todos os pontos.

7.7 Definição Continuidade uniforme

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **uniformemente contínua** em A se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in A$,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

A diferença para a continuidade usual está na ordem das escolhas. Na continuidade em um ponto x_0 , o número δ pode depender de x_0 e de ε . Na continuidade uniforme, escolhemos δ depois de fixar apenas ε ; em seguida, esse mesmo δ deve funcionar para todos os pares $x, y \in A$.

7.46 Teorema

Se f é uniformemente contínua em A , então f é contínua em cada ponto de A .

Demonstração. Fixe $x_0 \in A$ e $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniforme, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in A$ com $|x - y| < \delta$, vale $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tomando $y = x_0$, obtemos exatamente a condição de continuidade em x_0 . ■

Exemplo 7.47.

Mostre que $f(x) = 3x + 7$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

<

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/3$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $|x - y| < \delta$, então

$$|f(x) - f(y)| = |3x - 3y| = 3|x - y| < 3\delta = \varepsilon.$$

A escolha de δ não depende de x nem de y . ■

Exemplo 7.48.

Mostre que $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $(0, 4)$.

<

Solução. Dados $x, y \in (0, 4)$,

$$|x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| < 8|x - y|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/8$. Se $|x - y| < \delta$, então

$$|x^2 - y^2| < 8\delta = \varepsilon.$$

Novamente, δ depende apenas de ε . ■

Os dois exemplos anteriores possuem uma propriedade mais forte.

7.8 Definição Condição de Lipschitz

Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é **Lipschitz** em A se existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Qualquer constante M com essa propriedade é chamada de **constante de Lipschitz**.

7.49 Teorema

Toda função Lipschitz em A é uniformemente contínua em A .

Demonstração. Se $M = 0$, a função é constante e qualquer $\delta > 0$ serve. Se $M > 0$, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/M$. Para $x, y \in A$ com $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

■

7.50 Teorema

Se f e g são uniformemente contínuas em $A \subset \mathbb{R}$, então $f + g$ é uniformemente contínua em A . Além disso, para toda constante $c \in \mathbb{R}$, a função cf é uniformemente contínua em A .

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta_f, \delta_g > 0$ correspondentes ao erro $\varepsilon/2$ para f e g , respectivamente. Com $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, se $|x - y| < \delta$, então

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Para cf , o caso $c = 0$ é imediato. Se $c \neq 0$, basta usar para f o erro $\varepsilon/|c|$. ■

Exemplo 7.51.

Mostre que $f(x) = x^2$ é contínua, mas não uniformemente contínua em $(0, \infty)$.

◁

Solução. Fixe $x_0 > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tome

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2x_0 + 1} \right\}.$$

Se $|x - x_0| < \delta$, então $x < x_0 + 1$ e

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| |x - x_0| < (2x_0 + 1)\delta \leq \varepsilon.$$

Logo, f é contínua em cada $x_0 > 0$.

Para mostrar que a continuidade não é uniforme, tome $\varepsilon = 1$. Seja $\delta > 0$ arbitrário e escolha

$$x_0 = \frac{1}{\delta}, \quad x = x_0 + \frac{\delta}{2}.$$

Então $x, x_0 > 0$ e $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$, mas

$$|x^2 - x_0^2| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Portanto, nenhum único δ funciona em todo $(0, \infty)$. ■

O resultado seguinte mostra por que intervalos fechados e limitados têm um papel especial.

7.52 Teorema Teorema de Heine–Cantor

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que f não seja uniformemente contínua. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ existem $x, y \in [a, b]$ tais que

$$|x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Chamaremos de *ruim* um intervalo fechado $I \subset [a, b]$ no qual essa mesma propriedade vale, com o mesmo ε_0 .

O intervalo $[a, b]$ é ruim. Se $I = [u, v]$ é ruim e tem comprimento $\ell = v - u$, considere os dois intervalos sobrepostos

$$I_- = \left[u, u + \frac{2\ell}{3} \right], \quad I_+ = \left[u + \frac{\ell}{3}, v \right].$$

Ao menos um deles é ruim. De fato, se nenhum fosse, existiriam $\delta_-, \delta_+ > 0$ para os quais pares suficientemente próximos dentro de I_- ou de I_+ teriam variação de f menor que ε_0 . Tomando

$$\delta < \min \left\{ \delta_-, \delta_+, \frac{\ell}{3} \right\},$$

qualquer par $x, y \in I$ com $|x - y| < \delta$ estaria inteiramente contido em I_- ou inteiramente contido em I_+ , contradizendo o fato de I ser ruim.

Escolhendo a cada etapa um subintervalo ruim, obtemos intervalos encaixados

$$I_n = [a_n, b_n]$$

cujos comprimentos são $(2/3)^n(b - a)$. Seja

$$\alpha = \sup\{a_n : n \geq 0\}.$$

Como os intervalos são encaixados, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para todo n . Pela continuidade de f em α , existe $\eta > 0$ tal que, para $z \in [a, b]$,

$$|z - \alpha| < \eta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Escolha n tão grande que $b_n - a_n < \eta$. Então todo $z \in I_n$ satisfaz $|z - \alpha| < \eta$ e, para quaisquer $x, y \in I_n$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\alpha)| + |f(y) - f(\alpha)| < \varepsilon_0.$$

Isso contradiz o fato de I_n ser ruim. Logo, f é uniformemente contínua. ■

Exercícios

Ex. 7.41 Mostre que toda função afim $f(x) = mx + b$ é Lipschitz em $\mathbb{R}$ e determine uma constante de Lipschitz.

Ex. 7.42 Mostre que $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $[-R, R]$, com $R > 0$.

Ex. 7.43 Mostre que $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua em $[1, \infty)$.

O capítulo começou com aproximações locais: fazer x aproximar-se de um ponto e controlar o que ocorre com $f(x)$. O Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Weierstrass mostraram que, em intervalos fechados e limitados, a continuidade também produz conclusões globais. A continuidade uniforme fecha esse percurso: em todo o intervalo, uma mesma escala no domínio controla a variação da função. No próximo capítulo, usaremos limites para descrever o que acontece quando a variável ou os valores da função deixam de permanecer limitados.

8

Limites Infinitos e no Infinito

Neste capítulo

8.1 Limites no Infinito 198

8.2 Limites Infinitos 201

8.3 O número e e as funções exponencial e logarítmica 211

Segure o infinito na palma da mão e a eternidade em uma hora.

William Blake, *Augúrios da Inocência*

O estudo anterior tratou de aproximações a pontos e valores reais. Ampliaremos essa linguagem para descrever duas situações: a variável pode crescer em módulo sem limite, ou os valores da função podem fazê-lo quando a variável se aproxima de um ponto. Distinguir essas situações será essencial para interpretar o comportamento dos gráficos.

8.1. Limites no Infinito

Considere a função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, cujo gráfico é apresentado na Figura 8.1. Podemos observar que, à medida que os valores de x crescem, os valores da função se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Por outro lado, quando x assume valores negativos cada vez maiores em módulo, os valores da função também se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Podemos modificar a noção de limite anterior de modo a lidar com esses casos. A modificação essencial é formalizar a afirmação de que “se x é suficientemente grande” por meio de “existe $M > 0$ tal que, se $x > M$ ”.

A aproximação no infinito

Na notação $x \rightarrow +\infty$, a variável não se aproxima de um número real. Estudamos o comportamento de $f(x)$ para todos os valores suficientemente grandes de x no domínio. Não há um ponto final em que se possa fazer uma substituição.

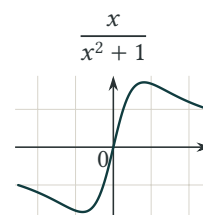


Figura 8.1. Gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

8.1 Definição Limite quando $x \rightarrow +\infty$

Seja f definida para todo $x > c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e seja $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

8.2 Definição Limite quando $x \rightarrow -\infty$

Seja f definida para todo $x < c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e seja $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$x < -M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Geometricamente, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico na extremidade correspondente. O limite deve ser analisado separadamente em $+\infty$ e $-\infty$, pois os resultados podem ser diferentes.

Exemplo 8.1.

Mostre a partir da definição que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

<

Solução. Queremos mostrar que existe M tal que, se $x > M$, $|f(x)| < \varepsilon$. Para tanto, começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e, assim, temos que a desigualdade $\frac{1}{x} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim, escolhemos $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Quando $x > M$, então $x > \frac{1}{\varepsilon}$ e, assim, $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$. Isso prova que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. ■

Exemplo 8.2.

Mostre a partir da definição que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

<

Solução. Queremos mostrar que existe M tal que, se $x > M$, $|f(x)| < \varepsilon$. Para tanto, começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e, assim, temos que a desigualdade $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Assim, escolhemos $M = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Quando $x > M$, então $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ e, assim, $0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. Isso prova que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Exemplo 8.3 – Quando uma enzima está praticamente saturada.

Em um ensaio, observa-se que a velocidade de uma reação enzimática se aproxima de $80 \mu\text{mol}/\text{min}$ quando a concentração S do substrato aumenta. Para $S = 2$, a velocidade medida é $40 \mu\text{mol}/\text{min}$. Adote um modelo de saturação da forma

$$v(S) = \frac{aS}{b+S}, \quad S \geq 0, \quad a, b > 0.$$

Determine a e b . O laboratório considera a enzima praticamente saturada quando sua velocidade atinge pelo menos 95% da velocidade limite. Qual é a menor concentração que satisfaz esse critério? A velocidade limite é atingida para alguma concentração finita?

Solução. Dividindo numerador e denominador por S , vemos que $\lim_{S \rightarrow \infty} v(S) = a$. A primeira observação fornece, portanto, $a = 80$. Usando a medida realizada em $S = 2$,

$$40 = \frac{80 \cdot 2}{b+2},$$

de onde $b = 2$. Assim, o modelo calibrado é

$$v(S) = \frac{80S}{S+2}.$$

A condição de saturação prática é $v(S) \geq 0,95 \cdot 80 = 76$. Como $S+2 > 0$,

$$\frac{80S}{S+2} \geq 76 \iff 80S \geq 76S + 152 \iff S \geq 38.$$

Por outro lado,

$$80 - v(S) = \frac{160}{S+2} > 0$$

para todo S finito. A velocidade pode ficar tão próxima de $80 \mu\text{mol}/\text{min}$ quanto se queira, mas nunca atinge exatamente esse valor no modelo.

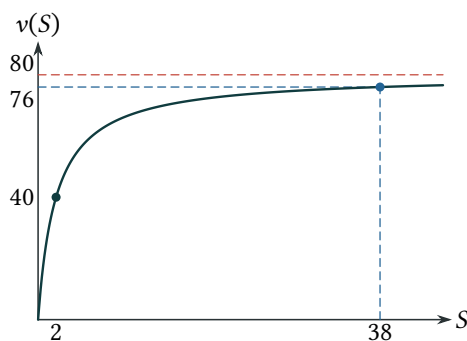


Figura 8.2. O modelo tende ao platô 80; o nível de 95% é atingido em $S = 38$.

Termos dominantes no infinito

Dividir numerador e denominador pela mesma potência preserva a fração, para $S \neq 0$, e torna explícitos os termos que tendem a zero. O comportamento assintótico passa, assim, a ser determinado pelos termos de maior grau.

Exercícios

Ex. 8.1 Mostre, a partir da definição, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+2} = 0.$$

Ex. 8.2 Determine as assíntotas horizontais de

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

analisando separadamente $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

8.2. Limites Infinitos

Nos limites no infinito, acompanhamos a função quando a variável se afasta indefinidamente da origem. Também pode ocorrer que os valores da função cresçam sem limite quando a variável se aproxima de um ponto finito. É o que acontece no Exercício Resolvido 7.5: o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ não existe como número real, mas seu comportamento pode ser descrito por um limite infinito.

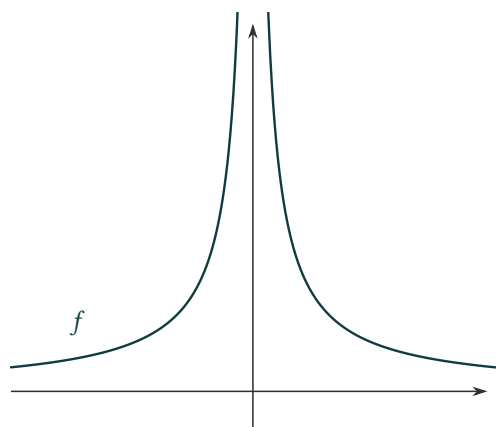


Figura 8.3. A função $1/|x|$ não tem limite finito quando x tende a zero.

O significado de um limite infinito

Escrever $f(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow a$ significa que, dado qualquer $M > 0$, temos $f(x) > M$ para todo x do domínio suficientemente próximo de a , com $x \neq a$. Não basta encontrar alguns valores arbitrariamente grandes.

Para $x \neq 0$ suficientemente próximo de zero, o valor de $1/|x|$ pode ultrapassar qualquer número real positivo. Esse comportamento é expresso pela notação de limite infinito.

Considere também os limites laterais de $7/(x-4)$ quando x se aproxima de 4.

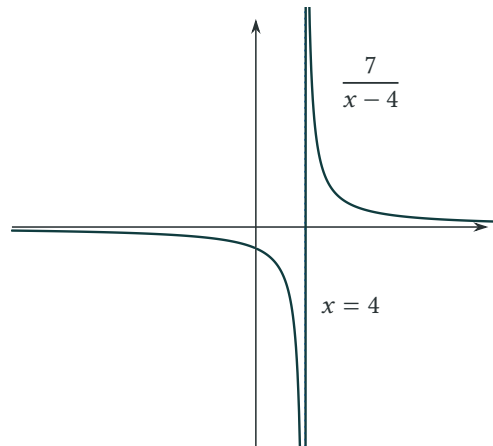


Figura 8.4. Limite infinito indicado pelo crescimento sem cota do gráfico.

A partir da Figura 8.4 podemos observar que, quando x tende a 4 pela direita, isto é, por valores maiores que 4, a função $\frac{7}{x-4}$ cresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes. Quando x tende a 4 pela esquerda, isto é, por valores menores que 4, a função $\frac{7}{x-4}$ decresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes e negativos. Representamos esses comportamentos por:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{7}{x-4} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{7}{x-4} = -\infty$$

8.3 Definição Limites infinitos

Seja f uma função definida em uma vizinhança de a , exceto possivelmente no próprio ponto a . Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Analogamente, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -M.$$

Para o limite pela direita, substituímos $0 < |x - a| < \delta$ por $0 < x - a < \delta$; para o limite pela esquerda, usamos $0 < a - x < \delta$. Em cada caso, basta que f esteja definida no intervalo lateral correspondente. A desigualdade sobre $f(x)$ permanece $f(x) > M$ para $+\infty$ e $f(x) < -M$ para $-\infty$.

Se pelo menos um dos limites laterais de $f(x)$ quando $x \rightarrow a$ é $+\infty$ ou $-\infty$, a reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico. O sinal e o lado de aproximação descrevem para qual direção cada ramo se afasta.

Para definir limites infinitos quando x tende ao infinito, usamos um limiar $A > 0$. Para todo $M > 0$, deve existir $A > 0$ de modo que:

- $x > A \implies f(x) > M$, no caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- $x > A \implies f(x) < -M$, no caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
- $x < -A \implies f(x) > M$, no caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
- $x < -A \implies f(x) < -M$, no caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Supomos, em cada caso, que o domínio de f contém a semirreta considerada.

Exemplo 8.4.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$.

◁

Solução. Pela definição, dado $M > 0$, devemos encontrar $A > 0$ tal que $x > A$ implique $x > M$. Basta escolher $A = M$. ■

Exemplo 8.5.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$.

◁

Solução. Dado $M > 0$, escolhemos $A = \sqrt{M}$. Se $x > A$, então $x^2 > M$, como desejado. ■

Exemplo 8.6 — Até onde a paisagem permanece nítida?.

Para uma configuração fixa de câmera, lente e abertura, seja H uma constante positiva. Se a câmera estiver focalizada a uma distância s , com $0 < s < H$, um modelo aproximado fornece as extremidades da região considerada aceitavelmente nítida:

$$d_{\text{perto}}(s) = \frac{Hs}{H+s}, \quad d_{\text{longe}}(s) = \frac{Hs}{H-s}.$$

Em uma fotografia de teste focalizada a 8 metros, o ponto mais distante considerado nítido estava a 24 metros. Determine H e investigue o que ocorre com as duas extremidades quando $s \rightarrow H^-$. Nessa configuração, uma pedra situada a 5 metros e o horizonte podem aparecer simultaneamente nítidos?

◁



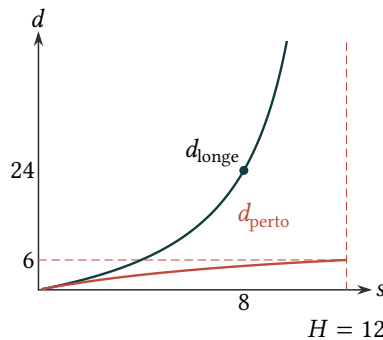
Solução. A fotografia de teste fornece

$$24 = \frac{8H}{H-8}.$$

Logo, $24H - 192 = 8H$ e $H = 12$ metros. Consequentemente,

$$\lim_{s \rightarrow 12^-} \frac{12s}{12+s} = 6, \quad \lim_{s \rightarrow 12^-} \frac{12s}{12-s} = +\infty.$$

Ao focalizar progressivamente mais perto de H , o extremo distante da região nítida se afasta indefinidamente, enquanto o extremo próximo tende a 6 metros. A pedra situada a 5 metros fica fora dessa região; portanto, ela e o horizonte não podem aparecer simultaneamente nítidos nessa configuração segundo o modelo.



■

Exercícios

Ex. 8.3 Mostre, a partir da definição, que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Ex. 8.4 Calcule os limites laterais de $(x+1)/(x-2)$ em $x = 2$ e identifique a assíntota vertical.

8.2.1. Propriedades dos Limites Infinitos e no Infinito

As expressões $+\infty$ e $-\infty$ descrevem comportamentos; não são números reais acrescentados à reta. As regras para esses limites decorrem das definições e descrevem como tais comportamentos se combinam.

Para evitar repetições, escreveremos $x \rightarrow \alpha$ para qualquer um dos casos $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. As desigualdades mencionadas devem valer para x suficientemente próximo de α , no domínio correspondente.

Comparação e recíproco. A comparação transfere para outra função um crescimento ou decrescimento já conhecido. O recíproco, por sua vez, troca grandezas próximas de zero por grandezas de módulo elevado, e vice-versa.

8.7 Proposição Comparação e recíproco

1. Se $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$. Se $f(x) \leq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$.
2. Se $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos, então $1/f(x) \rightarrow +\infty$; se $f(x) \rightarrow 0$ por valores negativos, então $1/f(x) \rightarrow -\infty$.
3. Se $|f(x)| \rightarrow +\infty$, então $1/f(x) \rightarrow 0$.

Demonstração. No primeiro item, dado $M > 0$, a hipótese $g(x) \rightarrow +\infty$ garante $g(x) > M$ suficientemente perto de α ; como $f(x) \geq g(x)$, também $f(x) > M$. O caso de $-\infty$ é análogo.

No segundo item, suponha $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos. Dado $M > 0$, aplique a definição de limite com $\varepsilon = 1/M$: suficientemente perto de α , temos $0 < f(x) < 1/M$, logo $1/f(x) > M$. O caso de valores negativos é obtido do mesmo modo.

No terceiro item, dado $\varepsilon > 0$, escolha o limiar $1/\varepsilon$. Se $|f(x)| > 1/\varepsilon$, então

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon.$$

■

8.8 Observação Consequências imediatas

As propriedades de comparação permitem obter os limites seguintes. Para as potências inteiras, comparamos com x ou $-x$ em semirretas adequadas; para a exponencial de base $c > 1$, usamos também a Proposição 1.16.

1. Dado $c > 1$, temos $\lim_{x \rightarrow \infty} c^x = \infty$. Para $c = 1$, o limite é 1; para $0 < c < 1$, é 0. De fato, se $c > 1$ e $x \geq n \in \mathbb{N}$, a monotonicidade e a desigualdade de Bernoulli dão $c^x \geq c^n \geq 1 + n(c - 1)$, que cresce sem limite com n . O caso $0 < c < 1$ segue escrevendo $c^x = 1/(1/c)^x$.
2. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ então $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty$.
3. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ ímpar então $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$.
4. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ par então $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \infty$.

Somas: qual termo domina? Uma parcela limitada não altera um crescimento sem cota. Duas parcelas que divergem no mesmo sentido reforçam-se. Já parcelas que divergem em sentidos opostos competem entre si, e seus limites isolados não bastam para decidir o resultado.

8.9 Proposição Somas com limites infinitos

Suponha que r seja limitada quando $x \rightarrow \alpha$. Então:

1. se $f, g \rightarrow +\infty$, então $f + g \rightarrow +\infty$; se $f, g \rightarrow -\infty$, então $f + g \rightarrow -\infty$;
2. se $f \rightarrow +\infty$, então $f + r \rightarrow +\infty$; se $f \rightarrow -\infty$, então $f + r \rightarrow -\infty$;
3. se $f \rightarrow +\infty$ e $h \rightarrow -\infty$, então $f - h \rightarrow +\infty$ e $h - f \rightarrow -\infty$.

Todos os limites são tomados quando $x \rightarrow \alpha$.

Demonstração. Para o primeiro item, dado $M > 0$, fazemos $f > M/2$ e $g > M/2$ suficientemente perto de α ; então $f + g > M$. Os casos negativos são análogos.

Para o segundo item, existe $K > 0$ tal que $|r(x)| \leq K$ perto de α . Se $f \rightarrow +\infty$, fazemos $f > M + K$; então $f + r > M$. O caso de $-\infty$ é análogo.

No terceiro item, $-h \rightarrow +\infty$, e a conclusão segue do primeiro caso aplicado a $f + (-h)$. A outra diferença é tratada da mesma forma. ■

Produtos: o sinal decide.

8.10 Proposição Produtos com limites infinitos

Suponha que $f \rightarrow +\infty$ ou $f \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow \alpha$. Se $q(x) \rightarrow L \neq 0$, então q fica afastada de zero e conserva o sinal de L para x próximo de α . Assim, $L > 0$ preserva o sentido da divergência de f , enquanto $L < 0$ o inverte.

Se os dois fatores divergem, aplica-se a mesma regra de sinais:

	$g \rightarrow +\infty$	$g \rightarrow -\infty$
$f \rightarrow +\infty$	$fg \rightarrow +\infty$	$fg \rightarrow -\infty$
$f \rightarrow -\infty$	$fg \rightarrow -\infty$	$fg \rightarrow +\infty$

Todos os limites da tabela são tomados quando $x \rightarrow \alpha$.

Demonstração. Suponha primeiro $f \rightarrow +\infty$ e $q \rightarrow L > 0$. Como $q \rightarrow L$, temos $q(x) > L/2$ suficientemente perto de α . Dado $M > 0$, fazemos também $f(x) > 2M/L$. Então $f(x)q(x) > M$. Se $L < 0$, aplicamos o mesmo argumento a $-q$, o que inverte o sinal do produto. Os casos $f \rightarrow -\infty$ seguem aplicando o resultado a $-f$.

Se ambos os fatores divergem, dado $M > 0$ fazemos $|f(x)| > \sqrt{M}$ e $|g(x)| > \sqrt{M}$ perto de α . Assim, $|f(x)g(x)| > M$; o sinal é determinado pelos sinais eventuais dos fatores, como na tabela. ■

Em particular, multiplicar por uma constante positiva preserva o sentido da divergência, e multiplicar por uma constante negativa o inverte. A constante zero é um caso separado: $0 \cdot f$ é a função nula. Isso não autoriza concluir nada quando um fator apenas *tende* a zero.

Formas indeterminadas não são resultados

Os símbolos $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$ não determinam, por si sós, um limite. Quando $x \rightarrow +\infty$, por exemplo,

$$x - x = 0, \quad (x + 1) - x = 1, \quad x^2 - x \rightarrow +\infty;$$

as três diferenças têm a forma aparente $\infty - \infty$. Do mesmo modo,

$$\frac{1}{x^2} x \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x} x = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} x \rightarrow +\infty,$$

embora em todas apareça $0 \cdot \infty$. É preciso simplificar ou comparar as funções antes de aplicar propriedades de limites.

Limites finitos quando a variável tende ao infinito. Se o ponto de aproximação muda de um número real para $+\infty$ ou $-\infty$, mas os valores-limite continuam finitos, valem as mesmas propriedades algébricas estudadas no capítulo anterior.

8.11 Proposição Regras para limites finitos no infinito

Se $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$, $f(x) \rightarrow A$ e $g(x) \rightarrow B$ quando $x \rightarrow \alpha$, com $A, B \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f + g &\rightarrow A + B, & f - g &\rightarrow A - B, & fg &\rightarrow AB, \\ cf &\rightarrow cA, & \frac{f}{g} &\rightarrow \frac{A}{B} \quad (B \neq 0). \end{aligned}$$

Também podemos passar ao limite no módulo, em potências inteiras positivas e na raiz quadrada, desde que seu domínio seja respeitado. Em particular, se $f(x) \geq 0$ para x suficientemente próximo de α , então $A \geq 0$ e $\sqrt{f(x)} \rightarrow \sqrt{A}$.

Demonstração. As demonstrações são as mesmas das regras de limites finitos já provadas: dado $\varepsilon > 0$, controlamos cada parcela ou fator por uma condição válida para x suficientemente grande em módulo. A única mudança é substituir a vizinhança perfurada de um ponto por uma semirreta $x > M$ ou $x < -M$. ■

8.12 Teorema Teorema do Confronto no infinito

Se $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$ e, para x suficientemente próximo de α ,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

com

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = L \in \mathbb{R},$$

então $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = L$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, os limites de f e h fornecem um mesmo limiar, tomando o maior dos dois necessários, a partir do qual

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, $|g(x) - L| < \varepsilon$, que é a definição do limite no infinito. ■

Como escolher a regra. Primeiro identifique separadamente o comportamento de cada parcela ou fator. Aplique uma propriedade apenas quando as hipóteses coincidirem com um dos casos anteriores. Se surgir uma forma indeterminada, a expressão precisa ser reorganizada antes: fatoração, divisão pelo termo dominante e multiplicação pelo conjugado são as estratégias mais frequentes.

Em particular, se numerador e denominador divergem em módulo, o quociente apresenta a **forma indeterminada** ∞/∞ . Essa forma não informa o valor do limite: ele dependerá da rapidez relativa de crescimento das duas funções. Os exemplos seguintes mostram como revelar essa comparação por meio de simplificações algébricas.

Exemplo 8.13.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

<

Solução. Para $x \neq 0$, dividimos numerador e denominador por x^2 :

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1 + 1/x^2}{1 - 1/x^2}.$$

Como $1/x^2 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$, o numerador tende a 1 e o denominador também tende a $1 \neq 0$. Pela regra do quociente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1.$$

■

Exemplo 8.14.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)$.

<

Solução. Colocando o termo de maior grau em evidência, obtemos, para $x \neq 0$,

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right).$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, o fator entre parênteses tende a $2 > 0$, enquanto $x^3 \rightarrow +\infty$. Pela propriedade do produto de uma função com limite positivo e outra com limite $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty.$$

Exemplo 8.15.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{4x^2 - 2x + 1}$.

Solução. Para $x \neq 0$, a fatoração dos termos de maior grau fornece

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{4x^2 - 2x + 1} &= \frac{x^3(2 + 3/x + 1/x^3)}{x^2(4 - 2/x + 1/x^2)} \\ &= x \frac{2 + 3/x + 1/x^3}{4 - 2/x + 1/x^2}. \end{aligned}$$

O quociente que multiplica x tende a $2/4 = 1/2 > 0$. Como $x \rightarrow +\infty$, a propriedade multiplicativa dá

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{4x^2 - 2x + 1} = +\infty.$$

Exemplo 8.16.

Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{1}{3}$.

Solução. Como $x \rightarrow +\infty$, podemos supor $x > 0$; assim, $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1}/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9 + 1/x^2}}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{1}{x^2}\right) = 9,$$

a continuidade da raiz quadrada fornece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} = 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 8.17.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5}$.

<

Solução. Para $x \neq 0$, dividimos numerador e denominador por x^3 :

$$\frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5} = \frac{5 + 1/x - 3/x^3}{2 - 1/x^2 + 5/x^3}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, o numerador tende a 5 e o denominador tende a $2 \neq 0$. Pela regra do quociente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5} = \frac{5}{2}.$$

■

Exemplo 8.18.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 3}{4x^4 - x + 2}$.

<

Solução. Para $x \neq 0$, dividimos numerador e denominador por x^4 :

$$\frac{5x^2 + x - 3}{4x^4 - x + 2} = \frac{5/x^2 + 1/x^3 - 3/x^4}{4 - 1/x^3 + 2/x^4}.$$

O numerador tende a 0 e o denominador a $4 \neq 0$. Pela regra do quociente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 3}{4x^4 - x + 2} = 0.$$

■

Os limites no infinito também permitem comparar uma função com uma reta não horizontal. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0,$$

a reta $y = mx + b$ é uma **assíntota oblíqua** na extremidade correspondente quando $m \neq 0$. O caso $m = 0$ recupera uma assíntota horizontal.

Exercícios

Ex. 8.5 Calcule os limites e determine as assíntotas pedidas.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}}$.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{5x^2 + 2}$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

4. Determine, por limites, as assíntotas de $f(x) = (2x^2 - 3)/(x^2 - x - 6)$.

ção limite $-bx + c = 0$.

Ex. 8.6 Encontre as constantes m e b para as quais

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(mx + b - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right) = 0.$$

Explique o significado geométrico da reta $y = mx + b$.

Ex. 8.7 Considere, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a equação

$$ax^2 - bx + c = 0,$$

em que b e c permanecem fixos enquanto $a \rightarrow 0$.

1. Mostre que uma das raízes tende a c/b .
2. Mostre que a outra raiz é ilimitada e determine seu comportamento dominante.
3. Explique por que isso é compatível com a equação limite $-bx + c = 0$.

Ex. 8.8 Os modelos abaixo descrevem três respostas com saturação:

$$c(N) = \frac{12N}{5 + N}, \quad P(I) = \frac{18I}{120 + I}, \quad V(s) = \frac{3,6s}{2 + s}.$$

Aqui, c é o consumo de presas por um predador em função da densidade N ; P é uma taxa de fotossíntese em função da intensidade luminosa I ; e V é o consumo de oxigênio durante exercício em função da intensidade s .

1. Determine o limite de cada função quando sua variável tende a $+\infty$ e interprete os três resultados.
2. Em que valor da respectiva variável cada resposta atinge metade de seu valor-limite?
3. Identifique a forma comum $Ax/(B+x)$ e explique os papéis de A e B .

8.3. O número e e as funções exponencial e logarítmica

O número e pode ser obtido a partir de um limite no qual a base se aproxima de 1 enquanto o expoente cresce. Essa construção fornece a base da função exponencial natural e do logaritmo natural.

8.19 Teorema Segundo Limite Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

onde $e \approx 2,71828$ é o número de Euler, também chamado número de Neper.

A forma indeterminada 1^∞

A notação 1^∞ descreve dois comportamentos simultâneos, não uma potência comum. O limite depende de como a base se aproxima de 1 e o expoente cresce. Em $(1 + 1/x)^x$, quando $x \rightarrow +\infty$, essa combinação produz o limite e .

Demonstração. Para cada inteiro $n \geq 1$, escreva

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Pelo binômio de Newton,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right),$$

com produto vazio igual a 1. Quando n aumenta, cada fator dos termos já presentes não diminui, e aparece um novo termo positivo; portanto $a_{n+1} > a_n$.

Além disso,

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

Logo, pelo axioma da completude, existe

$$e = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

A estimativa $k! \geq 2 \cdot 3^{k-2}$, para $k \geq 2$, fornece ainda

$$a_n < \frac{11}{4}, \quad \text{portanto} \quad 2 < e \leq \frac{11}{4} < 3.$$

A definição de supremo dá diretamente a aproximação de e de que precisamos: dado $\eta > 0$, existe N_0 tal que

$$e - \eta < a_{N_0} \leq e.$$

Como os a_n crescem, a mesma desigualdade vale para todo $n \geq N_0$.

Agora fixe $\varepsilon > 0$ e tome $\eta = \varepsilon/2$. Aumentando N_0 , se necessário, podemos supor também que

$$\frac{3}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $x \geq N_0$, seja $n = [x]$. Então $n \leq x < n + 1$. Como todas as bases abaixo são maiores que 1, temos

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

e, por outro lado,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Os extremos podem ser escritos como

$$\frac{a_{n+1}}{1 + 1/(n+1)} \quad \text{e} \quad a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Como $e - \varepsilon/2 < a_n \leq e < 3$, temos

$$a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \frac{a_n}{n} < e + \frac{3}{n} < e + \varepsilon.$$

Por outro lado,

$$\frac{a_{n+1}}{1 + 1/(n+1)} = a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+2} > e - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{n+2} > e - \varepsilon.$$

Portanto,

$$e - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{1 + 1/(n+1)} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < e + \varepsilon.$$

Isso é exatamente a definição de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

■

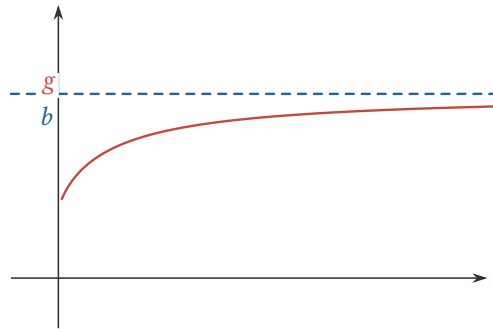


Figura 8.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Exemplo 8.20.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$.

<

Solução. Fazemos a mudança de variável $t = \frac{x}{5}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{5t} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^5 \\ &= e^5 \end{aligned}$$

■

Exemplo 8.21.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

<

Solução. Dividindo o numerador e o denominador por x , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

■

8.4 Definição

O logaritmo de base e é denominado **função logaritmo natural** ou simplesmente **logaritmo**. Assim, pelos fatos apresentados na seção 4.3, a função logaritmo é a função $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela regra

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

O gráfico da função logaritmo natural está representado abaixo:

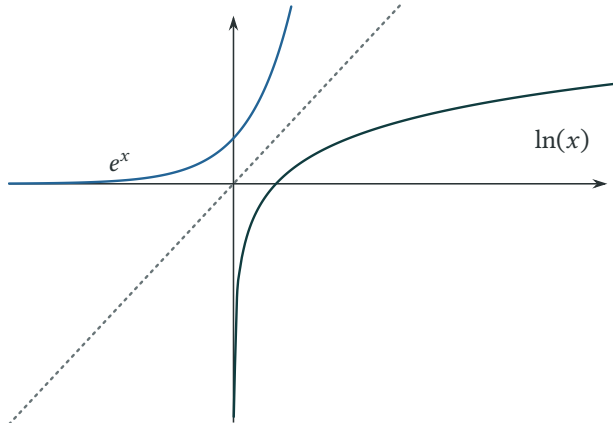


Figura 8.7. Gráfico da função logaritmo natural.

8.22 Teorema Continuidade das Funções Exponencial e Logaritmo

Para $c > 0$, a função $x \mapsto c^x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Para $c > 0$ e $c \neq 1$, a função $x \mapsto \log_c x$ é contínua em $(0, \infty)$.

Demonstração. Suponha primeiro $c > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha um inteiro n tão grande que

$$\frac{c-1}{n} < \varepsilon.$$

Escreva $u = c^{1/n} - 1 > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli,

$$c = (1+u)^n \geq 1 + nu,$$

de modo que

$$0 < u \leq \frac{c-1}{n} < \varepsilon.$$

Além disso,

$$0 < 1 - c^{-1/n} = \frac{u}{1+u} < u < \varepsilon.$$

Se $|h| < 1/n$, a monotonicidade da função exponencial dá

$$c^{-1/n} \leq c^h \leq c^{1/n},$$

e portanto $|c^h - 1| < \varepsilon$. Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} c^h = 1.$$

Como $c^{a+h} = c^a c^h$, segue que $c^{a+h} \rightarrow c^a$, provando a continuidade em qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Se $0 < c < 1$, escrevemos $c^x = 1/(1/c)^x$ e usamos o caso anterior e a regra do quociente. Para $c = 1$, a função é constante.

Quando $c \neq 1$, a exponencial é contínua e estritamente monótona de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$. Pelo Teorema 7.35, sua inversa $\log_c$ é contínua em $(0, \infty)$. ■

Como a função e^x é contínua e crescente, pelo Teorema 7.35, sua função inversa $\ln(x) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo o seu domínio.

8.23 Teorema Terceiro Limite Fundamental

Para $a > 0$, temos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Demonstração. Começamos pela relação

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e.$$

Para $u \rightarrow 0^+$, isso é o segundo limite fundamental com $x = 1/u$. Para $u \rightarrow 0^-$, ponha $v = -u/(1+u) > 0$. Então $v \rightarrow 0^+$ e

$$(1+u)^{1/u} = (1+v)^{(1+v)/v} = (1+v)^{1/v}(1+v) \rightarrow e.$$

Pela continuidade do logaritmo,

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \ln((1+u)^{1/u}) \rightarrow \ln e = 1.$$

Se $a = 1$, o quociente do enunciado é zero e a conclusão é imediata. Para $a > 0$, $a \neq 1$, faça $u = a^x - 1$. A continuidade da exponencial garante $u \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, e $u \neq 0$ se $x \neq 0$. Além disso, $x = \ln(1+u)/\ln a$, de modo que

$$\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \frac{u}{\ln(1+u)} \rightarrow \ln a.$$

■

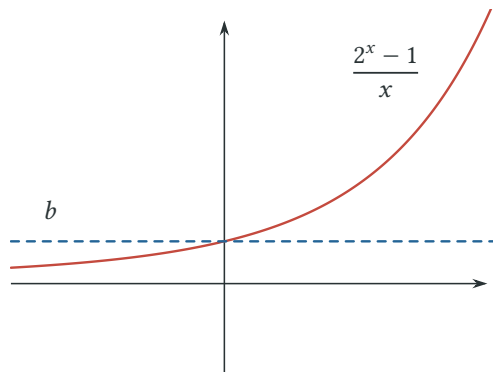


Figura 8.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$.

Exemplo 8.24.

Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{\frac{x-2}{5}} - 1}{x - 2}$.

<

Solução. Fazendo $t = (x - 2)/5$, temos $x - 2 = 5t$ e $t \rightarrow 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{(x-2)/5} - 1}{x - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{5t} = \frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{t} = \frac{\ln 3}{5},$$

pelo Teorema 8.23 com $a = 3$. ■

Exercícios

Ex. 8.9 Use os limites fundamentais associados a e e ao logaritmo.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x}$.

4. Um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado por dois anos à taxa contínua de 4% ao ano. Determine o montante exato e uma aproximação em centavos.

8.3.1. Juro Composto

Considere um capital inicial $C > 0$, aplicado por k anos a uma taxa nominal anual $r \geq 0$, escrita em forma decimal. Nos juros simples, a taxa incide sempre sobre o capital inicial, e o montante é $C(1 + rk)$.

Nos juros compostos, cada parcela de juros é incorporada ao saldo antes do período seguinte. Se a capitalização ocorre n vezes por ano, a taxa de cada período é r/n . Depois de nk períodos, o montante é

$$M_n = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}.$$

Quando aumentamos a frequência de capitalização,

$$M_n = C \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right]^k \rightarrow Ce^{rk}.$$

O valor Ce^{rk} corresponde ao modelo idealizado de *capitalização contínua*. O limite não afirma que instituições financeiras capitalizem infinitas vezes por ano; ele descreve o valor para o qual convergem os regimes com períodos cada vez menores.

Exercícios

Ex. 8.10 Um capital de R\$ 10 000 é aplicado por 3 anos a uma taxa nominal anual de 6%. Determine o montante previsto pelo modelo de capitalização contínua.

Ex. 8.11 Para um capital C aplicado por um ano a uma taxa anual $r > 0$, compare as expressões correspondentes à capitalização anual, mensal e contínua.

8.3.2. Crescimento Demográfico

Denote por $P_0 > 0$ a população inicial e suponha que a taxa de crescimento por unidade de população seja uma constante $\lambda > 0$, medida em anos inversos. Essa hipótese já é uma idealização: populações reais sofrem variações de recursos, migração, mortalidade e natalidade.

Para estimar a população depois de t anos, divida o intervalo de tempo em n partes iguais. Em cada parte, o incremento relativo é aproximadamente $\lambda t/n$; por isso,

$$P_n(t) \approx P_0 \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n.$$

Para $t > 0$, escrevemos

$$\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n/(\lambda t)}\right)^{n/(\lambda t)}\right]^{\lambda t}.$$

Quando as subdivisões se tornam cada vez mais finas, o Segundo Limite Fundamental mostra que a expressão entre colchetes se aproxima de e . Assim, o modelo contínuo é

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t}.$$

Para $t = 0$, a mesma fórmula fornece $P(0) = P_0$. O mesmo padrão matemático aparece na capitalização contínua: em ambos os casos, a taxa de variação é proporcional ao valor presente da grandeza. Se a constante de proporcionalidade for negativa, o modelo descreve decaimento exponencial, como em uma primeira aproximação para a massa de uma substância radioativa.

Exercícios

Ex. 8.12 Determine as assíntotas horizontal, vertical e oblíqua, quando houver, de $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)/(x - 1)$. Faça um esboço que seja compatível com seus resultados.

Ex. 8.14 A corrente de um circuito é $I(R) = 12/R$ A, onde $R > 0$ é a resistência em ohms. Interprete $\lim_{R \rightarrow 0^+} I(R)$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R)$, apontando a limitação física do primeiro modelo.

Ex. 8.13 Demonstre, usando a definição de limite no infinito, que $\lim_{x \rightarrow \infty} 7/(x + 4) = 0$. Para um erro máximo ε , produza um limiar explícito $N(\varepsilon)$.

Ex. 8.15 Calcule os dois limites laterais de $e^{1/x}$ quando $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$, e explique por que não há limite bilateral finito em zero.

Ex. 8.16 A razão entre a massa de um medicamento no instante t e a massa inicial é $M(t)/M(0) = e^{-0,18t}$. Determine o limite quando $t \rightarrow \infty$ e o instante

em que resta 10% da dose inicial.

Ex. 8.17 Encontre uma função simples assintótica a

$$\frac{3x^3 - 2x + 7}{x^2 + 4}$$

quando $x \rightarrow \pm\infty$, e mostre que a diferença entre as duas tende a zero.

Parte III.

Derivadas

9

Derivadas

Sobre os que entram nos mesmos rios, águas sempre diferentes correm.

Heráclito, Fragmento 12

A derivada mede a variação local de uma função. Geometricamente, quando a tangente não é vertical, ela fornece o coeficiente angular da reta tangente; em problemas de movimento, fornece a velocidade instantânea; em outros contextos, descreve taxas de crescimento, decaimento e sensibilidade. Os problemas da tangente e da velocidade conduzem ao mesmo limite, que define a derivada. Sua relação com a continuidade e as regras de derivação permitem estudar as funções elementares. A derivada também determina uma aproximação local: perto de um ponto de diferenciabilidade, a função se comporta, em primeira aproximação, como uma função afim. A derivada é o coeficiente que determina essa aproximação local.

9.1. Motivações

9.1.1. O problema da reta tangente

Um dos problemas que conduzem à derivada é geométrico: determinar a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto. A tangente registra a direção local da curva e, quando não é vertical, fica determinada por seu coeficiente angular.

No início do século XVII, Pierre de Fermat desenvolveu métodos para determinar máximos e mínimos de certas funções. A Figura 9.1 ilustra a relação entre esse problema e as retas tangentes: suas inclinações variam ao longo da curva e se anulam nos dois extremos indicados.

Em um ponto interior no qual uma função diferenciável atinge um máximo ou um mínimo local, a reta tangente é horizontal. A procura por extremos conduz, portanto, ao estudo dos pontos em que a inclinação da tangente se anula.

Para uma curva geral, porém, a própria noção de tangente precisa ser formulada com

Neste capítulo

9.1	Motivações	220
9.2	Definição de derivada	224
9.3	Derivadas das funções clássicas	232
9.4	Regras de derivação	235
9.5	A regra da cadeia	242
9.6	Derivada da função inversa	246

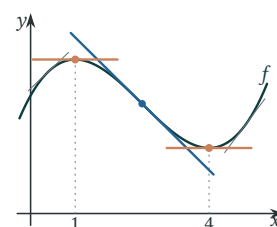


Figura 9.1. Retas tangentes em vários pontos da curva. As tangentes horizontais destacam o máximo e o mínimo locais.

cuidado. Dados uma função f e um ponto P de seu gráfico, procuramos uma reta que descreva a direção da curva nas proximidades de P .

A experiência com a circunferência pode sugerir que a tangente seja uma reta que encontra a curva em um único ponto. Para gráficos de funções, porém, esse critério não basta, como mostram as figuras seguintes.

Na Figura 9.2a, a tangente cruza a curva em outro ponto; na Figura 9.2b, a reta encontra o gráfico uma única vez, mas não acompanha sua direção nesse ponto. O número de interseções, portanto, não caracteriza a tangência.

Quando a tangente não é vertical, podemos determiná-la por seu coeficiente angular. Para aproximar esse coeficiente, tomamos uma reta secante que passa pelo ponto fixo P e por um segundo ponto Q do gráfico. Se $P = (a, f(a))$ e $Q = (a + h, f(a + h))$, com $h \neq 0$, o coeficiente angular da secante é

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

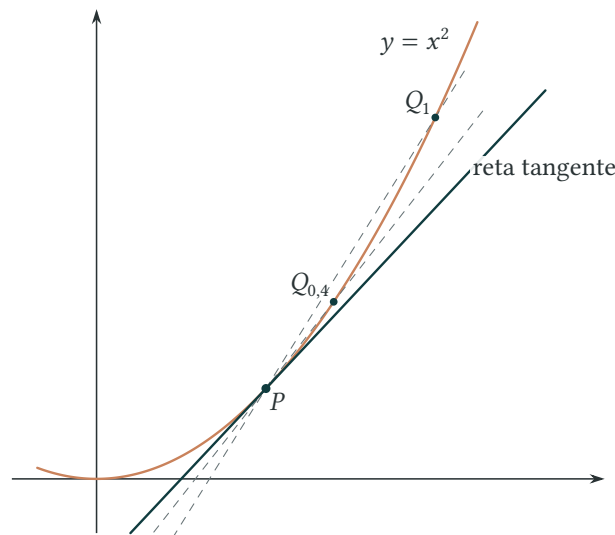


Figura 9.3. Quando Q se aproxima de P , as retas secantes se aproximam da reta tangente.

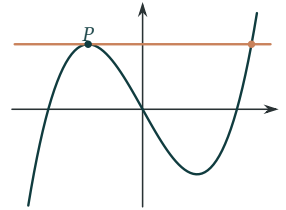
Mantendo P fixo, fazemos Q se aproximar de P , isto é, fazemos h tender a zero. Se os coeficientes angulares das secantes convergem para um número real m , esse limite determina a inclinação da reta tangente:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

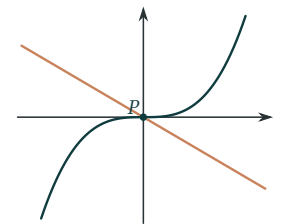
A reta tangente no ponto fixo $P = (a, f(a))$ tem, portanto, equação

$$y - f(a) = m(x - a).$$

Esse limite será a derivada de f no ponto a . Um primeiro cálculo ilustra sua obtenção; o estudo do movimento mostrará outra interpretação do mesmo quociente.



(a) A tangente pode reencontrar a curva.



(b) Uma só interseção não basta.

Por que podemos cancelar h ?

O quociente incremental ²²¹ é considerado para $h \neq 0$. Se a fatoração revela h no numerador, esse fator

Exemplo 9.1.

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, a^2) .

<

Solução. Pela definição, a inclinação da reta tangente no ponto a é

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Para $f(x) = x^2$, segue que

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Assim, a inclinação da reta tangente no ponto a é $2a$. ■

9.1.2. O problema da velocidade

O mesmo quociente usado para calcular a inclinação de uma secante aparece no estudo da velocidade. Suponha que uma partícula se mova em linha reta e que sua posição no instante t seja dada por $s(t)$. Para $\Delta t \neq 0$, com os dois instantes no domínio de s , a velocidade média entre t_0 e $t_0 + \Delta t$ é

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

A velocidade média descreve o deslocamento por unidade de tempo nesse intervalo. Para obter a velocidade em um instante, fazemos o intervalo encolher, tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$. No gráfico de posição em função do tempo, isso corresponde à passagem das secantes à tangente que acabamos de estudar.

Velocidade e rapidez

No movimento retilíneo, o sinal da velocidade indica o sentido em relação à orientação escolhida. Se $v = -3$ metros por segundo, a rapidez é 3 metros por segundo, e o movimento ocorre no sentido negativo. A rapidez é sempre $|v|$.

9.1 Definição

Se uma partícula se move sobre uma reta e sua posição é descrita por $s(t)$, então sua **velocidade instantânea** em t_0 é

$$v := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

desde que o limite exista e seja finito.

Exemplo 9.2.

A posição de uma partícula é dada por $s(t) = t^2 - 5t$, com $s(t)$ em metros e $t \geq 0$ em segundos. Determine a velocidade no instante $a \geq 0$, calcule-a em $t = 0$ e em $t = 4$, identifique quando a partícula se move para a direita ou para a esquerda e determine quando ela está em repouso.

<

Solução. Para $a > 0$, calculamos a velocidade pela definição:

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(a + \Delta t) - s(a)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta t)^2 - 5(a + \Delta t) - a^2 + 5a}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2a\Delta t + (\Delta t)^2 - 5a - 5\Delta t - a^2 + 5a}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2a\Delta t + (\Delta t)^2 - 5\Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2a + \Delta t - 5 \\ &= 2a - 5. \end{aligned}$$

Logo, $v(a) = 2a - 5$. No instante inicial, fazemos o mesmo cálculo com $\Delta t \rightarrow 0^+$, pois o movimento está definido apenas para $t \geq 0$. Obtemos $v(0) = -5$ m/s; em $t = 4$, temos $v(4) = 3$ m/s. Para determinar quando a partícula se move para a direita, resolvemos

$$2a - 5 > 0 \iff a > 5/2.$$

De modo análogo, a partícula se move para a esquerda quando

$$2a - 5 < 0 \iff a < 5/2.$$

Como $a \geq 0$, isso ocorre em $0 \leq a < 5/2$. Por fim, a partícula está em repouso se, e somente se, $a = 5/2$. ■

Taxas de variação

A posição e o tempo podem ser substituídos por outras grandezas. Se Q depende de uma variável x , o quociente de suas variações mede quanto Q varia, em média, por unidade de x .

9.2 Definição

A **taxa de variação média** de uma grandeza Q em relação à variável x entre a e $a + h$, com $h \neq 0$, é

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{Q(a + h) - Q(a)}{h}.$$

Assim como no cálculo da velocidade, a passagem ao limite fornece uma medida da

variação em um ponto.

9.3 Definição

A **taxa de variação instantânea** de uma grandeza Q em relação à variável x no ponto a é

$$\left. \frac{dQ}{dx} \right|_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(a+h) - Q(a)}{h},$$

desde que o limite exista e seja finito.

Por exemplo, quando a variável é o tempo, essa taxa pode representar a velocidade de um automóvel ou o crescimento de uma população de bactérias. Em outras situações, pode medir como o lucro de uma empresa varia com o volume de vendas. Em todos esses casos, calculamos um limite da mesma forma; a interpretação e as unidades dependem das grandezas envolvidas.

9.2. Definição de derivada

Os problemas da tangente e da velocidade conduzem à mesma expressão. Abstraindo as interpretações geométrica e física, obtemos a definição de derivada em um ponto.

9.4 Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contém a . A **derivada de f em a** , denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

desde que o limite exista e seja finito.

O símbolo $f'(a)$ lê-se “f linha de a”. Dizer que $f'(a)$ existe significa que o limite da Definição 9.4 existe como um número real. Geometricamente, esse número é a inclinação da tangente ao gráfico em $(a, f(a))$, cuja equação podemos escrever como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Exemplo 9.3.

Calcule a derivada de $g(x) = \sqrt{x}$ em $x = 4$.

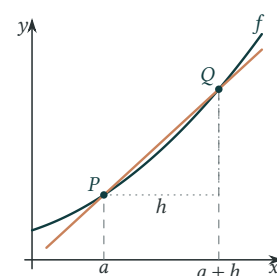


Figura 9.4. A secante passa por $P = (a, f(a))$ e $Q = (a+h, f(a+h))$. Sua inclinação é a razão entre as variações vertical e horizontal.

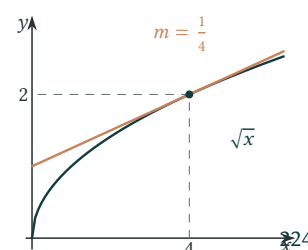


Figura 9.5. Tangente a $g(x) = \sqrt{x}$ em $(4, 2)$.

Solução. Pela definição de derivada,

$$g'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(4+h) - g(4)}{h}.$$

Substituímos $g(4) = 2$ e $g(4+h) = \sqrt{4+h}$ nesse quociente. O limite que procuramos é a inclinação da tangente representada na figura.

Para calcular o limite, multiplicamos o quociente pelo conjugado do numerador dividido por ele mesmo:

$$\begin{aligned} g'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a reta tangente ao gráfico de g em $(4, 2)$ tem coeficiente angular $1/4$. ■

Exemplo 9.4.

Calcule a derivada de $f(x) = x$ no ponto a .

<

Solução. Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Assim, $f'(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$. ■

9.2.1. Função derivada

Quando $f'(a)$ existe, dizemos que f é **diferenciável** em a . Se isso ocorre em todo ponto interior de seu domínio, dizemos simplesmente que f é diferenciável. Nas extremidades de intervalos, consideraremos separadamente as derivadas laterais.

Até aqui, calculamos a derivada em um ponto. Podemos também deixar esse ponto variar: a cada x em que a derivada existe, associamos o número $f'(x)$. Obtemos

assim a **função derivada** de f , denotada por f' , com domínio

$$\text{Dom } f' = \{x \in \text{Dom } f : f'(x) \text{ existe}\}.$$

O domínio de f' pode ser estritamente menor que o domínio de f .

Exemplo 9.5.

O Exemplo 9.4 mostra que $f(x) = x$ é diferenciável em todos os reais. Assim, podemos definir sua função derivada $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; nesse caso, ela é a função constante $f'(x) = 1$.

<

Exemplo 9.6.

Calcule a derivada de $f(x) = x^3 + x^2$. Qual é o domínio de f' ?

<

Solução. Pela definição,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2hx + h^2 \\ f(x) &= x^3 + x^2. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões no quociente e simplificando o fator h ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - (x^3 + x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h) \\ &= 3x^2 + 2x. \end{aligned}$$

O limite existe para todo $x \in \mathbb{R}$; portanto, $\text{Dom } f' = \mathbb{R}$.

■

Exemplo 9.7.

Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule a derivada de f . Qual é o domínio de f' ?

<

Solução. Para $x > 0$, aplicamos a definição de derivada e racionalizamos o numerador:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Dom } f' = (0, \infty)$. Embora f esteja definida em $x = 0$, a derivada lateral direita não é finita: o quociente incremental tende a $+\infty$ quando $h \rightarrow 0^+$. ■

9.2.2. Definição equivalente de derivada

Na definição anterior, o ponto próximo de a foi escrito como $a+h$. Podemos chamá-lo simplesmente de x : nesse caso, $h = x - a$, e $h \rightarrow 0$ equivale a $x \rightarrow a$. Para f definida em um intervalo aberto que contém a , obtemos

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Podemos, portanto, usar a seguinte forma equivalente:

9.5 Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contém a . A **derivada de f em a** , denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que o limite exista e seja finito.

Se escrevermos $\Delta x = x - a$ e $\Delta f = f(x) - f(a)$, a mesma expressão assume a forma

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Essa forma também esclarece a notação de Leibniz, na qual se explicita a variável em relação à qual a derivação é realizada.

9.8 Notação Notação de Leibniz

A derivada de f em c , denotada por $f'(c)$, também pode ser escrita como

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=c}$$

Já a função derivada f' é denotada também do seguinte modo:

$$\frac{df}{dx}$$

Embora lembre um quociente, $\frac{df}{dx}$ denota a função derivada, obtida pelo limite dos quocientes incrementais. As duas formas da definição são equivalentes; escolhemos a que torna o cálculo mais simples.

Exemplo 9.9.

Calcule a derivada de $f(x) = x^{1/3}$ no ponto $a \neq 0$.

<

Solução. Pela definição equivalente de derivada,

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{(x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3}. \end{aligned}$$

Usamos a fatoração

$$c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$$

com $c = x^{1/3}$ e $d = a^{1/3}$. Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{(x^{1/3} - a^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})} \\ &= \frac{1}{3a^{2/3}}. \end{aligned}$$

A expressão é finita para $a \neq 0$, conforme suposto no enunciado.

■

Exemplo 9.10.

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Mostre que existe $f'(0)$.

Oscilação limitada

A função $\sin(1/x)$ oscila quando $x \rightarrow 0$, mas permanece entre -1 e 1 . Um fator que tende a zero pode, portanto, controlar essa oscilação.

<

Solução. Pela definição,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}_{\text{limitado}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

A última igualdade decorre do teorema do confronto. Logo, $f'(0)$ existe e vale 0. ■

9.2.3. Derivadas laterais

Em um ponto de junção, ou em uma extremidade do domínio, o quociente incremental pode ter comportamentos distintos de cada lado. As derivadas laterais registram separadamente esses dois limites:

9.6 Definição Derivadas Laterais

A derivada pela direita é definida como

$$f'_+(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e a derivada pela esquerda é definida como

$$f'_-(a) := \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Cada derivada lateral é definida quando o respectivo limite existe e é finito.

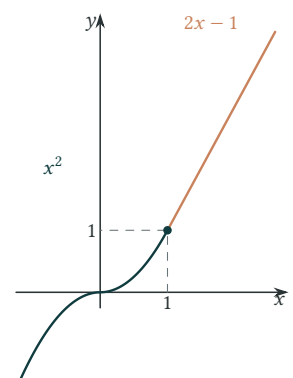
Se a é um ponto interior do domínio, f é diferenciável em a se, e somente se, as duas derivadas laterais existem e coincidem. Em uma extremidade do domínio, consideramos apenas a derivada lateral correspondente aos pontos em que a função está definida.

Exemplo 9.11.

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 2x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Calcule as derivadas laterais em $x = 1$ e determine se f é diferenciável nesse ponto.



229
Figura 9.6. Gráfico da função definida por uma parábola à esquerda de 1 e por uma reta à

Solução. Como $f(1) = 1$, usamos esse mesmo valor nos dois quocientes incrementais. À esquerda de 1, temos $f(x) = x^2$; logo,

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2. \end{aligned}$$

À direita, usamos $f(x) = 2x - 1$:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x - 1) - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2. \end{aligned}$$

As duas derivadas laterais coincidem. Portanto, f é diferenciável em 1 e $f'(1) = 2$. A parábola e a reta se encontram com a mesma inclinação, como sugere o gráfico. ■

A igualdade das derivadas laterais é essencial. No exemplo seguinte, os dois limites existem, mas têm valores diferentes.

Exemplo 9.12.

Mostre que a função $f(x) = |x|$ não é diferenciável em 0.

Solução. As derivadas laterais em 0 são

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1. \end{aligned}$$

Como $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a função não é diferenciável em 0. ■

A função valor absoluto é contínua em 0, mas não é diferenciável nesse ponto. Assim, a continuidade não garante a existência da derivada. No sentido inverso, porém, a implicação sempre vale:

9.13 Teorema

Se f é diferenciável no ponto x , então f é contínua em x . Equivalentemente, se f não é contínua em x então f não é diferenciável em x .

Demonstração. Como f é diferenciável em x , temos que

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x).$$

Para $y \neq x$, escrevemos

$$f(y) - f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (y - x).$$

◁

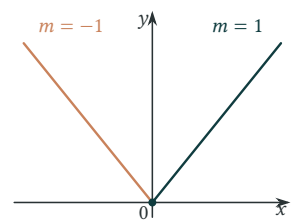


Figura 9.7. O canto do gráfico de $y = |x|$ reúne duas inclinações laterais diferentes em $x = 0$.

Tomando limites quando $y \rightarrow x$, obtemos

$$\lim_{y \rightarrow x} (f(y) - f(x)) = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Assim, $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$, logo f é contínua em x . ■

Podemos agora combinar a continuidade e o cálculo das derivadas laterais para determinar os coeficientes de uma função por partes.

Exemplo 9.14.

Determine a e b de modo que $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável em todos os pontos.

Funções definidas por partes

Os quocientes laterais usam o mesmo valor $f(a)$. A continuidade no ponto de junção deve ser verificada antes da comparação das derivadas laterais; derivar apenas as expressões de cada trecho pode ocultar um salto.

Solução. Em cada um dos intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$, a função é polinomial e, portanto, diferenciável. Resta analisar o ponto de junção.

A diferenciabilidade em $x = 1$ exige primeiro a continuidade:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = f(1) = a + b \implies a + b = 1.$$

Sob essa condição, $f(1) = 1$, e as derivadas laterais são

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

e

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = a.$$

Elas coincidem precisamente quando $a = 2$. Substituindo esse valor em $a + b = 1$, obtemos $b = -1$. Logo, a função é diferenciável em todos os pontos se, e somente se,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -1.$$

■

Exercícios

Ex. 9.1 Calcule a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \frac{1}{x}$

1. no ponto 2 e $\Delta x = 1$

2. no ponto 2 e $\Delta x = 0,1$

3. no ponto 2 e $\Delta x = 0,01$

Ex. 9.2

$$y = \frac{1}{x}?$$

Quanto vale $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função

Ex. 9.3

Para as funções a seguir, calcule a derivada no ponto indicado por meio do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1. derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$
2. derivada de $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $a = 1$
3. derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$
4. derivada de $f(x) = 3x^3 - x$ no ponto $a = 2$
5. derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$
6. derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$
7. derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$
8. derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$
9. derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = 1$
10. derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

Ex. 9.4 Determine a, b reais de modo que a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável em todos os pontos.

9.3. Derivadas das funções clássicas

A definição por limite permite calcular a derivada de qualquer função para a qual o limite exista. Para as funções elementares, porém, convém estabelecer fórmulas que possam ser reutilizadas. Elas serão deduzidas a partir da definição e dos limites fundamentais e formarão o repertório básico do cálculo diferencial.

9.15 Teorema Fórmulas de Derivação

São válidas as seguintes fórmulas de derivação

- a** Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$,
- b** Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n x^{n-1}$ para todo n inteiro positivo,
- c** Se $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, então $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$. Para n par, a fórmula vale em $x > 0$; para n ímpar e $n \geq 3$, vale em $x \neq 0$; para $n = 1$, vale em todo $x \in \mathbb{R}$,
- d** Se $f(x) = \sin x$ então $f'(x) = \cos x$,
- e** Se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\sin x$,
- f** Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$,
- g** Se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

A raiz no ponto 0

Para $n \geq 2$, a função $x^{1/n}$ está definida em 0, mas não tem derivada finita nesse ponto. Se n é par, 0 é ainda uma extremidade do domínio. É preciso distinguir o domínio da função do domínio de sua derivada.

Demonstração. Para o item **a**, a definição fornece imediatamente

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Apresentaremos duas demonstrações do item **b**. A primeira usa a fatoração

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^n - x^n}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1})}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

A segunda demonstração usa o binômio de Newton:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{1 \cdot 2} + \dots + h^n\right) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{(n)(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{(n)(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}\right) \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$, o item **b** é a derivada da identidade, já calculada. As expansões anteriores são entendidas para $n \geq 2$. Para o item **c**, fixemos x no interior do domínio e, quando $n \geq 2$, suponhamos também $x \neq 0$. Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$, temos $u \rightarrow v$ quando $y \rightarrow x$. Pelo item anterior,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u \rightarrow v} \frac{u - v}{u^n - v^n} \\ &= \lim_{u \rightarrow v} \frac{1}{(u^n - v^n)/(u - v)} \\ &= \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}. \end{aligned}$$

Para o item **d**, usamos a identidade de transformação de soma em produto:

A unidade do ângulo

A fórmula $(\sin x)' = \cos x$ pressupõe que x seja medido em radianos, como no limite $\sin h/h \rightarrow 1$. Uma mudança da unidade angular altera a taxa de variação e introduz o correspondente fator de

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{y-x}{2} \right) \cos \left(\frac{y+x}{2} \right)}{y-x} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{y-x}{2} \right) \cos \left(\frac{y+x}{2} \right)}{\frac{y-x}{2}} \\
&= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{y-x}{2} \right)}{\frac{y-x}{2}} \lim_{y \rightarrow x} \cos \left(\frac{y+x}{2} \right)
\end{aligned}$$

No primeiro limite, fazemos $h = (y-x)/2$; assim, $h \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \lim_{y \rightarrow x} \cos \left(\frac{y+x}{2} \right) \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Usamos aqui o primeiro limite fundamental apresentado na Seção 7.26:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Para o item **e**, aplicamos a fórmula da adição do cosseno:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \cos x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Na última passagem usamos, além do primeiro limite fundamental, a identidade $\cos h - 1 = -2 \operatorname{sen}^2(h/2)$. De fato,

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -\operatorname{sen} \left(\frac{h}{2} \right) \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0.$$

Para o item **f**,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Nesse cálculo, usamos o terceiro limite fundamental, enunciado no Teorema 8.23:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Finalmente, para o item **g** e $x > 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right).$$

Fazendo $u = h/x$, temos $u \rightarrow 0$ e $h = xu$. Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} \right) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Na penúltima passagem, usamos o segundo limite fundamental, $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e$. ■

As funções elementares aparecem com frequência combinadas por somas, produtos e quocientes. As regras de derivação permitem obter a derivada dessas combinações a partir das derivadas de suas componentes.

9.4. Regras de derivação

A estrutura algébrica da expressão determina a regra apropriada. Somas e múltiplos constantes se comportam linearmente; produtos e quocientes introduzem termos adicionais que decorrem diretamente do quociente incremental.

9.16 Teorema Derivada da Soma e Subtração

Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f \pm g$ é diferenciável em a e

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$

Demonstração. Basta demonstrar o caso da soma; o caso da subtração é análogo. Seja $h(x) = f(x) + g(x)$ e suponha que f e g sejam diferenciáveis em x .

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(x+t) + g(x+t)] - [f(x) + g(x)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x) + g(x+t) - g(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

A estrutura da expressão

A regra inicial é sugerida pela operação mais externa da expressão: soma em $x^2 + \sin x$, produto em $x^2 \sin x$, composição em $\sin(x^2)$. Identificar essa estrutura ajuda a organizar a derivação antes dos cálculos.

Exemplo 9.17.

Calcule a equação da reta tangente a $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$ no ponto $x = 1$.

Solução. Pelas regras da soma e da potência,

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Assim, o coeficiente angular da tangente em $x = 1$ é

$$m = f'(1) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Como a reta passa por $(1, f(1)) = (1, 2)$, sua equação é

$$y - 2 = \frac{9}{2}(x - 1).$$

9.18 Teorema Derivada do Produto por uma Constante

Se f é uma função diferenciável em x e $c \in \mathbb{R}$ então a função cf é diferenciável em x e

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Demonstração. Seja $h = cf$. Pela definição de derivada e pela linearidade do limite,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c[f(x+t) - f(x)]}{t} \\ &= c \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

■

Exemplo 9.19.

Calcule a derivada de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

<

Solução. Aplicando a linearidade da derivada e a regra da potência,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [2x^3 - 9x^2 + 12x + 4] &= \frac{d}{dx} 2x^3 - \frac{d}{dx} 9x^2 + \frac{d}{dx} 12x + \frac{d}{dx} 4 \\ &= 2 \frac{d}{dx} x^3 - 9 \frac{d}{dx} x^2 + 12 \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 4 \\ &= 6x^2 - 18x + 12. \end{aligned}$$

A derivada está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

9.20 Teorema Derivada do Produto

Se f e g são funções diferenciáveis em x então a função $f \cdot g$ é diferenciável em x e

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Regra do produto

A derivada de um produto não é o produto das derivadas. Em $(x \cdot x)'$, a regra fornece $1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$; as duas parcelas correspondem às variações locais de cada fator.

Demonstração. Seja $m = fg$. Somamos e subtraímos $f(x)g(x+h)$ no numerador do

quociente incremental:

$$\begin{aligned}
 m'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
 \end{aligned}$$

No último passo, usamos também que toda função diferenciável é contínua, de modo que $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$. ■

Em todo ponto em que f e g são diferenciáveis, portanto,

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Exemplo 9.21.

Determine os pontos do gráfico de $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 4$ nos quais a reta tangente é horizontal.

◁

Solução. A reta tangente é horizontal quando seu coeficiente angular é zero, isto é, quando $f'(x) = 0$. Como

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x-1)(x+1),$$

isso ocorre em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

Calculando os valores da função,

$$f(-1) = 2, \quad f(0) = 4, \quad f(1) = 2.$$

Portanto, os pontos procurados são

$$\boxed{(-1, 2), \quad (0, 4), \quad (1, 2)}.$$

■

Exemplo 9.22.

Calcule a derivada de $f(x) = x \sin x$.

◁

Solução. Pela regra do produto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cos x \\ &= \operatorname{sen} x + x \cos x. \end{aligned}$$

A expressão é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 9.23.

Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x^2 + x)}$.

Solução. Para $x \neq 0$, a regra do produto fornece

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3}(x^2 + x) + x^{2/3}(2x + 1) \\ &= \frac{x^{2/3}}{3}(8x + 5). \end{aligned}$$

Além disso, $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (h^{8/3} + h^{5/3})/h = 0$. Portanto, a última expressão estende-se a $x = 0$ e vale em todo $\mathbb{R}$. ■

Exemplo 9.24.

Calcule a derivada de $g(x) = e^x \sqrt{x}$

Solução. A função está definida para $x \geq 0$. Para $x > 0$, a regra do produto fornece

$$g'(x) = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}.$$

Em $x = 0$, a derivada lateral direita não é finita; assim, a fórmula vale em $\operatorname{Dom} g' = (0, \infty)$. ■

9.25 Teorema Derivada do Quociente

Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ com $g(a) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a com

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Quando uma regra não se aplica

A falta de uma hipótese impede usar a regra, mas não prova que a derivada deixe de existir. Uma simplificação da expressão pode resolver o problema; caso contrário, o limite do quociente incremental permite examinar diretamente o ponto.

Regra do quociente

Na fórmula $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, a ordem das parcelas do numerador determina o sinal. A regra só se aplica nos pontos em que $g \neq 0$.

Demonstração. Considere a função $m = \frac{f}{g}$. Como $g(a) \neq 0$ e g é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que $|h| < \epsilon \implies g(a+h) \neq 0$. Ou seja, a função m está definida numa vizinhança de a . Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} m'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a)(f(a+h) - f(a)) - f(a)(g(a+h) - g(a))}{h g(a+h)g(a)} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \right) \\ &\quad \times \left[g(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right]. \end{aligned}$$

O primeiro limite é calculado pela continuidade de g em a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} = \frac{1}{g(a)^2}.$$

Os outros dois limites são, respectivamente, as definições das derivadas de f e g em a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a).$$

Portanto,

$$m'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

■

9.26 Proposição

Se n é um inteiro positivo, $x \neq 0$ e $f(x) = x^{-n}$, então $f'(x) = -n x^{-n-1}$.

Demonstração. $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ e logo $f'(x) = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$.

■

Exemplo 9.27.

Calcule a derivada de $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x + 1}$.

<

Solução. Para $x \neq -1$, a regra do quociente fornece

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x - 1)(x + 1) - (2x^2 - x + 1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Logo, $\text{Dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

■

Exemplo 9.28.

Calcule a derivada de $\frac{4x-2}{x^2+1}$.

<

Solução. Como $x^2 + 1$ nunca se anula, a regra do quociente é válida em todo $\mathbb{R}$ e fornece

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\frac{(4x-2)}{x^2+1} \right] &= \frac{(4)(x^2+1) - (4x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 4x + 4}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 9.29.

Calcule a derivada de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

<

Solução. A função está definida para $x \geq 0$. Para $x > 0$, a regra do quociente fornece

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - 2x\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2}, \quad x > 0.\end{aligned}$$

Em $x = 0$, a derivada lateral direita não é finita. Portanto, $\text{Dom } f' = (0, \infty)$.

■

Exemplo 9.30.

Calcule a derivada de $\text{tg } x$

<

Solução. Como $\text{tg } x = \sin x / \cos x$, a regra do quociente fornece

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \text{tg } x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x,\end{aligned}$$

A fórmula é válida nos pontos em que $\cos x \neq 0$, isto é, em cada intervalo do domínio da tangente.

■

Exemplo 9.31.

Encontre todos os pontos no gráfico de $y = x^3 - 3x$ em que a reta tangente é horizontal.

Solução. A derivada é

$$y' = 3x^2 - 3.$$

A tangente é horizontal quando $y' = 0$. Portanto,

$$3x^2 - 3 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Como $f(-1) = 2$ e $f(1) = -2$, os pontos procurados são $(-1, 2)$ e $(1, -2)$.

◁

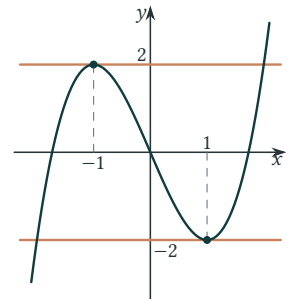


Figura 9.8. Tangentes horizontais ao gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$.

A equação $f'(x) = 0$ fornece as abscissas. Para encontrar os pontos do gráfico, calculamos também $f(x)$.

Exercícios

Ex. 9.5 Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = 3x^4 + 5x + 8$

2. $f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$

4. $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$, com $m, n \in \mathbb{N}^*$

5. $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x + \ln(7)$

6. $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$

7. $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x^3\sqrt{x^2}}$

Ex. 9.6 Quantas retas tangentes à curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

Ex. 9.7 Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = 5 \sin(x) + 6 \cos(x)$

2. $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$

3. $f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$

4. $f(x) = x \operatorname{cotg}(x)$

5. $f(x) = (x-2) \sin(x) + x^2 \operatorname{tg}(x) + \sin(x) \cos(x)$

Ex. 9.8 Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = x^7 e^x$

2. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

3. $f(x) = e^x \cos(x)$

4. $f(x) = \frac{x^n}{\ln(x)}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

5. $f(x) = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}$

Ex. 9.9 Em que ponto a tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela à reta $5x + y - 3 = 0$.

Ex. 9.10 Determine as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(1, -4)$. Determine os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Ex. 9.11 Determine as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2, 5)$.

Ex. 9.15 Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$$

Ex. 9.12 Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.

Determine os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Ex. 9.13 Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, usando a notação $p'' = (p')'$, determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

Ex. 9.16 Dado $c > 0$, seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| \geq c \\ a + bx^2 & \text{se } |x| < c \end{cases}$$

Ex. 9.14 Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq c \\ ax + b & \text{se } x > c \end{cases}$$

Determine os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

9.5. A regra da cadeia

Quando $h = f \circ g$, uma variação da variável independente produz dois efeitos sucessivos: primeiro modifica o valor de g e, em seguida, modifica o valor de f . A Regra da Cadeia descreve como essas duas variações locais se combinam.

9.32 Teorema Regra da Cadeia

Se g é diferenciável em t_0 e f é diferenciável em $g(t_0)$, então $h = f \circ g$ é diferenciável em t_0 e

$$h'(t_0) = f'(g(t_0))g'(t_0). \quad (9.1)$$

Demonstração. Defina

$$\Phi(u) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(g(t_0))}{u - g(t_0)}, & u \neq g(t_0), \\ f'(g(t_0)), & u = g(t_0). \end{cases}$$

Pela definição de derivada, $\Phi(u) \rightarrow f'(g(t_0))$ quando $u \rightarrow g(t_0)$; portanto, Φ é contínua em $g(t_0)$. Como a diferenciabilidade de g implica sua continuidade em t_0 , temos

Composição de taxas

Para funções diferenciáveis, uma variação de x é transmitida a $u = g(x)$ pela taxa $g'(x)$ e, depois, a $y = f(u)$ pela taxa $f'(g(x))$. A taxa resultante é o produto desses fatores. A derivada externa é avaliada no valor da função interna.

$g(t) \rightarrow g(t_0)$. Além disso, para todo t próximo de t_0 ,

$$f(g(t)) - f(g(t_0)) = \Phi(g(t))(g(t) - g(t_0)),$$

inclusive quando $g(t) = g(t_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(g(t)) \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \\ &= f'(g(t_0))g'(t_0). \end{aligned}$$

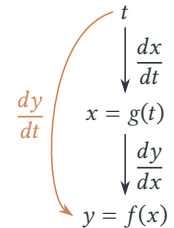
■

9.33 Notação

Se $x = g(t)$ e $y = f(x)$, então $y = f(g(t))$ e, nas condições do Teorema 9.32,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (9.2)$$

Embora essa notação sugira um cancelamento de diferenciais, a igualdade é uma forma compacta de registrar a Regra da Cadeia, e não uma simples manipulação de frações.



Duas etapas. A taxa total é o produto das taxas de cada etapa, avaliadas nos pontos correspondentes.

Exemplo 9.34.

Calcule a derivada de $h(t) = \sin(t^2)$.

◁

Solução. Decompomos h tomando $g(t) = t^2$ e $f(x) = \sin x$. Então $h = f \circ g$, $g'(t) = 2t$ e $f'(x) = \cos x$. Pela regra da cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = 2t \cos(t^2).$$

■

Nos exemplos seguintes, a decomposição em função externa e função interna torna visíveis os fatores produzidos pela regra da cadeia.

Exemplo 9.35.

Calcule a derivada de $h(t) = \ln(5t + 3)$.

◁

Solução. O domínio de h é $t > -3/5$. Fazendo $g(t) = 5t + 3$ e $f(x) = \ln x$, temos $h = f \circ g$, $g'(t) = 5$ e $f'(x) = 1/x$. Pela regra da cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{5}{5t + 3}, \quad t > -\frac{3}{5}.$$

■

O fator da função interna

Em $\sin(x^2)$, o seno depende de x por meio de x^2 . A derivada é $2x \cos(x^2)$: o fator $2x$ registra a variação da função interna. Omiti-lo seria tratar x^2 como se variasse à mesma taxa que x .

Exemplo 9.36.

Calcule a derivada de $h(x) = \cos(\sqrt{x})$.

<

Solução. Tomamos $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(u) = \cos u$, de modo que $h = f \circ g$. Como $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ e $f'(u) = -\sin u$, a regra da cadeia fornece

$$h'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

■

Exemplo 9.37.

Calcule a derivada de $g(x) = e^{\sqrt{7x+1}}$.

<

Solução. Para que a função seja real, é necessário $x \geq -1/7$. Nos pontos interiores desse domínio, a regra da cadeia fornece

$$g'(x) = e^{\sqrt{7x+1}} \frac{7}{2\sqrt{7x+1}}, \quad x > -\frac{1}{7}.$$

Em $x = -1/7$, a derivada finita não existe; portanto, $\text{Dom } g' = (-1/7, \infty)$.

■

Com a regra da cadeia, podemos estender a derivação das potências inteiras x^n às potências reais x^c , definidas por $x^c = e^{c \ln x}$ para $x > 0$.

9.38 Teorema Regra da Potência

Se c é um número real, então, para $x > 0$,

$$(x^c)' = cx^{c-1}.$$

Demonstração. Para $x > 0$, temos $x^c = e^{c \ln x}$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx} x^c = e^{c \ln x} \frac{c}{x} = x^c \frac{c}{x} = cx^{c-1}.$$

■

9.39 Observação

Se $c = p/q$ está em forma irredutível e q é ímpar, a potência real x^c também está definida para $x < 0$, e a fórmula $(x^c)' = cx^{c-1}$ vale nesses pontos negativos não nulos. Para um expoente real arbitrário, a construção $x^c = e^{c \ln x}$ usada acima exige $x > 0$. Assim, a regra deve sempre ser lida junto com o domínio da potência considerada.

Composições sucessivas

Para calcular $e^{\sqrt{7x+1}}$, aplicamos sucessivamente a função afim, a raiz e a exponencial. Na derivação, percorremos essa composição de fora para dentro, multiplicando as derivadas. Cada fator deve ser avaliado na expressão que lhe serve de argumento.

Exemplo 9.40.

Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$.

<

Solução. Como os denominadores 3 e 5 são ímpares, podemos escrever

$$f(x) = x^{5/3} + x^{3/5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela Regra da Potência e pela observação anterior, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{3}{5}x^{-2/5} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

Em $x = 0$, o quociente incremental do termo $x^{3/5}$ contém $h^{3/5}/h = h^{-2/5}$, que não possui limite finito. Portanto, $\text{Dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

Exemplo 9.41.

Calcule a derivada de $(3x - 7)^\pi$.

<

Solução. Pelas regras da cadeia e da potência,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3x - 7)^\pi &= \pi(3x - 7)^{\pi-1} \frac{d}{dx}(3x - 7) \\ &= 3\pi(3x - 7)^{\pi-1}. \end{aligned}$$

A função real e sua derivada estão definidas para $x > 7/3$. ■

Exercícios

Ex. 9.17 Para $a \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, derive

$$f(x) = x^{a/2} + x^{(a+4)/2} + ax^{a-1}.$$

4. $h(t) = e^{3t^2+t-1}$

5. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$

Ex. 9.18 Calcule as derivadas das seguintes funções:

6. $f(x) = \cos(3x)$

7. $g(x) = \text{tg}(5x)$

Nível 1 — composições diretas.

1. $f(x) = (2x + 10)^{12}$

2. $f(t) = (3t - 2)^5$

3. $g(\theta) = (\sin \theta + \cos \theta)^3$

Nível 2 — composições aninhadas, logaritmos e exponenciais.

8. $h(t) = \sin^4(2t)$

9. $p(t) = \cos^3(t^2 + 3t + 1)$

10. $f(x) = \ln(\cos x)$

11. $f(x) = \ln(x^2)$

12. $f(x) = 2 \ln(x)$

13. $g(r) = e^{4r}$

14. $g(t) = e^{\cos t}$

15. $g(t) = 15^2$

16. $m(w) = \frac{e^w}{e^{2w}}$

Nível 3 — regra da cadeia combinada com produto e quociente.

17. $m(w) = \frac{e^w + 1}{e^{2w}}$

18. $f(x) = \frac{e^{x^2} + x}{e^{2x^2}}$

19. $f(x) = x^2 \sin(5x)$

20. $g(t) = \cos(t^2 + 3t) \sin(5t - 7)$

21. $g(t) = \cos\left(\frac{1}{t}\right)e^{5t^2}$

Ex. 9.19 Encontre as retas tangentes e normais nos pontos dados.

1. $f(x) = (4x^3 - x)^{10}$ em $x = 0$

2. $f(t) = (3t - 2)^5$ em $t = 1$

3. $g(\theta) = (\sin \theta + \cos \theta)^3$ em $\theta = \pi/2$

4. $h(t) = e^{3t^2+t-1}$ em $t = -1$

Ex. 9.20 Para $k > 0$ e $x > 0$, calcule $\frac{d}{dx}(\ln(kx))$ de duas formas diferentes:

1. usando a regra da cadeia; e
2. primeiro usando a regra do logaritmo $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, e então calculando a derivada.

Ex. 9.21 Para $x > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, calcule $\frac{d}{dx}(\ln(x^k))$ de duas formas diferentes:

1. usando a regra da cadeia; e
2. primeiro usando a regra do logaritmo $\ln(a^p) = p \ln a$, e então calculando a derivada.

Ex. 9.22 Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em 0, mas não diferenciável nesse ponto.

9.6. Derivada da função inversa

Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva, então f admite uma inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$, também contínua. A reflexão dos gráficos em relação à reta $y = x$ sugere como suas derivadas se relacionam: as inclinações correspondentes devem ser recíprocas, desde que não sejam nulas. O teorema a seguir formaliza essa observação.

Usaremos aqui o teorema de continuidade da inversa já demonstrado no capítulo de limites (Teorema 7.35).

Inclinações correspondentes

Sob as hipóteses do teorema da função inversa, a reflexão em $y = x$ transforma uma tangente de inclinação $m \neq 0$ em outra de inclinação $1/m$. As derivadas são

9.42 Teorema Derivada da Função Inversa

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva e contínua, com I um intervalo. Se a é interior a I , f é diferenciável em a , $f'(a) \neq 0$ e $b = f(a)$, então f^{-1} é diferenciável em b , e

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demonstração. Escreva $a = f^{-1}(b)$. Para $x \neq b$, ponha $y = f^{-1}(x)$. Pela injetividade de f , temos $y \neq a$; pela continuidade de f^{-1} , garantida pelo Teorema 7.35, temos $y \rightarrow a$ quando $x \rightarrow b$. Portanto,

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(b) &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} \\ &= \lim_{y \rightarrow a} \frac{y - a}{f(y) - f(a)} \\ &= \lim_{y \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(y) - f(a)}{y - a}} \\ &= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \end{aligned}$$

■

9.43 Observação

Na notação de Leibniz, escrevendo $y = f^{-1}(x)$ e, portanto, $x = f(y)$, a fórmula assume a forma sugestiva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Essa escrita deve ser entendida como uma maneira de recordar o teorema, e não como uma divisão puramente algébrica de símbolos.

Inversa não é recíproca

f^{-1} é a função que desfaz f ; não significa $1/f$. Se $b = f(a)$, então $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$, quando as hipóteses do teorema são satisfeitas.

Exemplo 9.44.

Para $n \geq 2$, mostre, usando o teorema da derivada da função inversa, que

$$g(x) = x^{1/n} \implies g'(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1}.$$

Determine também o domínio em que essa derivada existe.

◁

Solução. Observamos inicialmente que $g(x) = x^{1/n}$ é a função inversa de $f(x) = x^n$ quando restringimos f a $[0, \infty)$ se n é par; se n é ímpar, consideramos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Em ambos os casos, o teorema da derivada da função inversa exige $f'(g(x)) \neq 0$; portanto,

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Se n é par, g está definida em $[0, \infty)$ e $\text{Dom } g' = (0, \infty)$. Se n é ímpar, g está definida em $\mathbb{R}$ e $\text{Dom } g' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

Exercícios

Ex. 9.23 Use diretamente o Teorema da Derivada da Função Inversa.

1. Seja $f(x) = x^3 + x$. Sabendo que $f(1) = 2$, calcule

$$(f^{-1})'(2).$$

2. Seja $g(x) = x + \ln x$, para $x > 0$. Sabendo que $g(1) = 1$, calcule $(g^{-1})'(1)$.

Exercícios

Ex. 9.24 Usando a definição por limite, calcule a derivada de $f(x) = x^2 - 4x$ em $x = 3$. Escreva também a equação da reta tangente nesse ponto.

Ex. 9.29 Determine os pontos em que $y = \sqrt{1 + \cos(4x^2)}$ é derivável, obtenha sua derivada nesses pontos e avalie-a em $x = 0$.

Ex. 9.25 A posição de um carrinho é $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, em metros. Determine velocidade e aceleração para $t \geq 0$, os instantes em que o carrinho está em repouso e o sentido do movimento em cada intervalo relevante.

Ex. 9.30 Para $f(x) = x^3 + x$, use a fórmula da derivada da inversa para calcular $(f^{-1})'(2)$ sem obter uma fórmula explícita para f^{-1} .

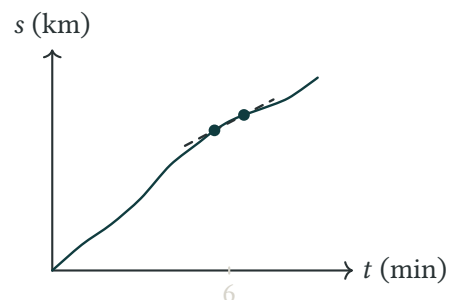
Ex. 9.26 Derive e simplifique

$$y = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x}}{x - 2}, \quad x > 0, x \neq 2.$$

Identifique onde cada regra de derivação é usada.

Ex. 9.27 A área de um círculo cresce segundo $A(t) = \pi r(t)^2$. Se $r(t) = 2 + 0,15t$ cm, com t medido em segundos, determine $A'(t)$ e interprete seu valor em $t = 10$.

Ex. 9.31 O gráfico representa a distância percorrida por uma ciclista em função do tempo. A reta tracejada é secante ao gráfico em dois instantes próximos de $t = 6$ min.



Ex. 9.28 Mostre, pela definição, que $f(x) = |x|$ não é derivável em 0. Relacione sua conclusão com a geometria do gráfico.

Explique como usar a inclinação dessa secante para estimar a velocidade instantânea em $t = 6$ min e indique as unidades do resultado.

10

Tópicos em diferenciação

A formulação de um problema é frequentemente mais essencial que sua solução.

Albert Einstein e Leopold Infeld, *A Evolução da Física*

Nem toda relação entre grandezas aparece inicialmente na forma $y = f(x)$, e nem toda derivada pode ser obtida apenas pelas regras algébricas básicas. A derivação implícita, a derivação logarítmica e o teorema da função inversa ampliam o alcance das técnicas desenvolvidas no capítulo anterior. Essas ferramentas permitem tratar funções exponenciais de base geral, funções trigonométricas inversas e problemas de taxas relacionadas. Derivadas de ordem superior e funções hiperbólicas completam o repertório; a aproximação linear, ao final, retoma a interpretação local que está na origem da derivada.

10.1. Derivação implícita

Muitas funções são apresentadas explicitamente na forma $y = f(x)$. Outras surgem como ramos de uma relação entre x e y , expressa por uma equação:

$$F(x, y) = G(x, y) \quad (10.1)$$

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente por tal equação se o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação 10.1 para todo $x \in \text{Dom } f$. Uma mesma relação pode determinar vários ramos locais, ou até não definir y como função global de x ; por isso, é necessário identificar o ramo e as condições em que a derivada existe.

Exemplo 10.1.

Determine as funções definidas implicitamente pela equação $y^2 + x^2y - 4 = 0$.

Neste capítulo

10.1 Derivação implícita 249

10.2 Derivadas das funções exponencial e logarítmica 255

10.3 Derivadas das funções trigonométricas inversas 259

10.4 Taxas relacionadas 262

10.5 Funções hiperbólicas e suas derivadas 269

10.6 Derivadas de ordem superior 275

10.7 Aproximações lineares e diferenciais 277

Solução. A equação é quadrática em y . Pela fórmula resolvente,

$$y = \frac{-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 16}}{2}.$$

Como $x^4 + 16 > 0$, a relação determina duas funções reais, ambas definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 10.2.

Sejam $a, b > 0$. Uma elipse é caracterizada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Determine as funções de x definidas implicitamente por essa equação.

<

Solução. Isolando y na equação da elipse,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ y &= \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.\end{aligned}$$

Logo, para $|x| \leq a$, a parte superior e a parte inferior da elipse são os gráficos das funções $y_+(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ e $y_-(x) = -b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. A elipse inteira não é o gráfico de uma única função de x . ■

Quando uma função é dada implicitamente, calculamos a derivada de y em relação a x por **derivação implícita**: em um ramo no qual $y = y(x)$ é diferenciável, diferenciaremos os dois lados da equação, aplicamos as regras de derivação e isolamos dy/dx . A divisão feita nesse último passo deve ser registrada como uma condição de domínio. Utilizaremos a técnica de derivação implícita para apresentar outra forma de deduzir a derivada do logaritmo natural.

Exemplo 10.3.

Mostre que $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$.

<

Solução. Para $x > 0$, escrevemos $y = \ln x$, ou, equivalentemente, $x = e^y$. Derivando implicitamente em relação a x ,

$$1 = e^y \frac{dy}{dx}.$$

Como $e^y = x$, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Exemplo 10.4.

Calcule a derivada de $\cos x + \cos y = 1/2$.

Solução. Derivando implicitamente em relação a x ,

$$-\sin x - \sin y y' = 0,$$

$$y' = -\frac{\sin x}{\sin y} = -\operatorname{cosec} y \sin x.$$

A fórmula é válida nos pontos da relação em que $\sin y \neq 0$.

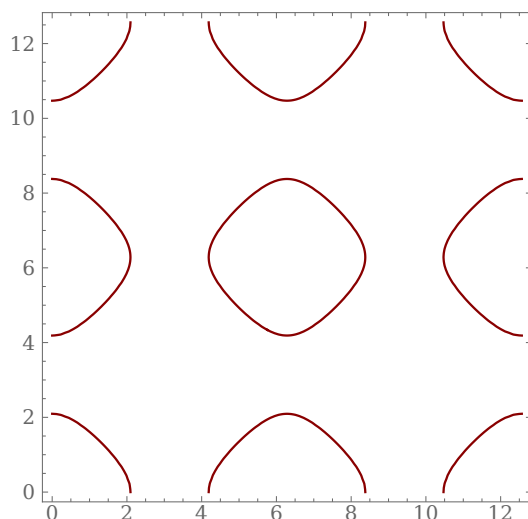


Figura 10.1. A relação $\cos x + \cos y = 1/2$ possui vários ramos locais e não define globalmente uma única função $y = f(x)$.

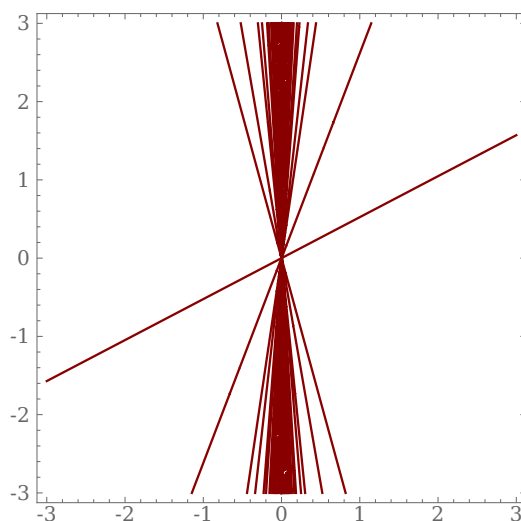


Figura 10.2. A relação $\sin(x/y) = 1/2$ reúne vários ramos contidos em retas que passam pela origem, com a origem excluída.

Exemplo 10.5.

Calcule dy/dx na relação $\sin \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

◀

Solução. Como $y \neq 0$, podemos diferenciar implicitamente a relação em relação a x :

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{y} \left(\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} \right) &= 0, \\ y - x \frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Nas soluções da equação, $\cos(x/y) \neq 0$, o que justifica a simplificação. A fórmula final requer também $x \neq 0$. ■

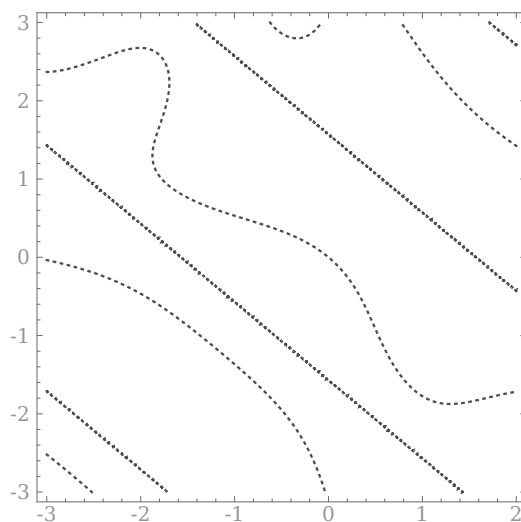


Figura 10.3. Curva implícita definida por $\text{tg}(x+y) = \text{sen}(xy)$, com vários ramos separados pelas singularidades da tangente.

Exemplo 10.6.

Considere a função $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$\text{tg}(x+y) = \text{sen}(xy).$$

Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$.

◀

Solução. Diferenciando ambos os lados em relação a x ,

$$\sec^2(x+y)(1+y') = \cos(xy)(y+xy').$$

Isolando y' , obtemos

$$y' = \frac{y \cos(xy) - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - x \cos(xy)},$$

nos pontos em que o denominador não se anula. No ponto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$, temos $x+y = 0$, $xy = -\pi$ e, portanto,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-\sqrt{\pi}) \cos(-\pi) - \sec^2(0)}{\sec^2(0) - \sqrt{\pi} \cos(-\pi)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{\pi} + 1}. \end{aligned}$$

Logo, a reta tangente à curva nesse ponto é

$$y = \frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{\pi} + 1}(x - \sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}.$$

■

Exemplo 10.7.

Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

◁

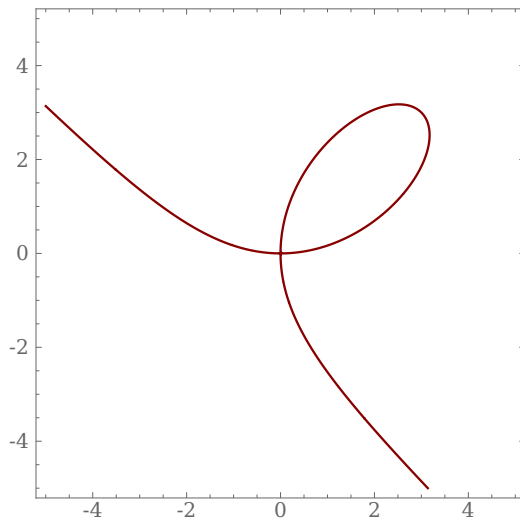


Figura 10.4. O folio $x^3 + y^3 = 6xy$ possui um laço e ramos que não formam o gráfico global de uma única função de x .

Solução. Derivando ambos os lados da equação em relação a x , obtemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'.$$

Isolando y' ,

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x},$$

nos pontos em que $y^2 - 2x \neq 0$. ■

Exercícios

Ex. 10.1 Encontre dy/dx diferenciando implicitamente

1. $x^2 + y^2 = 1$

2. $x^2y + xy^2 = 3x$

3. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$

4. $x \sin(y) + \cos(2y) = \cos(y)$

5. $x^y = y^x$

6. $y = \ln(x^2 + y^2)$

7. $x^4 + y^2 + y = 7$

8. $x^{2/5} + y^{2/5} = 1$

Ex. 10.2 Mostre que $\frac{dy}{dx}$ é a mesma para cada uma das seguintes funções definidas implicitamente.

1. $xy = 1$

2. $x^2y^2 = 1$

3. $\sin(xy) = 1$

4. $\ln(xy) = 1$

Ex. 10.3 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $(-5, 9/4)$

2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ no ponto $(-1, 4\sqrt{2})$

3. $y^2 = x^3(2-x)$ no ponto $(1, 1)$

Ex. 10.4 A função $y = f(x)$, $y > 0$ é dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa 1.

Ex. 10.5 Sejam $a, b > 0$. Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Ex. 10.6 Seja $c > 0$. Mostre que a soma dos interceptos nos eixos x e y da reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$, em qualquer ponto com $x > 0$ e $y > 0$, é igual a c .

Ex. 10.7 Encontre as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passam pelo ponto $(12, 3)$.

Ex. 10.8 A água escoava de um tanque cuja área da seção transversal é constante e igual a 50 m^2 . Na parte inferior do tanque, há um orifício de área 14 m^2 . A altura inicial da água é 20 m e, após t segundos, a altura h , em

metros, satisfaz

$$2\sqrt{h} + \frac{t}{25} - 2\sqrt{20} = 0.$$

O modelo vale para $0 \leq t \leq 50\sqrt{20}$. A que taxa a altura da água diminui no instante em que $h = 9$ m?



A derivação implícita permite diferenciar uma relação sem isolar previamente uma das variáveis. Combinada à regra da cadeia e às identidades entre exponenciais e logaritmos, ela também conduz às fórmulas de derivação para bases gerais.

10.2. Derivadas das funções exponencial e logarítmica

A identidade $a^x = e^{x \ln a}$ reduz qualquer base positiva à base e . Com ela e a regra da cadeia, as derivadas de a^x e $\log_a x$ seguem das que já conhecemos.

10.8 Teorema

Se $a > 0$, então

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

Demonstração. A identidade $a^x = e^{x \ln a}$ permite aplicar diretamente a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

■

Exemplo 10.9.

Calcule a derivada de $y = 2^{\sqrt{x}}$

◁

Solução. A função está definida para $x \geq 0$. Para $x > 0$, a regra da cadeia fornece

$$y' = 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}.$$

Em $x = 0$, a derivada finita não existe; logo, $\text{Dom } y' = (0, \infty)$.

■

10.10 Teorema

Se $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$, então

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Demonstração. Pela mudança de base, $\log_a x = \ln x / \ln a$. Como $\ln a$ é uma constante não nula,

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \ln a}.$$

■

Exercícios

Ex. 10.9 Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x$
2. $f(x) = \pi^x + 3^x x + 4^x \cos x$
3. $f(x) = \log_2 x + \log_3 x + \log_4 x$
4. $f(x) = 2^x \log_3 x$

Ex. 10.10 Mostre, usando $a^x = e^{x \ln a}$ e a regra da cadeia, que $\frac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x$, para $a > 0$.

Ex. 10.11 Escreva a equação da reta tangente às curvas $y = f(x)$ no ponto especificado. Esboce o gráfico de $f(x)$ e da reta tangente.

1. $y = x^3$ no ponto $x = 3$
2. $y = x^7 + 3x$ no ponto $x = 1$
3. $y = 1/(x - 1)$ no ponto $(-1, -1/2)$
4. $y = \sin x$ no ponto $x = \pi$
5. $y = 2^x$ no ponto $x = 2$

6. $y = \cos x + x^2$ no ponto $x = 0$

Ex. 10.12 Calcule a derivada de $f(t) = (\ln t)e^t$ e indique o domínio.

Ex. 10.13 A lei de Weber–Fechner propõe, em um modelo idealizado, que a intensidade percebida de um estímulo seja

$$P(I) = k \ln \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad I > 0,$$

em que k e I_0 são constantes positivas.

1. Calcule $P'(I)$ e interprete seu comportamento quando I aumenta.
2. Mostre que duplicar o estímulo sempre produz o mesmo acréscimo na percepção prevista pelo modelo.

Ex. 10.14 Uma curva idealizada de frequência de disparo de um neurônio é

$$f(I) = a\sqrt{I - I_c}, \quad I > I_c,$$

em que $a > 0$, I é a corrente de entrada e I_c é um limiar. A derivada $f'(I)$ é chamada de ganho. Determine o ganho, estude seu limite quando $I \rightarrow I_c^+$ e interprete o resultado.

Exemplo 10.11.

Calcule a derivada de $y = \log_{10}(x^2 + 1)$.

<

Solução. Como $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a composição está definida em todo $\mathbb{R}$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx} \log_{10}(x^2 + 1) = \frac{1}{\ln 10 (x^2 + 1)} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 10}.$$

■

10.2.1. Derivada de $f(x)^{g(x)}$ **10.12 Teorema**

Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo, com $f(x) > 0$. Então $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$ é diferenciável e

$$h'(x) = [f(x)]^{g(x)} \left(g'(x) \ln[f(x)] + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right).$$

Demonstração. A identidade $h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$ e a regra da cadeia garantem primeiro que h é diferenciável. Como $f(x) > 0$, também $h(x) > 0$, e podemos escrever

$$\ln h(x) = g(x) \ln[f(x)].$$

Diferenciando implicitamente e aplicando as regras do produto e da cadeia,

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \ln[f(x)] + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}.$$

Multiplicando por $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$, obtemos a fórmula enunciada. ■

O procedimento empregado na demonstração é chamado **derivação logarítmica**: aplicamos o logaritmo à identidade que define a função, simplificamos a expressão obtida e diferenciamos implicitamente.

Exemplo 10.13.

Calcule a derivada de x^x , para $x > 0$.

<

Solução. Para $x > 0$, ponha $y = x^x$. Como $y > 0$, podemos aplicar o logaritmo natural:

$$\ln y = x \ln x.$$

Derivando implicitamente,

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \ln x + 1, \\ y' &= y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).\end{aligned}$$

A mesma fórmula resulta da identidade $x^x = e^{x \ln x}$. ■

Exemplo 10.14.

Calcule a derivada de $(\sin x)^{\cos x}$.

◁

Solução. Trabalhamos em qualquer intervalo no qual $\sin x > 0$, condição necessária para usar o logaritmo real. Ponha $y = (\sin x)^{\cos x}$. Então

$$\ln y = \cos x \ln(\sin x).$$

Derivando implicitamente e aplicando as regras do produto e da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{\sin x}, \\ y' &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right).\end{aligned}$$

■

Exercícios

Ex. 10.15

Calcule as seguintes derivadas

1. $e^{\sin x}$

2. $\ln(1 + x^2)$

3. x^x

4. $\cos(x)^x$

5. $x^\pi + \pi^x$

6. $(2x + 1)^x$

7. $\ln(\ln(\ln(x)))$

8. $\ln(x)^x$

9. x^{e^x}

*9. x^{x^x}

10.3. Derivadas das funções trigonométricas inversas

Senô, cosseno e tangente não são injetivas em seus domínios naturais. Ao restringi-las aos intervalos escolhidos na Seção 5.8, obtemos funções bijetivas e, portanto, inversas bem definidas. O teorema da derivada da função inversa permite então deduzir as derivadas de arco seno, arco cosseno e arco tangente, com seus respectivos domínios.

10.15 Teorema

Seja $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ então

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Demonstração. A função $\sen x$ é injetiva no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagem o intervalo $[-1, 1]$. Logo,

$$y = \arcsen x \iff \sen y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Para $-1 < x < 1$, temos $-\pi/2 < y < \pi/2$ e, portanto, $\cos y > 0$. Assim, a derivada de $\sen$ não se anula no ponto correspondente e as hipóteses do Teorema 9.42 estão satisfeitas. Há duas maneiras de obter a derivada. Pelo Teorema 9.42,

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\cos(\arcsen x)}.$$

Alternativamente, a derivação implícita de $\sen y = x$ fornece

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Em ambos os casos, como $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, temos $\cos y \geq 0$ e

$$\cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Portanto,

$$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Nos extremos $x = \pm 1$, a derivada não é finita. ■

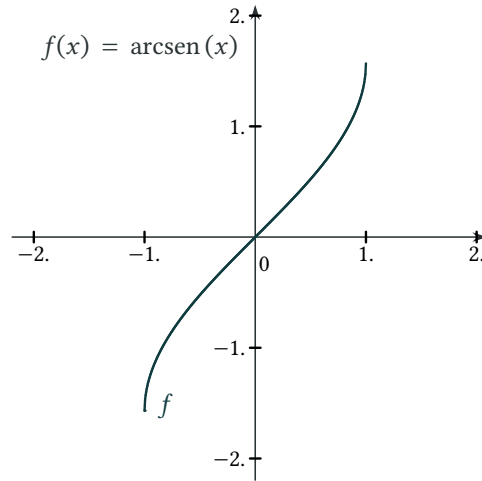


Figura 10.5. Gráfico da função arco seno.

10.16 Teorema

Seja $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ então

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Demonstração. A função $\cos x$ é injetiva em $[0, \pi]$ e tem imagem $[-1, 1]$. Assim,

$$y = \arccos x \iff \cos y = x, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Derivando implicitamente e usando $\sin y \geq 0$ nesse intervalo,

$$\begin{aligned} -\sin y \frac{dy}{dx} &= 1, \\ \sin y &= \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Nos extremos $x = \pm 1$, a derivada não é finita. ■

10.17 Teorema

Seja $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ então

$$\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A restrição de tg ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ é bijetiva sobre $\mathbb{R}$. Sua inversa é a função $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, caracterizada por

$$y = \arctg x \iff \operatorname{tg} y = x.$$

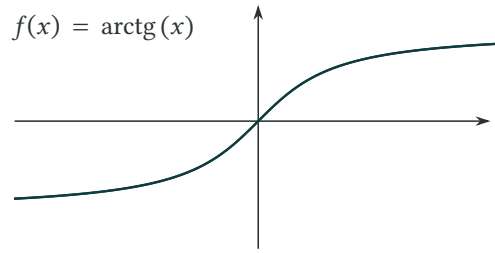


Figura 10.6. Gráfico da função arco tangente.

Demonstração. Se $y = \arctg x$, então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando implicitamente,

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

■

Para as outras inversas trigonométricas, fixamos as convenções

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos(1/x), \quad \operatorname{arccossec} x = \arcsen(1/x) \quad (|x| \geq 1),$$

e $\operatorname{arccotg} x = \pi/2 - \arctg x$ para $x \in \mathbb{R}$. Assim, os valores da arco-secante pertencem a $[0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$, os da arco-cossecante a $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$ e os da arco-cotangente a $(0, \pi)$. A regra da cadeia e as fórmulas já demonstradas dão as derivadas seguintes.

10.18 Teorema Derivadas das Funções Trigonômétricas Inversas

■ $\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1;$	■ $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}, x > 1;$
■ $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1;$	■ $\frac{d}{dx} \operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R};$
■ $\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R};$	■ $\frac{d}{dx} \operatorname{arccossec} x = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}, x > 1.$

Exercícios

Ex. 10.16 Calcule as seguintes derivadas

3. $\operatorname{arccossec}(2x)$

1. $\arcsen(x^3)$

2. $\arccos(\operatorname{sen}(x))$

Ex. 10.17 Calcule as derivadas e indique onde as fórmulas são válidas.

1. $h(t) = \arcsen(2t)$

2. $f(t) = \operatorname{arcsec}(2t)$

3. $g(x) = \operatorname{arctg}(2x)$

4. $f(x) = x \arcsen x$

5. $g(t) = \sen t \arccos t$

6. $h(x) = \arcsen x / \arccos x$

7. $g(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$

8. $f(x) = \operatorname{arcsec}(1/x)$

1. $f(x) = (x^2 + 1)^5$.

2. $g(x) = e^{x^2} \sen x$.

3. $h(x) = \ln(1 + x^2)$.

4. $p(x) = x^x$, para $x > 0$.

5. $q(x) = (\sen x)^x$, em um intervalo no qual $\sen x > 0$.

6. $r(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, para $-1 < x < 1$.

7. $u(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$.

8. $v(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right)$, para $x > 1$.

9. Calcule y' se $x^2 + xy + y^2 = 7$.

10. Calcule $f''(x)$ se $f(x) = x^2 e^x$.

Ex. 10.18 Faça um treino cumulativo das regras de derivação.

Até aqui, a regra da cadeia e a derivação implícita foram usadas principalmente para obter novas fórmulas de derivação. Quando várias grandezas dependem de um mesmo parâmetro — em geral, o tempo —, as mesmas técnicas tornam-se uma ferramenta de modelagem: uma relação entre grandezas passa a produzir uma relação entre suas taxas de variação.

10.4. Taxas relacionadas

Em muitos problemas, duas ou mais grandezas variam com o tempo e permanecem ligadas por uma equação. As **taxas relacionadas** são as derivadas dessas grandezas em relação ao tempo. Um procedimento útil consiste em identificar as grandezas que variam, escrever uma equação que as relacione, diferenciar essa equação em relação a t e somente então substituir os valores correspondentes ao instante considerado.

Por exemplo, se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ estão relacionadas por uma equação envolvendo x e y , tratamos ambas como funções do tempo e diferenciamos a relação inteira em relação a t , usando a regra da cadeia sempre que necessário. Os valores numéricos das grandezas devem ser substituídos somente depois da diferenciação, pois, durante o processo, todas elas variam com t .

Exemplo 10.19.

Seja A a área de um quadrado cujo lado l varia com o tempo. Qual é a relação entre as taxas dl/dt e dA/dt ?

<

Solução. Escrevemos $l = l(t)$ e, conseqüentemente, $A = A(t)$. Como $A = l^2$, a regra da cadeia fornece

$$\frac{dA}{dt} = 2l \frac{dl}{dt}. \quad (10.2)$$

Essa identidade relaciona, em cada instante, a taxa de variação da área à taxa de variação do lado. ■

Exemplo 10.20.

Ar é bombeado para o interior de um balão esférico, cujo volume cresce à taxa de $50 \text{ cm}^3/\text{s}$. A que taxa o raio cresce quando mede 5 cm?

<

Solução. Sejam $r = r(t)$ o raio e $V = V(t)$ o volume. Como

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

derivando em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \implies \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt}.$$

Substituindo $\frac{dV}{dt} = 50 \text{ cm}^3/\text{s}$ e $r = 5 \text{ cm}$, concluímos que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi} \text{ cm/s}.$$

■



Exemplo 10.21.

Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido, com raio superior de 2 m e altura de 4 m. A água é bombeada para o tanque à taxa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$. Determine a taxa de elevação do nível da água quando a profundidade é 3 m.

<

Solução. Sejam $V = V(t)$ o volume de água, $r = r(t)$ o raio da superfície e $h = h(t)$ a profundidade. O volume satisfaz

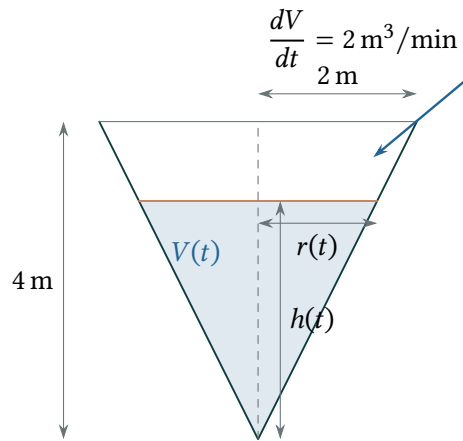


Figura 10.7. No corte axial do tanque, a semelhança entre o cone de água e o tanque fornece $r(t)/h(t) = 2/4$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Por semelhança de triângulos, $r/h = 2/4$, isto é, $r = h/2$. Portanto,

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3.$$

Derivando em relação a t ,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}.$$

Com $h = 3$ m e $\frac{dV}{dt} = 2$ m³/min, resulta

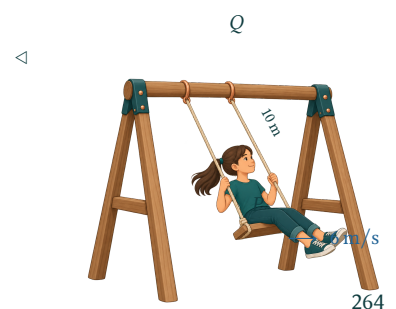
$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi} \text{ m/min.}$$

■

Exemplo 10.22.

Um balanço está preso à extremidade de uma corda de 10 m, fixada no ponto Q . Seja P a posição do assento. No instante $t = 0$, o balanço está diretamente abaixo de Q e começa a ser puxado horizontalmente, da esquerda para a direita, à velocidade de 6 m/s. Determine:

1. a velocidade vertical do balanço após 1 s;
2. a velocidade angular da corda, em graus por segundo, após 1 s.



Solução. Fixemos a origem na posição inicial de P . Se $x = x(t)$ é o deslocamento horizontal e $y = y(t)$ é a elevação em relação à posição inicial, então $\frac{dx}{dt} = 6 \text{ m/s}$. No primeiro item, procuramos $\frac{dy}{dt}$; no segundo, procuramos $\frac{d\theta}{dt}$, em que θ é o ângulo da corda com a vertical, medido em radianos.

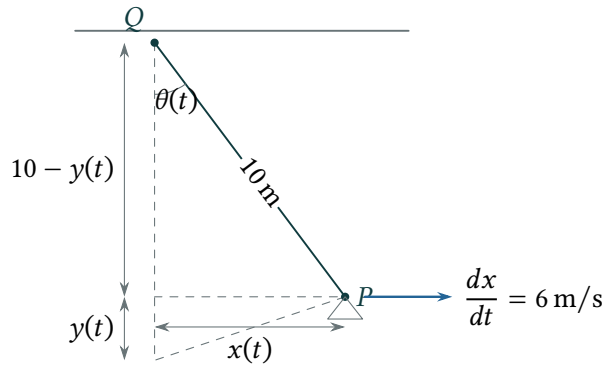


Figura 10.8. As variáveis do balanço formam um triângulo retângulo com catetos $x(t)$ e $10 - y(t)$ e hipotenusa 10.

Para a velocidade vertical, o triângulo retângulo da figura tem catetos x e $10 - y$ e hipotenusa 10. Logo,

$$x^2 + (10 - y)^2 = 100.$$

Derivando,

$$2x\dot{x} - 2(10 - y)\dot{y} = 0.$$

Após 1 s, temos $x = 6 \text{ m}$ e, pelo teorema de Pitágoras, $10 - y = 8 \text{ m}$, de modo que $y = 2 \text{ m}$. Com $\dot{x} = 6 \text{ m/s}$,

$$2 \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot 8\dot{y} = 0 \implies \dot{y} = 4,5 \text{ m/s}.$$

Para a velocidade angular, relacionamos x e θ por

$$\sin \theta = \frac{x}{10}.$$

Derivando em relação a t ,

$$\cos \theta \dot{\theta} = \frac{1}{10} \dot{x}.$$

No instante considerado, o triângulo tem lados 6, 8 e 10, portanto $\cos \theta = 8/10$. Assim,

$$\dot{\theta} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ rad/s}.$$

Multiplicando por $180/\pi$, obtemos aproximadamente 43 graus/s. ■

Exemplo 10.23.

A energia cinética de um corpo de massa constante M é dada por $K = \frac{1}{2}Mv^2$. Se o corpo está em queda livre com aceleração $9,8 \text{ m/s}^2$, a que taxa a energia cinética aumenta quando sua velocidade é 30 m/s ?

Solução. Como $K = \frac{1}{2}Mv^2$ e M é constante, a diferenciação em relação ao tempo fornece

$$\frac{dK}{dt} = Mv \frac{dv}{dt}.$$

No instante indicado, $v = 30 \text{ m/s}$ e $\frac{dv}{dt} = 9,8 \text{ m/s}^2$. Portanto,

$$\frac{dK}{dt} = M \cdot 30 \cdot 9,8 = 294M \text{ W},$$

quando M é medido em quilogramas. ■

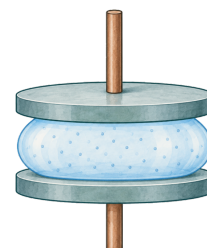
Exemplo 10.24.

Um gás está em uma câmara de parede flexível. Mantidos constantes a quantidade de gás e a temperatura, a pressão P e o volume V satisfazem $PV = k$, em que $k > 0$ é constante. Se o volume diminui a uma taxa constante, qual é a taxa de variação da pressão?

Solução. Derivando $PV = k$ em relação ao tempo,

$$P \frac{dV}{dt} + V \frac{dP}{dt} = 0 \implies \frac{dP}{dt} = -\frac{P}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{k}{V^2} \frac{dV}{dt}.$$

Como $\frac{dV}{dt} < 0$, resulta $\frac{dP}{dt} > 0$: a pressão aumenta. Se $\frac{dV}{dt}$ é constante, o fator k/V^2 cresce à medida que o volume diminui; portanto, a pressão sobe cada vez mais depressa. ■



Exercícios

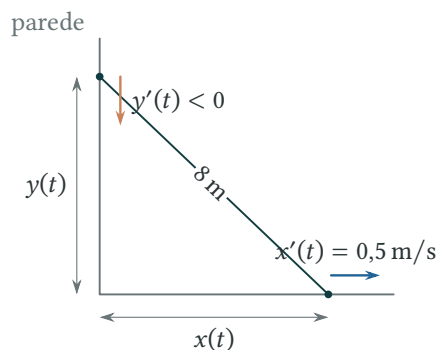
Ex. 10.19 A água flui sobre uma superfície plana à taxa de $5 \text{ cm}^3/\text{s}$, formando uma poça circular de 10 mm de profundidade constante. A que taxa o raio cresce quando mede:



1. 1 cm?
2. 10 cm?

3. 100 cm?

Ex. 10.20 Uma escada de 8 m está encostada em uma casa enquanto sua base é afastada a uma velocidade constante de $0,5 \text{ m/s}$.



A que velocidade vertical o topo da escada desliza pela parede quando a base está a:

1. 1 m da casa?
2. 4 m da casa?
3. 7,5 m da casa?
4. 8 m da casa?

Ex. 10.21 A luminosidade L de uma estrela é modelada pela lei de Stefan–Boltzmann,

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4,$$

em que R é o raio, T é a temperatura da superfície e σ é constante. Mostre que

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = 2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} + 4 \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}.$$

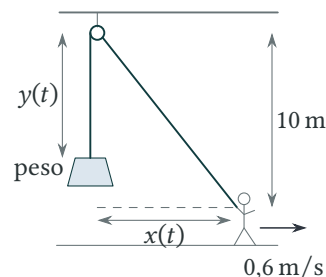
Em certo instante, o raio cresce à taxa relativa de 0,4% por século e a temperatura diminui à taxa relativa de 0,1% por século. Qual é a taxa relativa de variação da luminosidade nesse instante?

Ex. 10.22 Um tanque cônico invertido, com 20 m de profundidade e 10 m de diâmetro na parte superior, está sendo preenchido com água a uma taxa de $10 \text{ m}^3/\text{min}$. A que taxa a água está subindo quando sua profundidade é:

1. 1 m?
2. 10 m?
3. 19 m?

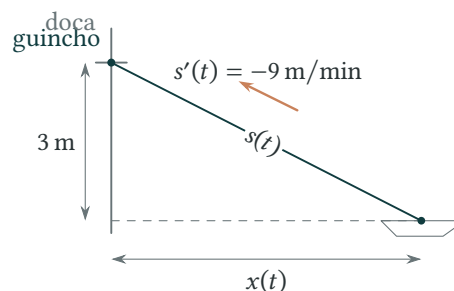
Quanto tempo o tanque levará para encher quando começar vazio?

Ex. 10.23 Uma corda inextensível presa a um peso passa por uma polia no teto e retorna até um trabalhador. Ele mantém a extremidade livre a uma altura constante, 10 m abaixo da polia. Inicialmente, o ponto de conexão da corda com o peso está nessa mesma altura. Despreze o trecho de corda em contato com a polia.



Suponha que o trabalhador esteja inicialmente ao lado do peso, de modo que o comprimento total da corda seja 20 m, e comece a se afastar a $0,6 \text{ m/s}$. A que velocidade o peso sobe depois que ele percorre (a) 3 m e (b) 12 m?

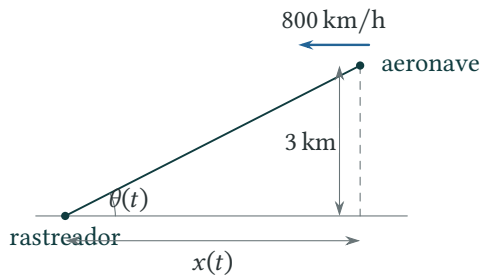
Ex. 10.24 Um barco é puxado em direção a uma doca por uma corda recolhida por um guincho à taxa constante de 9 m/min . O guincho está 3 m acima do convés do barco, e essa diferença de altura permanece constante.



A que velocidade o barco se aproxima do cais quando o barco está:

1. 15 m distante da doca?
2. 4,5 m distante da doca?
3. 0,3 m distante da doca?
4. É possível que o trecho de corda entre o barco e o guincho tenha menos de 3 m de comprimento?

Ex. 10.25 Uma aeronave voa a 800 km/h, a uma altitude constante de 3 km, em trajetória retilínea que passa diretamente sobre um dispositivo de rastreamento.



A que velocidade angular o dispositivo deve girar para acompanhar a aeronave, em graus por segundo, quando a distância horizontal do avião ao dispositivo for:

- 1 km?
- 0,2 km?
- zero, isto é, quando a aeronave estiver diretamente acima dele?

Ex. 10.26 Uma empresa de paisagismo despeja areia em uma pilha cônica à taxa de $1 \text{ m}^3/\text{s}$. As propriedades físicas da areia asseguram que a altura do cone seja sempre igual a $2/3$ do diâmetro de sua base circular. A que taxa a altura da pilha aumenta quando mede 10 m?



Ex. 10.27 A posição, em centímetros, de uma massa presa a uma mola amortecida é

$$s(t) = 2e^{-3t/2} \sin(2\pi t), \quad t \geq 0,$$

com t medido em segundos.

1. Determine a velocidade $v(t)$.

2. Calcule $v(0)$ e interprete seu sinal.
3. Encontre o primeiro instante positivo em que a massa está momentaneamente em repouso.
4. Mostre que a amplitude das oscilações tende a zero.

Ex. 10.28 Um cristal cúbico cresce preservando sua forma. Se x é a medida da aresta, em milímetros, e $V = x^3$ é o volume, responda:

1. Qual é a taxa de variação do volume em relação à aresta?
2. Quanto vale essa taxa quando $x = 3 \text{ mm}$?
3. Relacione dV/dx com a área superficial S do cubo.

Ex. 10.29 Uma população de peixes $P(t)$, medida em número de indivíduos, obedece ao modelo logístico com retirada proporcional

$$P' = r_0 \left(1 - \frac{P}{P_c}\right) P - \beta P,$$

em que r_0 , P_c e β são positivos. Chamamos de *equilíbrio* um valor constante $P = P_*$ para o qual $P' = 0$.

1. Determine os equilíbrios do modelo e diga quando existe um equilíbrio positivo.
2. Para $P_c = 10000$, $r_0 = 0,05$ e $\beta = 0,04$, determine o equilíbrio positivo.
3. O que o modelo prevê quando $\beta = r_0$ e $P(0) > 0$?

Ex. 10.30 Os ponteiros de um relógio medem 8 mm e 4 mm. Determine a taxa de variação da distância entre suas pontas exatamente à uma hora. Considere o movimento contínuo dos dois ponteiros.

10.5. Funções hiperbólicas e suas derivadas

As funções hiperbólicas são combinações de exponenciais que apresentam propriedades algébricas e geométricas análogas às das funções trigonométricas. Sua origem está ligada à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, assim como seno e cosseno estão ligados à circunferência unitária.

10.5.1. Definições e propriedades básicas

O nome *funções hiperbólicas* vem de uma relação geométrica análoga àquela que liga as funções trigonométricas à circunferência unitária. Enquanto os pontos da circunferência podem ser parametrizados por $(\cos t, \sin t)$, os pontos do ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ podem ser parametrizados por $(\cosh t, \sinh t)$.

Essas funções aparecem naturalmente como combinações de exponenciais. Também surgem em diversos modelos físicos. Um exemplo clássico é a **catenária**, curva de equação

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0,$$

que descreve a forma de uma corrente homogênea, perfeitamente flexível, suspensa pelas extremidades e em equilíbrio sob a ação da gravidade.

10.1 Definição

As funções **seno hiperbólico** e **cosseno hiperbólico** são definidas, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

10.25 Proposição Identidade fundamental e simetrias

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Além disso, $\sinh$ é ímpar, $\cosh$ é par e $\cosh x \geq 1$.

Demonstração. Das definições,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1.$$

Substituindo x por $-x$ nas mesmas fórmulas, obtemos

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x.$$

Por fim,

$$\cosh x - 1 = \frac{1}{2} (e^{x/2} - e^{-x/2})^2 \geq 0.$$



Figura 10.9. Uma corrente homogênea suspensa pelas extremidades assume, em equilíbrio, a forma de uma catenária.

A identidade fundamental mostra que $(\cosh t, \sinh t)$ pertence à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Como $\cosh t > 0$, essa parametrização percorre seu ramo direito.

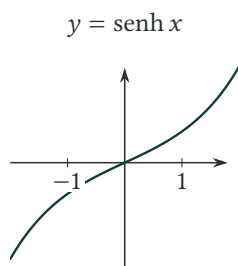


Figura 10.10. A função seno hiperbólico

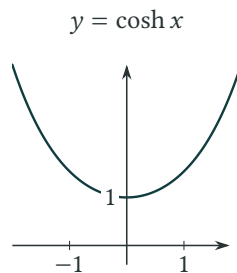


Figura 10.11. A função cosseno hiperbólico

10.2 Definição

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas são definidas por

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

As funções tgh e sech estão definidas em todo $\mathbb{R}$; as funções cotgh e csch estão definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A identidade fundamental também fornece

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x, \quad \operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x.$$

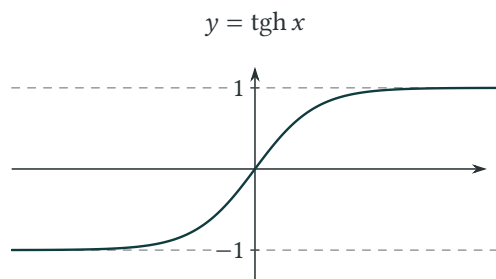


Figura 10.12. A função tangente hiperbólica

10.5.2. Derivadas das funções hiperbólicas

Como as funções hiperbólicas foram definidas em termos de exponenciais, suas derivadas seguem das regras já estabelecidas.

10.26 Teorema Derivadas das funções hiperbólicas

Nos respectivos domínios,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x, & \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x &= \operatorname{sech}^2 x, & \frac{d}{dx} \operatorname{cotgh} x &= -\operatorname{csch}^2 x, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{sech} x &= -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x, & \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x &= -\operatorname{cotgh} x \operatorname{csch} x.\end{aligned}$$

Demonstração. Derivando as definições de $\sinh$ e $\cosh$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x, \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x.\end{aligned}$$

Pela regra do quociente e pela identidade fundamental,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{cotgh} x &= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x.\end{aligned}$$

Por fim, derivando os recíprocos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x &= -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x, \\ \frac{d}{dx} \operatorname{csch} x &= -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x \operatorname{csch} x.\end{aligned}$$

■

Exemplo 10.27.

A catenária de parâmetro $a > 0$ é dada por

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Calcule y' e y'' e verifique as relações

$$y'' = \frac{y}{a^2} \quad \text{e} \quad 1 + (y')^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

◁



Solução. Pela regra da cadeia e pelas derivadas das funções hiperbólicas,

$$y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right), \quad y'' = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{y}{a^2}.$$

Além disso, da identidade $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ segue que

$$1 + (y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

Assim, a função que motivou a seção também fornece um exemplo direto do uso das novas fórmulas de derivação. ■

Para definir as inversas, podemos verificar a monotonicidade diretamente pelas representações exponenciais, sem recorrer ainda ao critério baseado no sinal da derivada. Se $x < y$, então

$$\sinh y - \sinh x = \frac{1}{2}[(e^y - e^x) + (e^{-x} - e^{-y})] > 0,$$

de modo que $\sinh$ é estritamente crescente; como seus limites em $-\infty$ e $+\infty$ são, respectivamente, $-\infty$ e $+\infty$, ela é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$.

Para $0 \leq x < y$, ponha $u = e^x$ e $v = e^y$. Então $1 \leq u < v$ e

$$\cosh y - \cosh x = \frac{v+u}{2} - \frac{v-u}{2} = u > 0.$$

Como $\cosh 0 = 1$ e $\cosh x \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$, a restrição de $\cosh$ a $[0, \infty)$ é uma bijeção sobre $[1, \infty)$. Finalmente,

$$\operatorname{tgh} x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1},$$

portanto tgh é estritamente crescente. Juntamente com

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh} x = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh} x = 1,$$

isso mostra que tgh é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $(-1, 1)$.

Exemplo 10.28.

Calcule a derivada de $\operatorname{tgh}(x^2)$.

◁

Solução. A função externa é a tangente hiperbólica e a interna é x^2 . Pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh}(x^2) = 2x \operatorname{sech}^2(x^2).$$

■

10.5.3. Funções hiperbólicas inversas

A bijetividade estabelecida acima permite definir os ramos principais das funções hiperbólicas inversas. Vejamos uma dessas inversões em detalhe. Se $y = \operatorname{arcsinh} x$,

então

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Pondo $z = e^y > 0$ e multiplicando por $2z$, obtemos

$$z^2 - 2xz - 1 = 0.$$

A raiz positiva é $z = x + \sqrt{x^2 + 1}$; portanto, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Assim,

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10.3)$$

Para o cosseno hiperbólico, usamos a restrição $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$:

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1. \quad (10.4)$$

Finalmente, como $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ é bijetiva,

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1. \quad (10.5)$$

De modo análogo, arcoth denota a inversa de

$$\operatorname{cotgh} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty),$$

arsech denota a inversa da restrição

$$\operatorname{sech} : [0, \infty) \longrightarrow (0, 1],$$

e arcsch denota a inversa de

$$\operatorname{csch} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

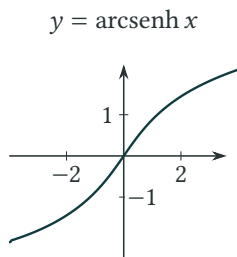


Figura 10.13. A função arco-seno hiperbólico

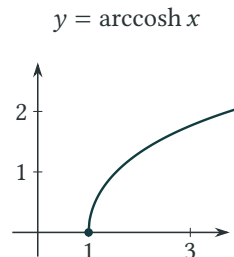


Figura 10.14. A função arco-cosseno hiperbólico

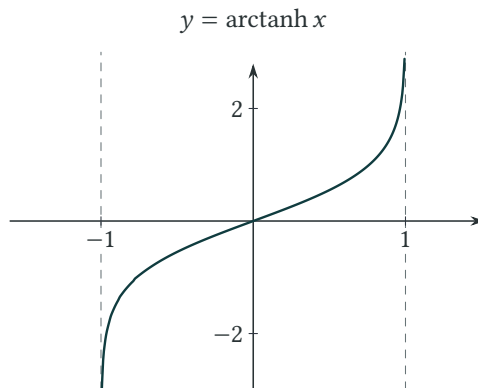


Figura 10.15. A função arco-tangente hiperbólica

10.29 Teorema Derivadas das funções hiperbólicas inversas

Nos respectivos domínios,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsenh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsech} x = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 < x < 1,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsch} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \neq 0.$$

Demonstração. As fórmulas seguem do teorema da derivada da função inversa e das identidades hiperbólicas. Nos ramos escolhidos, as derivadas das funções diretas não se anulam nos pontos interiores relevantes: $\cosh y > 0$; para $\operatorname{arccosh} x$ temos $y > 0$ e, portanto, $\sinh y > 0$; além disso, $\operatorname{sech}^2 y$, $\operatorname{csch}^2 y$ e os produtos que aparecem nos dois últimos casos são não nulos em seus respectivos domínios. Assim, as hipóteses do Teorema 9.42 estão satisfeitas. Indicamos os cálculos, incluindo as restrições dos ramos principais:

$$y = \operatorname{arcsenh} x \implies x = \sinh y \implies y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$y = \operatorname{arccosh} x \implies x = \cosh y \implies y' = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y = \operatorname{arctanh} x \implies x = \operatorname{tgh} y \implies y' = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$y = \operatorname{arcoth} x \implies x = \operatorname{cotgh} y \implies y' = \frac{1}{-\operatorname{csch}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2},$$

$$y = \operatorname{arsech} x \implies x = \operatorname{sech} y \implies y' = \frac{1}{-\operatorname{sech} y \operatorname{tgh} y} = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}},$$

$$y = \operatorname{arcsch} x \implies x = \operatorname{csch} y \implies y' = \frac{1}{-\operatorname{csch} y \operatorname{cotgh} y} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}.$$

Nos dois últimos cálculos, os sinais são determinados pelos ramos principais: para arsech , $y \geq 0$; para arcsch , $\operatorname{cotgh} y$ tem o mesmo sinal que $x = \operatorname{csch} y$. ■

Exercícios**Ex. 10.31** Calcule as derivadas:

2. $\operatorname{tgh}(x^2)$.

1. $\sinh(2x)$.

3. $1/\cosh x$.

4. $\operatorname{arsenh}(3x)$.

6. $x^{\cosh x}$, para $x > 0$.

5. $(\sinh x)^{\operatorname{tgh} x}$, para $x > 0$.

10.6. Derivadas de ordem superior

Uma derivada também pode variar e, portanto, pode ser novamente derivada. As derivadas sucessivas descrevem variações de ordem cada vez mais alta: na mecânica, por exemplo, a derivada da posição é a velocidade, e a derivada da velocidade é a aceleração.

Formalmente, seja f uma função diferenciável em um intervalo aberto I . A função $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **derivada primeira de f** . Quando f' também é diferenciável, sua derivada é a **derivada segunda de f** :

$$(f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}, \quad f'' = (f')' = f^{(2)}.$$

A derivada de f'' , quando existe, é a **derivada terceira de f** , denotada por

$$f^{(3)} \quad \text{ou} \quad f'''.$$

De modo geral, para $n \in \mathbb{N}^*$, denotamos por $f^{(n)}$ a **derivada n -ésima de f** , sempre que ela exista. Adotaremos também a convenção $f^{(0)} = f$.

Na notação de Leibniz, para $y = f(x)$, escrevemos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$$

para a derivada segunda. Analogamente, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ e $\frac{d^3 f}{dx^3}$ denotam a derivada terceira, e assim por diante.

Exemplo 10.30.

Calcule as quatro primeiras derivadas de $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3/x$, para $x \neq 0$.

◁

Solução. Escrevendo $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3x^{-1}$, aplicamos sucessivamente a regra da potência:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x + 1 + 3x^{-2}, \\ f''(x) &= 6x + 4 - 6x^{-3}, \\ f^{(3)}(x) &= 6 + 18x^{-4}, \\ f^{(4)}(x) &= -72x^{-5}. \end{aligned}$$

Todas essas derivadas estão definidas para $x \neq 0$, que é também o domínio da função original. ■

Exemplo 10.31.

Calcule a segunda derivada de $f(x) = \sin x + e^x + 1$.

<

Solução. Derivando uma vez,

$$f'(x) = \cos x + e^x.$$

Derivando novamente,

$$f''(x) = -\sin x + e^x.$$

Ambas as derivadas estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 10.32.

Calcule $\sin^{(98)} x$.

<

Solução. As primeiras derivadas revelam um padrão periódico:

$$\sin' x = \cos x,$$

$$\sin'' x = -\sin x,$$

$$\sin''' x = -\cos x,$$

$$\sin^{(4)} x = \sin x.$$

As derivadas, portanto, repetem-se em ciclos de comprimento 4. Como $98 = 4 \cdot 24 + 2$, a derivada de ordem 98 ocupa a mesma posição que a derivada segunda no ciclo. Logo,

$$\sin^{(98)} x = -\sin x.$$

■

Exemplo 10.33.

Mostre que se $f(x) = \frac{1}{x}$ então $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

<

Solução. A afirmação vale para $n = 0$. Suponha que, para certo $n \geq 0$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}.$$

Derivando mais uma vez,

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (-n-1) x^{-n-2} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Pelo princípio da indução, a fórmula vale para todo $n \geq 0$ e $x \neq 0$. ■

Exemplo 10.34.

A posição de uma partícula é dada pela equação $s(t) = 5t^3 - 6t^2 + 9t$. Encontre a velocidade e a aceleração no instante $t = 2$.

◁

Solução. A velocidade e a aceleração são, respectivamente,

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = 15t^2 - 12t + 9, \\ a(t) &= s''(t) = 30t - 12. \end{aligned}$$

No instante $t = 2$ s, temos

$$v(2) = 45 \text{ m/s}, \quad a(2) = 48 \text{ m/s}^2,$$

se a posição s for medida em metros. ■

Depois de ampliar o repertório de técnicas de diferenciação, voltamos à interpretação geométrica que motivou a derivada. A reta tangente não registra apenas a inclinação do gráfico: perto do ponto de tangência, ela fornece uma aproximação da própria função.

10.7. Aproximações lineares e diferenciais

Em muitas situações, precisamos estimar de modo rápido a variação de $f(x)$ provocada por uma pequena variação em x . O incremento da variável dependente é

$$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x).$$

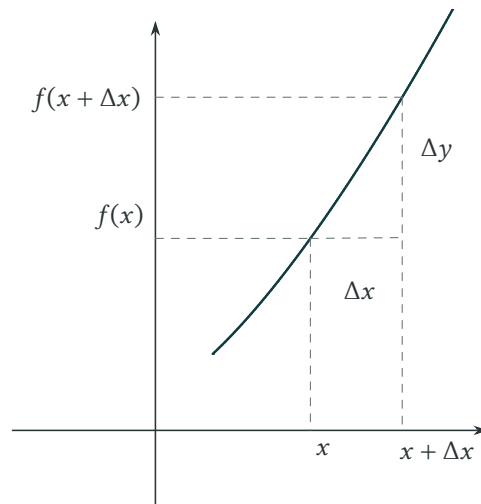


Figura 10.16. Incrementos Δx e Δy no gráfico de uma função.

Se f é diferenciável em p , seu gráfico e sua reta tangente tornam-se indistinguíveis em primeira ordem nas proximidades de $(p, f(p))$. A reta tangente tem equação

$$y = f(p) + f'(p)(x - p),$$

o que motiva a aproximação

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p).$$

A função $L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ é chamada **linearização de f em p** .

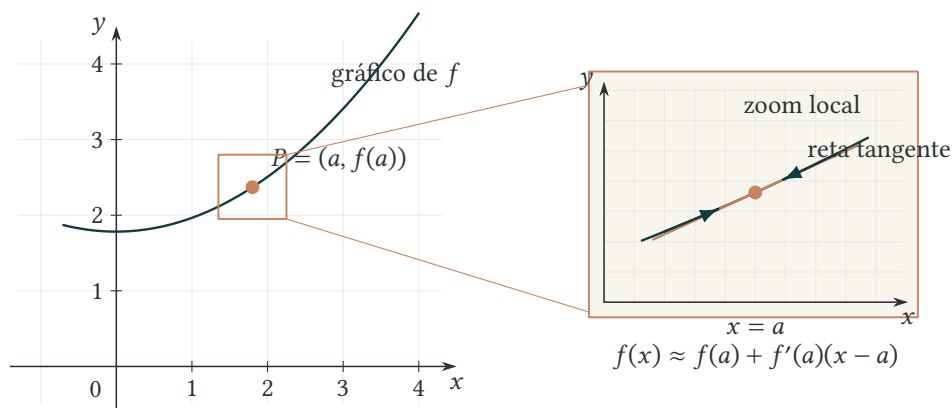


Figura 10.17. Perto de $P = (a, f(a))$, o gráfico de uma função diferenciável se aproxima de sua reta tangente; sob ampliação, a aproximação linear se torna visualmente dominante.

Exemplo 10.35.

Use a linearização de $f(x) = \ln x$ em torno de $x = 1$ para estimar $\ln(1,02)$.

◁

Solução. Como $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$, a linearização em 1 é

$$L(x) = x - 1.$$

Portanto,

$$\ln(1,02) \approx L(1,02) = 0,02.$$

O valor real é aproximadamente 0,01980: a aproximação já é boa porque 1,02 está próximo do ponto de referência 1. ■

Exemplo 10.36 — Sensibilidade de um modelo.

A concentração de um fármaco é modelada por

$$C(t) = C_0 e^{-0,2t},$$

com t medido em horas. Use a linearização em torno de $t = 5$ para estimar a variação relativa de C quando o tempo aumenta em 0,1 hora.

<

Solução. Como $C'(t) = -0,2C(t)$, perto de $t = 5$ temos

$$\Delta C \approx C'(5) \Delta t = -0,2C(5)(0,1) = -0,02C(5).$$

Assim, um aumento de 0,1 hora produz, nesse ponto do modelo, uma redução de aproximadamente 2% na concentração. A derivada mede diretamente essa sensibilidade local. ■

Exemplo 10.37.

Aproxime $\sqrt{3,95}$ e $\sqrt{4,02}$ utilizando a linearização de $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x = 4$.

<

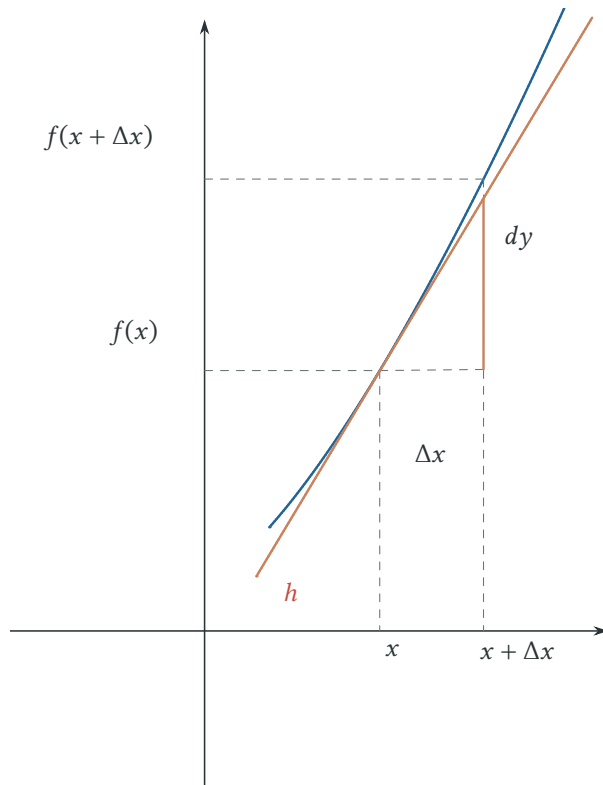


Figura 10.18. Linearização de $f(x) = \sqrt{x}$ nas proximidades de $x = 4$.

Solução. Como $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, a linearização em $p = 4$ é

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

Portanto,

$$\sqrt{3,95} \approx L(3,95) = 1,9875 \quad \text{e} \quad \sqrt{4,02} \approx L(4,02) = 2,005.$$

Para comparação, uma calculadora fornece $\sqrt{3,95} \approx 1,98746$ e $\sqrt{4,02} \approx 2,00499$. ■

A notação de incremento pode ser usada na definição da derivada de uma função.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Portanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{quando } |\Delta x| \text{ é pequeno.}$$

Equivalentemente,

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad \text{quando } |\Delta x| \text{ é pequeno.}$$

10.3 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável e tome Δx como o incremento de x .

■ A diferencial dx da variável independente é definida como $dx = \Delta x$.

■ A diferencial dy da variável dependente é definida como

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x) dx.$$

Nesta seção, a escrita dy/dx registra a derivada e a relação $dy = f'(x) dx$ entre diferenciais; ela não deve ser manipulada como uma fração algébrica ordinária sem a justificativa de um teorema.

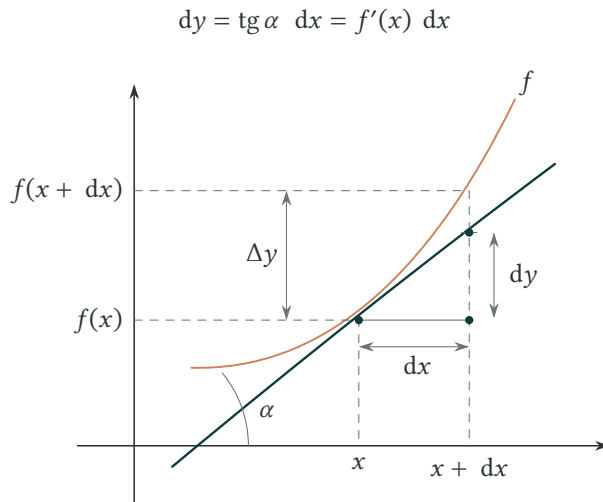


Figura 10.19. A variação real Δy segue a curva, enquanto a diferencial $dy = f'(x) dx$ é a variação prevista pela tangente.

Para interpretar geometricamente a diferencial, considere a Figura 10.19. Seja $dx = \Delta x$ a variação em x e seja $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ a correspondente variação em y . Como $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$, a quantidade dy representa a variação prevista pela reta tangente, enquanto Δy representa a variação efetiva da função.

10.38 Observação

Quando dx é suficientemente pequeno, dy aproxima $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ no seguinte sentido:

$$\frac{\Delta y - dy}{dx} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad dx \rightarrow 0.$$

Isso significa que o erro cometido ao aproximar Δy por dy é de ordem menor que dx . Portanto,

$$\Delta y \approx dy$$

para dx suficientemente pequeno. Finalmente, na notação de diferenciais, a aproximação linear pode ser escrita como

$$f(p + dx) \approx f(p) + dy, \quad dy = f'(p) dx.$$

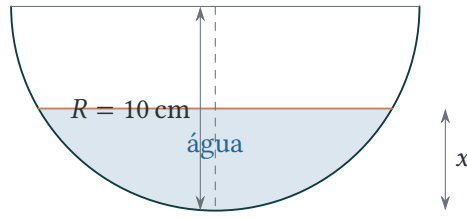


Figura 10.20. No corte da tigela de raio 10 cm, a altura medida x determina o volume de água.

Exemplo 10.39.

Uma tigela tem o formato de uma semiesfera de raio 10 cm e contém água até a altura de x cm. O volume da água é

$$V = \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3).$$

Suponha que a altura medida seja 5 cm, com erro máximo de 0,1 cm. Estime o erro máximo no volume calculado.

◁

Solução. Seja x^* a altura real da água e ponha $\Delta x = x^* - 5$. A hipótese sobre a medição fornece $|\Delta x| \leq 0,1$. Como

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(60x - 3x^2) = \pi(20x - x^2),$$

a aproximação linear em $x = 5$ fornece

$$\Delta V \approx dV = V'(5)\Delta x.$$

Consequentemente,

$$|\Delta V| \approx |dV| = 75\pi|\Delta x| \leq 7,5\pi \approx 23,56 \text{ cm}^3.$$

Portanto, o volume calculado é $V(5) = 625\pi/3 \approx 654,50 \text{ cm}^3$, com erro absoluto máximo estimado pela linearização em $23,56 \text{ cm}^3$. Essa é uma estimativa de primeira ordem. Como a fórmula exata de V é conhecida e V cresce no intervalo $[4,9, 5,1]$, o erro máximo efetivo é

$$V(5,1) - V(5) = \frac{22649\pi}{3000} \approx 23,72 \text{ cm}^3.$$

■

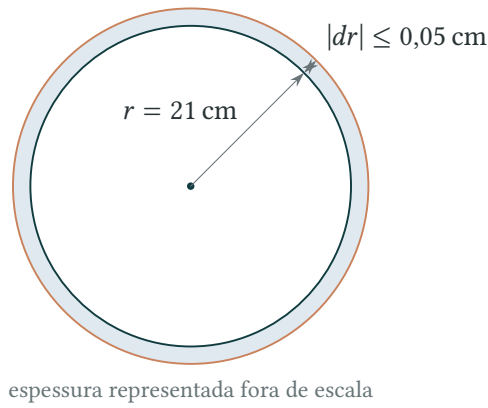


Figura 10.21. Um erro dr na medida do raio produz, em primeira ordem, uma casca esférica de volume $dV = 4\pi r^2 dr$.

Exemplo 10.40.

O raio medido de uma esfera é 21 cm, com erro máximo de 0,05 cm. Estime o erro máximo no volume calculado a partir dessa medida.

<

Solução. Se o raio da esfera é r , então $V = (4/3)\pi r^3$. Usamos a diferencial dr para aproximar o erro Δr na medida do raio. A variação correspondente do volume é aproximada por

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Como $r = 21$ e $|dr| \leq 0,05$, temos

$$|dV| \leq 4\pi \cdot 21^2 \cdot 0,05 = 88,2\pi \approx 277,09.$$

Logo, a linearização estima o erro absoluto máximo em $277,09 \text{ cm}^3$. O erro máximo exato, obtido pela fórmula do volume e pela monotonicidade em $[20,95, 21,05]$, é

$$\frac{4\pi}{3}(21,05^3 - 21^3) \approx 277,75 \text{ cm}^3.$$

A pequena diferença corresponde aos termos de ordem superior desprezados pela aproximação linear. ■

Exemplo 10.41.

1. Utilizando aproximação linear, encontre uma fórmula aproximada para o volume de uma casca cilíndrica de altura h , raio interno r e espessura t .
2. Qual é o erro envolvido ao usar essa fórmula?

<

Solução. Considere $V(r) = \pi r^2 h$, com h constante. O volume da casca é o incremento produzido quando o raio passa de r para $r + t$. Pela aproximação linear,

$$\Delta V \approx dV = 2\pi r h t.$$

O volume exato da casca é

$$\Delta V = \pi(r + t)^2 h - \pi r^2 h = 2\pi r h t + \pi h t^2.$$

Portanto, o erro absoluto da aproximação é $E = \pi h t^2$, que é de segunda ordem na espessura. ■

Exercícios

Ex. 10.32 Para $k \in \mathbb{R}$, mostre que a linearização de $f(x) = (1 + x)^k$ em $x = 0$ é $L(x) = 1 + kx$.

Ex. 10.33 Um cristal cúbico tem volume $V = x^3$, com x em milímetros. Use a linearização de V em $x = 3$ para estimar a variação do volume quando a aresta passa

Ex. 10.34 Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$, use o ponto-base $a = 8$ para obter uma linearização e, com ela, aproximar $\sqrt[3]{8,7}$.

Exercícios

Ex. 10.35 A curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ define y implicitamente perto de $(1, 2)$. Encontre dy/dx e a reta tangente nesse ponto.

Ex. 10.36 Derive por diferenciação logarítmica

$$y = \frac{(x^2 + 1)^{\sqrt{x}}}{x^3}, \quad x > 0.$$

Indique em que ponto a hipótese $x > 0$ é usada.

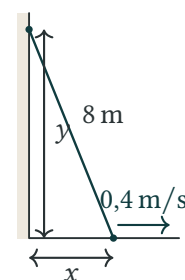
Ex. 10.37 Determine a derivada de $\arctg(2x/(1 - x^2))$ nos intervalos em que a expressão está definida. Compare a resposta com a derivada que seria obtida ao simplificar apenas localmente pela fórmula da tangente dupla.

Ex. 10.38 Um balão esférico é inflado a $30 \text{ cm}^3/\text{s}$. Quando seu raio é 5 cm , a que taxa cresce a área de sua superfície?

Ex. 10.39 Use a linearização de $\sqrt[3]{x}$ em $x = 8$ para aproximar $\sqrt[3]{8,12}$.

Ex. 10.40 A voltagem de um sinal é $V(t) = 4 \cosh(0,3t)$ volts. Determine $V'(t)$ e interprete o resultado em $t = 2 \text{ s}$.

Ex. 10.41 Uma escada de 8 m desliza: sua base afasta-se da parede a $0,4 \text{ m/s}$. Quando a base está a 3 m da parede, determine a velocidade da extremidade superior e diga se sua altura aumenta ou diminui.



11

Aplicações de derivadas

Nada acontece no universo em que não apareça alguma regra de máximo ou de mínimo.

Leonhard Euler

O conhecimento da derivada permite estudar o comportamento de uma função em um intervalo. O sinal de f' controla crescimento e decrescimento; o sinal de f'' descreve a concavidade; pontos críticos e extremidades organizam a busca por máximos e mínimos. O Teorema do Valor Médio é o princípio que permite passar da derivada em pontos do intervalo ao comportamento da função como um todo. Essa relação fundamenta critérios para o esboço de curvas e a resolução de problemas de otimização. A regra de L'Hôpital e os polinômios de Taylor fornecem outros usos da derivada no cálculo de limites e de aproximações.

Neste capítulo

11.1	Valores extremos	285
11.2	Teorema do valor médio	294
11.3	Funções crescentes e decrescentes	298
11.4	Concavidade	303
11.5	Regra de L'Hôpital	311
11.6	Assíntotas	320
11.7	Esboço de curvas	322
11.8	Problemas de otimização	334
11.9	Polinômios de Taylor	341

11.1. Valores extremos

11.1.1. Extremos absolutos

Máximos e mínimos dependem do conjunto em que a função é considerada. Um extremo absoluto compara um valor da função com todos os demais valores assumidos no intervalo.

11.1 Definição

Sejam I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo global (ou absoluto)** de f , se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **máximo global**.
- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo global** de f , se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo global**.

- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

Exemplo 11.1.

Determine os extremos das seguintes funções analisando seus gráficos: a

x^2 b x^3 c $1/x$ d $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

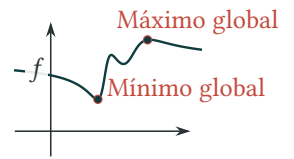


Figura 11.1. A curva atinge um mínimo global no vale assinalado e um máximo global no pico assinalado.

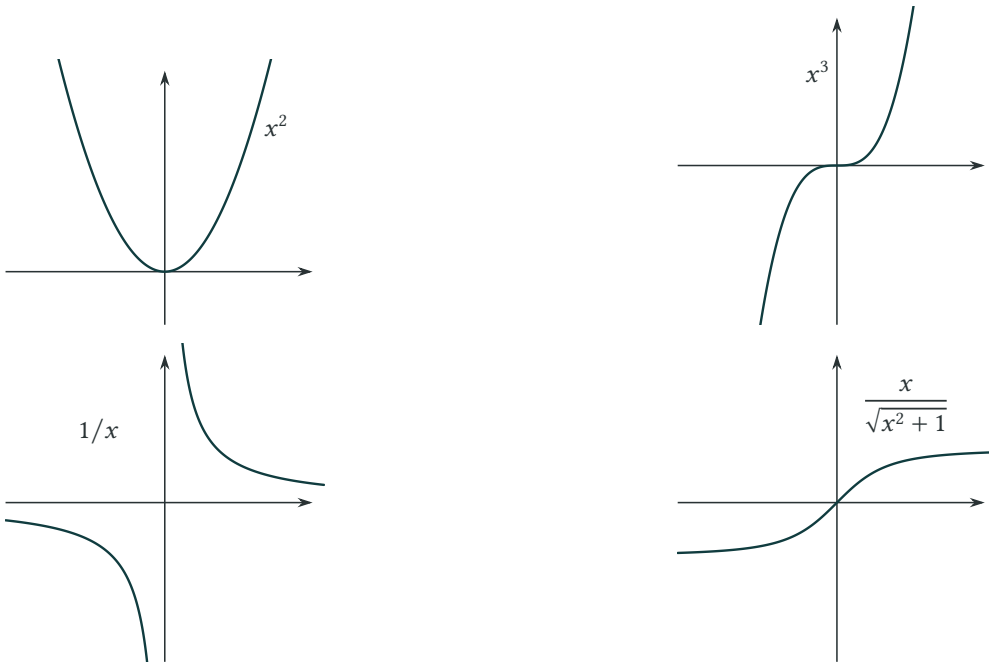


Figura 11.2. Entre as quatro funções, apenas x^2 atinge um extremo global em $\mathbb{R}$: o mínimo 0 em $x = 0$.

Solução. a A função x^2 possui mínimo absoluto 0 em $x = 0$ e não possui máximo. b A função x^3 não possui máximo nem mínimo. c A função $1/x$ não possui máximo nem mínimo. d A função $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ tem imagem $(-1, 1)$: aproxima-se de -1 e de 1 , mas não atinge esses valores. Portanto, não possui máximo nem mínimo. ■

Exemplo 11.2.

Utilizando os gráficos da figura, determine os extremos das seguintes funções nos intervalos especificados: a x^2 em $[-1, 2]$ b x^2 em $(-1, 2)$

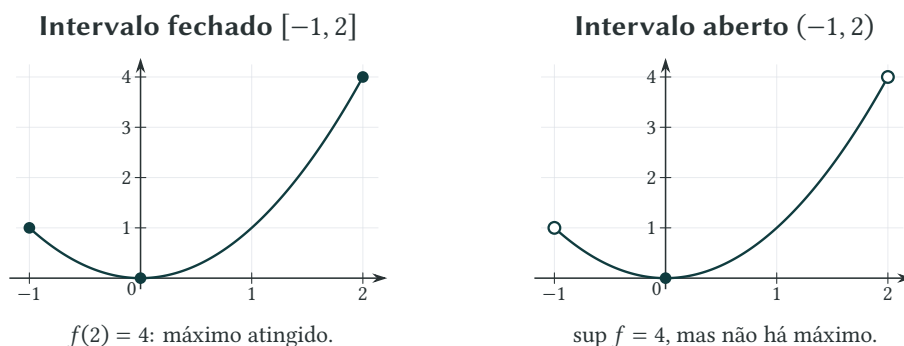


Figura 11.3. Em $[-1, 2]$, x^2 atinge mínimo e máximo; em $(-1, 2)$, atinge o mínimo, mas não o supremo 4.

Solução. **[a]** Pelos gráficos da Figura 11.3, temos que o máximo de x^2 em $[-1, 2]$ ocorre em $x = 2$. O valor máximo que a função atinge é $f(2) = 4$. O mínimo é $f(0) = 0$. **[b]** Em $(-1, 2)$, a função x^2 também possui mínimo 0 em $x = 0$, mas não possui máximo: o extremo 2 não pertence ao intervalo. Um modo de ver isso é por redução ao absurdo. Suponha que a função tivesse um máximo em a , que podemos supor maior que 0. Se tomarmos um valor b entre a e 2, a função será maior em b , pois é crescente em $[0, 2)$. Isso levaria a um absurdo; logo, a função não possui máximo. Por que esse argumento não funciona no item anterior? No intervalo fechado, o candidato $a = 2$ pertence ao domínio e não existe b do domínio com $a < b$. ■

11.1.2. Extremos relativos

Um valor pode ser maior que os valores vizinhos sem ser o maior de todo o intervalo. Ao restringir a comparação a uma vizinhança do ponto, obtemos a noção de extremo relativo ou local, mais diretamente ligada ao comportamento descrito pela derivada.

11.2 Definição

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo local** de f , se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um **máximo local**.
- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo local** de f , se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo local**.
- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo local**, se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.

O alcance da comparação

Um máximo local comparado para $f(x_0)$ apenas com os valores suficientemente próximos, dentro do domínio. Um máximo global compara esse valor com todos os demais. Por isso, o estudo de uma vizinhança não basta para concluir que um extremo é global.

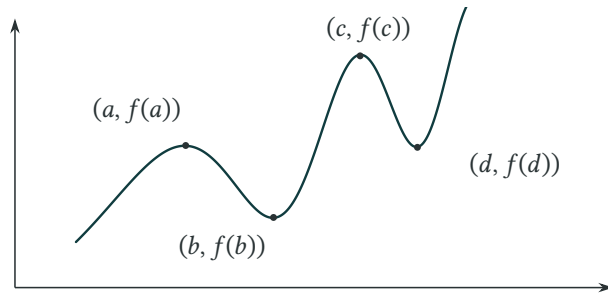


Figura 11.4. Máximos locais em a e c e mínimos locais em b e d ; a comparação é feita apenas em vizinhanças desses pontos.

A função f possui máximos relativos nos pontos a e c e mínimos relativos nos pontos b e d . Observe que $f(d) > f(a)$, ou seja, o valor de uma função em um mínimo relativo pode ser maior que o valor em um máximo relativo.

A diferenciabilidade fornece uma condição necessária para extremos locais em pontos interiores e, com isso, reduz a busca a um conjunto de candidatos.

11.3 Teorema Teorema de Fermat

Se f é uma função definida no intervalo aberto (a, b) e x é um ponto de máximo ou mínimo local de f em (a, b) , então ou f não é diferenciável em x ou $f'(x) = 0$.

Demonstração. Suponha que f seja diferenciável em x_0 e que x_0 seja um máximo local (uma prova similar pode ser feita quando x_0 é um mínimo local). Então, $\exists \delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x satisfazendo $|x - x_0| < \delta$. Logo, para qualquer $h \in (0, \delta)$, temos que:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Tomando o limite quando $h \rightarrow 0^+$ e usando a existência de $f'(x_0)$, obtemos $f'(x_0) \leq 0$. Por outro lado, para $h \in (-\delta, 0)$, temos

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Tomando agora o limite quando $h \rightarrow 0^-$, obtemos $f'(x_0) \geq 0$. Logo, $f'(x_0) = 0$. ■

11.4 Observação

A recíproca não é necessariamente verdadeira. Seja $f(x) = x^3$ que está definida em todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'(x) = 3x^2$. Portanto $f'(0) = 0$. Porém 0 não é um ponto nem de máximo nem de mínimo para a função f em qualquer intervalo (a, b) que contenha o 0 .

11.3 Definição

Seja p um ponto interior de $\text{Dom } f$. Dizemos que p é um **ponto crítico** de f se $f'(p) = 0$ ou se f não é diferenciável em p . Neste caso, o valor $f(p)$ é chamado **valor crítico** da função f .

Assim, pontos que não pertencem ao domínio não são pontos críticos, e as extremidades de um intervalo fechado são tratadas separadamente na busca por extremos.

Exemplo 11.5.

Determine os pontos críticos da função $y = 3x + 2 \cos(3x)$.

Solução. A derivada é dada por

$$y' = 3 - 6 \sin 3x$$

Os pontos críticos ocorrem quando

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$

Ou seja, quando

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, quando

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 11.6.

Determine os pontos críticos da função $g(x) = x - x^{1/3}$.

Solução. Derivando temos que $g'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$, para $x \neq 0$. Ou seja, $g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Simplificando, temos:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

e assim os pontos críticos são:

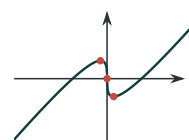
$$x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad x = 0, \quad x = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

O ponto 0 também é crítico: $g(0) = 0$, mas o quociente $[g(h) - g(0)]/h = 1 - |h|^{-2/3}$ não possui limite finito.

Pontos críticos são candidatos

Para $f(x) = x^3$, temos $f'(0) = 0$, mas não há extremo em 0. A condição identifica um candidato, não uma conclusão. Pontos interiores onde a derivada não existe também são críticos; as extremidades do intervalo devem ser examinadas separadamente.

$$g(x) = x - \sqrt[3]{x}$$



Exemplo 11.7.

Determine os pontos críticos da função $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6}$.

<

Solução. O domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. Pela regra do quociente,

$$g'(x) = \frac{2x(x^2 - x - 6) - (x^2 + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{-x^2 - 14x + 1}{(x^2 - x - 6)^2}.$$

Logo, os pontos críticos são $x = -7 - 5\sqrt{2}$ e $x = -7 + 5\sqrt{2}$, ambos pertencentes ao domínio. Os pontos -2 e 3 não são críticos, pois a função não está definida neles. ■

11.1.3. Extremos em intervalos fechados

O Teorema de Weierstrass 7.42 garante que uma função contínua em um intervalo fechado e limitado atinge máximo e mínimo globais. O Teorema de Fermat localiza os extremos interiores entre os pontos críticos. Restam as extremidades do intervalo. Reunindo essas duas observações, obtemos o critério seguinte.

11.8 Teorema

Se f é contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f tem pontos de máximo e de mínimo em $[a, b]$. Mais ainda, os únicos pontos extremos possíveis da função f são:

1. pontos críticos de f ;
2. os extremos do intervalo fechado $[a, b]$, isto é, a ou b .

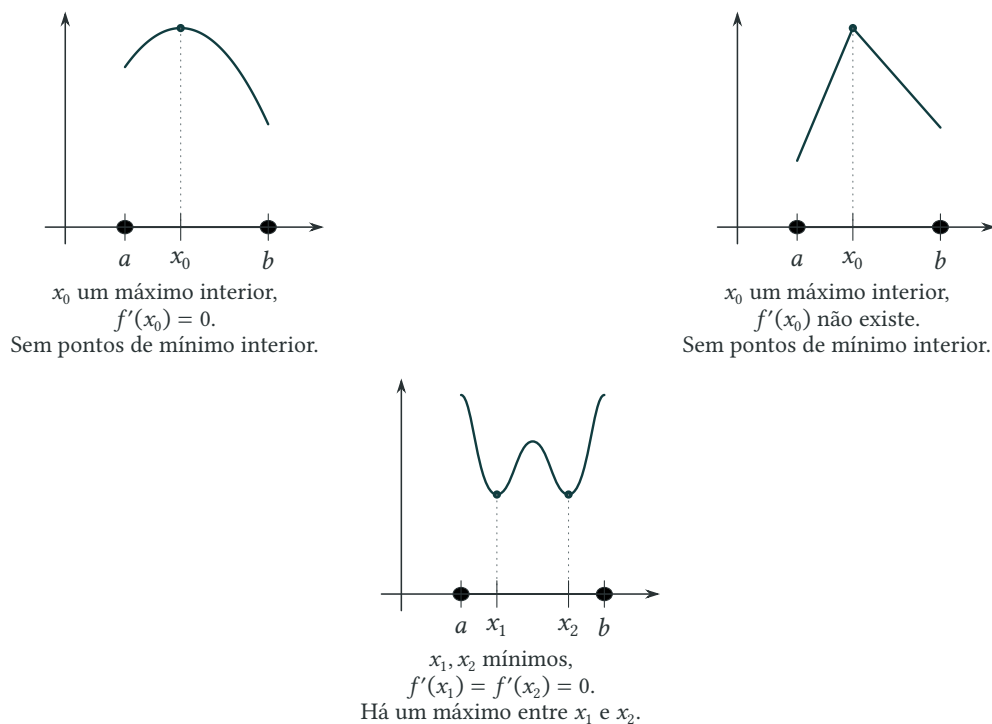


Figura 11.6. Os extremos no interior do intervalo devem ocorrer nos pontos onde f' é zero ou não existe.

Exemplo 11.9.

Ache os extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 8$ em $[-1, 2]$.

Solução. Como f é diferenciável, os pontos críticos ocorrem quando $f'(x) = 0$. Calculando a derivada, temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

Resolvendo,

$$12x^3 - 12x^2 = 0$$

temos que a derivada se anula em $x = 0$ e $x = 1$. Logo, os candidatos a pontos extremos são $-1, 0, 1, 2$. Calculando o valor da função nesses pontos, temos:

$$f(-1) = -1$$

$$f(0) = -8$$

$$f(1) = -9$$

$$f(2) = 8$$

Logo, $x = 2$ é o ponto de máximo e $x = 1$ é o ponto de mínimo. ■

◀

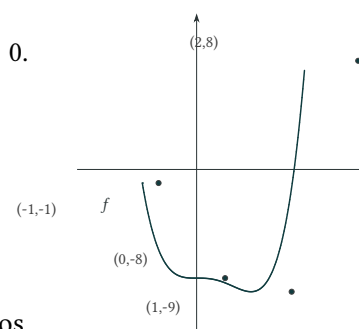


Figura 11.7. Gráfico de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 8$ no intervalo $[-1, 2]$.

Exemplo 11.10.

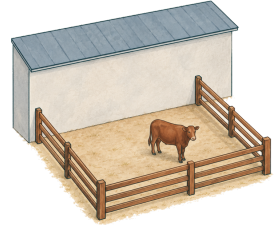
Um fazendeiro deseja construir um curral retangular e possui 500 m de cerca. O local onde deseja construir o curral faz divisa com um edifício; assim, não será necessária uma cerca desse lado. Quais são as dimensões do curral que encerrará a maior área?

◀

Solução. Se x é a medida de cada lado perpendicular ao edifício e y a do lado paralelo, então $2x + y = 500$. Portanto,

$$A(x) = x(500 - 2x) = 31250 - 2(x - 125)^2, \quad 0 \leq x \leq 250.$$

O máximo é 31250 m^2 , atingido quando $x = 125 \text{ m}$ e $y = 250 \text{ m}$. A derivada $A'(x) = 500 - 4x$ confirma o crescimento antes de 125 e o decrescimento depois desse ponto. ■



Exemplo 11.11.

Determine a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio $R > 0$.

◀

Solução. O volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h$$

e, pelo Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação entre o raio e a altura:

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

Logo a expressão do volume em função da altura é

$$V(h) = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}.$$

Como o cilindro está contido na esfera, temos que os valores de h estão no intervalo $[0, 2R]$. Assim, temos um problema de extremos em um intervalo fechado e, consequentemente, temos a existência de um máximo. Esse máximo ocorrerá ou nos pontos extremos do intervalo ou nos pontos críticos. Como $V(h)$ é diferenciável, os pontos críticos são os pontos de derivada iguais a 0. Derivando

$$V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right).$$

Resolvendo $V'(h) = 0$ temos:

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Como

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

temos que

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} R$$

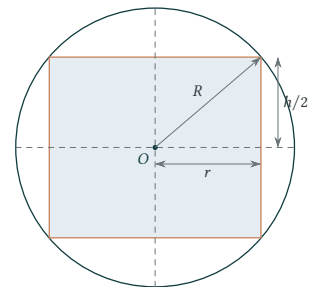


Figura 11.8. No corte meridiano do cilindro inscrito, o raio R da esfera é a hipotenusa do triângulo com catetos r e $h/2$.

e assim

$$\frac{h}{r} = \sqrt{2} \quad \text{e, portanto,} \quad \frac{h}{2r} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A razão pedida é a segunda, pois o diâmetro mede $2r$. Como $V(0) = V(2R) = 0$ e o volume é positivo no único ponto crítico interior, esse ponto fornece o máximo global. ■

Exercícios

Ex. 11.1 Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$

1. f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique.
2. Como podemos encontrar esses pontos?

Ex. 11.2 Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado:

1. $f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 1}$ no intervalo $[-4, 4]$
2. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
3. xe^{-x} no intervalo $[0, 2]$
4. $\frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$

Ex. 11.3 Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximos nem mínimos locais.

Ex. 11.4 Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

1. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ no intervalo $[-3, 2]$
2. $g(x) = \frac{x}{x+1}$ no intervalo $[1, 2]$
3. $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$

4. $f(t) = \sin(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$

5. $f(x) = x - 3 \ln(x)$ no intervalo $[1, 4]$

Ex. 11.5 Suponha que f seja uma função contínua no intervalo (a, b)

1. Diga algumas condições para que f possua máximos e mínimos globais nesse intervalo. Justifique.

Ex. 11.6 Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f (se existirem) no intervalo dado:

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$
2. $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$
3. $h(x) = x^5 - 7x^2 + 2$ no intervalo $(-\infty, \infty)$
4. $k(x) = \ln(x) - x$ no intervalo $(0, \infty)$
5. $m(x) = 1/(x - x^2)$ no intervalo $(0, 1)$

Ex. 11.7 Encontre os pontos da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que estão mais próximos do ponto $(2, 0)$.

Ex. 11.8 Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, com $a, b > 0$.

A localização de pontos críticos é uma informação local. Para deduzir propriedades válidas em todo um intervalo, é necessário relacionar a variação instantânea, dada pela derivada, com a variação média entre dois pontos.

11.2. Teorema do valor médio

A derivada de uma função constante é zero. A recíproca, em um intervalo, também é verdadeira e é consequência de um resultado mais forte. Sob hipóteses adequadas, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O coeficiente angular da tangente em algum ponto interior coincide, portanto, com o coeficiente angular da secante que une as extremidades do gráfico. Em linguagem de movimento, alguma velocidade instantânea coincide com a velocidade média no intervalo. O caso em que $f(a) = f(b)$ é o Teorema de Rolle.

Hipóteses do Teorema do Valor Médio

O teorema exige continuidade em $[a, b]$ e diferenciabilidade em (a, b) , com $a < b$. Não se exige derivada nas extremidades. Já a continuidade nesses pontos relaciona os valores $f(a)$ e $f(b)$ ao comportamento da função no interior.

11.12 Teorema Teorema de Rolle

Sejam $a < b$ e f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, diferenciável no intervalo aberto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

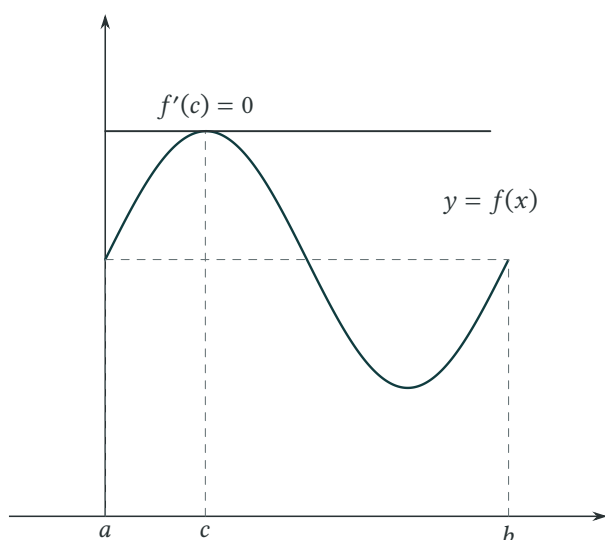


Figura 11.9. Como $f(a) = f(b)$, o Teorema de Rolle garante ao menos um ponto $c \in (a, b)$ em que a tangente é horizontal.

Demonstração. Como f é contínua em $[a, b]$, ela atinge um máximo M em algum $x_1 \in [a, b]$ e um mínimo m em algum $x_2 \in [a, b]$. Se $m = M$, então f é constante em $[a, b]$ e qualquer $c \in (a, b)$ satisfaz $f'(c) = 0$. Se $m < M$, pelo menos um dos valores extremos é atingido em um ponto interior: de fato, como $f(a) = f(b)$, os dois extremos não podem ocorrer apenas em a e b . Nesse ponto interior, f possui um extremo local e o Teorema de Fermat fornece $f'(c) = 0$. ■

Exemplo 11.13.

Sem calcular explicitamente a derivada, localize os zeros de p' para

$$p(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5).$$

◁

Solução. O polinômio p se anula em $-2, 1, 3$ e 5 . Pelo Teorema de Rolle, p' possui ao menos um zero em cada um dos intervalos disjuntos

$$(-2, 1), \quad (1, 3), \quad (3, 5).$$

Como p' tem grau 3, não pode ter mais de três zeros reais. Portanto, há exatamente um zero de p' em cada um desses intervalos. ■

11.14 Teorema Teorema do Valor Médio

Sejam $a < b$ e f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

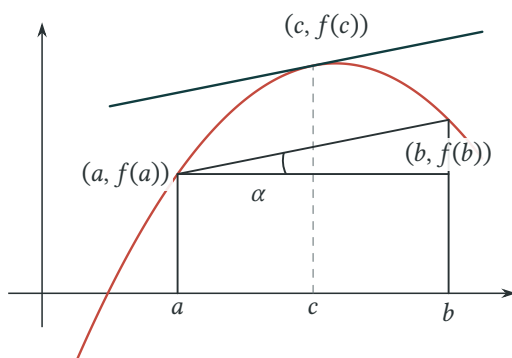


Figura 11.10. O Teorema do Valor Médio garante um ponto $c \in (a, b)$ cuja tangente é paralela à secante pelos extremos.

Demonstração. A equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Definamos a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Começamos observando que $h(x)$ é contínua em $[a, b]$, pois é soma da função contínua f e um polinômio de grau 1. Analogamente, temos que a função $h(x)$ é diferenciável em (a, b) . Finalmente, é imediato da definição de h que $h(a) = h(b) = 0$. Logo, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Exemplo 11.15 — Uma velocidade que deve ter ocorrido.

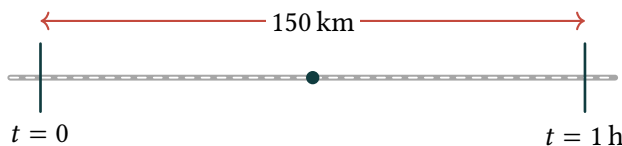
Um automóvel percorre 150 km entre dois postos de controle em exatamente uma hora. Admitindo que sua posição $s(t)$ seja contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$, o que o Teorema do Valor Médio permite concluir sobre a velocidade instantânea?

<

Solução. Escolhendo a origem no primeiro posto, temos $s(0) = 0$ e $s(1) = 150$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$s'(c) = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = 150 \text{ km/h}.$$

O teorema não informa quando isso ocorreu nem afirma que a velocidade foi constante. Ele garante, porém, que em algum instante a velocidade foi exatamente 150 km/h; em uma via limitada a 120 km/h, o limite foi ultrapassado.



■

11.16 Teorema Teorema do Valor Médio de Cauchy

Sejam $a < b$ e f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto (a, b) . Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} g'(c).$$

Demonstração. O resultado pode ser demonstrado aplicando o Teorema de Rolle à função

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

e observando que

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

e, assim, $h'(c) = 0$ para algum ponto $c \in (a, b)$. Diferenciando h , o resultado segue. ■

11.2.1. Consequências do Teorema do Valor Médio

11.17 Teorema

Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante no intervalo (a, b) .

Demonstração. Sejam x_1 e $x_2 \in (a, b)$, com $x_1 < x_2$. Como f é diferenciável em (a, b) , ela é contínua nesse intervalo; em particular, é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2) . Aplicando o Teorema do Valor Médio, temos que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(x) = 0$ para todo x , temos que $f'(c) = 0$ e assim

$$f(x_2) = f(x_1)$$

■

A hipótese de que trabalhamos em um intervalo é essencial. Por exemplo, $f(x) = x/|x|$, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, satisfaz $f'(x) = 0$ em todo ponto do domínio, mas não é constante: o domínio tem duas componentes. O teorema acima responde de forma explícita e positiva à pergunta feita no começo desta seção: um corpo cuja velocidade instantânea é zero no intervalo de tempo dado encontra-se em repouso.

11.18 Corolário

Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto (a, b) , tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Então, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + K$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Considere a função $F(x) = f(x) - g(x)$. Então $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo x em (a, b) . Logo, $f - g$ é constante em (a, b) ; pela continuidade, essa mesma constante é o valor de $f - g$ também em a e em b . ■

Exemplo 11.19.

Mostre que $\arcsen x + \arccos x = \pi/2$ para $x \in [-1, 1]$.

<

Solução. Calculando a derivada de $\arcsen x + \arccos x$, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Logo

$$\arcsen x + \arccos x = K$$

Em $x = 0$, temos

$$\arcsen 0 + \arccos 0 = K$$

e logo $K = \frac{\pi}{2}$. O argumento vale em $(-1, 1)$; a continuidade das duas funções estende a igualdade a $x = \pm 1$. ■

Exercícios

Ex. 11.9 Verifique as hipóteses do Teorema do Valor Médio para $f(x) = x^2$ em $[1, 3]$ e determine o ponto c fornecido pelo teorema. provar que $|\sen b - \sen a| \leq |b - a|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Ex. 11.11 O Teorema do Valor Médio pode ser aplicado a $f(x) = |x|$ em $[-1, 1]$? Justifique.

Ex. 11.10 Use o Teorema do Valor Médio para

O Teorema do Valor Médio transforma o sinal da derivada em informação sobre a variação da função em intervalos.

11.3. Funções crescentes e decrescentes

Se $a < b$, o Teorema do Valor Médio escreve a diferença $f(b) - f(a)$ como $f'(c)(b - a)$ para algum ponto intermediário c . Como $b - a > 0$, o sinal de f' determina o sinal da variação de f .

11.4 Definição

Uma função f é **crescente** no intervalo dado I se, para qualquer par $a, b \in I$ com $a < b$, tem-se que $f(a) < f(b)$. A função f é **decrescente** em I se, para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$, tem-se que $f(a) > f(b)$.

O sinal da derivada fornece um critério direto para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função.

11.20 Proposição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $I \subset D$ um intervalo. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I . Por outro lado, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I .

Demonstração. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f em $[x_1, x_2]$, existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Logo f é crescente. A prova do outro caso é análoga. ■

Exemplo 11.21.

Determine os intervalos em que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$ é crescente ou decrescente. Utilizando essa informação, esboce o gráfico.

<

Solução. Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$, então $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Como f' é positiva em $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ e f' é negativa em $(1, 2)$ podemos concluir pela proposição anterior que a função f é

1. crescente em cada um dos intervalos $(-\infty, 1]$ e $[2, \infty)$;
2. decrescente em $[1, 2]$.

A Figura 11.11 mostra geometricamente esses intervalos de crescimento e decrescimento. ■

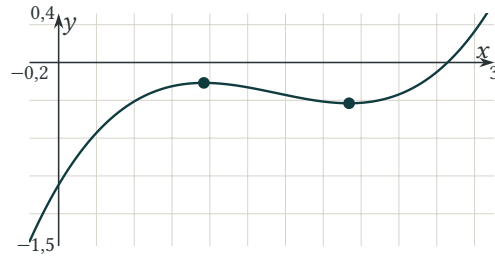


Figura 11.11. Crescimento e decrescimento de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$, com máximo local em $(1, -1/6)$ e mínimo local em $(2, -1/3)$.

Exemplo 11.22.

Determine os intervalos em que $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ é crescente ou decrescente.

◁

Solução. A função não está definida em $x = -1$ e $x = 1$. A derivada de f é:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

Como o denominador é positivo em todos os pontos do domínio, a derivada é positiva quando $x < 0$ e negativa quando $x > 0$. Ou seja:

1. crescente em cada um dos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0]$;
2. decrescente em cada um dos intervalos $[0, 1)$ e $(1, \infty)$.

■

11.3.1. Teste da primeira derivada para máximos e mínimos

O sinal de f' nos dois lados de um ponto crítico permite distinguir máximos, mínimos e pontos críticos sem extremo.

11.23 Teorema

Seja x um ponto crítico de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que exista $\varepsilon > 0$ com $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$, que f seja contínua em x e diferenciável nos dois intervalos $(x - \varepsilon, x)$ e $(x, x + \varepsilon)$. Então,

1. Se $f' > 0$ no intervalo $(x - \varepsilon, x)$ à esquerda de x e se $f' < 0$ no intervalo $(x, x + \varepsilon)$ à direita de x , então x é um ponto de máximo local.
2. Se $f' < 0$ no intervalo $(x - \varepsilon, x)$ à esquerda de x e se $f' > 0$ no intervalo $(x, x + \varepsilon)$ à direita de x , então x é um ponto de mínimo local.

3. Se f' é estritamente positiva nos dois intervalos ou estritamente negativa nos dois, isto é, tem o mesmo sinal não nulo no intervalo $(x-\varepsilon, x)$ à esquerda de x e no intervalo $(x, x+\varepsilon)$ à direita de x , então x não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo local.

Demonstração. Para $t < x$ próximo de x , o Teorema do Valor Médio em $[t, x]$ fornece

$$f(x) - f(t) = f'(u)(x - t)$$

para algum $u \in (t, x)$. Como $x - t > 0$, se $f' > 0$ à esquerda de x , então $f(t) < f(x)$; se $f' < 0$, então $f(t) > f(x)$.

Para $t > x$ próximo de x , aplicando o teorema em $[x, t]$, obtemos

$$f(t) - f(x) = f'(v)(t - x)$$

para algum $v \in (x, t)$. Como $t - x > 0$, se $f' > 0$ à direita de x , então $f(t) > f(x)$; se $f' < 0$, então $f(t) < f(x)$.

Combinando as comparações dos dois lados, obtemos, respectivamente, máximo local, mínimo local ou ausência de extremo, conforme os três casos do enunciado. A continuidade em x é o que permite aplicar o Teorema do Valor Médio nos intervalos que têm x como extremidade, mesmo quando $f'(x)$ não existe. ■

Exemplo 11.24.

Ache os máximos e mínimos locais de $f(x) = x^{1/3}(8 - x)$.

◁

Solução. Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{8 - 4x}{3x^{2/3}}.$$

Os pontos críticos são 0, onde a derivada não existe, e 2, onde ela se anula. Como o denominador é positivo, $f' > 0$ para $x < 2$, $x \neq 0$, e $f' < 0$ para $x > 2$. Pela continuidade em 0, a função é crescente em todo $(-\infty, 2]$ e decrescente em $[2, \infty)$. Portanto, 2 é ponto de máximo, com valor $6\sqrt[3]{2}$; esse máximo é também global. O ponto 0 não é extremo, e não há mínimos locais. ■

Exercícios

Ex. 11.12 Prove que a função $2x^5 + x^3 + 2x$ é crescente em todos os pontos.

Ex. 11.13 Determine os intervalos nos quais $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ é crescente e nos quais é decrescente.

Ex. 11.14 Determine os intervalos nos quais $f(x) = e^{-x^2/2}$ é crescente e nos quais é decrescente.

Ex. 11.15 Nos exercícios a seguir uma função é dada. Para essa função

1. Calcule o domínio de f
2. Encontre os pontos e valores críticos.
3. Encontre os intervalos de crescimento e decréscimo.
4. Use o teste da primeira derivada para dizer se os pontos críticos são de máximo ou mínimo local ou nenhuma dessas opções.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

2. $f(x) = \cos x$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$

4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$

5. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$

6. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

7. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

8. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

9. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$

10. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

11. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

12. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x - 8}$

13. $f(x) = \frac{(x-2)^{2/3}}{x}$

14. $f(x) = \sin x \cos x$ em $(-\pi, \pi)$.

Saber onde a função cresce ou decresce ainda não descreve completamente a forma do gráfico. O passo seguinte é acompanhar como a própria inclinação varia.

11.4. Concavidade

O sinal da derivada indica se os valores da função aumentam ou diminuem. Para compreender melhor a forma do gráfico, interessa também saber como a própria inclinação varia. Essa nova informação conduz ao estudo da concavidade e ao uso da derivada segunda.

Geometricamente, uma função é côncava para cima quando o segmento que une dois pontos de seu gráfico fica acima do gráfico ou coincide com ele; para a concavidade para baixo, ocorre o contrário. Essa descrição pode ser escrita diretamente em termos da altura da corda.

11.5 Definição

Uma função f é dita **côncava para cima** no intervalo I se, para qualquer terna $a < x < b$ em I ,

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Ela é **côncava para baixo** em I se, para toda terna $a < x < b$, vale a desigualdade

inversa.

A expressão do lado direito é exatamente a ordenada, na abscissa x , da corda que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Para a concavidade para cima, a mesma condição pode ser escrita, de forma equivalente, como

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x},$$

e as desigualdades se invertem para a concavidade para baixo. Para cálculos, o critério por meio de f'' será normalmente mais prático.

Uma função côncava para cima também é chamada **convexa**; uma função côncava para baixo, simplesmente **côncava**. Se a desigualdade correspondente for estrita para toda terna $a < x < b$, usamos os termos **estritamente convexa** ou **estritamente côncava**. Com a convenção não estrita, toda função afim pertence às duas classes. Geometricamente, os segmentos podem coincidir com o gráfico. Equivalentemente, dados $x, y \in I$ e $0 \leq t \leq 1$, a convexidade se escreve como

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

e a concavidade corresponde à desigualdade inversa. Nas figuras seguintes, $tx + (1 - t)y$ é a abscissa do ponto intermediário, enquanto $tf(x) + (1 - t)f(y)$ é a ordenada do ponto correspondente na corda.

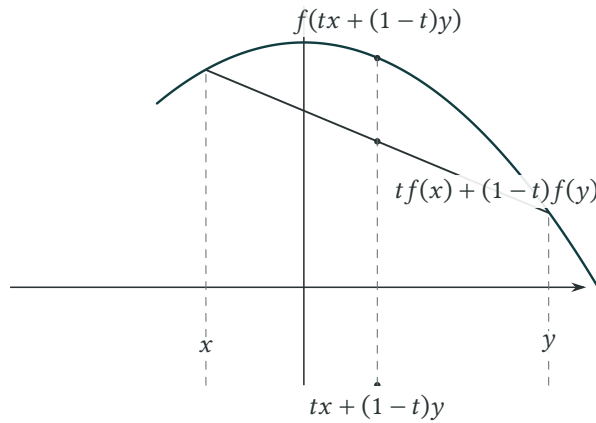


Figura 11.12. Na concavidade para baixo, o gráfico fica acima da corda entre dois de seus pontos.

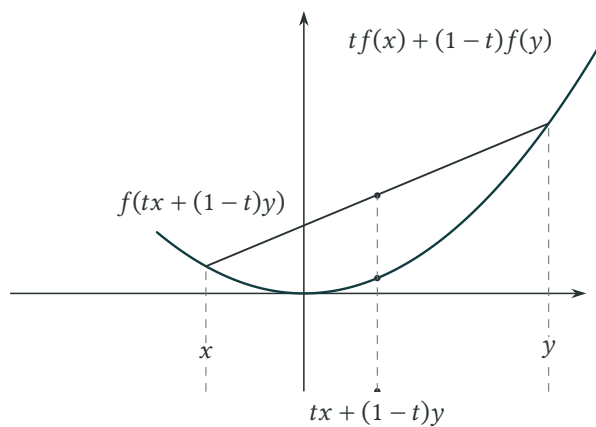


Figura 11.13. Na concavidade para cima, o gráfico fica abaixo da corda entre dois de seus pontos.

11.25 Teorema Teste da Concavidade

Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I .

- Se $f'' \geq 0$ em I , então f é côncava para cima em I . Se $f'' > 0$ em I , a concavidade é estrita.
- Se $f'' \leq 0$ em I , então f é côncava para baixo em I . Se $f'' < 0$ em I , a concavidade é estrita.

Demonstração. Suponha $f'' \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Médio aplicado a f' , a derivada f' é não decrescente. Para $a < x < b$ em I , aplique o mesmo teorema a f nos intervalos $[a, x]$ e $[x, b]$. Existem $u \in (a, x)$ e $v \in (x, b)$ tais que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(u) \leq f'(v) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Multiplicando pelos denominadores positivos e reorganizando, obtemos a desigualdade da definição de convexidade. Se $f'' > 0$, f' é estritamente crescente e a desigualdade é estrita. Os casos $f'' \leq 0$ e $f'' < 0$ seguem aplicando o resultado a $-f$. ■

	$f' > 0$ crescente	$f' < 0$ decrecente
$f'' < 0$ côncava para baixo		
$f'' > 0$ côncava para cima		

Figura 11.14. As quatro combinações possíveis entre monotonicidade e concavidade.

Exemplo 11.26.

Estude a concavidade de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e esboce o gráfico.

◁

Solução. Começamos calculando as duas primeiras derivadas $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Como $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ para todo x , o sinal de f'' é dado pelo sinal de $x^2 - 1$. Portanto,

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é côncava para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$,
- $f''(x) < 0$ em $(-1, 1) \Rightarrow f$ é côncava para baixo em $(-1, 1)$.

Assim, os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão: neles f'' muda de sinal. A Figura 11.16 exibe a concavidade para baixo entre esses pontos e para cima fora desse intervalo. ■

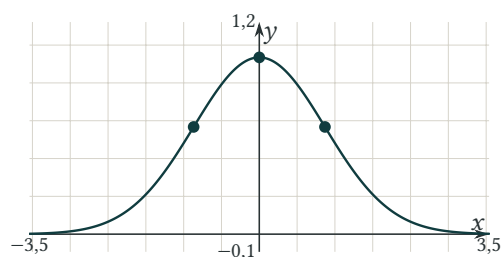


Figura 11.15. Gráfico de $e^{-x^2/2}$; os pontos de abscissas ± 1 separam os trechos de concavidade.

Figura 11.16. Concavidade de $f(x) = e^{-x^2/2}$ e seus pontos de inflexão em $x = \pm 1$.

11.4.1. Pontos de inflexão

Intuitivamente, um ponto de inflexão é um ponto do gráfico em que a concavidade muda. A definição seguinte torna essa condição precisa.

11.6 Definição

Seja f uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é **ponto de inflexão de f** se existe $\varepsilon > 0$ tal que f é estritamente côncava para baixo em $(p - \varepsilon, p)$ e estritamente côncava para cima em $(p, p + \varepsilon)$, ou ocorre a situação inversa. Esses intervalos devem estar contidos no domínio. A exigência de uma mudança efetiva exclui os pontos de um trecho afim.

11.27 Teorema

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em a , com $b < a < c$ e $(b, c) \subset I$. Suponha que f seja duas vezes diferenciável em (b, a) e (a, c) , com $f'' > 0$ em um desses intervalos e $f'' < 0$ no outro. Então a é um ponto de inflexão de f .

Concavidade e inflexão

Para $f(x) = x^4$, temos $f''(0) = 0$, mas f'' é positiva dos dois lados de 0: não há mudança de concavidade. Portanto, anular a segunda derivada não basta. Também podem existir pontos de inflexão nos quais a segunda derivada não está definida.

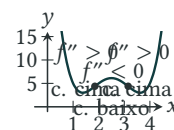


Figura 11.17. Os pontos assinalados são pontos de inflexão porque a concavidade muda ao atravessá-los.

Exemplo 11.28.

Mostre que $f(x) = x^n$ possui um ponto de inflexão na origem se $n \geq 3$ for um inteiro ímpar.

◁

Solução. Temos $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Como $n-2$ é ímpar, a derivada segunda é negativa para $x < 0$ e positiva para $x > 0$. A função é contínua em 0 e muda de concavidade nesse ponto; portanto, a origem é um ponto de inflexão. ■

Exemplo 11.29 — Ativação de canais iônicos.

Canais iônicos sensíveis à voltagem são proteínas que podem alternar entre estados fechado e aberto. Quando a membrana é mantida a um potencial V , medido em milivolts, a fração de canais abertos após a estabilização pode ser aproximada pela curva de Boltzmann

$$m_{\infty}(V) = \frac{1}{1 + e^{-(V-V_{1/2})/k}}, \quad k > 0.$$

Em um experimento, metade dos canais está aberta a -40 mV e 90% deles está aberta a -20 mV. Determine $V_{1/2}$ e k . Em seguida, encontre os limites de m_{∞} nos extremos, seu ponto de inflexão e a inclinação nesse ponto.

◁

Solução. Como $m_\infty(V_{1/2}) = 1/2$, a primeira observação fornece $V_{1/2} = -40$ mV. Usando a segunda,

$$0,9 = \frac{1}{1 + e^{-20/k}} \iff e^{-20/k} = \frac{1}{9},$$

de modo que

$$k = \frac{20}{\ln 9} \text{ mV}.$$

Os limites

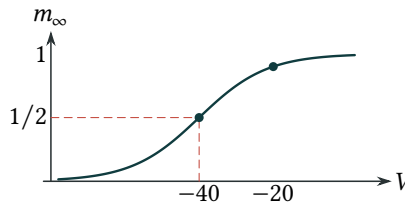
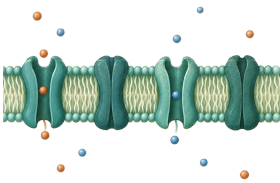
$$\lim_{V \rightarrow -\infty} m_\infty(V) = 0, \quad \lim_{V \rightarrow +\infty} m_\infty(V) = 1$$

descrevem a passagem entre uma população quase inteiramente fechada e uma quase inteiramente aberta. Escrevendo $m = m_\infty(V)$, as derivadas assumem a forma

$$m' = \frac{m(1-m)}{k}, \quad m'' = \frac{m(1-m)(1-2m)}{k^2}.$$

Como $0 < m < 1$, a derivada segunda muda de sinal quando $m = 1/2$, isto é, em $V = V_{1/2} = -40$ mV. Esse é o ponto de inflexão e também o potencial de meia-ativação. Nele, a inclinação vale

$$m'_\infty(V_{1/2}) = \frac{1}{4k} = \frac{\ln 9}{80} \text{ mV}^{-1}.$$



■

11.4.2. Teste da segunda derivada para máximos e mínimos

A concavidade permite retomar a classificação dos pontos críticos: perto de uma tangente horizontal, a forma como o gráfico se encurva pode distinguir um máximo de um mínimo. Para uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, o sinal da derivada segunda fornece o critério seguinte.

11.30 Teorema

Seja f duas vezes diferenciável em um intervalo aberto que contém a , com $f'(a) = 0$. Se $f''(a) > 0$, então a é ponto de mínimo local; se $f''(a) < 0$, então a é ponto de máximo local.

Demonstração. Como $f'(a) = 0$,

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a}.$$

Se esse limite é positivo, o quociente também é positivo suficientemente perto de a . Logo, $f'(x) < 0$ à esquerda e $f'(x) > 0$ à direita, o que dá um mínimo pelo teste da primeira derivada. Se o limite é negativo, os sinais se invertem e obtemos um máximo. ■

Exemplo 11.31.

Determine os pontos críticos da função f e classifique-os como máximos ou mínimos locais, quando possível:

$$\boxed{\text{a}} \quad f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3; \quad \boxed{\text{b}} \quad f(x) = x^2 e^{-5x}.$$

<

Solução. $\boxed{\text{a}}$ Temos $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4)$. Portanto, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ são os pontos críticos de f . Como $f''(-1) = 5$, $f''(0) = -4$ e $f''(4) = 20$, concluímos que 0 é ponto de máximo e -1 e 4 são pontos de mínimo. $\boxed{\text{b}}$ Temos $f'(x) = e^{-5x}x(2 - 5x)$ e $f''(x) = e^{-5x}(25x^2 - 20x + 2)$. Como $f''(0) = 2 > 0$ e $f''(2/5) = -2e^{-2} < 0$, $x = 0$ é ponto de mínimo local e $x = 2/5$ é ponto de máximo local. ■

Exemplo 11.32.

Seja a função $f(x) = (x - 1)^3 + 1$. Analise seus pontos críticos.

<

Solução. Temos

$$f'(x) = 3(x - 1)^2, \quad f''(x) = 6(x - 1).$$

O único ponto crítico é $x = 1$. Como $f'(1) = f''(1) = 0$, o teste da derivada segunda é inconclusivo. Entretanto, $f'(x) > 0$ para $x \neq 1$, de modo que f é crescente em toda a reta e não possui máximos nem mínimos locais. Além disso, $f''(x) < 0$ para $x < 1$ e $f''(x) > 0$ para $x > 1$. Portanto, a concavidade muda em $x = 1$, e $(1, 1)$ é um ponto de inflexão com tangente horizontal. ■

Exercícios

Ex. 11.16 Esboce o gráfico de uma função $f(x)$ que seja:

1. Crescente, côncava para cima em $(0, 1)$,
2. crescente, côncava para baixo em $(1, 2)$,
3. decrescente, côncava para baixo em $(2, 3)$ e
4. crescente, côncava para baixo em $(3, 4)$.

Ex. 11.17 Encontre os valores de c tal que o gráfico de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 2x + 2$$

seja côncavo para cima em todos os pontos.

Ex. 11.18 Mostre que a função $f(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$ mas que $f''(0)$ não exista.

Ex. 11.19 É possível que uma função seja crescente e côncava para cima em $(0, \infty)$ com assíntota horizontal $y = 1$? Nesse caso, dê um esboço de tal função.

Ex. 11.20 É possível que uma função seja crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$ com assíntota horizontal $y = 1$? Nesse caso, dê um esboço de tal função.

Ex. 11.21 Nas próximas questões, determine os pontos de inflexão e os intervalos nos quais as funções são côncavas para cima e para baixo:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = -x^2 - 5x + 7$
3. $f(x) = x^3 - x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x + 5$
5. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x + 3$
6. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 24x + 2$

$$7. f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$9. f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$10. f(x) = \sin x + \cos x \text{ em } (-\pi, \pi)$$

$$11. f(x) = x^2 e^x$$

$$12. f(x) = x^2 \ln x$$

$$13. f(x) = e^{-x^2}$$

Ex. 11.22 Nas próximas questões, é dada uma função $f(x)$. Encontre os pontos críticos de f e use o Teste da Segunda Derivada, quando possível, para determinar os extremos relativos.

$$1. f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$2. f(x) = -x^2 - 5x + 7$$

$$3. f(x) = x^3 - x + 1$$

$$4. f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x + 5$$

$$5. f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x + 3$$

$$6. f(x) = -3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 24x + 2$$

$$7. f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$9. f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$10. f(x) = \sin x + \cos x \text{ em } (-\pi, \pi)$$

$$11. f(x) = x^2 e^x$$

$$12. f(x) = x^2 \ln x$$

13. $f(x) = e^{-x^2}$

2. Mostre que

$$H''(x) = \frac{2K^2(K^2 - 3x^2)}{(K^2 + x^2)^3}$$

Ex. 11.23 Duas funções sigmoidais podem atribuir significados distintos ao ponto de meia-resposta. Para $x \geq 0$, considere a equação de Hill

$$H(x) = \frac{x^2}{K^2 + x^2}, \quad K > 0.$$

1. Verifique que $H(K) = 1/2$.

e determine o ponto de inflexão.

3. Compare esse resultado com a curva de Boltzmann do exemplo anterior: em qual dos dois modelos a meia-resposta coincide com a inflexão?

Extremos, monotonicidade e concavidade descrevem o gráfico a partir das derivadas. A comparação entre derivadas também fornece um método para certos limites indeterminados.

11.5. Regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital decorre do Teorema do Valor Médio de Cauchy e compara um quociente de funções com o quociente de suas derivadas. Sua forma básica trata limites do tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

11.33 Observação

A lei do quociente para limites não se aplica diretamente a essa situação, pois o limite do denominador é zero.

A aplicação da regra de L'Hôpital

A forma indeterminada é apenas a primeira verificação: também devem valer as demais hipóteses do teorema. A regra compara o limite de f/g com o de f'/g' . Esse último quociente não é a derivada de f/g .

Um resultado que permite em diversos casos simplificar o cálculo desses limites é conhecido como regra de L'Hôpital e converte a forma indeterminada dada em um limite envolvendo derivadas, que muitas vezes é mais fácil de calcular.

11.34 Teorema Regra de L'Hôpital

Sejam $a < b$ reais e $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0.$$

Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ e que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Então $g(x) \neq 0$ em (a, b) e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demonstração. As funções não precisam estar definidas em a . Como seus limites pela direita são zero, podemos estendê-las continuamente a esse ponto, definindo $\tilde{f}(a) = \tilde{g}(a) = 0$ e mantendo seus valores em (a, b) . As extensões são contínuas em $[a, x]$ e diferenciáveis em (a, x) para cada $x \in (a, b)$.

Se $g(x) = 0$, o Teorema de Rolle aplicado a $\tilde{g}$ em $[a, x]$ produziria um ponto onde $g' = 0$, contrariando a hipótese. Logo, $g(x) \neq 0$. O Teorema do Valor Médio de Cauchy, aplicado às duas extensões em $[a, x]$, fornece $\xi_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Como $a < \xi_x < x$, temos $\xi_x \rightarrow a^+$ quando $x \rightarrow a^+$. A hipótese sobre o limite do quociente das derivadas dá a conclusão, tanto para L finito quanto para $L = \pm\infty$. ■

11.35 Observação Outras versões da forma 0/0

O resultado vale também para limites pela esquerda e para $x \rightarrow \pm\infty$, sempre com diferenciabilidade no intervalo lateral ou na semirreta em questão e $g' \neq 0$ ali. No caso bilateral, as hipóteses devem valer de ambos os lados e os limites obtidos devem coincidir. Essas versões seguem da anterior por uma mudança de variável: uma reflexão trata o limite pela esquerda; $x = 1/t$ ou $x = -1/t$, com $t \rightarrow 0^+$, trata os limites no infinito. Pela regra da cadeia, os fatores da mudança de variável se cancelam no quociente das derivadas.

11.36 Teorema Regra de L'Hôpital: forma ∞/∞

Considere um limite quando x tende a um extremo c , que pode ser um ponto real abordado por um dos lados ou $\pm\infty$. Suponha que f e g sejam diferenciáveis no intervalo lateral ou na semirreta correspondente, que $g'(x) \neq 0$ ali e que

$$|g(x)| \rightarrow \infty, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L,$$

com $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow L.$$

Em particular, o resultado se aplica às formas ∞/∞ , com quaisquer combinações de sinais.

Demonstração. Fixe um ponto c_0 suficientemente próximo do extremo considerado. Para x ainda mais próximo desse extremo, o Teorema do Valor Médio de Cauchy fornece um ponto ξ entre c_0 e x tal que

$$\frac{f(x) - f(c_0)}{g(x) - g(c_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

O denominador à esquerda não é zero, pois, caso contrário, o Teorema de Rolle aplicado a g produziria um ponto onde $g' = 0$. Escolhendo c_0 suficientemente próximo

do extremo, o quociente das derivadas fica tão próximo de L quanto desejarmos em todo o intervalo entre c_0 e x . Além disso,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c_0)}{g(x) - g(c_0)} \left(1 - \frac{g(c_0)}{g(x)} \right) + \frac{f(c_0)}{g(x)}.$$

Como $|g(x)| \rightarrow \infty$, os dois termos que contêm $g(x)$ no denominador têm os limites esperados, e obtemos $f(x)/g(x) \rightarrow L$. Para $L = \pm\infty$, o mesmo argumento é feito substituindo uma tolerância por um limiar arbitrariamente grande em módulo. ■

Antes de aplicar a regra, é necessário verificar a forma indeterminada, a diferenciabilidade e a condição $g' \neq 0$ no intervalo relevante. A existência de um quociente de derivadas, por si só, não autoriza a conclusão.

Aplicando a Regra de L'Hôpital

1. Identifique uma forma $0/0$ ou um denominador cujo módulo tende a infinito; verifique a diferenciabilidade e a condição $g' \neq 0$ no intervalo relevante.
2. Derive separadamente o numerador f e o denominador g .
3. Calcule o limite de f'/g' . Se ele existir, finito ou infinito, a regra garante o mesmo limite para f/g . Se ele não existir, a regra não decide o limite original.

Exemplo 11.37.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x}$.

<

Solução. Como $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - e^{2x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{2x})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -2.$$

■

Exemplo 11.38.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

<

Solução. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Este cálculo ilustra a regra, mas não substitui a demonstração original do limite fundamental: esse limite já foi usado para obter a derivada do seno. ■

Exemplo 11.39.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sin(x)}$ se existir.

<

Solução. Observe que $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ e que as funções envolvidas são diferenciáveis em toda parte. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2}{\cos(x)} = 2.$$

■

Exemplo 11.40.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)}$ se existir.

<

Solução. Observe que $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin x) = 0$ e que as funções envolvidas são diferenciáveis em toda parte. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + x \cos(x)}.$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + x \cos x) = 0$ e que as funções envolvidas são diferenciáveis em toda parte. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital novamente.

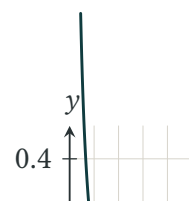
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2 \cos x - x \sin x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} = \frac{1}{2}$. ■

Exemplo 11.41.

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ se existir.

<



Solução. Observe que $1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ e $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ são diferenciáveis para todo $x > 0$ e que ambas as funções convergem para 0 quando $x \rightarrow \infty$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{\sin(0)}{\cos(0)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

11.5.1. Diferenças e produtos indeterminados

No caso de produtos indeterminados utilizamos que $fg = f/(1/g)$, quando $g \neq 0$, para transformar o produto em quociente. Essa estratégia é ilustrada nos exemplos a seguir.

Exemplo 11.42.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

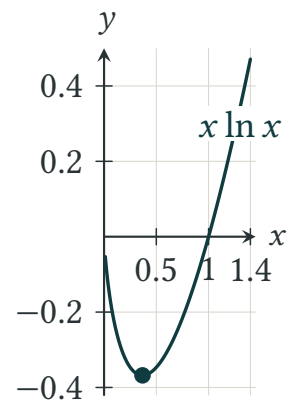
◁

Solução.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}.$$

Utilizando L'Hôpital, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0\end{aligned}$$



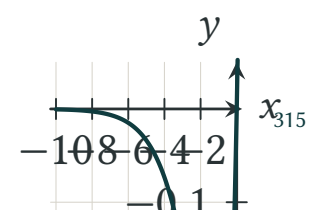
■

Figura 11.19. Gráfico de $x \ln x$ para $x > 0$.

Exemplo 11.43.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$$

◁



Solução.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

Utilizando L'Hôpital, temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

■

No caso de diferenças, temos que manipular a expressão de modo a convertê-la num quociente ou num produto indeterminado:

Exemplo 11.44.

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

◁

Solução.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{\sin x} \right)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{x}{\sin x} = 0.$$

Assim, o fator entre parênteses tende a 1, enquanto $1/x^2 \rightarrow +\infty$. Portanto, o limite da diferença é $+\infty$.

■

Exemplo 11.45.

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

◁

Solução.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^{-2} \cos \frac{1}{x}}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} \\ &= \cos \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

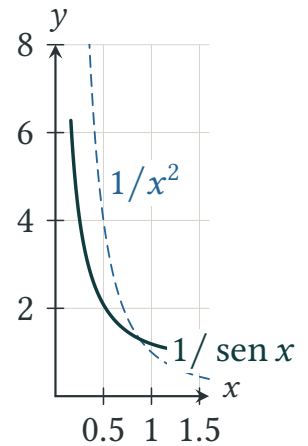


Figura 11.21. Comparação dos termos da diferença indeterminada.

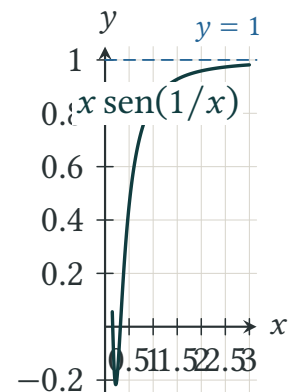


Figura 11.22. Gráfico de $x \sin(1/x)$.

11.5.2. Potências indeterminadas

Quando temos uma forma indeterminada que envolve uma potência, ou seja, formas indeterminadas da forma 0^0 , 1^∞ e ∞^0 , em geral a estratégia a ser utilizada é aplicar o logaritmo natural: se $f(x) > 0$ nas proximidades consideradas e $\lim_{x \rightarrow c} \ln(f(x)) = L$, então $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} e^{\ln(f(x))} = e^L$.

Exemplo 11.46.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Solução. Temos uma forma indeterminada do tipo 1^∞ . Seja $f(x) = (1 + 1/x)^x$. Dessa forma, queremos calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Começaremos calculando $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x))$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1/x} \end{aligned}$$

Como temos uma forma indeterminada $0/0$, logo, aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + 1/x} \cdot (-1/x^2)}{(-1/x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(f(x)) = 1$. Voltando ao limite original, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(f(x))} = e^1 = e$. Como no caso de $\sin x/x$, este cálculo é uma releitura do limite fundamental por meio da regra de L'Hôpital, e não uma demonstração independente: esse mesmo limite foi usado anteriormente na obtenção da derivada do logaritmo. ■

Exemplo 11.47.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Potências e logaritmos

Quando $f(x) > 0$, o logaritmo transforma $f(x)^{g(x)}$ no produto $g(x) \ln(f(x))$. Se esse produto tende a um número real L , a potência tende a e^L . É necessário, portanto, retornar pela exponencial ao final do cálculo.

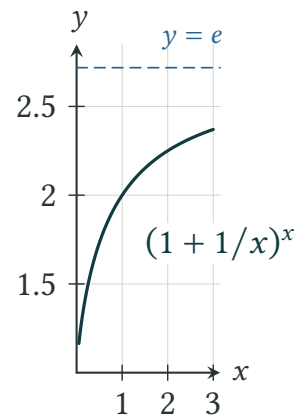
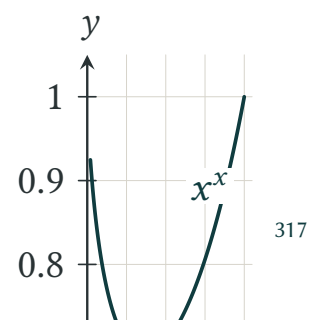


Figura 11.23. Convergência de $(1 + 1/x)^x$ para e .



Solução. Temos uma forma indeterminada do tipo 0^0 . Seja $f(x) = x^x$. Começaremos calculando $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x))$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}.\end{aligned}$$

Como temos uma forma indeterminada $-\infty/\infty$, logo, aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(f(x)) = 0$. Voltando ao limite original,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(f(x))} = e^0 = 1.$$

■

Exercícios

Ex. 11.24 Calcule os seguintes limites usando L'Hôpital, quando possível.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{12} - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$, com $n \geq 1$ inteiro.

6. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(x-1)$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^3(x)}{1 - \cos(x)}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)^x$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-4x}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$

Ex. 11.25 Calcule os seguintes limites usando L'Hôpital quando possível

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$
3. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos(2x)}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x + 2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$, com $b \neq 0$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$
11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2^x}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3^x}$
17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}$
18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$
19. Um algoritmo exige aproximadamente $n \ln n$ operações, enquanto outro exige n^2 . Para comparar suas ordens de crescimento, estenda a razão a

uma variável real x e calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \ln x)/x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)/x$. Interprete o resultado.

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2)}{x}$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$
22. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$
23. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x$
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2$
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \ln x$
26. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

Ex. 11.26

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^x$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2/x)^x$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$ Dica Teorema do Confronto.
6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)^{1-x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x)^{1/x}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)^x$
9. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{1-x}$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{1/x}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^2)^{1/x}$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x \cos x$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{tg}(1/x)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x \operatorname{sen}(2x)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\ln x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x^2 - 9} - \frac{x}{x-3}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$$

11.6. Assíntotas

Limites laterais e limites no infinito podem revelar retas que organizam o comportamento global do gráfico. Essas retas são as assíntotas.

Uma assíntota de uma curva é uma reta tal que a distância entre a curva e a reta tende a zero quando as coordenadas x ou y tendem ao infinito.

11.7 Definição

A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** de uma função f se pelo menos um dos limites laterais diverge em módulo:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Assíntotas e interseções

Uma assíntota horizontal ou oblíqua descreve a aproximação do gráfico a uma reta quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$. A diferença entre suas ordenadas deve tender a zero. Essa condição não impede que o gráfico encontre ou atravesse a reta.

Exemplo 11.48.

A reta $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{2}{x-3}$.



11.8 Definição

A reta $y = L$ é chamada de **assíntota horizontal** para uma função f se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Exemplo 11.49.

A reta $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.



11.9 Definição

Suponha que o domínio de f contenha valores arbitrariamente grandes. Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma **assíntota de f quando $x \rightarrow +\infty$** se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Se $a = 0$, a assíntota é **horizontal**; se $a \neq 0$, ela é **oblíqua**.

A definição em $-\infty$ é análoga, desde que o domínio contenha valores arbitrariamente negativos. Os coeficientes podem ser diferentes nas duas extremidades.

Como encontrar a e b ?

Se $y = ax + b$ é uma assíntota quando $x \rightarrow +\infty$, então seus coeficientes são determinados pelos limites

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

De fato, da relação $f(x) - ax - b \rightarrow 0$ segue que

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{f(x) - ax - b}{x} \rightarrow a,$$

e então $f(x) - ax \rightarrow b$. Reciprocamente, se esses dois limites existem, temos diretamente $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$, de modo que a reta é uma assíntota. O mesmo argumento vale em $-\infty$.

Exemplo 11.50.

Determine as assíntotas de $f(x) = \sqrt{9x^2 + x + 1}$ e esboce o gráfico.

Solução. Antes de calcular os limites, faremos algumas simplificações

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{|x|\sqrt{9 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \begin{cases} \sqrt{9 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0, \\ -\sqrt{9 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Os limites mostram que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -3$. Assim $a = 3$ para $x \rightarrow +\infty$ e $a = -3$ para $x \rightarrow -\infty$. Resta determinar b .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{9x^2 + x + 1} - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x} = \frac{1}{6}.$$

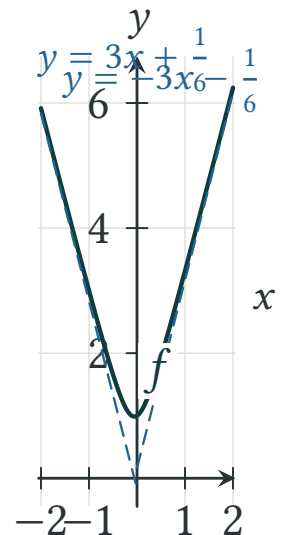


Figura 11.25. Gráfico e assíntotas de $f(x) = \sqrt{9x^2 + x + 1}$.

Logo, $y = 3x + \frac{1}{6}$ é assíntota para $x \rightarrow +\infty$. Analogamente vemos que $y = -3x - \frac{1}{6}$ é assíntota para $x \rightarrow -\infty$. ■

Exemplo 11.51.

Determine as assíntotas de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

Solução. Como $x^2 + 1$ nunca se anula, a função está definida e é contínua em toda a reta; portanto, não há assíntotas verticais. Uma vez que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, não há assíntotas horizontais. Fazendo a divisão de polinômios obtemos

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1},$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0.$$

Portanto, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

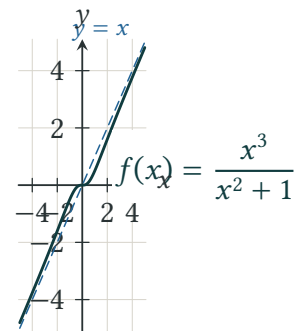


Figura 11.26. Gráfico e assíntota oblíqua de $f(x) = x^3/(x^2 + 1)$. ■

Exercícios

Ex. 11.27
 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Determine todas as assíntotas de

Ex. 11.28
 $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ Determine as assíntotas horizontais de em cada extremidade da reta.

11.7. Esboço de curvas

Domínio, simetrias, monotonicidade, extremos, concavidade e assíntotas descrevem aspectos complementares de uma função. Reunidos, esses dados determinam a estrutura qualitativa do gráfico. O roteiro a seguir organiza a análise sem substituir o exame das particularidades de cada função.

Domínio e descontinuidades

Restrições do domínio e descontinuidades dividem a análise em trechos e devem ser identificadas antes do estudo por derivadas. Isso evita, em particular, conectar partes do gráfico que não pertencem ao mesmo ramo.

Roteiro para a construção de gráficos

- 1 Encontrar o domínio $\text{Dom } f$.
- 2 Calcular os pontos de intersecção com os eixos.
- 3 Encontrar os pontos críticos e os valores críticos.
- 4 Verificar, quando possível, se f é par ou ímpar.
- 5 Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento.
- 6 Identificar os máximos e mínimos de f .
- 7 Determinar os intervalos de concavidade.
- 8 Identificar os pontos de inflexão.
- 9 Encontrar as assíntotas.
- 10 Reunir as informações e esboçar o gráfico.

11.52 Observação

1. Simetrias e periodicidade podem reduzir o trabalho: depois de estudar uma parte do domínio, a informação pode ser transportada para as demais.
2. Um ponto crítico é apenas um candidato a extremo. O sinal de f' e a comparação de valores decidem se há máximo ou mínimo, local ou global.
3. Pontos onde a função não está definida são candidatos a assíntotas verticais, não assíntotas automáticas; os limites laterais devem ser examinados.

Exemplo 11.53.

Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

<

Solução.

1. Como f é polinomial, seu domínio é $\mathbb{R}$ e não há assíntotas verticais. As interseções com os eixos são $(0, 4)$ e, numericamente, $(-0,355, 0)$. Essa é a única raiz real.

2. A derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$$

se anula em $x = 1$ e $x = 3$. Como o coeficiente de x^2 em f' é positivo, f cresce em $(-\infty, 1)$ e $(3, \infty)$ e decresce em $(1, 3)$. Portanto, $(1, 8)$ é um máximo local e $(3, 4)$ é um mínimo local.

3. Como $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$, a função é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$ e para cima em $(2, \infty)$. O ponto $(2, 6)$ é um ponto de inflexão.

4. Por fim,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

Os limites excluem assíntotas horizontais. Além disso,

$$\frac{f(x)}{x} = x^2 - 6x + 9 + \frac{4}{x} \rightarrow +\infty$$

quando $x \rightarrow \pm\infty$; portanto, não existe coeficiente angular finito para uma assíntota oblíqua.

5. Reunimos os pontos críticos e o ponto de inflexão na reta real da Figura 11.27; os sinais de f' e f'' determinam, respectivamente, a monotonicidade e a concavidade em cada intervalo.

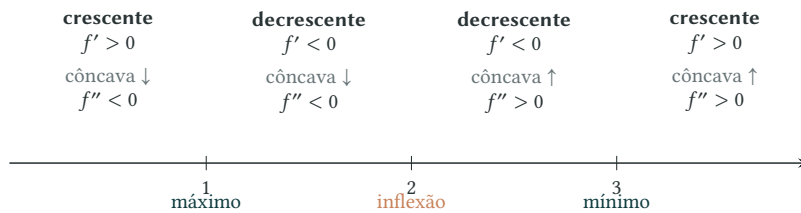


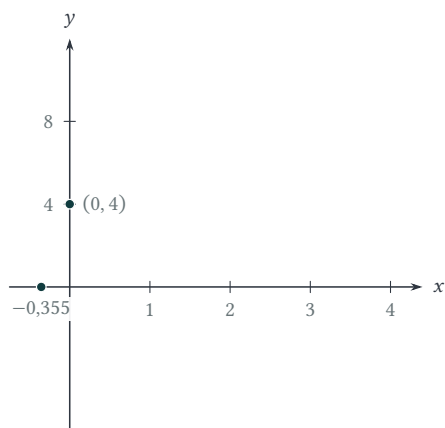
Figura 11.27. Reta real para a função f do Exemplo 11.53.

6. A Figura 11.28 mostra como essas informações conduzem do esquema inicial ao esboço final do gráfico.



1 MARCOS

interseções e limites



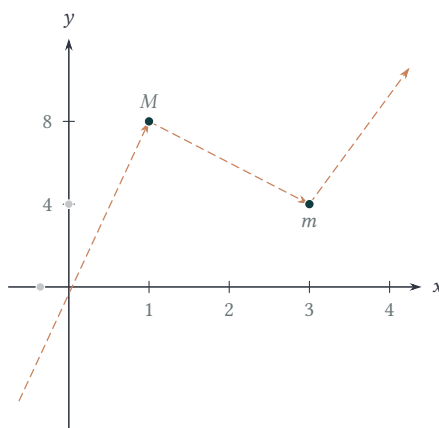
$\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

$x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow -\infty$.

$x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow +\infty$.

2 + MONOTONICIDADE

extremos e sentido de percurso

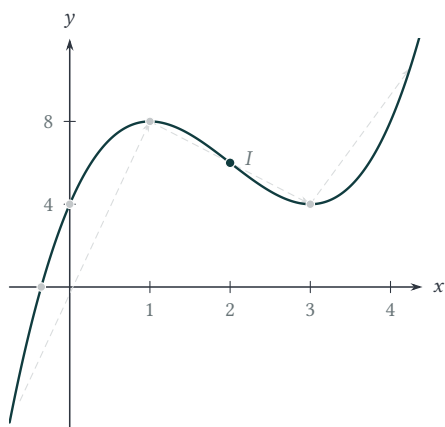


$M = (1, 8)$.

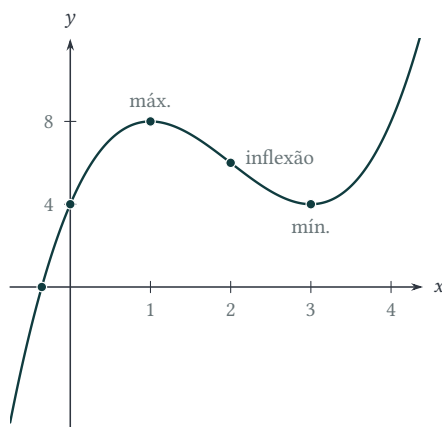
$m = (3, 4)$.

3 + CONCAVIDADE

inflexão e forma da curva



4 GRÁFICO FINAL



Para baixo se $x < 2$; para cima se $x > 2$.

$I = (2, 6)$.

Figura 11.28. Construção do esboço de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

Exemplo 11.54.

Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}$.

<

Solução.

1. Como $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. As interseções são $(-1, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1/3)$.

2. Temos

$$f'(x) = \frac{4 - 8x}{(x - 3)^2(x + 2)^2}.$$

O denominador é positivo no domínio, de modo que f cresce em $(-\infty, -2)$ e $(-2, 1/2)$ e decresce em $(1/2, 3)$ e $(3, \infty)$. Assim, $(1/2, 9/25)$ é um máximo local.

3. A derivada segunda é

$$f''(x) = \frac{24x^2 - 24x + 56}{(x - 3)^3(x + 2)^3}.$$

O numerador é sempre positivo. Portanto, f é côncava para cima em $(-\infty, -2)$ e $(3, \infty)$ e para baixo em $(-2, 3)$. Não há pontos de inflexão, pois os pontos em que a concavidade muda não pertencem ao domínio.

4. Os limites laterais confirmam as assíntotas verticais $x = -2$ e $x = 3$. Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1,$$

a reta $y = 1$ é assíntota horizontal.

5. A Figura 11.29 resume os sinais de f' e f'' nos intervalos determinados por -2 , $1/2$ e 3 .

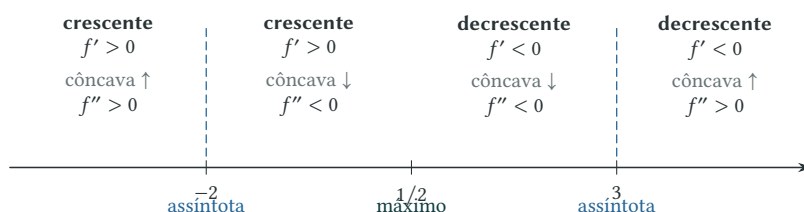


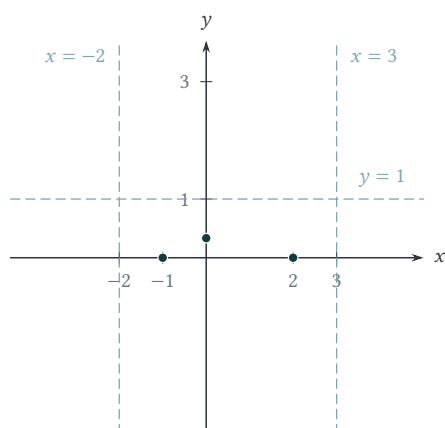
Figura 11.29. Reta real para f do Exemplo 11.54.

6. A Figura 11.30 reúne as interseções, a monotonicidade, a concavidade e as três assíntotas no esboço final.

■

1 MARCOS

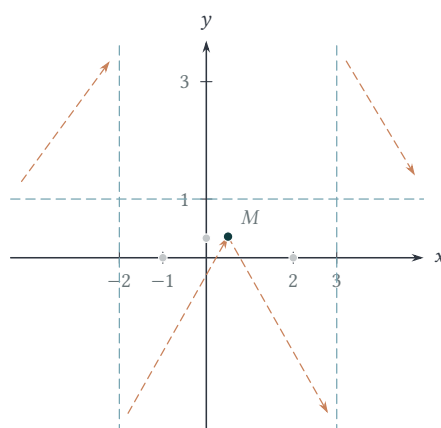
interseções e assíntotas



Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.
Interseções: $(-1, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1/3)$.

2 + MONOTONICIDADE

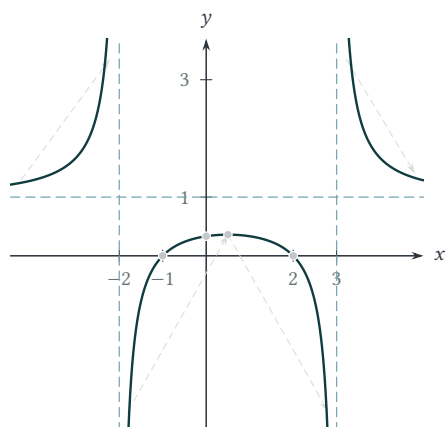
máximo e sentido de percurso



$M = (1/2, 9/25)$ é máximo local.
As setas indicam o percurso em cada intervalo do domínio.

3 + CONCAVIDADE

três ramos separados



Para cima fora de $[-2, 3]$; para baixo em $(-2, 3)$.
Não há pontos de inflexão.

4 GRÁFICO FINAL

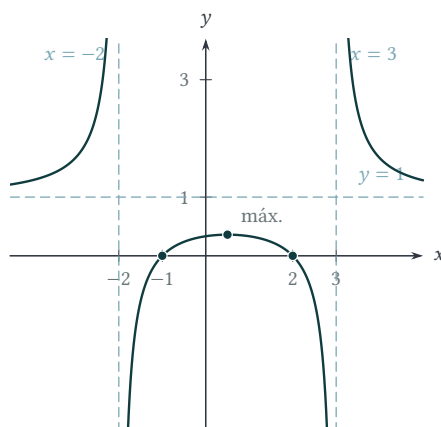


Figura 11.30. Construção do esboço de $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}$.

Exemplo 11.55.

Esboce $f(x) = \frac{4(x-3)(x+1)}{x^2+2x+3}$.

<

Solução.

1. Como $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$, o domínio é $\mathbb{R}$. As interseções são $(-1, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, -4)$.

2. A derivada

$$f'(x) = \frac{16x(x+3)}{(x^2+2x+3)^2}$$

mostra que f cresce em $(-\infty, -3)$ e $(0, \infty)$ e decresce em $(-3, 0)$. Logo, há um máximo local em $(-3, 8)$ e um mínimo local em $(0, -4)$.

3. Para a concavidade,

$$f''(x) = -\frac{16(2x^3 + 9x^2 - 9)}{(x^2 + 2x + 3)^3}.$$

As três raízes do numerador são aproximadamente $r_1 = -4,251$, $r_2 = -1,161$ e $r_3 = 0,912$. Assim, f é côncava para cima em $(-\infty, r_1)$ e (r_2, r_3) , e para baixo em (r_1, r_2) e (r_3, ∞) . Os três valores de r_i fornecem pontos de inflexão.

4. Não há assíntotas verticais. Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 4,$$

a reta $y = 4$ é assíntota horizontal.

5. A Figura 11.31 organiza os pontos críticos e os pontos de inflexão e registra os sinais de f' e f'' .

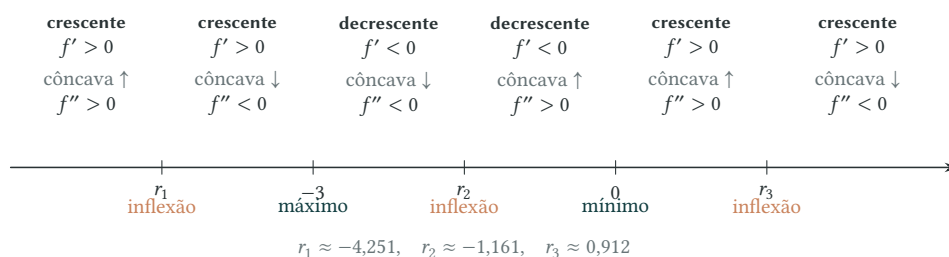


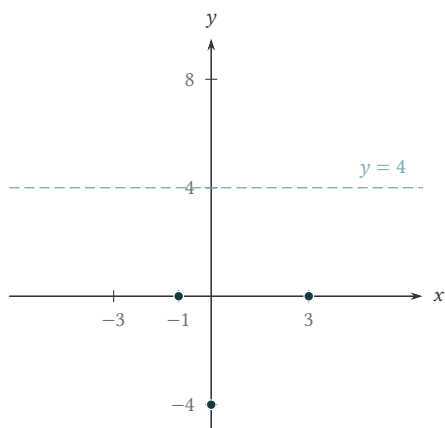
Figura 11.31. Reta real para f do Exemplo 11.55.

6. A Figura 11.32 mostra a passagem dessas informações ao esboço, incluindo as raízes -1 e 3 .

■

1 MARCOS

interseções e assíntota

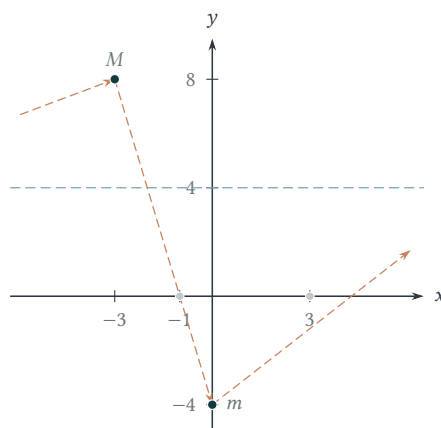


Dom $f = \mathbb{R}$.

Interseções: $(-1, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, -4)$.

2 + MONOTONICIDADE

máximo, mínimo e percurso

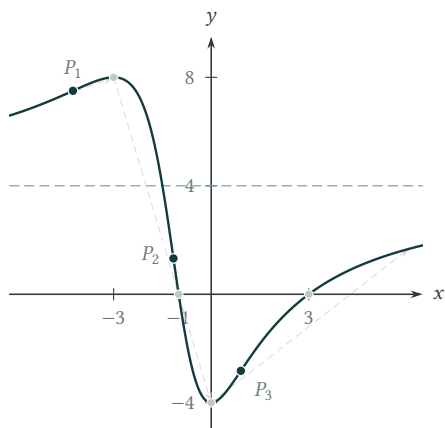


$M = (-3, 8)$; $m = (0, -4)$.

Cresce antes de M e depois de m .

3 + CONCAVIDADE

três pontos de inflexão



Abcissas: $r_1 \approx -4,251$, $r_2 \approx -1,161$, $r_3 \approx 0,912$.

Para cima em $(-\infty, r_1)$ e (r_2, r_3) .

4 GRÁFICO FINAL

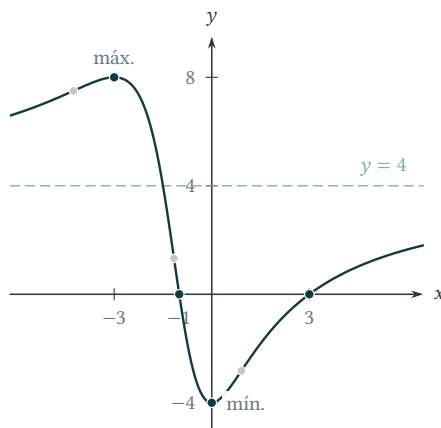


Figura 11.32. Construção do esboço de $f(x) = \frac{4(x-3)(x+1)}{x^2+2x+3}$.

Exemplo 11.56.

Esboce o gráfico da função $f(x) = x + 2x^{\frac{2}{3}} = x + 2\sqrt[3]{x^2}$.

<

Solução.

1. A raiz cúbica está definida para todo número real; portanto, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. A função é contínua em toda a reta, mas não é par nem ímpar. Suas raízes são $x = -8$ e $x = 0$.

2. Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

A derivada se anula em $x = -64/27$ e não existe em $x = 0$, embora f esteja definida nesse ponto. O sinal de f' mostra que f cresce em $(-\infty, -64/27)$ e $(0, \infty)$ e decresce em $(-64/27, 0)$. Logo,

$$\left(-\frac{64}{27}, \frac{32}{27}\right) \text{ é um máximo local, e } (0, 0) \text{ é um mínimo local.}$$

3. Para $x \neq 0$,

$$f''(x) = -\frac{4}{9x^{4/3}} < 0.$$

Assim, o gráfico é côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Como a concavidade não muda ao atravessar 0, esse ponto não é um ponto de inflexão.

4. Temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

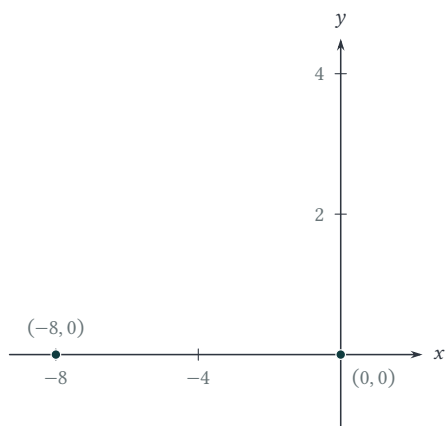
Não há assíntotas verticais ou horizontais. Tampouco há assíntota oblíqua: embora $f(x)/x \rightarrow 1$, a diferença $f(x) - x = 2x^{2/3}$ não tende a um número real.

5. A Figura 11.33 reúne essas informações. A janela inclui a raiz -8 e destaca, em $x = 0$, a cúspide onde f' não existe.

■

1 MARCOS

raízes e limites



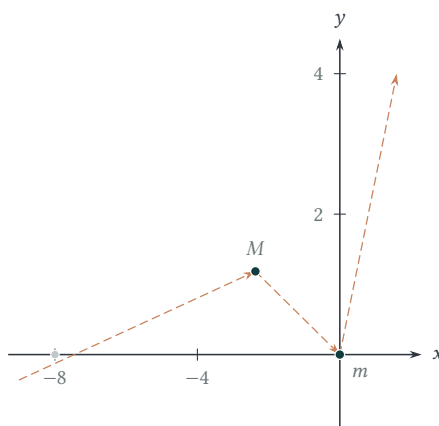
$\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

$x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow -\infty$.

$x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow +\infty$.

2 + MONOTONICIDADE

extremos e cúspide

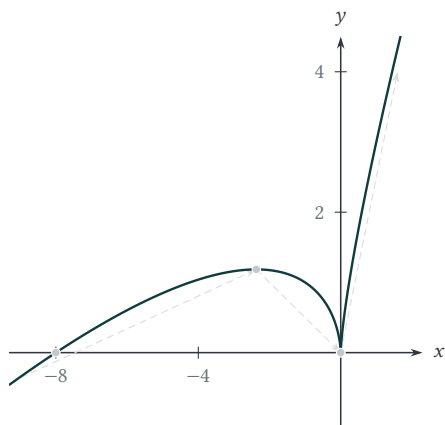


$M = (-64/27, 32/27); m = (0, 0)$.

Em 0, a derivada não existe.

3 + CONCAVIDADE

curvatura em cada intervalo



Para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.

A concavidade não muda em 0: não há inflexão.

4 GRÁFICO FINAL

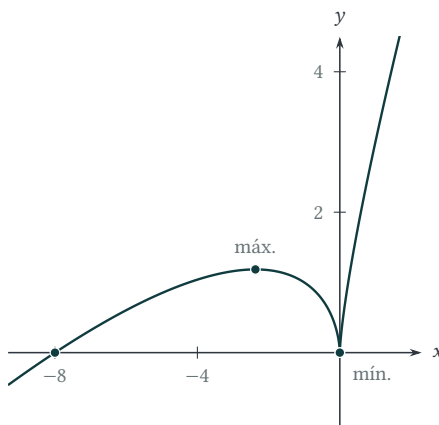


Figura 11.33. Construção do esboço de $f(x) = x + 2\sqrt[3]{x^2}$.

Exemplo 11.57 — Quando a concentração atinge o pico.

Após uma dose administrada fora da corrente sanguínea, o fármaco precisa ser absorvido antes de alcançá-la e, ao mesmo tempo, começa a ser eliminado pelo organismo. Um modelo simples para a concentração resultante é

$$C(t) = A(e^{-k_e t} - e^{-k_a t}), \quad A > 0, \quad k_a, k_e > 0, \quad t \geq 0,$$

em que k_a e k_e estão associados, respectivamente, à absorção e à eliminação. Em determinado caso, os tempos para que cada parcela exponencial se reduza à metade são 0,5 hora para a absorção e 4 horas para a eliminação. Determine k_a e k_e , encontre o instante de concentração máxima e descreva os traços principais do gráfico.

<

Solução. Para uma parcela da forma e^{-kt} , o tempo T de redução à metade satisfaz $e^{-kT} = 1/2$; logo, $k = \ln 2/T$. Portanto,

$$k_a = 2 \ln 2 \text{ h}^{-1}, \quad k_e = \frac{\ln 2}{4} \text{ h}^{-1}.$$

Em particular, $k_a > k_e$. Temos $C(0) = 0$, $C(t) > 0$ para $t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$. Além disso,

$$C'(t) = A(k_a e^{-k_a t} - k_e e^{-k_e t}).$$

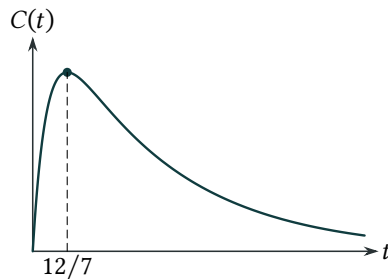
A equação $C'(t) = 0$ tem uma única solução:

$$t_{\max} = \frac{\ln(k_a/k_e)}{k_a - k_e}.$$

Substituindo os parâmetros calibrados,

$$t_{\max} = \frac{\ln 8}{2 \ln 2 - (\ln 2)/4} = \frac{12}{7} \text{ h}.$$

Como $C'(0) = A(k_a - k_e) > 0$ e, depois desse ponto, a parcela de eliminação predomina, a concentração cresce até $t_{\max}$ e decresce em seguida. O gráfico parte de zero, possui um único pico e retorna assintoticamente a zero.



■

Exercícios

Ex. 11.29 Para cada uma das funções seguintes, faça um estudo completo e esboce o gráfico. Para isso:

1. Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;
2. Encontre os valores de máximo e mínimo locais;
3. Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;
4. Encontre as assíntotas horizontais, verticais e inclinadas;
5. Esboce o gráfico utilizando as informações dos itens anteriores.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

2. $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 2$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

4. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

5. $f(x) = (x - 2) \ln(x - 2)$

6. $f(x) = (x - 2)^2 \ln(x - 2)$

7. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

8. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$

9. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$

10. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

11. $f(x) = x^2 e^x$

12. $f(x) = \sin x \cos x$ em $[-\pi, \pi]$

13. $f(x) = (x - 3)^{2/3} + 2$

14. $(x^2 - 1)^3$

15. $3x^{2/3} - x$

16. $(x + 2)^{\frac{3}{2}} + 1$

Ex. 11.30 Esboce o gráfico das seguintes funções:

1. $x + \cos(x)$

2. $x^{1/3}(x + 4)$

3. $\ln(x^4 + 27)$

4. $\ln(1 - \ln(x))$

5. $e^{\frac{-1}{x+1}}$

6. $\ln(\operatorname{tg}^2 x)$

7. $\frac{e^x}{x^2 - 9}$

8. $x \operatorname{tg} x \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

9. $e^{\cos(x)}$

10. $\frac{1}{1 - \cos(x)} \quad -2\pi < x < 2\pi$

11. $t\sqrt[3]{t^2 - 4}$

Ex. 11.31 Nas próximas questões, é dada uma função com parâmetros a e b . Descreva os pontos críticos e os possíveis pontos de inflexão de f em termos de a e b .

1. $f(x) = \frac{a}{x^2 + b^2}$

2. $f(x) = \sin(ax + b)$

3. $f(x) = (x - a)(x - b)$

A análise de curvas mostrou como reconhecer extremos a partir da estrutura de uma função. Em problemas de otimização, a mesma ideia será precedida por uma etapa adicional: construir a função a partir da situação concreta.

11.8. Problemas de otimização

Em um problema de otimização, a função a ser maximizada ou minimizada não costuma vir pronta. Ela precisa ser construída a partir das grandezas do problema e de suas restrições. A modelagem determina tanto a expressão da função quanto o domínio viável; somente depois entram os critérios de máximos e mínimos.

Exemplo 11.58. Uma caixa sem tampa.

Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de uma folha quadrada de 60 cm de lado. Para isso, recortam-se quadrados congruentes nos quatro cantos e dobram-se as abas restantes. Qual deve ser o lado dos quadrados recortados para que o volume da caixa seja máximo?

caixa aberta

Restrições na otimização

Uma solução algébrica só é admissível se respeitar as restrições do problema. Por isso, o domínio deve ser determinado junto com a função a otimizar. Para decidir um extremo global, é preciso comparar os candidatos e considerar as extremidades que pertencem ao domínio.

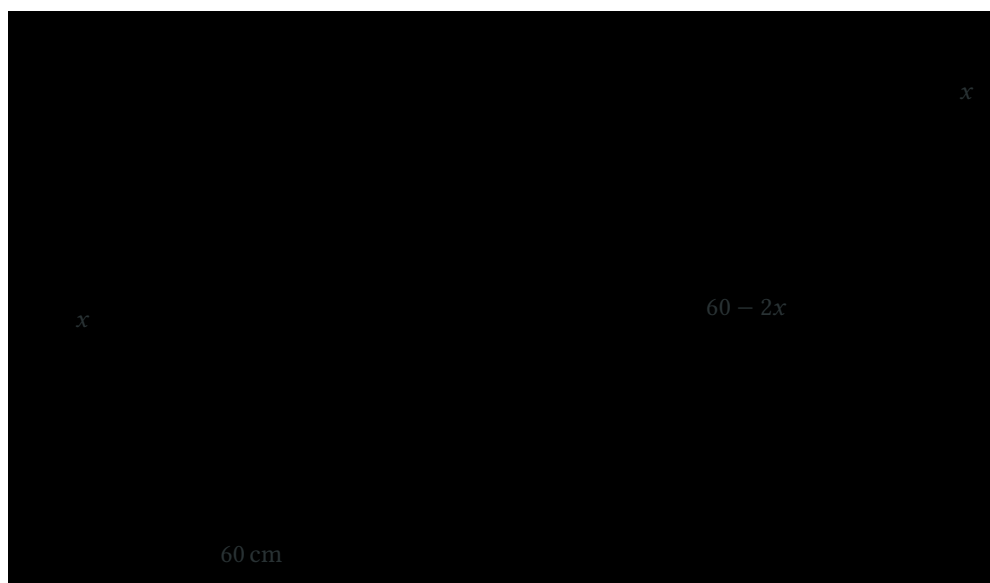


Figura 11.34. Ao retirar quadrados de lado x , a altura da caixa é x e cada lado da base passa a medir $60 - 2x$.

Solução. Se x é o lado de cada quadrado recortado, a caixa resultante tem altura x e base quadrada de lado $60 - 2x$. Portanto,

$$V(x) = x(60 - 2x)^2.$$

A geometria também determina o domínio do problema. Para que a construção faça sentido,

$$0 \leq x \leq 30.$$

Nos extremos, a caixa degenera e seu volume é zero. Para procurar um máximo no interior, derivamos:

$$V'(x) = (60 - 2x)(60 - 6x).$$

O único ponto crítico interior é $x = 10$. Comparando os valores relevantes,

$$V(0) = 0, \quad V(10) = 10 \cdot 40^2 = 16000, \quad V(30) = 0.$$

Logo, o maior volume é

$$16000 \text{ cm}^3,$$

obtido quando recortamos quadrados de lado 10 cm. A caixa ótima tem, portanto, base $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ e altura 10 cm. ■

Exemplo 11.59.

Um fabricante de embalagens deseja fabricar uma lata cujo formato é um cilindro circular reto de volume $V_0 > 0$. Quais devem ser as dimensões da lata de modo a minimizar a quantidade de material gasto na fabricação, ou seja, a área total da superfície, incluindo a tampa e a base?

◁

Solução. Sejam r e h o raio da base e a altura da lata, respectivamente. O volume da lata é dado por

$$V_0 = \pi r^2 h \tag{11.1}$$

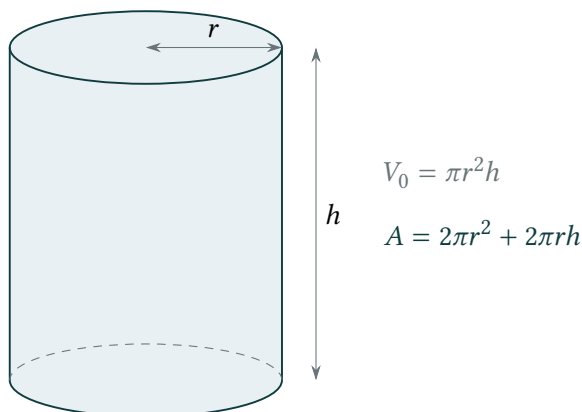


Figura 11.35. O raio r e a altura h determinam a restrição de volume e a área total da lata fechada.

e a área total

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \tag{11.2}$$

Isolando h na equação 11.1, temos:

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

e substituindo em 11.2 temos

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V_0}{r}$$

Como o raio deve ser positivo e a área deve estar definida, temos que $0 < r < \infty$. A função $A(r)$ é diferenciável em todos os pontos do domínio. Assim, para calcular os pontos críticos, derivamos:

$$\begin{aligned} A'(r) &= 4\pi r - 2\frac{V_0}{r^2} \\ &= \frac{2(2\pi r^3 - V_0)}{r^2} \end{aligned}$$

e logo a derivada é igual a zero em:

$$r = \left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Como não estamos num intervalo fechado, não temos a garantia de existência de um mínimo. Para analisar o comportamento de $A(r)$, estudaremos o sinal da derivada. A derivada é positiva para $r > (V_0/(2\pi))^{1/3}$ e negativa para $0 < r < (V_0/(2\pi))^{1/3}$.

Assim, o ponto $r = \left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ é um ponto de mínimo global. A altura correspondente é $h = V_0/(\pi r^2) = 2r$: a lata ótima tem altura igual ao diâmetro. ■

Exemplo 11.60.

Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que esteja inscrito na circunferência de raio R .

Solução. Sejam x a altura do triângulo, y a base e z a medida de um dos lados congruentes. A área do triângulo é $A = \frac{1}{2}xy$ onde $x \in (0, 2R)$ e $y \in (0, 2R]$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (x - R)^2 = R^2 \quad \text{e portanto} \quad y = 2\sqrt{2Rx - x^2}.$$

Substituindo obtemos $A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2}$. Logo, o problema se reduz a maximizar a função

$$A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2} \quad x \in (0, 2R).$$

Calculando a derivada,

$$A'(x) = \frac{x(3R - 2x)}{\sqrt{2Rx - x^2}},$$

temos que $x = \frac{3}{2}R$ é o único candidato a ponto de máximo no intervalo $(0, 2R)$.

Analisando o sinal da derivada primeira, vemos que, de fato, $x = \frac{3}{2}R$ é um ponto de

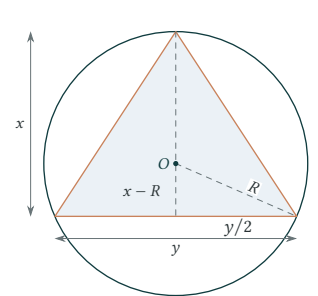


Figura 11.36. A altura x e a base y determinam a área; o triângulo retângulo auxiliar fornece $(y/2)^2 + (x - R)^2 = R^2$.

máximo. Portanto as dimensões são

$$\text{altura } x = \frac{3}{2}R \quad \text{e base } y = \sqrt{3}R \quad \text{e daí } z^2 = \frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = 3R^2.$$

Logo o triângulo é equilátero. ■

Exemplo 11.61.

Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Determine o ângulo que vai maximizar a quantidade de água que a calha pode conter.

Solução. Como o comprimento da calha é fixo, maximizar seu volume equivale a maximizar a área da seção transversal. A Figura 11.37 reúne a seção transversal e sua decomposição nas grandezas usadas no cálculo.

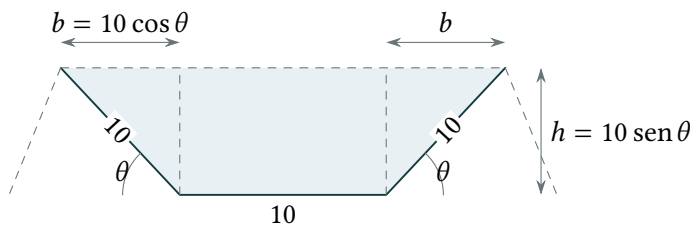
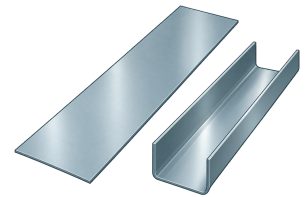


Figura 11.37. A seção trapezoidal decompõe-se em um retângulo e dois triângulos, com $b = 10 \cos \theta$ e $h = 10 \sin \theta$.

A área seccional pode ser obtida somando-se a área do retângulo e as áreas dos triângulos. Como $b = 10 \cos \theta$ e $h = 10 \sin \theta$, temos:

$$A = 10h + 2 \left(\frac{1}{2}bh \right) = 100 \sin \theta + (10 \sin \theta)(10 \cos \theta)$$

$$A = 100(\sin \theta + \sin \theta \cos \theta)$$

Podemos assumir que θ pertence ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Calculando a derivada, temos:

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= 100(\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= 100(\cos \theta + \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta)) \\ &= 100(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\ &= 100(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

Logo, a derivada se anula quando $2 \cos \theta - 1 = 0$, ou seja, $\cos \theta = 1/2$ e, logo, $\theta = \pi/3$; ou quando $\cos \theta + 1 = 0$. A segunda equação não possui solução no intervalo $[0, \pi/2]$. Como $A(0) = 0$, $A(\pi/3) \approx 129,9$ e $A(\pi/2) = 100$, temos que a área seccional máxima ocorre quando $\theta = \pi/3$. ■

Exemplo 11.62.

Um arame de comprimento L é cortado em duas partes. Com uma dessas partes faz-se um quadrado e com a outra um triângulo equilátero. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas seja máxima?

<

Solução. A soma das áreas é dada por

$$A = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \quad (11.3)$$

onde a^2 é a área do quadrado de lado a e $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ é a área do triângulo equilátero de lado b . Como o arame tem comprimento L , temos $L = 4a + 3b \implies a = \frac{L - 3b}{4}$. Substituindo o valor de a na equação 11.3, obtemos A como função de apenas uma variável:

$$\begin{aligned} A(b) &= \left[\frac{L - 3b}{4} \right]^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{L^2 - 6Lb + 9b^2 + 4\sqrt{3}b^2}{16} \\ &= \frac{1}{16} \left[(9 + 4\sqrt{3})b^2 - 6Lb + L^2 \right] \end{aligned}$$

Devemos determinar um valor para b de modo que $A(b)$ seja máxima. Começaremos procurando os pontos críticos

$$A'(b) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})b - 3L}{8}.$$

O único ponto crítico satisfaz

$$A'(b) = 0 \iff b = \frac{3L}{9 + 4\sqrt{3}}.$$

Como $A''(b) = (9 + 4\sqrt{3})/8 > 0$, ele fornece o mínimo global. Nesse caso, $a = L\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$. Como a função $A(b)$ é contínua no intervalo $\left[0, \frac{L}{3}\right]$, existem um máximo e um mínimo absolutos em $\left[0, \frac{L}{3}\right]$. O único ponto crítico interior é um mínimo. Portanto, o máximo absoluto deve ocorrer em uma das extremidades. Comparando os valores: Se $b = 0$ e, portanto, $a = \frac{L}{4}$, temos $A(0) = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}L^2$; Se $b = \frac{L}{3}$ e, portanto, $a = 0$, temos $A\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}L^2$. Como, $\frac{\sqrt{3}}{36}L^2 < \frac{1}{16}L^2$ (porque $\frac{4}{9}\sqrt{3} < 1$ e $\sqrt{3} < 2$), segue-se que, admitindo uma das partes com comprimento zero, a área máxima é obtida usando todo o arame no quadrado de lado $L/4$. Se o corte deve produzir duas partes de comprimento positivo, não existe máximo: a soma das áreas pode aproximar-se de $L^2/16$ sem atingi-lo. ■

Exemplo 11.63 — Princípio de Fermat e lei de Snell.

Dois meios homogêneos são separados por uma interface plana. No primeiro, a luz se propaga com velocidade v_1 ; no segundo, com velocidade v_2 . Um raio deve ir de $A = (0, a)$ a $B = (L, -b)$, com $a, b, L > 0$, atravessando a interface $y = 0$. Em que ponto deve ocorrer a passagem de um meio para o outro para que o tempo de percurso seja mínimo? Que relação os ângulos do caminho ótimo satisfazem?

A

<

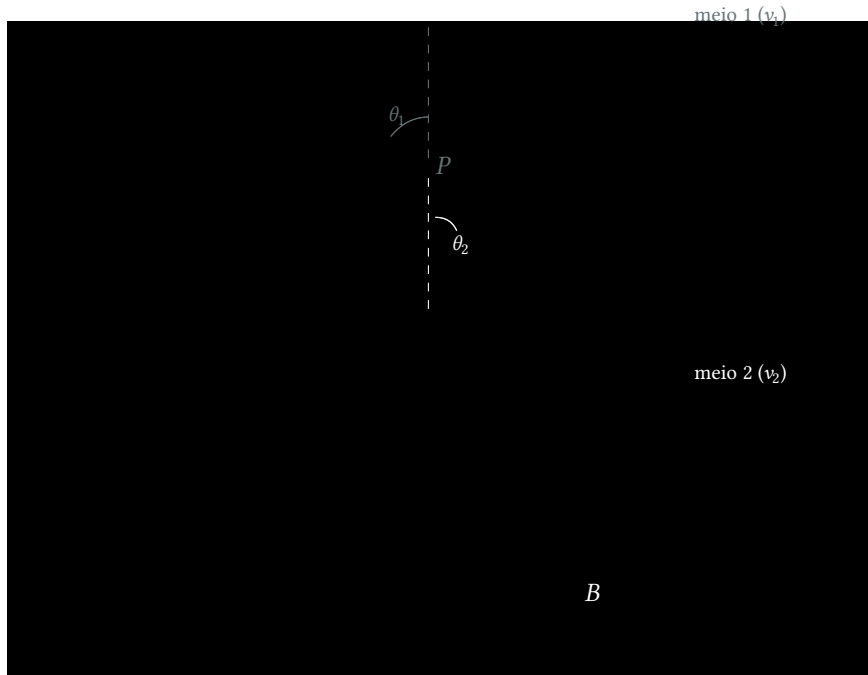


Figura 11.38. O ponto $P = (x, 0)$ pode deslizar pela interface. O princípio de Fermat seleciona o caminho que minimiza o tempo total de percurso.

Solução. Se o raio cruza a interface em $P = (x, 0)$, com $0 \leq x \leq L$, as distâncias percorridas nos dois meios são

$$AP = \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{e} \quad PB = \sqrt{(L-x)^2 + b^2}.$$

Como tempo é distância dividida pela velocidade, o tempo total é

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Observe que aqui não estamos minimizando a distância total: se as velocidades forem diferentes, pode ser vantajoso percorrer um caminho geometricamente mais longo para permanecer mais tempo no meio mais rápido.

Derivando,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{L-x}{v_2 \sqrt{(L-x)^2 + b^2}}.$$

Além disso,

$$T'(0) < 0 \quad \text{e} \quad T'(L) > 0,$$

de modo que existe um ponto crítico no interior. Mais ainda,

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2((L-x)^2 + b^2)^{3/2}} > 0.$$

Portanto, T é estritamente convexa e esse ponto crítico é o único mínimo global.

No ponto de mínimo, $T'(x) = 0$, isto é,

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{L-x}{v_2\sqrt{(L-x)^2 + b^2}}.$$

Se θ_1 e θ_2 são os ângulos que os dois trechos do raio formam com a normal à interface, a Figura 11.38 mostra que

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}}.$$

Assim, a condição de mínimo se transforma em

$$\boxed{\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}}.$$

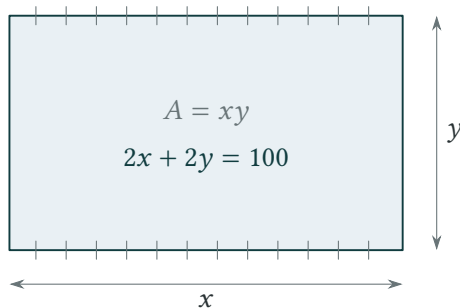
Se $n_i = c/v_i$ é o índice de refração do meio i , obtemos a forma usual da **lei de Snell**:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Desse modo, uma lei física surge diretamente de um problema de otimização do tempo de percurso. ■

Exercícios

Ex. 11.32 Um homem dispõe de 100 metros de cerca e deseja construir um cercado retangular de área máxima. Quais devem ser as dimensões do cercado?

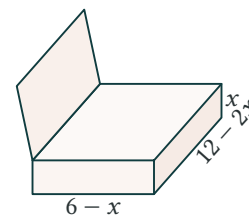


Ex. 11.33 Quais são as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser desenhada dentro do círculo unitário?

Ex. 11.34 Encontre a área máxima de um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 1.

Ex. 11.35 Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber $V \text{ cm}^3$ de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal usado para fazer a lata.

Ex. 11.36 Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de $12 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Na construção indicada, a altura é x . Use a planificação para expressar as dimensões da base em função de x e encontre as dimensões que maximizam o volume.



Dimensões em centímetros; tampa articulada a um dos lados.

Ex. 11.37 Uma fileira de soldados marcha perpendicularmente à própria frente e atravessa obliquamente uma fronteira reta entre dois terrenos. No primeiro terreno, cada soldado marcha com velocidade v_1 ; no segundo, com velocidade v_2 . Quando o primeiro soldado da fileira atinge a fronteira no ponto A , o último ainda está no primeiro terreno, no ponto B . Após um intervalo Δt , esse último soldado chega à fronteira no ponto C , enquanto o primeiro chega ao ponto D no segundo terreno. As fileiras AB e CD são, respectivamente, as frentes antes e depois da mudança de direção.

Mostre, usando os dois triângulos retângulos formados e denotando por θ_1 e θ_2 os ângulos da direção de marcha com a normal à fronteira, que

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

Explique também para que lado a fileira gira quando $v_2 < v_1$.

Ex. 11.38 Um projétil é lançado, do nível do solo, com velocidade inicial v_0 e ângulo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Desprezando a resistência do ar, seu alcance horizontal é dado por

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta).$$

Determine o ângulo que maximiza o alcance e o valor máximo correspondente.

Ex. 11.39 Em um modelo logístico, o crescimento natural de uma população de peixes de tamanho

P , com $0 \leq P \leq K$, é

$$G(P) = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad r, K > 0.$$

Uma retirada constante só pode ser sustentável se não exceder esse crescimento. Determine o tamanho da população que produz o maior rendimento sustentável e o valor desse rendimento.

Ex. 11.40 A relação força-velocidade de um músculo é aproximada pela equação de Hill

$$(F + a)(v + b) = (F_0 + a)b,$$

em que $a, b, F_0 > 0$, F é a força e $v \geq 0$ é a velocidade de encurtamento. A potência mecânica é $P(v) = vF(v)$.

1. Escreva F e P como funções de v e determine o intervalo fisicamente relevante em que $F \geq 0$.
2. Encontre a velocidade e a força que maximizam a potência.
3. Determine a potência máxima.

Ex. 11.41 Um modelo simples associa ao diâmetro $d > 0$ de um prolongamento neuronal o custo

$$J(d) = Ad^2 + \frac{B}{\sqrt{d}}, \quad A, B > 0.$$

O primeiro termo representa custo de material e o segundo penaliza a condução lenta em diâmetros pequenos. Determine o diâmetro que minimiza J e justifique que o ponto encontrado é um mínimo.

A aproximação linear utiliza apenas o valor de f e de f' em um ponto. Derivadas de ordens superiores permitem construir aproximações polinomiais que reproduzem sucessivamente mais informação local.

11.9. Polinômios de Taylor

O polinômio de Taylor de ordem n em torno de um ponto é construído para concordar com a função e com suas primeiras n derivadas nesse ponto. O grau da aproximação aumenta juntamente com a quantidade de informação local incorporada; a diferença

Aproximação e erro

O polinômio de Taylor concorda com a função e com suas primeiras derivadas no centro da expansão. Isso não implica igualdade fora desse ponto. Para justificar uma aproximação numérica, é preciso con-

entre a função e o polinômio é medida pelo erro da aproximação.

11.9.1. Polinômios de Taylor de ordem 1 e 2

O exemplo mais simples de aproximação de uma função por um polinômio é a aproximação linear, que apresentamos na seção 10.7. Naquela seção, utilizamos a aproximação linear

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

para aproximar a função $f(x)$ para x numa vizinhança de a . Definimos o **erro** que cometemos ao aproximar $f(x)$ por P_1 como

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x).$$

Dessa forma, podemos escrever:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E_1(x)$$

11.64 Proposição

O erro $E_1(x)$ tende a zero mais rapidamente do que $(x - a)$. Isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E_1(x)}{x - a} = 0.$$

Demonstração. Observemos que, para $x \neq a$,

$$\frac{E_1(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Quando $x \rightarrow a$, o primeiro termo do lado direito tende a $f'(a)$ pela própria definição de derivada. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E_1(x)}{x - a} = f'(a) - f'(a) = 0.$$

■

O polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x)$ ao redor de a é definido como

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

11.65 Teorema

Seja f diferenciável em a . Então

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é o único polinômio de grau no máximo 1 cujo erro $E(x) = f(x) - P_1(x)$ satisfaz

$E(x)/(x-a) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$. É nesse sentido que ele fornece a melhor aproximação afim local.

Demonstração. Seja $q(x) = d + m(x-a)$ uma função afim e defina $E(x) = f(x) - q(x)$.

Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{x-a} = 0.$$

Para $x \neq a$, temos $E(x) = (x-a)E(x)/(x-a)$, de modo que $E(x) \rightarrow 0$. Como f é diferenciável em a , ela é contínua nesse ponto; como q também é contínua, $E = f - q$ é contínua em a . Logo, $E(a) = 0$ e, portanto, $d = f(a)$.

Assim,

$$f(x) - f(a) = m(x-a) + E(x).$$

Dividindo por $x-a$ e tomando o limite,

$$f'(a) = m + \lim_{x \rightarrow a} \frac{E(x)}{x-a} = m.$$

Portanto, $q = P_1$, o que prova a unicidade. ■

A aproximação linear reproduz o valor e a inclinação de f no ponto de expansão, mas não incorpora a concavidade. Para registrar também a derivada segunda, suponha que f seja duas vezes diferenciável e procuremos um polinômio quadrático P_2 . Procuramos um polinômio $P_2(x)$, de grau no máximo 2, tal que

$$f(a) = P_2(a), \quad f'(a) = P_2'(a) \quad \text{e} \quad f''(a) = P_2''(a).$$

Devemos procurar $P_2(x)$ na forma $P_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$ que satisfaça:

$$\blacksquare \quad f(a) = P_2(a) \implies c_0 = f(a),$$

$$\blacksquare \quad P_2'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) \implies P_2'(a) = c_1 = f'(a),$$

$$\blacksquare \quad P_2''(x) = 2c_2 \implies P_2''(a) = 2c_2 = f''(a) \implies c_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

Concluimos, portanto, que

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Novamente, definimos o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $P_2(x)$ por

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x).$$

Observemos que, para $x \neq a$,

$$\frac{E_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2},$$

e, utilizando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{E_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f'(x) - f'(a)}{(x-a)} - f''(a) \right] = 0.$$

Ou seja, quando $x \rightarrow a$, o erro $E_2(x)$ tende a zero *mais rapidamente* que $(x-a)^2$. Definimos o **polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x)$ ao redor de a** por

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Novamente, podemos provar que P_2 é o polinômio de grau no máximo 2 que melhor aproxima localmente $f(x)$ ao redor de a .

11.9.2. Polinômio de Taylor de ordem n

As aproximações de primeira e segunda ordem seguem um mesmo princípio: fazer o polinômio concordar com a função e suas derivadas no ponto de referência. Podemos repetir essa construção até uma ordem qualquer, desde que existam as derivadas necessárias.

Suponha que f tenha derivadas até a ordem n no ponto $x = 0$, em que $n > 1$. Encontraremos um polinômio

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

que concorda com f e suas primeiras n derivadas em 0. Há $n+1$ condições a serem satisfeitas, ou seja,

$$P_n(0) = f(0), \quad P'_n(0) = f'(0), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

A equação $P_n(0) = f(0)$ nos dá que $c_0 = f(0)$. Diferenciando, temos

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$$

e, assim, $P'_n(0) = c_1 = f'(0)$ e, logo, $c_1 = f'(0)$. Diferenciando novamente, temos

$$P''_n(x) = 2c_2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2}$$

e, assim, $P''_n(0) = 2c_2 = f''(0)$ e, logo, $c_2 = f''(0)/2$. Após diferenciar k vezes:

$$c_k = f^{(k)}(0)/k!$$

temos que tal polinômio terá a seguinte forma:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

O cálculo acima é o caso particular em que o centro da aproximação é a origem. A definição geral é a seguinte.

11.10 Definição

Suponha que f possua derivadas até a ordem n no ponto a . O polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

é denominado **polinômio de Taylor de ordem n de f centrado em a** . Quando $a = 0$, obtemos

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

chamado **polinômio de Maclaurin** de ordem n .

Por construção,

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Exemplo 11.66.

1. Determine o n -ésimo termo do polinômio de Taylor para $f(x) = e^x$.
2. Use $P_5(x)$ para aproximar o valor de e .

<

Solução.

1. Começamos tabelando as derivadas de e^x calculadas no ponto $x = 0$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \Rightarrow f''(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \end{array} \quad \text{Dessa forma, pela definição de Taylor,}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n. \end{aligned}$$

2. Da parte 1,

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5.$$

Para aproximar o valor de e , observe que $e = e^1 = f(1) \approx P_5(1)$. A avaliação é direta:

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \approx 2,71667.$$

O gráfico de $f(x) = e^x$ e $P_5(x)$ é mostrado na figura 11.39.

■

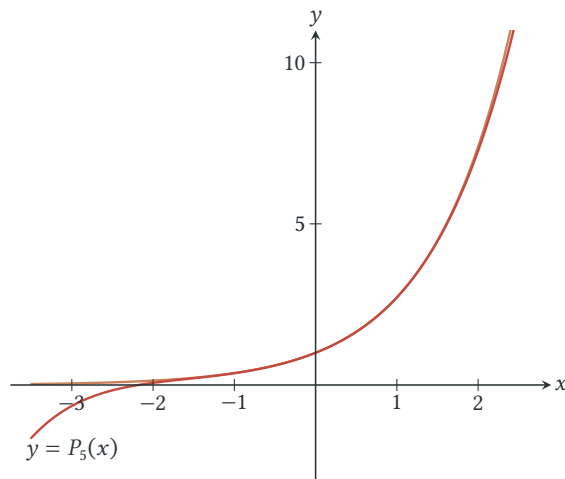


Figura 11.39. Gráfico de $f(x) = e^x$ e de seu polinômio de Taylor $P_5(x)$, de grau 5.

Exercícios

Ex. 11.42 Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de x_0

1. $\ln(x)$ em torno de 1
2. e^x em torno de 0
3. $\sin(x)$ em torno de 0
4. $\cos(x)$ em torno de 0
5. $\sinh(x)$ em torno de 0
6. $\cosh(x)$ em torno de 0
7. $\sqrt[3]{x}$ em torno de 1
8. $\sqrt{x}$ em torno de 4
9. $\frac{1}{1-x^2}$ em torno de 0

Para os exercícios seguintes, usaremos ainda sem demonstração a estimativa do resto

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M}{6} |x - a|^3,$$

sempre que $|f'''(t)| \leq M$ entre a e x . Essa estimativa será demonstrada adiante no Teorema do Resto de Lagrange.

Ex. 11.43 Usando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule o valor aproximado e avalie o erro:

1. $\ln(1,2)$
2. $\sqrt{3,8}$
3. $\sin(0,1)$
4. $\sin(\pi/25)$
5. $e^{0,003}$

Ex. 11.44 Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 de f em torno de x_0

1. $\ln(x)$ em torno de 1
2. e^x em torno de 0
3. $\sin(x)$ em torno de 0
4. $\cos(x)$ em torno de 0
5. $\sinh(x)$ em torno de 0
6. $\cosh(x)$ em torno de 0
7. $\sqrt[3]{x}$ em torno de 1

8. $\sqrt{x}$ em torno de 4

Ex. 11.46 Usando polinômios de Taylor, calcule $\cos(1)$ com erro em módulo inferior a 10^{-4}

9. $(1+x)^\alpha$ em torno de 0

Ex. 11.47 Use o polinômio de Taylor de ordem 4 de $\cos(2x)$ para calcular o valor exato do limite

Ex. 11.45 Quantos termos do polinômio de Taylor são necessários para aproximar e com erro inferior a 10^{-5} ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2}$$

Exemplo 11.67.

1. Ache o n -ésimo termo do polinômio de Taylor de $y = \ln x$ em $x = 1$.
2. Use $P_6(x)$ para aproximar o valor de $\ln 1,5$.
3. Use $P_6(x)$ para aproximar o valor de $\ln 2$.

<

Solução.

1. Começamos tabelando a derivada de $\ln x$ em $x = 1$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & \Rightarrow f(1) = 0 \\ f'(x) = 1/x & \Rightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) = -1/x^2 & \Rightarrow f''(1) = -1 \\ f'''(x) = 2/x^3 & \Rightarrow f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -6/x^4 & \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = & \Rightarrow f^{(n)}(1) = \\ \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} & (-1)^{n+1}(n-1)! \end{array} \quad \text{Pela definição 11.10, temos}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n. \end{aligned}$$

2. Assim, $P_6(x)$ é dado por

$$\begin{aligned} P_6(x) &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \\ &\quad - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6. \end{aligned}$$

E desta forma

$$\begin{aligned} P_6(1,5) &= (1,5 - 1) - \frac{1}{2}(1,5 - 1)^2 + \frac{1}{3}(1,5 - 1)^3 - \frac{1}{4}(1,5 - 1)^4 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{5}(1,5 - 1)^5 - \frac{1}{6}(1,5 - 1)^6 \\ &= \frac{259}{640} \\ &\approx 0,404688. \end{aligned}$$

Esta é uma boa aproximação, já que $\ln 1,5 \approx 0,4055$. A figura 11.40 mostra o gráfico de $y = \ln x$ e $y = P_6(x)$.

3. Agora aproximaremos $\ln 2$ por $P_6(2)$:

$$\begin{aligned} P_6(2) &= (2 - 1) - \frac{1}{2}(2 - 1)^2 + \frac{1}{3}(2 - 1)^3 - \frac{1}{4}(2 - 1)^4 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{5}(2 - 1)^5 - \frac{1}{6}(2 - 1)^6 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{37}{60} \\ &\approx 0,616667. \end{aligned}$$

Essa aproximação tem precisão limitada: uma calculadora mostra que $\ln 2 \approx 0,693147$. O gráfico na Figura 11.40 mostra que $P_6(x)$ fornece aproximações menos precisas de $\ln x$ quando x fica próximo de 0 ou 2. O polinômio de ordem 20 também pode fornecer aproximações pouco precisas quando x ultrapassa 2, como mostra a Figura 11.41. Para cada $x > 2$ fixo, os termos $(x - 1)^n/n$ não tendem a zero; por isso, aumentar a ordem indefinidamente não produz convergência para $\ln x$. As estimativas de resto a seguir quantificam o erro de cada aproximação finita.

■

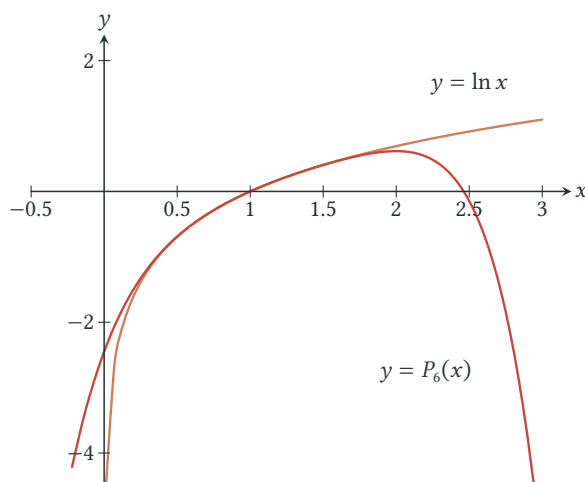


Figura 11.40. O polinômio de Taylor de ordem 6 aproxima $\ln x$ perto do centro $x = 1$.

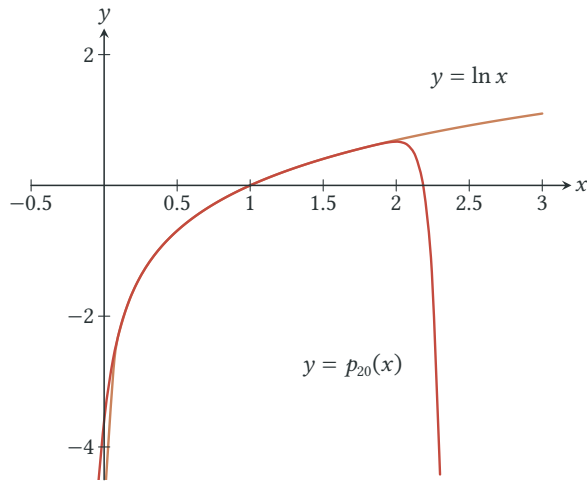


Figura 11.41. Mesmo em ordem 20, o polinômio centrado em $x = 1$ aproxima $\ln x$ apenas dentro de seu intervalo de convergência.

Para entendermos por que a aproximação acima falha, precisamos entender a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor. Para esse fim, definimos o erro como

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

sendo $f(x)$ a função dada e $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de grau n ao redor de a . A fórmula de Taylor com resto de Lagrange quantifica esse erro.

11.68 Teorema Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Seja f uma função $(n + 1)$ vezes diferenciável em um intervalo aberto I que contém a . Para cada $x \in I$, $x \neq a$, existe um ponto ξ estritamente entre a e x tal que

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Em particular, se $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ no segmento entre a e x , então

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Para $x = a$, o erro é zero.

Exemplo 11.69.

Use o Teorema 11.68 para estimar o erro cometido ao aproximar $\ln 1.5$ e $\ln 2$ por $P_6(x)$, o polinômio de Taylor de grau 6 de $f(x) = \ln x$ centrado em $x = 1$, como calculado no Exemplo 11.67.

◁

Solução. A derivada de ordem 7 de $f(t) = \ln t$ é $f^{(7)}(t) = 6!/t^7$, positiva para $t > 0$. Para as duas avaliações, o segmento entre o centro $a = 1$ e o ponto considerado está contido em $[1, 2]$. Nesse segmento, $0 < f^{(7)}(t) \leq 6! = 720$. Podemos usar esse limite diretamente, sem procurar um máximo em um intervalo aberto.

1. Para $x = 1,5$, o Teorema 11.68 fornece

$$\begin{aligned} 0 < E_6(1,5) &\leq \frac{720}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ &= \frac{1}{896} < 0,001117. \end{aligned}$$

Como $P_6(1,5) = 0,4046875$ e $\ln(1,5) \approx 0,4054651081$, o erro real é aproximadamente 0,0007776081, menor que o limite estimado. O sinal do resto também mostra que o polinômio subestima o logaritmo nesse ponto.

2. Para $x = 2$, obtemos

$$0 < E_6(2) \leq \frac{720}{7!} = \frac{1}{7} \approx 0,142857.$$

Como $P_6(2) = 37/60 \approx 0,616667$, a estimativa garante

$$\frac{37}{60} < \ln 2 \leq \frac{37}{60} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420}.$$

O erro real é aproximadamente 0,0764805. A estimativa é menos precisa que a anterior: embora a derivada tenha o mesmo limite superior, a distância ao centro aumentou de $1/2$ para 1, e aparece elevada à sétima potência na fórmula do resto. ■

Exemplo 11.70.

Quantos termos do polinômio de Taylor são necessários para aproximar e com um erro inferior a 10^{-5} ?

◁

Solução. Queremos que $E_n(1) < 10^{-5}$. Logo, basta tomar n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. O menor grau que satisfaz essa estimativa é $n = 8$. Portanto, bastam nove termos, de $1/0!$ a $1/8!$, pois $3/9! < 10^{-5}$. ■

11.9.3. ★ Irrracionalidade de e

O controle do erro de Taylor permite ir além do cálculo aproximado. Aplicado à função exponencial, ele fornece uma representação de e que usaremos para provar sua irracionalidade. Começaremos estabelecendo essa representação:

11.71 Teorema

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

Demonstração. Como vimos, o polinômio de Taylor de ordem n ao redor do zero da função $f(x) = e^x$ é $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. Observe que para $x \in [0, 1]$, $0 \leq e^x = f^{(n+1)}(x) \leq e < 3$. Pelo Teorema 11.68, o erro da aproximação é dado por

$$|e^1 - P_n(1)| = \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| = |E_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right|$$

para algum $x \in [0, 1]$. Logo,

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Finalmente, tomando o limite e aplicando o Teorema do Confronto obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

■

11.72 Teorema

O número e é irracional.

Demonstração. Suponha que e é um número racional. Então existem inteiros positivos a e b de tal forma que $e = a/b$. Defina o número

$$x = b! \left(e - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right)$$

Dessa forma, se e é racional, então x será um inteiro. Para verificarmos esse fato, substituímos $e = a/b$ nessa definição e obtemos

$$x = b! \left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^b \frac{b!}{n!}.$$

O primeiro termo é um número inteiro, e cada fração na soma é realmente um número inteiro porque $n \leq b$ para cada termo. Portanto, x é um número inteiro. Agora, demonstraremos que $0 < x < 1$. Primeiramente, provaremos que x é positivo; para isso, utilizaremos a representação de e em série obtida anteriormente, obtendo

$$\begin{aligned} x &= b! \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0 \end{aligned}$$

Agora demonstraremos que $x < 1$. Para todos os termos com $n \geq b + 1$ temos a estimativa

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+(n-b))} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}.$$

A igualdade ocorre para $n = b + 1$; a desigualdade é estrita para todo $n \geq b + 2$. Por isso, a desigualdade entre as somas será estrita. Alterando o índice de soma para $k = n - b$ e utilizando a fórmula da série geométrica, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} \\ &< \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} \\ &= \frac{1}{b+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} \right) \\ &= \frac{1}{b} \leq 1. \end{aligned}$$

Como não existe inteiro estritamente entre 0 e 1, chegamos a uma contradição e, assim, e deve ser irracional. ■

11.9.4. ★ Demonstração da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

As estimativas anteriores dependeram de uma expressão precisa para o resto de Taylor. Nesta subseção reunimos material técnico para a análise de aproximações de ordem superior; ela pode ser omitida em uma primeira leitura.

Antes da demonstração do resto de Lagrange, registramos uma versão de ordem n do Teorema do Valor Médio de Cauchy. Este é o Teorema do Valor Médio de Cauchy Generalizado, distinto do resultado de primeira ordem usado anteriormente na demonstração da regra de L'Hôpital. Ele organiza, em uma única identidade, a comparação entre restos de Taylor de duas funções.

11.73 Teorema Teorema do Valor Médio de Cauchy Generalizado

Sejam $a < b$, $n \geq 1$ inteiro e f, g funções n vezes diferenciáveis em (a, b) , com $f^{(k)}$ e $g^{(k)}$ contínuas em $[a, b]$ para $k = 0, \dots, n-1$. Nos extremos, as derivadas são entendidas lateralmente. Suponha $c \in [a, b]$. Então, para cada $x \in [a, b]$, com $x \neq c$, existe x_1 entre c e x tal que

$$\begin{aligned} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \right) g^{(n)}(x_1) \\ = f^{(n)}(x_1) \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha inicialmente $x > c$. Com x fixo, considere

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

para cada $t \in [c, x]$. Então F e G são contínuas em $[c, x]$ e deriváveis em (c, x) . Pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy,

$$F'(x_1)[G(x) - G(c)] = G'(x_1)[F(x) - F(c)]$$

para $x_1 \in (c, x)$. Logo

$$F'(x_1)[g(x) - G(c)] = G'(x_1)[f(x) - F(c)],$$

pois $F(x) = f(x)$ e $G(x) = g(x)$. Para tornar visível o telescopamento, derivamos:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right] \\ &= \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

Substituindo $t = x_1$ e cancelando o fator não nulo $(x - x_1)^{n-1}/(n-1)!$, obtemos a fórmula desejada. Se $x < c$, aplicamos Cauchy a F e G em $[x, c]$; a inversão dos extremos troca o sinal das duas diferenças, e o mesmo cancelamento fornece a identidade. Para $n = 1$, as somas vazias valem zero. ■

Demonstramos agora a fórmula enunciada no Teorema 11.68.

Demonstração. Fixe $x \neq a$ e defina

$$\phi(t) = f(t) - P_n(t) - E_n(x) \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{n+1}.$$

Temos $\phi(x) = 0$ e, como P_n concorda com f e suas primeiras n derivadas em a ,

$$\phi(a) = \phi'(a) = \dots = \phi^{(n)}(a) = 0.$$

Rolle aplicado entre a e x fornece c_1 estritamente entre esses pontos, com $\phi'(c_1) = 0$. Como também $\phi'(a) = 0$, uma nova aplicação, agora a ϕ' , fornece c_2 entre a e c_1 , com $\phi''(c_2) = 0$. Repetindo o argumento, usando $\phi^{(j)}(a) = 0$ em cada etapa, obtemos c_{n+1} entre a e x , com $\phi^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. Cada aplicação é válida porque a derivada da etapa é contínua no segmento e diferenciável no interior. Tome $\xi = c_{n+1}$. Portanto,

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)! E_n(x)}{(x-a)^{n+1}},$$

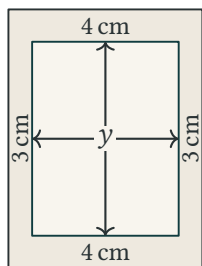
de onde segue a fórmula desejada. ■

Exercícios

Ex. 11.48 Determine intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade e pontos de inflexão de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$. Use essas informações para fazer um esboço qualitativo.

Ex. 11.49 Encontre máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x + 4/x$ no intervalo fechado $[1/2, 6]$. Explique por que os extremos também exigem a verificação dos extremos do intervalo.

Ex. 11.50 Um cartaz deve ter área impressa de 432 cm^2 , margens laterais de 3 cm e margens superior e inferior de 4 cm. Determine as dimensões que minimizam a área total de papel.



Ex. 11.51 A receita $R(q) = 120q - 0,4q^2$ e o custo $C(q) = 18q + 900$ estão em reais, para $q \geq 0$ unidades. Determine a produção que maximiza o lucro e o lucro máximo.

Ex. 11.52 Use a regra de L'Hôpital, quando aplicável, para calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Ex. 11.53 Um cabo de fibra tem a temperatura, em graus Celsius, $T(x) = 20 + 7xe^{-x/4}$, onde $x \geq 0$ está em metros a partir de um conector. Localize o ponto de maior temperatura e interprete o comportamento para valores grandes de x .

Ex. 11.54 Obtenha o polinômio de Taylor de grau 2 de $\ln x$ centrado em $x = 1$ e use-o para aproximar $\ln(1,06)$.

Ex. 11.55 Para $f(x) = x^2e^{-x}$, calcule $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ e $f^{(3)}(0)$ e escreva o polinômio de Taylor de grau 3 em torno de 0.

Ex. 11.56 Explique por que uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e com derivada positiva em todo (a, b) não pode assumir o mesmo valor em dois pontos diferentes do intervalo.

Parte IV.

Intégrais

12

Integral indefinida

Neste capítulo

12.1 Integral indefinida 356

12.2 Integração por substituição 362

12.3 Integração por partes 372

12.4 Equações diferenciais e problemas de valor inicial 380

A vida deve ser compreendida para trás. [...] Mas deve ser vivida para a frente.

Søren Kierkegaard, *Diários*

A derivada associa a uma função sua taxa de variação. O problema inverso consiste em recuperar uma função a partir de sua derivada. Se conhecemos a velocidade, por exemplo, procuramos reconstruir a posição; se conhecemos uma taxa de crescimento, procuramos a grandeza acumulada. Esse problema conduz às antiderivadas. As regras de derivação, lidas no sentido inverso, fornecem as primeiras fórmulas de integração e explicam por que a resposta envolve uma família de funções.

12.1. Integral indefinida

Dada uma função f , procuramos uma função F cuja derivada seja f , isto é,

$$F'(x) = f(x). \quad (12.1)$$

A equação 12.1 é a forma mais simples de uma equação diferencial. Por exemplo, $y' = 2x$ pergunta quais funções têm derivada $2x$. Tanto x^2 quanto $x^2 + 1$ são soluções e, de modo geral, $x^2 + C$ também é. A constante aparece porque a derivação elimina constantes; inverter esse processo recupera, portanto, uma família inteira de funções.

12.1 Definição

Uma função F definida num intervalo aberto I é denominada uma **primitiva** ou **antiderivada** de f se

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$. O conjunto de todas as primitivas de $f(x)$ é denominado **integral indefinida** de f , e será denotado por

$$\int f(x) dx.$$

Se F for uma primitiva de f , então, por definição, a função F é derivável e, portanto, contínua. Conhecendo uma antiderivada de f , podemos encontrar outras simplesmente adicionando uma constante. O Corolário 11.18, demonstrado a partir do Teorema do Valor Médio, mostra que, em um intervalo, essa é a forma de obter todas elas. Usando a Definição 12.1, se F é uma primitiva de f em um intervalo, todas as primitivas de f nesse intervalo são dadas por

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

A descrição é intervalar: se o domínio de f tem mais de uma componente, a constante pode ser escolhida independentemente em cada uma delas.

Exemplo 12.1.

Calcule $\int x^2 dx$.

Solução. Pela regra da potência,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

A verificação é imediata: $(x^3/3 + C)' = x^2$. ■

12.1.1. Regras básicas de integração

Uma fórmula de integração indefinida pode ser lida como uma fórmula de derivação invertida. A derivação continua sendo o critério de verificação: uma função F é primitiva de f precisamente quando $F' = f$. As regras básicas a seguir são obtidas dessa maneira.

Uma família de funções

A integral indefinida reúne funções cuja derivada é o integrando. Não representa uma área nem um número obtido entre dois extremos. Se F é uma primitiva em um intervalo, a notação $F + C$ descreve todas as primitivas nesse intervalo.

A constante de integração

Se $F' = G' = f$, então $(F - G)' = 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, uma função com derivada nula em um intervalo é constante; portanto, $F - G = C$ e $F = G + C$.

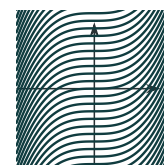


Figura 12.1. Antiderivadas de x^2 são da forma $\frac{x^3}{3} + C$

Constantes em intervalos distintos

A diferença entre duas primitivas é constante em cada intervalo de definição. Para $1/x$, podemos usar $\ln|x| + C_-$ em $x < 0$ e $\ln|x| + C_+$ em $x > 0$. Não há razão para exigir $C_- = C_+$, pois os intervalos estão

12.2 Proposição

Para $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$, e $x > 0$, vale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Demonstração. Levando em consideração que a regra de derivação de potências consiste em:

- Diminuir a potência de x^n por 1 obtendo x^{n-1} .
- Multiplicar x^{n-1} pela potência inicial n obtendo nx^{n-1} .

Revertendo o processo passo a passo, temos:

- Aumentar a potência de x^n por 1 obtendo x^{n+1} .
- Dividir x^{n+1} pelo novo expoente $n+1$, obtendo $x^{n+1}/(n+1)$.

Esse argumento sugere que

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

De fato, verificando

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right] = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} = x^n$$

■

De maneira similar, as regras de derivação que obtivemos nos capítulos anteriores podem ser convertidas em integrais indefinidas:

12.3 Proposição Tabela de Integrais Indefinidas

As fórmulas valem em intervalos nos quais os integrandos estão definidos. Na regra da potência, $n \neq -1$; para expoentes reais arbitrários, tomamos $x > 0$. Na fórmula exponencial, $a > 0$ e $a \neq 1$; nas demais fórmulas que contêm o parâmetro a , supomos $a > 0$. A constante pode ser escolhida independentemente em cada componente do domínio.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ | 9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ |
| 2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$ | 10. $\int \cotg x dx = \ln \sen x + C.$ |
| 3. $\int \sen x dx = -\cos x + C.$ | 11. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C.$ |
| 4. $\int \cos x dx = \sen x + C.$ | 12. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C.$ |
| 5. $\int \sec^2 x dx = \tg x + C.$ | 13. $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C.$ |
| 6. $\int \frac{1}{\sen^2 x} dx = -\cotg x + C.$ | 14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(x) + C.$ |
| 7. $\int \tg x dx = -\ln \cos x + C.$ | 15. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C.$ |
| 8. $\int e^x dx = e^x + C.$ | 16. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$
$= \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C.$ |

Exemplo 12.4.

Calcule as seguintes antiderivadas. $\boxed{a} \int 1 dx$ $\boxed{b} \int x^4 dx$ $\boxed{c} \int \frac{1}{x^5} dx$ $\boxed{d} \int \sqrt{x} dx$

<

Solução. Pela regra da potência,

- $\int 1 dx = x + C.$
- $\int x^4 dx = x^5/5 + C.$
- $\int x^{-5} dx = -1/(4x^4) + C$, em cada lado de 0.
- $\int \sqrt{x} dx = (2/3)x^{3/2} + C$, para $x > 0$; a expressão estende-se continuamente a 0. ■

Das propriedades da derivada 9.16 e 9.18, obtemos as seguintes propriedades da integral indefinida.

12.5 Teorema Linearidade da integral indefinida

Se F_1 e F_2 são primitivas de f_1 e f_2 em um mesmo intervalo e $a \in \mathbb{R}$, então $F_1 + F_2$ é uma primitiva de $f_1 + f_2$ e aF_1 é uma primitiva de af_1 . Em particular,

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) \, dx = F_1(x) + F_2(x) + C$$

e

$$\int af_1(x) \, dx = aF_1(x) + C.$$

Demonstração. Pela linearidade da derivada,

$$(F_1 + F_2)' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2 \quad \text{e} \quad (aF_1)' = aF_1' = af_1.$$

Logo, as expressões exibidas descrevem as famílias de primitivas correspondentes. Quando $a = 0$, a segunda família é precisamente a família das funções constantes. ■

Exemplo 12.6.

Calcule a antiderivada de $f(x) = 3x^4 - \sin x + 6\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

<

Solução. Para $x > 0$, escrevemos

$$\frac{6}{\sqrt{2x}} = \frac{6}{\sqrt{2}} x^{-1/2}.$$

Assim, pela linearidade e pela regra da potência,

$$\begin{aligned} \int \left(3x^4 - \sin x + \frac{6}{\sqrt{2x}} \right) dx &= 3 \int x^4 \, dx - \int \sin x \, dx + \frac{6}{\sqrt{2}} \int x^{-1/2} \, dx \\ &= \frac{3}{5} x^5 + \cos x + 6\sqrt{2x} + C. \end{aligned}$$

De fato, $(6\sqrt{2x})' = 6/\sqrt{2x}$. ■

Exemplo 12.7.

Calcule a antiderivada de $f(x) = x^{2/3} - 3e^x + 6\frac{1}{x}$.

<

Solução. Em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$,

$$\int \left(x^{2/3} - 3e^x + \frac{6}{x} \right) dx = \frac{3}{5}x^{5/3} - 3e^x + 6 \ln |x| + C.$$

As potências com denominador 3 são entendidas por meio da raiz cúbica real. ■

12.8 Proposição

Se F é uma primitiva de f e $a \neq 0$, então, em cada intervalo no qual $ax + b$ pertence ao domínio de f ,

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Demonstração. Derivando a expressão do lado direito,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}F(ax + b) + C \right)' &= \frac{1}{a}F'(ax + b)(ax + b)' \\ &= \frac{1}{a}f(ax + b)a \\ &= f(ax + b). \end{aligned}$$

Portanto, $F(ax + b)/a$ é uma primitiva de $f(ax + b)$. ■

Exemplo 12.9.

Calcule a antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

<

Solução. Utilizando a Proposição 12.8 temos:

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(|x+1|) + C$$

■

Exemplo 12.10.

Calcule a antiderivada de $f(x) = \cos(2x + 1)$.

<

Solução. Utilizando a Proposição 12.8 temos:

$$\int \cos(2x + 1) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) + C$$

■

Exercícios

Ex. 12.1 Calcule as seguintes antiderivadas:

1. $\int x \, dx$

2. $\int (3x + 1) \, dx$

3. $\int x^n \, dx$

4. $\int (x^2 + x + 1) \, dx$

5. $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

6. $\int \left(x + \frac{1}{x^3}\right) \, dx$

7. $\int \sqrt[3]{x} \, dx$

8. $\int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \cos(x)\right) \, dx$

9. $\int e^{4x} \, dx$

10. $\int \cos(3x) \, dx$

11. $\int (x + 3e^{5x} + \cos(2x)) \, dx$

12. $\int (1 - \cos 4x + \sin(x/7)) \, dx$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

14. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$

15. $\int 3^x \, dx$

16. $\int \sec^2(2x) \, dx$

17. $\int \sin^2(x) \, dx$

Ex. 12.2 Neste problema, investigamos por que

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$$

1. Qual o domínio de $y = \ln x$?

2. Encontre $\frac{d}{dx}(\ln x)$.

3. Qual o domínio de $y = \ln(-x)$?

4. Encontre $\frac{d}{dx}(\ln(-x))$.

5. Você deve ter percebido que $1/x$ tem dois tipos de antiderivadas, dependendo se $x > 0$ ou $x < 0$. Em uma expressão, forneça uma fórmula para $\int \frac{1}{x} \, dx$ que leve em conta esses diferentes domínios e explique sua resposta.

12.2. Integração por substituição

A integração por substituição é a forma inversa da regra da cadeia. Quando o integrando contém uma composição acompanhada, a menos de um fator constante, pela derivada da função interna, uma mudança de variável pode reduzir a integral a uma forma elementar.

Suponha que $F(x)$ seja uma antiderivada de $f(x)$ e que $g(x)$ seja uma função diferen-

A mudança de variável completa

A escolha $u = g(x)$ vem acompanhada de $du = g'(x) \, dx$. A nova integral deve usar apenas u como variável, sem fatores dependentes de x ainda por transformar. Na integral indefinida, a resposta volta à variável original pela substituição $u = g(x)$.

ciável. Logo, $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, já que

$$\begin{aligned}(F(g(x)))' &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

Dessa forma, se F é uma primitiva de f e g tem valores no domínio de f , então

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Escrevendo $u = g(x)$ e observando que $\int f(u) du = F(u) + C$, temos que

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

A fórmula acima é conhecida como método de substituição.

12.11 Teorema Método de Substituição

Se F é uma primitiva de f em um intervalo J e $g : I \rightarrow J$ é diferenciável em um intervalo aberto I , então

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du,$$

onde $u = g(x)$.

Exercícios

Ex. 12.3 Retome os itens 9, 10, 11, 12 e 16 do primeiro bloco de exercícios deste capítulo. Em cada par-
cela composta, identifique a mudança de variável linear implícita e confira a primitiva já obtida por derivação.

Exemplo 12.12 — Integração por Substituição.

Calcule $\int x \sin(x^2 + 5) dx$.

◁

Solução. Sabendo que a técnica de substituição está intrinsecamente relacionada à regra da cadeia, escolhemos u como a função interna de $\sin(x^2 + 5)$. (Ressaltamos que essa nem sempre é uma boa escolha, mas muitas vezes é a melhor tentativa inicial.) Fazendo $u = x^2 + 5$, temos $du = 2x dx$. O integrando possui um termo $x dx$, mas não um termo da forma $2x dx$. Logo, dividimos ambos os lados da expressão por 2:

$$du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} du = x dx.$$

Agora substituímos

$$\begin{aligned}
 \int x \operatorname{sen}(x^2 + 5) \, dx &= \int \underbrace{\operatorname{sen}(x^2 + 5)}_u \underbrace{x \, dx}_{\frac{1}{2} du} \\
 &= \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \, du \\
 &= -\frac{1}{2} \cos u + C \quad (\text{trocando } u \text{ por } x^2 + 5) \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 5) + C.
 \end{aligned}$$

Logo, $\int x \operatorname{sen}(x^2 + 5) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 5) + C$. Podemos verificar a resolução calculando a derivada do lado direito. ■

Integração por Substituição

1. Escolha $u = g(x)$, geralmente, a “função interna” da função composta $f(g(x))$.
2. Calcule $du = g'(x) \, dx$.
3. Use a substituição $u = g(x)$ e $du = g'(x) \, dx$ para transformar a integral em uma expressão que envolva apenas u : $\int f(u) \, du$.
4. Calcule a integral resultante.
5. Substitua u por $g(x)$, de modo a expressar a solução final somente em termos de x .

Exemplo 12.13 — Integração por Substituição.

Calcule $\int x\sqrt{x+3} \, dx$.

◀

Solução. Nesse caso, após reconhecer a função composta, escolhemos $u = x + 3$. Dessa forma, $du = dx$. A troca de variável, porém, ainda não terminou: o fator x também precisa ser escrito em termos de u . Por isso, nesta etapa seria incorreto escrever

$$\int x\sqrt{x+3} \, dx \stackrel{?}{=} \int x\sqrt{u} \, du, \quad \text{pois o lado direito mistura } x \text{ e } u.$$

Como x depende de u , precisamos reescrever esse fator antes de integrar. Como

$u = x + 3$, temos $u - 3 = x$. Substituímos x por $u - 3$ e reescrevemos $\sqrt{u}$ como $u^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+3} \, dx &= \int (u-3)u^{\frac{1}{2}} \, du \\ &= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right) \, du \\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+3)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 12.14 — Integração por Substituição.

Calcule $\int (2x+2)e^{x^2+2x+1} \, dx$.

<

Solução. Após reconhecer a composição, escolhemos $u = x^2 + 2x + 1$. Logo, $\frac{du}{dx} = 2x + 2$. Pelo método de substituição, concluímos que

$$\int (2x+2)e^{x^2+2x+1} \, dx = \int e^u \, du = e^u + C = e^{x^2+2x+1} + C.$$

■

Exemplo 12.15 — Integração por Substituição.

Calcule $\int 15x^2\sqrt[5]{5x^3+7} \, dx$.

<

Solução. Fazendo a substituição $u = 5x^3 + 7$, $\frac{du}{dx} = 15x^2$, temos:

$$\int 15x^2\sqrt[5]{5x^3+7} \, dx = \int \sqrt[5]{u} \, du = \frac{5u^{6/5}}{6} + C = \frac{5(5x^3+7)^{6/5}}{6} + C.$$

■

Exemplo 12.16 — Integração por Substituição.

Calcule $\int x^2\sqrt{x+1} \, dx$.

<

Solução. Fazendo a substituição $u = x + 1$, temos $x = u - 1$ e $du = dx$. Então,

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{x+1} \, dx &= \int (u-1)^2 \sqrt{u} \, du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2} \, du \\ &= \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) \, du \\ &= \frac{2}{7} u^{7/2} - 2 \frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{7} (x+1)^{7/2} - \frac{4}{5} (x+1)^{5/2} + \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 12.17 — Integração por Substituição.

Calcule $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$.

<

Solução. Fazendo a substituição $t = \sin x$, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ e, assim, temos que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx &= \int \sqrt{t} \, dt \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} \sin^{3/2}(x) + C\end{aligned}$$

■

Exemplo 12.18 — Integração por Substituição.

Calcule $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$.

<

Solução. Observe que $(1+x^2)' = 2x$. Utilize a substituição $t = 1+x^2$. Logo, $\frac{dt}{dx} = 2x$, e temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

■

12.2.1. Integrais trigonométricas

Nas integrais trigonométricas, uma identidade pode revelar a substituição que a expressão original não deixava evidente. Os próximos exemplos combinam esses dois recursos; as estratégias serão retomadas e ampliadas nas seções 14.3 e 14.4.

Exemplo 12.19.

Calcule $\int \sin^3(x) \, dx$.

<

Solução. Observe que $\sin^3(x) = \sin^2(x) \sin x = (1 - \cos^2(x)) \sin x$. Utilize a substituição $t = \cos x$. Logo, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ e temos que

$$\begin{aligned} \int \sin^3(x) \, dx &= \int (1 - \cos^2(x)) \sin x \, dx \\ &= - \int (1 - t^2) \, dt \\ &= -t + \frac{1}{3}t^3 + C \\ &= -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3(x)\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos x + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 12.20.

Calcule $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

<

Solução. Como $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, tome $u = \cos x$, de modo que $du = -\sin x \, dx$. Então

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{du}{u} \\ &= -\ln |u| + C \\ &= -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Como $|\sec x| = 1/|\cos x|$, essa forma é equivalente a $\ln |\sec x| + C$.

■

Exemplo 12.21.

Calcule $\int \sec x \, dx$.

<

Solução. Uma transformação algébrica permite reconhecer a derivada de um logaritmo. Multiplicando o numerador e o denominador por $\sec x + \operatorname{tg} x$, que não se anula onde $\cos x \neq 0$ porque $(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x) = 1$, temos:

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx.$$

Fazendo a substituição $u = \sec x + \operatorname{tg} x$ e $du = (\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x) \, dx$. Temos

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

■

12.22 Proposição Integrais das funções Trigonométricas

- $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln |\sec u| + C$
- $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$
- $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C$
- $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln |\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

12.23 Observação

A forma $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln |\sec u| + C$ é a mesma que aparece na tabela como $-\ln |\cos u| + C$, pois $\sec u = 1/\cos u$ onde a tangente está definida.

Exemplo 12.24.

Calcule $\int x^2 \operatorname{cosec} x^3 \, dx$.

<

Solução. Faça $u = x^3$, de modo que $du = 3x^2 dx$. Então,

$$\int x^2 \operatorname{cosec}(x^3) dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{cosec} u du = \frac{1}{3} \ln |\operatorname{cosec}(x^3) - \cotg(x^3)| + C.$$

A igualdade vale em cada intervalo no qual $\operatorname{sen}(x^3) \neq 0$. ■

12.25 Proposição Integrais Envolvendo as Funções Trigonômétricas Inversas

$$\blacksquare \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsen u + C$$

$$\blacksquare \int \frac{1}{1+u^2} du = \operatorname{arctg} u + C$$

$$\blacksquare \int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} du = \operatorname{arcsec} u + C, \quad |u| > 1$$

Exemplo 12.26.

Calcule $\boxed{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ $\boxed{b} \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ $\boxed{c} \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$

<

Solução.

1. Com $u = 2x$, obtemos $\frac{1}{2} \arcsen(2x) + C$, para $|x| < 1/2$.
2. Com $u = 2x/3$, obtemos $\frac{1}{2} \arcsen(2x/3) + C$, para $|x| < 3/2$.
3. Com $u = e^x$, obtemos

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}) + C.$$

O argumento do logaritmo é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercícios

Ex. 12.4

1. $\int 4x^3(x^4 + 3)^6 dx$

2. $\int (6x + 2)(3x^2 + 2x - 4)^4 dx$

3. $\int x(x^2 + 4)^7 dx$

4. $\int (10x + 21)(5x^2 + 21x + 2)^4 dx$

5. $\int (6x^2 + 10x)(2x^3 + 5x^2 + 1)^7 dx$

6. $\int \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx$

7. $\int \operatorname{sen}(5 - 2x) \, dx$

8. $\int \operatorname{cosec}^2(3 - x) \, dx$

9. $\int \frac{1}{5x + 3} \, dx$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{3x + 1}} \, dx$

11. $\int \frac{x}{\sqrt{x + 5}} \, dx$

12. $\int \frac{x^2}{(x^3 + 5)^3} \, dx$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$

14. $\int \sec(3x) \, dx$

15. $\int \frac{x^4 - x^2}{\sqrt{x}} \, dx$

16. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

17. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5 + 3}} \, dx$

18. $\int \frac{\frac{1}{x} - 2}{x^2} \, dx$

19. $\int \frac{\ln(2x)}{x} \, dx$

20. $\int \cotg^2(x) \operatorname{cosec}^2(x) \, dx$

21. $\int \frac{1}{x + 8} \, dx$

22. $\int \frac{5}{2x + 9} \, dx$

23. $\int x \operatorname{sen}(x^2) \, dx$

24. $\int x^2 \sec^2(x^3 + 4) \, dx$

25. $\int \cotg^2(x) \, dx$

26. $\int \cos(x) \sqrt{\operatorname{sen}(x)} \, dx$

27. $\int 4x^3 \operatorname{sen}^2(x^4 + 1) \cos(x^4 + 1) \, dx$

28. $\int 2x \operatorname{tg}(x^2) \sec^2(x^2) \, dx$

29. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$

Ex. 12.5

1. $\int e^{4x+1} \, dx$

2. $\int x^3 e^{x^4} \, dx$

3. $\int (x - 2)e^{(x-2)^2} \, dx$

4. $\int \frac{e^x + 3}{e^x} \, dx$

5. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}} \, dx$

6. $\int 5^{2x} \, dx$

7. $\int 2^{3x} \, dx$

8. $\int \frac{\ln x}{4x} \, dx$

9. $\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, dx$

10. $\int \frac{\ln(x^5)}{x} \, dx$

$$11. \int \frac{1}{x \ln(x^3)} dx$$

$$12. \int \frac{x^2 + 5x + 2}{x} dx$$

$$13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{x} dx$$

$$14. \int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$$

$$15. \int \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 2} dx$$

$$16. \int \frac{2x^2 - 3x + 5}{x + 2} dx$$

$$17. \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx$$

$$18. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 12x + 2}{x^2 + 2x + 4} dx$$

$$19. \int \frac{8x + 24}{x^2 + 6x + 11} dx$$

$$20. \int \frac{18x + 30}{3x^2 + 10x + 21} dx$$

$$21. \int \frac{-x^3 + 10x^2 - 5x - 25}{x^2 - 5x + 10} dx$$

$$22. \int \frac{9}{x^2 + 9} dx$$

$$23. \int \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

$$24. \int \frac{12}{\sqrt{7 - x^2}} dx$$

$$25. \int \frac{3}{x\sqrt{x^2 - 16}} dx$$

$$26. \int \frac{7}{x\sqrt{x^2 - 25}} dx$$

$$27. \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$$

$$28. \int \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx$$

Ex. 12.6

$$1. \int \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^4}} dx$$

$$2. \int \frac{x}{x^4 + 16} dx$$

$$3. \int \frac{3}{9x^2 + 4} dx$$

$$4. \int \frac{1}{x\sqrt{9x^2 - 1}} dx$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{25 - 4x^2}} dx$$

$$6. \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13} dx$$

$$7. \int \frac{4}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} dx$$

$$8. \int \frac{5}{\sqrt{-x^2 + 10x + 11}} dx$$

$$9. \int \frac{7}{x^2 + 8x + 41} dx$$

$$10. \int \frac{5x - 3}{x^2 - 4x + 13} dx$$

$$11. \int \frac{9 - 3x}{x^2 + 8x + 41} dx$$

$$12. \int \frac{x^2 + 3x - 7}{x^2 - 6x + 15} dx$$

$$13. \int \frac{x^3}{x^2 + 16} dx$$

$$14. \int \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$15. \int \frac{\sin(x)}{1 + 4 \cos^2(x)} dx$$

$$16. \int \frac{\cos(x)}{1 + 4 \sin^2(x)} dx$$

$$17. \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x) - 1} dx$$

$$18. \int \frac{5x - 10}{\sqrt{x^2 - 4x - 1}} dx$$

$$19. \int \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 10}} dx$$

$$20. \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}} dx$$

$$21. \int \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$22. \int \cotg x dx. \text{ A dica é reescrever } \cotg x \text{ como } \cos x / \sin x, \text{ e fazer } u = \sin x.$$

$$23. \int \operatorname{cosec} x dx. \text{ A dica é multiplicar } \operatorname{cosec} x \text{ por } (\operatorname{cosec} x + \cotg x) / (\operatorname{cosec} x + \cotg x).$$

$$24. \int \cos^3(x) \sin(x) dx$$

$$25. \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$26. \int \sin(5x + 1) dx$$

12.3. Integração por partes

A regra do produto fornece uma segunda técnica fundamental. Escrita ao contrário, ela permite transferir a derivação de um fator para outro e substituir a integral original por uma nova integral. Essa é a integração por partes; sua eficiência depende da escolha dos fatores.

12.27 Teorema

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em (a, b) . Se existir uma antiderivada de $f'(x)g(x)$, então também existirá uma antiderivada de $f(x)g'(x)$ e valerá a **fórmula de integração por partes**:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad (12.2)$$

A escolha na integração por partes

O sinal negativo decorre de isolar uma das parcelas na regra do produto. A escolha de u e dv deve permitir obter v e tornar a nova integral mais acessível. Nem sempre du fica mais simples: aplicações sucessivas podem produzir uma equação para a integral original.

Demonstração. Para cada $x \in (a, b)$, a regra do produto fornece

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou, equivalentemente,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Como $f(x)g(x)$ é uma antiderivada de $[f(x)g(x)]'$, integrar essa identidade dá a Equação (12.2). ■

12.28 Notação

Se denotarmos $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos

$$du = f'(x) dx \quad \text{e} \quad dv = g'(x) dx.$$

e podemos reescrever a Equação (12.2) como

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exemplo 12.29 – Integração por Partes.

Calcule $\int x \cos x dx$.

<

Solução. A chave para a integração por partes é identificar uma parte do integrando como “ u ” e outra como “ dv ”. A prática ajudará a fazer boas escolhas; mais adiante, apresentaremos alguns princípios que auxiliam nesse processo. Nesse exemplo, escolheremos $u = x$, pois sua derivada é uma constante (e, assim, esperamos que a integral do lado direito seja mais simples); consequentemente, escolhemos $dv = \cos x dx$. Em geral, é útil fazer uma pequena tabela de valores, como abaixo. Inicialmente, conhecemos apenas u e dv , como mostrado no lado esquerdo da Figura 12.2; à direita, preenchemos os valores restantes. Se $u = x$, então $du = dx$. Como $dv = \cos x dx$, v é uma antiderivada de $\cos x$. Logo, podemos escolher $v = \sin x$.

$u = x$	$v = ?$	$\Rightarrow$	$u = x$	$v = \sin x$
$du = ?$	$dv = \cos x dx$		$du = dx$	$dv = \cos x dx$

Figura 12.2. Montando a Integração por Partes

Fazendo as substituições na integral por partes, temos

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx.$$

Integrando $\sin x$, temos $-\cos x + C$ e, assim,

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

■

O exemplo acima demonstra como a integração por partes funciona de modo geral. Tentamos identificar u e dv na integral dada, e o ponto crucial é que geralmente queremos escolhê-los de modo que du seja mais simples do que u e que v não seja muito mais complicado do que dv . Isso significa que a integral do lado direito da fórmula de integração por partes, $\int v du$, será mais simples do que o integrando original $\int u dv$. No exemplo acima, nós escolhemos $u = x$ e $dv = \cos x dx$. Então $du = dx$ era mais simples do que u e $v = \sin x$ não é mais complicado do que dv . Portanto, em vez de integrar $x \cos x dx$, poderíamos integrar $\sin x dx$, o que sabemos fazer.

Exemplo 12.30 — Integração por Partes.

Calcule $\int x e^x dx$.

<

Solução. Fazemos $u = x$ e $dv = e^x dx$. Logo $du = dx$ e $v = e^x$. Logo, utilizando integração por partes, temos

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx.$$

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

■

Exemplo 12.31 — Integração por Partes.

Calcule $\int x^2 \cos x dx$.

<

Solução. Faremos $u = x^2$ e, logo, $dv = \cos x dx$. Assim, $du = 2x dx$ e $v = \sin x$. A fórmula de integração por partes fornece então:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx.$$

Neste ponto, podemos constatar que a integral à direita é realmente mais simples do que aquela com que começamos, mas, para calculá-la, precisaremos fazer novamente uma integração por partes. Agora, escolhemos $u = 2x$ e $dv = \sin x dx$.

Como

$$\int 2x \sin x dx = -2x \cos x + 2 \int \cos x dx,$$

temos

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx.$$

Logo,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

■

Exemplo 12.32 — Integração por Partes.

Calcule $\int e^x \cos x dx$.

<

Reunindo as constantes

Em um mesmo intervalo, somas e diferenças de constantes arbitrárias podem ser reunidas em

Solução. Essa é uma integral clássica. Faremos $u = e^x$ e $dv = \cos x \, dx$. Então, $du = e^x \, dx$ e $v = \sin x$:

Neste caso, du não é mais simples do que u . Ainda assim, a repetição da integração por partes permite obter uma equação para a integral procurada. A primeira aplicação fornece

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

A integral à direita tem estrutura semelhante à inicial. Aplicando novamente a integração por partes, agora com $u = e^x$ e $dv = \sin x \, dx$, obtemos:

Na segunda aplicação,

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Substituindo essa expressão na primeira integração por partes,

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right) \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

O lado direito contém novamente $\int e^x \cos x \, dx$. Essa igualdade permite isolar a integral e determinar seu valor.

Adicionando $\int e^x \cos x \, dx$ a ambos os lados, obtemos, para uma escolha de primitivas,

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Dividindo ambos os lados por 2:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x).$$

Simplificando, temos

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

■

Exemplo 12.33 — Integração por Partes.

Calcule $\int \ln x \, dx$.

<

Solução. Até este ponto, obtivemos regras para integrar as funções trigonométricas familiares e e^x , mas ainda não apresentamos uma regra para integrar $\ln x$. Isso porque $\ln x$ não podia ser facilmente integrado com nenhuma das regras que apresentamos até aqui. A integração por partes também se aplica a um integrando escrito como produto de uma função pelo fator constante um. Escolhendo $u = \ln x$ e $dv = dx$, obtemos $du = (1/x) dx$ e $v = x$.

Logo, por integração por partes

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx.$$

Essa expressão pode ser simplificada para:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C.$$

■

Exemplo 12.34 — Integração por Partes.

Calcule $\int \arctg x \, dx$.

<

Solução. Utilizaremos o mesmo procedimento da integral anterior. Faça $u = \arctg x$ e $dv = dx$. Então, $du = 1/(1+x^2) dx$ e $v = x$. Por integração por partes, temos:

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

A última integral pode ser calculada por substituição. Para não reutilizar a variável já empregada na integração por partes, faça $w = 1+x^2$, de modo que $dw = 2x \, dx$.

Assim, $\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} \, dw$. Logo

$$\int \arctg x \, dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

■

Exercícios

Ex. 12.7 Em cada integral, escolha u e dv de modo que a nova integral seja mais simples. Não é necessário concluir o cálculo.

1. $\int x^3 e^x \, dx$

2. $\int x \cos(2x) \, dx$

3. $\int \ln x \, dx$

Ex. 12.8 Calcule $\int x \cos(2x) \, dx$.

Ex. 12.9 Calcule $\int x^2 e^x \, dx$ usando integração por partes duas vezes.

12.3.1. Fórmulas de recorrência

Às vezes, a integração por partes não encerra o cálculo, mas reduz um expoente e produz uma integral da mesma família. Ao registrar essa relação, obtemos uma fórmula de recorrência, que permite reduzir o problema sucessivamente até um caso conhecido.

12.35 Teorema Recorrências para potências de seno e cosseno

Para todo inteiro $n \geq 2$, valem as identidades entre primitivas:

1.
$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx;$$
2.
$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

As constantes de integração podem ser incorporadas à primitiva do segundo membro. Os casos iniciais são $\int 1 \, dx = x + C$, $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ e $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

Demonstração. Para o item 1., escreva $S_n = \int \sin^n x \, dx$ e integre por partes com $u = \sin^{n-1} x$ e $dv = \sin x \, dx$. Como $v = -\cos x$ e $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx$, obtemos

$$\begin{aligned} S_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n. \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Reunindo os termos em S_n e dividindo por n , chegamos à primeira recorrência.

Para o item 2., escreva $C_n = \int \cos^n x \, dx$ e tome $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x \, dx$. Então $v = \sin x$ e $du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx$, de modo que

$$\begin{aligned} C_n &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n. \end{aligned}$$

Agora usamos $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Isolando C_n , obtemos a segunda recorrência. ■

12.36 Proposição Recorrência para $x^n e^x$

Para todo inteiro $n \geq 1$,

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx.$$

Demonstração. Fazendo $u = x^n$ e $dv = e^x dx$, temos $du = nx^{n-1} dx$ e $v = e^x$. Aplicando a integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}\int x^n e^x dx &= x^n e^x - \int e^x nx^{n-1} dx \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.\end{aligned}$$

■

12.37 Proposição Recorrência para potências da secante

Para todo inteiro $n \geq 2$,

$$\int \sec^n x dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx.$$

Demonstração. A prova é por integração por partes:

$$\begin{aligned}\int \sec^n(x) dx &= \int \sec^2(x) \sec^{n-2}(x) dx \\ &= \operatorname{tg}(x) \sec^{n-2}(x) - \int \operatorname{tg}(x) \frac{d \sec^{n-2}(x)}{dx} dx.\end{aligned}$$

Como a derivada de $\sec^{n-2}(x) = (\sec(x))^{n-2}$ é $(n-2) \sec^{n-3}(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x)$, temos:

$$\int \sec^n(x) dx = \operatorname{tg}(x) \sec^{n-2}(x) - (n-2) \int \operatorname{tg}^2(x) \sec^{n-2}(x) dx$$

Agora, usando a identidade $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$, temos:

$$\begin{aligned}\int \sec^n x dx &= \operatorname{tg} x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^n x dx \\ &\quad + (n-2) \int \sec^{n-2} x dx.\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_n = \operatorname{tg}(x) \sec^{n-2}(x) - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

Adicionando $(n-2)I_n$ a ambos os lados, temos:

$$(n-1)I_n = \operatorname{tg}(x) \sec^{n-2}(x) + (n-2)I_{n-2}$$

Como $n \geq 2$, temos $n-1 \neq 0$; dividindo por $n-1$, obtemos a fórmula anunciada. ■

Exercícios

Ex. 12.10 Calcule as seguintes integrais indefinidas:

1. $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

2. $\int x e^{-x} \, dx$

3. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

4. $\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$

5. $\int x e^{x^2} \, dx$

6. $\int x^3 e^x \, dx$

7. $\int x e^{-2x} \, dx$

8. $\int e^{2x} \cos x \, dx$

9. $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) \, dx$

10. $\int e^{5x} \cos(5x) \, dx$

11. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

12. $\int \arcsen x \, dx$

13. $\int \operatorname{arctg}(2x) \, dx$

14. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$

15. $\int \arcsen x \, dx$

16. $\int x \cosh x \, dx$

17. $\int x \operatorname{senh} x \, dx$

18. $\int x \ln x \, dx$

19. $\int (x-2) \ln x \, dx$

20. $\int x \ln(x-1) \, dx$

21. $\int x \ln(x^2) \, dx$

22. $\int x^2 \ln x \, dx$

23. $\int (\ln x)^2 \, dx$

24. $\int (\ln(x+1))^2 \, dx$

25. $\int x \sec^2 x \, dx$

26. $\int x \operatorname{cossec}^2 x \, dx$

Ex. 12.11

1. $\int x \sec^2 x \, dx$

2. $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$

3. $\int x \operatorname{cotg}^2 x \, dx$

4. $\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x \, dx$

Ex. 12.12 Calcule a integral indefinida depois de fazer uma substituição.

1. $\int \cos(\ln x) \, dx$

2. $\int \cos(\sqrt{x}) \, dx$

4. $\int e^{3\sqrt{x}} \, dx$

3. $\int \ln(\sqrt[3]{x}) \, dx$

5. $\int e^{-\ln x} \, dx$

Exercícios

Ex. 12.13 Encontre a família de primitivas de

$$6x^5 - \frac{4}{x^3} + 3 \cos x - 2e^x.$$

Diferencie a resposta para conferi-la.

Ex. 12.14 Determine a função $s(t)$ sabendo que $s'(t) = 3t^2 - 8t + 6$, $s(0) = 14$. Interprete a constante de integração no contexto de posição.

Ex. 12.15 Calcule $\int x\sqrt{5-x^2} \, dx$ por substituição e explicita a escolha de variável nova.

Ex. 12.16 Calcule $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ sem usar uma tabela de integrais. Indique a identidade e a substituição empregadas.

Ex. 12.17 A taxa de entrada de água num reservatório é $r(t) = 40 + 12 \sin(\pi t/6)$ L/min. Determine uma expressão para a quantidade acumulada após t minutos se havia 250 L inicialmente.

Ex. 12.18 Use integração por partes para calcular $\int x \ln(x+1) \, dx$. Justifique a escolha de u e dv .

Ex. 12.19 Encontre uma fórmula de recorrência para $K_n = \int x^n e^{2x} \, dx$, $n \geq 1$, e use-a para obter K_2 .

Ex. 12.20 Dois estudantes propõem expressões diferentes como primitivas de um mesmo integrando. Formule um teste, baseado em derivadas, que permita decidir se ambas estão corretas e, em caso afirmativo, se são equivalentes.

12.4. Equações diferenciais e problemas de valor inicial

Em muitos problemas, a informação disponível não é a própria função, mas sua taxa de variação. Antiderivar significa, nesse contexto, reconstruir uma função a partir de sua derivada.

12.2 Definição

Uma **equação diferencial** é uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. Neste capítulo, consideraremos apenas o caso mais simples,

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

em que f é conhecida e a função y deve ser determinada.

O papel da condição inicial

Para $y' = f(x)$, as soluções em um intervalo têm a forma $y = F(x) + C$, quando $F' = f$. A condição $y(x_0) = y_0$ determina $C = y_0 - F(x_0)$. Ela fixa a posição de um gráfico dentro da família de translações verticais.

Resolver essa equação significa encontrar as funções cuja derivada é f . Se F é uma antiderivada de f em um intervalo, então

$$y(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

é uma solução. Reciprocamente, todas as soluções nesse intervalo são obtidas dessa forma. Assim, uma equação diferencial determina, em geral, uma família de curvas, e não uma única curva. Por exemplo, as soluções de $y'(x) = 3x^2$ são

$$y(x) = x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Os diferentes valores de C correspondem às translações verticais do gráfico de $y = x^3$.

Para selecionar uma curva dessa família, podemos prescrever o valor da função em determinado ponto. Uma condição da forma

$$y(x_0) = y_0$$

é chamada de **condição inicial**. A equação diferencial acompanhada dessa condição constitui um **problema de valor inicial**, ou simplesmente um PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Se F é uma antiderivada de f , a condição inicial exige que

$$F(x_0) + C = y_0.$$

Portanto, $C = y_0 - F(x_0)$ e, neste caso simples, o PVI possui a única solução

$$y(x) = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

Geometricamente, entre todas as curvas da família $y = F(x) + C$, a condição inicial seleciona aquela que passa pelo ponto (x_0, y_0) .

Exemplo 12.38.

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 2x + 3, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

◁

Solução. Integrando a equação diferencial, obtemos

$$y(x) = x^2 + 3x + C.$$

Impor $y(1) = 2$ determina a constante:

$$2 = y(1) = 1 + 3 + C,$$

de modo que $C = -2$. A solução do PVI é, portanto,

$$y(x) = x^2 + 3x - 2.$$

■

Nos exemplos anteriores, as antiderivadas foram obtidas diretamente das regras básicas. O procedimento não se altera quando o cálculo exige uma técnica de integração: primeiro determinamos a família de soluções e, em seguida, usamos a condição inicial para encontrar a constante.

Exemplo 12.39.

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 2x \cos(x^2), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

<

Solução. Para calcular a antiderivada, fazemos

$$u = x^2, \quad du = 2x \, dx.$$

Assim,

$$y(x) = \int 2x \cos(x^2) \, dx = \int \cos u \, du = \operatorname{sen}(x^2) + C.$$

Como $y(0) = 3$,

$$3 = \operatorname{sen} 0 + C = C.$$

Logo,

$$y(x) = \operatorname{sen}(x^2) + 3.$$

■

Exemplo 12.40.

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = xe^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

<

Solução. Aplicamos integração por partes, escolhendo

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = e^x \, dx,$$

temos $du = dx$ e $v = e^x$. Assim,

$$\begin{aligned} y(x) &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= (x-1)e^x + C. \end{aligned}$$

Agora, $y(0) = 1$ implica

$$1 = y(0) = -1 + C,$$

e, portanto, $C = 2$. A solução procurada é

$$y(x) = (x-1)e^x + 2.$$

■

Exemplo 12.41 — Da taxa ao total acumulado.

Um ajuste simplificado para os dados de um surto localizado descreve a taxa de aparecimento de novos casos por

$$N'(t) = 200te^{-t^2/25}, \quad t \geq 0,$$

em que $N(t)$ é o número acumulado de casos após t dias. Suponha que $N(0) = 0$. Determine $N(t)$, o número total de casos previsto pelo modelo e o instante em que a taxa de novos casos é máxima.

<

Solução. O número acumulado satisfaz o PVI

$$\begin{cases} N'(t) = 200te^{-t^2/25}, \\ N(0) = 0. \end{cases}$$

Usando

$$u = \frac{t^2}{25}, \quad du = \frac{2t}{25} dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned} N(t) &= \int 200te^{-t^2/25} dt \\ &= 2500 \int e^{-u} du \\ &= -2500e^{-u} + C \\ &= -2500e^{-t^2/25} + C. \end{aligned}$$

Como $N(0) = 0$, segue que $C = 2500$ e, portanto,

$$N(t) = 2500 \left(1 - e^{-t^2/25}\right).$$

No longo prazo, o modelo prevê

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 2500.$$

Já a taxa de novos casos é

$$r(t) = N'(t) = 200te^{-t^2/25}.$$

Derivando,

$$r'(t) = 200e^{-t^2/25} \left(1 - \frac{2t^2}{25}\right).$$

Como o fator exponencial é sempre positivo, $r'(t) = 0$ quando

$$t = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54.$$

A taxa cresce antes desse instante e decresce depois dele. Assim, o modelo prevê 2500 casos no total e incidência máxima aproximadamente três dias e meio após o início do período considerado. ■

12.4.1. Movimento retilíneo

Uma aplicação direta dessas ideias aparece na descrição do movimento. Considere uma partícula que se desloca ao longo de um eixo. Se $x(t)$ representa sua posição no instante t , então a velocidade e a aceleração são dadas por

$$v(t) = x'(t), \quad a(t) = v'(t).$$

Quando conhecemos a aceleração $a(t)$, a posição inicial $x(0) = x_0$ e a velocidade inicial $v(0) = v_0$, o movimento pode ser reconstruído resolvendo sucessivamente dois problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} v'(t) = a(t), \\ v(0) = v_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = v(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Primeiro determinamos a velocidade a partir da aceleração; em seguida, determinamos a posição a partir da velocidade.

Exemplo 12.42.

Uma partícula move-se ao longo de uma reta com aceleração

$$a(t) = 18t.$$

No instante $t = 0$, ela está em $x = 5$ e encontra-se em repouso. Determine sua velocidade e sua posição no instante t .

◀

Solução. Integrando $v'(t) = 18t$, obtemos

$$v(t) = 9t^2 + C_1.$$

O repouso inicial implica $C_1 = 0$; assim,

$$v(t) = 9t^2.$$

Em seguida, $x'(t) = 9t^2$ fornece

$$x(t) = 3t^3 + C_2.$$

De $x(0) = 5$, resulta $C_2 = 5$. Logo,

$$x(t) = 3t^3 + 5.$$

■

O exemplo anterior mostra o procedimento geral: a aceleração determina a velocidade, e a velocidade determina a posição. Quando a aceleração não depende do tempo, essas duas etapas levam a fórmulas especialmente simples.

12.4.2. Aceleração constante

Um caso particularmente importante ocorre quando a aceleração é constante:

$$a(t) = a.$$

Integrando $v'(t) = a$, temos

$$v(t) = at + C_1.$$

Usando a condição $v(0) = v_0$, obtemos

$$v(t) = at + v_0.$$

Antiderivando novamente e usando $x(0) = x_0$, encontramos

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0.$$

Portanto, para um movimento com aceleração constante,

$$\boxed{v(t) = at + v_0}, \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0}.$$

12.43 Observação

A hipótese de aceleração constante é essencial. Quando a varia com o tempo, é necessário antiderivar a função $a(t)$; não se pode simplesmente substituir uma aceleração variável nas fórmulas anteriores.

Exemplo 12.44.

Ao final de uma reta, um carro de Fórmula 1 percorre 250 m desde o início da frenagem até parar. Suponha, em um modelo simplificado, que sua aceleração tenha permanecido constante e igual a

$$-20 \text{ m/s}^2.$$

Qual era a velocidade do carro no instante em que os freios foram acionados?

<

Solução. Tomamos $t = 0$ no início da frenagem e $x_0 = 0$. Se v_0 é a velocidade procurada, então

$$v(t) = -20t + v_0, \quad x(t) = -10t^2 + v_0t.$$

Se $T > 0$ é o instante em que o carro para, temos $v(T) = 0$ e $x(T) = 250$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} -20T + v_0 &= 0, \\ -10T^2 + v_0T &= 250. \end{aligned}$$

Da primeira equação, $v_0 = 20T$. Substituindo esse valor na segunda,

$$10T^2 = 250,$$

de onde $T = 5$ s. Assim,

$$v_0 = 20 \cdot 5 = 100 \text{ m/s} = 360 \text{ km/h}.$$

Esse valor é uma previsão do modelo de desaceleração constante. Em uma frenagem real, a aceleração varia ao longo do tempo. ■

Exemplo 12.45.

Um elevador parte do repouso e percorre 12 m em 4 s com aceleração constante. Determine a aceleração e a velocidade ao final desse intervalo.

<

Solução. Tomamos $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$. Como $x(4) = 12$,

$$12 = \frac{1}{2}a(4)^2 = 8a,$$

de modo que $a = 1,5 \text{ m/s}^2$. Portanto,

$$v(4) = a \cdot 4 = 6 \text{ m/s}.$$

O exemplo mostra como uma informação de posição pode determinar a aceleração do modelo e, em seguida, a velocidade. ■



A queda livre fornece um caso físico importante de aceleração aproximadamente constante.

12.4.3. Movimento vertical sob a ação da gravidade

Perto da superfície da Terra, e desprezando a resistência do ar, a aceleração de um corpo em queda livre pode ser considerada constante. Seu módulo é

$$g \approx 9,8 \text{ m/s}^2,$$

e sua direção é vertical, apontando para baixo.

Se escolhermos o eixo y positivo para cima, então $a = -g$. As fórmulas do movimento com aceleração constante tornam-se

$$v(t) = -gt + v_0, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0.$$

Usando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$,

$$v(t) = -9,8t + v_0, \quad y(t) = -4,9t^2 + v_0t + y_0.$$

Exemplo 12.46.

Um dardo é lançado verticalmente para cima a partir do solo e retorna ao chão 10 s depois. Desprezando a resistência do ar, determine sua velocidade inicial e a altura máxima prevista pelo modelo.

◁

Solução. Como $y_0 = 0$,

$$y(t) = -4,9t^2 + v_0t.$$

O dardo retorna ao chão no instante $t = 10$, de modo que

$$0 = y(10) = -4,9(10)^2 + 10v_0.$$

Logo,

$$v_0 = 49 \text{ m/s}.$$

A altura máxima é atingida quando a velocidade se anula:

$$v(t) = -9,8t + 49 = 0.$$

Isso ocorre em $t = 5$ s. Portanto,

$$y_{\max} = y(5) = -4,9(5)^2 + 49(5) = 122,5 \text{ m}.$$

A resistência do ar reduziria a altura atingida; o valor obtido corresponde ao modelo idealizado de queda livre. ■



Exercícios

Ex. 12.21 Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

1. $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$ e $x(0) = 2$

2. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ e $x(0) = 0$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$

5. $\frac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

Ex. 12.22 Resolva os seguintes problemas de valores iniciais.

1. $f'(x) = 5x - 1$ e $f(0) = 3$

2. $f'(x) = \cos x$ e $f(0) = -2$

3. $f'(x) = 3e^x$ e $f(0) = 1$

4. $f'(x) = 6x^2 - 4x$ e $f(1) = 5$

5. $f'(x) = \cos \sec^2 x$ e $f(\pi/4) = 2$

6. $f'(x) = 3^x$ e $f(1) = 2$

7. $f''(x) = 8$ e $f'(0) = 3$, $f(0) = 5$

8. $f''(x) = 12x$ e $f'(0) = -2$, $f(0) = 4$

9. $f''(x) = 3e^x$ e $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$

10. $f''(\theta) = \cos \theta$ e $f'(0) = 1$, $f(0) = 3$

11. $f''(x) = 6x + 3^x - \sin x$ e $f'(0) = 4$, $f(0) = 0$

12. $f''(x) = 0$ e $f'(2) = 5$, $f(2) = 1$

13. $f'(x) = xe^{-x^2}$ e $f(0) = 1$

14. $f''(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$) e $f'(1) = 0$, $f(1) = 2$

Exercícios

Ex. 12.23 Um móvel parte de $x_0 = 4$ m com velocidade $v_0 = 3$ m/s e aceleração constante $a = 2$ m/s². Determine $v(5)$ e $x(5)$.

Ex. 12.24 Um carro reduz uniformemente sua velocidade de 30 m/s a 10 m/s em 5 s. Determine a aceleração e o deslocamento nesse intervalo.

Ex. 12.25 Uma pedra é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial 19,6 m/s a partir de uma altura de 5 m. Desprezando a resistência do ar, determine o instante em que atinge a altura máxima e essa altura.

13

Integração definida

A natureza ri das dificuldades da integração.

Pierre-Simon Laplace

A integral definida permite representar a acumulação de pequenas contribuições distribuídas ao longo de um intervalo. Sua construção parte de um problema distinto daquele das antiderivadas. O cálculo de áreas fornece o primeiro modelo dessa ideia; as somas de Riemann a transformam em uma definição precisa. O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a relação entre acumulação e antiderivação. A partir dessa relação, integrais definidas podem ser calculadas por primitivas, e os métodos de substituição e integração por partes se estendem às integrais definidas.

13.1. Áreas e somas de Riemann

Considere inicialmente uma função contínua e não negativa f em $[a, b]$, com $a < b$. Queremos determinar a área da região delimitada por seu gráfico, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

A região pode ser aproximada por uma coleção de retângulos, como na Figura 13.1. Ao refinar a divisão do intervalo, diminuem-se as larguras dos retângulos, e suas áreas fornecem aproximações sucessivas da área procurada. O limite dessas somas dará a definição precisa.

Neste capítulo

13.1 Áreas e somas de Riemann	389
13.2 Integral Definida	396
13.3 * Funções Contínuas são Integráveis	401
13.4 Propriedades da Integral	404
13.5 Teorema fundamental do cálculo	412
13.6 Deslocamento e espaço percorrido	422
13.7 * As funções logarítmica e exponencial revisitadas	426

Integral e área geométrica

Com os extremos em ordem crescente, as regiões acima do eixo contribuem positivamente para a integral, e as regiões abaixo contribuem negativamente. A área geométrica entre o gráfico e o eixo soma ambas positivamente: ela é obtida integrando $|f|$.

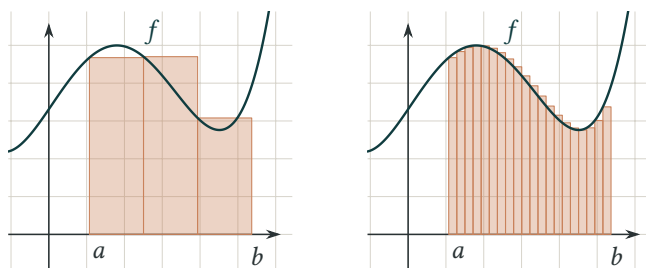


Figura 13.1. Ao refinar a partição, a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob o gráfico.

Considere a região abaixo do gráfico de $y = x^2$ em $[0, 1]$, apresentada na Figura 13.2. Como $x^2 \geq 0$ nesse intervalo, sua área geométrica coincide com a acumulação com sinal que, mais adiante, chamaremos de integral de x^2 entre 0 e 1 e denotaremos por $\int_0^1 x^2 dx$. Primeiro faremos aproximações. Dividimos $[0, 1]$ em quatro subintervalos de comprimento $1/4$: $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ e $[3/4, 1]$. Essa divisão é uma *partição* do intervalo. Em cada subintervalo, desenharemos um retângulo.



Figura 13.3. Partição do intervalo $[0, 1]$ em quatro subintervalos iguais.

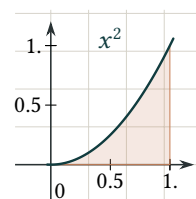
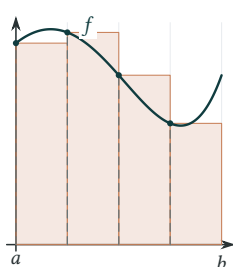


Figura 13.2. Região sob $f(x) = x^2$ em $[0, 1]$, cuja área será aproximada por somas de Riemann.

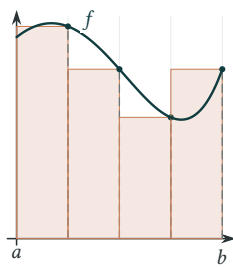
Três escolhas são usuais para determinar a altura de cada retângulo: o **extremo esquerdo**, o **extremo direito** e o **ponto médio** do subintervalo.

- **Extremo esquerdo.** A altura é o valor da função no extremo esquerdo de cada subintervalo.
- **Extremo direito.** A altura é o valor da função no extremo direito de cada subintervalo.
- **Ponto médio.** A altura é o valor da função no ponto médio de cada subintervalo.

Extremo esquerdo



Extremo direito



Ponto médio

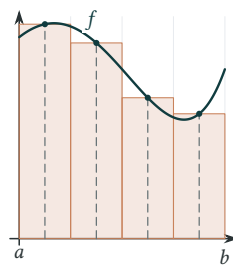


Figura 13.4. Aproximações pela esquerda, pela direita e pelo ponto médio. Os pontos sobre a curva identificam as amostras que determinam as alturas.

Exemplo 13.1.

Aproxime o valor de $\int_0^1 x^2 dx$ utilizando o extremo esquerdo, o extremo direito e o ponto médio, com 4 subintervalos de mesmo tamanho.

◁

Solução. Aproximação usando o extremo esquerdo. Dividiremos o intervalo $[0, 1]$ em 4 subintervalos. Na Figura 13.5, os pontos sobre a curva indicam os extremos esquerdos usados como amostras; as guias verticais mostram as alturas correspondentes.

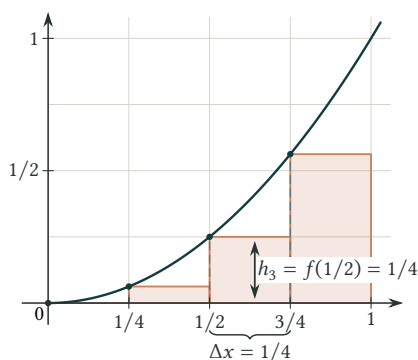


Figura 13.5. Aproximando $\int_0^1 x^2 dx$ usando o extremo esquerdo. A seta vertical destaca uma altura e a chave horizontal destaca a base Δx .

Observe que no primeiro subintervalo, $[0, 1/4]$, o retângulo tem altura $f(0) = 0$. Desta forma somando as áreas dos retângulos (base $\times$ altura) temos:

$$\begin{aligned} f(0) \cdot 1/4 + f(1/4) \cdot 1/4 + f(1/2) \cdot 1/4 + f(3/4) \cdot 1/4 = \\ 0 + 1/64 + 1/16 + 9/64 = 14/64. \end{aligned}$$

Aproximação usando o extremo direito.

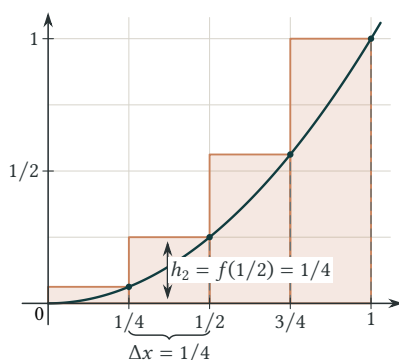


Figura 13.6. Aproximando $\int_0^1 x^2 dx$ usando o extremo direito. Cada altura é determinada pelo ponto marcado na extremidade direita.

Somando a área dos retângulos (altura $\times$ bases) temos:

$$f(1/4) \cdot 1/4 + f(1/2) \cdot 1/4 + f(3/4) \cdot 1/4 + f(1) \cdot 1/4 = \\ 1/64 + 1/16 + 9/64 + 1/4 = 30/64.$$

Aproximação usando o ponto médio. A Figura 13.7 mostra a aproximação de f usando o ponto médio.

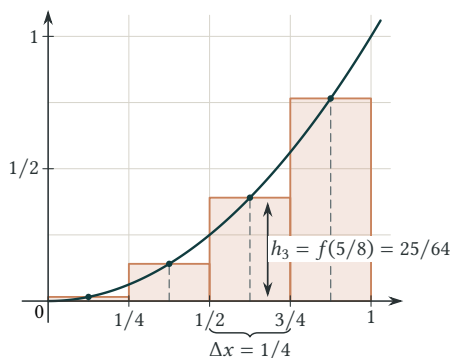


Figura 13.7. Aproximando $\int_0^1 x^2 dx$ usando o ponto médio. Cada guia passa pelo centro da base do respectivo retângulo.

Temos a aproximação de $\int_0^1 x^2 dx$ como:

$$f(1/8) \cdot 1/4 + f(3/8) \cdot 1/4 + f(5/8) \cdot 1/4 + f(7/8) \cdot 1/4 = \\ 1/256 + 9/256 + 25/256 + 49/256 = 21/64.$$

Como x^2 é crescente em $[0, 1]$, os extremos esquerdos produzem retângulos abaixo do gráfico e, portanto, subestimam a integral; os extremos direitos a superestimam. Neste exemplo, a soma dos pontos médios é a mais precisa das três: $21/64$ está mais próximo do valor exato $1/3$ do que $14/64$ e $30/64$. ■

Exercícios

Ex. 13.1 Para $f(x) = x$ em $[0, 2]$, use quatro subintervalos iguais e calcule as somas pelos extremos esquerdos, pelos extremos direitos e pelos pontos médios. Compare-as com a integral exata.

Ex. 13.2 Se f é crescente em $[a, b]$, qual das somas com uma mesma partição, esquerda ou direita, fornece a estimativa menor?

Exercícios

Ex. 13.3 Uma tabela fornece a potência de uma bomba a cada 2 s: Para quatro subintervalos de comprimento h , a regra de

$t(s)$	0	2	4	6	8
$P(W)$	120	150	138	132	110

Simpson é

$$S_4 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)].$$

Use-a para aproximar a energia transferida pela bomba no intervalo e indique a unidade do resultado.

uniforme $x_i = ih$, com $h = 1/2$. Calcule as aproximações

$$T_4 = h \left[\frac{f(x_0) + f(x_4)}{2} + \sum_{i=1}^3 f(x_i) \right]$$

e

$$S_4 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2) + f(x_4)].$$

Compare os valores e explique por que a integral não foi calculada por meio de uma primitiva elementar.

Ex. 13.4 Para $\int_0^2 e^{-x^2} dx$, considere a partição

13.2 Observação

Dada uma partição de $[a, b]$, o i -ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$. As três escolhas anteriores correspondem às seguintes marcas x_i^* :

- extremo esquerdo: $x_i^* = x_{i-1}$, com altura $f(x_{i-1})$;
- extremo direito: $x_i^* = x_i$, com altura $f(x_i)$;
- ponto médio: $x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, com altura $f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$.

Mais geralmente, podemos escolher qualquer marca $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Se $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a expressão

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

é uma **soma de Riemann** de f em $[a, b]$.

Nos próximos cálculos, manteremos uma escolha simples de marcas, mas deixaremos o número de subintervalos variar. Isso permitirá observar o limite das aproximações antes de formular a definição geral.

Exemplo 13.3.

Calcule $\int_0^1 x^2 dx$ aproximando a área utilizando o extremo direito com n subintervalos igualmente espaçados.

◁

Solução. Sabemos que $\Delta x = \frac{1-0}{n} = 1/n$. Também sabemos que $x_{i-1} = (i-1)/n$.

O extremo direito é $x_i = i/n$. Assim, a soma será

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 dx &\approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{n}\right]^2 \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^3}\right) i^2 \\
 &= \left(\frac{1}{n^3}\right) \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= \left(\frac{1}{n^3}\right) \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
 &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
 \end{aligned}$$

Encontramos uma fórmula para aproximar a integral definida utilizando n subintervalos igualmente espaçados e o extremo direito. Com 10 subintervalos, temos uma aproximação de 0,385. Com $n = 1000$, obtemos uma aproximação de 0,3338. ■

Exemplo 13.4.

Aproxime $\int_{-1}^5 x^3 dx$ usando o extremo direito e n subintervalos igualmente espaçados; em seguida, faça $n \rightarrow \infty$ para encontrar o valor exato da integral, isto é, a área com sinal.

◁

Neste caso $\Delta x = \frac{5 - (-1)}{n} = 6/n$. Também temos que $x_i = (-1) + i\Delta x$; A soma

correspondente ao extremo direito é:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^5 x^3 dx &\approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n f(-1 + i\Delta x) \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1 + i\Delta x)^3 \Delta x \\
 &= \sum_{i=1}^n ((i\Delta x)^3 - 3(i\Delta x)^2 + 3i\Delta x - 1) \Delta x \\
 &\quad \text{(distribuindo } \Delta x) \\
 &= \sum_{i=1}^n (i^3 \Delta x^4 - 3i^2 \Delta x^3 + 3i \Delta x^2 - \Delta x) \\
 &\quad \text{(abrindo o somatório)} \\
 &= \Delta x^4 \sum_{i=1}^n i^3 - 3\Delta x^3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3\Delta x^2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n \Delta x \\
 &= \Delta x^4 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - 3\Delta x^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &\quad + 3\Delta x^2 \frac{n(n+1)}{2} - n\Delta x
 \end{aligned}$$

(usando $\Delta x = 6/n$)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1296}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \frac{216}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &\quad + 3 \frac{36}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - 6
 \end{aligned}$$

(simplificando)

$$= 156 + \frac{378}{n} + \frac{216}{n^2}$$

Mais uma vez, encontramos uma fórmula sucinta para aproximar a integral definida utilizando n subintervalos igualmente espaçados e o extremo direito. Com 10 subintervalos, temos uma aproximação de 195,96. Com $n = 100$, obtemos uma aproximação de 159,802.

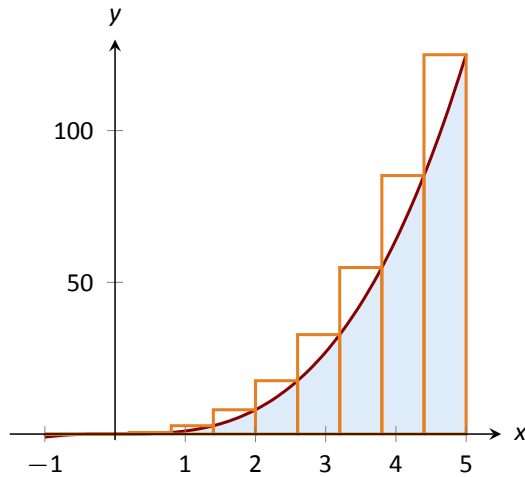


Figura 13.8. Aproximando $\int_{-1}^5 x^3 dx$ usando o extremo direito e 10 subintervalos igualmente espaçados.

Podemos agora calcular o valor exato utilizando o limite

$$\int_{-1}^5 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(156 + \frac{378}{n} + \frac{216}{n^2} \right) = 156.$$

13.2. Integral Definida

Os exemplos anteriores usaram partições uniformes e marcas escolhidas de uma maneira particular. Uma definição não pode depender dessas conveniências: ela deve produzir o mesmo número para subintervalos de comprimentos diferentes e para qualquer escolha de marcas, desde que toda a partição se torne suficientemente fina. Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado, com $a < b$. Dizemos que

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \quad n \in \mathbb{N},$$

é uma **partição** ou **divisão** de $[a, b]$. Neste caso, escrevemos $P = \{x_i\}_{i=0}^n$, com $n \geq 1$. A **norma** ou **malha** da partição é o maior comprimento de seus subintervalos:

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Assim, $|P| \rightarrow 0$ exige que todos os subintervalos se tornem pequenos, e não apenas que seu número aumente.

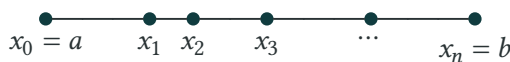


Figura 13.9. A partição P divide $[a, b]$ nos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

Malha da partição

A condição $|P| \rightarrow 0$ exige que o comprimento do maior subintervalo tenda a zero. Fazer apenas o número de subintervalos crescer não exclui partições em que alguma faixa permaneça larga.

Denotaremos por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do i -ésimo subintervalo e escolheremos uma **marca** $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ em cada um deles. O conjunto das marcas será denotado por $C = \{x_i^*\}_{i=1}^n$; o par (P, C) é chamado de partição marcada.

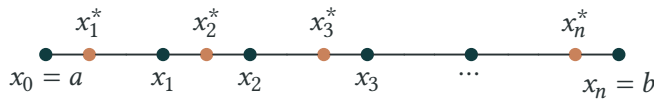


Figura 13.10. Em cada subintervalo, a marca x_i^* determina a altura $f(x_i^*)$ do retângulo.

Para uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a soma associada à partição marcada (P, C) é

$$R_{f,P,C} := \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

A integrabilidade exige uma convergência uniforme em relação a todas essas escolhas: quando a malha é pequena, *toda* soma de Riemann deve estar próxima do mesmo número A . A formulação precisa é a seguinte.

13.1 Definição Integral de Riemann

Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com $a < b$, será dita **integrável**, se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

para toda partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, qualquer que seja a escolha das marcas $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Neste caso, escrevemos

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

que é denominada **integral definida** ou simplesmente **integral** de f em relação a x no intervalo $[a, b]$.

A integral é um número; a letra x em dx identifica apenas a variável de integração. Quando $f \geq 0$, esse número coincide com a área sob o gráfico. Quando f muda de sinal, as contribuições abaixo do eixo x entram com sinal negativo, e a integral representa uma acumulação com sinal.

A definição estabelece o que significa ser integrável, mas ainda não garante que uma função dada tenha essa propriedade. O primeiro critério amplo de existência é o seguinte.

13.5 Teorema Funções Contínuas são Integráveis

- Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$; então, f é integrável em $[a, b]$.
- Se f é limitada e contínua por partes no intervalo $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

A demonstração será apresentada na próxima seção. Antes disso, calcularemos algu-

mas integrais diretamente pela definição. Como as funções consideradas são contínuas, o teorema garante sua integrabilidade; podemos, portanto, escolher partições e marcas que simplifiquem as contas.

Exemplo 13.6.

Mostre que $\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

◁

Solução. Subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Dessa forma, os pontos da partição são:

$$\begin{aligned} x_0 &= a & x_1 &= a + \frac{b-a}{n}, & x_2 &= a + 2\frac{b-a}{n}, & \dots \\ x_k &= a + k\frac{b-a}{n}, & \dots & & x_n &= b \end{aligned}$$

Agora, escolheremos x_k^* como o extremo direito do subintervalo, isto é, $x_k^* = x_k$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[a + k \frac{b-a}{n} \right] \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[a + k \frac{b-a}{n} \right] \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n a + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n k \right] \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a + \frac{b-a}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} \right] \\ &= (b-a) \left[a + \frac{b-a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} \right] \\ &= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

■

Exemplo 13.7.

Mostre que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

<

Solução. Subdividimos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

Dessa forma, os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = 2\frac{1}{n}, \quad \dots$$

$$x_k = k\frac{1}{n}, \quad \dots \quad x_n = 1$$

Agora, escolheremos x_k^* como o extremo esquerdo do subintervalo, isto é, $x_k^* = x_{k-1}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[(k-1)\frac{1}{n} \right]^2 \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Exemplo 13.8.

Mostre que $\int_0^a x^3 dx = a^4/4$ para $a > 0$.

<

Solução. Subdividimos o intervalo $[0, a]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{a}{n}$$

Dessa forma, os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{a}{n}, \quad x_2 = \frac{2a}{n}, \quad \dots$$

$$x_k = \frac{ka}{n}, \quad \dots \quad x_n = a$$

Agora, escolheremos x_k^* como o extremo direito do subintervalo, isto é, $x_k^* = x_k$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^a x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{ka}{n} \right]^3 \frac{a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^4}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^4}{n^4} \left(\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^4 (n+1)^2}{4n^2} \\ &= \frac{a^4}{4} \end{aligned}$$

■

Exemplo 13.9.

Mostre que $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

◁

Solução. Subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Dessa forma, os pontos da partição são $x_k = a + k\Delta x$. Agora, escolheremos x_k^* como o extremo direito do subintervalo, isto é, $x_k^* = x_k$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{a+k\Delta x} \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a \Delta x \sum_{k=1}^n e^{k\Delta x} \end{aligned}$$

Usando a fórmula da soma da P.G.

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a \Delta x \frac{e^{\Delta x} ((e^{\Delta x})^n - 1)}{e^{\Delta x} - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^a e^{\Delta x} \Delta x \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ temos que $\Delta x \rightarrow 0$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} (e^b - e^a)}{(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x}$$

Como $(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x \rightarrow 1$ quando $\Delta x \rightarrow 0$

$$= e^b - e^a$$

■

Exercícios

Ex. 13.5 Para $f(x) = x^2$ em $[0, 1]$, considere a partição $P = \{0, 1/4, 1\}$ e as marcas $x_1^* = 1/8$ e $x_2^* = 1/2$. Calcule a soma de Riemann $R_{f,P,C}$ e a malha $|P|$.

Ex. 13.7 Para $f(x) = x$ em $[0, 1]$, use a partição uniforme e os extremos direitos para escrever a soma com n subintervalos e calcular seu limite.

Ex. 13.6 Mostre diretamente, usando somas de Riemann, que a função constante $f(x) = c$ é integrável em $[a, b]$ e determine sua integral.

Ex. 13.8 Dê uma sequência de partições de $[0, 1]$ cujo número de subintervalos tenda ao infinito, mas cuja malha não tenda a zero. Explique por que a definição usa $|P| \rightarrow 0$, e não apenas $n \rightarrow \infty$.

13.3. ★ Funções Contínuas são Integráveis

A definição anterior contém duas exigências simultâneas: controlar partições diferentes e controlar todas as marcas em cada partição. As somas inferiores e superiores resolvem a segunda dificuldade, pois delimitam de uma só vez todas as somas de Riemann associadas à mesma partição. Restará então mostrar que a distância entre esses dois extremos tende a zero. Esta seção apresenta a justificativa rigorosa desse argumento. Numa primeira leitura, pode-se aceitar o Teorema 13.5 e seguir diretamente para a seção de propriedades da integral.

13.2 Definição Soma Superior e Inferior

Seja $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Para uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, defina

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

As **somas inferior e superior** de f em relação à partição P são, respectivamente,

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Como $m_i \leq f(x_i^*) \leq M_i$ em cada subintervalo, toda escolha de marcas satisfaz

$$I(f, P) \leq R_{f,P,C} \leq S(f, P).$$

A diferença $S(f, P) - I(f, P)$ mede, portanto, a incerteza máxima causada pela escolha das marcas nessa partição.

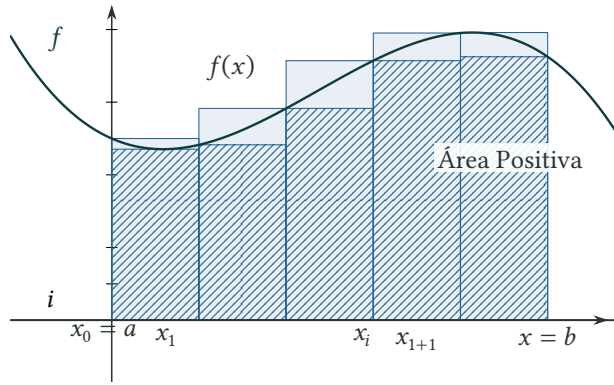


Figura 13.11. As somas superior $S(f, P)$ e inferior $I(f, P)$ limitam a área sob uma função contínua e positiva.

Se uma partição P' refina P , cada ínfimo pode apenas aumentar e cada supremo pode apenas diminuir quando subdividimos um intervalo. Portanto,

$$I(f, P) \leq I(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P).$$

Para duas partições quaisquer P, Q , a união de seus pontos é um refinamento comum, de modo que $I(f, P) \leq S(f, Q)$. Como f é limitada, o número

$$A = \sup\{I(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}$$

é finito e satisfaz $I(f, Q) \leq A \leq S(f, Q)$ para toda partição Q . Assim, se a diferença $S(f, Q) - I(f, Q)$ se tornar arbitrariamente pequena, as duas somas serão forçadas a convergir para esse mesmo número A .

13.3 Definição Integral de Darboux

Considere uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} I(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P) = A,$$

dizemos que a integral de Darboux existe e vale A . Os limites referem-se a todas as partições cuja malha tende a zero. Pelo argumento dos refinamentos, basta que $S(f, P) - I(f, P) \rightarrow 0$: ambas as somas ficam então arbitrariamente próximas do número A definido acima.

13.10 Teorema

A integral de Riemann existe se e somente se a integral de Darboux existe.

Demonstração. Para qualquer partição P e qualquer conjunto de marcas C ,

$$I(f, P) \leq R_{f,P,C} \leq S(f, P).$$

Se as somas de Darboux convergem para A quando $|P| \rightarrow 0$, o confronto mostra que todas as somas de Riemann também convergem para A , independentemente das marcas.

Reciprocamente, suponha que a integral de Riemann seja A . Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ tal que toda soma de Riemann de malha menor que δ difira de A por menos que $\varepsilon/2$. Tome uma partição qualquer P com $|P| < \delta$. Pela definição de supremo e ínfimo, em cada $[x_{i-1}, x_i]$ podemos escolher u_i, v_i tais que

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(u_i), \quad f(v_i) < \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Multiplicando pelos comprimentos e somando, obtemos

$$S(f, P) < R_{f,P,\{u_i\}} + \varepsilon/2 < A + \varepsilon, \quad I(f, P) > R_{f,P,\{v_i\}} - \varepsilon/2 > A - \varepsilon.$$

Como $I \leq R \leq S$ e qualquer uma dessas somas de Riemann também está a menos de $\varepsilon/2$ de A , ambas as somas de Darboux estão a menos de ε de A . Isso prova a convergência exigida. ■

13.11 Teorema Funções Contínuas são Integráveis

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$; então, existe a integral de Riemann de f .

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade uniforme de f em $[a, b]$ fornece $\delta > 0$ tal que

$$|u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Considere uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ com $|P| < \delta$. Em cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, o Teorema de Weierstrass garante pontos u_k e v_k nos quais f atinge, respectivamente, o máximo e o mínimo. Como $|u_k - v_k| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$, temos

$$f(u_k) - f(v_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S(f, P) - I(f, P) &= \sum_{k=1}^n (f(u_k) - f(v_k))(x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

A diferença entre as somas superior e inferior tende, assim, a zero quando $|P| \rightarrow 0$. Pela equivalência entre as integrais de Darboux e de Riemann, f é integrável. ■

13.12 Corolário Funções contínuas por partes são integráveis

Se f é limitada e contínua por partes em $[a, b]$, então f é Riemann-integrável em $[a, b]$.

Demonstração. Seja D o conjunto finito formado pelos pontos de divisão dos trechos e pelos extremos a, b , e escreva $r = |D|$. Pelos limites laterais finitos, a restrição de f ao interior de cada trecho admite uma extensão contínua ao fecho. Cada uma dessas extensões é uniformemente contínua. Escolha M com $|f| \leq M$; se $M = 0$, nada há a provar.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha uma malha δ tão pequena que, nos subintervalos que não tocam D , a oscilação seja menor que $\varepsilon/(2(b-a))$, e que $4Mr\delta < \varepsilon/2$. Os subintervalos de uma partição com $|P| < \delta$ que tocam D têm comprimento total no máximo $2r\delta$. Sua contribuição para $S-I$ é no máximo $4Mr\delta < \varepsilon/2$; a contribuição dos demais é menor que $\varepsilon/2$. Portanto, $S-I < \varepsilon$ para toda partição suficientemente fina. A equivalência com Riemann prova a integrabilidade anunciada no Teorema 13.5. ■

13.4. Propriedades da Integral

A integral foi construída a partir de somas, e suas propriedades refletem essa origem. Elas serão organizadas em três grupos: operações algébricas, comparação de funções e decomposição do intervalo. Antes disso, estenderemos a notação para incluir intervalos de comprimento zero e limites de integração invertidos.

13.4 Definição

Definimos $\int_a^a f(x) dx = 0$. Para $a < b$ e f integrável em $[a, b]$, definimos

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

A orientação da integral

Define-se a integral com os extremos invertidos como o oposto da integral original. Essa convenção preserva a aditividade: percorrer um intervalo e retornar produz contribuição total nula. O sinal pertence à orientação da integral; a área geométrica continua não negativa.

Operações algébricas

A linearidade permite integrar combinações lineares termo a termo. O produto de funções integráveis também é integrável, embora não exista uma fórmula que escreva sua integral apenas em termos das integrais dos fatores.

13.13 Proposição

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então a integral é linear, isto é,

- para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a função λf é integrável e

$$\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$$

- A função $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(x) \, dx &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \lambda f(x_i^*) \Delta x_i \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \lambda \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \\ &= \lambda \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \\ &= \lambda \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) + g(x_i^*)] \Delta x_i \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i \right] \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i + \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

■

13.14 Proposição

Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então o produto fg também é integrável.

Demonstração. Escolha M_f, M_g com $|f| \leq M_f$ e $|g| \leq M_g$. Para dois pontos u, v de um mesmo subintervalo,

$$|f(u)g(u) - f(v)g(v)| \leq M_f |g(u) - g(v)| + M_g |f(u) - f(v)|.$$

Portanto, a oscilação do produto é no máximo M_f vezes a oscilação de g mais M_g vezes a de f . Multiplicando pelos comprimentos e somando,

$$S(fg, P) - I(fg, P) \leq M_f (S(g, P) - I(g, P)) + M_g (S(f, P) - I(f, P)).$$

O lado direito tende a zero quando $|P| \rightarrow 0$. A equivalência entre as integrais de Darboux e Riemann dá o resultado. ■

Comparação e estimativas

Como os comprimentos Δx_i são não negativos, desigualdades entre funções passam às somas de Riemann e, depois, às integrais. Essa observação produz critérios simples para sinal, comparação e estimativa.

13.15 Proposição

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis, com $a < b$. A integral preserva a não negatividade, isto é, se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$. Em particular, se $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx.$$

Além disso, se $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então f será integrável e $\int_a^b f(x) \, dx = 0$.

Demonstração. Como $f(x_i^*) \geq 0$ então $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \geq 0$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \geq 0$$

Para demonstrar a segunda parte, aplique a primeira à função integrável $f - g \geq 0$ e use a linearidade. ■

13.16 Proposição

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e $m, M \in \mathbb{R}$. Se $m \leq f(x) \leq M$ então:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

Demonstração. Pela Proposição 13.15 temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b m \, dx &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx \\ m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a) \end{aligned}$$

Decomposição do intervalo

Dividir o intervalo de integração não altera a acumulação total: apenas separa a mesma soma em duas parcelas. Essa propriedade será indispensável quando o integrando mudar de sinal ou quando um extremo de integração passar a variar.

13.17 Proposição

A integral é aditiva, isto é, se existirem as integrais $\int_a^c f(x) \, dx$ e $\int_c^b f(x) \, dx$, com $c \in [a, b]$, então existirá a integral $\int_a^b f(x) \, dx$ e

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Isto quer dizer que basta integrar f nos dois subintervalos contíguos para obter a integral em $[a, b]$. Em particular, quando $c = a$, teremos $\int_a^a f(x) \, dx = 0$.

Demonstração. Se $c = a$ ou $c = b$, a igualdade segue da definição da integral em um intervalo de comprimento zero. Suponha $a < c < b$. Para partições que contêm c , a soma de Riemann em $[a, b]$ é a soma das duas somas de Riemann nos subintervalos. Quando a malha tende a zero, ela converge para a soma das integrais dadas.

Para uma partição que não contém c , acrescente esse ponto. Apenas o subintervalo que contém c é dividido. Se $|f| \leq M$ em $[a, b]$, a diferença entre a contribuição antiga e as duas novas é no máximo $2M|P|$, qualquer que seja a escolha das marcas. Essa diferença tende a zero; portanto, todas as somas têm o mesmo limite, provando a integrabilidade e a igualdade. ■

Reciprocamente, uma função integrável em $[a, b]$ é integrável em cada subintervalo. Para ver isso, estenda uma partição fina do subintervalo a uma partição igualmente fina de $[a, b]$: a soma das oscilações, multiplicadas pelos comprimentos, no subintervalo é no máximo a soma correspondente no intervalo inteiro, que tende a zero. Esse fato permite usar livremente integrais com extremo variável.

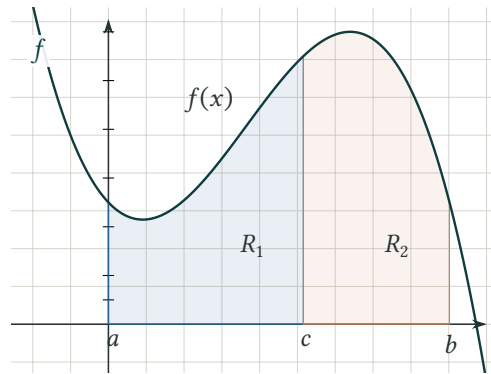


Figura 13.12. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

Exercícios

Ex. 13.9 Sabendo que $\int_0^2 f(x) \, dx = 3$ e $\int_1^4 f(x) \, dx = -1$, calcule $\int_2^5 f(x) \, dx$.

Ex. 13.10 Seja f integrável em $[1, 4]$, com $2 \leq f(x) \leq 5$ para todo $x \in [1, 4]$. Dê limites inferior e superior para $\int_1^4 f(x) \, dx$.

Ex. 13.11 Se $\int_a^b f = -2$ e $\int_a^b g = 5$, calcule $\int_a^b (3f + 2g)$.

Valor Médio

A integral também estende a ideia de média a uma função em um intervalo. Para obter a fórmula, começamos com médias de um número finito de valores e reconhecemos uma soma de Riemann.

A média dos valores $y_1, y_2, \dots, y_n$ é

$$y_m = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Para uma função f em $[a, b]$, dividimos o intervalo em n partes iguais, de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$, e escolhemos uma marca x_i^* em cada parte. A média dos valores amostrados pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} &= \frac{1}{b-a} [f(x_1^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x] \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x. \end{aligned}$$

Se f é integrável, o limite das somas existe e não depende das marcas. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

13.5 Definição Valor Médio de uma função

Suponha que f seja integrável em $[a, b]$, com $a < b$. O valor médio de f no intervalo $[a, b]$ é

$$f_m := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Nos dois exemplos seguintes, usaremos a regra

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad F' = f,$$

cujas justificativas pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo será apresentada adiante.

Exemplo 13.18.

Calcule o valor médio para $f(x) = x^2$ em $[1, 3]$.

<

Solução.

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

■

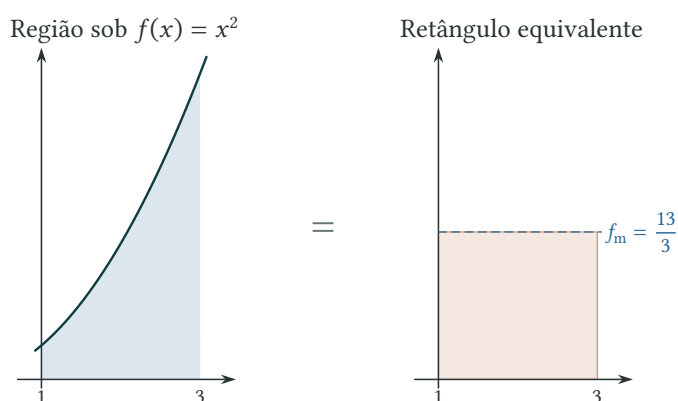


Figura 13.13. O retângulo de altura $f_m = 13/3$ tem a mesma área que a região sob $f(x) = x^2$ em $[1, 3]$.

Exemplo 13.19.

Determine o valor médio de $f(x) = 1/x$ em $[1, e]$ e encontre um ponto $c \in (1, e)$ no qual $f(c)$ seja igual a esse valor médio.

<

Solução. Como $\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 = 1$,

$$f_m = \frac{1}{e-1}.$$

Para que $f(c) = f_m$, precisamos de

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1},$$

portanto $c = e - 1$. Como $1 < e - 1 < e$, esse ponto pertence ao interior do intervalo, como prevê o Teorema do Valor Médio para Integrais. ■

13.20 Teorema Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja f contínua em $[a, b]$, com $a < b$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Equivalentemente, $f(c) = f_m$.

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge um valor mínimo m_0 e um valor máximo M_0 em $[a, b]$. Como

$$m_0 \leq f(x) \leq M_0,$$

a comparação de integrais fornece

$$m_0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M_0.$$

Se f é constante, qualquer $c \in (a, b)$ satisfaz a conclusão. Se não é constante, as duas desigualdades são estritas: as funções contínuas $f - m_0$ e $M_0 - f$ são não negativas e positivas em algum intervalo de comprimento positivo. Assim, f_m está estritamente entre m_0 e M_0 . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = f_m$, o que equivale à fórmula do enunciado. ■

Exercícios

Ex. 13.12 Encontre o valor médio de $f(x) = 3x^2$ em $[0, 2]$ e um ponto $c \in (0, 2)$ no qual $f(c)$ assumo esse valor.

Ex. 13.13 A vazão de entrada em um reservatório é $q(t) = 20 + 4t$ litros por minuto, para $0 \leq t \leq 5$. Determine a vazão média nesse intervalo e um instante em que a vazão instantânea coincide com ela.

Paridade

As simetrias de um gráfico podem simplificar o cálculo de uma integral. Em intervalos simétricos em relação à origem, as contribuições de uma função par se repetem, enquanto as de uma função ímpar se compensam.

13.21 Teorema

Suponha que $a > 0$ e que f seja contínua em $[-a, a]$. Então

■ Se f é par então $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

■ Se f é ímpar então $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

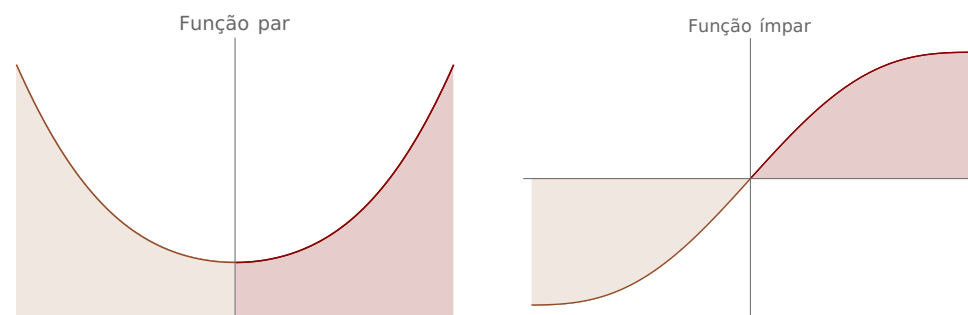


Figura 13.14. Em $[-a, a]$, as áreas de uma função par se repetem, enquanto as contribuições de uma função ímpar se cancelam.

Exemplo 13.22.

Calcule $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^6} dx$

◁

Solução. Como $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^6}$ é ímpar, pois

$$f(-x) = \frac{\operatorname{tg} -x}{1 + (-x)^2 + (-x)^6} = -\frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^6} = -f(x)$$

temos que

$$\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^6} dx = 0$$

■

13.5. Teorema fundamental do cálculo

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Até aqui, a integral associou um número a uma função e a um intervalo fixo. Se o extremo superior puder variar, a acumulação passará a definir uma nova função:

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Quando $f \geq 0$, $g(x)$ é a área sob o gráfico entre a e x ; para uma função de sinal variável, é a acumulação com sinal. O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo identifica a taxa de variação dessa acumulação.

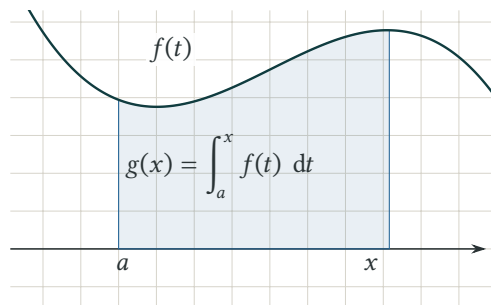


Figura 13.15. A função acumulada $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ mede a área sob f entre a e o extremo variável x .

Antes da demonstração, consideremos a ideia geométrica. Para $h > 0$, a aditividade da integral mostra que $g(x+h) - g(x)$ é a acumulação de f no pequeno intervalo $[x, x+h]$.

A taxa da acumulação

Se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ e f é contínua no ponto interior x , o incremento de F é aproximado por $f(x)h$. Ao dividir por h e tomar o limite, obtemos $F'(x) = f(x)$. A continuidade justifica essa passagem da média local ao valor no ponto.

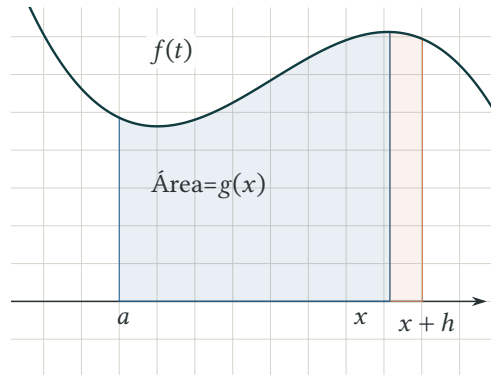


Figura 13.16. O acréscimo $g(x+h) - g(x)$ é a área sob f no pequeno intervalo $[x, x+h]$.

Se h é pequeno e f é contínua, os valores de $f(t)$ nesse intervalo estão próximos de $f(x)$. Por isso, a acumulação é aproximadamente a área do retângulo de altura $f(x)$ e largura h :

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x), \quad \text{logo} \quad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Assim esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

O teorema transforma essa aproximação local em uma igualdade exata no limite.

13.23 Teorema Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f uma função contínua em $[a, b]$; então, a função g definida por

$$g(x) := \int_a^x f(t) \, dt, \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e satisfaz $g'(x) = f(x)$.

Demonstração. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existe $M \geq 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$. Pela aditividade e pela comparação de integrais,

$$|g(y) - g(x)| = \left| \int_x^y f(t) \, dt \right| \leq M|y - x|.$$

Logo, g é contínua em $[a, b]$.

Fixe agora $x \in (a, b)$ e tome $h \neq 0$ suficientemente pequeno para que $x+h \in [a, b]$. Novamente pela aditividade,

$$g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Subtraindo $f(x)$ do quociente incremental, obtemos

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) \, dt.$$

Se J_h é o intervalo cujos extremos são x e $x + h$, então

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - f(x) \right| \leq \sup_{t \in J_h} |f(t) - f(x)|.$$

Quando $h \rightarrow 0$, todos os pontos de J_h se aproximam de x . Pela continuidade de f em x , o membro direito tende a zero. Portanto,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x),$$

como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 13.24.

Ache a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$.

Solução. Como $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$. ■

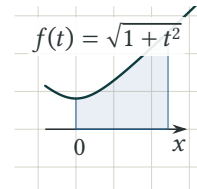


Figura 13.17. Área acumulada associada a $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$.

Exemplo 13.25.

Calcule a derivada de $g(x) = \int_1^{x^4} \sec t dt$ no domínio $|x| < (\pi/2)^{1/4}$.

Solução.

Utilizamos o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia. Seja $u = x^4$, então

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^{x^4} \sec t dt \stackrel{RC}{=} \frac{d}{du} \int_1^u \sec t dt \frac{du}{dx} = \sec u \frac{du}{dx} = \sec(x^4) 4x^3.$$

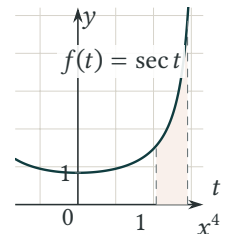


Figura 13.18. Área acumulada associada a $g(x) = \int_1^{x^4} \sec t dt$.

Exemplo 13.26 – Vazão e volume acumulado.

Um reservatório contém inicialmente 500 L. Durante os primeiros dez minutos, a água entra com vazão

$$q(t) = 30 + 4t \quad (0 \leq t \leq 10),$$

em litros por minuto. Determine o volume $Q(t)$ no reservatório, verifique sua relação com a vazão e calcule o volume após dez minutos.

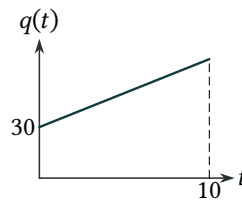
Solução. O volume inicial deve ser somado à quantidade que entrou até o instante t :

$$Q(t) = 500 + \int_0^t q(s) \, ds = 500 + \int_0^t (30 + 4s) \, ds = 500 + 30t + 2t^2.$$

Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo,

$$Q'(t) = q(t).$$

Assim, a vazão é a taxa instantânea de variação do volume acumulado. Em particular, $Q(10) = 1000$ L.



■

Exercícios

Ex. 13.14 Seja $G(x) = \int_2^x (t^3 + 1) \, dt$. Determine $H'(x)$.

Ex. 13.15 Seja $H(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} \, dt$. Determine $K'(x)$ e explique o sinal obtido.

Ex. 13.16 Seja $K(x) = \int_x^3 e^{-t^2} \, dt$. Determine

13.5.1. Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

O primeiro teorema parte da integral e produz uma antiderivada. O segundo percorre o caminho inverso: parte de uma antiderivada conhecida e a usa para calcular a integral definida. Assim, um limite de somas de Riemann, muitas vezes trabalhoso, reduz-se à diferença entre dois valores de uma função.

13.27 Teorema Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que f seja contínua em $[a, b]$; então,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

onde F é contínua em $[a, b]$ e satisfaz $F' = f$ em (a, b) , isto é, é uma antiderivada com extensão contínua aos extremos.

Demonstração. Seja $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, $g' = f$ em (a, b) ; logo, F e g são duas antiderivadas de f . Pelo Corolário 11.18, existe uma constante k tal que $F(x) - g(x) = k$ em (a, b) . Como ambas as funções são contínuas em $[a, b]$, a igualdade estende-se aos extremos. Em $x = a$, temos $g(a) = 0$ e, portanto, $k = F(a)$. Em $x = b$,

$$F(b) - F(a) = g(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

■

O teorema supõe que o integrando é contínuo. A fórmula de Newton–Leibniz continua válida em uma situação um pouco mais geral, útil quando conhecemos diretamente uma função e sabemos que sua derivada é integrável.

13.28 Corolário Newton–Leibniz para derivadas integráveis

Se F é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e F' é Riemann integrável, atribuindo-lhe valores quaisquer nos extremos, então

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Para cada partição, o Teorema do Valor Médio fornece $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ com $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1})$. Somando, o lado esquerdo telescopa:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i.$$

Quando a malha tende a zero, a soma de Riemann converge para a integral de F' , provando a fórmula sem exigir continuidade da derivada. ■

13.29 Notação

Se F é uma antiderivada de f , utilizaremos a notação

$$F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Desse modo, o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrito como

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

O procedimento de cálculo tem, portanto, duas etapas: encontrar uma antiderivada do integrando e avaliá-la nos extremos, sempre na ordem “extremo superior menos extremo inferior”.

Exemplo 13.30.

Calcule a integral de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$.

◁

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exemplo 13.31.

Calcule $\int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1) \, dx$.

◁

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1) \, dx &= \int_{-1}^0 x^3 \, dx + \int_{-1}^0 3x \, dx - \int_{-1}^0 1 \, dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{3x^2}{2} \right|_{-1}^0 - x \Big|_{-1}^0 = -\frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Exercícios

Ex. 13.17 Use o Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada das seguintes funções:

1. $\int_0^x \sqrt{1+2t} \, dt$

2. $\int_1^x \ln(t) \, dt$

3. $\int_x^2 \cos(t^2) \, dt$

4. $\int_1^{\cos(x)} (t + \cos(t)) \, dt$

5. $\int_1^{e^x} (t + \cos(t)) \, dt$

6. $\int_{e^{x^2}}^0 \cos^2(t) \, dt$

7. $\int_{-e^{x^2}}^{e^x} \cos^2(t) \, dt$

8. $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \cos(t) \, dt$

Ex. 13.18 Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as seguintes integrais ou explique por que elas não existem:

1. $\int_0^1 x^7 + 3x \, dx$

2. $\int_{-1}^4 x^6 \, dx$

3. $\int_{-2}^5 \pi \, dx$

4. $\int_{-1}^4 x^2 + 3x \, dx$

$$5. \int_0^1 x^{3/2} dx$$

$$11. \int_0^{\pi/4} \sec^2(x) dx$$

$$6. \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$$

$$12. \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{cosec}^2(\theta) d\theta$$

$$7. \int_1^4 x^{6/7} dx$$

$$13. \int_0^1 e^{v+1} dv$$

$$8. \int_{-5}^5 \frac{2}{x^3} dx$$

$$14. \int_0^1 5^t dt$$

$$9. \int_0^2 x(2 + x^5) dx$$

$$15. \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$10. \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

13.5.2. Integração por substituição na integral definida

O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo permite transportar para integrais definidas os métodos usados na busca de antiderivadas. Na substituição, há dois procedimentos equivalentes: encontrar uma primitiva e voltar à variável original antes de avaliar os extremos, ou mudar também os limites de integração e concluir o cálculo na nova variável. O exemplo a seguir ilustra o primeiro procedimento:

$$\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2} dx = \left. \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \right|_0^2 = \frac{2}{3}(5)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2} = \frac{2}{3}((5)^{3/2} - 1).$$

No segundo procedimento, os extremos são transformados juntamente com o integrando e o diferencial. Assim, nenhuma variável antiga deve permanecer depois da substituição. **Regra da Substituição para Integrais Definidas.** Se g tem derivada contínua em $[a, b]$ e f é contínua em um intervalo que contém a imagem de g , então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Demonstração. Seja F uma antiderivada de f . Então, $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, logo, pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 13.27), temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por outro lado, aplicando uma segunda vez o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(u) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Exemplo 13.32.

Determine: **a** $\int_{-1}^3 e^{-2x} dx$; **b** $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2} dx$.

◁

Solução. **a** Tome $u = -2x$. Então, $du = -2 dx$. Logo, $dx = -du/2$. Quando $x = -1$, $u = 2$; quando $x = 3$, $u = -6$. Logo, trocando o integrando, dx e os limites de integração, $\int_{-1}^3 e^{-2x} dx = \int_2^{-6} e^u(-1/2) du = -\frac{e^u}{2} \Big|_2^{-6} = -\frac{e^{-6}}{2} - (-\frac{e^2}{2}) = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-6})$.

Outro modo é primeiro encontrar a antiderivada: $\int e^{-2x} dx = \int e^u(-1/2) du = -\frac{e^u}{2} + C = -\frac{e^{-2x}}{2} + C$. Agora basta calcular $\int_{-1}^3 e^{-2x} dx = -\frac{e^{-2x}}{2} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-6})$. **b**

Tome $u = 3x^2$. Então $du = 6x dx$. Logo, $x dx = du/6$. Quando $x = 0$, $u = 0$; quando $x = \sqrt{2}$, $u = 6$. Logo, trocando o integrando, dx e os limites de integração, $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2} dx = \int_0^6 e^u du/6 = \frac{e^u}{6} \Big|_0^6 = \frac{e^6}{6} - \frac{1}{6}$. Outro modo é primeiro encontrar a

antiderivada: $\int xe^{3x^2} dx = \int e^u du/6 = \frac{e^u}{6} + C = \frac{e^{3x^2}}{6} + C$. Agora basta calcular $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2} dx = \frac{e^{3x^2}}{6} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{e^6}{6} - \frac{1}{6}$.

■

Exemplo 13.33.

Calcule $\int_{1/2}^1 \sqrt{2x-1} dx$.

◁

Fazendo $u = 2x - 1$, temos $du = 2 dx$ ou $\frac{1}{2} du = dx$. Quando $x = \frac{1}{2}$, $u = 0$; quando $x = 1$, $u = 1$. Assim,

$$\int_{1/2}^1 \sqrt{2x-1} dx = \int_0^1 \sqrt{u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exercícios

Ex. 13.19 Calcule as integrais. Use a substituição indicada nos cinco primeiros itens e escolha uma conveniente nos demais:

1. $\int_0^\pi \cos(3x) dx$ $u = 3x$

2. $\int_0^1 x(4+x^2)^{10} dx$ $u = 4+x^2$

$$3. \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \quad u = x^3 + 1$$

$$8. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$4. \int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx \quad u = \sqrt{x}, \text{ definindo o integrando em } x = 0 \text{ por seu limite, igual a } 1.$$

$$9. \int_0^1 2x(1 - x^2)^4 \, dx$$

$$5. \int_0^{\pi/2} e^{\sin \theta} \cos(\theta) d\theta \quad u = \sin(\theta)$$

$$10. \int_{-2}^{-1} (x + 1)e^{x^2 + 2x + 1} \, dx$$

$$6. \int_1^3 \frac{1}{x - 5} \, dx$$

$$11. \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} \, dx$$

$$7. \int_2^6 x\sqrt{x - 2} \, dx$$

$$12. \int_2^4 \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \, dx$$

$$13. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \, dx$$

13.5.3. Integração por partes na integral definida

A integração por partes também se adapta ao intervalo de integração. Ao combiná-la com o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, o termo que contém o produto das funções passa a ser avaliado nos extremos, e a integral restante conserva os limites correspondentes:

13.34 Proposição integração por partes

Sejam f e g contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em (a, b) , com f' e g' Riemann-integráveis. Então

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$

Demonstração. Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Pela regra da derivada do produto, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Como produtos de funções integráveis são integráveis, h' é integrável. Pelo Corolário 13.28, temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b h'(x) \, dx &= h(b) - h(a) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtemos o resultado. ■

Exemplo 13.35.

Determine: **a** $\int_0^{\ln 2} e^x x \, dx$; **b** $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$.

<

Solução. **a** Tome $u = x$ e $dv = e^x \, dx$. Assim, $du = dx$ e $v = e^x$. Logo, $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$. Agora utilizamos os limites de integração: $\int_0^{\ln 2} e^x x \, dx = x e^x - e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 \ln(2) - 1$. Caso tivesse tomado $u = e^x$ e $dv = x \, dx$, teríamos $du = e^x \, dx$ e $v = x^2/2$. Assim, $\int e^x x \, dx = \frac{x^2 e^x}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x \, dx$, uma integral ainda mais complicada! Reflita sobre isso... **b** Tome $u = x$ e $dv = \cos x \, dx$. Assim $du = dx$ e $v = \sin x$. Logo, $\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$. E assim $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi} = -2$. ■

Exemplo 13.36.

Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$.

<

Fazendo $u = \ln x$, temos $du = \frac{1}{x} \, dx$. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Assim,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \int_0^1 u \, du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exercícios

Ex. 13.20

$$1. \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$2. \int_{-1}^1 x e^{-x} \, dx$$

$$3. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

$$4. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \operatorname{sen} x \, dx$$

$$5. \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{x^2} \, dx$$

$$6. \int_0^1 x^3 e^x \, dx$$

$$7. \int_1^2 x e^{-2x} \, dx$$

$$8. \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$9. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx$$

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(5x) \, dx$$

$$2. \int r e^{r/3} \, dr$$

$$3. \int x^2 \cos(mx) \, dx$$

$$4. \int \ln(2x+1) \, dx$$

$$5. \int t^3 e^t \, dt$$

$$6. \int (\ln(x))^2 \, dx$$

$$7. \int z \operatorname{senh}(z) \, dz$$

$$8. \int_0^1 (x^2+1)e^{-x} \, dx$$

$$9. \int_1^4 \sqrt{t} \ln(t) \, dt$$

$$10. \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$$

$$11. \int_0^1 x 2^x \, dx$$

$$12. \int \cos(\ln(x)) \, dx$$

Ex. 13.21 Calcule as seguintes integrais:

13.6. Deslocamento e espaço percorrido

No movimento retilíneo, a integral da velocidade fornece a variação líquida da posição. Se a velocidade muda de sinal, essa variação não coincide com o espaço total percorrido; a distinção corresponde exatamente à diferença entre integrar v e integrar $|v|$.

Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação de posição

Deslocamento e distância percorrida

Movimentos em sentidos opostos podem se cancelar no deslocamento, mas suas distâncias se somam. Por isso, integramos v para obter o deslocamento e $|v|$ para obter a distância percorrida. Na montagem por trechos, identificamos onde a velocidade muda

$x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Sabemos que $\frac{dx}{dt}(t) = v(t)$, ou seja, $x(t)$ é uma antiderivada de $v(t)$. Portanto, pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 13.27), temos

$$\int_a^b v(t) dt = x(b) - x(a) \quad (13.1)$$

que é o **deslocamento** da partícula entre os instantes a e b . Para calcular a distância percorrida, devemos ignorar o sinal da velocidade e somar as contribuições em módulo. Assim,

$$\int_a^b |v(t)| dt \quad (13.2)$$

é a **distância percorrida** pela partícula entre os instantes a e b . Quando $v(t) \geq 0$ em todo o intervalo, não há movimento no sentido negativo. Nesse caso, deslocamento e distância percorrida coincidem e valem

$$\int_a^b v(t) dt.$$

Se a velocidade muda de sinal, seus zeros indicam onde o intervalo deve ser dividido para calcular a integral do módulo.

Exemplo 13.37.

Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2 - t$.

- a Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.
- b Calcule o espaço percorrido entre os instantes 1 e 3.

◁

Solução.

$$\text{Deslocamento} = \int_1^3 (2 - t) dt = \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^3 = 0.$$

$$\text{Espaço percorrido} = \int_1^3 |2 - t| dt = \int_1^2 (2 - t) dt - \int_2^3 (2 - t) dt = 1.$$

Interpretação: em $[1, 2)$ a velocidade é positiva, o que significa que neste intervalo a partícula avança no sentido positivo; em $(2, 3]$ a velocidade é negativa, o que significa que neste intervalo a partícula recua, de tal modo que em $t = 3$, ela volta a ocupar a mesma posição que ocupava no instante $t = 1$. ■

Exercícios

Ex. 13.22 Uma partícula tem velocidade $v(t) = t - 1$ em $0 \leq t \leq 3$. Calcule o deslocamento e a distância percorrida.

Ex. 13.23 A posição de uma partícula é $s(t) = t^3 - 3t$ em $0 \leq t \leq 2$. Calcule o deslocamento e a distância percorrida.

Ex. 13.24 A velocidade de um veículo, em me-

$$v(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 6, & 2 < t \leq 5, \\ 21 - 3t, & 5 < t \leq 7. \end{cases}$$

1. Esboce o gráfico de v e explique as três etapas do movimento.
2. Calcule o deslocamento e a distância percorrida entre $t = 0$ e $t = 7$.
3. Se $s(0) = 4$ m, determine $s(7)$ e a velocidade média no intervalo.

Exemplo 13.38.

Por que foguetes são construídos em estágios?

Até aqui, integramos a velocidade para recuperar a variação da posição. A mesma ideia pode ser aplicada um passo antes: integrando a aceleração, obtemos o ganho de velocidade.

Considere um foguete que expelle gases com velocidade u em relação a si mesmo e consome combustível a uma taxa constante r . Se m_0 é a massa no início da queima, então $m(t) = m_0 - rt$. No modelo ideal, o empuxo tem módulo ru e a aceleração produzida pelo motor é

$$a(t) = \frac{ru}{m_0 - rt}.$$

Adote $u = 3,5$ km/s e suponha que tanques, motor e demais componentes estruturais representem pelo menos 10% da massa inicial. Compare a capacidade de um foguete de estágio único com a de um foguete de dois estágios, cada um dos quais opera com razão entre massa inicial e massa final igual a 4. Para chegar a uma órbita terrestre baixa, considere necessário um ganho efetivo de velocidade de aproximadamente 9,4 km/s.



Um único estágio. Tanques e motores vazios continuam sendo acelerados durante toda a subida.

Dois estágios. A estrutura que já cumpriu sua função é abandonada, e o módulo superior prossegue com massa menor.

<

Solução. A aceleração não é constante. À medida que o combustível é consumido, a mesma força atua sobre uma massa cada vez menor. Se a queima termina no instante T e $m_f = m_0 - rT$ é a massa restante, então

$$\begin{aligned}\Delta v &= \int_0^T a(t) dt = \int_0^T \frac{ru}{m_0 - rt} dt \\ &= u \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right).\end{aligned}$$

Essa é a equação do foguete. A taxa de queima r desaparece do resultado: no modelo ideal, o ganho de velocidade depende da velocidade de exaustão e da razão entre as massas inicial e final.

Em um foguete de estágio único, mesmo fazendo a carga útil tender a zero,

$$m_f \geq 0,10m_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0}{m_f} \leq 10.$$

Consequentemente,

$$\Delta v_{\max} = 3,5 \ln(10) \approx 8,06 \text{ km/s},$$

valor inferior aos 9,4 km/s necessários. Sob as hipóteses do modelo, um único estágio não consegue realizar o lançamento.

Com dois estágios, cada razão de massas igual a 4 fornece

$$\Delta v_i = 3,5 \ln(4) \approx 4,85 \text{ km/s}.$$

Após a primeira queima, o tanque e o motor vazios são abandonados. O segundo estágio não precisa continuar acelerando essa massa, e os ganhos se somam:

$$\Delta v_{\text{total}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2(3,5 \ln 4) \approx 9,70 \text{ km/s}.$$

Separar estágios não cria energia; apenas evita gastá-la acelerando uma estrutura que já cumpriu sua função. Se incluirmos a gravidade durante uma queima vertical, obtemos

$$a(t) = \frac{ru}{m_0 - rt} - g \quad \text{e} \quad \Delta v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - gT,$$

o que torna a limitação do estágio único ainda mais severa.

Alcance do modelo. A impossibilidade demonstrada depende dos valores adotados para a velocidade de exaustão e a fração estrutural. As leis da Física não proíbem em sentido absoluto um veículo de estágio único, mas tornam esse projeto extremamente exigente com propulsão química e carga útil positiva. ■

13.7. ★ As funções logarítmica e exponencial revisitadas

O Teorema Fundamental do Cálculo não serve apenas para avaliar integrais: ele permite definir novas funções por acumulação e obter imediatamente suas derivadas. Retomaremos por esse caminho o logaritmo natural e, a partir de sua inversa, a função exponencial.

Como $t \mapsto 1/t$ é contínua em $(0, \infty)$, a integral entre 1 e qualquer ponto $x > 0$ está bem definida. Isso motiva a definição seguinte.

13.6 Definição

A função **logaritmo natural** é uma função definida por

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$$

O intervalo na definição do logaritmo

Para $x > 0$, o intervalo entre 1 e x não contém 0, e $1/t$ é contínua em todo ele. Para $x \leq 0$, esse percurso encontra a singularidade. A definição por essa integral estabelece, portanto, uma função em $(0, \infty)$.

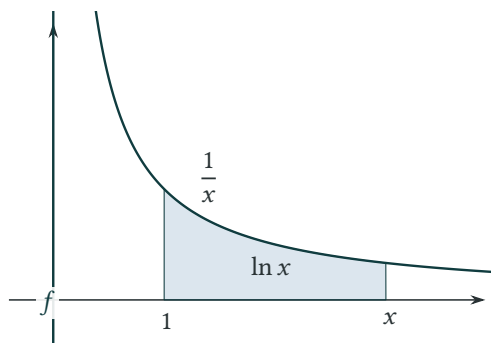


Figura 13.19. Para $x > 0$, $\ln x$ é a área com sinal sob $1/t$ entre 1 e x .

13.39 Proposição Propriedades do Logaritmo

A função logaritmo é contínua e diferenciável em todo seu domínio e satisfaz:

- a $\ln 1 = 0$,
- b $\ln' x = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$,
- c $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, para todo $a, b > 0$,
- d $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, para todo $a, b > 0$,
- e $\ln(a^r) = r \ln a$ para todo $a > 0$ e r racional.

Demonstração. O item (a) segue diretamente da definição pois

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$

A diferenciabilidade de $\ln x$, bem como o item (b) são consequências do Teorema Fundamental do Cálculo I 13.23:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

A continuidade da função logaritmo é consequência de sua diferenciabilidade. Para demonstrar o item (c), seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Pela Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x}.$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ têm a mesma derivada; então, pelo Corolário 11.18, diferem por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C.$$

Fazendo $x = 1$, temos que $\ln a = C$. Assim,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a,$$

e substituindo $x = b$, temos a propriedade (c). O item (c) também pode ser demonstrado do seguinte modo

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Agora, fazemos a substituição $u = t/x$ e, assim, temos

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{1}{xu} x du = \int_1^y \frac{1}{u} du = \ln(y).$$

Para demonstrar o item (d), utilizaremos o item (c) com $a = 1/b$; temos que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln b = \ln 1 = 0, \quad \text{portanto} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b.$$

Agora,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Para o item (e), escreva $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$. O item (c), aplicado repetidamente, dá $\ln(z^n) = n \ln z$; com $z = a^{1/n}$, segue que $\ln(a^{1/n}) = \ln a/n$. Para $m > 0$, uma nova aplicação do item (c) fornece $\ln(a^{m/n}) = (m/n) \ln a$. O caso $m = 0$ segue de $a^0 = 1$, e o caso $m < 0$, do item (d) e da identidade $a^{-q} = 1/a^q$. ■

Exemplo 13.40.

Calcule $\int_2^6 \frac{1}{t} dt$ usando a definição integral do logaritmo e suas propriedades.

<

Solução. Pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_2^6 \frac{1}{t} dt = \ln 6 - \ln 2 = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln 3.$$

A conta mostra geometricamente a propriedade de quociente do logaritmo: a acumulação de $1/t$ entre 2 e 6 depende apenas da razão $6/2$. ■

13.7.1. Gráfico do logaritmo

Da definição integral obtivemos propriedades algébricas do logaritmo. Sua derivada permitirá recuperar também as características do gráfico, usando os critérios de crescimento e concavidade já estudados.

13.41 Proposição

A função $\ln x$ é crescente e seu gráfico é côncavo para baixo em todos os pontos.

Demonstração. Como a derivada de $\ln x$ é sempre positiva, o logaritmo é crescente e como a derivada segunda é sempre negativa, $\ln''(x) = -1/x^2$, o logaritmo é côncavo para baixo em $(0, +\infty)$. ■

Observe que, em particular, esta proposição implica que $\ln x$ é injetiva.

13.42 Proposição

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

Demonstração. Observe que $\ln 2 > 0$ e para $n \in \mathbb{N}$, $\ln 2^n = n \ln 2$. Como $\ln x$ é crescente, quando $x > 2^n$, $\ln(x) > n \ln 2$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln 2 = \infty$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$. ■

13.43 Proposição

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Demonstração. Se $0 < x < 1$, então $(1/x) > 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = \infty$. Seja $y = 1/x$; então $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(1/y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(1) - \ln(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} -\ln(y) = -\infty$. ■

Logo, o domínio de $\ln$ é $(0, \infty)$ e a imagem é $\mathbb{R}$: pela continuidade e pelos limites nas duas extremidades, todos os valores reais são atingidos. O gráfico aparece na Figura 13.20.

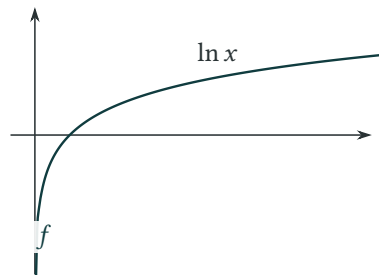


Figura 13.20. O logaritmo natural é crescente, côncavo para baixo e tem assíntota vertical em $x = 0$.

Como $\ln 1 = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente, pelo Teorema do Valor Intermediário 7.36, existe um número para o qual $\ln x$ assume o valor 1. Esse número é denotado por e .

13.7 Definição

Denotamos por e o número tal que $\ln e = 1$.

Esta definição é consistente com a definição anterior de e por um limite. Primeiro, a identidade $\ln(a^r) = r \ln a$ estende-se de expoentes racionais a reais: tome racionais $r_j \rightarrow r$ e use a continuidade de $r \mapsto a^r$, já estudada, e a de $\ln$.

Para $f(x) = \ln x$, temos $f'(1) = 1$. Pela definição de derivada,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Para $h > -1$, $h \neq 0$, a propriedade das potências fornece

$$\ln((1+h)^{1/h}) = \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

A função $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, estritamente crescente e sobrejetora; sua inversa é, portanto, contínua. Aplicando essa inversa ao limite anterior,

$$(1+h)^{1/h} = \ln^{-1}\left(\frac{\ln(1+h)}{h}\right) \rightarrow \ln^{-1}(1) = e.$$

Assim, a existência do limite decorre da continuidade da inversa, sem pressupor a existência do limite da potência. A mudança $h = 1/x$ recupera a definição com $x \rightarrow +\infty$.

13.7.2. Função exponencial

A análise anterior mostrou que $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é bijetora. Podemos, portanto, recuperar a função exponencial de modo intrínseco, como a inversa do logaritmo definido pela integral.

13.8 Definição

A função inversa de $\ln(x)$ é denominada **função exponencial natural** e denotada por $y = \exp(x)$.

O domínio da função $\exp(x)$ é o conjunto dos números reais, e sua imagem é $(0, \infty)$. Observe que, como $\exp(x)$ é a inversa de $\ln(x)$, $\exp(\ln x) = x$ para $x > 0$, e $\ln(\exp x) = x$ para todo x . Além disso, como consequência das propriedades do $\ln(x)$ temos que $\exp(1) = e$, $\exp(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty$, e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$.

13.44 Proposição

A função exponencial é diferenciável em todos os pontos do domínio e

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x).$$

Demonstração. Pelo Teorema da Função Inversa, $\exp(x)$ possui derivada em todos os pontos. O teorema também nos diz qual é a derivada. Alternativamente, podemos calcular a derivada usando diferenciação implícita: Seja $y = \exp x$; então, $\ln y = x$. Diferenciando em relação a x , chegamos a $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1$. Assim, $\frac{dy}{dx} = y = \exp x$. ■

Como $\exp x > 0$, a função exponencial é crescente e seu gráfico é côncavo para cima.

Exemplo 13.45.

Se

$$F(x) = \int_1^{\exp(2x)} \frac{1}{t} dt,$$

simplifique $F(x)$ e determine $F'(x)$.

◁

Solução. Pela definição do logaritmo e pela relação entre funções inversas,

$$F(x) = \ln(\exp(2x)) = 2x.$$

Consequentemente, $F'(x) = 2$. O mesmo resultado aparece diretamente pelo Primeiro Teorema Fundamental e pela regra da cadeia:

$$F'(x) = \frac{1}{\exp(2x)} 2 \exp(2x) = 2.$$

■

Exercícios

Ex. 13.25 Calcule $\int_3^{3e^2} \frac{1}{t} dt$.

$G'(x)$ e simplifique $G(x)$.

Ex. 13.26 Para $G(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{1}{t} dt$, determine

Ex. 13.27 Use a identidade $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ e o fato de que $\exp$ é a inversa de $\ln$ para mostrar que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Com isso, fecha-se o percurso iniciado pelas somas de Riemann: a integral define uma função, o Primeiro Teorema Fundamental identifica sua derivada e o Segundo permite voltar das antiderivadas ao cálculo da acumulação. Os exercícios seguintes articulam essas três perspectivas.

Exercícios

Ex. 13.28 Escreva, sem calcular o limite, uma soma de Riemann pelo ponto médio para $\int_1^3 (2x^2 - x) dx$ com n subintervalos. Identifique Δx e o ponto de amostragem.

Ex. 13.31 Calcule $\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3} dx$ por substituição. Compare a mudança de limites com o procedimento de voltar à variável original.

Ex. 13.29 Calcule a área total entre o gráfico de $y = x^2 - 2x - 3$ e o eixo x no intervalo $[0, 4]$. Explique por que uma única integral assinada não basta.

Ex. 13.32 Use integração por partes para calcular $\int_0^2 xe^{-x} dx$. Qual das etapas muda quando a integral é definida?

Ex. 13.30 Se $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(1+t^3) dt$, determine $F'(x)$ e $F'(0)$.

Ex. 13.33 A velocidade de um elevador é $v(t) = 2t - 0,3t^2$ m/s para $0 \leq t \leq 6$. Determine o deslocamento e a distância percorrida. Verifique se é necessário separar intervalos.

Ex. 13.34 Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x}$ em $[0, 9]$ e um número $c \in [0, 9]$ tal que $f(c)$ seja esse valor médio.

Ex. 13.35 A potência consumida por um dispositivo é $P(t) = 50 + 10 \cos(\pi t/4)$ W, $0 \leq t \leq 8$ s. Determine a energia consumida no intervalo e a potência média.

Ex. 13.36 Use $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ para justificar que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, com $a, b > 0$.

Ex. 13.37 A concentração de poluente num rio é dada por $c(t)$ mg/L e a vazão é constante, q L/min. Explique por que $q \int_0^{60} c(t) dt$ representa a massa de poluente que passa por uma seção em uma hora.

14

Técnicas de integração

A melhor maneira de explicar é fazer

Alice no País das Maravilhas, Lewis Carroll

O Teorema Fundamental do Cálculo reduz muitos problemas de integração ao problema de encontrar primitivas. Não existe, porém, uma única regra capaz de integrar todas as funções elementares. A estrutura do integrando orienta a escolha do método. Funções racionais conduzem a frações parciais; potências trigonométricas são reorganizadas por identidades; certas raízes quadradas sugerem substituições trigonométricas. A escolha de uma técnica pode exigir sua combinação com outras, de acordo com a forma do integrando.

14.1. Frações parciais

Uma função racional pode ser decomposta em uma soma de termos mais simples de integrar. O método das *frações parciais* obtém essa decomposição a partir da fatoração do denominador. Considere a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios reais, Q não é o polinômio nulo e consideramos os pontos em que $Q(x) \neq 0$. Se o grau de P é maior ou igual ao de Q , começamos pela divisão polinomial:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde S e R são polinômios e o resto R é nulo ou tem grau menor que o de Q . Quando o grau de P for menor que o grau de Q , dizemos que $P(x)/Q(x)$ é uma **função racional própria**. Essa será a primeira etapa da técnica de integração de funções racionais: realizar a divisão de polinômios de modo a obter uma função racional própria.

Neste capítulo

14.1	Frações parciais	433
14.2	* Decomposição em frações parciais	447
14.3	Integrais trigonométricas	452
14.4	Substituição trigonométrica	461
14.5	* A substituição de Weierstrass $u = \tan(x/2)$	468
14.6	Estratégias de integração	470

A divisão polinomial inicial

Se o grau do numerador não é menor que o do denominador, a divisão polinomial separa uma parte polinomial de uma fração própria. A decomposição em frações parciais é aplicada apenas à parte fracionária; a parte polinomial é integrada diretamente.

Exemplo 14.1.

Calcule $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} dx$.

<

Fazendo a divisão polinomial

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 2x + 1) \div (x - 1) = x^2 + x + 3 + \frac{4}{x - 1} \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 x^2 + 2x \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 3x + 1 \\
 \underline{-3x + 3} \\
 4
 \end{array}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} dx &= \int \left(x^2 + x + 3 + \frac{4}{x - 1} \right) dx \\
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln |x - 1| + C.
 \end{aligned}$$

A segunda etapa da técnica de integração de funções racionais consiste em fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. Pode ser mostrado que qualquer polinômio real não nulo $Q(x)$ pode ser fatorado como produto de fatores lineares e de fatores quadráticos irredutíveis. Um fator quadrático é dito **irredutível** se não tiver raízes reais, ou seja, se $\Delta < 0$. Portanto, qualquer polinômio real não nulo $Q(x)$ pode ser fatorado como produto de termos da forma:

$$(ax + b)^m \quad (cx^2 + dx + e)^n$$

O seguinte quadro estabelece como decompor uma função racional como uma soma de funções racionais cujos denominadores são potências dos fatores lineares ou quadráticos irredutíveis de $Q(x)$.

Numeradores e fatores irredutíveis

Em cada parcela, o numerador tem grau menor que o fator irredutível correspondente: uma constante para um fator linear, e $Bx + C$ para um fator quadrático. Isso continua valendo quando o denominador da parcela é uma potência desse fator.

Decomposição em Frações Parciais

Seja $\frac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional na qual o grau de P é menor que o grau de Q . Para obtermos a decomposição em frações parciais, repetimos os passos abaixo para cada fator linear e para cada fator quadrático irredutível de $Q(x)$.

1. **Termos Lineares:** Se $(x - a)$ divide $Q(x)$, seja $(x - a)^n$ a maior potência de $(x - a)$ que divide $Q(x)$. Então a decomposição de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ conterá a soma de termos

$$\frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n}.$$

2. **Termos quadráticos:** Se $x^2 + bx + c$ é irredutível e divide $Q(x)$, seja $(x^2 + bx + c)^n$ a maior potência de $x^2 + bx + c$ que divide $Q(x)$. Então a decomposição de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ conterá a soma de termos

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + bx + c)^n}.$$

De posse dos termos que aparecem na decomposição em frações parciais, para determinar os coeficientes A_i , B_i e C_i :

1. Multiplique as frações por $Q(x)$, simplifique o denominador. Agrupe os termos de mesmo grau.
2. Iguale os coeficientes das mesmas potências de x e resolva o sistema de equações lineares resultante.
3. O truque de Heaviside apresentado abaixo pode ajudar a simplificar o sistema.

Explicamos os detalhes dessa expansão através dos diferentes casos que podem ocorrer.

14.1.1. Fatores lineares

14.2 Teorema

Para cada fator da forma $(ax+b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_m$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 14.3 – Decompondo em Frações Parciais.

Encontre a Decomposição em Frações Parciais de $\frac{1}{x^2-1}$.

<

Solução. O denominador fatora-se em um produto de termos lineares: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Logo, temos a seguinte expansão:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Para determinar as constantes A e B , multiplique ambos os lados por $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{A(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{B(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= A(x+1) + B(x-1) \\ &= Ax + A + Bx - B \end{aligned}$$

Agrupe os termos de mesmo grau

$$= (A+B)x + (A-B).$$

Temos a igualdade

$$1 = (A+B)x + (A-B).$$

Por clareza, reescrevemos o lado esquerdo como

$$0x + 1 = (A+B)x + (A-B).$$

No lado esquerdo, o coeficiente do termo x é 0; à direita, é $(A+B)$. Uma vez que ambos os lados são iguais, temos que $0 = A+B$. De modo análogo, no lado esquerdo, o termo constante é 1; no lado direito, o termo constante é $(A-B)$. Logo, temos $1 = A-B$. Temos um sistema linear com 2 equações e duas variáveis. Resolvendo temos

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ A-B &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1/2 \\ B &= -1/2 \end{aligned}.$$

Logo

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}.$$

■

Exemplo 14.4 — Integrando usando Frações Parciais.

Utilize a decomposição em frações parciais para integrar

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx.$$

<

Solução. Observe que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. O método de frações parciais fornece a decomposição

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

e portanto $A(x-2) + B(x-1) = x+3$ ou $(A+B)x - 2A - B = x+3$. Como os polinômios são idênticos, seus coeficientes devem ser iguais. Logo, $A+B=1$ e $-2A-B=3$. Resolvendo, obtemos $A=-4$ e $B=5$ e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx &= \int \left(\frac{-4}{x-1} + \frac{5}{x-2} \right) dx \\ &= -4 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + k. \end{aligned}$$

■

14.5 Observação Método de Heaviside

O método de Heaviside facilita a determinação dos coeficientes da decomposição a partir de uma identidade polinomial. Como a igualdade de polinômios deve ser satisfeita para todos os valores de x , tomaremos alguns valores particulares para os quais a igualdade se simplifica, em especial, tomaremos as raízes dos termos lineares.

Ilustraremos a utilização do método no exemplo no qual devemos determinar A, B na expansão

$$\frac{3x+1}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}.$$

Para isso multiplique os dois lados por $(x+3)(x+1)$:

$$3x+1 = A(x+1) + B(x+3).$$

Como a equação anterior deve ser satisfeita para todos os valores de x , tomaremos alguns valores particulares para os quais a igualdade se simplifica, em especial, tomaremos as raízes dos termos lineares. Aplicando essa escolha à identidade anterior:

Tome $x = -1$ para obter $-2 = 2B$ e portanto $B = -1$.

Tome $x = -3$ para obter $-8 = (-2)A$ e portanto $A = 4$.

A identidade usada por Heaviside

Depois de eliminar os denominadores, trabalhamos com uma identidade polinomial, válida também nas raízes desses denominadores. Substituir tais raízes pode isolar coeficientes. A substituição é feita nessa identidade, não na fração original, que não está definida nesses pontos.

Exemplo 14.6 — Integrando usando Frações Parciais.

Utilize a decomposição em frações parciais para integrar

$$\int \frac{x^3}{(x-5)(x+3)} dx.$$

<

Solução. A estratégia de decomposição apresentada acima pressupõe que o grau do numerador seja menor que o do denominador. Como esse não é o caso, começamos usando a divisão polinomial para reduzir o grau do numerador.

$$\begin{array}{r} (x^3) \div (x^2 - 2x - 15) = x + 2 + \frac{19x + 30}{x^2 - 2x - 15} \\ -x^3 + 2x^2 + 15x \\ \hline 2x^2 + 15x \\ -2x^2 + 4x + 30 \\ \hline 19x + 30 \end{array}$$

Assim

$$\frac{x^3}{(x-5)(x+3)} = x + 2 + \frac{19x + 30}{(x-5)(x+3)}.$$

Usando frações parciais, fazemos a expansão

$$\frac{19x + 30}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

para valores apropriados A e B . Logo

$$\begin{aligned} 19x + 30 &= A(x+3) + B(x-5) \\ &= (A+B)x + (3A-5B). \end{aligned}$$

que implica que

$$\begin{aligned} 19 &= A + B \\ 30 &= 3A - 5B. \end{aligned}$$

resolvendo o sistema linear

$$\begin{aligned} 125/8 &= A \\ 27/8 &= B. \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-5)(x+3)} dx &= \int \left(x + 2 + \frac{125/8}{x-5} + \frac{27/8}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{125}{8} \ln|x-5| + \frac{27}{8} \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 14.7 — Integrando usando Frações Parciais.

Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$.

<

Solução. Primeiramente observamos que 1 é raiz de $x^3 - x^2 - x + 1$, logo $(x-1)$ é um fator. Fazendo a divisão de polinômios obtemos $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$. Consequentemente a decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Expandindo, temos que $2x+1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$. Utilizaremos o método de Heaviside. Fazendo $x = 1$ obtemos $3 = 2C$ ou seja $C = \frac{3}{2}$. Fazendo $x = -1$, obtemos $-1 = 4A$ ou seja $A = -\frac{1}{4}$. Finalmente fazendo $x = 0$, obtemos $1 = -\frac{1}{4} - B + \frac{3}{2}$ e assim $B = \frac{1}{4}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

■

Exercícios**Ex. 14.1**

tegre

Decomponha em frações parciais e in-

Ex. 14.3

Calcule

$$\int \frac{3x+5}{x^2-x-2} dx.$$

$$\int \frac{4x-1}{x(x+2)} dx.$$

Ex. 14.2

Decomponha e integre

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2} dx.$$

14.1.2. Fatores quadráticos

Nem todo polinômio se decompõe em fatores lineares reais. Quando aparecem fatores quadráticos sem raízes reais, precisamos ampliar a decomposição e reconhecer como integrar os novos termos. Completar quadrados será a ligação com as primitivas já conhecidas.

Queremos calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{ax^2 + bx + c} dx,$$

onde P é um polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então devemos reescrever o denominador como soma de quadrados. Em seguida, fazemos uma mudança de variável e calculamos a integral. Antes de ampliar a decomposição em frações parciais para esse caso, mostraremos como integrar os termos que ela produz.

Exemplo 14.8.

Calcule $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx$.

<

Solução. Escrevamos o denominador como soma de quadrados $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$. Fazendo a substituição $u = x + 1$, temos $du = dx$;

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{2(u - 1) + 1}{u^2 + 1} du \\ &= \int \frac{2u}{u^2 + 1} du + \int \frac{-1}{u^2 + 1} du \\ &= \ln(1 + u^2) - \arctg u + C \\ &= \ln(1 + (x + 1)^2) - \arctg(x + 1) + C. \end{aligned}$$

■

Exemplo 14.9.

Calcule $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$.

<

Solução. Como o grau do numerador é igual ao grau do denominador, primeiro vamos dividir os polinômios,

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{(2x - 1)^2 + 2}.$$

Fazendo $u = 2x - 1$ ou $x = \frac{u+1}{2}$, temos $du = 2 dx$, assim

$$\begin{aligned} & \int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx \\ &= \int \left(1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2 + 2} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{u+1}{2} - 1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{4} \int \frac{u-1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{4} \int \frac{u}{u^2 + 2} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 2} du \\ &= x + \frac{1}{8} \ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= x + \frac{1}{8} \ln((2x-1)^2 + 2) - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

■

14.10 Teorema

Para cada fator quadrático irredutível $(ax^2 + bx + c)^n$, com $n \geq 1$ igual à sua multiplicidade no denominador, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de n frações parciais

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

onde $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_n$ são constantes reais a serem determinadas.

Exemplo 14.11 – Decompondo em Frações Parciais.

Decomponha $f(x) = \frac{1}{(x+5)(x-2)^3(x^2+x+2)(x^2+x+7)^2}$ em frações parciais, mas não determine os coeficientes resultantes.

<

Solução. O denominador já se encontra fatorado, já que $x^2 + x + 2$ e $x^2 + x + 7$ são irredutíveis. Como $(x+5)$ é um termo linear que divide o denominador, teremos o termo

$$\frac{A}{x+5}$$

na decomposição. Como $(x-2)^3$ divide o denominador, teremos os seguintes termos na decomposição :

$$\frac{B}{x-2}, \quad \frac{C}{(x-2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{D}{(x-2)^3}.$$

O fator $x^2 + x + 2$ no denominador fornece o termo $\frac{Ex + F}{x^2 + x + 2}$. Finalmente, o termo

$(x^2 + x + 7)^2$ gera os seguintes termos na decomposição

$$\frac{Gx + H}{x^2 + x + 7} \quad \text{e} \quad \frac{Ix + J}{(x^2 + x + 7)^2}.$$

Juntando tudo temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+5)(x-2)^3(x^2+x+2)(x^2+x+7)^2} \\ = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} + \\ \frac{Ex+F}{x^2+x+2} + \frac{Gx+H}{x^2+x+7} + \frac{Ix+J}{(x^2+x+7)^2} \end{aligned}$$

Determinar os coeficientes $A, B, \dots, J$ seria um processo tedioso. ■

Exemplo 14.12 — Integrando usando Frações Parciais.

Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx$.

◁

Solução. Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, comecemos fazendo a divisão polinomial:

$$\begin{array}{r} \left(\begin{array}{r} x^5 \\ -x^5 + 8x^2 \end{array} + x + 1 \right) \div (x^3 - 8) = x^2 + \frac{8x^2 + x + 1}{x^3 - 8} \\ \hline 8x^2 + x + 1 \end{array}$$

Como $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, temos

$$\frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} = x^2 + \frac{8x^2 + x + 1}{x^3 - 8} = x^2 + \frac{8x^2 + x + 1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}.$$

Pelo método de frações parciais,

$$\frac{8x^2 + x + 1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

Então, $8x^2 + x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$. Fazendo $x = 2$ obtemos $35 = 12A$ ou $A = \frac{35}{12}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $1 = 4A - 2C$ ou $C = \frac{16}{3}$. Fazendo $x = 1$, obtemos $10 = 7A - B - C$ ou $B = \frac{61}{12}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{8x^2 + x + 1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} dx &= \frac{35}{12} \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{\frac{61}{12}x + \frac{16}{3}}{x^2 + 2x + 4} dx \\ &= \frac{35}{12} \ln|x - 2| + \frac{1}{12} \int \frac{61x + 64}{x^2 + 2x + 4} dx. \end{aligned}$$

Para calcular a última integral, escrevemos $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$ e fazemos $u = x + 1$ ou $x = u - 1$ e $du = dx$; portanto,

$$\int \frac{61x + 64}{x^2 + 2x + 4} dx = \int \frac{61x + 64}{(x + 1)^2 + 3} dx = \int \frac{61(u - 1) + 64}{u^2 + 3} du$$

$$\begin{aligned}
 &= 61 \int \frac{u}{u^2 + 3} du + 3 \int \frac{1}{u^2 + 3} du = \frac{61}{2} \ln(u^2 + 3) + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C \\
 &= \frac{61}{2} \ln((x+1)^2 + 3) + \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{35}{12} \ln|x-2| + \frac{61}{24} \ln((x+1)^2 + 3) \\
 &\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 14.13 – Integrando usando Frações Parciais.

Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2(x-1)} dx$.

<

Solução. Expandindo em frações parciais temos:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

Para calcular a, b, c , colocamos o lado direito com o mesmo denominador:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2(x-1)} = \frac{ax(x-1) + b(x-1) + cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(a+c)x^2 + (b-a)x - b}{x^2(x-1)}.$$

Igualando os coeficientes obtemos o sistema

$$a + c = 1, \quad b - a = 2, \quad -b = 5$$

Resolvendo, obtemos a expansão em frações parciais:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2(x-1)} = -\frac{7}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x-1}.$$

Integrando cada um dos termos da direita, obtemos:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2(x-1)} dx = -7 \ln|x| + \frac{5}{x} + 8 \ln|x-1| + C.$$

■

Exemplo 14.14 – Integrando usando Frações Parciais.

Utilize a decomposição em frações parciais para integrar

$$\int \frac{7x^2 + 31x + 54}{(x+1)(x^2 + 6x + 11)} dx.$$

<

Expandindo em frações parciais

$$\frac{7x^2 + 31x + 54}{(x+1)(x^2 + 6x + 11)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 6x + 11}.$$

Colocando no mesmo denominador

$$\begin{aligned} 7x^2 + 31x + 54 &= A(x^2 + 6x + 11) + (Bx + C)(x + 1) \\ &= (A + B)x^2 + (6A + B + C)x + (11A + C). \end{aligned}$$

o que implica:

$$\begin{aligned} 7 &= A + B \\ 31 &= 6A + B + C \\ 54 &= 11A + C. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = 5$, $B = 2$ e $C = -1$. Logo

$$\int \frac{7x^2 + 31x + 54}{(x+1)(x^2 + 6x + 11)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2 + 6x + 11} \right) dx.$$

O primeiro termo é fácil de integrar e é igual a $5 \ln|x+1|$. O segundo termo exigirá um pouco mais de trabalho. O integrando $\frac{2x-1}{x^2 + 6x + 11}$ possui um termo quadrático no denominador e um termo linear no numerador. Isso nos leva a tentar uma substituição. Faremos a substituição $u = x^2 + 6x + 11$, logo $du = (2x + 6) dx$. Como o numerador é $2x - 1$, e não $2x + 6$, podemos obter o termo $2x + 6$ no numerador adicionando e subtraindo 7.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x^2 + 6x + 11} &= \frac{2x-1+7-7}{x^2 + 6x + 11} \\ &= \frac{2x+6}{x^2 + 6x + 11} - \frac{7}{x^2 + 6x + 11}. \end{aligned}$$

Podemos agora integrar o primeiro termo por substituição, obtendo $\ln|x^2 + 6x + 11|$. O termo final pode ser integrado usando arco-tangente. Em primeiro lugar, completamos o quadrado no denominador:

$$\frac{7}{x^2 + 6x + 11} = \frac{7}{(x+3)^2 + 2}.$$

Fazendo a substituição $u = x + 3$ obtemos

$$\int \frac{7}{x^2 + 6x + 11} dx = \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Juntando tudo

$$\begin{aligned} &\int \frac{7x^2 + 31x + 54}{(x+1)(x^2 + 6x + 11)} dx \\ &= \int \left(\frac{5}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2 + 6x + 11} \right) dx \\ &= \int \frac{5}{x+1} dx + \int \frac{2x+6}{x^2 + 6x + 11} dx - \int \frac{7}{x^2 + 6x + 11} dx \\ &= 5 \ln|x+1| + \ln|x^2 + 6x + 11| - \frac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Nem sempre o método de frações parciais é o método mais simples, como ilustra o exemplo a seguir:

Exemplo 14.15.

Calcule $\int \frac{x^3 + 2}{(x-1)^2} dx$.

<

Solução. Essa integral pode ser calculada por frações parciais, mas nesse caso é melhor fazer uma mudança de variáveis. Seja $u = x - 1$ ou $x = u + 1$ e $du = dx$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{(u+1)^3 + 2}{u^2} du \\ &= \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}{u^2} du \\ &= \frac{u^2}{2} + 3u + 3 \ln |u| - \frac{3}{u} + C \\ &= \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + C. \end{aligned}$$

■

Exercícios

Ex. 14.4 Decomponha $\frac{1}{x^2 - 3x}$ em frações parciais.

4. $\int \frac{x-3}{x^2 + 3x + 2} dx$

Ex. 14.5 Decomponha $\frac{7-x}{x^2 - 9}$ em frações parciais.

Ex. 14.8 Seja $\alpha \neq 0$. Mostre que:

$$\int \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctg\left(\frac{x}{\alpha}\right) + k$$

Ex. 14.6 Dados α, β, m, n constantes, com $\alpha \neq \beta$ use esse fato para calcular as integrais: mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx + n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

1. $\int \frac{1}{5+x^2} dx$

2. $\int \frac{1}{3+4x^2} dx$

Ex. 14.7 Usando o exercício anterior calcule as seguintes integrais:

3. $\int_0^1 \frac{3x+1}{5+x^2} dx$

1. $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$

2. $\int_7^9 \frac{x-1}{x(x-2)} dx$

3. $\int \frac{x-1}{x^2-4} dx$

Ex. 14.9 Dados $\alpha, m, n \in \mathbb{R}$, mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx + n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Ex. 14.10 Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

$$1. \int \frac{1}{x^2 - 9} dx$$

$$2. \int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$3. \int_3^4 \frac{x+3}{(x-1)^2} dx$$

$$4. \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx$$

$$5. \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} dx$$

$$6. \int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)} dx$$

$$7. \int \frac{x^4 + x + 1}{x^3 - x} dx$$

Ex. 14.11 Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

$$1. \int \frac{20x^2 + 28x}{(x+2)(4x^2 + 3x - 2)} dx$$

$$2. \int \frac{3x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x^2 + 16)} dx$$

$$3. \int \frac{5x^2 + 7x - 9}{(x-2)(x^2 + 4x + 13)} dx$$

$$4. \int \frac{x^2 + 3x + 9}{x^2 + 2x + 17} dx$$

$$5. \int \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 4x} dx$$

$$6. \int \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x - 8}{x(x-1)(x+4)} dx$$

$$7. \int \frac{8x^3 + 11x^2 + 6x + 8}{(x+1)^2(x^2 + 4)} dx$$

Ex. 14.12 Calcule as seguintes integrais

$$1. \int \frac{9x+9}{(x-3)(x+6)} dx$$

$$2. \int \frac{8x-3}{x(x+1)} dx$$

$$3. \int \frac{-2}{x^2 - 16} dx$$

$$4. \int \frac{2x+15}{(x+6)^2} dx$$

$$5. \int \frac{-4x-31}{(x+9)^2} dx$$

$$6. \int \frac{8x^2 + 9x + 5}{x(x+1)^2} dx$$

$$7. \int \frac{10x^2 - 33x + 5}{(x-2)(x+5)(2x-5)} dx$$

$$8. \int \frac{49x^2 - 37x - 6}{(3x-2)(4x-1)(5x+2)} dx$$

$$9. \int \frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)(x+3)} dx$$

$$10. \int \frac{2x^3 + 6x^2 - 3x - 54}{2(x-2)(x+3)} dx$$

$$11. \int \frac{4x^2 + 20x + 44}{x^2 + 5x + 11} dx$$

$$12. \int \frac{3x^2 + x + 10}{(x+3)(x^2 + 25)} dx$$

$$13. \int \frac{7x^2 - 22x + 10}{(x-4)(x^2 + 2x + 10)} dx$$

$$14. \int \frac{x^2 + 5x + 24}{x^2 + 4x + 29} dx$$

$$15. \int \frac{1}{x(x^2 + 5x + 10)} dx$$

$$16. \int \frac{12x^2 + 24x - 4}{(x+3)(3x^2 + 2x - 5)} dx$$

$$17. \int \frac{-2x^2 - 6x - 94}{(x-5)(x^2 + 4x + 13)} dx$$

$$18. \int \frac{6x^2 - 32x + 106}{(x-6)(x^2 + 2x + 17)} dx$$

$$19. \int \frac{5x^2 + 24x + 43}{(x+3)(x^2 + 6x + 13)} dx$$

$$20. \int_0^3 \frac{9x + 14}{(x+1)(x+4)} dx$$

$$21. \int_0^2 \frac{7x + 13}{(x+1)(x+3)} dx$$

$$22. \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-8)(x^2 + 2x + 6)} dx$$

$$23. \int_0^2 \frac{x}{(x+2)^3} dx$$

$$24. \int \frac{6x + 4}{3x^2 + 4x + 1} dx$$

$$25. \int \frac{-3x^3 + 7x^2 + 12x + 52}{(x+1)(x^2 + 4)^2} dx$$

$$26. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 18x + 9}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

14.2. ★ Decomposição em frações parciais

Os exemplos anteriores mostraram como usar a decomposição em frações parciais. Para justificar por que ela existe e por que assume aquelas formas, examinaremos as propriedades algébricas dos polinômios que sustentam o método.

Nesta seção, denotaremos por $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais.

14.16 Teorema Teorema do Fator

Seja $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(c) = 0$. Então existe $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) = (x - c)Q(x)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de polinômios, a divisão de $P(x)$ por $x - c$ terá como resto uma constante (possivelmente nula), isto é, $P(x) = Q(x)(x - c) + S$. Como $P(c) = 0 = Q(c)(c - c) + S = S = 0$, logo $P(x) = Q(x)(x - c)$. ■

14.17 Teorema Frações Parciais - Raízes Reais

Sejam $P(x)$ e $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ com $Q(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então existem $B \in \mathbb{R}$ e $R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)(x-a)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)(x-a)^{n-1}} + \frac{B}{(x-a)^n}.$$

Demonstração. Colocando os dois lados sobre o mesmo denominador, queremos R e B tais que $P(x) = R(x)(x - a) + BQ(x)$. Como $P(a) = BQ(a)$, e $Q(a) \neq 0$, defina $B = P(a)/Q(a)$. Defina $h(x) = P(x) - BQ(x)$. Pela definição de B , é claro que $h(a) = 0$. Pelo Teorema 14.16, existe $R \in \mathbb{R}[x]$ tal que $h(x) = R(x)(x - a) = P(x) - BQ(x)$. Logo, $P(x) = R(x)(x - a) + BQ(x)$. ■

Como consequência, temos:

14.18 Corolário

Sejam $P(x)$ e $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ com $Q(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Então existem $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{R}$ e $R \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)(x-a)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)} + \frac{B_1}{(x-a)} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{B_n}{(x-a)^n}.$$

Assim, se $b \in \mathbb{R}$ é raiz de $Q(x)$ do corolário acima, podemos aplicar o próprio corolário a $\frac{R(x)}{Q(x)}$ e prosseguir na expansão em frações parciais. Para tratar fatores quadráticos sem raízes reais, continuaremos inteiramente em $\mathbb{R}$. A ideia é determinar diretamente o numerador linear que corresponde a um fator quadrático.

14.19 Teorema Frações Parciais – Fatores Quadráticos sem Raízes Reais

Sejam $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ e

$$q(x) = x^2 + bx + c, \quad b^2 - 4c < 0,$$

com q não dividindo Q . Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, então existem $B, C \in \mathbb{R}$ e $R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)q(x)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)q(x)^{n-1}} + \frac{Bx + C}{q(x)^n}.$$

Demonstração. Pela divisão de polinômios por q , escrevemos

$$P(x) = T(x)q(x) + px + r, \quad Q(x) = S(x)q(x) + ux + v,$$

com $p, r, u, v \in \mathbb{R}$. Como q não divide Q , temos $(u, v) \neq (0, 0)$.

Queremos escolher B e C de modo que

$$P(x) - (Bx + C)Q(x)$$

seja divisível por q . Ao dividir $(Bx + C)(ux + v)$ por $q(x) = x^2 + bx + c$, podemos substituir o termo x^2 por $-bx - c$ ao calcular o resto. Assim, esse resto é

$$[(v - bu)B + uC]x + [-cuB + vC].$$

Portanto, basta resolver

$$\begin{cases} (v - bu)B + uC = p, \\ -cuB + vC = r. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por v , a segunda por u e subtraindo, obtemos

$$(v^2 - buv + cu^2)B = pv - ru.$$

O coeficiente de B é estritamente positivo, pois

$$v^2 - buv + cu^2 = \left(v - \frac{b}{2}u\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)u^2 > 0.$$

De fato, $b^2 - 4c < 0$ e $(u, v) \neq (0, 0)$. Assim, B é unicamente determinado. Se $u \neq 0$, a primeira equação determina C ; se $u = 0$, então $v \neq 0$ e a segunda equação determina C .

Com essa escolha, o polinômio

$$h(x) = P(x) - (Bx + C)Q(x)$$

tem resto zero na divisão por q . Logo existe $R \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$P(x) = R(x)q(x) + (Bx + C)Q(x).$$

Dividindo por $Q(x)q(x)^n$, obtemos a fórmula anunciada. ■

Aplicando o teorema repetidamente, obtemos o análogo do corolário anterior.

14.20 Corolário

Sejam $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ e $q(x) = x^2 + bx + c$, com $b^2 - 4c < 0$ e q não dividindo Q .

Para $n \geq 1$, existem $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ e $R \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)q(x)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)} + \frac{B_1x + C_1}{q(x)} + \frac{B_2x + C_2}{q(x)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{q(x)^n}.$$

Exemplo 14.21 — Dois fatores lineares distintos.

Decomponha

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 2)}.$$

◁

Solução. Escrevemos

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Multiplicando pelo denominador e tomando $x = 1$ e $x = -2$, obtemos $A = B = 1$.

Portanto,

$$\frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}.$$

■

Exemplo 14.22 — Fator linear repetido.

Decomponha

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2}.$$

<

Solução. A forma prevista pelo corolário é

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Da identidade obtida ao eliminar os denominadores, $x = 0$ fornece $A = 1$ e $x = 1$ fornece $C = 2$. Comparando o coeficiente de x^2 , obtemos $B = -1$. Assim,

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

■

Exemplo 14.23 — Fator linear e fator quadrático.

Decomponha

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)}.$$

<

Solução. Escrevemos

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Multiplicando pelo denominador,

$$x^2+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Tomando $x = 1$, obtemos $A = 3/2$; a comparação dos coeficientes restantes fornece $B = C = -1/2$. Logo,

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

■

Exemplo 14.24 — Fator linear repetido e fator quadrático.

Decomponha

$$\frac{3x^2+1}{(x-2)^2(x^2+4)}.$$

<

Solução. A decomposição tem a forma

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Eliminando os denominadores e comparando coeficientes, obtemos

$$A = \frac{11}{16}, \quad B = \frac{13}{8}, \quad C = -\frac{11}{16}, \quad D = 0.$$

Portanto,

$$\frac{3x^2+1}{(x-2)^2(x^2+4)} = \frac{11}{16(x-2)} + \frac{13}{8(x-2)^2} - \frac{11x}{16(x^2+4)}.$$

■

Exemplo 14.25 — Outro fator quadrático irredutível.

Decomponha

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}.$$

<

Solução. Tomamos

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

A identidade

$$x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

fornece $A = 1$, $B = -1$ e $C = 2$. Assim,

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2+1}.$$

■

Exercícios

Ex. 14.13 Escreva, sem determinar os coeficientes, a forma da decomposição de

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2(x^2+4)}.$$

Ex. 14.15

Decomponha

$$\frac{2x+5}{x(x-2)^2}.$$

Ex. 14.14

Decomponha

$$\frac{4x+1}{(x-1)(x+3)}.$$

Ex. 14.16

Decomponha

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+4)}.$$

14.3. Integrais trigonométricas

Nas funções racionais, a fatoração separa o integrando em parcelas mais simples. Nas expressões trigonométricas, as identidades cumprem papel semelhante: reorganizam as potências de seno, cosseno, tangente e secante de modo que uma substituição ou uma fórmula básica possa ser aplicada.

Exemplo 14.26.

Calcule $\int \sin^5 x \cos x \, dx$

<

Solução. Na integral em questão podemos realizar a substituição simples $u = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos x \, dx &= \int u^5 \, du \quad \text{Fazendo a substituição } u = \sin x \\ &= \frac{1}{6} \sin^6 x + C\end{aligned}$$

■

Exemplo 14.27.

Calcule $\int \cos^5 x \, dx$.

<

Solução. A substituição $u = \cos x$ exigiria um fator $\sin x$ que não aparece no integrando. Podemos, porém, escolher $u = \sin x$: separamos um fator cosseno e convertimos o fator $\cos^4 x$ restante em uma expressão que envolva o seno, usando a identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: Observe que $\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$.

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 \, du \quad \text{Fazendo } u = \sin x, \, du = \cos x \, dx. \\ &= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du \\ &= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C\end{aligned}$$

■

Como a paridade orienta a substituição

Uma potência ímpar de seno permite separar um fator $\sin x$ e escrever o restante em termos de cosseno, usando $u = \cos x$. Para uma potência ímpar de cosseno, procede-se de modo análogo. Quando ambas são pares, as identidades de meia-ângulo reduzem as potências.

Exemplo 14.28.

Calcule $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

<

Solução. Neste caso, o expoente do seno é ímpar e o do cosseno é par. Separamos um fator seno e expressamos os fatores restantes em termos do cosseno.

$$\begin{aligned}\sin^5 x \cos^2 x &= (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \\ &= (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos x$ temos $du = -\sin x \, dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= - \int (1 - u^2)^2 u^2 \, du \\ &= - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\ &= - \left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + C \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.\end{aligned}$$

■

O único caso que ainda não analisamos é aquele em que ambos os expoentes são pares. Nesse caso, a técnica que usamos nos primeiros exemplos simplesmente não funcionará. A estratégia é utilizar uma ou mais das fórmulas a seguir para reescrever o integrando.

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]\end{aligned}$$

Exemplo 14.29.

Calcule $\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$.

<

Solução. Como as potências de seno e cosseno são ambas pares, procedemos como segue:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) dx \\ &= \int \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx \\ &= \int \frac{1}{8} (1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)) dx\end{aligned}$$

O termo $\cos(2x)$ é fácil de integrar. O termo $\cos^2(2x)$ exige que reduzamos a potência novamente. O termo $\cos^3(2x)$ possui potência ímpar e, para calculá-la, utilizaremos uma substituição.

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C.$$

$$\int \cos^2(2x) dx = \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin(4x) \right) + C.$$

Finalmente, para $\cos^3(2x)$, temos

$$\cos^3(2x) = \cos^2(2x) \cos(2x) = (1 - \sin^2(2x)) \cos(2x).$$

Fazendo $u = \sin(2x)$, temos $du = 2 \cos(2x) dx$, logo

$$\begin{aligned} \int \cos^3(2x) dx &= \int (1 - \sin^2(2x)) \cos(2x) dx \\ &= \int \frac{1}{2} (1 - u^2) du \\ &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin(2x) - \frac{1}{3} \sin^3(2x) \right) + C \end{aligned}$$

Agrupando, temos:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{8} (1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin(4x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\sin(2x) - \frac{1}{3} \sin^3(2x) \right) \right] + C \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{6} \sin^3(2x) \right] + C \end{aligned}$$

■

Exemplo 14.30.

Calcule $\int \sin^4(x) dx$.

<

Solução. Nesse caso o expoente do seno é par (e podemos considerar o fator $\cos^0 x$) e utilizaremos as identidades $\sin^2(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)]$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sin^4(x) dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos(2x))^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos(2x) + \cos^2(2x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos(2x) + \frac{1}{2} (1 + \cos(4x)) \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{8} \right) + C. \end{aligned}$$

Exemplo 14.31.

Calcule a seguinte integral $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

Solução. Faremos de dois modos: **Solução 1**

No primeiro modo utilizaremos as identidades $\sin^2(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)]$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) \, dx \end{aligned}$$

Novamente reutilizaremos a fórmula de ângulo duplo:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int 1 - \frac{1}{2} [1 + \cos(4x)] \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x) \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin(4x) \right] + C \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + C \end{aligned}$$

Solução 2

No segundo modo utilizaremos a identidade:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int [\sin x \cos x]^2 \, dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int 1 - \cos(4x) \, dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + C \end{aligned}$$

Estratégia para avaliar $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$
 Para m, n inteiros não negativos,

a Se n for ímpar,

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{(2k+1)} x \, dx &= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x \, dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Então faça $u = \sin x$.

b Se m for ímpar,

$$\begin{aligned} \int \sin^{(2k+1)} x \cos^n x \, dx &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Então faça $u = \cos x$.

c Se m e n forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos metade

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Algumas vezes pode ser útil a identidade

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x).$$

Quando tivermos produtos de senos e cossenos podemos usar também as identidades:

a $2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b),$

b $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b),$

c $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b).$

Exemplo 14.32.

Calcule $\int \sin(3x) \cos(2x) \, dx$.

◁

Solução. Como $\sin(3x) \cos(2x) = \frac{1}{2}[\sin(5x) + \sin(x)]$. Então,

$$\begin{aligned}\int \sin(3x) \cos(2x) \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(5x) + \sin x] \, dx \\ &= -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{2} \cos x + C.\end{aligned}$$

■

Estratégia para avaliar

$$\int \sin(mx) \cos(nx) \, dx \quad \int \sin(mx) \sin(nx) \, dx \quad \int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$$

Utilize a identidade correspondente:

☐ a $2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b),$

☐ b $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b),$

☐ c $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b).$

Podemos usar uma estratégia semelhante para avaliar integrais envolvendo potências de tangente e secante.

Exemplo 14.33.

Calcule $\int \sec^3 x \, dx$.

◁

Solução. Faremos de dois modos. No primeiro modo converteremos em senos e cossenos:

$$\sec^3(x) = \frac{1}{\cos^3(x)} = \frac{\cos(x)}{(1 - \sin^2(x))^2}$$

Como $\cos x$ aparece com uma potência ímpar, a substituição $u = \sin x$ transforma a integral em uma função racional:

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \frac{du}{(1 - u^2)^2}$$

A última integral admite a seguinte expansão em frações parciais

$$\frac{1}{(1 - u^2)^2} = \frac{1/4}{1 - u} + \frac{1/4}{(1 - u)^2} + \frac{1/4}{1 + u} + \frac{1/4}{(1 + u)^2}.$$

Calculando as antiderivadas termo a termo temos

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1-u^2)^2} &= -\frac{1}{4} \ln(1-u) + \frac{1}{4(1-u)} + \frac{1}{4} \ln(1+u) - \frac{1}{4(1+u)} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+u}{1-u} + \frac{1}{2} \frac{u}{1-u^2} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + C.\end{aligned}$$

No segundo método utilizaremos integral por partes

$$\int \sec^3 x \, dx = \int u \, dv$$

com

$$\begin{aligned}dv &= \sec^2 x \, dx, \\ v &= \operatorname{tg} x, \\ u &= \sec x, \\ du &= \sec x \operatorname{tg} x \, dx.\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \left(\int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx \right) \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx.\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}2 \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \, dx \\ &= \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.\end{aligned}$$

E logo

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C_1.$$

■

14.34 Observação Uma terceira substituição

Em um intervalo em que $\cos x$ não se anula, seu sinal $\sigma \in \{-1, 1\}$ é constante.

Com $u = \operatorname{tg} x$, temos $du = \sec^2 x \, dx$ e $\sec x = \sigma\sqrt{1+u^2}$, portanto

$$\int \sec^3 x \, dx = \sigma \int \sqrt{1+u^2} \, du.$$

A integral do lado direito será calculada por substituição trigonométrica na próxima seção. Sua primitiva é $\frac{\sigma}{2}[u\sqrt{1+u^2} + \ln(u + \sqrt{1+u^2})]$. Ao voltar a x , ela fornece a mesma fórmula dos dois métodos anteriores. Quando $\sigma = -1$, usamos $(\sqrt{1+u^2} - u)(\sqrt{1+u^2} + u) = 1$ para simplificar o logaritmo. Assim, o método também respeita os intervalos em que a secante é negativa.

Exemplo 14.35.

Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

<

Observe que $\operatorname{tg}^6 x \sec^4 x = \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x = \operatorname{tg}^6 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x$. Fazendo $u = \operatorname{tg} x$ temos $du = \sec^2 x \, dx$ e assim

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^6 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx = \int u^6(1 + u^2) \, du \\ &= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

Exemplo 14.36.

Calcule $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x \, dx$.

<

Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x &= \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x \\ &= (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Fazendo $u = \sec x$ temos $du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$ e assim

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sec^{11} x}{11} - 2\frac{\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

Para m, n inteiros não negativos,

a Se $n \geq 2$ for par,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \operatorname{tg}^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Então faça $u = \operatorname{tg} x$.

b Se m for ímpar e $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{(2k+1)} x \sec^n x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx. \end{aligned}$$

Então faça $u = \sec x$.

Exercícios

Ex. 14.17 Calcule as seguintes integrais

1. $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

4. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$

5. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \, dx$

7. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$

8. $\int \operatorname{sen}(5x) \cos(3x) \, dx$

9. $\int \operatorname{sen}(x) \cos(2x) \, dx$

10. $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(7x) \, dx$

11. $\int \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi x) \, dx$

12. $\int \cos(x) \cos(2x) \, dx$

13. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(\pi x) \, dx$

14. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \, dx$

15. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x \, dx$

16. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx$

17. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx$

18. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$

19. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^5 x \, dx$

20. $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$

21. $\int \sec^5 x \, dx$

22. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$

23. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \, dx$

24. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx$

25. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

26. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \, dx$

2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cos(2x) \, dx$

3. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \, dx$

4. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x \, dx$

Ex. 14.19 Calcule:

1. $\int \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(8x) \, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^3(x) \, dx$

3. $\int \cos^2(4x) \, dx$

4. $\int \operatorname{sen}(x) \cos^4(5x) \, dx$

5. $\int \operatorname{sen}(2x) \cos^2(2x) \, dx$

6. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(2x) \cos^2(2x) \, dx$

7. $\int_0^{\pi} \cos(x) \cos^2(4x) \, dx$

Ex. 14.18 Calcule as seguintes integrais.

1. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(5x) \cos(3x) \, dx$

14.4. Substituição trigonométrica

As identidades trigonométricas também podem simplificar integrais cujo integrando original não contém funções trigonométricas. Ao escolher uma nova variável, podemos transformar certas expressões com raízes quadradas em expressões trigonométricas para as quais já dispomos de métodos de integração. Em particular, fixado $a > 0$, queremos calcular integrais que contêm expressões da forma:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad \sqrt{a^2 + x^2} \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

Identidades e sinais na substituição

A substituição trigonométrica transforma a expressão sob a raiz em um quadrado. Para $a > 0$ e $x = a \operatorname{sen} \theta$, por exemplo, a raiz de $a^2 - x^2$ se torna $a|\cos \theta|$. A escolha do intervalo de θ permite determinar o sinal e retirar o módulo corretamente.

A estratégia para calcular tais integrais é fazer uma substituição que elimine o radical. Por exemplo, para eliminar $\sqrt{a^2 - x^2}$ faça $x = a \sin \theta$. Logo $\theta = \arcsen(x/a)$, para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Nesse intervalo, $\cos \theta \geq 0$, logo

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 14.37.

Calcule $\int \sqrt{9 - x^2} dx$.

◁

Solução. Como $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$, então $9 - 9 \sin^2 t = 9 \cos^2 t$, a mudança $x = 3 \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, elimina a raiz do integrando. Temos $dx = 3 \cos t dt$. Então,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= 3 \int \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cos t dt \\ &= 3 \int \sqrt{9 \cos^2 t} \cos t dt \\ &= 9 \int |\cos t| \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt \end{aligned}$$

pois $\cos t \geq 0$ se $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= 9 \int \cos^2 t dt \\ &= 9 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \sin(2t) + C = \frac{9}{2} t + \frac{9}{2} \sin t \cos t + C \end{aligned}$$

Devemos retornar à variável x original. Como $x = 3 \sin t$ e $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, segue que $t = \arcsen(x/3)$ e $\cos t = \sqrt{9 - x^2}/3$; logo,

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2} \arcsen(x/3) + \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + C, \quad -3 < x < 3.$$

■

Substituição Trigonométrica

a Para integrandos contendo $\sqrt{a^2 - x^2}$:

Faça $x = a \sin \theta$, $dx = a \cos \theta \, d\theta$

Logo $\theta = \arcsin(x/a)$, para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

No intervalo, $\cos \theta \geq 0$, logo

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

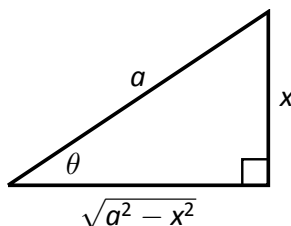


Figura 14.1. Substituição trigonométrica para $\sqrt{a^2 - x^2}$.

b Para integrandos contendo $\sqrt{x^2 + a^2}$:

Faça $x = a \tan \theta$, $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$

Logo $\theta = \arctan(x/a)$, para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

No intervalo, $\sec \theta > 0$, logo

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$$

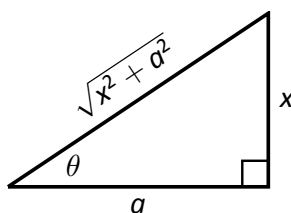


Figura 14.2. Substituição trigonométrica para $\sqrt{x^2 + a^2}$.

c Para integrandos contendo $\sqrt{x^2 - a^2}$:

Faça $x = a \sec \theta$, $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$

Logo $\theta = \operatorname{arcsec}(x/a)$. Se $x/a \geq 1$, então $0 \leq \theta < \pi/2$; se $x/a \leq -1$, então $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

Restringimos a $x \geq a$; logo, $x/a \geq 1$ e $0 \leq \theta < \pi/2$. No intervalo, $\tan \theta \geq 0$; logo,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$$

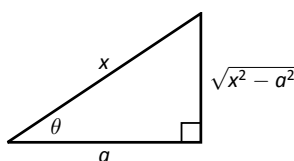


Figura 14.3. Substituição trigonométrica para $\sqrt{x^2 - a^2}$.

A substituição no ramo negativo

Para $a > 0$ e $x \leq -a$, a escolha $x = -a \sec \theta$, com $0 \leq \theta < \pi/2$, transforma $\sqrt{x^2 - a^2}$ em $a \tan \theta$. O sinal negativo permanece na derivada da substituição: ele não pode ser descartado ao transformar o diferencial.

Exemplo 14.38 — Usando Substituição Trigonométrica.

Calcule $\int \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} dx$.

◁

Solução. Reconhecemos facilmente a escolha $a = \sqrt{5}$ e fazemos $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Dessa forma, $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta$. Usaremos o fato de que $\sqrt{5+x^2} = \sqrt{5+5 \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{5 \sec^2 \theta} = \sqrt{5} \sec \theta$. Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{5+5 \operatorname{tg}^2 \theta}} \sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{5} \sec^2 \theta}{\sqrt{5} \sec \theta} d\theta \\ &= \int \sec \theta \, d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C. \end{aligned}$$

Resta expressar a primitiva em termos de x , a variável do problema original. O triângulo de referência (b) da substituição trigonométrica ajuda. Como $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} dx &= \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

Podemos deixar esta resposta como está, ou podemos usar uma identidade logarítmica para simplificá-la. Observe:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| + C &= \ln \left| \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{x^2+5} + x) \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \right| + \ln |\sqrt{x^2+5} + x| + C \\ &= \ln |\sqrt{x^2+5} + x| + C, \end{aligned}$$

o termo $\ln(1/\sqrt{5})$ é absorvido na constante C . ■

Exemplo 14.39 — Usando Substituição Trigonômétrica.

Calcule $\int \sqrt{4x^2 - 1} \, dx$.

◁

Solução. Começamos reescrevendo o integrando na forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ para algum valor de a :

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 - 1} &= \sqrt{4 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right)} \\ &= 2 \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que $a = 1/2$ e, seguindo a ideia da substituição trigonométrica (c),

começamos pelo ramo $x > 1/2$ e fazemos $x = \frac{1}{2} \sec \theta$, com $0 < \theta < \pi/2$. Logo, $dx = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$. Fazendo as substituições, temos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x^2 - 1} \, dx &= \int 2\sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \, dx \\ &= \int 2\sqrt{\frac{1}{4} \sec^2 \theta - \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta\right) \, d\theta \\ &= \int \sqrt{\frac{1}{4}(\sec^2 \theta - 1)} (\sec \theta \operatorname{tg} \theta) \, d\theta \\ &= \int \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \theta} (\sec \theta \operatorname{tg} \theta) \, d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \theta \sec \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Calculamos a integral de $\sec^3 \theta$ no Exemplo 14.33:

$$\int \sec^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} (\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|) + C.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x^2 - 1} \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sec^3 \theta - \sec \theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (\sec \theta \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|) - \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| \right) + C \\ &= \frac{1}{4} (\sec \theta \operatorname{tg} \theta - \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|) + C. \end{aligned}$$

Retornamos à variável inicial. Com $a = 1/2$ e $x = \frac{1}{2} \sec \theta$, o triângulo da substituição trigonométrica (c) mostra que

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{x^2 - 1/4} / (1/2) = 2\sqrt{x^2 - 1/4} \quad \text{e} \quad \sec \theta = 2x.$$

Logo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} (\sec \theta \operatorname{tg} \theta - \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|) + C \\ &= \frac{1}{4} (2x \cdot 2\sqrt{x^2 - 1/4} - \ln |2x + 2\sqrt{x^2 - 1/4}|) + C \\ &= \frac{1}{4} (4x\sqrt{x^2 - 1/4} - \ln |2x + 2\sqrt{x^2 - 1/4}|) + C. \end{aligned}$$

Assim

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{4} (4x\sqrt{x^2 - 1/4} - \ln |2x + 2\sqrt{x^2 - 1/4}|) + C.$$

A expressão final também é uma primitiva em $x < -1/2$, como se verifica por diferenciação: $\frac{d}{dx} \ln |2x + \sqrt{4x^2 - 1}| = 2/\sqrt{4x^2 - 1}$ nos dois ramos. As constantes podem ser escolhidas independentemente em cada intervalo. ■

Exemplo 14.40 — Usando Substituição Trigonométrica.

Calcule $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

◁

Solução. Usando a Substituição Trigonométrica (a) com $a = 2$, $x = 2 \operatorname{sen} \theta$, $dx = 2 \cos \theta d\theta$, com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ e $\theta \neq 0$ e logo $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos \theta$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{2 \cos \theta}{4 \operatorname{sen}^2 \theta} (2 \cos \theta) d\theta \\ &= \int \cotg^2 \theta d\theta \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -\cotg \theta - \theta + C. \end{aligned}$$

Para reescrever a resposta em termos de x , utilizaremos o triângulo de referência da substituição trigonométrica (a); assim, $\cotg \theta = \sqrt{4-x^2}/x$ e $\theta = \operatorname{arcsen}(x/2)$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

■

Exemplo 14.41 — Usando Substituição Trigonométrica.

Calcule $\int \frac{1}{x^2+1} dx$.

◁

Solução. Já sabemos que a integral anterior é $\operatorname{arctg} x + C$. Aplicamos a substituição trigonométrica para mostrar que obtemos a mesma resposta sem depender do conhecimento da derivada da função arco-tangente. Fazendo a substituição (b), tome $x = \operatorname{tg} \theta$, $dx = \sec^2 \theta d\theta$ e note que $x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+1} dx &= \int \frac{1}{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int 1 d\theta \\ &= \theta + C. \end{aligned}$$

Como $x = \operatorname{tg} \theta$ e $\theta = \operatorname{arctg} x$, concluímos que $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C$.

■

Tabela 14.1. Substituições Trigonômétricas

Expressão no integrando	Substituição	Restrição	Simplificação
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$	$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta$ $= a^2 \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta$	$-\pi/2 < \theta < \pi/2$	$a^2 + x^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta$ $= a^2 \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$0 \leq \theta < \pi/2$ se $x \geq a$	$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2$ $= a^2 \operatorname{tg}^2 \theta$

Exercícios

Ex. 14.20 Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado, indicando seus lados e o domínio utilizado.

1. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx$

2. $\int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx$

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

4. $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{4 - 9x^2} dx$

5. $\int x \sqrt{1 - x^4} dx$

6. $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{5/2}}$

5. $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$

6. $\int \sqrt{x^2 - 25} dx$

7. $\int \sqrt{9x^2 + 1} dx$

8. $\int \sqrt{1 - 4x^2} dx$

9. $\int \sqrt{25x^2 - 1} dx$

10. $\int \frac{6}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$

11. $\int \frac{5}{\sqrt{11 - x^2}} dx$

12. $\int \frac{7}{\sqrt{x^2 - 12}} dx$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} dx$

14. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 13}}{x} dx$

15. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 - 6}} dx$

16. $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$

Ex. 14.21

1. $\int \sqrt{x^2 + 5} dx$

2. $\int \sqrt{x^2 + 9} dx$

3. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

4. $\int \sqrt{25 - x^2} dx$

$$17. \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 13)^2} dx$$

$$25. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 16}} dx$$

$$18. \int \frac{x}{(x^2 + 16)^{3/2}} dx$$

$$26. \int \sqrt{x^2 - 6x + 13} dx$$

$$19. \int x^2(4 - x^2)^{-3/2} dx$$

Ex. 14.22

$$20. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$1. \int_0^3 \sqrt{x^2 + 16} dx$$

$$21. \int \frac{\sqrt{8 - x^2}}{5x^2} dx$$

$$2. \int_{-3}^3 \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$22. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} dx$$

$$3. \int_{-2}^2 \sqrt{16 - x^2} dx$$

$$23. \int_0^3 \sqrt{25 - x^2} dx$$

$$4. \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$24. \int_5^{13} \sqrt{x^2 - 25} dx$$

14.5. ★ A substituição de Weierstrass $u = \operatorname{tg}(x/2)$

Há uma ligação adicional entre os métodos estudados: certas integrais trigonométricas podem ser transformadas em integrais de funções racionais. A substituição de Weierstrass estabelece essa ligação e permite recorrer, quando necessário, às frações parciais.

Se um integrando é uma função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, ele pode ser reduzido a uma função racional de u pela substituição de Weierstrass $u = \operatorname{tg}(x/2)$. Trabalhamos em intervalos que não contêm pontos $x = (2k + 1)\pi$, onde a substituição não está definida. Nesses intervalos, o fato pode ser verificado observando que

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(x/2) \cos(x/2) = 2 \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)} \cos^2(x/2).$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

De modo análogo, temos:

$$\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(x/2) = \cos^2(x/2) \sec^2(x/2) - 2 \cos^2(x/2) \operatorname{tg}^2(x/2),$$

logo,

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Intervalos da substituição de Weierstrass

A substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ não atravessa os pontos $x = (2k + 1)\pi$. Esses pontos, porém, podem pertencer ao domínio do integrando. Nesse caso, fórmulas obtidas em intervalos vizinhos precisam ser compatibilizadas para representar uma mesma primitiva através deles.

Dessa forma, ao realizarmos a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Como $u = \operatorname{tg}(x/2)$, temos que $du = \frac{1}{2} \sec^2(x/2) dx = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2(x/2)) dx$. Logo,

$$dx = \frac{2 du}{1+u^2}$$

Exemplo 14.42.

Calcule $\int \operatorname{cosec} x \, dx$

<

Fazendo $t = \operatorname{tg}(x/2)$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

Exemplo 14.43.

Calcule $\int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} dx$.

<

Fazendo $u = \operatorname{tg}(x/2)$, temos que $du = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2(x/2)) dx$, então $dx = \frac{2}{1+u^2} du$.
Utilizando as identidades trigonométricas anteriores,

$$\cos x + \operatorname{sen} x = \frac{1-u^2+2u}{1+u^2}.$$

Assim,

$$\int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} dx = 2 \int \frac{1}{1-u^2+2u} du,$$

a qual pode ser integrada utilizando frações parciais. Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u^2+2u} &= -\frac{1}{u^2-2u-1} = -\frac{1}{(u-a)(u-b)} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b} \right), \end{aligned}$$

onde $a = 1 + \sqrt{2}$ e $b = 1 - \sqrt{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\ln|u-b| - \ln|u-a|) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\ln|\operatorname{tg}(x/2) - 1 + \sqrt{2}| - \ln|\operatorname{tg}(x/2) - 1 - \sqrt{2}|) + C. \end{aligned}$$

14.6. Estratégias de integração

Alice perguntou: “Poderia me dizer, por favor, que caminho devo tomar ...?”

“Isso depende bastante de onde você quer chegar”, disse o Gato.

“O lugar não me importa muito...”, disse Alice.

“Então não importa que caminho tomar”, disse o Gato.

Alice no País das Maravilhas, Lewis Carroll

Conhecer várias técnicas amplia nossas possibilidades, mas também exige decidir por onde começar. Para orientar essa escolha, organizaremos uma estratégia geral de integração que ajuda a reconhecer simplificações, identificar formas conhecidas e reformular o problema.¹ A estratégia tem três etapas:

■ SIMPLIFICAR;

■ CLASSIFICAR;

■ MODIFICAR.

No passo 1, SIMPLIFICAR, procuramos reescrever o integrando em uma forma mais simples de integrar. Quando isso não é suficiente, o passo 2, CLASSIFICAR, usa a forma do integrando para orientar a escolha de técnicas como integração por partes e substituição. Se formos incapazes de classificar o integrando, passamos para a etapa 3, MODIFICAR. Nesse caso, temos que manipular o integrando de uma ou mais formas. Devemos sempre buscar alternativas simples antes de iniciar os cálculos mais complicados e iniciar o processo com o passo 1 sempre que conseguirmos transformar a integral para algo mais fácil. Há algumas observações a fazer sobre essa estratégia. Primeiro, ela não é um conjunto rígido de regras para determinar o método a ser usado, mas um conjunto geral de diretrizes que nos ajudam a identificar as técnicas que podem funcionar. Algumas integrais podem ser calculadas de mais de uma maneira; assim, dependendo do caminho escolhido, pode-se chegar a uma técnica diferente daquela usada por outra pessoa que também segue essas estratégias.

SIMPLIFICAR

Antes de aplicar uma técnica de integração, convém verificar se uma simplificação algébrica permite reconhecer uma primitiva conhecida. O quadro a seguir reúne dois procedimentos frequentes.

A verificação pela derivada

Uma resposta para uma integral indefinida deve ter derivada igual ao integrando em todo o intervalo considerado. A aparência da fórmula não decide sua correção: expressões diferentes podem representar primitivas que diferem apenas por uma constante.

¹Essa estratégia é baseada na estratégia apresentada em Schoenfeld, 1978 e sua eficiência é discutida em Kallam e Kallam, 1996.

Simplificar antes de escolher

Antes de procurar uma técnica especial, tente reduzir o integrando a uma forma conhecida.

- Expanda, fatore, divida ou use identidades quando isso eliminar uma complicação aparente.
- Procure uma substituição imediata quando uma função aparece acompanhada de sua derivada.

Exemplo 14.44.

Antes de escolher uma técnica, simplifique os seguintes integrandos:

$$\int \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) \, dx, \quad \int \cos^2 x \, dx,$$

$$\int \frac{x-3}{x-4} \, dx, \quad \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x-1} \, dx.$$

<

Solução. No primeiro caso, basta distribuir $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x} + x.$$

No segundo, a identidade de meia-ângulo fornece

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

No terceiro, o numerador difere do denominador por 1:

$$\frac{x-3}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}.$$

No último, a divisão polinomial produz

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{2x-1} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4(2x-1)}.$$

Em cada caso, a simplificação revela imediatamente regras de integração já conhecidas. ■

Exemplo 14.45.

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$$

<

Solução. Faça $u = x^2 + 1$, $du = 2x \, dx$. Então $\int x/(x^2 + 1) \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$. ■

Exemplo 14.46.

Calcule $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$

<

Solução. Faça $u = \sqrt{x^2 - 1}$, de modo que $x \, dx = u \, du$ e $x^2 = u^2 + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 - 1} \, dx &= \int (u^4 + u^2) \, du \\ &= \frac{(x^2 - 1)^{5/2}}{5} + \frac{(x^2 - 1)^{3/2}}{3} + C, \quad |x| > 1. \end{aligned}$$

■

Exemplo 14.47.

Calcule

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sec^4 x} \, dx$$

<

Solução.

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sec^4 x} \, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos^4 x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx \quad u = \cos x \\ &= - \int u^3 \, du \\ &= -\frac{1}{4} \cos^4 x + C \end{aligned}$$

■

Exemplo 14.48.

Calcule $\int \frac{x+1}{x^2+1} \, dx$

<

Solução.

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}.$$

Logo $\int (x+1)/(x^2+1) \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + C$. ■

Exemplo 14.49.

Calcule

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

<

Solução. Para $x > 1$, faça $u = \ln x$ e $du = dx/x$. Obtemos $\int u^{-1/2} du = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$. ■

Exercícios**Ex. 14.23**

Simplifique antes de integrar:

$$\int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx.$$

Ex. 14.25

Calcule

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} dx$$

Ex. 14.24

Calcule

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx$$

começando por fatorar o numerador.

sem usar frações parciais.

Ex. 14.26

Explique por que $\int x\sqrt{x^2 + 4} dx$ deve ser simplificada por substituição direta antes de se considerar substituição trigonométrica.

CLASSIFICAR

Se as simplificações iniciais ainda não revelaram uma primitiva, a forma do integrando pode indicar um método adequado. Reconhecer uma função racional, um radical ou um produto de funções ajuda a escolher entre frações parciais, substituições e integração por partes.

Classificar pela forma do integrando

Se a simplificação não resolve o problema, procure a estrutura dominante:

- funções racionais sugerem divisão polinomial e frações parciais;
- radicais do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$ sugerem substituição trigonométrica;
- produtos de potências trigonométricas pedem primeiro as identidades e estratégias da seção correspondente;
- produtos de um polinômio com exponenciais, logaritmos ou funções trigonométricas frequentemente favorecem integração por partes;
- outros radicais podem ser simplificados por uma mudança como $u = \sqrt[n]{g(x)}$.

A classificação não determina mecanicamente o método, mas reduz o número de tentativas plausíveis.

Exemplo 14.50.

Classifique as seguintes integrais:

■ $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx$

■ $\int x^3 \sin x^2 dx$

■ $\int \sin(3x) \cos(8x) dx$

■ $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx$

■ $\int \sin(5x) \cos^4(5x) dx$

■ $\int e^{3z} \cos(4z) dz$

◀

Solução. [a] Como o integrando possui uma raiz $\sqrt{4x^2 - 9}$, que pode ser simplificada para $2\sqrt{x^2 - 9/4}$, uma boa escolha é fazer uma substituição trigonométrica. [b] Nesse caso começamos com uma substituição $u = x^2$, e logo $du = 2x dx$ e após essa substituição a integral fica:

$$\frac{1}{2} \int u \sin u \, du$$

que pode ser feita por partes. [c] Essa integral é produto de senos e cossenos e pode ser convertida numa soma usando a relação:

$$2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$$

[d] Como a integral em questão envolve uma função racional com o grau do numerador maior que o denominador, a estratégia é fazer a divisão polinomial e usar integração por frações parciais. [e] Integral Trigonométrica. [f] A integral em questão pode ser calculada por integração por partes duas vezes. ■

Exemplo 14.51.

$$\int x \ln x \, dx$$

◀

Solução. Por partes, com $u = \ln x$ e $dv = x \, dx$, temos

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad x > 0.$$

■

MODIFICAR

Algumas integrais podem não se encaixar no esquema de classificação anterior e, nesse caso, podemos não conhecer uma forma adequada de resolvê-las. Uma maneira de abordar esses problemas é procurar similaridades entre essas integrais e outras que sabemos calcular. Se a forma de um problema difícil se assemelha à de um problema padrão, existem duas possibilidades: podemos conseguir reduzir o problema difícil a uma forma “padrão” ou as técnicas que usáramos no problema mais fácil podem nos ajudar a resolver o mais difícil. Observação: existem problemas de integração que parecem muito semelhantes a um problema solúvel, mas que, após um exame mais minucioso, mostram-se impossíveis de resolver com as técnicas apresentadas neste livro.

Modificar por comparação

Quando o integrando não se encaixa diretamente nas classes anteriores, compare-o com problemas que você já sabe resolver.

- Identifique uma forma próxima e pergunte o que impede o método conhecido de funcionar.
- Tente uma manipulação que produza essa forma: fatoração, racionalização, divisão ou introdução compensada de um termo.
- Depois da modificação, volte a classificar o novo integrando antes de prosseguir.

Algumas manipulações algébricas são bastante fáceis de usar e vale a pena considerá-las antes de tentar qualquer outra abordagem. Por exemplo, quase sempre decomponemos o integrando de uma soma em uma soma de integrais e depois integramos termo a termo. Antes de fazer isso, no entanto, devemos procurar outras alternativas. Uma operação mais complicada, mas que também merece ser considerada, é simplificar funções racionais por divisão polinomial. Chamamos de “fração própria” uma função racional (o quociente de dois polinômios) cujo grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Frações próprias são geralmente mais fáceis de manipular do que as impróprias.

Exemplo 14.52.

Calcule

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

<

Para $-1 < x < 1$, multiplique o numerador e o denominador por $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Portanto, $\int \sqrt{(1-x)/(1+x)} dx = \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C$. A expressão do integrando também se estende continuamente a $x = 1$.

Exemplo 14.53.

Calcule

$$\int \cos \sqrt{x} dx$$

<

Solução. Faça a substituição $u = \sqrt{x}$ então $x = u^2$ e logo $dx = 2u du$. Assim:

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx = 2 \int u \cos u \, du.$$

Por partes, $\int u \cos u \, du = u \sin u + \cos u + C$. Logo, a integral procurada é $2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$, para $x > 0$, com extensão ao extremo 0. ■

Exemplo 14.54.

Calcule

$$\int \frac{2}{3 + 2x^2} \, dx$$

◁

Solução.

$$\int \frac{2}{3 + 2x^2} \, dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right)^2} \, dx$$

Fazendo $u = \sqrt{2/3} x$, obtemos $\sqrt{2/3} \int (1 + u^2)^{-1} \, du = \sqrt{2/3} \arctg(\sqrt{2/3} x) + C$. ■

Caso nada disso funcione, tente:

- Racionalização;
- Uso de identidades trigonométricas
- Substituições “inusitadas”
- Tente modificar a integral para produzir o termo de que você precisa.
- Introduza um termo conveniente e compense sua inclusão.

Exemplo 14.55.

Calcule $\int \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$.

◁

Solução.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} dx &= \int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} dx \\
&= \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} dx \\
&= \int \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int (\sec^2 x - \operatorname{tg} x \sec x) dx \\
&= \operatorname{tg} x - \sec x + C
\end{aligned}$$

Essa expressão vale onde $\cos x \neq 0$. Para cobrir também os pontos em que $\operatorname{sen} x = 1$, escrevemos $\operatorname{tg} x - \sec x = -\cos x / (1 + \operatorname{sen} x)$ e usamos a extensão contínua. A derivada dessa última expressão é $1/(1 + \operatorname{sen} x)$ em todo o domínio original. ■

Exercícios

Ex. 14.27 Calcule:

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+3}} dx$

2. $\int \operatorname{sen}(\ln t) dt$

3. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$

5. $\int \operatorname{cossec}^6(2t) dt$

6. $\int \frac{1}{4x^2 + 4x - 3} dx$

7. $\int \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

8. $\int x^3 \operatorname{sen}(x^2) dx$

9. $\int \frac{\operatorname{senh} x}{1 + \cosh x} dx$

10. $\int e^{3z} \cos(4z) dz$

11. $\int \frac{4x^4 + x + 1}{x^5 + x^4} dx$

12. $\int \operatorname{tg}^2(2t) \sec^4(2t) dt$

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx$

14. $\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx$

15. $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5(2x) dx$

16. $\int \sqrt{y} \ln y dy$

17. $\int x^2 \sqrt{x-2} dx$

18. $\int \frac{1}{16x^2 + 9} dx$

19. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2 + 9}} dx$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{16x^2 + 9}} dx$

21. $\int \frac{\operatorname{senh}(\ln x)}{x} dx$

$$22. \int_0^{\pi} \cos(3x) \cos(8x) dx$$

Ex. 14.28 Calcule:

$$1. \int 2^{-\sqrt{x}} dx$$

$$2. \int \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}{\sec x} dx$$

$$3. \int \frac{e^{4t}}{(e^{2t} - 1)^3} dt$$

$$4. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 16}} dx$$

$$5. \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x dx$$

$$6. \int \operatorname{sen}(3x) \cos(8x) dx$$

$$7. \int \operatorname{sen}^4 x dx$$

$$8. \int \sec^2(x) dx$$

$$9. \int \sec^3(x) dx$$

$$10. \int \sec^5(x) dx$$

$$11. \int \operatorname{sen}^4 x \cos 2x dx$$

$$12. \int \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$13. \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - x} dx$$

Exercícios

Ex. 14.29 Para cada integrando, indique uma técnica inicial plausível e justifique em uma frase: $x^2 e^x$, $\operatorname{sen}^4 x$, $1/(x^2 - 9)$, $x/\sqrt{16 - x^2}$ e $\ln x$. Não calcule as integrais.

tegre

$$\int \frac{5x + 1}{(x - 1)(x + 2)} dx.$$

Verifique a decomposição antes de integrar.

Ex. 14.30 Calcule $\int x^2 \cos(3x) dx$ organizando as contas por integração por partes tabulada ou por duas aplicações explícitas da fórmula.

Ex. 14.31 Calcule $\int \cotg^3 x \operatorname{cosec}^2 x dx$ e explique por que a substituição $u = \cotg x$ é mais direta que a expansão em senos e cossenos.

Ex. 14.32 Calcule $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$ por completar quadrados e substituição trigonométrica ou pela fórmula correspondente.

Ex. 14.33 Decomponha em frações parciais e in-

Ex. 14.34 Calcule $\int \sqrt{36 - x^2} dx$ por substituição trigonométrica e interprete geometricamente a constante 36.

Ex. 14.35 Uma lente semicircular de raio 6 cm tem área dada por $\int_{-6}^6 \sqrt{36 - x^2} dx$. Escolha uma técnica de integração para confirmar sua área e compare-a com a fórmula geométrica conhecida.

Ex. 14.36 Avalie a afirmação: “se um integrando contém uma raiz quadrada, a substituição trigonométrica é sempre a melhor escolha”. Dê um contraexemplo e explique uma alternativa melhor.

15

Aplicações da integral

Dê-me um ponto de apoio e moverei a Terra.

Arquimedes, segundo Papo de Alexandria

Nas aplicações, a primeira etapa consiste em determinar qual integral representa a quantidade procurada. O princípio é o mesmo das somas de Riemann. Divide-se o objeto em pequenas partes, aproxima-se a contribuição de cada parte e passa-se ao limite. Áreas, volumes, trabalho, comprimento de arco, área de superfície e centro de massa diferem geometricamente, mas compartilham essa mesma estrutura de acumulação. Em cada caso, a escolha da variável e da contribuição elementar determina a fórmula integral.

15.1. Construção de fórmulas integrais

Considere uma função f limitada e contínua por partes em $[a, b]$ e uma partição

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do i -ésimo subintervalo e escolha uma marca $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. A soma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

é uma *soma de Riemann*. Para uma função limitada e contínua por partes, pelo Teorema 13.5, quando a malha da partição tende a zero,

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Partições uniformes serão usadas com frequência por conveniência, mas não são essenciais. O princípio é sempre o mesmo: aproximar a quantidade por uma soma de pequenas contribuições e passar ao limite. O quadro a seguir resume essa construção.

Neste capítulo

15.1 Construção de fórmulas integrais	480
15.2 Áreas	481
15.3 Volume	488
15.4 Trabalho	501
15.5 Forças hidrostáticas	507
15.6 Comprimento de arco e área superficial	512
15.7 Centro de massa	518

A contribuição de cada parte

Antes de integrar, identificamos a quantidade aproximada por $f(c_i)\Delta x_i$. Suas unidades devem ser as da grandeza procurada. Por exemplo, área de seção multiplicada por espessura produz volume; força multiplicada por deslocamento produz trabalho.

Aplicação da Estratégia de Integrais Definidas

Considere uma quantidade Q cujo valor deve ser calculado.

1. Divida a quantidade em n “subquantidades” menores de valores Q_i .
2. Identifique a variável x e a função $f(x)$ de tal forma que cada subquantidade possa ser aproximada pelo produto $f(c_i)\Delta x_i$, em que Δx_i representa uma pequena mudança em x . Assim, $Q_i \approx f(c_i)\Delta x_i$.
3. Reconheça que $Q = \sum_{i=1}^n Q_i \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$, que é uma soma de Riemann.
4. Fazendo $|P| \rightarrow 0$, obtemos $Q = \int_a^b f(x) dx$.

15.2. Áreas

15.2.1. Área entre duas curvas

O problema da área sob um gráfico pode ser ampliado para uma região entre duas curvas. Em cada faixa vertical, a contribuição passa a depender da distância entre o gráfico superior e o inferior, mantendo a mesma construção por somas de Riemann.

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, tais que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$; então, $f(x) - g(x)$ é contínua em $[a, b]$ e $f(x) - g(x) \geq 0$. Considere $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, então a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta x_i$$

é uma aproximação para a área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$.

A altura de cada faixa

Em uma faixa vertical, a altura é a diferença entre as ordenadas superior e inferior e deve ser não negativa. Quando as curvas trocam de posição, essa diferença precisa ser escrita por trechos ou com módulo. Manter a mesma ordem pode subtrair áreas em vez de somá-las.

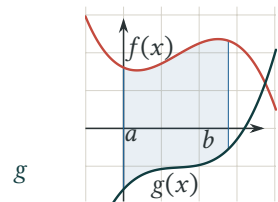


Figura 15.1. Cada retângulo tem altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$, de modo que sua área aproxima a região entre as curvas.

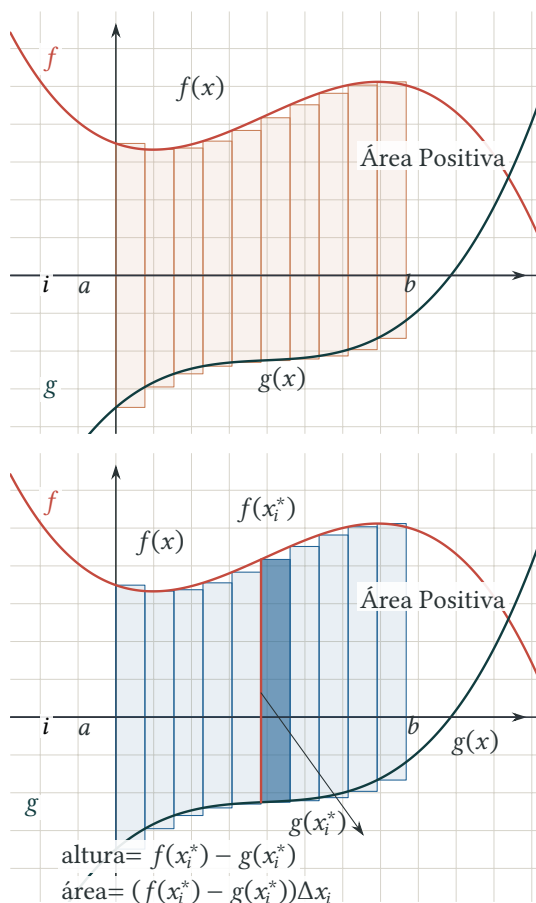


Figura 15.2. Aproximação da área entre duas curvas por retângulos.

Como $f - g$ é contínua e não negativa em $[a, b]$, o limite das somas de Riemann existe e fornece a definição seguinte.

15.1 Definição Área entre curvas — faixas verticais

Sejam f e g contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x)$ em todo o intervalo. A área da região limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ e $x = b$ é

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Exemplo 15.1.

Calcule a área da região limitada por $y = xe^{-x^2}$, $y = e^x$, $x = -1$ e $x = 1$.

◁

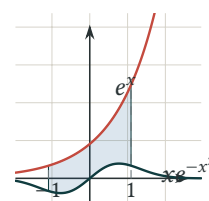


Figura 15.3. Região limitada por $y = xe^{-x^2}$, $y = e^x$, $x = -1$ e $x = 1$.

Solução. Para $-1 \leq x \leq 0$, temos $xe^{-x^2} \leq 0 < e^x$. Para $0 < x \leq 1$, vale $xe^{-x^2} \leq x \leq 1 < e^x$. Portanto, a área é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (e^x - xe^{-x^2}) dx \\ &= \int_{-1}^1 e^x dx - \int_{-1}^1 xe^{-x^2} dx \end{aligned}$$

A segunda integral é nula por paridade. Também podemos usar a primitiva $-e^{-x^2}/2$ para seu integrando:

$$\begin{aligned} &= [e^x]_{-1}^1 + \frac{1}{2} [e^{-x^2}]_{-1}^1 \\ &= \left(e^x + \frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.2.

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

<

Solução. Primeiramente, determinaremos os pontos nos quais as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ se intersectam. Igualando as equações, temos que $x^2 = \sqrt{x}$; resolvendo, obtemos que as curvas se intersectam em $x = 0$ e $x = 1$. Observamos que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, 1]$. Consequentemente, a área é dada pela integral:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}.$$

■

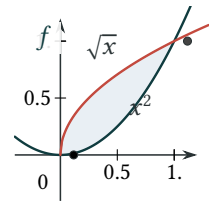


Figura 15.4. Área entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Exemplo 15.3.

Mostre que a área do círculo de raio r é πr^2 .

<

Solução. A área do círculo de raio r pode ser calculada pela integral

$$\int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})] dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Para calcular a integral, faremos a substituição: $x = r \sin \theta$ e assim $dx = r \cos \theta d\theta$. Usamos aqui a substituição trigonométrica estudada na Seção 14.4. Com essa substi-

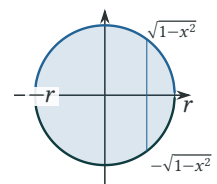


Figura 15.5. A área do círculo é duas vezes a área sob o semicírculo superior $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

tuição, temos que: $\theta = \arcsen\left(\frac{x}{r}\right)$

$$\begin{aligned}\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 \theta)} \cdot r \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} \left(\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{\pi r^2}{2}\end{aligned}$$

Portanto, a área do círculo é $2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2$. ■

15.2.2. Integrando em relação a y

A escolha das faixas deve acompanhar a forma da região. Quando suas fronteiras são mais simples de descrever como funções de y , faixas horizontais podem facilitar o cálculo; nesse caso, integramos em relação a y a distância entre as fronteiras direita e esquerda. Considere, por exemplo, a região R delimitada pelos gráficos de $x = f(y)$ e $x = g(y)$, em que $f(y) \geq g(y)$, e pelas linhas horizontais $y = c$ e $y = d$. Nesse caso, a área é obtida integrando em relação a y a distância entre as fronteiras direita e esquerda.

Faixas horizontais

Ao integrar em relação a y , a largura da faixa é a abscissa da fronteira direita menos a da esquerda, ambas expressas em função de y . Sua espessura é dy , e os limites de integração são valores de y , não de x .

15.2 Definição Área entre curvas — faixas horizontais

Sejam f e g contínuas em $[c, d]$, com $f(y) \geq g(y)$ em todo o intervalo. A área da região limitada por $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$ é

$$A = \int_c^d (f(y) - g(y)) \, dy.$$

Exemplo 15.4.

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x - 2$ e $x = y^2$

◁

Solução. Começaremos calculando a intersecção das duas curvas: Igualando as equações, temos $x = y + 2 = y^2$ e, logo, $y^2 - y - 2 = 0$. Assim, as curvas se intersectam em $y = -1$ e $y = 2$. Integrando em relação a y , temos:

$$A = \int_{-1}^2 ((y+2) - y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

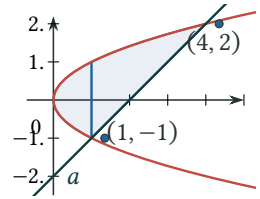


Figura 15.6. Região limitada por $y = x - 2$ e $x = y^2$.

15.2.3. Curvas que se entrelaçam

Até aqui, identificamos uma curva superior e uma inferior em todo o intervalo. Se os gráficos se cruzam e trocam de posição, essa ordem precisa ser examinada por trechos. Para calcular a área entre f e g , dividimos a região nos pontos de troca e, em cada sub-região, integramos a diferença entre a função que está acima e a que está abaixo.

Exemplo 15.5.

Encontre a área da região R limitada pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = \frac{2}{\pi}x - 1$ e as retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$.

Intersecção e troca de posição

Uma intersecção não implica necessariamente troca entre a curva superior e a inferior: os gráficos podem apenas se tocar. Para montar a área por trechos, verificamos a ordem das funções entre as intersecções. É a troca de posição que exige inverter a diferença.

Solução.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi/2} [f(x) - g(x)] dx \quad f(x) > g(x) \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\cos x - \left(\frac{2}{\pi}x - 1 \right) \right] dx \\ &= \left[\sin x - \frac{x^2}{\pi} + x \right]_0^{\pi/2} = \frac{4 + \pi}{4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\pi/2}^{\pi} [g(x) - f(x)] dx \quad g(x) > f(x) \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{2}{\pi}x - 1 - \cos x \right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{\pi} - x - \sin x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4 + \pi}{4} \end{aligned}$$

Assim, a área total é

$$A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{\pi}{2}$$

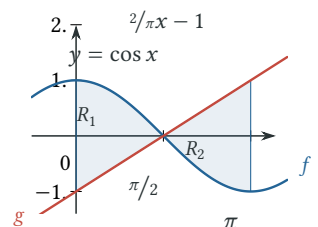
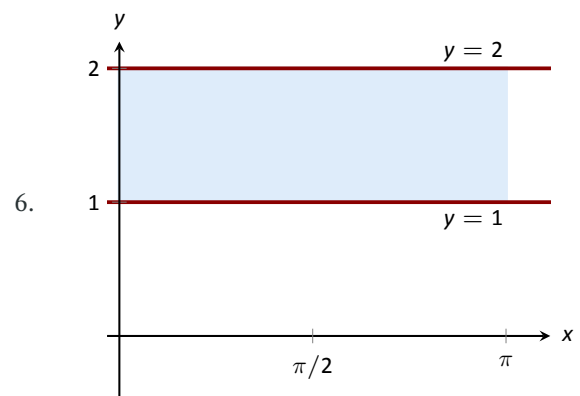
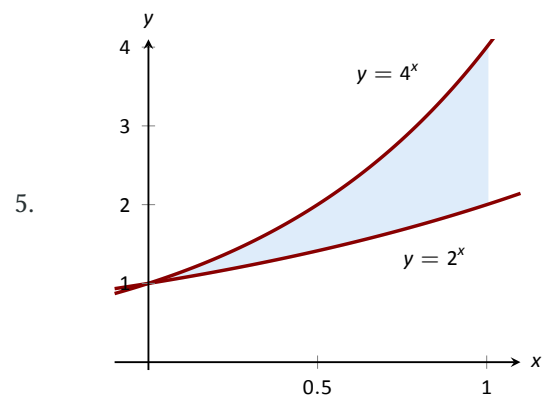
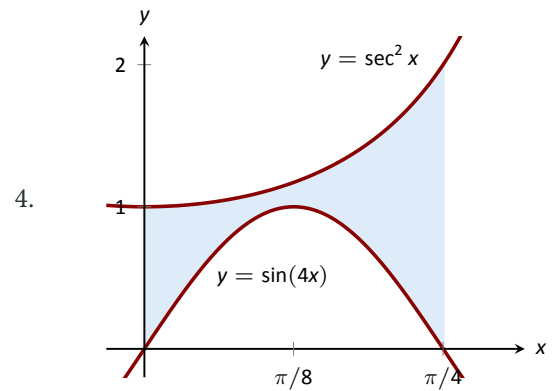
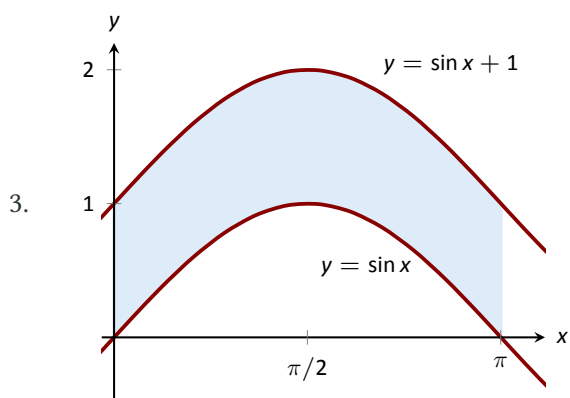
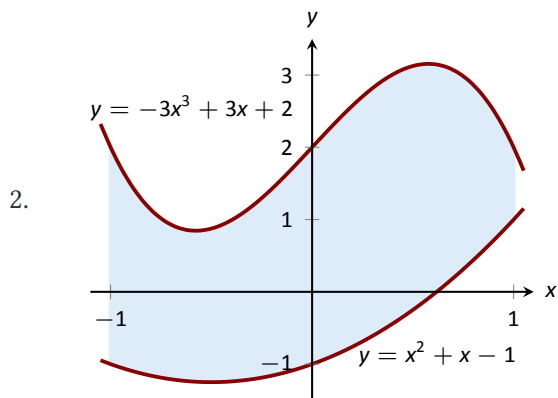
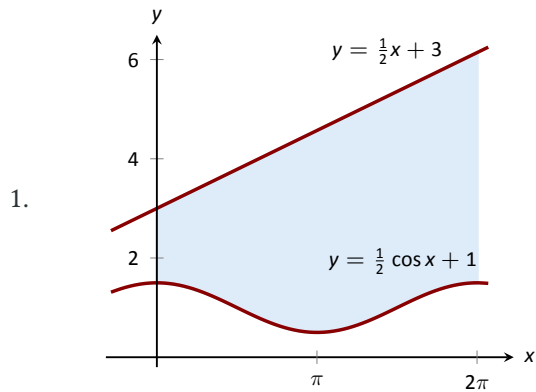


Figura 15.7. Regiões entre $y = \cos x$ e $y = 2x/\pi - 1$ no intervalo $[0, \pi]$.

Exercícios

Ex. 15.1 Nos seis itens seguintes, encontre a área da região sombreada no gráfico.



Ex. 15.2 Esboce a região delimitada pelas curvas e decida se a integração deve ser feita em relação à variável x ou y . Desenhe um retângulo típico com sua altura e largura. Finalmente ache a área da região.

1. $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$

2. $y = \sin(x)$, $y = x^2$

3. $y = x^2$, $y = x^4$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad x + y = 1$

5. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

6. $x = 2y^2 \quad x + y = 1$

7. $y = \cos x, \quad y = 1 - 2x/\pi$

8. $y = \sin(\pi x) \quad y = x^2 - x \quad x = 2$

9. $y = \sec^2 x, \quad y = \cos x, \quad x = -\pi/3, \quad x = \pi/3.$

Ex. 15.3 Ache a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 1)$ e pelo eixo x .

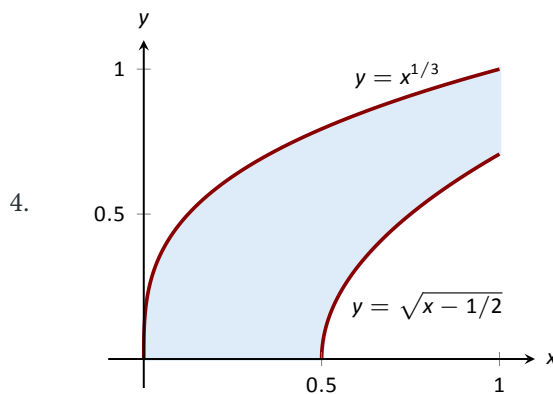
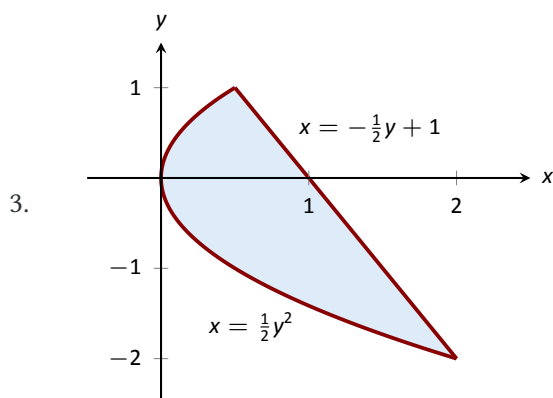
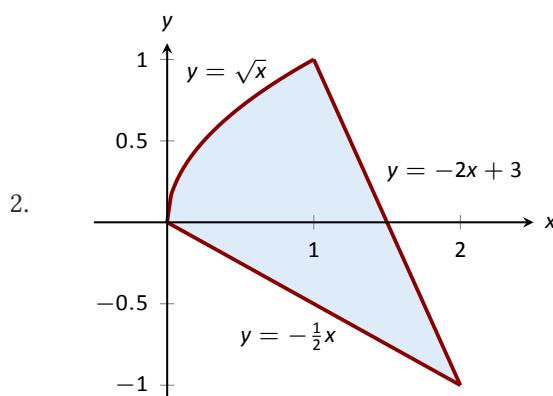
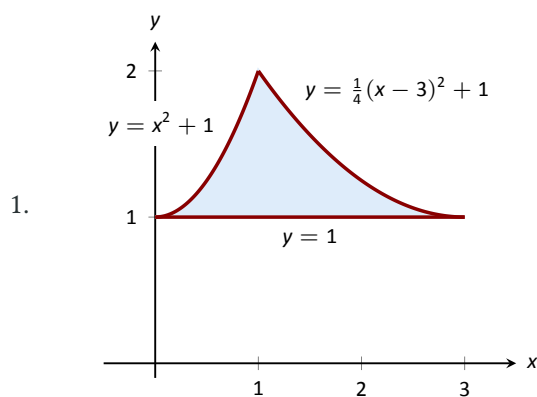
Ex. 15.4 Ache o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

Ex. 15.5 Determine c para que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

Ex. 15.6 Use integração para deduzir a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Ex. 15.7 Nos próximos itens encontre a área da região delimitada pelas funções de duas maneiras: 1. descrevendo as fronteiras como funções de x , e 2. descrevendo as fronteiras como funções de y .



15.3. Volume

15.3.1. Secções transversais

Para calcular áreas, somamos contribuições de faixas estreitas. No espaço, podemos proceder de modo semelhante, dividindo um sólido em fatias: a área de cada secção transversal, multiplicada pela espessura, aproxima o volume da fatia.

Seja S um sólido limitado pelos planos $x = a$ e $x = b$, como o primeiro da Figura 15.8. Quando interceptamos o sólido S com um plano, obtemos uma região plana denominada **secção transversal** de S . Na segunda imagem da figura 15.8 apresentamos uma secção transversal de S .

A área da secção transversal

Na fórmula do volume, $A(x)$ representa uma área, não uma altura ou um raio. É preciso identificar a forma da secção e calcular sua área em função de x . Uma fatia de pequena espessura Δx tem volume aproximado $A(x)\Delta x$.

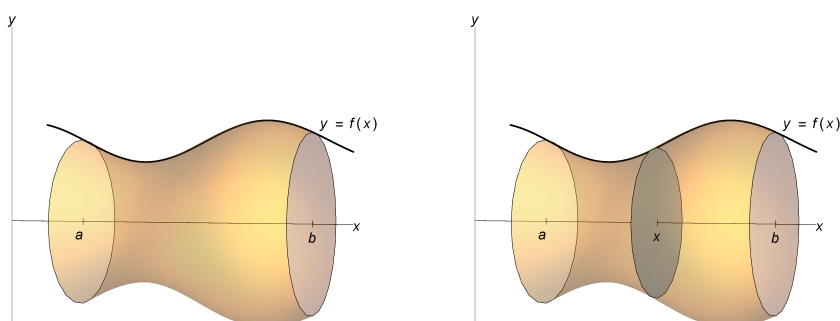
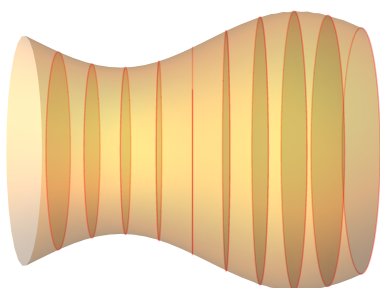
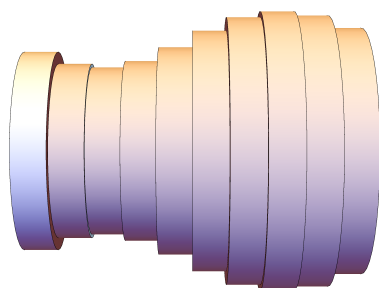


Figura 15.8. Um plano perpendicular ao eixo x corta o sólido S em uma região de área $A(x)$.

Denotaremos por $A(x)$ a área da secção transversal perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto x , com $x \in [a, b]$. Para obter uma soma de Riemann, considere uma partição $P = (x_i)$ de $[a, b]$ e divida o sólido S em n fatias pelos planos $P_{x_1}, \dots, P_{x_{n-1}}$. A Figura 15.9a representa essa decomposição. Escolhemos, então, pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideramos a secção transversal que passa por x_i^* . O volume da i -ésima fatia S_i pode ser aproximado pelo volume do cilindro reto cuja base é a secção que passa por x_i^* e cuja altura é Δx_i . A aproximação por cilindros é apresentada na Figura 15.9b.



(a) Fatias do sólido



(b) Aproximação do sólido por cilindros

Como a área da base de cada cilindro é $A(x_i^*)$ e sua altura é Δx_i , uma aproximação para o volume da i -ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Somando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Fazendo o tamanho da partição tender a zero, $|P| \rightarrow 0$, temos:

$$V = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x) dx.$$

15.3 Definição Volume por seções transversais

Seja S um sólido limitado pelos planos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal perpendicular ao eixo é $A(x)$, com A contínua em $[a, b]$, definimos o volume de S por

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Exemplo 15.6.

Determine o volume de uma pirâmide com base quadrada de lado l e altura h .

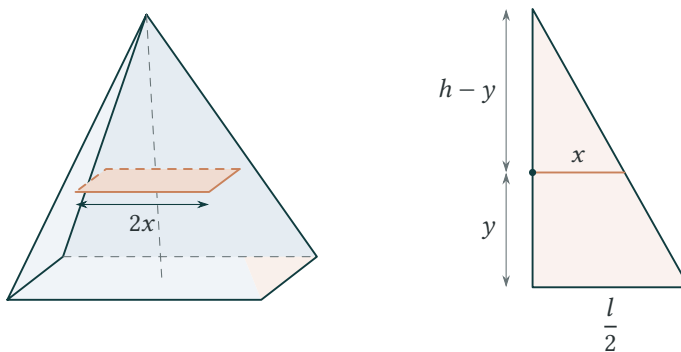


Figura 15.11. A seção à altura y é um quadrado de lado $2x$; a semelhança fornece $x/(l/2) = (h - y)/h$.

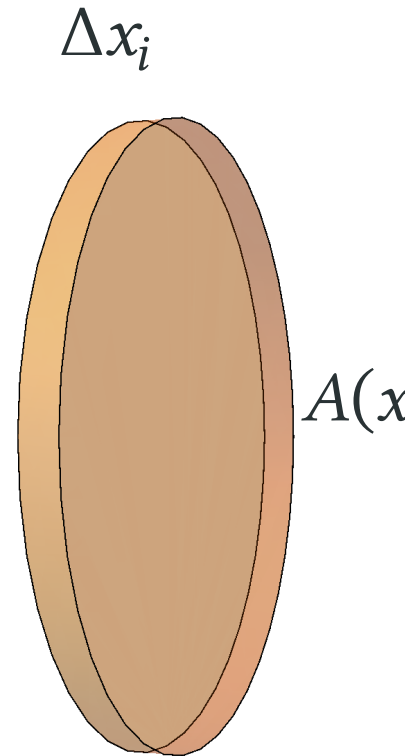


Figura 15.10. A fatia de espessura Δx_i tem volume aproximado $A(x_i^*)\Delta x_i$.

Solução. Uma fatia da pirâmide à altura y é um quadrado de lado $2x$. Por semelhança de triângulos,

$$\frac{x}{l/2} = \frac{h-y}{h}, \quad \text{isto é,} \quad x = \frac{l}{2h}(h-y).$$

Logo, a área da seção transversal é

$$A(y) = (2x)^2 = 4x^2 = \frac{l^2}{h^2}(h-y)^2.$$

Como a pirâmide está entre os planos $y = 0$ e $y = h$, temos que o volume é dado pela integral:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y) \, dy = \int_0^h \frac{l^2}{h^2}(h-y)^2 \, dy \\ &= \left[-\frac{l^2}{3h^2}(h-y)^3 \right]_0^h = \frac{1}{3}l^2h \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.7.

Mostre que o volume da esfera de raio r é $\frac{4\pi r^3}{3}$.

◁

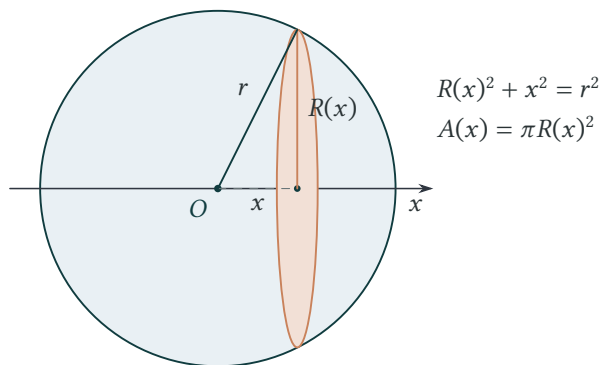


Figura 15.12. Na posição x , a seção da esfera é um círculo de raio $R(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Solução. A seção transversal da esfera por x é um círculo de raio $R(x)$. Pelo Teorema

de Pitágoras, temos que $R(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo, o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi r^2 x - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-r}^{x=r} \\ &= \left(\pi r^3 - \pi \frac{r^3}{3} \right) - \left(-\pi r^3 + \frac{\pi r^3}{3} \right) \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.8 – Sólido de Steinmetz.

Calcule o volume da região delimitada pela intersecção de dois cilindros, ambos de raio r , se os eixos dos cilindros se intersectam perpendicularmente.

◁

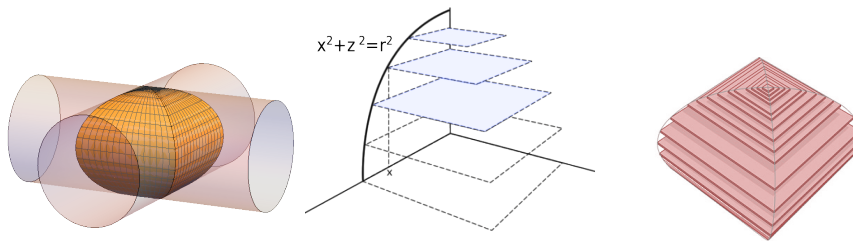


Figura 15.13. Sólido de Steinmetz e suas seções transversais quadradas.

Solução. Uma seção do sólido perpendicular ao eixo z é um quadrado de lado $2x$. Uma vez que o sólido é obtido a partir da intersecção de dois cilindros de raio r , a metade do lado do quadrado, x , e a altura z são relacionadas por

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Dessa forma, a área do quadrado é $A = (2x)^2$, que pode ser expressa em termos de z como

$$A(z) = 4x^2 = 4(r^2 - z^2).$$

O método de integração por seções transversais fornece, então, por simetria, que o volume é dado por

$$V = 2 \int_0^r A(z) dz = 8 \int_0^r (r^2 - z^2) dz = 8 \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{16}{3} r^3.$$

■

15.3.2. Sólidos de revolução

Um caso particular importante no qual podemos utilizar o método das seções transversais ocorre quando o sólido S é obtido por rotação, *em torno do eixo x* , da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

onde f é contínua e não negativa em $[a, b]$.

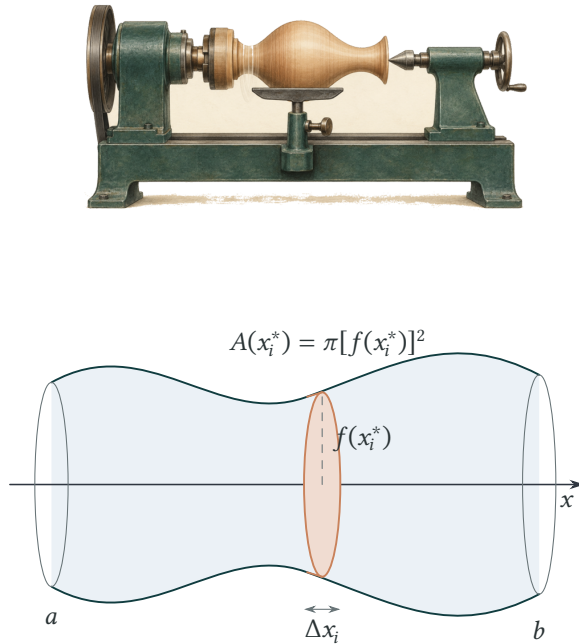


Figura 15.14. Uma fatia perpendicular ao eixo de rotação é aproximada por um disco de raio $f(x_i^*)$ e espessura Δx_i .

Nesse caso, temos que a área da seção transversal que passa por x é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

Consequentemente, temos que o **volume do sólido S obtido por rotação, em torno do eixo x , do conjunto A** é

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Método dos Discos

Seja f contínua e não negativa em $[a, b]$. Seja S o sólido obtido pela rotação da região entre $y = 0$ e $y = f(x)$, para $a \leq x \leq b$, em torno do eixo x . O volume do sólido S é dado por

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Exemplo 15.9.

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 4.

<

Solução. Quando fatiamos o sólido por um plano perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto x , obtemos um disco de raio $\sqrt{x}$. Logo a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

Portanto, o volume do sólido é

$$V = \int_0^4 A(x) \, dx = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi.$$

■

De modo similar, para determinar o volume de um sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y , de uma região compreendida entre o eixo y e a curva $x = f(y)$, $c \leq y \leq d$, observamos que a secção transversal é um círculo de área $A(y) = \pi[f(y)]^2$ e, conseqüentemente, o volume é dado por

$$V = \int_c^d A(y) \, dy.$$

Exemplo 15.10.

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região compreendida entre o eixo y e a curva $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$.

<

Solução. O volume é

$$V = \int_1^4 A(y) \, dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_1^4 = 3\pi.$$

■

Exemplo 15.11.

Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante.

<

Solução. A reta e a parábola se cortam em $y = 0$ e $y = 4$, portanto os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$. O volume pode ser expresso então como

$$V = V_1 - V_2$$

em que V_1 e V_2 são os volumes dos sólidos obtidos pela rotação, em torno do eixo y , das curvas $R(y) = \sqrt{y}$ e $r(y) = \frac{y}{2}$, respectivamente. Assim,

$$V_1 = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy = 8\pi \quad V_2 = \pi \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{16\pi}{3}.$$

Portanto, $V = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$. ■

Exemplo 15.12.

Deduza a fórmula do volume do toro obtido ao girarmos o círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$, com $R > r > 0$, em torno do eixo x .

◁

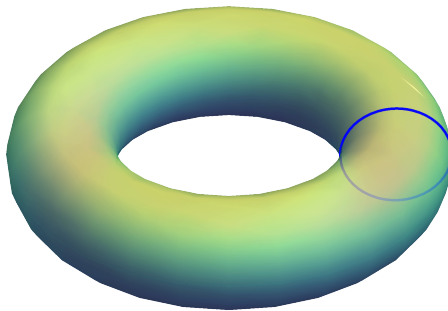


Figura 15.15. Toro obtido pela rotação de um círculo em torno do eixo x .

Solução. A região é delimitada superiormente por $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e inferiormente por $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ com $x \in [-r, r]$. Assim, definindo $K = \sqrt{r^2 - x^2}$, o volume do toro é dado pela integral

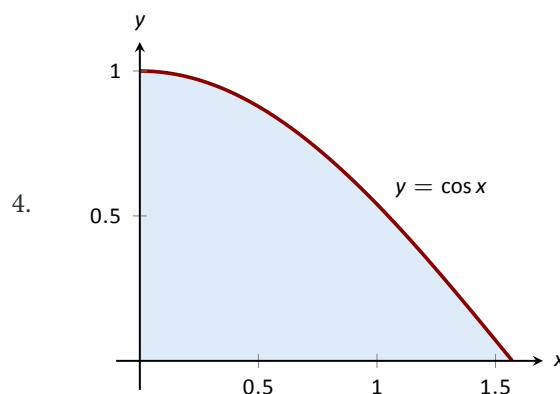
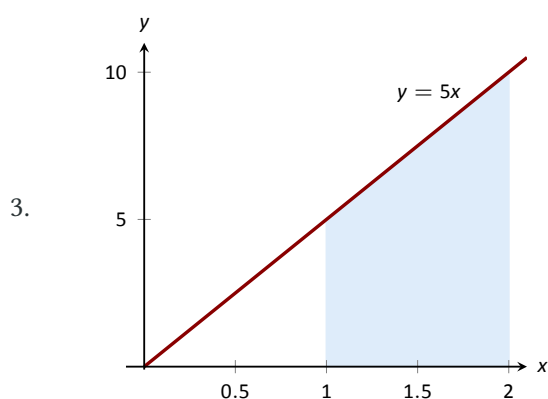
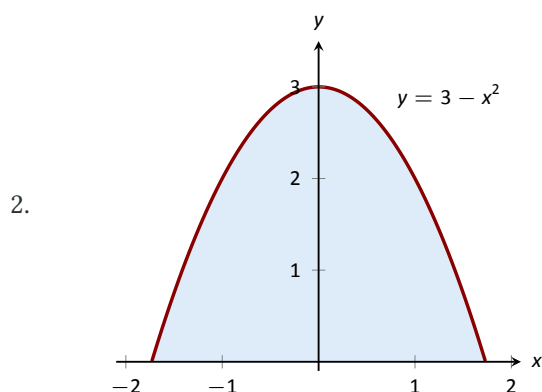
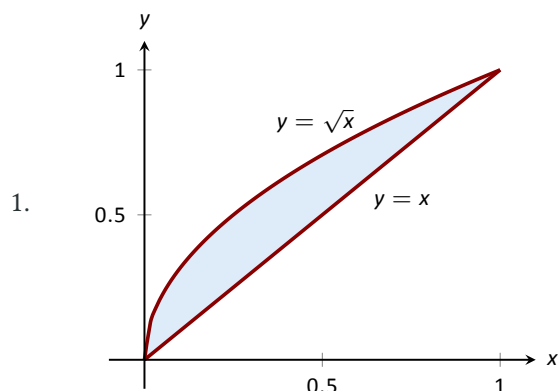
$$\int_{-r}^r \pi[(R + K)^2 - (R - K)^2] dx = \int_{-r}^r 4\pi RK dx = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Como $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ é metade da área do círculo de raio r , esta integral vale $\frac{\pi r^2}{2}$.

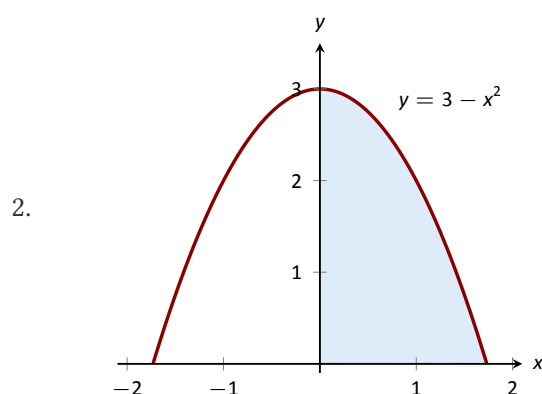
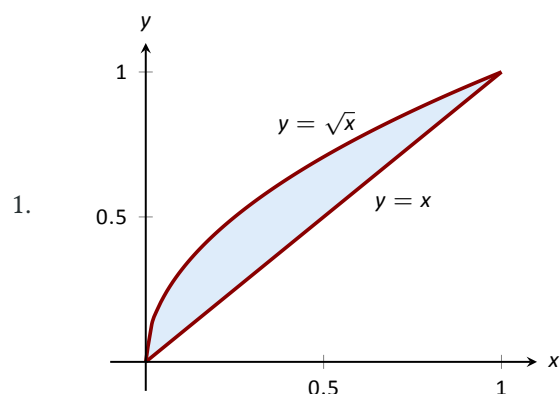
Assim o volume do toro é $4\pi R \frac{\pi r^2}{2} = (2\pi R)(\pi r^2)$. ■

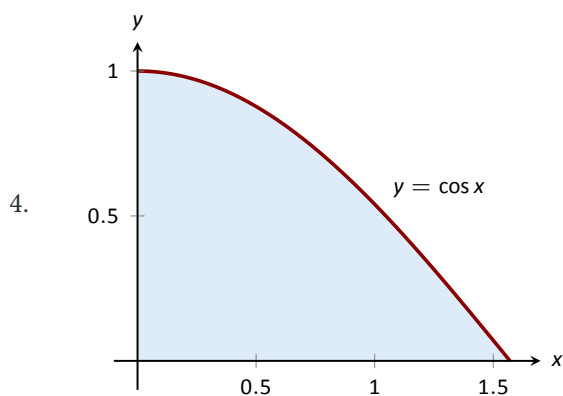
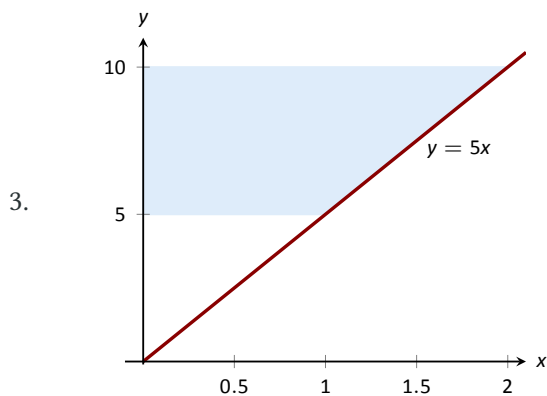
Exercícios

Ex. 15.8 Nos Exercícios 1 - 4, uma região do plano cartesiano é sombreada. Use o método das seções transversais para encontrar o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno do eixo x .



Ex. 15.9 Nos Exercícios 1 - 4, uma região do plano cartesiano é sombreada. Use o método das seções transversais para encontrar o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno do eixo y .





Ex. 15.10 Nos próximos itens, uma região do plano cartesiano é descrita. Encontre o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno de cada um dos eixos dados.

1. Região limitada por: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$. Rotacionada em torno:

- a) o eixo x
- b) $y = 1$
- c) o eixo y
- d) $x = 1$

2. Região limitada por: $y = 4 - x^2$ e $y = 0$. Rotacionada em torno:

- a) o eixo x
- b) $y = 4$

c) $y = -1$

d) $x = 2$

3. O triângulo de vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Rotacionada em torno:

- a) do eixo x
- b) de $y = 2$
- c) do eixo y
- d) de $x = 1$

4. Região limitada por $y = x^2 - 2x + 2$ e $y = 2x - 1$. Rotacionada em torno:

- a) o eixo x
- b) $y = 1$
- c) $y = 5$

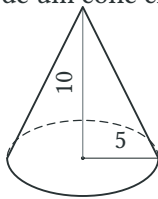
5. Região limitada por $y = 1/\sqrt{x^2 + 1}$, $x = -1$, $x = 1$ e o eixo x . Rotacionada em torno:

- a) do eixo x
- b) de $y = 1$
- c) de $y = -1$

6. Região limitada por $y = 2x$, $y = x$ e $x = 2$. Rotacionada em torno:

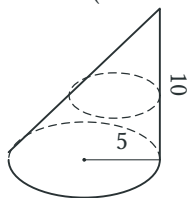
- a) do eixo x
- b) $y = 4$
- c) do eixo y
- d) $x = 2$

Ex. 15.11 Calcule o volume de um cone circular



reto com altura 10 e raio da base 5.

Ex. 15.12 Calcule o volume de um cone circular oblíquo com altura 10 e raio da base 5. (Dica: todas as



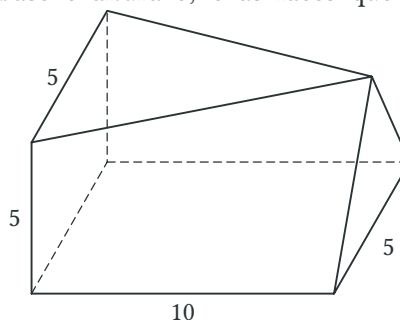
seções transversais são círculos).

Ex. 15.13 Calcule o volume de uma pirâmide de altura 10 cuja base é um triângulo retângulo isósceles

com catetos de comprimento 4.



Ex. 15.14 Calcule o volume do sólido de comprimento 10 representado a seguir. Uma extremidade é um quadrado de lado 5; a outra é um triângulo de base e altura 5, e as faces que as ligam são planas.



15.3.3. Cascas cilíndricas

A escolha da decomposição pode simplificar um volume de revolução. Cortes perpendiculares ao eixo de rotação produzem discos ou arruelas; faixas paralelas ao eixo produzem cascas cilíndricas. Nesta segunda descrição, cada faixa gera aproximadamente a superfície lateral de um cilindro fino.

Considere o sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada por $y = f(x)$, onde $f(x) \geq 0$, e pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, com $0 \leq a < b$ e f contínua.

Os fatores de uma casca cilíndrica

O volume de uma casca fina é aproximado por circunferência, altura e espessura multiplicadas: $2\pi rh \Delta r$. O raio r é a distância ao eixo de rotação. Ele só coincide com a coordenada escolhida quando a posição do eixo permite essa identificação.

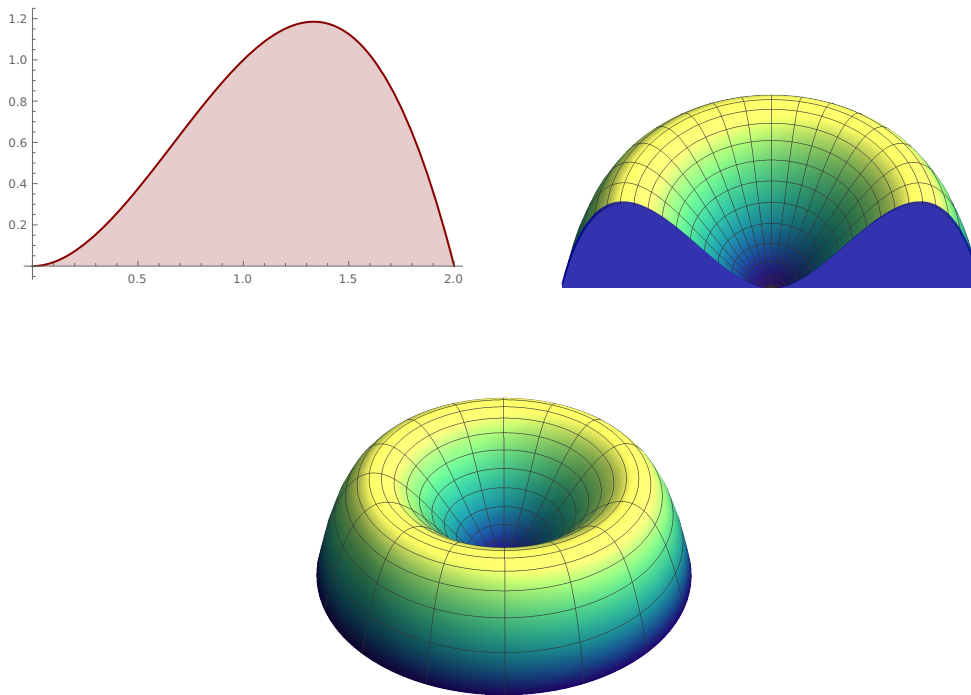


Figura 15.16. Sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada por $y = f(x)$

Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e seja $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ o ponto médio do i -ésimo intervalo, $x_i^* = (x_i + x_{i-1})/2$. Se o retângulo com base $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e altura $f(x_i^*)$ é girado ao redor do eixo y , então o resultado é uma casca cilíndrica cujo volume é

$$V_i = (2\pi x_i^*)f(x_i^*)\Delta x_i = [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}].$$

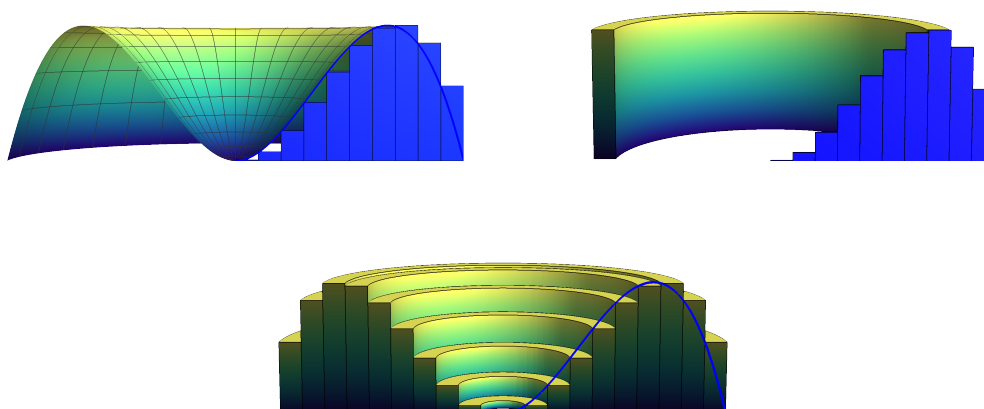


Figura 15.17. Casca cilíndrica, espessura e desenvolvimento de sua superfície lateral.

Portanto uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas seções:

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n (2\pi x_i^*)f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Esta aproximação torna-se melhor quando $|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$. Então definimos o **volume do sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada por $y = f(x)$, onde $f(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ por**

$$V = 2\pi \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i^* f(x_i^*) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

15.4 Definição Volume por cascas cilíndricas

Seja f contínua e não negativa em $[a, b]$, com $0 \leq a < b$, e seja S o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região entre $y = 0$ e $y = f(x)$. Com raio $r(x) = x$ e altura $h(x) = f(x)$, definimos

$$V = 2\pi \int_a^b r(x)h(x) dx.$$

Exemplo 15.13.

Encontre o volume do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = 0$, $y = 1/(1+x^2)$, $x = 0$ e $x = 2$ em torno do eixo y .

◁

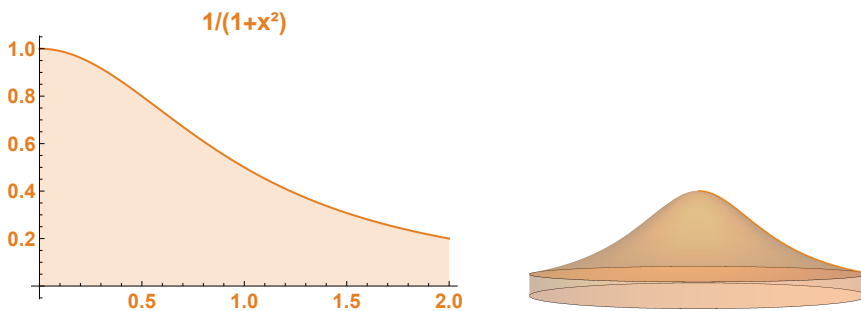


Figura 15.18. Região e cascas cilíndricas do sólido de revolução.

Solução. Nesse caso temos que o raio da casca cilíndrica é $r(x) = x$ e a altura é $y = 1/(1+x^2)$. Como a região é limitada pelos planos $x = 0$ e $x = 2$, temos que o volume é dado por

$$V = 2\pi \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Fazendo a substituição $u = 1+x^2$, temos $du = 2x dx$. Além disso $u(0) = 1$ e $u(2) = 5$.

$$\begin{aligned} &= \pi \int_1^5 \frac{1}{u} du \\ &= \pi \ln u \Big|_1^5 \\ &= \pi \ln 5 \approx 5,056. \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.14.

Determine o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

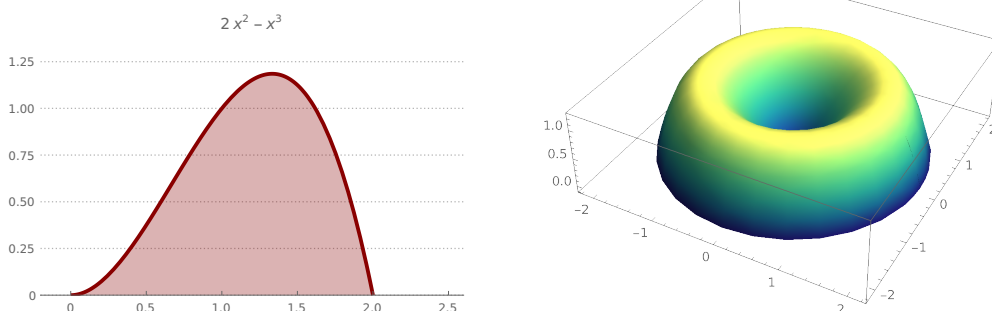


Figura 15.19. Rotação da região sob $y = 2x^2 - x^3$ em torno do eixo y .

Solução. A função $2x^2 - x^3$ intercepta o eixo x em $x = 0$ e $x = 2$. Logo podemos expressar o volume como:

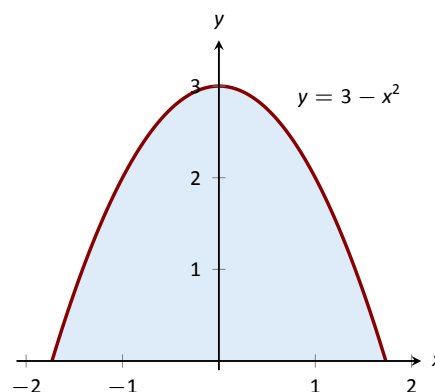
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x f(x) dx = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{5}\pi. \end{aligned}$$

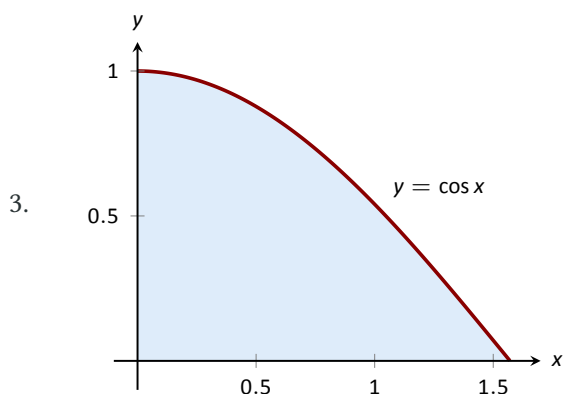
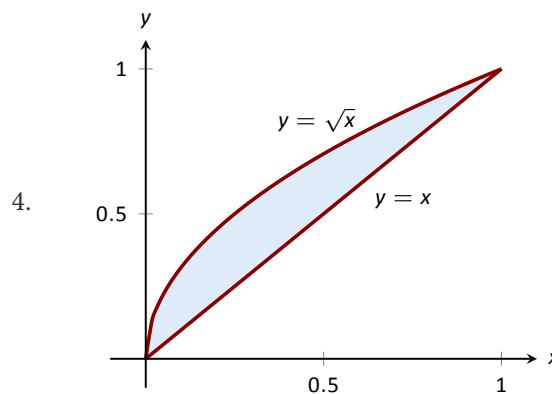
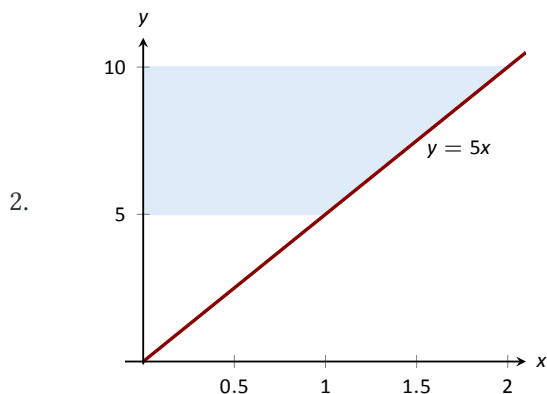
■

Exercícios

Ex. 15.15 Nos exercícios a seguir, uma região do plano cartesiano é sombreada. Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno do eixo y . No primeiro item, basta usar a metade da região com $x \geq 0$: a metade simétrica gera o mesmo sólido.

1.





15.4. Trabalho

A acumulação de pequenas contribuições também aparece em grandezas físicas. Quando uma força varia com a posição, dividimos o deslocamento em trechos nos quais ela pode ser aproximada por uma força constante; a soma dos trabalhos nesses trechos conduz à integral. Começamos lembrando que no caso de uma força constante F , o trabalho realizado ao mover um objeto sob ação dessa força é definido pelo produto de sua componente na direção do movimento pelo deslocamento orientado d :

$$\tau = Fd, \quad \text{trabalho} = \text{força} \times \text{deslocamento}.$$

Agora consideremos o deslocamento de uma partícula de $x = a$ até $x = b$ com $a < b$ e suponhamos que a força dependa da posição, isto é, $F = F(x)$, e que a força seja contínua no intervalo $[a, b]$. Considere então $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ com marcas $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Se o tamanho do i -ésimo intervalo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for suficientemente pequeno, F será praticamente constante nesse intervalo, e então o trabalho realizado pela força de x_{i-1} até x_i é aproximadamente

$$\tau_i \approx F(x_i^*)\Delta x_i.$$

Logo podemos aproximar o trabalho realizado por F de a até b pela soma dos traba-

O que varia no trabalho?

Na mola, a força depende da deformação. Ao bombear um líquido, cada camada tem um peso e uma distância de elevação. Nesses casos, é preciso identificar separadamente a força e o deslocamento de cada contribuição: uma distância variável não é, por si só, uma força variável.

lhos realizados nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é

$$\tau \approx \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x_i.$$

Fazendo o tamanho dos intervalos diminuir, a aproximação será melhor, o que nos motiva a definir *trabalho* como segue.

15.5 Definição

O **trabalho** τ realizado por uma força F sobre uma partícula no deslocamento de $x = a$ até $x = b$ é dado por

$$\tau = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b F(x) dx.$$

Exemplo 15.15.

Calcule o trabalho realizado pela força gravitacional quando um corpo de massa m kg é deslocado radialmente da superfície da Terra até uma altura $h > 0$ m. Determine também o trabalho necessário para elevá-lo lentamente, desprezando outras forças e a rotação da Terra. Utilize o fato de que a força da gravidade exercida por uma massa M sobre outra massa m é dada por

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

◁

Solução. Como podemos aproximar o trabalho realizado? Dividimos o caminho a partir da superfície até a altura final em n pequenos subcaminhos. Em cada subcaminho a força da gravidade é mais ou menos constante, com valor $-GMm/r_i^2$ a distância r_i . Logo o trabalho realizado pela gravidade durante o deslocamento do objeto de r_i até r_{i+1} é aproximadamente $-GMm/r_i^2 \Delta r$ e assim o trabalho total pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{-GMm}{r_i^2} \Delta r,$$

No limite,

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \frac{-GMm}{r^2} dr,$$

onde r_0 é o raio da Terra e r_1 é $r_0 + h$. Assim, o trabalho é

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \frac{-GMm}{r^2} dr = - \left. \frac{GMm}{r} \right|_{r_0}^{r_1} = \frac{GMm}{r_1} - \frac{GMm}{r_0}.$$

Como $r_1 > r_0$, esse trabalho é negativo. Para a elevação lenta, o agente externo exerce força oposta à gravidade e realiza trabalho $W_{\text{ext}} = GMm(1/r_0 - 1/r_1) > 0$. Colocar o corpo em órbita exigiria considerar também sua energia cinética orbital, que não faz parte deste deslocamento radial. ■

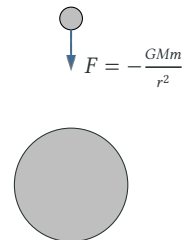


Figura 15.20. Força gravitacional ao longo do deslocamento radial.

Exemplo 15.16 — Calculando o Trabalho.

Uma corda de escalada de 50m está pendurada na beira de um precipício. Quanto trabalho é realizado ao puxar a corda até o topo? Considere que a corda tem massa de 66g/m.

<

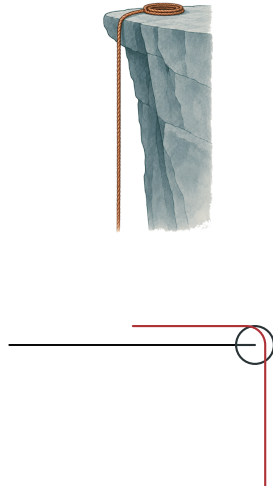


Figura 15.21. Modelo para o trabalho realizado ao erguer uma corda.

Solução. Denote por x a quantidade de corda puxada; dessa forma, a quantidade de corda ainda pendurada é $50 - x$. Cada metro de corda tem massa de 66 g, ou 0,066 kg. A massa da corda ainda pendurada é $0,066(50 - x)$ kg; multiplicando essa massa pela aceleração da gravidade, de $9,8 \text{ m/s}^2$, temos uma força variável descrita por

$$F(x) = (9,8)(0,066)(50 - x) = 0,6468(50 - x).$$

Assim, a quantidade total de trabalho realizado ao puxar a corda é

$$W = \int_0^{50} 0,6468(50 - x) \, dx = 808,5 \text{ J}.$$

■

Exemplo 15.17 — Relação entre Trabalho e Energia Cinética.

Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = x(t)$, com $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$. Suponha que $m > 0$ seja constante, que $x(t)$ tenha duas derivadas contínuas em $[t_0, t_1]$ e que a força resultante f seja contínua em um intervalo que contenha toda a trajetória, com $f(x(t)) = mx''(t)$. Seja $v = v(t)$ a função que descreve a velocidade da partícula, com $v_0 = v(t_0)$ e $v_1 = v(t_1)$. Mostre que o trabalho realizado pela resultante de x_0 até x_1 é igual à variação na energia cinética, isto é,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2(t) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$



Solução. A posição é dada por $x = x(t)$. Logo $dx = x'(t) dt$. Como $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$, então para $x = x_0, t = t_0$ e, para $x = x_1, t = t_1$. Assim

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(x(t))}_x \underbrace{x'(t) dt}_{dx} = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))v(t) dt. \quad (15.1)$$

Pela 2ª Lei de Newton, temos

$$f(x(t)) = m \cdot a(t), \quad (15.2)$$

onde $a = a(t)$ é a aceleração da partícula no instante t . Fazendo a mudança de variável $v = v(t)$, $dv = v'(t) dt = a(t) dt$, para $t = t_0, v = v_0$ e para $t = t_1, v = v_1$; portanto, de (15.1) e (15.2),

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))v(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} m a(t)v(t) dt \\ &= m \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{v(t)}_v \underbrace{a(t) dt}_{dv} \\ &= m \int_{v_0}^{v_1} v dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2. \end{aligned}$$



15.4.1. Molas e a lei de Hooke

A Lei de Hooke afirma que a força necessária para comprimir ou esticar uma mola x unidades a partir de seu comprimento natural é proporcional a x ; isto é, essa força é $F(x) = kx$ para alguma constante k . Por exemplo, se uma força de 1 N estende uma mola em 2 cm, então uma força de 5 N alongará a mola em 10 cm. Convertendo as distâncias para metros, temos que alongar essa mola em 0,02 m requer uma força de $F(0,02) = k(0,02) = 1$ N; portanto, $k = 1/0,02 = 50$ N / m.

Exemplo 15.18.

Uma força de 90 N estende uma mola de seu comprimento natural, 7 cm, até 12 cm. Quanto trabalho é realizado nessa deformação?





Figura 15.22. Comparação entre o comprimento natural e uma configuração alongada da mola.

Solução. Na Lei de Hooke, a variável é a deformação em relação ao comprimento natural, e não o comprimento total da mola. Neste caso, a extensão é $12 - 7 = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$, como indica a Figura 15.23.

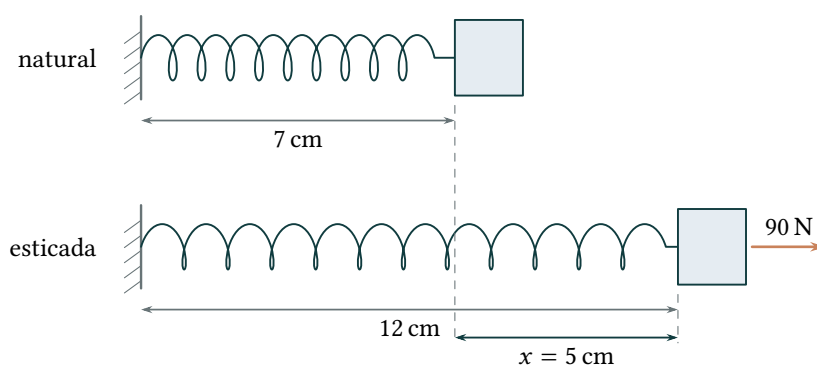


Figura 15.23. A força alonga a mola de 7 cm para 12 cm; a variável da Lei de Hooke é a extensão $x = 5 \text{ cm}$.

Como $F(x) = kx$ e $F(0,05) = 90$, temos $k = 1800 \text{ N/m}$. O trabalho realizado é, portanto,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0,05} 1800x \, dx \\ &= 900x^2 \Big|_0^{0,05} = 2,25 \text{ J.} \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.19.

Suponha que um tanque de água tem a forma de um cone circular reto com a ponta na parte inferior, e tem 10 metros de altura e raio de 2 metros. Se o tanque está cheio, quanto trabalho é necessário para bombear toda a água para fora por cima do tanque?

<

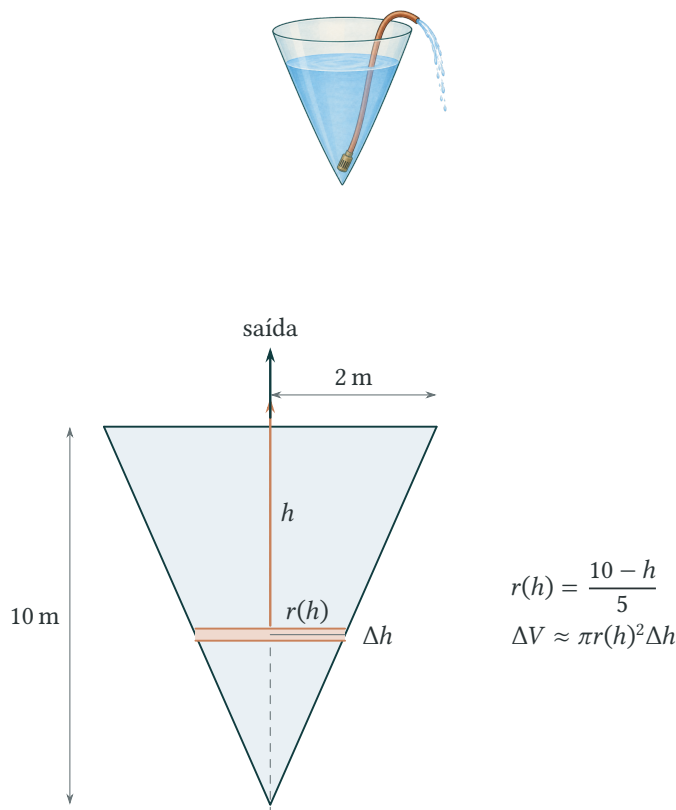


Figura 15.24. Uma lâmina à profundidade h tem raio $r(h) = (10 - h)/5$ e precisa ser elevada a distância h .

Solução. Para aproximar o trabalho, dividiremos a água no tanque em secções horizontais, aproximaremos o volume de água em uma secção por um disco fino, e calculamos a quantidade de trabalho necessária para levantar cada disco para o topo do tanque. Como de costume, tomamos o limite fazendo as secções mais finas, obtendo o trabalho total. Na profundidade h a secção transversal circular através do tanque tem um raio $r = (10 - h)/5$, usando semelhança de triângulos, e área $\pi(10 - h)^2/25$. Uma secção do tanque em profundidade h , portanto, tem um volume de aproximadamente $\pi(10 - h)^2/25\Delta h$ e logo contém $\sigma\pi(10 - h)^2/25\Delta h$ quilogramas de água, onde σ é a densidade da água em quilogramas por metro cúbico; $\sigma \approx 1000$. Assim a força da gravidade sobre esta quantidade de água é $9,8\sigma\pi(10 - h)^2/25\Delta h$, e, finalmente, esta secção de água deve ser levantada uma distância h , o que exige $h9,8\sigma\pi(10 - h)^2/25\Delta h$

newton-metros de trabalho. Logo o trabalho total é dado por

$$W = \frac{9,8\sigma\pi}{25} \int_0^{10} h(10-h)^2 dh = \frac{980000}{3}\pi \approx 1026254 \text{ newton-metros.}$$

■

Exercícios

Ex. 15.16 Uma força variável $F(x) = 10 + x$ newtons atua na direção do movimento enquanto um corpo se desloca de $x = 0$ a $x = 4$ metros. Calcule o trabalho realizado.

Ex. 15.17 Uma força de intensidade $F(x) = 300/(1+x)$ newtons atua formando um ângulo constante de 60° com a direção do movimento. Calcule o trabalho realizado quando o corpo se desloca de $x = 0$ a $x = 3$ metros.

Ex. 15.18 Uma força atrativa radial tem intensidade $F(r) = k/r^2$, com $k > 0$. Calcule o trabalho necessário para afastar lentamente uma partícula da distância $r = a$ até $r = b > a$ do centro de atração.

Ex. 15.19 Uma mola obedece à lei de Hooke $F(x) = kx$. Para $k = 40$ N/m, calcule o trabalho necessário para aumentar sua deformação de 0,10 m para 0,25 m.

Exercícios

Ex. 15.20 Uma mola requer 18 N para ser alongada 0,12 m além do comprimento natural. Determine o trabalho necessário para alongá-la de 0,05 m a 0,20 m.

Ex. 15.21 Uma corda de 20 m tem massa linear constante 0,5 kg/m e pende verticalmente do alto de um edifício. Calcule o trabalho necessário para recolhê-la

inteiramente, usando $g = 9,8$ m/s².

Ex. 15.22 Um tanque cilíndrico de raio 2 m e altura 5 m está cheio de água. Calcule o trabalho necessário para bombear toda a água até a borda superior, usando $\rho g = 9800$ N/m³.

15.5. Forças hidrostáticas

A pressão em um fluido em repouso aumenta com a profundidade. Se y é a profundidade medida a partir da superfície da água, a diferença entre a pressão do fluido e a pressão atmosférica é

$$p(y) = \rho g y,$$

onde ρ é a densidade do fluido e g é a aceleração da gravidade. Assim, uma faixa horizontal de largura $w(y)$ e espessura dy recebe uma força aproximada

$$dF = \rho g y w(y) dy.$$

A força total sobre uma superfície vertical é obtida somando, por integração, as forças exercidas sobre essas faixas.

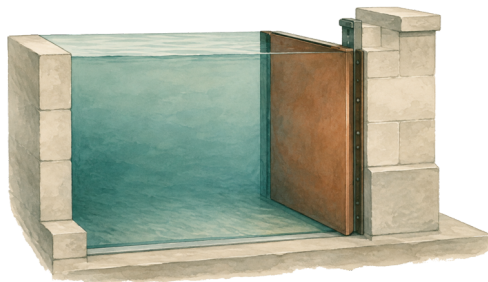
A profundidade na pressão

Em $p = \rho g y$, a variável y mede a profundidade abaixo da superfície livre, para um fluido de densidade constante. Se a coordenada vertical cresce para cima, é necessário convertê-la em profundidade. A força sobre uma faixa pequena é aproximada por pressão vezes área.

Exemplo 15.20 — Força sobre uma comporta retangular.

Uma comporta retangular vertical tem 2 m de largura e 3 m de altura, com a borda superior ao nível da água. A uma profundidade y , em metros, a pressão é $p(y) = 9800y$ Pa. Modele uma faixa horizontal de espessura dy , escreva a integral da força hidrostática total sobre a comporta e calcule seu valor.

<



Solução. A faixa situada à profundidade y tem área aproximada

$$dA = 2 \, dy.$$

Consequentemente, a força exercida sobre ela é

$$dF = p(y) \, dA = 9800y \cdot 2 \, dy.$$

Integrando da superfície até a borda inferior da comporta, obtemos

$$F = \int_0^3 19600y \, dy = 19600 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3 = 88200 \, \text{N}.$$

■

Exemplo 15.21 — É possível abrir a porta de um carro submerso?.

Um experimento popularizado pelo programa *MythBusters*¹ investigou se uma pessoa conseguiria abrir a porta de um automóvel submerso antes que a cabine se enchesse de água.

Considere o seguinte modelo idealizado. O carro permanece na posição normal e uma de suas portas é representada por um retângulo vertical de largura $b = 1,00$ m e altura $H = 1,20$ m. A borda superior da porta está à profundidade $a = 0,40$ m. A porta abre para fora, suas dobradiças formam um eixo vertical em uma das bordas e o puxador está na borda oposta. Tome a densidade da água como $\rho = 1000 \, \text{kg/m}^3$ e $g = 9,8 \, \text{m/s}^2$.

¹O experimento foi apresentado no episódio *Underwater Car*, exibido em 2007.

Inicialmente, a cabine contém apenas ar à pressão atmosférica. Despreze a pressão produzida pelo ar acima da pressão atmosférica, o atrito nas dobradiças e a resistência da vedação.



1. Mostre que a força resultante exercida pela água sobre a porta é

$$F_0 = \rho g b \int_a^{a+H} y \, dy = \rho g b H \left(a + \frac{H}{2} \right),$$

e calcule seu valor.

2. A profundidade y_R do ponto de aplicação da força resultante é definida pela igualdade entre os momentos em torno de um eixo horizontal na superfície:

$$y_R F_0 = \rho g b \int_a^{a+H} y^2 \, dy.$$

Calcule y_R e compare-o com a profundidade do centro geométrico da porta.

3. Calcule o momento da pressão em relação ao eixo vertical das dobradiças. Em seguida, determine a força perpendicular que uma pessoa precisaria exercer no puxador para iniciar a abertura. Seria possível abrir a porta se a pessoa conseguisse exercer no máximo 600 N?
4. A água começa agora a entrar na cabine. Seja c a profundidade, medida a partir da superfície exterior, em que se encontra a superfície da água no interior. Assim, c diminui à medida que a cabine se enche e $c = 0$ corresponde à igualdade entre os níveis interno e externo. Suponha que a pressão do ar no interior continue igual à atmosférica. Determine a força resultante $F(c)$ para $0 \leq c \leq a + H$.
5. Determine quão próximos devem estar os dois níveis para que a força necessária no puxador não ultrapasse 600 N. Interprete o resultado à luz do experimento.

◁

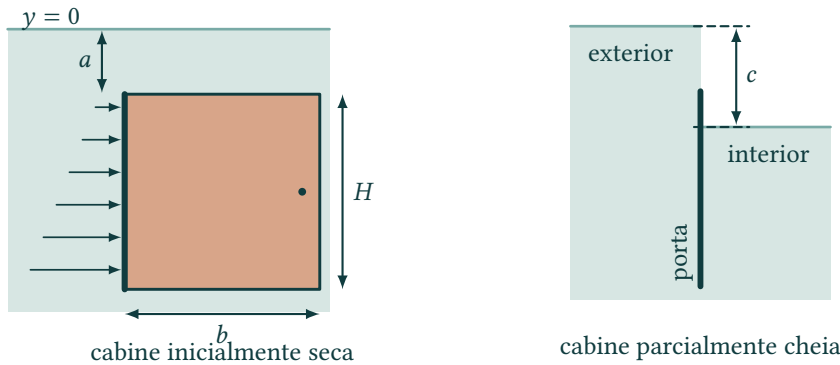


Figura 15.25. Modelo da porta e diferença c entre os níveis de água. A ilustração editorial apresenta a situação física; este esquema identifica as grandezas do modelo.

Solução. À profundidade y , a pressão exterior é $p_{\text{atm}} + \rho gy$, enquanto a pressão interior inicial é p_{atm} . A pressão atmosférica atua dos dois lados e se cancela. Uma faixa horizontal da porta, de altura dy , tem área $b \, dy$; portanto,

$$dF = \rho gyb \, dy.$$

Somando as contribuições desde a borda superior até a inferior,

$$\begin{aligned} F_0 &= \rho gb \int_a^{a+H} y \, dy \\ &= \rho gb \frac{(a+H)^2 - a^2}{2} = \rho gbH \left(a + \frac{H}{2} \right). \end{aligned}$$

Com os valores fornecidos,

$$F_0 = 1000 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 1,2 \cdot 1 = 11760 \, \text{N}.$$

A profundidade da força resultante é

$$y_R = \frac{\int_a^{a+H} y^2 \, dy}{\int_a^{a+H} y \, dy} = \frac{(1,6^3 - 0,4^3)/3}{(1,6^2 - 0,4^2)/2} = 1,12 \, \text{m}.$$

O centro geométrico está à profundidade $a + H/2 = 1,00 \, \text{m}$. O centro de pressão fica abaixo dele porque as faixas inferiores recebem maior pressão.

A pressão é uniforme ao longo de cada faixa horizontal. Por isso, a resultante da faixa atua no ponto médio de sua largura, a uma distância $b/2$ do eixo vertical das dobradiças. Assim,

$$\tau_0 = \int_a^{a+H} \frac{b}{2} \rho gby \, dy = \frac{b}{2} F_0 = 5880 \, \text{N m}.$$

Uma força P_0 aplicada perpendicularmente no puxador possui braço b , de modo que

$$P_0 b = \tau_0 \implies P_0 = \frac{F_0}{2} = 5880 \, \text{N}.$$

Esse valor é quase dez vezes o limite de 600 N estipulado no enunciado. No modelo, a porta não pode ser aberta nessa etapa.

Quando a superfície interna está à profundidade c , a parte da porta situada acima desse nível ainda tem ar no lado interior; nela, a diferença de pressão é $\rho g y$. Abaixo do nível interno, as pressões são

$$p_{\text{ext}} = p_{\text{atm}} + \rho g y, \quad p_{\text{int}} = p_{\text{atm}} + \rho g(y - c),$$

e sua diferença é a constante $\rho g c$. Consequentemente,

$$F(c) = \rho g b \begin{cases} Hc, & 0 \leq c \leq a, \\ \int_a^c y \, dy + \int_c^{a+H} c \, dy, & a < c \leq a + H. \end{cases}$$

Após calcular as integrais,

$$F(c) = \rho g b \begin{cases} Hc, & 0 \leq c \leq a, \\ c(a + H) - \frac{c^2 + a^2}{2}, & a < c \leq a + H. \end{cases}$$

As duas expressões coincidem em $c = a$, e para $c = a + H$ recuperamos F_0 . Quando $c = 0$, as pressões hidrostáticas dos dois lados coincidem ponto a ponto e a força resultante se anula.

Como a distribuição continua uniforme na direção horizontal, a força necessária no puxador é $P(c) = F(c)/2$. O limiar procurado ocorre no primeiro caso da função por partes:

$$\frac{\rho g b H c}{2} \leq 600 \quad \Longleftrightarrow \quad c \leq \frac{1200}{1000 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 1,2} \approx 0,102 \text{ m}.$$

Assim, dentro das hipóteses do modelo, os níveis interno e externo precisam diferir por no máximo aproximadamente 10 cm. Isso explica por que a porta permanece praticamente bloqueada durante boa parte do enchimento e se torna manejável somente quando as pressões estão quase equalizadas. ■

15.22 Observação

O cálculo anterior é um modelo para a força sobre a porta, não uma orientação de sobrevivência. Ele desconsidera o movimento do veículo, a compressão do ar, vazamentos, deformações, a vedação e outros fatores importantes em uma situação real. Em uma emergência, recomenda-se sair pela janela o mais cedo possível; aguardar a equalização das pressões para tentar abrir a porta é apenas um último recurso quando a janela não pode ser utilizada.

Exercícios

Ex. 15.23 Nos exercícios a seguir, use $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e despreze a pressão atmosférica, que atua dos dois lados da placa quando pertinente.

fície da água e sua borda inferior está a 3 m de profundidade. Calcule a força hidrostática resultante.

1. Uma comporta retangular vertical tem 2 m de largura, sua borda superior coincide com a super-

2. Uma janela retangular vertical de 2 m de largura estende-se da profundidade de 2 m à de 4 m em

água. Calcule a força hidrostática resultante.

3. Uma placa triangular vertical tem o vértice na superfície da água e base horizontal de 2 m a 3 m de profundidade. Calcule a força hidrostática sobre a placa.

4. Uma comporta retangular vertical de 1,2 m de largura e 2 m de altura tem sua borda superior a 1 m da superfície de um óleo de densidade 850 kg/m^3 . Calcule a força resultante.

Exercícios

Ex. 15.24 Uma escotilha circular horizontal de raio 0,5 m está a 3 m abaixo da superfície da água. Calcule a força hidrostática sobre ela.

Ex. 15.25 Uma placa retangular vertical de largura L e altura H tem a borda superior à profundidade d . Mostre que a força hidrostática é

$$F = \rho g LH \left(d + \frac{H}{2} \right).$$

Ex. 15.26 Uma placa triangular vertical tem base horizontal de 3 m na superfície da água e vértice a 4 m de profundidade. Calcule a força hidrostática resultante.

Ex. 15.27 Uma janela semicircular vertical de raio 1 m tem o diâmetro sobre a superfície da água e o semicírculo abaixo dela. Calcule a força hidrostática.

Ex. 15.28 Uma placa retangular vertical de 2 m de largura e 3 m de altura tem centro geométrico a 4 m de profundidade. Calcule a força hidrostática e verifique que ela é ρg vezes a área vezes a profundidade do centro.

Ex. 15.29 Uma comporta quadrada vertical de lado 1,5 m tem a borda superior a 0,5 m da superfície de um óleo de densidade 800 kg/m^3 . Calcule a força hidrostática.

15.6. Comprimento de arco e área superficial

15.6.1. Comprimento de arco

O mesmo princípio de aproximação permite medir uma curva. Para isso, usamos uma poligonal, cujo comprimento é a soma dos comprimentos de seus segmentos, e refinamos essa aproximação. Suponhamos que a curva C seja dada pela equação $y = f(x)$, onde f tem derivada contínua em $[a, b]$. Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Então a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para C . O comprimento da curva C é aproximadamente o comprimento da poligonal, e a aproximação torna-se melhor quando $|P| \rightarrow 0$.

O comprimento acompanha a curva

O fator $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ reúne as variações horizontal e vertical e converte dx em comprimento de arco. Integrar 1 mede apenas a extensão horizontal do intervalo; integrar $|f'|$ mede a variação vertical total, não o comprimento da curva.

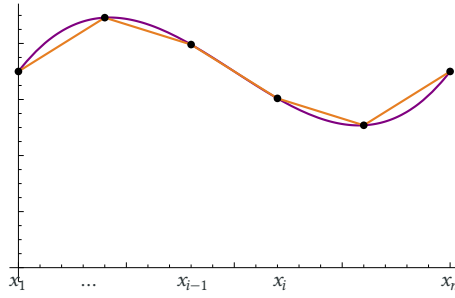


Figura 15.26. Aproximação de uma curva por uma poligonal inscrita.

O comprimento da poligonal é

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio 11.14 em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe um $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x_i.$$

Dessa forma,

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x_i.$$

Então, definimos o **comprimento da curva C** por

$$L = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exemplo 15.23.

Calcule o comprimento de arco da curva $f(x) = x^{3/2}$, com $1 \leq x \leq 4$.

◁

Solução. Como $f(x) = x^{3/2}$, temos que $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, e assim,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Fazendo a substituição, $u = 1 + \frac{9}{4}x$, então $du = \frac{9}{4} dx$. Quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Consequentemente,

$$L = \frac{4}{9} \int_{13/4}^{10} \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{13/4}^{10} = \frac{8}{27} \left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} \right].$$

■

15.6.2. Comprimento de uma curva paramétrica

Uma curva plana pode ser descrita por duas funções de um parâmetro,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Essa descrição também permite tratar curvas que não são gráficos de uma única função de x , como uma circunferência. Suponhamos que x e y tenham derivadas contínuas em $[\alpha, \beta]$. As duas coordenadas variam com taxas $x'(t)$ e $y'(t)$. Pelo Teorema de Pitágoras, a velocidade escalar com que o ponto percorre a curva é

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}.$$

O comprimento percorrido, contando cada trecho tantas vezes quantas a parametrização o percorra, é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Se a curva é percorrida uma única vez, essa integral é o comprimento geométrico de seu traçado. A fórmula também vale para curvas continuamente diferenciáveis por partes, somando-se os comprimentos dos trechos.

Para justificar a fórmula, tome uma partição $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$. O comprimento da poligonal inscrita é

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, os incrementos de x e y são suas respectivas derivadas em pontos do subintervalo, multiplicadas por Δt_i . Esses pontos não precisam coincidir, mas a continuidade uniforme das derivadas em $[\alpha, \beta]$ permite substituí-los por uma mesma marca, com um erro total que tende a zero quando a norma da partição tende a zero. O limite das somas é, portanto, a integral da velocidade escalar.

Exemplo 15.24.

Para a circunferência $x(t) = R \cos t$, $y(t) = R \sin t$, com $R > 0$ e $0 \leq t \leq 2\pi$, temos

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R.$$

Assim, seu comprimento é $\int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$. Se tomarmos $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$, recuperamos a fórmula anterior para o comprimento do gráfico de f . Se mantivermos as mesmas equações no intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$, o traço geométrico continua sendo a mesma circunferência, mas ela é percorrida duas vezes; por isso a integral vale $4\pi R$.

◁

15.6.3. Área superficial

A aproximação de uma curva por uma poligonal também permite estudar a superfície gerada por sua rotação. Já usamos a rotação de uma região para calcular volumes;

Área superficial e volume

Ao girar uma curva, uma pequena faixa de superfície tem área aproximada $2\pi r \Delta s$, em que r é a distância ao eixo. O comprimento Δs acompanha a

ao girar apenas sua curva de fronteira, o comprimento de cada pequeno segmento passa a contribuir para a área superficial.

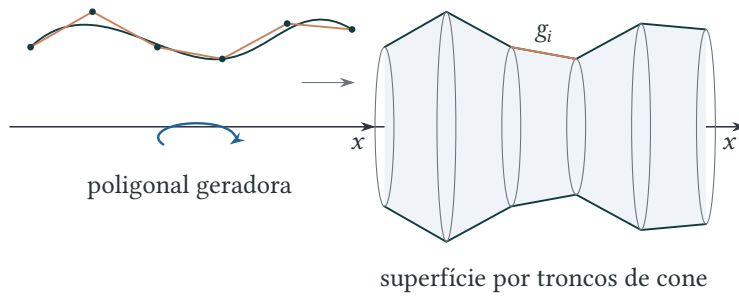


Figura 15.27. Ao girar a poligonal inscrita em torno do eixo x , cada segmento gera um tronco de cone.

Podemos aproximar a área da superfície pela área da superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo desse plano. Consideremos f não negativa em $[a, b]$, com derivada contínua nesse intervalo fechado. Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Consideremos a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ e, girando-a ao redor do eixo x , obtemos uma aproximação para a superfície. Seja A a área lateral da superfície gerada pela rotação da poligonal da figura abaixo. Lembramos que a área lateral, A , do tronco de cone é dada por

$$A_T = \pi(r_1 + r_2)g = 2\pi r g$$

onde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Para obter a área lateral de um sólido de revolução em torno do eixo x , aproximamos sua superfície por uma união de troncos de cone e somamos as respectivas áreas laterais. Se denotarmos por L_i o comprimento do *segmento* entre os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$, então

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1}))]^2}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x_i$. Portanto, para esse segmento,

$$L_i = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i.$$

Os raios do tronco são $R = f(x_i)$ e $r = f(x_{i-1})$. Assim, a área da superfície de um dos troncos de cone é aproximadamente

$$2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i.$$

Como f é uma função contínua, pelo TVI, existe d_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(d_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$; logo:

$$2\pi f(d_i) \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i.$$

Somando sobre todos os subintervalos, temos

$$\text{Área Superficial} \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(d_i) \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i,$$

As marcas d_i e x_i^* podem ser diferentes. Pela continuidade uniforme de f , podemos substituir $f(d_i)$ por $f(x_i^*)$: o erro absoluto total é limitado por $2\pi(b-a)M\omega_f(|P|)$, onde $M = \max_{[a,b]} \sqrt{1 + f'(x)^2}$ e $\omega_f(\delta) = \sup_{|u-v| \leq \delta} |f(u) - f(v)| \rightarrow 0$. A soma resultante é uma soma de Riemann. Tomando o limite, temos

$$\text{Área Superficial} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

A área da superfície do sólido formado pela rotação do gráfico de $y = f(x)$ ao redor do eixo y , com $a, b \geq 0$, é

$$\text{Área Superficial} = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Exemplo 15.25.

Determine a área de superfície do sólido formado pela revolução da curva $y = x^3$ em $[0, 2]$ em torno do eixo x .

◁

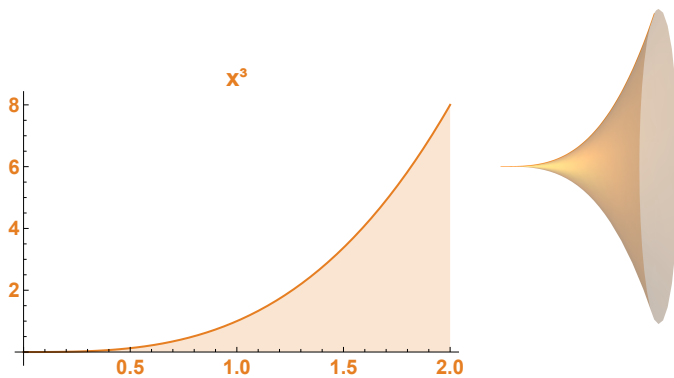


Figura 15.28. Superfície gerada pela rotação de $y = x^3$ em torno do eixo x .

Solução.

$$A = \int_0^2 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

Com $u = 1 + 9x^4$, temos $du = 36x^3 dx$ e os novos extremos são 1 e 145:

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{18} \int_1^{145} u^{1/2} du \\ &= \frac{\pi}{27} \left[u^{3/2} \right]_1^{145} = \frac{\pi}{27} (145\sqrt{145} - 1) \approx 203,04. \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.26.

Determine a área de superfície do sólido formado pela revolução da curva $y = x^2$ em $[0, 1]$ em torno do eixo y .

<

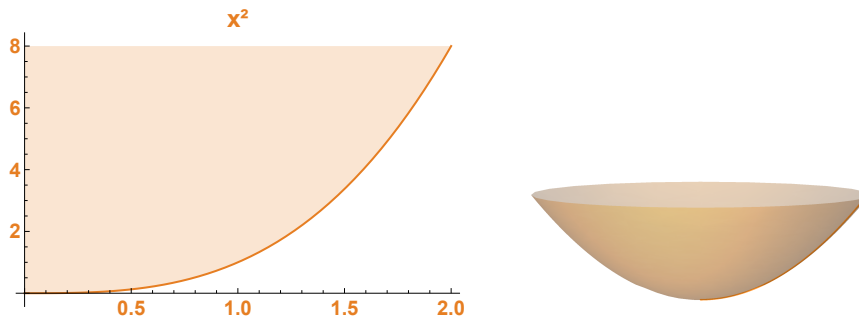


Figura 15.29. Superfície gerada pela rotação de $y = x^2$ em torno do eixo y .

Solução. Uma vez que estamos girando em torno do eixo y , o “raio” do sólido não é $f(x)$, mas sim x . Assim, a integral para calcular a área de superfície é:

$$A = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + (2x)^2} dx.$$

Substituição $u = 1 + 4x^2$; novos extremos $u = 1$ e $u = 5$.

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{u} du \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^5 \\ &= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \\ &\approx 5,33. \end{aligned}$$

■

Exemplo 15.27.

Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, ao redor do eixo x .

<

Solução. Temos $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, e assim,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 1 dx = 8\pi. \end{aligned}$$

■

Exercícios

Ex. 15.30 Calcule o comprimento do arco de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 1$.

Ex. 15.31 A rotação do segmento $y = x$, $0 \leq x \leq R$, em torno do eixo x gera a superfície lateral de um cone. Calcule sua área pela integral e confira-a pela fórmula geométrica.

Exercícios

Ex. 15.32 Encontre o comprimento do arco de $y = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ entre $x = 0$ e $x = 3$.

Ex. 15.33 Uma curva $y = f(x) \geq 0$ gira em torno do eixo x . Explique, a partir de pequenos troncos de cone, por que a área da superfície envolve o fator $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}$.

Ex. 15.34 A curva paramétrica $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, descreve um quarto de circunferên-

cia. Calcule seu comprimento pela fórmula paramétrica.

Ex. 15.35 Calcule o comprimento da curva paramétrica

$$x(t) = \frac{t^3}{3}, \quad y(t) = \frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ex. 15.36 Faça o semicírculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, girar em torno do eixo x e recupere a área $4\pi R^2$ da esfera.

15.7. Centro de massa

O centro de massa é uma média ponderada pela distribuição de massa. Para uma placa contínua, massa e posição são acumuladas simultaneamente; as somas de momentos conduzem, no limite, às fórmulas integrais para suas coordenadas.

Centro de massa como média ponderada

Para massas discretas, concentrar a massa total M em $\bar{x}$ sem alterar o momento exige $M\bar{x} = \sum x_i m_i$. Portanto, $\bar{x} = (\sum x_i m_i)/M$; a fórmula integral é a versão contínua dessa média ponderada. 518

Consideremos uma placa fina com densidade uniforme $\rho > 0$ que ocupa uma região R do plano. Desejamos encontrar o centro de massa da placa. Suponha que a região seja da forma

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

onde f é função definida e contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx > 0$.

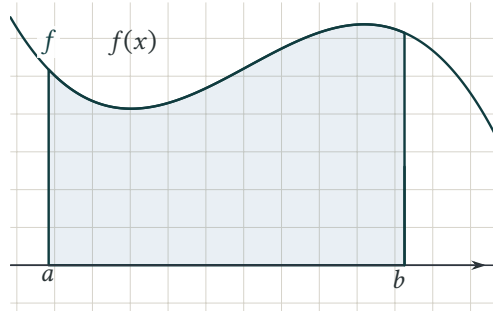


Figura 15.30. Região R ocupada por uma placa de densidade uniforme.

Consideremos uma partição $P = (x_i)$ de $[a, b]$ e escolhamos o ponto x_i^* como o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, isto é, $x_i^* = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Isto determina uma aproximação por retângulos de R .

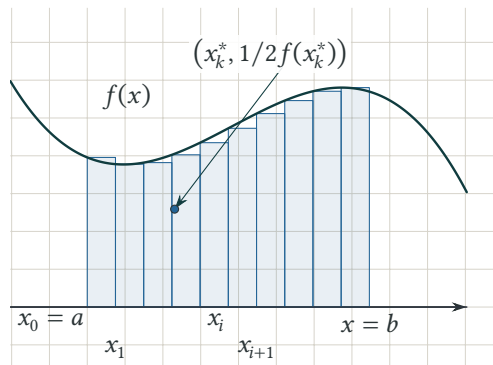


Figura 15.31. Retângulos que aproximam R e cujos centros aproximam a distribuição de massa.

O centro de massa do retângulo R_i é seu centro $\left(x_i^*, \frac{f(x_i^*)}{2}\right)$. Como sua área é $f(x_i^*)\Delta x_i$; temos que a massa do i -ésimo retângulo é

$$m_i = \rho \underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}} \underbrace{f(x_i^*)}_{\text{altura}}. \quad (15.3)$$

Logo, o centro de massa da região formada pela união dos retângulos $R_1, R_2 \dots R_n$ é

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* \rho f(x_i^*) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho f(x_i^*) \Delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^* f(x_i^*) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i^*)}{2} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \rho f(x_i^*) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho f(x_i^*) \Delta x_i} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f^2(x_i^*) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i}$$

Fazendo o tamanho da partição tender a zero, $|P| \rightarrow 0$, obtemos as coordenadas do **centro de massa** da região R

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

O argumento anterior motiva a definição:

15.6 Definição

Para uma placa de densidade uniforme $\rho > 0$ que ocupa a região sob $f \geq 0$ em $[a, b]$, com f contínua e área $A_0 = \int_a^b f(x) dx > 0$, o centro de massa (ou centroide da região) é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ definido por

$$\bar{x} = \frac{1}{A_0} \int_a^b x f(x) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A_0} \int_a^b f(x)^2 dx.$$

A densidade constante cancela nos quocientes; por isso o ponto depende apenas da geometria da região.

Exemplo 15.28.

Calcule o centro de massa da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

<

Solução. A área total da região é $A_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left. \sin x \right|_0^{\pi/2} = 1$; assim,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{A_0} \int_0^{\pi/2} x f(x) dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \\ &= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2A_0} \int_0^{\pi/2} f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa é $\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8} \right)$. ■

Exemplo 15.29.

Calcule o centro de massa do semicírculo de raio r .

◁

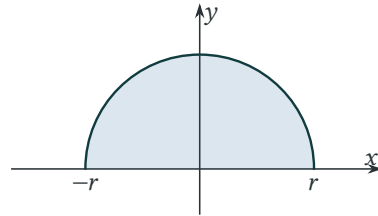


Figura 15.32. Semicírculo usado no cálculo do centro de massa.

Solução. Por simetria $\bar{x} = 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) \, dx}{\int_a^b f(x) \, dx} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \, dx}{\frac{\pi r^2}{2}} \\ &= \frac{4r}{3\pi}\end{aligned}$$

■

15.7.1. Centro de massa da região entre duas curvas

Para uma placa de densidade uniforme e área total $A_0 > 0$, se a região R está entre os gráficos de funções contínuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, então o mesmo argumento anterior pode ser usado para mostrar que o **centro de massa** de

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{A_0} \int_a^b x[f(x) - g(x)] \, dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A_0} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \, dx.$$

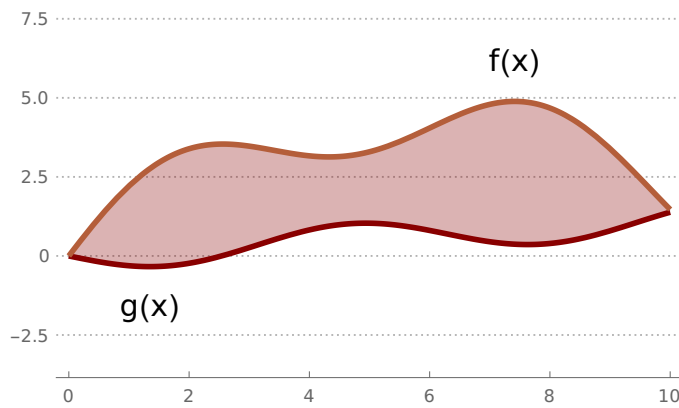


Figura 15.33. Centroide de uma região plana entre duas curvas.

Exemplo 15.30.

Determine o centro de massa da região A limitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.

<

Solução. A área total da região é

$$A_0 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$\bar{x} = 6 \int_0^1 x(x - x^2) dx = 6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\bar{y} = 6 \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = 3 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

O centro de massa é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right)$.

■

Exercícios

Ex. 15.37 ★ Determine o centro de massa da região sob a reta $y = 1 - x$ em $0 \leq x \leq 1$, supondo densidade uniforme.

15.7.2. ★ Teorema de Pappus

O centroide estabelece uma nova conexão com os sólidos de revolução. Conhecendo sua distância ao eixo de rotação e a área da região, podemos calcular o volume por meio do Teorema de Pappus, sob as condições enunciadas a seguir.

15.31 Teorema Teorema de Pappus

Seja R uma região plana, que se situa inteiramente de um dos lados de uma reta L no mesmo plano. Se denotarmos por r a distância entre o centroide de R e a reta L , então o volume V do sólido de revolução obtido a partir da rotação de R ao redor de L é dado por

$$V = 2\pi r A_0$$

onde A_0 é a área de R .

O teorema vale na generalidade enunciada. Demonstraremos apenas o caso que usaremos neste curso: depois de escolher coordenadas em que L é o eixo y , a região é descrita entre dois gráficos contínuos,

$$g(x) \leq y \leq f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

com $0 \leq a < b$.

Demonstração. Nesse caso, a fórmula do centroide fornece

$$A_0 \bar{x} = \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx.$$

Por cascas cilíndricas, o volume gerado pela rotação da mesma região é

$$V = 2\pi \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx = 2\pi \bar{x} A_0.$$

Como a região está de um único lado do eixo, $\bar{x}$ é precisamente a distância do centroide a L , e a fórmula de Pappus segue nesse caso. ■

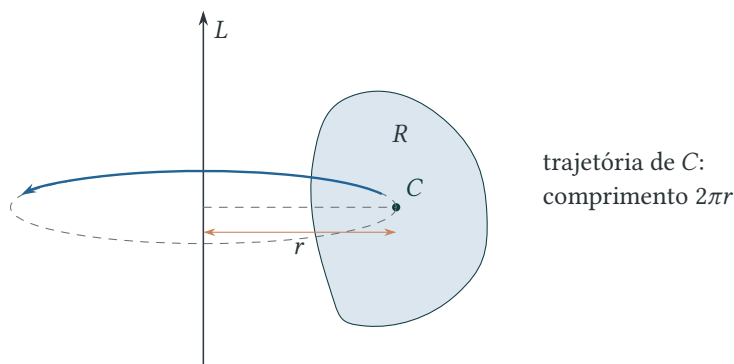


Figura 15.34. Ao girar em torno de L , o centroide C percorre $2\pi r$; o volume gerado é essa distância vezes a área de R .

Exemplo 15.32 — Volume do toro.

Calcule o volume do toro obtido ao rotacionar o círculo de raio r , cujo centro é $(R, 0)$, com $R > r > 0$, em torno do eixo y , usando o Teorema de Pappus.

◁

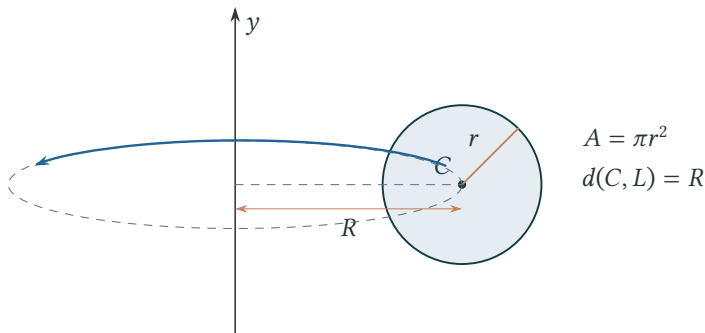


Figura 15.35. O círculo gerador tem área πr^2 , e seu centroide percorre uma circunferência de raio R .

Solução. Como a área do círculo é πr^2 e a distância entre o centroide do círculo gerador e o eixo y é R , o volume do toro é

$$V = 2\pi^2 R r^2.$$

É o mesmo valor obtido pelo método das seções transversais no Exemplo 15.12. ■

Exemplo 15.33 — Volume da Esfera.

Calcule o volume da esfera usando o Teorema de Pappus.

◁

Solução.

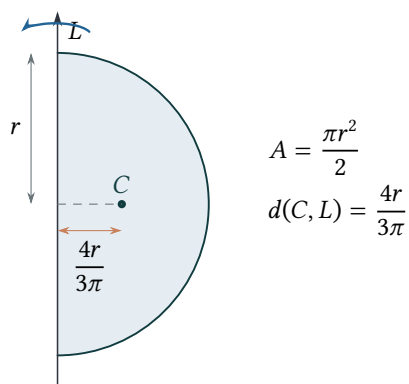


Figura 15.36. O semicírculo gira em torno de seu diâmetro; seu centroide está a $4r/(3\pi)$ do eixo.

O centroide do semicírculo está a $\frac{4r}{3\pi}$ da origem e, logo, o volume é

$$V = 2\pi \times \frac{4r}{3\pi} \times \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Esse resultado coincide com o cálculo por seções transversais do Exemplo 15.7. ■

Exercícios

- Ex. 15.38** Uma chapa homogênea ocupa a região sob $y = 4 - x^2$ e acima do eixo x . Use simetria e integrais para localizar seu centro de massa.
- Ex. 15.39** Determine o centro de massa da região sob $y = x^2$ em $0 \leq x \leq 1$.
- Ex. 15.40** Determine o centro de massa da região sob $y = 1 - x^2$ em $-1 \leq x \leq 1$.
- Ex. 15.41** Determine o centro de massa da região entre $y = 1$ e $y = x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$.
- Ex. 15.42** ★ Use o Teorema de Pappus e o volume conhecido da esfera para recuperar a distância do centroide de um semicírculo de raio r ao seu diâmetro.
- Ex. 15.43** ★ O retângulo $R \leq x \leq R+a$, $0 \leq y \leq h$, com $R > 0$, gira em torno do eixo y . Use Pappus para calcular o volume e confira pela fórmula da coroa circular.

16

Integrais impróprias

Neste capítulo

16.1 Intervalos infinitos 526

16.2 Integrandos descontínuos 532

16.3 Convergência e divergência 535

16.4 Probabilidade 541

O infinito! Nenhuma outra questão comoveu tão profundamente o espírito humano.

David Hilbert, *Sobre o Infinito*

A integral definida foi construída em intervalos finitos para funções limitadas. Há, porém, problemas de acumulação em que uma dessas condições falha: o intervalo pode se estender indefinidamente, ou o integrando pode tornar-se ilimitado próximo de um ponto.

Em ambos os casos, a integral é definida por aproximação. Substituímos o problema impróprio por integrais definidas usuais e examinamos o limite dessas integrais. A existência de um valor finito é, portanto, uma questão de convergência.

16.1. Intervalos infinitos

Em um intervalo infinito, truncamos primeiro o domínio. A integral imprópria existe quando as integrais sobre esses intervalos finitos convergem para um número real à medida que a extremidade se afasta indefinidamente.

16.1 Definição Integrais impróprias em intervalos infinitos

1. Seja f uma função contínua em $[a, \infty)$. Definimos

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

2. Seja f uma função contínua em $(-\infty, b]$. Definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Convergência de cada cauda

A integral sobre toda a reta exige que as duas caudas convirjam separadamente para valores finitos. Um limite tomado apenas com extremos simétricos pode esconder o cancelamento de parcelas divergentes. Sua existência não basta para a convergência da integral imprópria.

3. Seja f uma função contínua em $(-\infty, \infty)$. Seja c um número real; então, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) \, dx.$$

Uma integral imprópria é dita **convergente** se o limite correspondente existe e é finito; caso contrário, ela é dita **divergente**. A integral imprópria do item 3 converge se e somente se ambos os limites existem e são finitos. A soma de divergências de sinais opostos não define uma integral; em particular, não se deve substituir esses dois limites independentes por um único limite com extremos simétricos. A escolha de c não altera o resultado, pois mudar c acrescenta uma integral em intervalo finito a uma parcela e a subtrai da outra.

Exemplo 16.1 — Calculando integrais impróprias.

Calcule as seguintes integrais impróprias.

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$

3. $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$

2. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$

◀

Solução.

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b$ O gráfico da área definida por essa

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{b} + 1$$

$$= 1.$$

integral é apresentado na Figura 16.1.

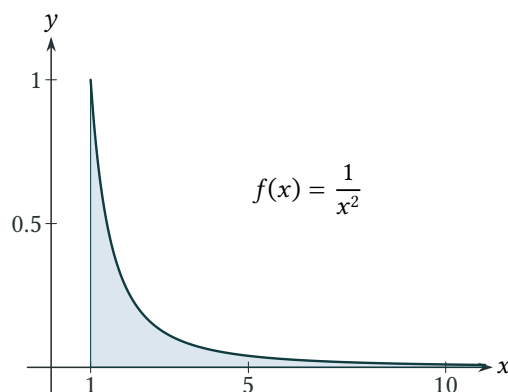


Figura 16.1. A cauda positiva de $1/x^2$ em $[1, \infty)$ tem área total finita, igual a 1.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

O limite não é finito; logo, a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. Compare os gráficos das Figuras 16.1 e 16.2; observe que $1/x$ decresce mais lentamente. Os limites calculados mostram que sua área acumulada cresce sem limite, enquanto a de $1/x^2$ permanece finita.

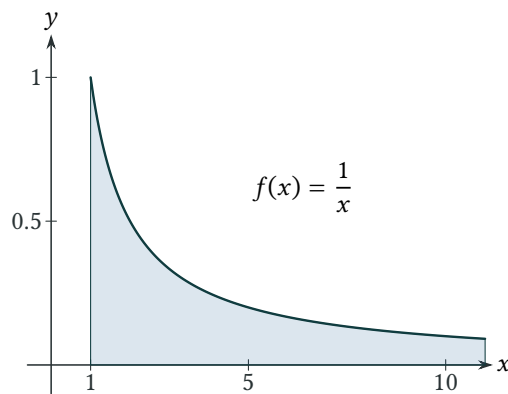


Figura 16.2. A cauda de $1/x$ decresce lentamente, e sua área acumulada em $[1, b]$ cresce sem limite.

$$\begin{aligned}
 3. \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} e^0 - e^a \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

O gráfico da área definida por essa integral é apresentado na Figura 16.3.

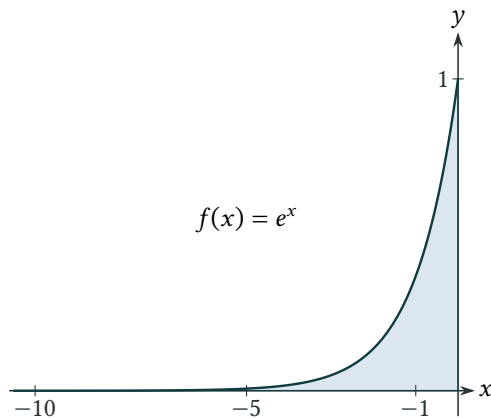


Figura 16.3. Embora se estenda até $-\infty$, a região sob e^x à esquerda de 0 tem área finita, igual a 1.

4. Devemos separar a integral em duas integrais impróprias, como na Definição 16.1. A escolha do ponto de separação é livre; tomemos $c = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) \\ &= \left(0 - \frac{-\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right).\end{aligned}$$

Cada limite existe; portanto, a integral original converge e vale

$$= \pi.$$

O gráfico da área definida por essa integral é apresentado na Figura 16.4.

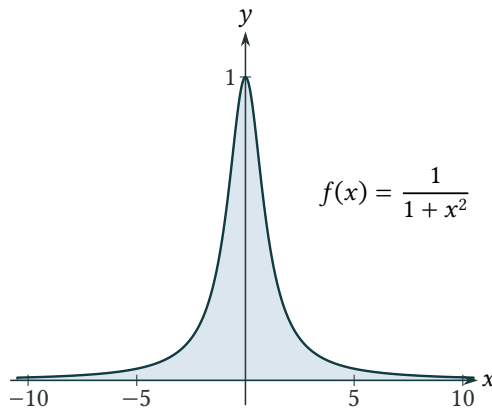


Figura 16.4. As duas caudas de $1/(1+x^2)$ devem ser integradas separadamente; juntas, têm área π .

■

Exemplo 16.2 — A Corneta de Gabriel: volume finito e área infinita.

Considere a região sob a curva

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1,$$

e o sólido obtido ao girá-la em torno do eixo x . Determine o volume do sólido e decida se a área de sua superfície de revolução é finita.

◁

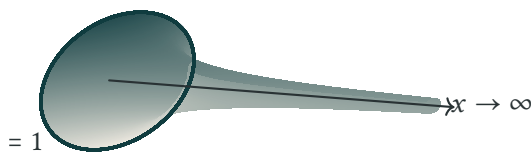


Figura 16.5. A Corneta de Gabriel é obtida pela rotação de $y = 1/x$, $x \geq 1$, em torno do eixo x . O desenho mostra apenas uma porção finita da superfície; a cauda continua indefinidamente.

Solução. Para o volume, usamos o método dos discos:

$$V = \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi.$$

Portanto, apesar de se estender indefinidamente, a corneta possui volume finito.

Para a área da superfície de revolução, como $y = 1/x$ e $y' = -1/x^2$, obtemos

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Como

$$\frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x} \quad (x \geq 1),$$

e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, o teste da comparação mostra que $S = \infty$.

Assim, a Corneta de Gabriel tem *volume finito e área superficial infinita*. Não há contradição: no volume, o raio aparece ao quadrado, produzindo a integral de $1/x^2$; na área, o termo dominante decai como $1/x$. É exatamente a diferença entre as duas integrais que acabamos de estudar no Exemplo 16.1. ■

Exemplo 16.3 — Integração imprópria e a regra de L'Hôpital.

Calcule a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

<

Solução. Para calculá-la, aplicamos integração por partes. Tome $u = \ln x$ e $dv = x^{-2} dx$. Então,

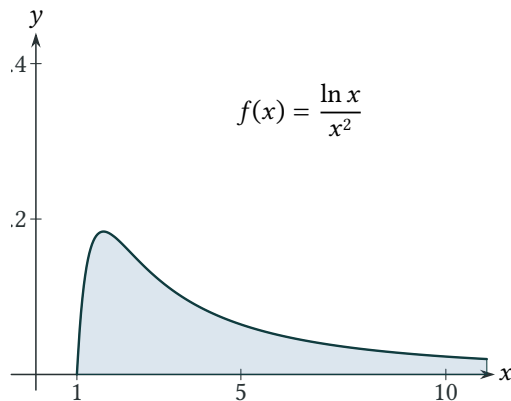


Figura 16.6. A função $(\ln x)/x^2$ é não negativa em $[1, \infty)$ e decai o bastante para produzir área finita.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} - (-\ln 1 - 1) \right).\end{aligned}$$

O termo $1/b$ tende a zero e $\ln 1 = 0$, deixando $\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\ln b}{b} + 1$. Precisamos calcular

$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln b}{b}$ pela Regra de L'Hôpital. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln b}{b} &\stackrel{\text{por L'Hôpital}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1/b}{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo a integral imprópria vale:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1.$$

■

Exercícios

Ex. 16.1 Calcule as integrais impróprias.

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$

2. $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$

4. $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

5. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Ex. 16.2 Determine se cada integral converge ou diverge. Calcule seu valor quando houver convergência.

1. $\int_0^{\infty} \sin x dx$

2. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx$

4. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$

16.2. Integrandos descontínuos

A dificuldade pode estar no próprio integrando, mesmo quando o intervalo é finito. Perto de uma assíntota vertical, a função deixa de ser limitada. A ideia de aproximação permanece: integramos até pontos anteriores à singularidade e estudamos os limites correspondentes em cada lado relevante.

16.2 Definição Integração imprópria com integrandos descontínuos

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, exceto em c , $a \leq c \leq b$, em que o integrando é ilimitado nas proximidades de c (em particular, $x = c$ pode ser uma assíntota vertical). Definimos

1. Se $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) \, dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x) \, dx.$$

2. Se $c = a$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) \, dx.$$

3. Se $c = b$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) \, dx.$$

A integral converge se todos os limites correspondentes existem e são finitos; ela diverge caso contrário. Se houver várias singularidades, inclusive nos dois extremos, dividimos o intervalo em trechos com apenas uma singularidade em cada extremo e exigimos a convergência de todos os limites. O mesmo procedimento se aplica quando também há extremos infinitos.

Limites em cada lado da singularidade

Quando o integrando é ilimitado nas proximidades de um ponto interior, examinamos separadamente as integrais à esquerda e à direita. Cada uma deve ter limite finito. A soma só é formada depois dessa verificação; divergências de sinais opostos não se compensam.

Exemplo 16.4 — Integração imprópria de funções descontínuas.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

2. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx$

◁

Solução.

1. O gráfico de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ é apresentado na Figura 16.7. Observe que f tem uma assíntota vertical em $x = 0$; em certo sentido, estamos tentando calcular a área de uma região que não tem “topo”.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{1} - \sqrt{a}) \\ &= 2.\end{aligned}$$

A região é ilimitada em altura, mas sua área é finita. Não há contradição: a altura cresce sem limite apenas perto de um ponto, e a largura da faixa correspondente tende a zero.

16.5 Observação

Na Definição 16.2, c pode ser um dos extremos (a ou b). Nesse caso, há apenas um limite a ser considerado.

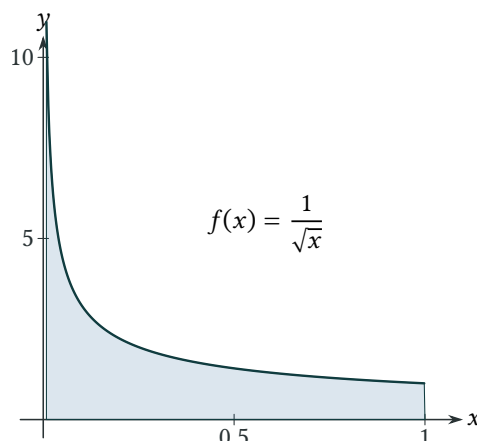


Figura 16.7. A assíntota em $x = 0$ torna a região ilimitada em altura, mas sua área em $(0, 1]$ é finita.

2. A função $f(x) = 1/x^2$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, como apresentado na Figura 16.8; logo, esta integral é imprópria. A aplicação direta da regra de avaliação por primitivas, sem considerar a singularidade, produziria o seguinte cálculo incorreto:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 \\ &= -1 - (1) \\ &= -2. (!)\end{aligned}$$

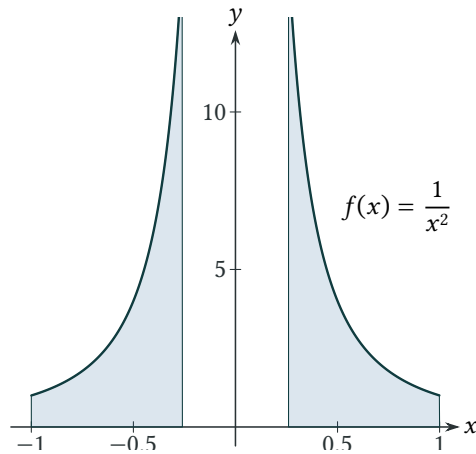


Figura 16.8. Em $x = 0$, as duas parcelas de $1/x^2$ têm áreas positivas divergentes; por isso a integral em $[-1, 1]$ diverge.

O integrando é positivo, portanto uma área negativa já revela que o cálculo anterior não pode representar a integral. A falha ocorreu ao aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo através de um ponto em que a função não é contínua. Devemos dividir o intervalo em $x = 0$ e usar a Definição 16.2.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left. -\frac{1}{x} \right|_{-1}^t + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left. -\frac{1}{x} \right|_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{t} - 1 \right) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t} \right) \\ &\Rightarrow (\infty - 1) + (-1 + \infty). \end{aligned}$$

Nenhum dos limites é finito, de modo que a integral imprópria diverge. O valor -2 obtido anteriormente resulta de uma aplicação indevida da fórmula de Newton-Leibniz e não é o valor da integral.

■

Exercícios

Ex. 16.3 Calcule as integrais impróprias convergentes e identifique as divergentes.

1. $\int_0^1 \ln x \, dx$

2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$

Ex. 16.4 Determine se cada integral converge ou diverge. Quando houver convergência, calcule seu valor.

1. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} \, dx$

2. $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

$$3. \int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

16.3. Convergência e divergência

Para uma integral imprópria, a primeira pergunta é se ela converge. O valor exato pode ser secundário ou mesmo inacessível por primitivas elementares. Testes de comparação permitem decidir a convergência a partir de funções-modelo; a família fundamental é $1/x^p$.

Exemplo 16.6 – Integração imprópria de $1/x^p$.

Determine os valores de p para os quais $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge.

O sentido da comparação

Para $0 \leq f \leq g$, a convergência da integral de g garante a de f ; a divergência da integral de f garante a de g . As integrais truncadas crescem com o intervalo, e a comparação controla se esse crescimento permanece limitado.

◀

Solução. Integrando e calculando o limite:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \quad (p \neq 1) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1). \end{aligned}$$

Se $p > 1$, então $b^{1-p} \rightarrow 0$, e a integral converge. Se $p < 1$, então $b^{1-p} \rightarrow \infty$, e a integral diverge. O caso $p = 1$, excluído do cálculo acima, é a integral de $1/x$ e também diverge.

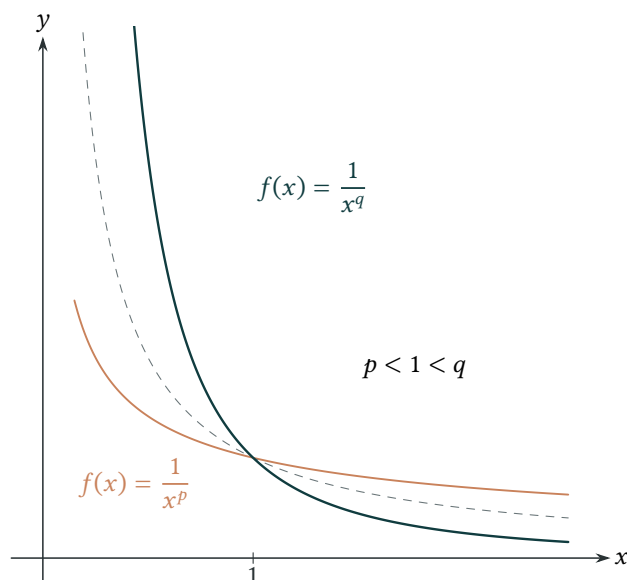


Figura 16.9. A curva tracejada $1/x$ separa visualmente os comportamentos: $1/x^p$ converge para $p > 1$ e diverge para $p \leq 1$.

Portanto, $\int_1^\infty x^{-p} dx$ converge exatamente quando $p > 1$. Na Figura 16.9, o gráfico tracejado de $1/x$ separa visualmente os dois regimes: expoentes maiores que 1 produzem decaimento mais rápido; expoentes menores que 1, decaimento mais lento. ■

O resultado do Exemplo 16.6 fornece uma ferramenta importante na determinação da convergência de outras integrais. Um resultado similar sobre integrais impróprias da forma $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ é provado nos exercícios. Esses resultados estão resumidos no quadro a seguir.

Convergência das integrais de $1/x^p$

1. A integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge quando $p > 1$ e diverge quando $p \leq 1$.
2. A integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge quando $p < 1$ e diverge quando $p \geq 1$.

Exercícios

Ex. 16.5 Determine para quais valores de $p > 0$ cada integral converge e, nos casos de convergência, calcule seu valor.

$$1. \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

$$2. \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

O caso crítico $p = 1$

Para $p \neq 1$, a primitiva de x^{-p} é $x^{1-p}/(1-p)$. No infinito, o limite é finito quando $p > 1$; na origem, quando $p < 1$. Para $p = 1$, a primitiva é $\ln x$, e as duas integrais impróprias divergem.

A técnica básica para determinar a convergência de uma integral imprópria é comparar seu integrando com outro cujo comportamento seja conhecido. As integrais de $1/x^p$ fornecerão os modelos de comparação mais frequentes.

16.7 Teorema Teste da comparação direta para integrais impróprias

Intervalo infinito. Sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Se $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x) dx$ converge. Se $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge, então $\int_a^\infty g(x) dx$ diverge.

Singularidade finita. Sejam f e g não negativas e contínuas nos lados relevantes de $c \in [a, b]$, com $f(x) \leq g(x)$ para $x \neq c$. Em cada integral unilateral determinada por c valem as mesmas duas conclusões. Se $a < c < b$, é preciso aplicá-las separadamente em $[a, c)$ e $(c, b]$.

Demonstração. Para $t \geq a$, ponha $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ e $G(t) = \int_a^t g(x) dx$. Pela não negatividade, ambas as funções são não decrescentes e $0 \leq F(t) \leq G(t)$. Se $\int_a^\infty g$ converge a M , então $F(t) \leq M$; o limite de F existe e é finito, pois é o supremo de seus valores. Isso prova a primeira conclusão para um intervalo infinito. A segunda é sua contrapositiva: se a integral de g convergisse, a de f também convergiria. Para uma singularidade finita, aplicamos o mesmo argumento às integrais truncadas em cada lado de c , cujos valores crescem à medida que a região de integração aumenta. Se c é interior, as duas parcelas devem convergir separadamente. ■

Exemplo 16.8 – Convergência de integrais impróprias.

Determine a convergência das seguintes integrais impróprias. 1. $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$
2. $\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} dx$

◁

Solução.

1. A função $f(x) = e^{-x^2}$ não tem antiderivada elementar, portanto não podemos calcular a integral diretamente por uma primitiva. Compare-a com $g(x) = 1/x^2$: como mostra a Figura 16.10, $0 < e^{-x^2} < 1/x^2$ em $[1, \infty)$. Pelo Exemplo 16.1, $\int_1^\infty x^{-2} dx$ converge; logo, $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ também converge.

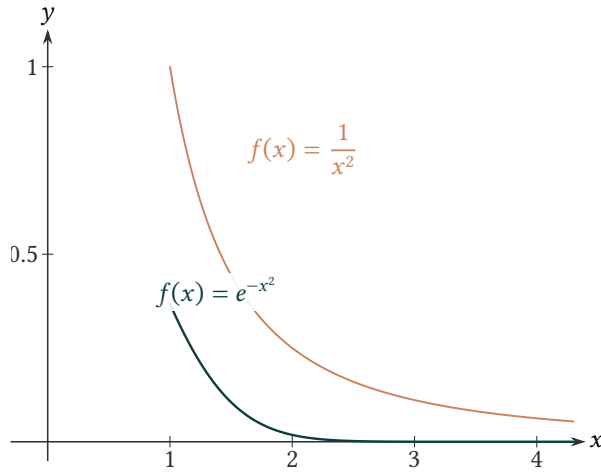


Figura 16.10. Em $[1, \infty)$, $0 < e^{-x^2} < 1/x^2$; a comparação com a curva superior garante a convergência.

2. Observe que, para grandes valores de x , $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$. Como $\int_3^\infty \frac{1}{x} dx$ diverge, isso sugere comparar o integrando original com $1/x$. Quando $x \geq 3$, temos $x = \sqrt{x^2} > \sqrt{x^2 - x}$ e, logo,

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}.$$

Pelo Teorema 16.7, a divergência de $\int_3^\infty x^{-1} dx$ implica a divergência de

$$\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} dx.$$

A Figura 16.11 ilustra isso.

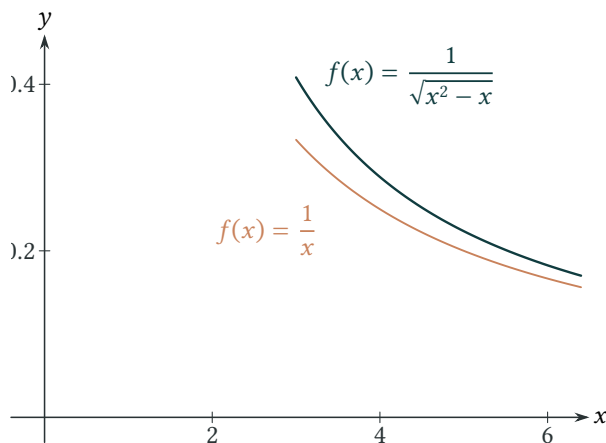


Figura 16.11. Para $x \geq 3$, $1/\sqrt{x^2 - x} > 1/x$; a área sob a curva maior também diverge.

Nem sempre a comparação direta aponta na direção necessária. Por exemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} < \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

mas estar abaixo de uma função cuja integral diverge não permite concluir nada: uma

função menor ainda pode ter integral convergente. Nesse caso, é mais informativo comparar a razão entre os integrandos.

16.9 Teorema Teste da comparação pelo limite para integrais impróprias

Sejam f e g funções contínuas em $[a, \infty)$, com $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ para todo x . Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty,$$

então as integrais

$$\int_a^\infty f(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty g(x) \, dx$$

ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração. Como $L > 0$, existe $A \geq a$ tal que, para $x \geq A$, $L/2 < f(x)/g(x) < 3L/2$. Logo,

$$\frac{L}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3L}{2}g(x), \quad x \geq A.$$

Pela comparação direta, a integral de g converge se e somente se a de f converge em $[A, \infty)$. As integrais em $[a, A]$ são finitas por continuidade, portanto não alteram a convergência das integrais originais. ■

Exemplo 16.10 — Comparação pelo limite.

Determine a convergência de $\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \, dx$.

◁

Solução. Para valores grandes de x , o termo dominante no denominador é x^2 ; por isso, a função deve se comportar como $1/x$. Calculamos a razão:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{x^2 + 2x + 5}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$$

Para $x > 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por x :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2/x + 5/x^2}} \rightarrow 1,$$

pela continuidade da raiz quadrada e da função recíproca em 1. Assim, os dois integrandos são assintoticamente equivalentes. Como $\int_3^\infty x^{-1} \, dx$ diverge, o teste da comparação pelo limite mostra que

$$\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \, dx$$

também diverge. A Figura 16.12 ilustra a aproximação entre as duas curvas para valores crescentes de x .

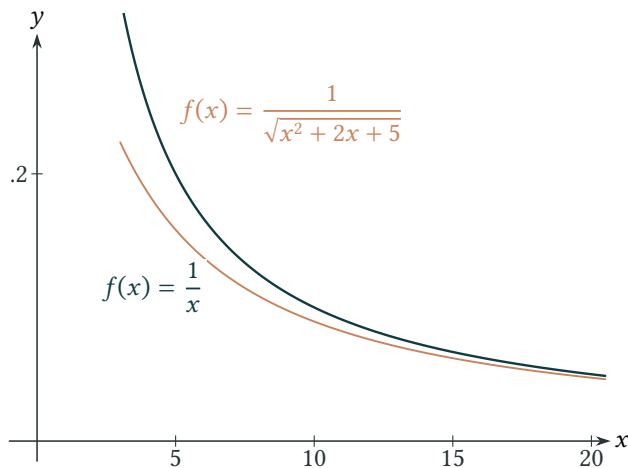


Figura 16.12. As funções $1/\sqrt{x^2 + 2x + 5}$ e $1/x$ se tornam assintoticamente equivalentes: a razão entre elas tende a 1.

■

Exercícios

Ex. 16.6 Determine se cada integral converge ou diverge. Calcule seu valor quando houver convergência.

1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

3. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

4. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx$

5. $\int_0^{\infty} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx$

6. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$

7. $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx$

Ex. 16.7 Use o teste da comparação direta ou o teste da comparação pelo limite para decidir se cada integral converge. Indique a função de comparação.

1. $\int_{10}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{3x^2 + 2x - 5}} dx$

2. $\int_2^{\infty} \frac{4}{\sqrt{7x^3 - x}} dx$

3. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3 - x^2 + x + 1}} dx$

4. $\int_1^{\infty} e^{-x} \ln x dx$

5. $\int_5^{\infty} e^{-x^2 + 3x + 1} dx$

6. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} dx$

16.4. Probabilidade

Até aqui, a convergência de uma integral imprópria determinava se uma área ou uma quantidade acumulada possuía valor finito. Em probabilidade, a mesma questão adquire um significado estrutural: uma função só pode descrever como a probabilidade se distribui sobre a reta se sua massa total for finita e puder ser normalizada para valer 1. A convergência de outras integrais determinará, por sua vez, se essa distribuição possui média ou momentos de ordem superior.

Uma variável aleatória pode representar, por exemplo, o tempo de duração de uma lâmpada ou a altura de uma pessoa escolhida em uma população. Seus valores não precisam pertencer a $[0, 1]$; são as probabilidades dos eventos que ficam entre 0 e 1. Consideraremos modelos descritos por densidades.

16.3 Definição Densidade de probabilidade

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **densidade de probabilidade** quando

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.$$

Se uma variável aleatória X possui densidade f , definimos, para $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Densidade e existência de momentos

Uma densidade deve ser não negativa e ter integral total 1. Essas condições garantem a normalização das probabilidades, mas não uma média finita. Para isso, é preciso também que a integral de $|x|$ vezes a densidade seja finita; momentos superiores exigem verificações próprias.

A segunda condição é chamada **normalização**: a área total sob o gráfico de f representa a probabilidade do evento certo $X \in \mathbb{R}$. Como f é não negativa, sua integral sobre qualquer intervalo está entre 0 e 1. Além disso, $P(X = x) = 0$ para cada ponto x , pois a integral sobre um intervalo de comprimento zero é nula. Por isso, em modelos com densidade, incluir ou excluir os extremos de um intervalo não altera sua probabilidade.

Nem toda função não negativa pode ser normalizada. Por exemplo, se $c > 0$, então

$$\int_0^{\infty} \frac{c}{1+x} \, dx = \infty;$$

logo, nenhuma escolha de c transforma $c/(1+x)$, em $[0, \infty)$, numa densidade.

16.4.1. Função de distribuição acumulada

As probabilidades de todos os intervalos podem ser reunidas numa única função. A **função de distribuição acumulada** de X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt.$$

Ela mede a massa acumulada à esquerda de x . Como $f \geq 0$, a função F é não decrescente e satisfaz

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Quando f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo fornece $F'(x) = f(x)$. Assim, a densidade descreve a taxa com que a probabilidade se acumula. Também podemos calcular

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

16.4.2. Valor esperado e momentos

A densidade também permite construir uma média dos valores possíveis, ponderada por suas probabilidades. Para que essa média não dependa de um cancelamento entre duas integrais divergentes, exigimos convergência absoluta.

16.4 Definição Valor esperado

Se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) \, dx < \infty,$$

o **valor esperado** de X é

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \, dx.$$

Mais geralmente, a existência do momento de ordem $r > 0$ é determinada pela convergência de $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f(x) \, dx$.

O cancelamento entre as parcelas sobre os dois semieixos, quando ambas divergem, não produz um valor esperado. Introduziremos ainda o segundo momento

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \, dx.$$

Quando ele é finito, a variância é

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Uma densidade pode ser interpretada como uma distribuição de massa total 1. Nessa analogia, quando a integral correspondente converge, $E[X]$ fornece a abscissa do centro de massa da distribuição; compare com a Seção 15.7.

Exemplo 16.11 — Duração da queima de uma lâmpada.

A duração T , em horas, de uma lâmpada é modelada por uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, com densidade

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Verifique a normalização, calcule a probabilidade de a lâmpada durar mais que t horas e determine sua média e sua variância.

◁

Solução. A função é não negativa e está normalizada, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1.$$

Para $t \geq 0$,

$$P(T > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda t}.$$

Essa é a probabilidade de a lâmpada continuar acesa depois de t horas. Integrações por partes fornecem

$$E[T] = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad E[T^2] = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Logo,

$$\text{Var}(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Se a duração média é de 1000 horas, então $\lambda = 1/1000$ por hora. ■

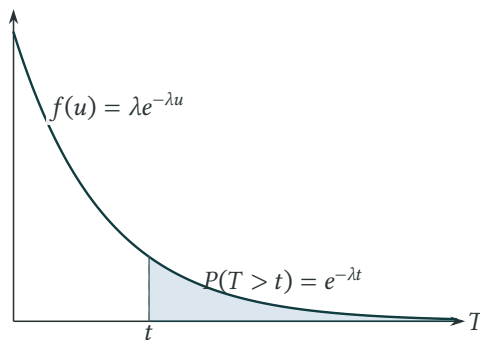


Figura 16.13. O eixo horizontal representa o tempo, e a área sombreada em $[t, \infty)$ é $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. O desenho usa $\lambda = 1$ apenas para ilustrar a forma do gráfico.

Exemplo 16.12 — Média finita e variância infinita.

Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^{-5/2}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Verifique que f é uma densidade e examine seus dois primeiros momentos.

◁

Solução. Temos

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{2} x^{-5/2} dx = 1,$$

de modo que f está normalizada. Além disso,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2} \int_1^{\infty} x^{-3/2} dx = 3, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{3}{2} \int_1^{\infty} x^{-1/2} dx = +\infty.$$

A média existe e é finita, mas a variância não existe como número finito. ■

Exemplo 16.13 – Uma densidade sem valor esperado.

A função

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

é a densidade de Cauchy. Verifique sua normalização e mostre que seu valor esperado finito não existe.

◁

Solução. Como $f(x) \geq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} [\arctg x]_{-\infty}^{\infty} = 1,$$

temos uma densidade. Embora $xf(x)$ seja ímpar, a simetria não autoriza escrever $\mathbb{E}[X] = 0$. De fato,

$$\int_0^b \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \ln(1+b^2) \rightarrow \infty,$$

e, portanto, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx$ diverge. O cancelamento obtido com limites simétricos fornece um valor principal, não uma esperança. Assim, a esperança finita não existe e, conseqüentemente, a variância também não está definida. ■

Exercícios

Ex. 16.8 Determine a constante c para que

$$f(x) = \frac{c}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

seja uma densidade de probabilidade.

Ex. 16.9 Se X tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, calcule $\mathbb{E}[X^2]$ e $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Ex. 16.10 Mostre que $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, é uma densidade e justifique que $\mathbb{E}[X] = 0$. Compare essa

justificativa com o caso da densidade de Cauchy.

Ex. 16.11 Para a densidade de Pareto

$$f_{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq 1,$$

com $\alpha > 0$, determine:

1. quando a esperança é finita;
2. quando o segundo momento é finito;
3. para quais valores de α a esperança é finita e a

variância é infinita.

Ex. 16.12 A duração T , em horas, de uma lâmpada é modelada por uma distribuição exponencial com vida média de 1200 horas. Para este exercício, a mediana m é definida por $F(m) = 1/2$ e, quando $P(B) > 0$,

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

1. Determine o parâmetro λ e calcule $P(T > 1000)$.

2. Calcule $P(500 \leq T \leq 1500)$.

3. Determine a mediana da duração.

4. Calcule $P(T > 1800 | T > 600)$ e interprete o resultado.

As integrais impróprias encerram este percurso retomando uma ideia presente em todo o cálculo: aproximar uma quantidade por objetos finitos e estudar o limite dessas aproximações. Aqui, a existência do limite não é um detalhe técnico; ela decide se a área, a massa ou o momento considerado possui significado finito.

Há várias continuidades naturais. As séries aplicam a mesma pergunta de convergência a somas infinitas; o cálculo em várias variáveis estende derivadas e integrais a fenômenos com mais de uma coordenada; e a probabilidade contínua desenvolve, a partir das densidades, outros modelos e outras medidas de comportamento. Em todos esses caminhos, permanecem centrais as relações entre aproximação, variação e acumulação estudadas neste livro.

Respostas dos exercícios

As respostas seguem a numeração dos exercícios de cada capítulo. Dentro de cada resposta, os itens aparecem na mesma ordem do enunciado. Nas integrais indefinidas, a constante de integração pode ser escolhida independentemente em cada intervalo do domínio.

1.1 Suponha $\sqrt{3} = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, e a fração reduzida. Então $m^2 = 3n^2$. Como 3 é primo e divide m^2 , temos $3 \mid m$; escrevendo $m = 3k$, obtemos $n^2 = 3k^2$, e portanto $3 \mid n$. Isso contradiz a hipótese de que m/n estava reduzida. A primalidade é usada na passagem $3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m$.

1.2 Se $x = 0,4545 \dots$, então

$$100x = 45,4545 \dots = 45 + x.$$

Logo, $99x = 45$ e $x = 5/11$. Para qualquer decimal periódico, multiplicar por uma potência de 10 correspondente ao comprimento do período alinha as duas caudas periódicas; ao subtrair as expressões, a parte infinita se cancela e resta uma equação linear para x .

1.3 Como $x_n = 1 - 10^{-n}$, temos $1 - x_n = 10^{-n}$. A desigualdade $10^{-n} < 10^{-6}$ exige $n > 6$; portanto, o menor valor é $n = 7$. A igualdade $1 = 0,999 \dots$ exprime o fato de que essa diferença pode ser tornada menor do que qualquer tolerância positiva escolhida de antemão; o capítulo de limites formalizará essa afirmação.

1.4 1. Se 0 e $0'$ são neutros aditivos, então $0 = 0 + 0' = 0'$.

2. Se b e c são opostos de a , então $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$.

3. Multiplique $ax = a$ por a^{-1} : $x = (a^{-1}a)x = a^{-1}a = 1$.

4. Temos $ab + a(-b) = a(b - b) = a \cdot 0 = 0$. Portanto, $a(-b)$ é o oposto de ab e, pela unicidade do oposto, $a(-b) = -(ab)$.

1.5 1. $4x^2(2x - 3)$.

2. $(x - 4)(x + 4)$.

3. $(x - 3)^2$.

4. $(x + 2)(x^2 - 9) = (x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

5. $(3x + 1)(x - 2)$.

6. $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

1.6 1. $x(x^2 - 5x + 4) = x(x - 1)(x - 4) = 0$; logo, $x \in \{0, 1, 4\}$.

2. $(2x + 3)(x - 1) = 0$; logo, $x \in \{-3/2, 1\}$.

3. $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$. Como $x^2 + 4 > 0$ para todo real x , temos $x \in \{-2, 2\}$.

1.7 Ao distribuir, os termos intermediários se cancelam dois a dois:

$$a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n.$$

1.8 Elevando a igualdade ao quadrado,

$$b^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}.$$

Logo,

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 - 2.$$

1.9 1. $(x + 4)^2 - 13$.

2. $(x - 5)^2 - 18$.

3. $3(x + 2)^2 - 13$.

1.10 $p(x) = x(x + 2)(x - 3)(x - 5)$; portanto, o conjunto-solução é $\{-2, 0, 3, 5\}$.

1.11 O quadrado interno tem lado $x - 4$. Logo,

$$A(x) = x^2 - (x - 4)^2 = 8x - 16 = 8(x - 2), \quad x \geq 4.$$

Se for exigida uma abertura interna não degenerada, toma-se $x > 4$.

1.12 1. $x + 2$, com $x \neq 2$.

2. $\frac{x - 1}{x}$, com $x \neq 0, -1$.

3. $\frac{1}{x(x+1)}$, com $x \neq 0, -1$.

4. $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$, com $x \geq -1$ e $x \neq 0$.

1.13 1. $\frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$, com $x \neq 0$.

2. $\sqrt{x^2} = |x|$; a igualdade $\sqrt{x^2} = x$ vale apenas se $x \geq 0$.

3. A igualdade é válida apenas para $x \neq 0$, pois a expressão original não está definida em $x = 0$.

1.14 1. $\frac{z-w}{z+w}$, com $z+w \neq 0$ e $z-w \neq 0$.

2. $\frac{pq}{p+q}$, com $p \neq 0, q \neq 0$ e $p+q \neq 0$.

3. $\frac{1}{b-a}$, com $a \neq 0, b \neq 0$ e $b \neq \pm a$.

4. $\frac{4xy}{3(x-2)^{5/2}}$, com $x > 2$ e $y \neq 0$.

1.15 1. $2x + h$.

2. $3x^2 + 3xh + h^2$.

3. $-\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$, com $x \neq 0$ e $x+h \neq 0$.

1.16 1. Some $-a - b$ aos dois membros de $a \leq b$.

2. Temos $a + c \leq b + c \leq b + d$; aplique a transitividade.

3. Como $a < b$ e $a \geq 0, a^2 \leq ab$. Como $a < b$ e $b > 0, ab < b^2$. Portanto, $a^2 < b^2$.

4. Se $a \geq b > 0$, multiplicando $a \geq b$ sucessivamente pelos números positivos a e b , obtemos $a^2 \geq ab \geq b^2$, contrariando a hipótese.

1.17 1. $(1, 5)$.

2. $[-5, 3]$.

3. $(-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$.

1.18 Os pontos de mudança de sinal são -1 e 2 . Portanto,

$$|x-2| + |x+1| = \begin{cases} 1-2x, & x < -1, \\ 3, & -1 \leq x < 2, \\ 2x-1, & x \geq 2. \end{cases}$$

1.19 Temos $3x-1=5$ ou $3x-1=-5$. Logo, $x=2$ ou $x=-4/3$.

1.20 Da desigualdade triangular, $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$, logo $|x|-|y| \leq |x-y|$. Trocando x e y , obtemos $|y|-|x| \leq |x-y|$. As duas desigualdades equivalem ao resultado.

1.21 As desigualdades equivalem a $|x-a| < \varepsilon$. Se $x \neq a$, tome $\varepsilon = |x-a|/2 > 0$. Teríamos então $|x-a| < |x-a|/2$, o que é impossível. Logo, $x=a$.

1.22 1. $\inf A = 2$, sem mínimo; $\sup A = \max A = 5$.

2. $\inf B = 0$, sem mínimo; $\sup B = \max B = 1$.

3. $\inf C = \min C = 0$ e $\sup C = 1$, sem máximo.

4. D não possui mínimo, máximo, ínfimo nem supremo em $\mathbb{R}$.

1.23 Se $M = \max A$, então M é uma cota superior. Qualquer cota superior L satisfaz $M \leq L$, pois $M \in A$. Logo, M é a menor cota superior.

1.24 1. $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9$.

2. $16^{-3/4} = 1/16^{3/4} = 1/8$.

3. $(-27)^{1/3} = -3$.

4. Todo quadrado real é não negativo; portanto, não existe real cujo quadrado seja -16 .

5. $a^{6-2-3} = a$, com $a \neq 0$.

6. $3\sqrt{2}|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

1.25 Nos dois primeiros itens é necessário $a \neq 0$. Para admitir todo expoente real x no contexto deste capítulo, tomamos $a > 0$.

2.1 1. $A \times B = \{(0, -1), (0, 2), (1, -1), (1, 2)\}$.

2. $B \times A = \{(-1, 0), (-1, 1), (2, 0), (2, 1)\}.$

3. Não. A ordem dos conjuntos determina a ordem das componentes.

2.2 1. P está no segundo quadrante e Q , no quarto.

2. $d(P, Q) = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$

2.3 É a parte do plano à esquerda do eixo y e acima da reta $y = 1$. O eixo y não pertence à região; a reta $y = 1$ pertence.

2.4 1. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$

2. $(-\infty, 3].$

3. $(2, +\infty)$: como a raiz está no denominador, é necessário $x - 2 > 0$.

4. $[0, 1) \cup (1, +\infty).$

2.5 Não em ambos os casos. As funções f e g têm domínios diferentes, enquanto h e k têm contradomínios diferentes. Igualdade de funções exige que domínio, contradomínio e regra coincidam. Nos quatro casos, a imagem é $[0, +\infty)$, o que mostra também que ter a mesma imagem não basta.

2.6

$$\begin{aligned} f([-1, 3]) &= [-4, 5], & f^{-1}(\{0\}) &= \{-2, 2\}, \\ f^{-1}([-4, 0]) &= [-2, 2], & f^{-1}((-\infty, -5)) &= \emptyset. \end{aligned}$$

No último caso, usamos que $f(x) \geq -4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.7 Para que U fosse função de T , uma mesma temperatura teria de determinar sempre a mesma umidade. Um contraexemplo possível é

horário	8 h	9 h	10 h	11 h
T (°C)	20	22	22	24
U (%)	80	72	65	58

À temperatura de 22 °C correspondem duas umidades, embora T e U sejam, separadamente, funções do horário.

2.8 A semicircunferência superior é $y = \sqrt{16 - x^2}$, com $-4 \leq x \leq 4$. Na união, para cada $-4 < x < 4$ há dois valores de y , $\pm\sqrt{16 - x^2}$; por isso ela não passa no teste da reta vertical.

2.9 Um esboço admissível é uma curva oscilatória contínua em $0 \leq t \leq 120$ s, seguida por uma subida rápida durante o recolhimento e por um trecho constante positivo quando a boia chega ao convés. O desenho pressupõe altura medida em relação à superfície média da água e transições contínuas; outros esboços são possíveis se essas hipóteses forem alteradas.

2.10 Como n conta operações, apenas valores inteiros não negativos têm sentido; ligar os pontos atribuiria valores a “frações de operação”. Por exemplo, se $D(5) = 12$ e a sexta operação exclui três arquivos, então $D(6) = 9$.

2.11 $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$ e $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$, ambas com domínio $\mathbb{R}$. Em $x = 1$, os valores são 4 e 2.

2.12 $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - x}$, com $x \leq 4$; $(g \circ f)(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$, com $x \geq -1$.

2.13 Como $g(0) = 1$ e $g(1) = 3$, os pontos pedidos são $(0, 4)$ e $(1, -2)$. Também $g(f(1)) = 9$ e $g(f(3)) = -3$. Em particular, $(f \circ g)(1) = -2 \neq 9 = (g \circ f)(1)$.

2.14

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{(x-1)^2}}, \quad \text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 1/2] \cup [3/2, \infty),$$

pois $|x - 1| \geq 1/2$. Na outra ordem,

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2} - 1}, \quad \text{Dom}(g \circ f) = [-2, 2] \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

A raiz exige $|x| \leq 2$ e o denominador exclui as soluções de $\sqrt{4 - x^2} = 1$.

2.15 Temos $w(s) = 1/\sqrt{s}$, com $s > 0$, e $H = w \circ v \circ u$. A condição $4 - (2x - 1)^2 > 0$ equivale a $-1/2 < x < 3/2$. Nesse intervalo, $4 - (2x - 1)^2$ assume todos os valores de $(0, 4]$; logo, $\text{Im } H = [1/2, \infty)$. O mínimo $1/2$ é atingido em $x = 1/2$.

2.16

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(fg) = [-4, \infty) \setminus \{1\}.$$

Para $f \circ g$, exigimos $x \neq 1$ e $1/(x - 1) + 4 \geq 0$, logo

$$\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 3/4] \cup (1, \infty).$$

Para $g \circ f$, exigimos $x \geq -4$ e $\sqrt{x + 4} \neq 1$; portanto, $\text{Dom}(g \circ f) = [-4, \infty) \setminus \{-3\}$.

2.17 $(p \circ c)(g) = 18g + 7$ é o preço, em reais, de uma preparação com g gramas. O domínio físico é $0 \leq g \leq 2000$.

2.18 Para expoentes reais arbitrários, uma escolha sempre válida é

$$D = \{x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g : f(x) > 0\}.$$

Também podemos incluir pontos em que $f(x) = 0$ e $g(x) > 0$. Bases negativas exigem restrições sobre os valores de $g(x)$: a potência real existe, por exemplo, quando $g(x)$ é inteiro ou é racional com denominador ímpar na forma irredutível. Portanto, as restrições dependem dos valores das funções, não apenas de seus domínios.

2.19 1. $f(x+2) = x+2$, $f(-x) = -x$, $f(x+h) = x+h$; o quociente incremental é 1.

2. $f(x+2) = 3x+10$, $f(-x) = 4-3x$, $f(x+h) = 3x+3h+4$; o quociente incremental é 3.

3. $f(x+2) = x^2 + 4x + 4$, $f(-x) = x^2$, $f(x+h) = (x+h)^2$; o quociente incremental é $2x+h$.

4. $f(x+2) = 5x^2 + 20x + 21$, $f(-x) = 5x^2 + 1$, $f(x+h) = 5(x+h)^2 + 1$; o quociente incremental é $10x+5h$.

5. $f(x+2) = x^2 + 3x + 2$, $f(-x) = x^2 + x$, $f(x+h) = (x+h)^2 - (x+h)$; o quociente incremental é $2x+h-1$.

6. $f(x+2) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$, $f(-x) = -x^3 + x^2$, $f(x+h) = (x+h)^3 + (x+h)^2$; o quociente incremental é $3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h$.

2.20 Se $x < y$ pertencem ao mesmo intervalo $(-\infty, -1)$ ou $(-1, \infty)$, então

$$f(y) - f(x) = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} > 0.$$

Logo, f é estritamente crescente em cada um desses intervalos. Ela não é monótona em todo o domínio: por exemplo, $-2 < 0$, mas $f(-2) = 2 > 0 = f(0)$.

2.21 Dados pontos distintos x e y do domínio, podemos supor $x < y$. A monotonicidade estrita fornece $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$, conforme a função seja crescente ou decrescente. Em ambos os casos, $f(x) \neq f(y)$; portanto, f é injetora.

2.22 1. Não: faltam imagens para a , i e u .

2. Sim: cada elemento de A aparece exatamente uma vez como primeira coordenada.

3. Sim, pelo mesmo motivo.

4. Não: e e u têm duas imagens, e o não tem imagem.

5. Sim: todos os elementos de A têm imagem 3.

6. Sim: cada elemento de A tem uma única imagem.

7. Sim: cada elemento de A tem uma única imagem.

2.23 Nos itens 2, 5 e 6 do exercício anterior, as funções não são injetoras nem sobrejetoras: suas imagens são, respectivamente, $\{1, 2\}$, $\{3\}$ e $\{1, 2, 3\}$, e há valores repetidos. Nos itens 3 e 7, as funções são bijetoras, pois cada elemento de B aparece exatamente uma vez como imagem. Os itens 1 e 4 não definem funções de A em B .

2.24 Se $n = 2k$, então $f(n) = 2k$; se $n = 2k + 1$, então $f(n) = -(2k + 1)$. Portanto,

$$\text{Im } f = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \cup \{-1, -3, -5, \dots\}.$$

2.25 Temos $g(n) = (-1)^n n + (-1)^{n+1}(n+1) = (-1)^{n+1}$. Assim, $g(n) = -1$ se n é par e $g(n) = 1$ se n é ímpar, logo $\text{Im } g = \{-1, 1\}$.

2.26 1. Se f é injetora, os n elementos distintos de A têm n imagens distintas em B . Logo, B tem pelo menos n elementos.

2. Se f é sobrejetora, $B = f(A)$. Uma lista de n imagens contém no máximo n valores distintos, logo B tem no máximo n elementos.

3. Uma bijeção implica as duas desigualdades, portanto as cardinalidades são iguais. Reciprocamente, se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, a regra $f(a_i) = b_i$ define uma bijeção. Para os dois conjuntos vazios, a função vazia é bijetora.

2.27 1. Não é injetora, pois $f(1) = f(2) = 1$, nem sobrejetora: a imagem é $\{1, 2, 3, 5, 7\}$.

2. É bijetora: g permuta ciclicamente os sete elementos, com $g(7) = 1$ e $g(k) = k + 1$ para $1 \leq k \leq 6$.

3. É injetora, pois $3n + 1 = 3m + 1$ implica $n = m$. Não é sobrejetora: 0 não pertence à imagem.

4. Não é injetora, pois todos os inteiros não negativos têm imagem zero. Não é sobrejetora: a imagem é $\{0, -2, -4, \dots\}$.

5. É bijetora, com inversa $y \mapsto (y - b)/a$.

6. Não é injetora, pois $f(1) = f(-1)$, nem sobrejetora, pois a imagem é $[0, \infty)$.

7. É injetora, mas não sobrejetora em $\mathbb{R}$: a imagem é $(0, \infty)$.

8. Não é injetora, pois $f(1) = f(-1)$, nem sobrejetora: a imagem é $(0, \infty)$.

9. É injetora, mas não sobrejetora em $\mathbb{R}$: a imagem é $[0, \infty)$.

10. É injetora; não é sobrejetora, pois a imagem é a diagonal $\{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

11. É injetora pela primeira coordenada; não é sobrejetora, pois a imagem é $\{(t, |t|) : t \in \mathbb{R}\}$.

12. É sobrejetora, pois $f(z, 0) = z$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Não é injetora: $f(0, 0) = f(1, 1) = 0$.

13. É bijetora, com inversa $(u, v) \mapsto (u, \sqrt[3]{v})$.

2.28 Em cada item, os três conjuntos são apresentados na ordem pedida.

1. $\emptyset$, $\{0\}$ e $\emptyset$.

2. $\emptyset$, $\emptyset$ e $\emptyset$. De fato,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3, & -3 \leq x \leq -1, \\ -x^2 - 3x - 3, & x \leq -3 \text{ ou } x \geq -1, \end{cases}$$

e em todos esses intervalos $f(x) \leq -1$. No intervalo central, $f(x) + 1 = (x + 1)(x + 4) \leq 0$; fora dele, $f(x) + 1 = -(x + 1)(x + 2) \leq 0$.

3. $\emptyset$, $\{0\}$ e $\emptyset$, pois

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \in (0, 1],$$

e o valor 1 só é atingido em $x = 0$.

4. $\{(|t|, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $\{(1 + |t|, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\{(2 + |t|, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

2.29 Escreva $f : A \rightarrow B$, $\iota_A(x) = x$ em A e $\iota_B(y) = y$ em B .

1. Para $x \in A$, $(\iota_B \circ f)(x) = f(x)$ e $(f \circ \iota_A)(x) = f(x)$. Os domínios e contradomínios também coincidem.

2. Se f é bijetora, a definição de inversa dá $f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in A$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para $y \in B$. Logo, $f^{-1} \circ f = \iota_A$ e $f \circ f^{-1} = \iota_B$.

2.30 Temos $\text{Dom } f = [0, 2]$, contradomínio $[0, 5]$ e $\text{Im } f = [0, 4]$. A função é injetora, mas não é sobrejetora sobre $[0, 5]$; por isso, não possui inversa com domínio $[0, 5]$. Substituindo o contradomínio pela imagem, obtemos uma bijeção cuja inversa é

$$f^{-1} : [0, 4] \longrightarrow [0, 2], \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Assim, o domínio de f^{-1} é a imagem de f , não todo o contradomínio escolhido para f .

2.31

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{4-x}, \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad \text{Dom } f^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Substituição direta fornece $f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \neq -2$.

2.32 $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$. A função original recebe graus Celsius e devolve graus Fahrenheit; a inversa recebe graus Fahrenheit e devolve graus Celsius.

2.33 $h(h(x)) = a - (a - x) = x$, logo $h^{-1} = h$. Seu gráfico é a reta $y = a - x$, simétrica em relação à reta $y = x$.

2.34 Uma inversa usual existe quando a distância é estritamente crescente. Em um trecho constante, vários instantes correspondem à mesma distância. A ambiguidade pode ser eliminada restringindo o domínio a um trecho estritamente crescente ou convencionando escolher, por exemplo, o primeiro instante em que a distância é atingida.

2.35 Expandindo o quadrado, recuperamos $x^2 + bx + c$. A translação horizontal é de $-b/2$, e a vertical, de $c - b^2/4$. O vértice resultante é $(-b/2, c - b^2/4)$.

2.36 Temos $\text{Dom } g = A$. Já $h(x)$ está definida quando $cx \in A$; portanto,

$$\text{Dom } h = \{x \in \mathbb{R} : cx \in A\} = \{a/c : a \in A\}.$$

2.37 1. Translação de duas unidades para cima. O domínio permanece $[0, +\infty)$.

2. Primeiro, translação de três unidades para a esquerda, que leva o domínio a $[-3, +\infty)$; depois, escala vertical por fator 2 e translação de uma unidade para baixo, que não alteram o domínio.

2.38 Temos $\text{Dom } g = A$ e

$$\text{Dom } h = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\} = -A.$$

Assim, a reflexão no eixo x preserva o domínio, enquanto a reflexão no eixo y o substitui por seu simétrico em relação à origem.

2.39 1. Sim, apenas para a função nula: a simetria exigiria que (x, y) e $(x, -y)$ pertencessem ao gráfico, e a unicidade da imagem força $y = 0$.

2. O domínio deve ser simétrico em relação à origem.

3. A função nula. As duas identidades de paridade dão $f(x) = f(-x) = -f(x)$.

4. A soma de duas funções pares é par, e a de duas ímpares é ímpar. O produto de duas pares ou de duas ímpares é par; o produto de uma par por uma ímpar é ímpar. Para uma soma de par com ímpar, em geral não há paridade.

5. kf é par, kg é ímpar e $f + k$ é par. Se $k = 0$, então $g + k$ é ímpar; se g é nula, $g + k$ é par; nos demais casos, $g + k$ não é par nem ímpar. As funções $|f|$ e $|g|$ são pares. A função nula deve ser lembrada como simultaneamente par e ímpar.

2.40 Translade duas unidades para a direita, dilate verticalmente por fator 3, reflita no eixo x e translade cinco unidades para cima. O vértice é $(2, 5)$, o eixo é $x = 2$, o domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-\infty, 5]$.

2.41 Substituindo $-x$, obtemos $u(-x) = u(x)$ e $v(-x) = -v(x)$. Além disso,

$$u(x) + v(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x).$$

2.42 Todo inteiro positivo n é período, pois $\llbracket x + n \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + n$. Reciprocamente, se $r > 0$ é período, então $f(r) = f(0) = 0$; logo, $r - \llbracket r \rrbracket = 0$ e r é inteiro. O menor período positivo é, portanto, 1.

3.1 1. As duas inclinações são 2; as retas são paralelas.

2. As duas retas são verticais; portanto, são paralelas.

3. As inclinações são $-1/2$ e 2; como o produto é -1 , as retas são perpendiculares.

4. As inclinações são $3/2$ e $-2/3$; as retas são perpendiculares.

3.2 1. Igualando as inclinações,

$$\frac{-1 - a}{4} = \frac{a - 4}{-8},$$

obtemos $a = -6$.

2. As inclinações são $(a - 4)/3$ e $12/(a + 1)$. Seu produto vale -1 quando $a = 3$.

3. A reta procurada tem inclinação $-1/3$. Logo, $(k - 3)/(-5 - 1) = -1/3$, de onde $k = 5$.

4. $m_{AB} = 5/2$ e $m_{BC} = -2/5$. Como o produto é -1 , os lados AB e BC são perpendiculares e o ângulo reto está em B .

3.3 1. Se $b_1 b_2 \neq 0$, os coeficientes angulares são $-a_1/b_1$ e $-a_2/b_2$, que são iguais exatamente quando $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$. Se algum b_i é zero, essa mesma igualdade

força o outro a ser zero, e as duas retas são verticais. Quando têm a mesma direção, existe $\lambda \neq 0$ tal que $a_2 = \lambda a_1$ e $b_2 = \lambda b_1$; elas coincidem precisamente quando também $c_2 = \lambda c_1$. Caso contrário, são paralelas distintas.

2. A expressão proposta é equivalente a $bx + ay = ab$. Ela é satisfeita por $(a, 0)$ e $(0, b)$ e representa uma reta; como dois pontos distintos determinam uma única reta, é a equação procurada.

3.4 Para $h \neq 0$,

$$m_h = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = 4 + h.$$

Assim, m_h se aproxima de 4, e a reta prevista é $y - 4 = 4(x - 2)$, ou $y = 4x - 4$.

3.5 1. Se d é a distância horizontal, então $1000/d = 0,22$. Logo,

$$d = \frac{1000}{0,22} = \frac{50000}{11} \approx 4545 \text{ pés.}$$

2. Calculando a inclinação de cada barra e usando um de seus extremos, obtemos

$$\begin{aligned} OD : y &= \frac{12}{7}x, & AD : y &= -\frac{12}{7}x + 6, \\ AC : y &= \frac{6}{5}x - \frac{21}{5}, & BC : y &= -\frac{6}{7}x + \frac{57}{7}. \end{aligned}$$

3.6 Se t é o tempo de permanência em horas, um modelo para um período diário é

$$P(t) = \begin{cases} 6, & t = 0, \\ 6 + 3,5n, & n - 1 < t \leq n, \quad n = 1, \dots, 7, \\ 34, & 7 < t \leq 24. \end{cases}$$

O gráfico é uma função em degraus e atinge o teto de R\$ 34,00 quando se inicia a oitava hora.

3.7 1. O coeficiente angular é $(9 - 3)/(4 - 1) = 2$; logo, $f(x) = 2x + 1$.

2. A temperatura aumenta 3°C por minuto; 20 é a temperatura inicial.

3. Para a função modular, $7 = 2a - 1$, de modo que $a = 4$. Para a quadrática, $7 = 4a - 1$, de modo que $a = 2$.

3.8 1. $f(-2) = 13$.

2. $-3x + 7 = 0$ fornece $x = 7/3$.

3. $-3x + 7 = 16$ fornece $x = -3$.

4. Isolando x em $y = -3x + 7$, obtemos $x = (7 - y)/3$; logo, $f^{-1}(x) = (7 - x)/3$.

5. $-3x + 7 \geq 1$ equivale a $x \leq 2$.

3.9 O coeficiente angular é

$$a = \frac{-7 - 5}{4 - (-2)} = -2.$$

Usando $5 = -2(-2) + b$, obtemos $b = 1$ e, portanto, $f(x) = -2x + 1$. A interseção com o eixo y é $(0, 1)$; a interseção com o eixo x é $(1/2, 0)$.

3.10 1.

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 5, & x < -1, \\ 2x - 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

2. O vértice é $(-1, -3)$, o eixo de simetria é $x = -1$ e $\text{Im } g = [-3, +\infty)$.

3. $2|x + 1| - 3 = 0$ equivale a $|x + 1| = 3/2$; logo, $x = -5/2$ ou $x = 1/2$.

4. $2|x + 1| - 3 \leq 1$ equivale a $|x + 1| \leq 2$; portanto, $-3 \leq x \leq 1$.

3.11 1. $q(x) = -2(x - 2)^2 + 3$.

2. O vértice é $(2, 3)$, o eixo de simetria é $x = 2$ e $\text{Im } q = (-\infty, 3]$.

3. De $(x - 2)^2 = 3/2$, obtemos $x = 2 \pm \sqrt{6}/2$.

4. Como a parábola tem concavidade voltada para baixo,

$$2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

3.12 1. Os termos 18 e 6 são as tarifas fixas; 1,40 e 1,90 são os preços por quilômetro.

2. $18 + 1,40x = 6 + 1,90x$ fornece $x = 24$ km.

3. Para $0 \leq x < 24$, a empresa B é mais econômica; para $x > 24$, a empresa A é mais econômica. Em $x = 24$, os preços coincidem.

4. $A(40) = \text{R\$ } 74,00$ e $B(40) = \text{R\$ } 82,00$.

3.13 1. $R(p) = p(600 - 20p) = -20p^2 + 600p$.

2. $R(p) = -20(p - 15)^2 + 4500$; portanto, a receita máxima é $\text{R\$ } 4500,00$, obtida com $p = \text{R\$ } 15,00$ e venda de 300 ingressos.

3. Em $p = 0$, há procura, mas os ingressos são gratuitos; em $p = 30$, o modelo prevê procura nula. Nos dois casos, a receita é zero.

3.14 O domínio físico é $[0, 4]$ e a imagem é $[12, 16]$. A altura máxima, 16 m, ocorre em $t = 2$ s. A equação $h(t) = 15$ tem as soluções $t = 1$ s e $t = 3$ s.

3.15 1. Ambas têm domínio $\mathbb{R}$. A imagem de p é $[0, +\infty)$ e a de r é $\mathbb{R}$.

2. O domínio é $[-1, +\infty)$ e a imagem é $[-2, +\infty)$. De $\sqrt{x+1} = 2$, obtemos $x = 3$. O gráfico de $\sqrt{x}$ é deslocado uma unidade para a esquerda e duas para baixo.

3. A função restrita é uma bijeção de $[0, +\infty)$ em si mesmo. Sua inversa é $y \mapsto \sqrt[4]{y}$, com domínio $[0, +\infty)$.

3.16 Como $16^{3/4} = 8$,

$$B(16M) = B_0(16M)^{3/4} = 8B(M).$$

Por outro lado, $B(M)/M = B_0M^{-1/4}$. Portanto,

$$\frac{B(16M)}{16M} = \frac{1}{2} \frac{B(M)}{M}.$$

Nesse modelo, o animal de massa dezesseis vezes maior tem taxa metabólica total oito vezes maior, mas taxa por unidade de massa duas vezes menor.

3.17 O quociente deve ser não negativo e $x \neq 3$, de modo que

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup (3, \infty).$$

Se $y = f(x)$, então $y \geq 0$ e $y^2 = (x+2)/(x-3)$. O valor $y = 1$ é impossível; todos os demais valores não negativos ocorrem. Assim, $\text{Im } f = [0, 1) \cup (1, \infty)$.

3.18 1. O grau é 3. As raízes são -1 , de multiplicidade 2, e 2, simples. Temos $P(0) =$
2. O extremo esquerdo aponta para cima e o direito, para baixo. O gráfico toca o eixo em -1 e o cruza em 2.

2. $Q(x) = x(x-2)(x+2)$, com raízes simples -2 , 0 e 2. O sinal é negativo em $(-\infty, -2)$ e $(0, 2)$, e positivo em $(-2, 0)$ e $(2, +\infty)$. A função é ímpar: seu gráfico é simétrico em relação à origem. O extremo esquerdo aponta para baixo e o direito, para cima.

3.19 1. $g(x) = x + 2$, para $x \neq 2$. Falta o ponto $(2, 4)$, e os valores se aproximam de 4 pelos dois lados.

2. O domínio exclui 2. As interseções são $(-1, 0)$ e $(0, -1/2)$. Como $h(x) = 1 + 3/(x-2)$, as assíntotas são $x = 2$ e $y = 1$. A função é positiva em $(-\infty, -1)$ e $(2, +\infty)$ e negativa em $(-1, 2)$. Perto de 2, decresce sem limite pela esquerda e cresce sem limite pela direita. Longe da origem, aproxima-se de 1. O gráfico é obtido de $1/x$ por uma translação de duas unidades para a direita, escala vertical por fator 3 e translação de uma unidade para cima.

3. O domínio exclui 2. Os valores são negativos e decrescem sem limite dos dois lados de 2. Quando $|x|$ cresce, aproximam-se de 0 por valores negativos.

3.20 $P(12) = 720/12 = 60$ kPa e $P(8) = 720/8 = 90$ kPa. A pressão aumenta 30 kPa, isto é, 50% em relação ao valor inicial.

3.21 $(f \circ g)(x) = 1/(x^2 - 1)$, com domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $(g \circ f)(x) = 1 + 1/(x - 2)^2$, com domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. A imagem da segunda composição é $(1, \infty)$: $1/(x - 2)^2$ percorre $(0, \infty)$. A função g atinge 1 apenas quando sua entrada é zero, mas $f(x)$ nunca é zero.

4.1 1. Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = (0, \infty)$, crescente, assíntota $y = 0$.

2. Dom $g = \mathbb{R}$, Im $g = (0, \infty)$, decrescente, assíntota $y = 0$.

3. Dom $h = \mathbb{R}$, Im $h = (-1, \infty)$, crescente, assíntota $y = -1$.

4. Dom $q = \mathbb{R}$, Im $q = (-\infty, 5)$, crescente, assíntota $y = 5$.

4.2 Da lei $a^{x+(-x)} = a^x a^{-x} = a^0 = 1$, segue $a^{-x} = 1/a^x$. Como $a^{-x} = f(-x)$, a segunda função é a reflexão horizontal da primeira.

4.3

$$f(-2) = \frac{4}{9}, \quad f(0) = 1, \quad f(3) = \frac{27}{8}.$$

Como a base é maior que 1, a função é crescente.

4.4 Como $4^x = 2^{2x}$, para $x > 0$ temos $4^x > 2^x$; para $x = 0$, ambas valem 1; para $x < 0$, $4^x < 2^x$.

4.5 Como $1/8 = 2^{-3}$, temos $x = -3$.

4.6

$$\text{Dom } g = \mathbb{R}, \quad \text{Im } g = (-\infty, 0).$$

Como 2^x é crescente, -2^x é decrescente. A assíntota horizontal é $y = 0$.

4.7 O gráfico é deslocado uma unidade para a direita, esticado verticalmente por fator 3 e deslocado quatro unidades para baixo. Como $3 \cdot 2^{x-1} > 0$,

$$\text{Im } h = (-4, \infty).$$

4.8

$$P(t) = 1200(1,08)^t, \quad P(5) \approx 1763.$$

4.9

$$M(t) = 50(0,88)^t, \quad M(6) \approx 23,22 \text{ g.}$$

4.10 A incógnita aparece no expoente. Isolá-la exige desfazer uma exponenciação; essa operação inversa será precisamente o logaritmo.

4.11 Se $Q(t) = 80r^t$, então $80r^3 = 640$, logo $r^3 = 8$ e $r = 2$. Portanto,

$$Q(t) = 80 \cdot 2^t.$$

4.12 A tem acréscimo constante de 20 por unidade de tempo, portanto é afim. B tem fator multiplicativo constante 1,2, portanto é exponencial.

4.13 $2^4 = 16$, $5^{-2} = 1/25$ e $10^3 = 1000$.

4.14 $\log_3 81 = 4$, $\log_{10}(10^{-5}) = -5$ e $\log_7 1 = 0$.

4.15

$$\text{Dom } f = (0, \infty), \quad \text{Im } f = \mathbb{R}.$$

A função é decrescente e sua assíntota vertical é $x = 0$.

4.16 Para $a > 0$, toda potência real a^x é positiva. Portanto não existe expoente real x com $a^x = -2$.

4.17 3, $-1/2$ e -3 , respectivamente.

4.18 É preciso $x - 3 > 0$, portanto

$$\text{Dom } f = (3, \infty), \quad \text{Im } f = \mathbb{R}.$$

A assíntota vertical é $x = 3$.

4.19

$$x = \log_5 17.$$

4.20 1. Domínio $x > 0$; $3 + \log_2 x$.

2. Domínio $x \neq 0$; $2 \ln |x|$.

3. Domínio $x > 0$; $\frac{1}{2} \ln x - 2x$.

4.21 A primeira e a terceira são verdadeiras. A segunda é falsa em geral: as leis dos logaritmos correspondem a produtos, quocientes e potências, não a somas.

4.22

$$\log_7 20 = \frac{\ln 20}{\ln 7}.$$

4.23

$$3 + 3 \log_2 x - \log_2 y.$$

4.24

$$\ln \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \right).$$

4.25 A expressão original exige simultaneamente $x - 1 > 0$, $x + 2 > 0$ e $x + 1 > 0$; portanto,

$$\text{Dom } E = (1, \infty).$$

Nesse domínio,

$$E(x) = \log_2 \left(\frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \right).$$

A expressão isolada à direita está definida quando

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x+1} > 0,$$

isto é, em

$$(-2, -1) \cup (1, \infty).$$

O intervalo $(-2, -1)$ aparece apenas depois de combinar os logaritmos: nele, os logaritmos da expressão original não existem separadamente. Logo, a igualdade entre as duas fórmulas vale somente no domínio original $(1, \infty)$.

4.26 Como $a^0 = 1$, temos $\log_a 1 = 0$. Como $a^1 = a$, temos $\log_a a = 1$.

4.27 $(f \circ g)(x) = x - 1$, com domínio $\mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = x/2$, com domínio $(0, \infty)$. Na segunda ordem é necessário calcular primeiro $\log_2 x$.

4.28 As etapas são $x \mapsto 4 - x^2$, a raiz quadrada, a soma de 1 e o logaritmo natural. A raiz exige $-2 \leq x \leq 2$; nesse intervalo o argumento do logaritmo está em $[1, 3]$. Portanto, $\text{Dom } L = [-2, 2]$ e $\text{Im } L = [0, \ln 3]$. O mínimo 0 ocorre em $x = \pm 2$ e o máximo $\ln 3$ em $x = 0$.

4.29 A condição $3 - 2^x > 0$ fornece $x < \log_2 3$. A função $3 - 2^x$ é decrescente e o logaritmo de base $1/2$ também; a composição é crescente. O argumento percorre $(0, 3)$, de modo que

$$\text{Im } F = (1 - \log_2 3, \infty).$$

Quando x se aproxima de $\log_2 3$ pela esquerda, o argumento positivo se aproxima de zero e $F(x)$ cresce sem limite: a assíntota vertical é $x = \log_2 3$. Quando x assume valores negativos de módulo cada vez maior, 2^x se aproxima de zero e $F(x)$ se aproxima de $1 - \log_2 3$: essa é a assíntota horizontal. Por fim,

$$y - 1 = \log_{1/2}(3 - 2^x) \iff 2^{1-y} = 3 - 2^x,$$

portanto

$$F^{-1}(y) = \log_2(3 - 2^{1-y}), \quad y > 1 - \log_2 3.$$

4.30 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ e $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são inversas; por isso, seus gráficos são simétricos em relação a $y = x$.

2. $N(12) = 800(1/2)^3 = 100$: após 12 unidades de tempo, resta um oitavo da quantidade inicial.

4.31 A condição $I(T_{60}) = 10^{-6}I_0$ fornece

$$e^{-kT_{60}} = 10^{-6}.$$

Aplicando o logaritmo natural, obtemos $-kT_{60} = -6 \ln 10$ e, portanto, $T_{60} = 6 \ln(10)/k$. Quanto maior for k , mais rapidamente o som decai.

4.32 1. 5.

2. -3 .

3. $x = 4$.

4. $x = 3$.

5. É necessário $x > 1$; a equação fornece $x - 1 = 9$, logo $x = 10$.

6. $x = \log_2 5 - 1 = \ln 5 / \ln 2 - 1$.

4.33 $V(5) \approx R\$ 17\,795,51$. Como $\log(15000/48000)/\log(0,82) \approx 5,861$, o primeiro ano inteiro com valor inferior a $R\$ 15\,000,00$ é o sexto.

4.34 O primeiro pH é $-\log_{10}(2,5 \times 10^{-6}) \approx 5,60$. A solução de pH 5,1 é mais ácida e sua concentração de H^+ é cerca de 3,18 vezes maior.

4.35 O domínio é $(3, \infty)$. Nesse intervalo,

$$\ln \left(\frac{x^2 \sqrt{x+1}}{(x-3)^3} \right) = 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) - 3 \ln(x-3).$$

4.36 $\beta_1 = 60$ dB e $\beta_2 \approx 76,02$ dB. A diferença é $10 \log_{10}(I_2/I_1) = 10 \log_{10} 40 \approx 16,02$ dB. A escala é logarítmica: ela transforma razões de intensidades em diferenças de níveis.

5.1 $2\pi/3$, $5\pi/4$, 135° e 315° , respectivamente.

5.2

$$s = r\theta = 5 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \text{ cm.}$$

5.3 O deslocamento angular é

$$12 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi \text{ rad,}$$

correspondente a duas voltas completas.

5.4 1. $\sqrt{3}/2$ e $-1/2$.

2. $-\sqrt{2}/2$ e $-\sqrt{2}/2$.

3. $-1/2$ e $\sqrt{3}/2$.

5.5 Negativo, negativo, negativo e negativo, respectivamente.

5.6 $1/2$, $\sqrt{2}/2$ e $1/2$.

5.7 O ponto $P_x = (\cos x, \sin x)$ pertence à circunferência unitária, cuja equação é $X^2 + Y^2 = 1$.

5.8

$$P_{2\pi/3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad P_{7\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

5.9 O ponto inferior da circunferência corresponde a

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5.10 A reflexão no eixo horizontal dá

$$P_{-x} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right).$$

Logo,

$$\sin(-x) = -\frac{4}{5}, \quad \cos(-x) = \frac{3}{5}.$$

5.11 Ambas têm domínio $\mathbb{R}$, imagem $[-1, 1]$ e período 2π . Os zeros do seno são $k\pi$; os do cosseno são $\pi/2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

5.12 Para o seno, os valores são 0, 1, 0, -1, 0. Para o cosseno, são 1, 0, -1, 0, 1.

5.13 Somar $\pi/2$ ao argumento do seno desloca seu gráfico para a esquerda em $\pi/2$; o resultado coincide com o gráfico do cosseno.

5.14 É positivo em $(0, \pi)$, negativo em $(\pi, 2\pi)$ e nulo em $0, \pi, 2\pi$.

5.15 É positivo em $[0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$, negativo em $(\pi/2, 3\pi/2)$ e nulo em $\pi/2$ e $3\pi/2$.

5.16 Os máximos, de valor 1, ocorrem em

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Os mínimos, de valor -1, ocorrem em

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5.17 Ambas as funções têm período 2π . Portanto, o padrão em qualquer intervalo de comprimento 2π se repete por translações horizontais de $2k\pi$.

5.18 As duas composições têm domínio $\mathbb{R}$. Como $\llbracket x \rrbracket$ é inteiro,

$$(f \circ g)(x) = \text{sen}(\pi \llbracket x \rrbracket) = 0,$$

logo $\text{Im}(f \circ g) = \{0\}$. Já $(g \circ f)(x) = \pi \llbracket \text{sen } x \rrbracket$ assume os valores $-\pi, 0$ e π . Portanto, $\text{Im}(g \circ f) = \{-\pi, 0, \pi\}$.

5.19

$$\text{sen } \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \text{sen } \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

5.20 A igualdade é a fórmula do cosseno da soma com os dois ângulos iguais. Com $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, ela fornece $\cos^2 x = (1 + \cos(2x))/2$ e $\text{sen}^2 x = (1 - \cos(2x))/2$.

5.21 A fatoração é $2 \cos(3x) \text{sen}(2x)$. Os zeros em $[0, \pi]$ são $0, \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, \pi$. No segundo item,

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{sen}(h/2)}{h/2}.$$

A divisão é permitida porque $h \neq 0$.

5.22 Some as fórmulas de $\cos(x+y)$ e $\cos(x-y)$ e tome $x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$.

5.23 Substitua y por $-y$ nas fórmulas de adição e use $\sin(-y) = -\sin y$ e $\cos(-y) = \cos y$.

5.24 Expanda os dois cossenos pelas fórmulas de adição; os termos contendo $\sin u \sin v$ se cancelam.

5.25 Da fórmula

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

segue imediatamente a identidade.

5.26 Use $\sin(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$ nas fórmulas de diferença.

5.27 1. A amplitude é 2 e o período é $2\pi/3$. Em $[0, 2\pi/3]$, os valores nos quartos do período são $-2, 0, 2, 0, -2$.

2. Como $-3\sin(-4x) = 3\sin(4x)$, a amplitude é 3 e o período é $\pi/2$. Em $[0, \pi/2]$, os valores principais são $0, 3, 0, -3, 0$.

3. A amplitude é 3 e o período é π . Em $[0, \pi]$, os valores principais são $3, 0, -3, 0, 3$.

4. Como $2\sin(2x + \pi/2) = 2\cos(2x)$, a amplitude é 2 e o período é π . Em $[0, \pi]$, os valores principais são $2, 0, -2, 0, 2$.

5. Pela fórmula de ângulo duplo, a função é $\cos(2x)$. Sua amplitude é 1 e seu período é π .

6. Como $-3\sin(\pi x + \pi) = 3\sin(\pi x)$, a amplitude é 3 e o período é 2. Em $[0, 2]$, os valores principais são $0, 3, 0, -3, 0$.

5.28 Amplitude 2, período $2\pi/3$, linha média $y = 4$ e deslocamento $\pi/6$ para a direita.

5.29 Amplitude 4, período 2 e

$$\text{Im } g = [-2, 6].$$

5.30

$$h(x) = 3\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1.$$

Logo, $A = 3$, $B = 2$, $h_0 = \pi/2$ e $k = 1$.

5.31 Uma possibilidade é

$$f(x) = 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2.$$

5.32 Como $\sin u = \cos(u - \pi/2)$,

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right),$$

logo $f = g$. A amplitude é 3, o período é π , a linha média é $y = 1$ e a imagem é $[-2, 4]$.

As duas fórmulas usam funções básicas diferentes. Seno e cosseno já diferem por uma mudança de fase de $\pi/2$; por isso, a mesma oscilação pode aparecer com parâmetros de fase distintos sem que o gráfico mude.

5.33 1. $x \neq \pi/2 + k\pi$.

2. $3x - \pi/4 \neq \pi/2 + k\pi$, isto é, $x \neq \pi/4 + k\pi/3$.

3. $x \neq \pi/3 + k\pi$.

4. $x \neq k\pi/3$.

5.34 1, $-1/\sqrt{3}$, -2 e -2 .

5.35

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad \sec(-x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

5.36 A primeira vem de dividir $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ e vale para $x \neq \pi/2 + k\pi$. A segunda vem da divisão por $\sin^2 x$ e vale para $x \neq k\pi$, sempre com $k \in \mathbb{Z}$.

5.37 O domínio é $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Nele, $1 - \cos(2x) = 2 \sin^2 x$ e $F(x) = 2 \operatorname{tg} x$. A expressão $2 \operatorname{tg} x$ também está definida nos múltiplos inteiros de π , mas esses pontos não pertencem ao domínio de F . Os únicos zeros de $2 \operatorname{tg} x$ são justamente esses múltiplos; portanto, $F(x) = 0$ não tem solução. Cancelar um fator não restitui os pontos em que ele era zero.

5.38 1. Para $\cos t \neq 0$,

$$\sec t - \cos t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} = \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \operatorname{tg} t \sin t.$$

2. Para $\sin y \neq 0$ e $\cos y \neq 0$, o lado esquerdo é $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$.

3. Para $\cos A \cos B \neq 0$,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B} = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}.$$

4. Para $\operatorname{sen} t \neq 0$,

$$\operatorname{cosec} t - \operatorname{sen} t = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \cos t \cotg t.$$

5. Pela fórmula de adição,

$$\operatorname{sen}(3t) = \operatorname{sen}(2t) \cos t + \cos(2t) \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 t) \operatorname{sen} t.$$

Substituindo $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ e simplificando, obtemos $3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t$.

6. O lado direito pode ser fatorado como

$$2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen}(2\theta).$$

5.39 Onde estão definidas,

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1, \quad |\operatorname{cosec} x| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \geq 1.$$

Portanto, ambas têm imagem

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

5.40

$$\cotg(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \cotg x$$

sempre que as expressões estão definidas.

5.41 Como $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$, ela é positiva nos quadrantes I e III, em que seno e cosseno têm o mesmo sinal, e negativa nos quadrantes II e IV.

5.42

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x &= \operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^4 x \\ &= \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \\ &= \operatorname{sen} x (\cos^4 x - 2 \cos^6 x + \cos^8 x). \end{aligned}$$

5.43 Como $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 x \sec^5 x &= (\operatorname{tg}^2 x \sec^4 x)(\sec x \operatorname{tg} x) \\ &= (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \operatorname{tg} x) \\ &= (\sec^6 x - \sec^4 x)(\sec x \operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

5.44 1.

$$\sin(5x) \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin(7x) + \sin(3x)).$$

2.

$$\cos(3x) \cos x = \frac{1}{2}(\cos(4x) + \cos(2x)).$$

3.

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)).$$

5.45 Uma possibilidade é

$$H(t) = 20 - 18 \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right).$$

Ela tem linha média 20, amplitude 18, período 40 e $H(0) = 2$.

5.46 A amplitude é 4 e a linha média é 20. Um modelo é

$$T(t) = 20 + 4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

5.47 A altura média é 2,5 m, a amplitude é 1,2 m e o período é

$$\frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \text{ h.}$$

5.48 O argumento aumenta 2π quando

$$2\pi fT = 2\pi,$$

portanto $T = 1/f$.

5.49 A amplitude é $A = 4$, a linha média é $D = 5$ e $B = 2\pi/10 = \pi/5$. De $5 + 4 \sin \varphi = 3$ vem $\sin \varphi = -1/2$, logo $\varphi = 7\pi/6$ ou $11\pi/6$ no intervalo escolhido. O seno diminui perto de $7\pi/6$ e aumenta perto de $11\pi/6$; a condição inicial seleciona $\varphi = 7\pi/6$. Portanto,

$$f(t) = 5 + 4 \sin\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{7\pi}{6}\right).$$

Sem a informação sobre o sentido da variação, as duas fases seriam possíveis. O primeiro mínimo ocorre quando $\pi t/5 + 7\pi/6 = 3\pi/2$, isto é, em $t = 5/3$.

5.50 A amplitude é 170. Como

$$T = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60} \text{ s,}$$

a frequência é $1/T = 60 \text{ Hz}$.

5.51 A linha média é 12 horas, a amplitude é 2,5 horas e o período é 365 dias. O máximo ocorre quando o cosseno vale 1, pela primeira vez em $t = 172$.

5.52

$$\begin{aligned}\text{Dom}(\arcsen) &= \text{Dom}(\arccos) = [-1, 1], \\ \text{Im}(\arcsen) &= [-\pi/2, \pi/2], \quad \text{Im}(\arccos) = [0, \pi], \\ \text{Dom}(\arctg) &= \mathbb{R}, \quad \text{Im}(\arctg) = (-\pi/2, \pi/2).\end{aligned}$$

5.53 $\arcsen$ é a função inversa de uma restrição do seno; $1/\text{sen } x$ é a cossecante. Inversa e recíproco são operações diferentes.

5.54

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{4}.$$

5.55 Se $\theta = \arccos(3/5)$, então $\theta \in [0, \pi]$ e $\cos \theta = 3/5$. Como o cosseno é positivo, θ está no primeiro quadrante. Pela identidade pitagórica,

$$\text{sen } \theta = \frac{4}{5}.$$

5.56 Como $\text{tg}(3\pi/4) = -1$ e a imagem de $\arctg$ é $(-\pi/2, \pi/2)$,

$$\arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

5.57 É necessário

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1,$$

o que equivale a

$$0 \leq x \leq 1.$$

Logo, $\text{Dom } f = [0, 1]$.

5.58 No primeiro item, a expressão é $2\pi - x$ em $[\pi, 2\pi]$ e $x - 2\pi$ em $[2\pi, 3\pi]$. No segundo, é $x + \pi$, que pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$. No terceiro, ambas são $\sqrt{1 - x^2}$: o seno é não negativo em $[0, \pi]$, e o cosseno é não negativo em $[-\pi/2, \pi/2]$.

5.59 O quociente é $1 - 2x^2/(1+x^2) \leq 1$ e, ao somarmos 1 a ele, obtemos $2/(1+x^2) > 0$. Portanto, $\text{Dom } H = \mathbb{R}$. Como $0 \leq \theta < \pi/2$, temos $0 \leq 2\theta < \pi$ e

$$\cos(2\theta) = \frac{1 - \text{tg}^2 \theta}{1 + \text{tg}^2 \theta} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

O ângulo 2θ já está no intervalo principal do arco-cosseno, logo $H(x) = 2 \arctg |x|$. A imagem é $[0, \pi)$; o valor π não é atingido.

5.60 A projeção vertical do fio mede $a \cos \theta$; portanto, a elevação é $h = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$. Um domínio adequado é $-\pi < \theta < \pi$; em uma oscilação de amplitude $\theta_0 < \pi$, pode-se usar $[-\theta_0, \theta_0]$.

5.61 No modelo de terreno horizontal e prédio vertical,

$$H = 1,7 + 40 \operatorname{tg} 37^\circ \approx 31,8 \text{ m.}$$

5.62 A componente vertical da velocidade é $200 \operatorname{sen} 20^\circ$ pés por segundo. Assim,

$$t = \frac{10\,000}{200 \operatorname{sen} 20^\circ} \approx 146 \text{ segundos,}$$

ou aproximadamente 2,44 minutos.

5.63 Se N é o pé da perpendicular traçada de A à margem oposta, então

$$NP_0 = 1000 \cotg 30^\circ, \quad NP_1 = 1000 \cotg 40^\circ.$$

Em um minuto, a corredora percorre

$$1000(\cotg 30^\circ - \cotg 40^\circ) \approx 540,3 \text{ pés.}$$

Sua velocidade é, portanto, aproximadamente 540 pés por minuto, ou 9,0 pés por segundo.

5.64

$$h = 6 \operatorname{sen} 65^\circ \approx 5,44 \text{ m.}$$

5.65 Se θ é o ângulo,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1,2}{8} = 0,15,$$

portanto

$$\theta = \operatorname{arctg}(0,15) \approx 8,53^\circ.$$

5.66

$$H = 14 \operatorname{tg} 38^\circ \approx 10,94 \text{ m.}$$

6.1 Como $a \neq 0$, a fatoração é $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Comparando coeficientes, obtemos:

$$1. -a(x_1 + x_2) = b, \text{ logo } x_1 + x_2 = -b/a.$$

$$2. ax_1x_2 = c, \text{ logo } x_1x_2 = c/a.$$

6.2 1. Raízes opostas têm soma zero. Como $x_1 + x_2 = 2m$, precisamos de $m = 0$. Nesse caso, a equação é $x^2 - 1 = 0$ e as raízes são -1 e 1 .

2. Raízes inversas têm produto 1. Como $x_1x_2 = m - 1$, precisamos de $m = 2$. Nesse caso, as raízes são $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, cujo produto é 1.

6.3 1. $\{-7/3\}$.

2. $\{-2, 0, 2\}$.

3. $\{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$.

4. $\{-5, 5\}$.

5. $\{-1, -\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2, 1\}$.

6. $\{(3 - \sqrt{13})/2, 1, 2, (3 + \sqrt{13})/2\}$.

6.4 Pelo teorema do resto, os valores procurados são $q(2) = 13$ e $q(-1) = -11$.

6.5 É necessário que $r(-2) = 4k + 8 = 0$, logo $k = -2$. Nesse caso,

$$r(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x + 2)(x - 2)^2.$$

6.6 1. $\{(-1 - \sqrt{73})/4, (-1 + \sqrt{73})/4\}$.

2. $\{-3/2\}$.

3. $\{2/3, 3/4\}$. Com $y = x^{-1}$, a equação se reduz a $6y^2 - 17y + 12 = 0$.

6.7 1. $\{65 - 40\sqrt{2}\}$.

2. $\{5\}$.

3. $\{(43 + 3\sqrt{269})/22\}$.

4. $\{-61, 30\}$.

Em cada item com raízes quadradas, os candidatos devem ser substituídos na equação original. No último item, a substituição $u = \sqrt[3]{x - 3}$ reduz o problema a $(u+4)(u-3) = 0$.

6.8 1. $\{-1, 0, 1\}$.

2. $\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$.

3. $\{-1\}$.

4. $\{1/3\}$.

5. $\emptyset$.

6. $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

7. $[1, 2] \cup \{5\}$.

6.9 Os pontos de mudança são -1 e $5/2$. A análise dos três intervalos fornece $x = -7/3$ no primeiro, nenhuma solução no segundo e $x = 5$ no terceiro. Logo, $\text{Sol} = \{-7/3, 5\}$.

6.10 Os gráficos se cruzam em $x = 1$. No domínio indicado,

$$\text{Sol}_{f=g} = \{1\}, \quad \text{Sol}_{f>g} = (1, 3], \quad \text{Sol}_{f\leq g} = [-1, 1].$$

6.11 A condição é $|x - 25| < 0,02$, equivalente a $24,98 < x < 25,02$.

6.12 Escreva $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$, sejam $x_1 < x_2$ as raízes; se $\Delta = 0$, escreva $r = -b/(2a)$. O conjunto-solução é

$$\text{Sol} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \Delta < 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{r\}, & \Delta = 0, \\ (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), & \Delta > 0. \end{cases}$$

De fato, sem raízes reais o polinômio tem o sinal de a ; com raiz dupla, tem esse sinal exceto na raiz; com duas raízes distintas, a fatoração $a(x - x_1)(x - x_2)$ mostra que o sinal coincide com o de a fora do intervalo entre as raízes e é oposto dentro dele.

6.13 O resultado coincide com o do item anterior porque, nos dois enunciados, procuramos os pontos em que o trinômio tem o mesmo sinal de seu coeficiente principal. Escreva $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$, sejam $x_1 < x_2$ as raízes; se $\Delta = 0$, escreva $r = -b/(2a)$. Então

$$\text{Sol} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \Delta < 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{r\}, & \Delta = 0, \\ (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), & \Delta > 0. \end{cases}$$

Com duas raízes distintas, por exemplo, a parábola abre para baixo e fica negativa fora do intervalo $[x_1, x_2]$.

6.14 1. $[-2, 3]$.

2. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

3. $[-2, 2]$.

4. $[-2, 1]$.

5. $\{-1\}$.

6. $[-5/2, -1/2]$.

7. $(-\infty, -2/3) \cup (4/3, \infty)$.

8. $(-\infty, -\pi) \cup (\pi, \infty)$.

9. $(-\pi, -\sqrt{3}) \cup (\pi/2, \infty)$.

10. $(-1, 3]$.

11. $[-1, 3]$.

6.15 1. $(-\infty, -1/2) \cup (1, \infty)$.

2. $(3/2, 2) \cup (3, \infty)$.

3. $(-\infty, -1) \cup (-1/2, 0]$.

4. $(-\infty, -1/2) \cup (3/2, 5)$.

5. $(-\infty, 0) \cup (4/5, \infty)$.

6. $(-\infty, 0) \cup (1/3, \infty)$.

7. $(-\infty, -1/2) \cup (1/3, \infty)$.

8. $(-\infty, -1/3) \cup (2, \infty)$.

9. $(-\infty, -4) \cup [5, \infty)$.

10. $[5, 14)$.

11. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

12. $(-\infty, -1) \cup (3, 7)$.

13. $(1, 2)$.

14. $((3 - \sqrt{57})/8, (3 + \sqrt{57})/8) \cup (\pi, \infty)$.

15. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \cup [2, \infty)$.

16. $(-2, 2)$.

6.16 Os pontos críticos são $-4, -2, 1, 3$. O fator $(x + 2)^2$ tem multiplicidade par, por

isso não muda o sinal e seu zero é incluído; $x = 1$ anula o denominador e é sempre excluído. A tabela de sinais fornece

$$\text{Sol} = (-\infty, -4) \cup \{-2\} \cup (1, 3].$$

6.17 1. $[-5, (-9 - \sqrt{61})/8)$.

2. $((-5 + \sqrt{13})/2, 1]$.

Em cada etapa, a elevação ao quadrado é feita somente depois de impor o domínio e verificar que os dois membros são não negativos.

6.18 1. $(-\infty, -1)$.

2. $((-3 + \sqrt{13})/2, \infty)$.

3. $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1, \infty)$.

4. $(-1, 2) \cup (8, 5 + 3\sqrt{2})$.

6.19 1. $\text{Sol} = \{2\}$.

2. Com $t = 2^x > 0$, temos $(t - 2)(t - 4) = 0$; logo $\text{Sol} = \{1, 2\}$.

3. O domínio é $x > -6$ e $x + 6 = 9$; logo $\text{Sol} = \{3\}$.

4. O domínio é $x > 3$. Como $x(x - 3) = 4$, obtemos $(x - 4)(x + 1) = 0$; apenas $x = 4$ pertence ao domínio. Logo $\text{Sol} = \{4\}$.

6.20 O membro direito exige apenas $(x - 1)(x - 5) > 0$, o que também ocorre para $x < 1$. O membro esquerdo exige simultaneamente $x > 1$ e $x > 5$. Por exemplo, $x = 0$ pertence ao domínio do membro direito, mas não ao do esquerdo.

6.21 1. $\{3\}$.

2. $\{3/2\}$.

3. $\{0, 2\}$.

4. $\{2\}$.

5. $\{3\}$.

6. $(-\infty, 2)$.

7. $[-1, \infty)$.

8. $(-1, \infty)$.

6.22 Pondo $u = 3^x > 0$, obtemos $u^2 - 4u - 5 = 0$, isto é, $(u - 5)(u + 1) = 0$. Somente $u = 5$ é admissível; portanto, $x = \log_3 5$.

6.23 A massa total é $x + (3x + 18) = 4x + 18$. Assim,

$$450 \leq 4x + 18 \leq 630 \iff 108 \leq x \leq 153.$$

6.24 Em todos os itens, $k \in \mathbb{Z}$.

1. $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = 7\pi/6 + 2k\pi$.

2. $x = \pi/2 + k\pi$.

3. Como $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$, obtemos $x = \pi/6 + 2k\pi$, $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi/2 + 2k\pi$.

6.25 Como $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$, temos $(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$. Logo,

$$\text{Sol} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

6.26 Em todos os itens, $k \in \mathbb{Z}$.

1. $x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x = 2\pi/3 + 2k\pi$.

2. $x = 3\pi/4 + 2k\pi$ ou $x = 5\pi/4 + 2k\pi$.

3. $x = -\pi/4 + k\pi$.

4. $x = \pi/4 + k\pi$.

5. $x = 2k\pi$ ou $x = 2\pi/3 + 2k\pi$.

6. Como $(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$, temos

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

6.27 1. Como $\cos x \neq 0$, podemos multiplicar a equação por $\cos x$:

$$\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0.$$

As possibilidades são $\cos x = -1$ e $\cos x = -2$; a segunda é impossível. Logo, $x = \pi$.

2. Usando $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, obtemos

$$\sec^2 x - \sec x - 2 = 0.$$

Assim, $\sec x = 2$ ou $\sec x = -1$, e $x \in \{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$.

3. Fatorando,

$$\cos x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0.$$

Portanto, $x \in \{\pi/4, \pi/2, 5\pi/4, 3\pi/2\}$.

4. Como $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cotg^2 x$, a equação equivale a $\cotg x(\cotg x - 1) = 0$. Logo, $x \in \{\pi/4, \pi/2, 5\pi/4, 3\pi/2\}$.

6.28 1. $(\pi/2, 3\pi/2)$.

2. $[7\pi/6, 11\pi/6]$.

3. $[0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi)$.

4. $(\pi/4, \pi/2) \cup (5\pi/4, 3\pi/2)$. Os pontos $\pi/2$ e $3\pi/2$ ficam excluídos porque a tangente não está definida neles.

7.1 1. Os valores são 3,41, 3,0401 e 3,004001. Conjectura: 3, confirmada por substituição direta.

2. Os valores são aproximadamente 0,140845, 0,142653 e 0,142837. Conjectura: $1/7$. Para $x \neq 4$, a expressão é $1/(x+3)$.

3. Os valores são aproximadamente 0,661358, 0,666114 e 0,666611. Conjectura: $2/3$. Para confirmar, ponha $u = x^{1/6}$: o quociente fica $(u^2 - 1)/(u^3 - 1) = (u + 1)/(u^2 + u + 1)$, com $u \rightarrow 1$.

7.2 Em todos os itens, dado $\varepsilon > 0$, a escolha de δ abaixo garante a desigualdade exigida pela definição.

1. Tome $\delta = 7\varepsilon$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então $|x/7 - 2/7| = |x - 2|/7 < \varepsilon$.

2. Tome $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$, então $|x^2| < \delta^2 = \varepsilon$.

3. Tome $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$, então $|x^3| < \delta^3 = \varepsilon$.

4. Tome $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então $1 < x < 3$, logo $|x + 2| < 5$ e $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5\delta \leq \varepsilon$.

7.3 1. 0: dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$.

2. Não existe: o limite pela esquerda é -1 e o da direita é 1 .

3. 2, pois $(x^2 - 2x)/(x - 2) = x$ para $x \neq 2$.

7.4 Para todo x , temos $0 \leq f(x) \leq x^2$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x)| \leq x^2 < \varepsilon$, provando o limite pela definição.

7.5

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Como os dois limites laterais coincidem, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

7.6 Para $x < 2$, $g(x) = -1$; para $x > 2$, $g(x) = 1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1,$$

e o limite bilateral não existe.

7.7 Os limites laterais são $3 + C$ e 3 . Eles coincidem se e somente se $C = 0$.

7.8 1. 60.

2. 928.

3. $\frac{10}{3}$.

4. 3.

5. $\sqrt{2}$.

6. 4.

7. 8.

8. 108.

9. $\frac{1}{6}$.

No item 4, fatoramos $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. No item 8, $x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$, para $x \neq 3$. No item 9, a racionalização fornece $1/(\sqrt{x^2 + 9} + 3)$, cujo limite é $1/6$.

7.9 Tome $f(x) = 1$ para $x > a$, $f(x) = -1$ para $x < a$, e defina $f(a) = 0$. Faça $g = -f$. Os limites laterais de cada função são distintos, logo nenhum dos limites bilaterais existe. Entretanto, $f(x) + g(x) = 0$ para todo x , de modo que o limite da soma é 0 .

7.10 O numerador se fatora como $(x - a)(x - 3)(x + 3)$, e o denominador como $(x - 2)(x - 3)$. Perto de 2, a expressão é $(x - a)(x + 3)/(x - 2)$. Para $a = 2$, ela se reduz a $x + 3$ e o limite é 5. Para $a \neq 2$, o numerador tende a $5(2 - a) \neq 0$, enquanto o denominador troca de sinal em 2; os limites laterais são infinitos de sinais opostos. Portanto, o único valor é $a = 2$.

7.11 Temos $|x^3 \cos(1/x)| \leq |x|^3$ para $x \neq 0$. Como $|x|^3 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, o Teorema do Confronto dá o limite 0.

7.12 1. 5.

2. $\frac{5}{4}$.

3. $\frac{5}{3}$.

4. 2.

Usamos $\sin(kx)/x = k [\sin(kx)/(kx)]$ e $\operatorname{tg}(5x) = \sin(5x)/\cos(5x)$. No último item, subtraímos os limites 5 e 3.

7.13 1. 4, após fatorar $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

2. -1, após fatorar $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

3. $3/2$, pois $(x^3 - 1)/(x^2 - 1) = (x^2 + x + 1)/(x + 1)$ para $x \neq 1$.

4. $3/2$, após multiplicar pelo conjugado.

5. $1/4$, pois a razão se reduz a $1/(\sqrt{x} + 2)$.

6. -1, pois a expressão se reduz a $-1/(1 + x)$ para $x \neq 0$.

7. $7/3$.

8. 4, usando $\cos x - \cos(3x) = 2 \sin(2x) \sin x$.

7.14 1. Os limites laterais são -1 e 1; o limite bilateral não existe.

2. Os limites laterais são -1 e 1; o limite bilateral não existe.

3. O domínio é $(0, \infty)$ e, nele, a expressão vale $1/2$. Portanto,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} \frac{x}{|x| + x} = \frac{1}{2}.$$

Não há pontos do domínio à esquerda de 0, portanto não há limite lateral esquerdo a calcular.

4. Como a expressão vale $-(x+2)$ à esquerda de 2 e $x+2$ à direita, os limites laterais são -4 e 4 ; o limite bilateral não existe.

7.15 1. $\cos(1)$.

2. 1.

3. $\frac{\pi}{6}$.

4. $-\frac{\pi}{4}$.

No item 3, o argumento do arco-seno simplifica-se para $(x+1)/(x+4)$ e tende a $1/2$.

No item 4, o argumento do arco-tangente simplifica-se para $(x+1)/(x-3)$ e tende a -1 .

7.16 1. 8.

2. 1.

3. 132.

4. -60 .

5. $\frac{3}{2}$.

6. 4.

7. $3a^2$.

8. $\frac{1}{12}$.

9. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. 0.

No item 6, a racionalização reduz o quociente a $2 + \sqrt{t}$. No item 8, use $a - b = (a^3 - b^3)/(a^2 + ab + b^2)$ com $a = \sqrt[3]{8+t}$ e $b = 2$. No item 10, $1/2 \leq 2^{\cos x} \leq 2$, de modo que $0 \leq x^2 2^{\cos x} \leq 2x^2 \rightarrow 0$.

7.17 Pela continuidade, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Aplicando as propriedades dos limites:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = f(a)g(a) = (fg)(a).$
3. Se $g(a) \neq 0$, a continuidade garante que g não se anula numa vizinhança de a . A regra do quociente dá $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = f(a)/g(a) = (f/g)(a).$

Cada igualdade é a definição de continuidade da função correspondente.

7.18 Não existe tal a . O limite pela esquerda em 0 é 1, enquanto $f(0) = 3$ e o limite pela direita é 3, independentemente de a .

7.19 Se $b \neq 0$, a continuidade exige $b^3 + 3b + 1 = ab^2 + 3$, portanto $a = (b^3 + 3b - 2)/b^2$. Para esse valor, os limites laterais e $g(b)$ coincidem. Se $b = 0$, o limite pela esquerda é 1 e $g(0) = 3$, de modo que nenhum valor de a serve.

7.20 Se $b \neq 0$, a continuidade exige $\cos b + 1 = ab^2 + b$, portanto $a = (\cos b + 1 - b)/b^2$. Se $b = 0$, o limite pela esquerda é 2, mas $h(0) = 0$, de modo que nenhum valor de a serve.

7.21 1. $T(3500) = \text{R\$ } 150$ e $T(5000) = \text{R\$ } 400$.

2. Em 2000, os dois limites são 0; em 4000, ambos são 200. Logo, T é contínua nos dois pontos.

3. Como x não se anula nos pontos de corte, $E = T/x$ também é contínua neles. Além disso,

$$E(3500) = \frac{150}{3500} = \frac{3}{70} \approx 4,29\%, \quad E(5000) = \frac{400}{5000} = 8\%.$$

4. A inclinação de cada trecho passa de 0 para 0,10 e depois para 0,20, mas as constantes dos trechos fazem coincidir seus valores nos pontos de corte. Assim, muda a taxa aplicada ao próximo real sem mudar subitamente o total já devido.

7.22 A função $F(x) = x^3 - 3x + 1$ é contínua em $[1, 2]$. Como $F(1) = -1$ e $F(2) = 3$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (1, 2)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

7.23 A função $F(x) = 4x^2 - 2(x+1)^2$ é contínua em $[-1, 1]$. Como $F(-1) = 4$ e $F(1) = -4$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (-1, 1)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

7.24 A função $F(x) = x^5 - x^2 - 2$ é contínua em $[0, 2]$. Como $F(0) = -2$ e $F(2) = 26$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (0, 2)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

7.25 A função $F(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$ é contínua em $[0, 2]$. Como $F(0) = -\sqrt{2}$ e $F(2) = 2$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (0, 2)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

7.26 Uma solução é $x = 0$. Para obter uma positiva, considere $F(x) = \sin x - x \cos x$, contínua em $[\pi, 3\pi/2]$. Temos $F(\pi) = \pi > 0$ e $F(3\pi/2) = -1 < 0$. Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (\pi, 3\pi/2)$ com $F(c) = 0$. Como $\cos c \neq 0$ nesse intervalo, isso equivale a $\tan c = c$. Pela imparidade da tangente, $-c$ também é solução. Assim, $-c$, 0 e c são três soluções distintas.

7.27 A função $F(x) = x^2$ é contínua em $[1, 2]$, e $F(1) = 1 < 2 < 4 = F(2)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $b \in (1, 2)$ com $b^2 = 2$. Como $b > 0$, esse número é $\sqrt{2}$.

7.28 Para $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$. Por exemplo, os valores em 1,9, 1,99, 2,01 e 2,1 são, respectivamente, 3,9, 3,99, 4,01 e 4,1. Portanto, o limite é 4. O limite depende dos valores arbitrariamente próximos de 2, não do valor no ponto, que não está definido na expressão original.

7.29 No primeiro limite, o quociente vale -1 à esquerda de -1 e 1 à direita; como os limites laterais diferem, o limite bilateral não existe. No segundo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 5.$$

7.30 Como $f(2) = 1$, basta exigir $2a + b = 1$. Há infinitas soluções: $b = 1 - 2a$, com $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

7.31 O gráfico é o segmento da reta $18 - 3t$ até um círculo aberto em $(4, 6)$ e, a partir de $t = 4$, o segmento horizontal $Q = 0$, com ponto fechado em $(4, 0)$. Como $\lim_{t \rightarrow 4^-} Q(t) = 6$ e $\lim_{t \rightarrow 4^+} Q(t) = Q(4) = 0$, há uma descontinuidade de salto.

7.32 Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/2$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(2x - 1) - 5| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon.$$

Isso prova o limite pela definição.

7.33 Para $F(x) = x^3 + x - 5$, temos $F(1) = -3$ e $F(2) = 5$. Como F é contínua, o TVI fornece ao menos uma raiz em $(1, 2)$. O teorema é apenas uma afirmação de existência; sem uma hipótese adicional, como monotonicidade estrita, ele não exclui outras raízes.

7.34 No domínio original, $x = -1$ e $x = 3$ são excluídos. Para $x \neq 3$, $g(x) = (x + 3)/(x + 1)$. Assim, $x = 3$ é uma descontinuidade removível, eliminada definindo $g(3) = 3/2$, enquanto $x = -1$ é uma descontinuidade infinita.

7.35 Num modelo físico usual, a temperatura varia continuamente, inclusive nos instantes em que o termostato comuta. Já o estado ligado/desligado assume dois valores discretos e muda por salto nos limiares; portanto, não é contínuo nesses instantes.

7.36 Usando $1 - \cos u = 2 \operatorname{sen}^2(u/2)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x/2)}{3x/2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

7.37 Para a primeira, tome a função de Dirichlet d , igual a 1 nos racionais e a 0 nos irracionais: d e $-d$ são descontínuas em toda parte, mas sua soma é zero. Para a segunda, tome $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x \geq 0$; f é descontínua em 0, mas $f^2 \equiv 1$ é contínua.

7.38 Como $f(x) = (x - 2)^2 - 3$, o mínimo absoluto é -3 , atingido em $x = 2$. Nos extremos,

$$f(-1) = f(5) = 6,$$

portanto o máximo absoluto é 6, atingido em $x = -1$ e $x = 5$.

7.39 A função é contínua e estritamente decrescente em $[1, 4]$. Assim, o máximo é $f(1) = 1$ e o mínimo é $f(4) = 1/4$.

7.40 O intervalo não é fechado, portanto falta uma das hipóteses do teorema. A função é contínua em $(0, 1)$, mas não atinge nem 0 nem 1: não possui mínimo nem máximo absolutos nesse domínio.

7.41

$$|f(x) - f(y)| = |m| |x - y|,$$

portanto podemos tomar $M = |m|$.

7.42 Se $x, y \in [-R, R]$, então

$$|x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| \leq 2R |x - y|.$$

Assim, f é Lipschitz com constante $2R$.

7.43 Para $x, y \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq |x - y|.$$

Logo, f é Lipschitz com constante 1 nesse domínio.

8.1 Dado $\varepsilon > 0$, tome $M = 3/\varepsilon$. Se $x > M$, então $x + 2 > x > M$ e

$$0 < \frac{3}{x+2} < \frac{3}{x} < \varepsilon.$$

8.2 Para $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x^2}} \rightarrow 2.$$

Para $x < 0$, usamos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$:

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 + 1/x^2}} \rightarrow -2.$$

As assíntotas horizontais são $y = 2$ à direita e $y = -2$ à esquerda.

8.3 Dado $M > 0$, tome $\delta = 1/\sqrt{M}$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então $(x - 3)^2 < 1/M$ e, portanto, $1/(x - 3)^2 > M$.

8.4 O numerador tende a $3 > 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty.$$

Logo, $x = 2$ é assíntota vertical. O limite bilateral não é $+\infty$ nem $-\infty$, pois os dois lados têm comportamentos opostos.

8.5 1. $3/5$.

2. $-1/3$, pois, para $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

3. Racionalizando, $\sqrt{x^2 + x} - x = x/(\sqrt{x^2 + x} + x) \rightarrow 1/2$.

4. Como $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ e o numerador não se anula em 3 nem em -2 , as assíntotas verticais são $x = 3$ e $x = -2$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, de modo que $y = 2$ é a assíntota horizontal.

8.6 A divisão polinomial fornece

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1 - x}{x^2 + 1}.$$

Logo, a diferença tende a zero exatamente para $m = 1$ e $b = 0$. A reta $y = x$ é a assíntota inclinada do gráfico quando $x \rightarrow \infty$; o mesmo cálculo mostra que ela também é assíntota quando $x \rightarrow -\infty$.

8.7 Pelas relações de Viète, se r_1 é a raiz que permanece limitada e r_2 a outra, então

$$r_1 + r_2 = \frac{b}{a}, \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Uma forma estável de escrever a raiz limitada é

$$r_1 = \frac{2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

para a suficientemente próximo de zero e discriminante positivo. Assim, $r_1 \rightarrow c/b$. Consequentemente, $r_2 = b/a - r_1 \sim b/a$, sendo ilimitada. A equação limite é linear e conserva apenas a raiz finita c/b ; a segunda raiz escapa para o infinito quando o termo quadrático desaparece.

8.8 1. Os limites são, respectivamente, 12, 18 e 3,6. Em cada caso, o valor representa o platô previsto pelo modelo.

2. As metades dos platôs são atingidas quando $N = 5$, $I = 120$ e $s = 2$.

3. Em $Ax/(B + x)$, o parâmetro A é o valor-limite e B é o valor da variável no qual a resposta vale $A/2$.

8.9 1. e^6 .

2. 3.

3. 5.

4. $1000e^{0,08} \approx \text{R\$ } 1.083,29$.

8.10 Com $C = 10\,000$, $r = 0,06$ e $k = 3$,

$$M = Ce^{rk} = 10\,000e^{0,18}.$$

8.11 Os três montantes são

$$C(1+r), \quad C\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}, \quad Ce^r.$$

Eles correspondem, respectivamente, a $n = 1$, $n = 12$ e ao valor-limite obtido quando a frequência de capitalização cresce sem limite.

8.12 Como $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$, temos $f(x) = 2x - 1$ para $x \neq 1$. O gráfico é essa reta com um ponto removido em $(1, 1)$. Não há assíntotas verticais ou horizontais; $y = 2x - 1$ é a assíntota oblíqua.

8.13 Dado $\varepsilon > 0$, tome $N = 7/\varepsilon$. Se $x > N$, então

$$\left| \frac{7}{x+4} \right| < \frac{7}{x} < \varepsilon.$$

8.14 $\lim_{R \rightarrow 0^+} I(R) = +\infty$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$. A primeira previsão não é fisicamente realizável: a fonte e os condutores possuem resistência interna e limites de corrente, ignorados pelo modelo $12/R$.

8.15 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$. Como os comportamentos laterais diferem, não há limite bilateral em 0.

8.16 A razão tende a 0. Para obter 10%, $e^{-0,18t} = 0,1$, de onde $t = \ln(10)/0,18 \approx 12,79$, na unidade de tempo do modelo.

8.17 A divisão polinomial fornece

$$\frac{3x^3 - 2x + 7}{x^2 + 4} = 3x + \frac{-14x + 7}{x^2 + 4}.$$

Logo, a função simples é $3x$, e a diferença tende a zero em ambas as extremidades.

9.1 Para $y = 1/x$, no ponto $x = 2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2}}{\Delta x} = -\frac{1}{2(2 + \Delta x)}.$$

Substituindo os três incrementos pedidos, obtemos

1. $-1/6$.

2. $-5/21$.

3. $-50/201$.

9.2 $-1/x^2$, para $x \neq 0$.

9.3 1. $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 0)/h = 1$.

2. $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} [(1 + h)^2 + 1 - 2]/h = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$.

3. $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} [(1 + h)^2 - 1]/h = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$.

4. Pela definição e expansão do cubo,

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2 + h)^3 - (2 + h) - (3 \cdot 2^3 - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (35 + 18h + 3h^2) = 35. \end{aligned}$$

5. $f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} [(-1 + h)^3 + 1]/h = \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 3h + h^2) = 3$.

6. $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} h^4/h = \lim_{h \rightarrow 0} h^3 = 0$.

7. Racionalizando o quociente,

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} = \frac{1}{4}.$$

8. Usando a diferença de cubos,

$$f'(8) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8 + h})^2 + 2\sqrt[3]{8 + h} + 4} = \frac{1}{12}.$$

$$9. f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} [1/(1+h) - 1]/h = \lim_{h \rightarrow 0} -1/(1+h) = -1.$$

$$10. f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} [1/(-1+h) + 1]/h = \lim_{h \rightarrow 0} 1/(h-1) = -1.$$

9.4 A continuidade em 1 exige $a+b=3$. Sob essa condição, a derivada pela esquerda é $2 \cdot 1 + 2 = 4$, e a da direita é a . Portanto, $a=4$ e $b=-1$. Com esses valores, a função é diferenciável na junção e nos demais pontos, onde é polinomial.

9.5 Aplicando a regra da potência termo a termo e preservando as restrições de domínio, obtemos

$$1. 12x^3 + 5.$$

$$2. 7x^6 + 36x^5 + x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 2x.$$

$$3. 2ax + b.$$

$$4. amx^{m-1} + b(m+n)x^{m+n-1}.$$

$$5. -\frac{2\pi}{x^3} - \frac{\ln 4}{x^2} + \sqrt{5}, \text{ para } x \neq 0.$$

$$6. -\frac{10}{(5x-3)^2} + \frac{1}{x^2}, \text{ para } x \neq 0 \text{ e } x \neq 3/5.$$

$$7. -\frac{2a}{3}x^{-5/3} + \frac{5b}{3}x^{-8/3}, \text{ para } x \neq 0.$$

9.6 A tangente no ponto de abscissa $u \neq -1$ é

$$y - \frac{u}{u+1} = \frac{1}{(u+1)^2}(x-u).$$

Para passar por $(1, 2)$, ela deve satisfazer $(u+2)(u+1) = 1-u$, isto é, $u^2 + 4u + 1 = 0$. Assim, há duas tangentes, nos pontos

$$\left(-2 + \sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-2 - \sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Suas inclinações são $1/(-1 + \sqrt{3})^2$ e $1/(-1 - \sqrt{3})^2$, respectivamente, e são distintas.

9.7 Usando as derivadas trigonométricas e, quando necessário, as regras do produto e do quociente, obtemos

$$1. 5 \cos x - 6 \sin x.$$

$$2. \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x, \text{ para } \sin x \cos x \neq 0.$$

3. $-\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$, para $\sin x \neq \cos x$.

4. $\cotg x - x \operatorname{cosec}^2 x$, para $\sin x \neq 0$.

5. $\sin x + (x - 2) \cos x + 2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x$, para $\cos x \neq 0$.

9.8 Combinando as regras do produto e do quociente com $(e^x)' = e^x$ e $(\ln x)' = 1/x$, obtemos

1. $e^x(x^7 + 7x^6)$.

2. $\frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}$, para $x \neq 0$.

3. $e^x(\cos x - \sin x)$.

4. $\frac{x^{n-1}(n \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$, para $x > 0$ e $x \neq 1$.

5. $3x^2 \ln x$, para $x > 0$.

9.9 A reta $5x + y - 3 = 0$ tem coeficiente angular -5 . Como

$$f'(x) = 2x - 7,$$

a tangente à parábola é paralela a essa reta quando $2x - 7 = -5$, isto é, quando $x = 1$. Como $f(1) = -3$, o ponto procurado é $(1, -3)$.

9.10 Para $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4,$$

e, portanto, $f'(1) = 3$. A reta tangente no ponto $(1, -4)$ é

$$y + 4 = 3(x - 1).$$

Como a normal é perpendicular à tangente, seu coeficiente angular é $-1/3$:

$$y + 4 = -\frac{1}{3}(x - 1).$$

9.11 A derivada é $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$, de modo que $f'(-2) = 0$. Assim, a tangente em $(-2, 5)$ é horizontal,

$$y = 5,$$

e a reta normal é vertical,

$$x = -2.$$

9.12 Temos

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

A tangente é horizontal quando $f'(x) = 0$, portanto em $x = 1$ e $x = 3$. Como $f(1) = 7/3$ e $f(3) = 1$, os pontos são

$$(1, 7/3) \quad \text{e} \quad (3, 1).$$

9.13 De $p(0) = -2$ obtemos $d = -2$, e de $p'(0) = -1$ segue $c = -1$. Como

$$p''(x) = 6ax + 2b,$$

a condição $p''(0) = 10$ fornece $b = 5$. Por fim, $p(1) = -2$ implica

$$a + b + c + d = -2,$$

de onde $a = -4$. Portanto,

$$a = -4, \quad b = 5, \quad c = -1, \quad d = -2.$$

9.14 A continuidade exige $ac + b = c^2$ e a igualdade das derivadas laterais exige $a = 2c$. Logo, $a = 2c$ e $b = -c^2$.

9.15 A continuidade exige $ac + b = \sin c$ e a igualdade das derivadas laterais exige $a = \cos c$. Logo, $a = \cos c$ e $b = \sin c - c \cos c$.

9.16 Como $c > 0$, a continuidade exige $a + bc^2 = 1/c$. A derivada pela esquerda é $2bc$ e pela direita é $-1/c^2$. Portanto, $b = -1/(2c^3)$ e $a = 3/(2c)$.

9.17 Pela regra da potência para expoentes reais,

$$f'(x) = \frac{a}{2}x^{a/2-1} + \frac{a+4}{2}x^{(a+2)/2} + a(a-1)x^{a-2}, \quad x > 0.$$

9.18 Aplicamos a regra da cadeia em todos os itens e combinamos, nos últimos, as regras do produto e do quociente. As respostas estão organizadas nos mesmos três níveis do enunciado.

Nível 1 – composições diretas.

1. $f'(x) = 24(2x + 10)^{11}.$

2. $f'(t) = 15(3t - 2)^4.$

3. $g'(\theta) = 3(\sin \theta + \cos \theta)^2(\cos \theta - \sin \theta).$

4. $h'(t) = (6t + 1)e^{3t^2+t-1}.$

5. $f'(x) = 4(x + 1/x)^3(1 - 1/x^2)$, para $x \neq 0$.

6. $f'(x) = -3 \operatorname{sen}(3x)$.

7. $g'(x) = 5 \sec^2(5x)$, para $\cos(5x) \neq 0$.

Nível 2 — composições aninhadas, logaritmos e exponenciais.

8. $h'(t) = 8 \operatorname{sen}^3(2t) \cos(2t)$.

9. $p'(t) = -3(2t + 3) \cos^2(t^2 + 3t + 1) \operatorname{sen}(t^2 + 3t + 1)$.

10. $f'(x) = -\operatorname{tg} x$, nos intervalos em que $\cos x > 0$.

11. $f'(x) = 2/x$, para $x \neq 0$.

12. $f'(x) = 2/x$, para $x > 0$.

13. $g'(r) = 4e^{4r}$.

14. $g'(t) = -e^{\cos t} \operatorname{sen} t$.

15. $g'(t) = 0$.

16. $m'(w) = -e^{-w}$.

Nível 3 — cadeia combinada com produto e quociente.

17. $m'(w) = -\frac{e^w + 2}{e^{2w}}$.

18. $f'(x) = \frac{e^{2x^2}(2xe^{x^2} + 1) - (e^{x^2} + x)4xe^{2x^2}}{e^{4x^2}}$.

19. $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(5x) + 5x^2 \cos(5x)$.

20. $g'(t) = 5 \cos(t^2 + 3t) \cos(5t - 7) - (2t + 3) \operatorname{sen}(t^2 + 3t) \operatorname{sen}(5t - 7)$.

21. $g'(t) = e^{5t^2} \left(10t \cos \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right)$, para $t \neq 0$.

9.19 Em cada item, calculamos primeiro a inclinação da tangente no ponto indicado. Quando essa inclinação é não nula, a normal tem coeficiente angular igual ao recíproco negativo.

1. Tangente: $y = 0$. Normal: $x = 0$.

2. Tangente: $y - 1 = 15(t - 1)$. Normal: $y - 1 = -\frac{1}{15}(t - 1)$.

3. Tangente: $y - 1 = -3(\theta - \pi/2)$. Normal: $y - 1 = \frac{1}{3}(\theta - \pi/2)$.

4. Tangente: $y - e = -5e(t + 1)$. Normal: $y - e = \frac{1}{5e}(t + 1)$.

9.20 Se $f(x) = \ln(kx)$, com $k > 0$ e $x > 0$, então, pela regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{1}{kx} k = \frac{1}{x}.$$

Por outro lado, $\ln(kx) = \ln k + \ln x$, de modo que

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

As duas formas, portanto, fornecem a mesma derivada.

9.21 Para $x > 0$, aplicando a regra da cadeia a $\ln(x^k)$,

$$\frac{d}{dx} \ln(x^k) = \frac{kx^{k-1}}{x^k} = \frac{k}{x}.$$

A identidade $\ln(x^k) = k \ln x$ fornece diretamente

$$\frac{d}{dx} (k \ln x) = \frac{k}{x},$$

confirmando o mesmo resultado.

9.22 Como $|x^{1/3} \sin(1/x)| \leq |x|^{1/3} \rightarrow 0 = f(0)$, a função é contínua em 0. Entretanto,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h^{-2/3} \sin(1/h).$$

Tomando $h_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi) > 0$, temos $h_n \rightarrow 0$ e o quociente vale $h_n^{-2/3} \rightarrow +\infty$.

Tomando $k_n = 1/(3\pi/2 + 2n\pi) > 0$, temos $k_n \rightarrow 0$ e o quociente vale $-k_n^{-2/3} \rightarrow -\infty$.

Logo, não há limite e $f'(0)$ não existe.

9.23 1. Como $f'(1) = 4$, temos $(f^{-1})'(2) = 1/4$.

2. Como $g'(1) = 1 + 1 = 2$, temos $(g^{-1})'(1) = 1/2$.

9.24

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) - (-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2.$$

Como $f(3) = -3$, a tangente é $y + 3 = 2(x - 3)$, ou $y = 2x - 9$.

9.25 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$ e $a(t) = 6t - 12$. O carrinho está em repouso em $t = 1$ e $t = 3$; move-se no sentido positivo em $[0, 1)$ e $(3, \infty)$ e no sentido negativo em $(1, 3)$.

9.26 Usando as regras do produto, da potência e do quociente,

$$y' = \frac{3x^3 - 10x^2 - x - 2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}.$$

9.27 $A'(t) = 2\pi r(t)r'(t) = 0,3\pi(2 + 0,15t) \text{ cm}^2/\text{s}$. Em $t = 10 \text{ s}$, a área cresce à taxa de $1,05\pi \approx 3,30 \text{ cm}^2/\text{s}$.

9.28 O quociente $|h|/h$ tende a 1 quando $h \rightarrow 0^+$ e a -1 quando $h \rightarrow 0^-$. Como os limites laterais diferem, $f'(0)$ não existe. No gráfico, isso corresponde ao vértice anguloso na origem.

9.29 A função não é derivável nos zeros do radicando,

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2k+1)\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde o gráfico tem pontos angulosos. Nos demais pontos,

$$y' = -\frac{4x \operatorname{sen}(4x^2)}{\sqrt{1 + \cos(4x^2)}}.$$

Em particular, $y'(0) = 0$.

9.30 Como $f(1) = 2$ e $f'(1) = 4$, temos $(f^{-1})'(2) = 1/f'(1) = 1/4$.

9.31 A inclinação da secante indicada é aproximadamente

$$\frac{6,05 - 5,45}{6,5 - 5,5} = 0,60 \text{ km/min}.$$

Como os dois instantes cercam 6 min, esse valor estima $s'(6)$; ele equivale a aproximadamente 36 km/h.

10.1 Diferenciando cada relação em relação a x e isolando y' , com as restrições necessárias para as divisões efetuadas, obtemos

1. $-\frac{x}{y}$, nos pontos em que $y \neq 0$.

2. $\frac{-2xy - y^2 + 3}{x(x+2y)}$, nos pontos em que $x(x+2y) \neq 0$.

3. $-\frac{y\sqrt{x+y} + \sqrt{xy}}{x\sqrt{x+y} + \sqrt{xy}}$, para $x+y > 0$, $xy > 0$ e denominador não nulo.

4. $\frac{\operatorname{sen} y}{2\operatorname{sen}(2y) - \operatorname{sen} y - x \cos y}$, nos pontos em que o denominador não se anula.

5. $\frac{\ln y - y/x}{\ln x - x/y}$, para $x, y > 0$ e nos pontos em que o denominador não se anula.

6. $\frac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$, para $x^2 + y^2 > 0$ e denominador não nulo.

7. $-\frac{4x^3}{2y+1}$, nos pontos em que $2y+1 \neq 0$.

8. $-\left(\frac{y}{x}\right)^{3/5}$, nos pontos em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

10.2 Em cada ramo diferenciável com $x \neq 0$, o produto xy é uma constante não nula:

1. $xy = 1$;

2. $xy = 1$ ou $xy = -1$;

3. $xy = \pi/2 + 2k\pi$, para um inteiro k fixo no ramo;

4. $xy = e$.

Em todos os casos, $y = C/x$ para alguma constante $C \neq 0$, de modo que $y' = -C/x^2 = -y/x$. No item 3, a diferenciação direta fornece $0 = 0$, pois $\cos(xy) = 0$; por isso identificamos primeiro os ramos. A continuidade de xy impede que seu valor salte entre essas constantes em um intervalo.

10.3 1. $y' = \frac{9x}{16y}$; no ponto dado, $m = -5/4$. A reta é $y - 9/4 = -\frac{5}{4}(x + 5)$.

2. $y' = -\frac{4x}{y}$; no ponto dado, $m = 1/\sqrt{2}$. A reta é $y - 4\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 1)$.

3. $y' = \frac{x^2(3-2x)}{y}$; no ponto dado, $m = 1$. A reta é $y = x$.

10.4 A derivação implícita fornece $y' = -x/(4y)$. Quando $x = 1$, temos $y = 1/2$; portanto, $y'(1) = -1/2$ e a reta tangente é

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1).$$

10.5 Se $y_0 \neq 0$, a diferenciação implícita fornece $y' = -b^2x/(a^2y)$. Portanto, a tangente em (x_0, y_0) satisfaz

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Multiplicando por y_0/b^2 e reorganizando,

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Se $y_0 = 0$, então $x_0 = \pm a \neq 0$. Diferenciando x em relação a y , obtemos $dx/dy = -a^2 y/(b^2 x)$, que se anula nesse ponto; logo, a tangente é vertical, $x = x_0$. A fórmula do enunciado reduz-se exatamente a essa reta.

10.6 Derivando implicitamente, temos $y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. Logo, a reta tangente em (a, b) é

$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x - a). \text{ Seus interceptos somam } a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = c.$$

10.7 A tangente à elipse no ponto (u, v) satisfaz $ux + 4vy = 36$. Para passar por $(12, 3)$, é necessário $12u + 12v = 36$, isto é, $u + v = 3$. Substituindo $v = 3 - u$ em $u^2 + 4v^2 = 36$, obtemos $5u^2 - 24u = 0$. Assim, os pontos são $(0, 3)$ e $(24/5, -9/5)$, e as retas correspondentes são $y = 3$ e $2x - 3y = 15$. Ambas passam por $(12, 3)$.

10.8 Derivando implicitamente, obtemos

$$\frac{h'}{\sqrt{h}} + \frac{1}{25} = 0 \implies h' = -\frac{\sqrt{h}}{25}.$$

Quando $h = 9$, $h' = -3/25$ m/s; portanto, a altura diminui à taxa de $3/25$ m/s.

10.9 1. $2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 + 5^x \ln 5 + 6^x \ln 6 + 7^x \ln 7$.

2. $\pi^x \ln \pi + 3^x(x \ln 3 + 1) + 4^x(\ln 4 \cos x - \sin x)$.

3. $\frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x \ln 3} + \frac{1}{x \ln 4}$, para $x > 0$.

4. $\frac{2^x}{\ln 3} \left(\ln 2 \ln x + \frac{1}{x} \right)$, para $x > 0$.

10.10 A regra da cadeia fornece $(a^x)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

10.11 Em cada item, calculamos $f'(x_0)$ e usamos a forma ponto-inclinação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Resultam as seguintes retas tangentes:

1. $y = 27(x - 3) + 27$.

2. $y = 10(x - 1) + 4$.

3. $y = -\frac{1}{4}(x+1) - \frac{1}{2}.$

4. $y = \pi - x.$

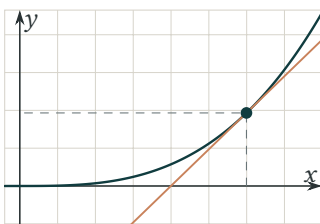
5. $y - 4 = 4 \ln(2)(x - 2).$

6. $y = 1.$

A curva principal representa f ; a curva secundária representa a tangente. O ponto de contato está marcado em cada painel.

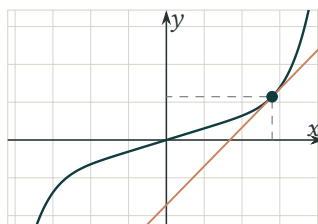
Item 1

$P = (3, 27)$



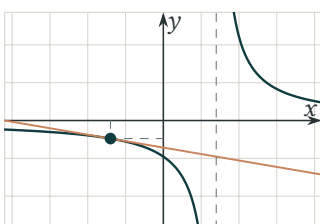
Item 2

$P = (1, 4)$



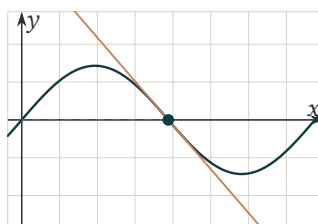
Item 3

$P = (-1, -1/2)$



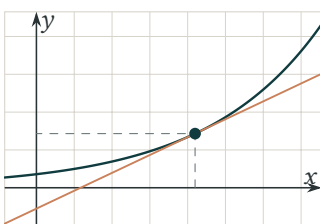
Item 4

$P = (\pi, 0)$



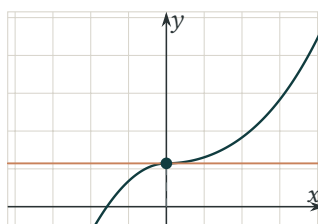
Item 5

$P = (2, 4)$



Item 6

$P = (0, 1)$



10.12 Como $f(t) = (\ln t)e^t$, seu domínio é $t > 0$. Pela regra do produto,

$$f'(t) = \frac{e^t}{t} + e^t \ln t = e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right), \quad t > 0.$$

10.13 Temos $P'(I) = k/I$. A percepção ainda cresce com o estímulo, mas sua sensibilidade a um mesmo acréscimo absoluto diminui quando I aumenta. Além disso,

$$P(2I) - P(I) = k \ln 2,$$

independentemente de I .

10.14 Para $I > I_c$,

$$f'(I) = \frac{a}{2\sqrt{I - I_c}}.$$

Logo, $f'(I) \rightarrow +\infty$ quando $I \rightarrow I_c^+$. O modelo prevê sensibilidade muito alta imediatamente acima do limiar e ganho decrescente à medida que a corrente aumenta. O valor infinito é uma idealização do modelo, não uma previsão fisiológica literal.

10.15 Usando a regra da cadeia e, nos itens com variável na base e no expoente, a diferenciação logarítmica, obtemos

1. $e^{\sin x} \cos x$.

2. $\frac{2x}{1+x^2}$.

3. $x^x(\ln x + 1)$, para $x > 0$.

4. $(\cos x)^x(\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x)$, nos intervalos em que $\cos x > 0$.

5. $\pi x^{\pi-1} + \pi^x \ln \pi$, para $x > 0$.

6. $(2x+1)^x \left(\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right)$, para $x > -1/2$.

7. $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$, para $x > e$.

8. $(\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right)$, para $x > 1$.

9. $x^{e^x} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$, para $x > 0$.

10. $x^{x^x} x^x \left((\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right)$, para $x > 0$.

10.16 Aplicando a regra da cadeia às fórmulas das funções trigonométricas inversas e registrando os respectivos domínios, obtemos

1. $\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$, para $|x| < 1$.

2. $-\frac{\cos x}{|\cos x|}$, nos pontos em que $\cos x \neq 0$.

3. $-\frac{1}{|x|\sqrt{4x^2-1}}$, para $|x| > 1/2$.

10.17 As regras da cadeia, do produto e do quociente fornecem

1. $h'(t) = \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}$, para $|t| < 1/2$.
2. $f'(t) = \frac{1}{|t|\sqrt{4t^2-1}}$, para $|t| > 1/2$.
3. $g'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$, para $x \in \mathbb{R}$.
4. $f'(x) = \arcsen x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, para $|x| < 1$.
5. $g'(t) = \arccos(t) \cos t - \frac{\sen t}{\sqrt{1-t^2}}$, para $|t| < 1$.
6. $h'(x) = \frac{\arcsen x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2} [\arccos x]^2}$, para $|x| < 1$.
7. $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$, para $x > 0$.
8. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $0 < |x| < 1$.

10.18 Este bloco combina as técnicas do capítulo; em cada item usamos apenas as regras necessárias e mantemos as condições de domínio implícitas no enunciado.

1. $f'(x) = 10x(x^2 + 1)^4$.
2. $g'(x) = e^{x^2}(2x \sen x + \cos x)$.
3. $h'(x) = 2x/(1+x^2)$.
4. $p'(x) = x^x(\ln x + 1)$.
5. $q'(x) = (\sen x)^x[\ln(\sen x) + x \cotg x]$.
6. Por diferenciação logarítmica, $r'(x) = r(x)/(1-x^2)$.
7. $u'(x) = e^x/(1+e^{2x})$.
8. $v'(x) = 2x/(x^2+1) - 1/(x-1)$.
9. $y' = -(2x+y)/(x+2y)$, quando $x+2y \neq 0$.
10. $f''(x) = e^x(x^2+4x+2)$.

10.19 Como $10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$, o volume é $V = \pi r^2$. Derivando, $5 = 2\pi r r'$, logo

$r' = 5/(2\pi r)$, em cm/s. Na ordem pedida:

1. $5/(2\pi)$ cm/s.
2. $1/(4\pi)$ cm/s.
3. $1/(40\pi)$ cm/s.

10.20 Se x é a distância da base à parede e y é a altura do topo, então $x^2 + y^2 = 64$. Como $x' = 0,5$, temos $y' = -0,5x/y = -0,5x/\sqrt{64 - x^2}$. As velocidades verticais são:

1. $-1/(2\sqrt{63})$ m/s.
2. $-1/(2\sqrt{3})$ m/s.
3. $-15/(2\sqrt{31})$ m/s.
4. Não há taxa vertical finita: quando $x \rightarrow 8^-$, $y \rightarrow 0^+$ e $y' \rightarrow -\infty$. O modelo com afastamento horizontal constante não continua além desse instante.

10.21 Diferenciando em relação ao tempo e dividindo por $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$, obtemos a identidade pedida. Substituindo as taxas relativas,

$$\frac{L'}{L} = 2(0,4\%) + 4(-0,1\%) = 0,4\%$$

por século. Nesse instante, a luminosidade está aumentando.

10.22 O raio superior é 5 m. Por semelhança, $r/h = 5/20 = 1/4$, de modo que $V = \pi h^3/48$. Derivando, $10 = (\pi h^2/16)h'$, portanto $h' = 160/(\pi h^2)$. Na ordem pedida:

1. $160/\pi$ m/min.
2. $8/(5\pi)$ m/min.
3. $160/(361\pi)$ m/min.

O volume total é $V(20) = 500\pi/3$ m³. Dividindo-o pela vazão de 10 m³/min, obtemos o tempo de enchimento $50\pi/3$ minutos.

10.23 Se x é a distância horizontal percorrida e y é a distância vertical entre o peso e a polia, o comprimento constante da corda dá

$$y + \sqrt{x^2 + 10^2} = 20.$$

A distância vertical da mão à polia é fixa, igual a 10 m. Como $x' = 0,6$, a diferenciação fornece

$$y' = -\frac{0,6x}{\sqrt{x^2 + 100}}.$$

Portanto, a velocidade de subida do peso é $-y' = 0,6x/\sqrt{x^2 + 100}$. Após percorrer (a) 3 m, o peso sobe a $1,8/\sqrt{109} \approx 0,172$ m/s; após percorrer (b) 12 m, sobe a $3,6/\sqrt{61} \approx 0,461$ m/s.

10.24 Se s é o comprimento do trecho de corda entre o barco e o guincho e x é a distância horizontal ao cais, então $s^2 = x^2 + 9$. Como $s' = -9$, obtemos $x' = ss'/x = -9\sqrt{x^2 + 9}/x$. Na ordem pedida, as taxas de variação da distância são:

1. $-9\sqrt{26}/5$ m/min.
2. $-3\sqrt{13}$ m/min.
3. $-9\sqrt{101}$ m/min.
4. É impossível ter $s < 3$ m, pois a separação vertical entre o guincho e o convés já mede 3 m.

Nos três primeiros itens, as velocidades de aproximação são os módulos desses valores; o sinal negativo indica diminuição da distância.

10.25 Se x é a distância horizontal orientada, em quilômetros, e θ é o ângulo medido a partir da horizontal, então $\cotg \theta = x/3$. Diferenciando e tomando módulos,

$$|\theta'| = \frac{3 \cdot 800}{x^2 + 9} \text{ rad/h.}$$

Para converter radianos por hora em graus por segundo, multiplicamos por $180/(3600\pi) = 1/(20\pi)$. Logo, na ordem pedida:

1. $12/\pi \approx 3,82$ graus/s.
2. $1500/(113\pi) \approx 4,22$ graus/s.
3. $40/(3\pi) \approx 4,24$ graus/s.

10.26 Como $h = (2/3)(2r) = 4r/3$, temos $r = 3h/4$. Logo, $V = \pi r^2 h/3 = 3\pi h^3/16$. Derivando, $1 = (9\pi h^2/16)h'$. Para $h = 10$ m, obtemos $h' = 4/(225\pi)$ m/s.

10.27 Pelas regras do produto e da cadeia,

$$v(t) = e^{-3t/2}(4\pi \cos(2\pi t) - 3 \operatorname{sen}(2\pi t)).$$

Logo, $v(0) = 4\pi$ cm/s; o sinal positivo indica movimento inicial no sentido positivo do eixo. Como o fator exponencial nunca se anula, o primeiro repouso positivo satisfaz

$$\operatorname{tg}(2\pi t) = \frac{4\pi}{3}, \quad t = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \approx 0,213 \text{ s.}$$

Finalmente, $|s(t)| \leq 2e^{-3t/2}$ e essa envoltória tende a zero; portanto, as oscilações são amortecidas.

10.28 Temos $dV/dx = 3x^2$. Em $x = 3$, a taxa é 27 mm^2 , isto é, cerca de 27 mm^3 de volume para cada milímetro acrescentado à aresta. Como $S = 6x^2$, segue que $dV/dx = S/2$.

10.29 Fatorando,

$$P' = P \left(r_0 - \beta - \frac{r_0}{P_c} P \right).$$

Os equilíbrios são $P = 0$ e $P = P_c(1 - \beta/r_0)$. O segundo é positivo exatamente quando $\beta < r_0$. Com os valores dados, ele vale $10000(1 - 0,04/0,05) = 2000$ peixes.

Se $\beta = r_0$, então

$$P' = -\frac{r_0}{P_c} P^2 < 0 \quad (P > 0),$$

logo a população decresce enquanto é positiva. Ela não pode permanecer acima de um nível $\varepsilon > 0$: nesse caso teríamos $P' \leq -(r_0/P_c)\varepsilon^2$, e o Teorema do Valor Médio forçaria uma queda linear que acabaria tornando P negativa. Portanto, o único nível possível a longo prazo é 0, isto é, o modelo prevê $P(t) \rightarrow 0$.

10.30 Se d é a distância entre as pontas e θ é o menor ângulo entre os ponteiros logo após uma hora, a lei dos cossenos fornece

$$d^2 = 8^2 + 4^2 - 2(8)(4) \cos \theta = 80 - 64 \cos \theta.$$

À uma hora, $\theta = \pi/6$. Logo após esse instante, o ponteiro dos minutos se aproxima do ponteiro das horas; portanto,

$$\theta' = \frac{\pi}{360} - \frac{\pi}{30} = -\frac{11\pi}{360} \text{ rad/min.}$$

Derivando, $2dd' = 64 \operatorname{sen} \theta \theta'$. Portanto,

$$d' = -\frac{22\pi}{45\sqrt{80 - 32\sqrt{3}}} \text{ mm/min.}$$

O valor é negativo: nesse instante, as pontas estão se aproximando.

10.31 Usando as fórmulas das funções hiperbólicas, a regra da cadeia e, nos dois últimos itens, diferenciação logarítmica, obtemos

1. $2 \cosh(2x)$.

2. $2x \operatorname{sech}^2(x^2)$.

3. $-\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$.

4. $3/\sqrt{1+9x^2}$.

5. $(\sinh x)^{\operatorname{tgh} x} (\operatorname{sech}^2 x \ln(\sinh x) + \operatorname{tgh} x \operatorname{cotgh} x)$.

6. $x^{\cosh x} \left(\sinh x \ln x + \frac{\cosh x}{x} \right)$.

10.32 Como $f(0) = 1$ e $f'(0) = k$, a linearização de f em torno de 0 é

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + kx.$$

10.33 Como $V'(3) = 27$ e $\Delta x = 0,02$ mm,

$$\Delta V \approx V'(3)\Delta x = 27(0,02) = 0,54 \text{ mm}^3.$$

10.34 Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$, temos $f(8) = 2$ e $f'(8) = 1/12$. Assim, a linearização em $x = 8$ é

$$L(x) = 2 + \frac{x-8}{12}.$$

Logo,

$$\sqrt[3]{8,7} \approx L(8,7) = 2,05833.$$

10.35

$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

Em $(1, 2)$, $y' = -4/5$; a tangente é $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$.

10.36 Como $x > 0$, podemos escrever $\ln y = \sqrt{x} \ln(x^2 + 1) - 3 \ln x$. Assim,

$$y' = y \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{x^2 + 1} - \frac{3}{x} \right), \quad y = \frac{(x^2 + 1)^{\sqrt{x}}}{x^3}.$$

A hipótese garante a existência de $\sqrt{x}$ e de $\ln x$ e torna $y > 0$.

10.37 Para $x \neq \pm 1$, a regra da cadeia fornece

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right) = \frac{2}{1+x^2}.$$

A identidade da tangente dupla leva localmente à mesma derivada, mas a função arctg escolhe valores em um intervalo restrito; por isso não se pode substituir globalmente a expressão por $2 \operatorname{arctg} x$ sem constantes por trechos.

10.38 De $V = 4\pi r^3/3$, obtemos $r' = 30/(4\pi r^2)$. Como $S = 4\pi r^2$, $S' = 8\pi r r'$. Em $r = 5$ cm, $S' = 12$ cm²/s.

10.39 $L(x) = 2 + (x - 8)/12$, logo $\sqrt[3]{8,12} \approx L(8,12) = 2,01$.

10.40 $V'(t) = 1,2 \sinh(0,3t)$ V/s. Em $t = 2$ s, a voltagem aumenta à taxa $1,2 \sinh(0,6) \approx 0,764$ V/s.

10.41 De $x^2 + y^2 = 64$, segue $xx' + yy' = 0$. Quando $x = 3$, $y = \sqrt{55}$ e

$$y' = -\frac{3(0,4)}{\sqrt{55}} = -\frac{1,2}{\sqrt{55}} \approx -0,162 \text{ m/s}.$$

A altura diminui.

11.1 1. Sim. Pelo Teorema de Weierstrass, a continuidade no intervalo fechado e limitado garante que a função atinja seus valores máximo e mínimo.

2. Compare $f(a)$, $f(b)$ e os valores de f em todos os pontos críticos interiores. Pelo Teorema de Fermat, nenhum extremo interior pode ficar fora desse conjunto. Se houver infinitos pontos críticos, a comparação deve abranger esse conjunto inteiro; o teorema não garante uma lista finita de candidatos.

11.2 1. $f'(x) = 2x(x^4 + 2x^2 + 4)/(x^2 + 1)^2$. Máximo $252/17$ em $x = -4$ e $x = 4$; mínimo -4 em $x = 0$.

2. $f'(x) = (4 - 2x^2)/\sqrt{4 - x^2}$ no interior do domínio. Compare $f(-1) = -\sqrt{3}$, $f(\sqrt{2}) = 2$ e $f(2) = 0$: o máximo é 2 em $x = \sqrt{2}$, e o mínimo é $-\sqrt{3}$ em $x = -1$.

3. $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$. Máximo $1/e$ em $x = 1$; mínimo 0 em $x = 0$.

4. $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$. Máximo $1/e$ em $x = e$; mínimo 0 em $x = 1$.

11.3 Como $f'(x) = 101x^{100} + 51x^{50} + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função é estritamente crescente. Cada ponto tem valores menores à esquerda e maiores à direita, de modo que não há extremos locais.

11.4 Em cada item, comparam-se os valores nos extremos do intervalo e nos pontos críticos interiores.

1. $f'(x) = 4x(x^2 - 2)$. Máximo 47 em $x = -3$; mínimo -2 em $x = \pm\sqrt{2}$.

2. $g'(x) = 1/(x + 1)^2 > 0$. Máximo $2/3$ em $x = 2$; mínimo $1/2$ em $x = 1$.

3. $h'(x) = -x/\sqrt{9-x^2}$. Máximo 3 em $x = 0$; mínimo $\sqrt{5}$ em $x = 2$.

4. $f'(t) = \cos t - \sin t$. Máximo $\sqrt{2}$ em $t = \pi/4$; mínimo 1 em $t = 0$.

5. $f'(x) = 1 - 3/x$. Mínimo $3 - 3 \ln 3$ em $x = 3$. O máximo é 1 em $x = 1$, pois $f(4) = 4 - 3 \ln 4 < 1$.

11.5 1. Uma condição suficiente é que existam $a < c < d < b$ tais que todos os valores de f fora de $[c, d]$ fiquem entre o mínimo e o máximo de f em $[c, d]$. Weierstrass garante esses dois extremos em $[c, d]$, e a condição os torna globais em (a, b) . Em particular, isso ocorre se f for constante fora de $[c, d]$, com valores já assumidos nesse intervalo. A continuidade em (a, b) , sozinha, não basta: $f(x) = x$ não atinge nenhum dos extremos nesse intervalo.

11.6 1. A imagem é $(1, \infty)$; não há máximo nem mínimo.

2. Mínimo 3 em $x = 0$, pois $9 + x^2 \geq 9$. Não há máximo.

3. Não há extremos globais: $h(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $h(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$.

4. $k'(x) = 1/x - 1$. Máximo -1 em $x = 1$. Não há mínimo, pois $k(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$ ou $x \rightarrow \infty$.

5. Como $x - x^2 = 1/4 - (x - 1/2)^2$, o mínimo é 4 em $x = 1/2$. Não há máximo, pois a função tende a $+\infty$ nas duas extremidades.

11.7 Minimizar a distância equivale a minimizar seu quadrado. Usando $y^2 = x^2 + 4$,

$$d^2 = (x - 2)^2 + y^2 = 2(x - 1)^2 + 6.$$

O mínimo ocorre em $x = 1$, para o qual $y = \pm\sqrt{5}$. Portanto, os pontos são $(1, \sqrt{5})$ e $(1, -\sqrt{5})$, ambos à distância $\sqrt{6}$ de $(2, 0)$.

11.8 A área máxima é $2ab$, atingida pelo retângulo de vértices $(\pm a/\sqrt{2}, \pm b/\sqrt{2})$, com lados $\sqrt{2}a$ e $\sqrt{2}b$. Para justificar que nenhuma orientação dá área maior, aplique a transformação $(x, y) \mapsto (x/a, y/b)$. O retângulo transforma-se em um paralelogramo inscrito no círculo unitário, e sua área é dividida por ab . Todo paralelogramo inscrito em um círculo é um retângulo: ângulos opostos são iguais e suplementares. Se os lados do retângulo transformado são u, v , sua diagonal mede 2, logo $u^2 + v^2 = 4$ e $uv \leq 2$. Assim, a área original é no máximo $2ab$, como desejado.

11.9 A função é contínua em $[1, 3]$ e diferenciável em $(1, 3)$. Como

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 4 \quad \text{e} \quad f'(c) = 2c,$$

temos $c = 2$.

11.10 Se $a \neq b$, o teorema fornece um ponto c entre a e b tal que $\sin b - \sin a = \cos c(b - a)$. Tomando módulos e usando $|\cos c| \leq 1$, obtemos a desigualdade. Para $a = b$, ela é imediata.

11.11 Não. Embora f seja contínua em $[-1, 1]$, ela não é diferenciável em 0, que pertence ao interior do intervalo.

11.12 A derivada é $10x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ em toda a reta. Pelo Teorema do Valor Médio, a função é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

11.13 O domínio é $(0, \infty)$ e $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$. Portanto, f é crescente em $(0, e]$ e decrescente em $[e, \infty)$.

11.14 Como $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$, a função é crescente em $(-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, \infty)$.

11.15 Usamos $\uparrow$ e $\downarrow$ para indicar crescimento e decrescimento, respectivamente. Intervalos separados são considerados individualmente. Os intervalos são abertos nos pontos críticos para facilitar a leitura; quando esses pontos pertencem ao domínio, podem ser incluídos por continuidade. Salvo indicação em contrário, o domínio é $\mathbb{R}$.

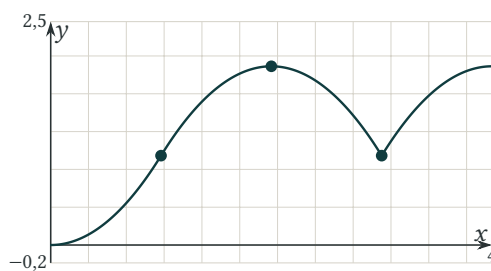
1. $f' = 2x - 3$. Crítico $3/2$, mínimo de valor $11/4$; $\downarrow$ em $(-\infty, 3/2)$ e $\uparrow$ em $(3/2, \infty)$.
2. $f' = -\sin x$. Para $k \in \mathbb{Z}$, $2k\pi$ é máximo de valor 1, e $(2k+1)\pi$ é mínimo de valor -1 . Há crescimento em $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ e decrescimento em $(2k\pi, (2k+1)\pi)$.
3. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Como $f' = \sec^2 x > 0$, a função cresce em cada intervalo $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ e não tem pontos críticos.
4. $f' = (x-1)(3x-7)$. Máximo local em 1, de valor 2, e mínimo local em $7/3$, de valor $22/27$. Há crescimento em $(-\infty, 1)$ e $(7/3, \infty)$ e decrescimento em $(1, 7/3)$.
5. $f' = 6x^2 - 2x + 1 = 6(x - 1/6)^2 + 5/6 > 0$. Crescente em toda a reta, sem pontos críticos.
6. Escreva $r = \sqrt{5/2}$. Como $f' = 2x(2x^2 - 5)$, há mínimos em $\pm r$, de valor $-9/4$, e máximo local em 0, de valor 4. A função decresce em $(-\infty, -r)$ e $(0, r)$ e cresce em $(-r, 0)$ e (r, ∞) .
7. $f' = -2x/(x^2 + 1)^2$. Máximo em 0, de valor 1; crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$.
8. $f' = 2x + 2$. Mínimo em -1 , de valor -4 ; decrescente em $(-\infty, -1)$ e crescente em $(-1, \infty)$.

9. $f' = 3x(x + 2)$. Máximo local em -2 , de valor 7, e mínimo local em 0, de valor 3. Crescente em $(-\infty, -2)$ e $(0, \infty)$; decrescente em $(-2, 0)$.
10. $f' = -2(x - 1)/((x - 1)^2 + 1)^2$. Máximo em 1, de valor 1; crescente em $(-\infty, 1)$ e decrescente em $(1, \infty)$.
11. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Como $f' = 6x/(x^2 - 1)^2$, há mínimo local em 0, de valor 4. Decrescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$; crescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.
12. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Como $f' = -(x^2 + 8)/(x^2 - 2x - 8)^2 < 0$, decresce em cada um dos três componentes do domínio, sem pontos críticos.
13. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $x \neq 0, 2$, $f' = (6 - x)/(3x^2\sqrt[3]{x - 2})$. O ponto 2 é crítico por não diferenciabilidade e é mínimo local de valor 0; 6 é máximo local de valor $\sqrt[3]{2}/3$. Decresce em $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ e $(6, \infty)$; cresce em $(2, 6)$.
14. Domínio $(-\pi, \pi)$ e $f' = \cos(2x)$. Máximos em $-3\pi/4$ e $\pi/4$, de valor $1/2$; mínimos em $-\pi/4$ e $3\pi/4$, de valor $-1/2$. Cresce em $(-\pi, -3\pi/4)$, $(-\pi/4, \pi/4)$ e $(3\pi/4, \pi)$; decresce em $(-3\pi/4, -\pi/4)$ e $(\pi/4, 3\pi/4)$.

11.16 Um exemplo contínuo em $[0, 4]$ é

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - (x - 2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ 2 - (x - 4)^2, & 3 < x \leq 4. \end{cases}$$

As derivadas são $2x$, $4 - 2x$ e $8 - 2x$ nos três trechos. As derivadas segundas são, respectivamente, 2, -2 e -2 . A mudança de decrescimento para crescimento em 3 produz um mínimo com quina, compatível com as condições do enunciado.



11.17 Como $f''(x) = 12x^2 + 12x + 2c = 12(x + 1/2)^2 + 2c - 3$, temos $f'' \geq 0$ em toda a reta se, e somente se, $c \geq 3/2$. Esse é o conjunto pedido com a convenção não estrita de concavidade. Para $c < 3/2$, a derivada segunda é negativa em uma vizinhança de $-1/2$, excluindo a convexidade global.

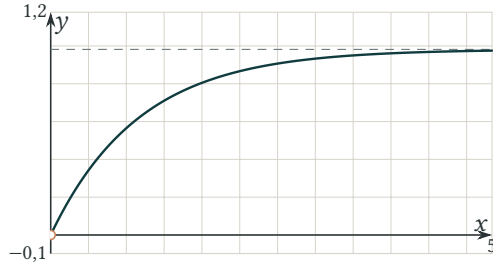
11.18 Temos $f(x) = -x^2$ para $x < 0$ e $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$. Logo, $f'' = -2$ à esquerda e $f'' = 2$ à direita, e a continuidade na origem garante a inflexão. Além disso, $f'(x) = 2|x|$ em toda a reta; os limites laterais de $[f'(h) - f'(0)]/h$ são -2 e 2 . Portanto, $f''(0)$ não existe.

11.19 Não. Escolha $0 < a < b$. Como f é estritamente crescente, $m = (f(b) - f(a))/(b - a) > 0$. Pela convexidade, para $x > b$,

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq m, \quad f(x) \geq f(b) + m(x - b).$$

O lado direito tende a $+\infty$, o que impede uma assíntota horizontal.

11.20 Sim. A função $f(x) = 1 - e^{-x}$ satisfaz $f' > 0$, $f'' < 0$ em $(0, \infty)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.



11.21 A seguir, $C_{\uparrow}$ indica intervalos de concavidade para cima e $C_{\downarrow}$, para baixo. Cada intervalo é considerado separadamente; os extremos finitos podem ser incluídos quando pertencem ao domínio. Indicamos os pontos de inflexão por suas duas coordenadas.

1. $f'' = 2$. $C_{\uparrow} : \mathbb{R}$; sem inflexões.
2. $f'' = -2$. $C_{\downarrow} : \mathbb{R}$; sem inflexões.
3. $f'' = 6x$. $C_{\downarrow} : (-\infty, 0)$; $C_{\uparrow} : (0, \infty)$; inflexão $(0, 1)$.
4. $f'' = 12x - 6$. $C_{\downarrow} : (-\infty, 1/2)$; $C_{\uparrow} : (1/2, \infty)$; inflexão $(1/2, 9)$.
5. $f'' = x(3x+2)$. $C_{\uparrow} : (-\infty, -2/3)$ e $(0, \infty)$; $C_{\downarrow} : (-2/3, 0)$. Inflexões $(-2/3, 347/81)$ e $(0, 3)$.
6. Ponha $r_{\pm} = (2 \pm \sqrt{7})/3$. Como $f'' = -12(3x^2 - 4x - 1)$, $C_{\uparrow} : (r_-, r_+)$ e $C_{\downarrow} : (-\infty, r_-)$ e (r_+, ∞) . Inflexões $(r_-, (-13 + 80\sqrt{7})/27)$ e $(r_+, (-13 - 80\sqrt{7})/27)$.
7. $f'' = 12(x - 1)^2 \geq 0$. $C_{\uparrow} : \mathbb{R}$; não há inflexão em 1, pois a concavidade não muda.
8. $f'' = 2(3x^2 - 1)/(x^2 + 1)^3$. Com $r = 1/\sqrt{3}$, $C_{\uparrow} : (-\infty, -r)$ e (r, ∞) ; $C_{\downarrow} : (-r, r)$. Inflexões $(\pm r, 3/4)$.
9. $f'' = 2x(x^2 + 3)/(x^2 - 1)^3$. $C_{\uparrow} : (-1, 0)$ e $(1, \infty)$; $C_{\downarrow} : (-\infty, -1)$ e $(0, 1)$. A única inflexão é $(0, 0)$; ± 1 não pertencem ao domínio.
10. $f'' = -\sin x - \cos x$. $C_{\uparrow} : (-\pi, -\pi/4)$ e $(3\pi/4, \pi)$; $C_{\downarrow} : (-\pi/4, 3\pi/4)$. Inflexões $(-\pi/4, 0)$ e $(3\pi/4, 0)$.

11. $f'' = e^x(x^2 + 4x + 2)$. Com $r_{\pm} = -2 \pm \sqrt{2}$, $C_{\uparrow} : (-\infty, r_-)$ e (r_+, ∞) ; $C_{\downarrow} : (r_-, r_+)$.
Inflexões $(r_{\pm}, r_{\pm}^2 e^{r_{\pm}})$.
12. Domínio $(0, \infty)$ e $f'' = 2 \ln x + 3$. $C_{\downarrow} : (0, e^{-3/2})$; $C_{\uparrow} : (e^{-3/2}, \infty)$. Inflexão $(e^{-3/2}, -3/(2e^3))$.
13. $f'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Com $r = 1/\sqrt{2}$, $C_{\uparrow} : (-\infty, -r)$ e (r, ∞) ; $C_{\downarrow} : (-r, r)$. Inflexões $(\pm r, e^{-1/2})$.

11.22 As derivadas segundas são as calculadas no exercício anterior.

1. $f' = 2(x - 1)$. Mínimo em 1, de valor 0, pois $f''(1) = 2$.
2. $f' = -2x - 5$. Máximo em $-5/2$, de valor $53/4$, pois $f'' = -2$.
3. $f' = 3x^2 - 1$. Máximo local em $-1/\sqrt{3}$, de valor $1 + 2/(3\sqrt{3})$; mínimo local em $1/\sqrt{3}$, de valor $1 - 2/(3\sqrt{3})$.
4. $f' = 6x^2 - 6x + 9 = 6(x - 1/2)^2 + 15/2 > 0$. Não há pontos críticos nem extremos relativos.
5. $f' = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$. Único crítico 1, mínimo de valor $19/12$, pois $f''(1) = 5$.
6. $f' = -12(x + 1)(x - 1)(x - 2)$. Máximos locais em -1 e 2 , de valores 21 e -6 , pois $f''(-1) = -72$ e $f''(2) = -36$. Mínimo local em 1 , de valor -11 , pois $f''(1) = 24$.
7. $f' = 4(x - 1)^3$. O teste da segunda derivada é inconclusivo em 1 , mas $f = (x - 1)^4 \geq 0$ mostra que esse ponto é mínimo, de valor 0 .
8. $f' = -2x/(x^2 + 1)^2$. Máximo em 0 , de valor 1 , pois $f''(0) = -2$.
9. $f' = -(x^2 + 1)/(x^2 - 1)^2 < 0$ em seu domínio. Não há pontos críticos.
10. $f' = \cos x - \sin x$. Máximo em $\pi/4$, de valor $\sqrt{2}$, e mínimo em $-3\pi/4$, de valor $-\sqrt{2}$.
11. $f' = e^x x(x + 2)$. Máximo local em -2 , de valor $4/e^2$, pois $f''(-2) = -2/e^2$; mínimo em 0 , de valor 0 , pois $f''(0) = 2$.
12. $f' = x(2 \ln x + 1)$. Único crítico $e^{-1/2}$, mínimo de valor $-1/(2e)$, pois a derivada segunda vale 2 nesse ponto.
13. $f' = -2xe^{-x^2}$. Máximo em 0 , de valor 1 , pois $f''(0) = -2$.

11.23 1. A substituição direta fornece $H(K) = K^2/(2K^2) = 1/2$.

2. Como o denominador é positivo, H'' muda de sinal em $x = K/\sqrt{3}$. O ponto de inflexão é

$$\left(\frac{K}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4} \right).$$

3. Na curva de Boltzmann, meia-ativação e inflexão coincidem. Para esta equação de Hill, a meia-resposta ocorre em $x = K$, depois do ponto de inflexão.

11.24 1. 2.

2. 0.

3. ∞ .

4. ∞ .

5. ∞ .

6. 5.

7. a .

8. 0.

9. 1.

10. 1.

11. ∞ .

12. 0.

13. 0.

14. 0.

15. ∞ .

No item 2 basta substituir $x = 1$: o denominador tende a -2 , de modo que não há indeterminação. No item 7, $a \in \mathbb{R}$. Nos itens 9, 10 e 12, tome o logaritmo da expressão positiva antes de passar ao limite. No item 11, o numerador tende a 1 e o denominador a 0 por valores positivos; L'Hôpital não é necessária.

11.25 1. 3.

2. $-\frac{5}{3}$.

3. -1 .

4. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 5 .

6. 0 .

7. $\frac{2}{3}$.

8. $\frac{a}{b}$.

9. ∞ .

10. $\frac{1}{2}$.

11. 0 .

12. 0 .

13. 0 .

14. ∞ .

15. ∞ .

16. 0 .

17. 2 .

18. -2 .

19. 0 . Assim, $(n \ln n)/n^2 \rightarrow 0$: assintoticamente, o crescimento $n \ln n$ é desprezível em comparação com n^2 .

20. 0 .

21. 0 .

22. 0 .

23. 0 .

24. ∞ .

25. ∞ .

26. 0.

11.26 1. 0.

2. e .

3. 1.

4. 1.

5. 1.

6. 1.

7. 1.

8. 0.

9. 1.

10. 1.

11. 1.

12. 1.

13. 2.

14. $\frac{1}{2}$.

15. $-\infty$.

16. 1.

17. 0.

18. 3.

19. ∞ .

No item 6, a aproximação é pela esquerda de 1, onde $1 - x > 0$ e a potência real está definida.

11.27 Como

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1},$$

$x = 1$ é assíntota vertical e $y = x + 1$ é assíntota oblíqua tanto em $+\infty$ quanto em $-\infty$.

11.28 Temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$. Portanto, $y = 1$ é assíntota horizontal à direita e $y = -1$ é assíntota horizontal à esquerda.

11.29 Na descrição abaixo, $\uparrow$ e $\downarrow$ indicam crescimento e decrescimento; $C_\uparrow$ e $C_\downarrow$ indicam concavidade para cima e para baixo. Intervalos separados são considerados individualmente. Podemos incluir por continuidade os extremos finitos que pertencem ao domínio. Quando uma inflexão é indicada apenas pela abscissa r , o ponto do gráfico é $(r, f(r))$. Salvo indicação em contrário, o domínio é $\mathbb{R}$ e não há assíntotas.

1. $f' = 3x^2 - 4x + 4 > 0$: crescente em toda a reta, sem extremos. Como $f'' = 6x - 4$, $C_\downarrow : (-\infty, 2/3)$ e $C_\uparrow : (2/3, \infty)$; inflexão $(2/3, 83/27)$.
2. $f' = -(x-3)(3x-1)$: decresce em $(-\infty, 1/3)$ e $(3, \infty)$, cresce em $(1/3, 3)$. Mínimo local em $1/3$, de valor $41/27$; máximo local em 3 , de valor 11 . Como $f'' = 10 - 6x$, $C_\uparrow : (-\infty, 5/3)$ e $C_\downarrow : (5/3, \infty)$; inflexão $(5/3, 169/27)$.
3. $f = (x+1)^3$ cresce em toda a reta. O crítico -1 é inflexão estacionária, com valor 0 , e não é extremo. $C_\downarrow : (-\infty, -1)$; $C_\uparrow : (-1, \infty)$.
4. $f' = (x-1)(3x+1)$. Cresce em $(-\infty, -1/3)$ e $(1, \infty)$ e decresce em $(-1/3, 1)$. Máximo local $32/27$ em $-1/3$ e mínimo local 0 em 1 . Como $f'' = 6x - 2$, $C_\downarrow : (-\infty, 1/3)$ e $C_\uparrow : (1/3, \infty)$; inflexão $(1/3, 16/27)$.
5. Domínio $(2, \infty)$. $f' = \ln(x-2) + 1$: decresce até $2 + e^{-1}$ e cresce depois, com mínimo $-e^{-1}$. Como $f'' = 1/(x-2) > 0$, é convexa em todo o domínio e não tem inflexões. O limite em 2^+ é 0 , sem assíntota vertical; o ponto $(2, 0)$ é aberto.
6. Domínio $(2, \infty)$. $f' = (x-2)(2\ln(x-2)+1)$: decresce até $2 + e^{-1/2}$ e cresce depois, com mínimo $-1/(2e)$. $f'' = 2\ln(x-2)+3$: $C_\downarrow : (2, 2 + e^{-3/2})$ e $C_\uparrow : (2 + e^{-3/2}, \infty)$. Inflexão $(2 + e^{-3/2}, -3/(2e^3))$; limite 0 em 2^+ .
7. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f' = 8/x^3$: decresce em $(-\infty, 0)$ e cresce em $(0, \infty)$, sem extremos. Como $f'' = -24/x^4 < 0$, é côncava para baixo em cada ramo, sem inflexões. Assíntotas $x = 0$ e $y = 1$.
8. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. Como

$$f' = -\frac{2(x^2 - 5x + 7)}{(x-2)^2(x-4)^2} < 0,$$

decresce em cada componente e não tem extremos. Seja $r = (5 + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})/2$, a única raiz de $2x^3 - 15x^2 + 42x - 44$, situada em $(2, 4)$. A derivada segunda é

duas vezes esse polinômio dividida por $(x-2)^3(x-4)^3$. Logo, $C_{\uparrow} : (2, r)$ e $(4, \infty)$; $C_{\downarrow} : (-\infty, 2)$ e $(r, 4)$. A única inflexão é $(r, f(r))$. Assíntotas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 1$.

9. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$. Como $f' = -2(x-1)(2x-5)/((x-2)^2(x-4)^2)$, decresce em $(-\infty, 1)$, $(5/2, 4)$ e $(4, \infty)$, e cresce em $(1, 2)$ e $(2, 5/2)$. Mínimo local 0 em 1 e máximo local -3 em $5/2$. Seja $r = (7 - 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9})/4$, a única raiz real de $4x^3 - 21x^2 + 30x - 4$. Temos $r < 1$ e

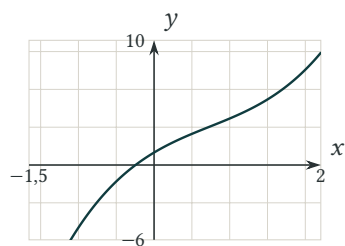
$$f'' = \frac{2(4x^3 - 21x^2 + 30x - 4)}{(x-2)^3(x-4)^3}.$$

Portanto, $C_{\uparrow} : (r, 2)$ e $(4, \infty)$; $C_{\downarrow} : (-\infty, r)$ e $(2, 4)$. A única inflexão é $(r, f(r))$. Assíntotas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 1$.

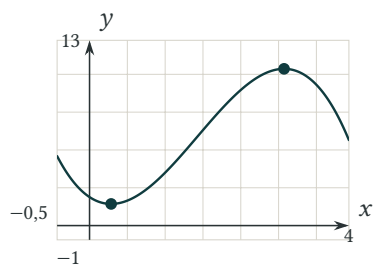
10. Domínio $[-1, \infty)$. $f' = (3x+2)/(2\sqrt{x+1})$: decresce em $(-1, -2/3)$ e cresce em $(-2/3, \infty)$, com mínimo $-2/(3\sqrt{3})$ em $-2/3$. O extremo do domínio -1 é máximo local relativo ao domínio, de valor 0. Como $f'' = (3x+4)/(4(x+1)^{3/2}) > 0$ para $x > -1$, a função é convexa, sem inflexões.
11. $f' = e^x x(x+2)$: cresce em $(-\infty, -2)$ e $(0, \infty)$ e decresce em $(-2, 0)$. Máximo local $4/e^2$ em -2 e mínimo global 0 em 0. Com $r_{\pm} = -2 \pm \sqrt{2}$, temos $C_{\uparrow} : (-\infty, r_-)$ e (r_+, ∞) e $C_{\downarrow} : (r_-, r_+)$. Inflexões $(r_{\pm}, r_{\pm}^2 e^{r_{\pm}})$. Assíntota $y = 0$ apenas quando $x \rightarrow -\infty$.
12. Domínio $[-\pi, \pi]$. Cresce em $(-\pi, -3\pi/4)$, $(-\pi/4, \pi/4)$ e $(3\pi/4, \pi)$; decresce nos dois intervalos restantes. Máximos $1/2$ em $-3\pi/4, \pi/4$ e mínimos $-1/2$ em $-\pi/4, 3\pi/4$. Relativamente ao domínio fechado, $-\pi$ também é mínimo local e π é máximo local, ambos de valor 0. Como $f'' = -2\sin(2x)$, $C_{\uparrow} : (-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, \pi)$ e $C_{\downarrow} : (-\pi, -\pi/2)$ e $(0, \pi/2)$. Inflexões em $-\pi/2, 0, \pi/2$, de ordenada 0.
13. $f' = 2/(3\sqrt[3]{x-3})$ para $x \neq 3$. Decresce até 3 e cresce depois; mínimo global 2 no ponto não diferenciável 3. A derivada segunda é negativa nos dois lados: côncava para baixo em $(-\infty, 3)$ e $(3, \infty)$, sem inflexão.
14. $f' = 6x(x^2-1)^2$: decresce em $(-\infty, 0)$ e cresce em $(0, \infty)$. Mínimo global -1 em 0; os críticos ± 1 não são extremos. Como $f'' = 6(x^2-1)(5x^2-1)$, $C_{\uparrow} : (-\infty, -1)$, $(-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e $(1, \infty)$; $C_{\downarrow} : (-1, -1/\sqrt{5})$ e $(1/\sqrt{5}, 1)$. Inflexões $(\pm 1, 0)$ e $(\pm 1/\sqrt{5}, -64/125)$.
15. $f' = 2/\sqrt[3]{x}-1$ para $x \neq 0$. Decresce em $(-\infty, 0)$ e $(8, \infty)$, e cresce em $(0, 8)$. Mínimo local 0 em 0 e máximo local 4 em 8. Como $f'' = -2/(3x^{4/3}) < 0$, é côncava para baixo em cada lado de 0, sem inflexões.
16. Domínio $[-2, \infty)$. $f' = 3\sqrt{x+2}/2 > 0$ para $x > -2$: crescente, com mínimo global 1 no extremo -2 . Como $f'' = 3/(4\sqrt{x+2}) > 0$, é convexa, sem inflexões.

Esboços dos itens, na mesma ordem do enunciado.

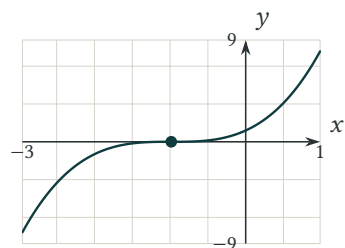
Item 1



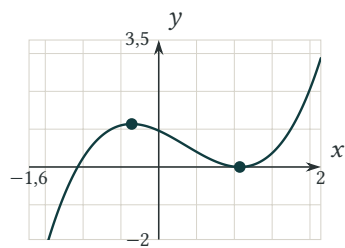
Item 2



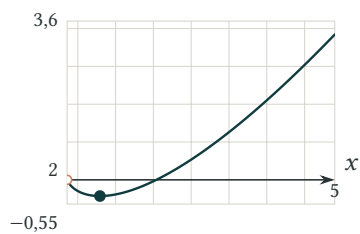
Item 3



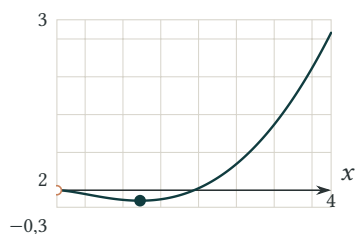
Item 4



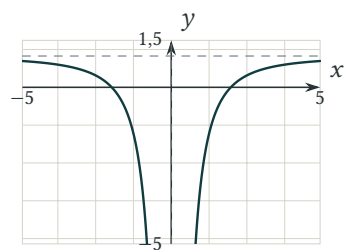
Item 5



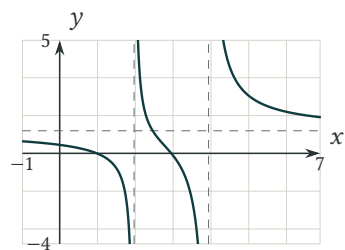
Item 6



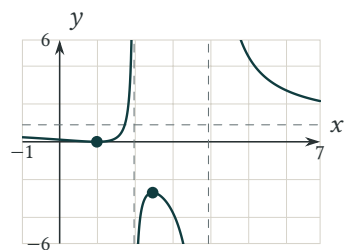
Item 7



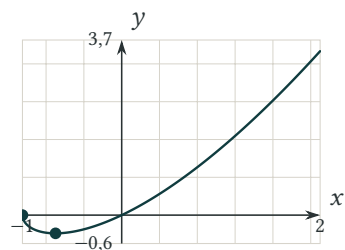
Item 8



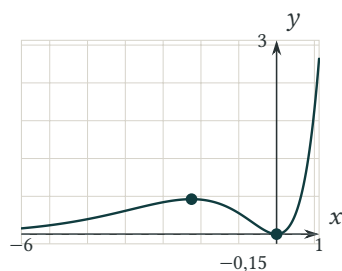
Item 9



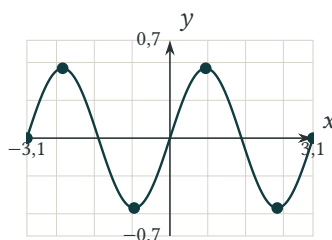
Item 10



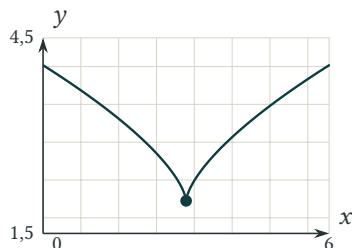
Item 11



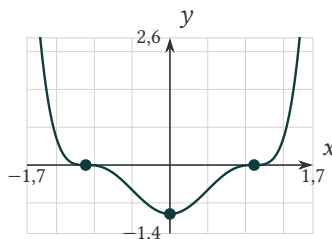
Item 12



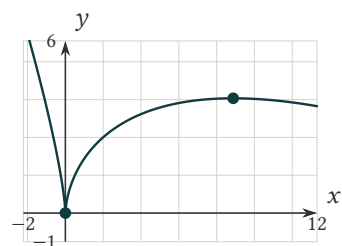
Item 13



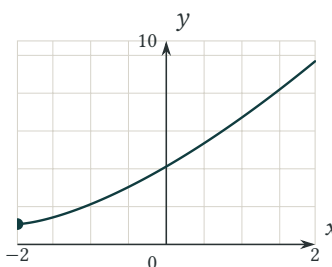
Item 14



Item 15



Item 16



11.30 Os esboços ao final usam as informações abaixo. As abreviações $C_{\uparrow}$ e $C_{\downarrow}$ têm o mesmo sentido do exercício anterior. Cada intervalo é considerado separadamente; $k \in \mathbb{Z}$ nas fórmulas periódicas.

1. $f' = 1 - \sin x \geq 0$ e só se anula em pontos isolados, portanto f cresce em toda a reta, sem extremos. $f'' = -\cos x$: $C_{\uparrow} : (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$ e $C_{\downarrow} : (-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$. Inflexões $(\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$. Não há assíntota oblíqua: $f(x) - x = \cos x$ não possui limite no infinito.
2. Domínio $\mathbb{R}$. Para $x \neq 0$, $f' = 4(x + 1)/(3x^{2/3})$. Decresce até -1 e cresce depois, com mínimo global -3 . O crítico 0 não é extremo. Como $f'' = 4(x - 2)/(9x^{5/3})$, $C_{\uparrow} : (-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$; $C_{\downarrow} : (0, 2)$. Inflexões $(0, 0)$ e $(2, 6\sqrt[3]{2})$. Zeros -4 e 0 ; sem assíntotas.
3. Domínio $\mathbb{R}$, função par. $f' = 4x^3/(x^4 + 27)$: decresce até 0 e cresce depois; mínimo $\ln 27$. Como

$$f'' = \frac{4x^2(81 - x^4)}{(x^4 + 27)^2},$$

temos $C_{\uparrow} : (-3, 3)$ e $C_{\downarrow} : (-\infty, -3)$ e $(3, \infty)$. Inflexões $(\pm 3, \ln 108)$; 0 não é inflexão. Sem assíntotas.

4. Domínio $(0, e)$. $f' = -1/[x(1 - \ln x)] < 0$: decrescente, sem extremos. Como $f'' = -\ln x/[x^2(1 - \ln x)^2]$, $C_{\uparrow} : (0, 1)$ e $C_{\downarrow} : (1, e)$; inflexão $(1, 0)$. Assíntotas $x = 0$ e $x = e$, com limites $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente.

5. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A função cresce em cada ramo, pois $f' = e^{-1/(x+1)}/(x+1)^2 > 0$. Como $f'' = -(2x+1)e^{-1/(x+1)}/(x+1)^4$, $C_{\uparrow} : (-\infty, -1)$ e $(-1, -1/2)$; $C_{\downarrow} : (-1/2, \infty)$. Inflexão $(-1/2, e^{-2})$. Assíntotas $y = 1$ nas duas extremidades e $x = -1$ pelo lado esquerdo; pelo lado direito, o limite em -1 é 0.

6. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$; período π . Temos $f' = 4/\sin(2x)$: cresce em $(k\pi, k\pi + \pi/2)$ e decresce em $(k\pi - \pi/2, k\pi)$, sem extremos. Como $f'' = -8\cos(2x)/\sin^2(2x)$, em cada período $C_{\downarrow} : (k\pi, k\pi + \pi/4)$ e $(k\pi + 3\pi/4, k\pi + \pi)$; $C_{\uparrow} : (k\pi + \pi/4, k\pi + \pi/2)$ e $(k\pi + \pi/2, k\pi + 3\pi/4)$. Inflexões $(\pi/4 + k\pi/2, 0)$. Assíntotas verticais em todos os pontos excluídos; limite $-\infty$ em $k\pi$ e $+\infty$ em $\pi/2 + k\pi$.

7. Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Ponha $r_{\pm} = 1 \pm \sqrt{10}$. Como $f' = e^x(x^2 - 2x - 9)/(x^2 - 9)^2$, cresce em $(-\infty, -3)$, $(-3, r_-)$ e (r_+, ∞) , e decresce em $(r_-, 3)$ e $(3, r_+)$. Máximo local em r_- e mínimo local em r_+ , com valores $e^{r_{\pm}}/(2r_{\pm})$. Além disso,

$$f'' = \frac{e^x((x^2 - 2x - 9)^2 + 2x^2 + 18)}{(x^2 - 9)^3}.$$

Portanto, $C_{\uparrow} : (-\infty, -3)$ e $(3, \infty)$; $C_{\downarrow} : (-3, 3)$; sem inflexões. Assíntotas $x = \pm 3$ e $y = 0$ apenas em $-\infty$.

8. Domínio $(-\pi/2, \pi/2)$, função par. $f' = \operatorname{tg} x + x \sec^2 x$ tem o sinal de x , logo há mínimo global 0 em 0. Como $f'' = 2\sec^2 x(1 + x \operatorname{tg} x) > 0$, é convexa, sem inflexões. Assíntotas $x = \pm\pi/2$, com limites $+\infty$.

9. Domínio $\mathbb{R}$, função par de período 2π . $f' = -e^{\cos x} \sin x$: decresce em $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ e cresce em $((2k-1)\pi, 2k\pi)$. Máximos e em $2k\pi$ e mínimos e^{-1} em $(2k+1)\pi$. Escreva $\alpha = \arccos((\sqrt{5}-1)/2)$. Como $f'' = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$, $C_{\downarrow} : (2k\pi - \alpha, 2k\pi + \alpha)$ e $C_{\uparrow} : (2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha)$. Inflexões em $2k\pi \pm \alpha$, de valor $e^{(\sqrt{5}-1)/2}$. Sem assíntotas.

10. Domínio $(-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$, função par. $f' = -\sin x/(1 - \cos x)^2$: cresce em $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 2\pi)$ e decresce em $(-2\pi, -\pi)$ e $(0, \pi)$. Mínimos $1/2$ em $\pm\pi$. Como $f'' = (2 + \cos x)/(1 - \cos x)^2 > 0$, é convexa em cada componente, sem inflexões. Assíntotas $x = -2\pi, 0, 2\pi$, com limites $+\infty$ pelos lados do domínio.

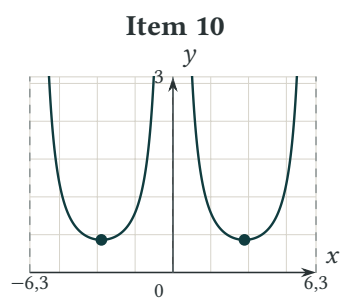
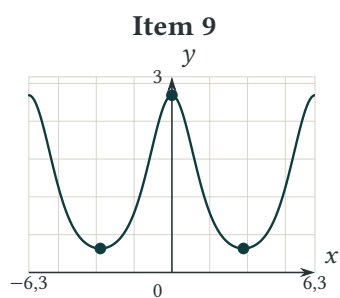
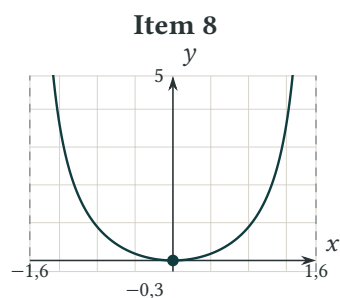
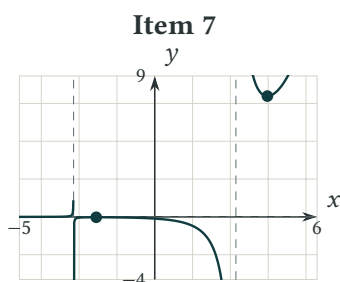
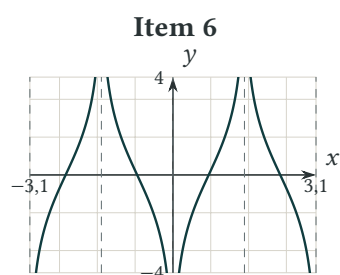
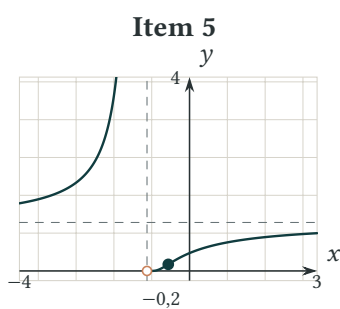
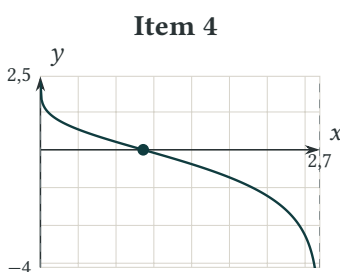
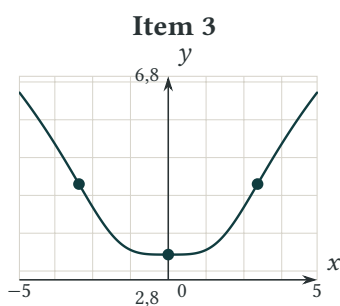
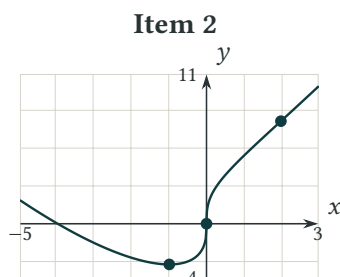
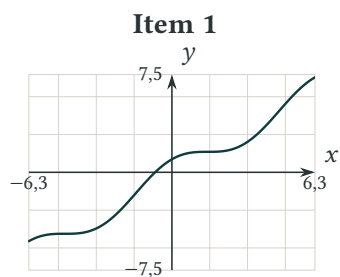
11. Domínio $\mathbb{R}$, função ímpar. Para $t \neq \pm 2$,

$$f'(t) = \frac{5t^2 - 12}{3\sqrt{(t^2 - 4)^2}}, \quad f''(t) = \frac{2t(5t^2 - 36)}{9\sqrt{(t^2 - 4)^5}}.$$

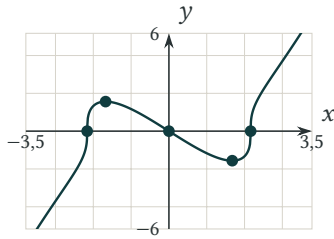
Ponha $r = \sqrt{12/5}$ e $s = 6/\sqrt{5}$. Cresce em $(-\infty, -r)$ e (r, ∞) , inclusive através das tangentes verticais em ± 2 , e decresce em $(-r, r)$. Máximo local $r\sqrt[3]{8/5}$ em $-r$ e mínimo local $-r\sqrt[3]{8/5}$ em r . Temos $C_{\uparrow} : (-s, -2)$, $(0, 2)$ e (s, ∞) ; $C_{\downarrow} : (-\infty, -s)$,

$(-2, 0)$ e $(2, s)$. Inflexões em $-s, -2, 0, 2, s$, com ordenadas dadas por f ; nos pontos ± 2 a continuidade e a mudança de concavidade bastam, embora a derivada não exista. Zeros $-2, 0, 2$; sem assíntotas.

Esboços dos itens, na mesma ordem do enunciado.



Item 11



11.31 1. Se $b \neq 0$ e $a \neq 0$, o único ponto crítico é 0, com valor a/b^2 , e as inflexões são $(\pm|b|/\sqrt{3}, 3a/(4b^2))$. Isso segue de $f' = -2ax/(x^2 + b^2)^2$ e $f'' = 2a(3x^2 - b^2)/(x^2 + b^2)^3$. Se $b = 0$ e $a \neq 0$, o domínio exclui 0, e não há pontos críticos nem inflexões. Se $a = 0$, a função é constante em seu domínio: todo ponto do domínio é crítico e não há inflexões; quando também $b = 0$, o ponto 0 continua excluído.

2. Se $a \neq 0$, os críticos são $x = (\pi/2 + k\pi - b)/a$, com valores $(-1)^k$, e as inflexões são $((k\pi - b)/a, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $a = 0$, a função é constante: todos os pontos são críticos e não há inflexões.

3. $f' = 2x - a - b$ e $f'' = 2$. O único crítico é $(a + b)/2$, mínimo de valor $-(a - b)^2/4$; não há inflexões.

11.32 Se os lados são x e y , então $2x + 2y = 100$, isto é, $y = 50 - x$. Logo,

$$A(x) = x(50 - x), \quad 0 \leq x \leq 50.$$

Como $A'(x) = 50 - 2x$, o único ponto crítico interior é $x = 25$. Comparando com os extremos, $A(0) = A(50) = 0$ e $A(25) = 625$. Portanto, o cercado ótimo é um quadrado de lado 25 m, com área 625 m^2 .

11.33 Se os lados são u, v , a diagonal mede 2, logo $u^2 + v^2 = 4$. Assim, $uv \leq (u^2 + v^2)/2 = 2$, com igualdade quando $u = v = \sqrt{2}$. O retângulo ótimo é um quadrado de lado $\sqrt{2}$ e área 2.

11.34 Se os catetos são $u, v > 0$, temos $u^2 + v^2 = 1$ e $A = uv/2 \leq (u^2 + v^2)/4 = 1/4$. A igualdade ocorre no triângulo retângulo isósceles, com catetos $1/\sqrt{2}$.

11.35 Suponha custo constante por unidade de área e $V > 0$. A área de metal é $A = \pi r^2 + 2\pi rh$ e o volume impõe $h = V/(\pi r^2)$. Logo, $A(r) = \pi r^2 + 2V/r$ e $A'(r) = 2\pi r - 2V/r^2$. A função decresce até $r = (V/\pi)^{1/3}$ e cresce depois. Portanto, $r = h = (V/\pi)^{1/3}$, em centímetros.

11.36 Na construção indicada, a altura é x , e os lados da base medem $6 - x$ e $12 - 2x$, em centímetros. Assim,

$$V(x) = x(6 - x)(12 - 2x) = 2x(6 - x)^2, \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Como $V'(x) = 6(x - 2)(x - 6)$, o volume cresce até $x = 2$ e decresce de 2 a 6. O máximo é 64 cm^3 , obtido com altura 2 cm e base $4 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$.

11.37 Durante o intervalo Δt , o soldado que ainda estava no primeiro terreno percorre

$$BC = v_1 \Delta t,$$

enquanto o que já entrou no segundo percorre

$$AD = v_2 \Delta t.$$

Como a direção de marcha é perpendicular à frente da fileira, os triângulos ABC e ACD são retângulos. A geometria fornece

$$\sin \theta_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 \Delta t}{AC}, \quad \sin \theta_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 \Delta t}{AC}.$$

Eliminando AC e Δt , obtemos

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

Se $v_2 < v_1$, então $\sin \theta_2 < \sin \theta_1$ e, para ângulos entre 0 e $\pi/2$, temos $\theta_2 < \theta_1$: a fileira gira em direção à normal. É exatamente a mesma relação geométrica que apareceu na lei de Snell.

11.38 Temos

$$R'(\theta) = \frac{2v_0^2}{g} \cos(2\theta).$$

O único ponto crítico interior é $\theta = \pi/4$. Como o alcance é zero nos dois extremos e positivo no interior, esse ponto fornece o máximo: $R_{\max} = v_0^2/g$.

11.39 Como $G'(P) = r(1 - 2P/K)$ e $G''(P) = -2r/K < 0$, o máximo ocorre em $P = K/2$. Seu valor é $G(K/2) = rK/4$.

11.40 Ponha $s = \sqrt{1 + F_0/a}$. Da relação dada,

$$F(v) = \frac{bF_0 - av}{v + b}, \quad P(v) = \frac{v(bF_0 - av)}{v + b}, \quad 0 \leq v \leq \frac{bF_0}{a}.$$

A derivada tem o mesmo sinal de $b^2F_0 - av^2 - 2abv$. Seu único zero positivo é

$$v_* = b(s - 1).$$

A potência cresce antes e decresce depois desse ponto. Substituindo na relação de Hill, obtemos

$$F_* = a(s - 1), \quad P_{\max} = ab(s - 1)^2.$$

11.41 Temos

$$J'(d) = 2Ad - \frac{B}{2}d^{-3/2}.$$

Logo, o único ponto crítico é

$$d_* = \left(\frac{B}{4A}\right)^{2/5}.$$

Como $J''(d) = 2A + (3B/4)d^{-5/2} > 0$ para $d > 0$, esse ponto é o único mínimo global.

11.42 1. $h = x - 1: P_2 = h - \frac{h^2}{2}.$

2. $h = x: P_2 = 1 + h + \frac{h^2}{2}.$

3. $h = x: P_2 = h.$

4. $h = x: P_2 = 1 - \frac{h^2}{2}.$

5. $h = x: P_2 = h.$

6. $h = x: P_2 = 1 + \frac{h^2}{2}.$

7. $h = x - 1: P_2 = 1 + \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9}.$

8. $h = x - 4: P_2 = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64}.$

9. $h = x: P_2 = 1 + h^2.$

11.43 Usamos os centros do exercício anterior e a estimativa $|E_2(x)| \leq M|x - a|^3/6$, demonstrada adiante no teorema do resto de Lagrange.

1. $\ln(1,2) \approx 0,18$. Como $f'''(t) = 2/t^3 \leq 2$ em $[1, 1,2]$, $0 < E_2 \leq 1/375 \approx 0,002667$.

2. $\sqrt{3,8} \approx 2 - 0,2/4 - 0,2^2/64 = 1,949375$. Como $f'''(t) = 3/(8t^{5/2})$, temos $|E_2| \leq 0,0005/(3,8)^{5/2} < 0,0000178$.

3. $\sin(0,1) \approx 0,1$, com $|E_2| \leq 0,1^3/6 = 1/6000$.

4. $\sin(\pi/25) \approx \pi/25 \approx 0,1256637$, com $|E_2| \leq \pi^3/93750 < 0,000331$.

5. $e^{0,003} \approx 1 + 0,003 + 0,003^2/2 = 1,0030045$, com $0 < E_2 \leq e^{0,003}(0,003)^3/6 < 4,514 \cdot 10^{-9}$.

11.44 1. $h = x - 1: P_5 = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5}.$

2. $h = x: P_5 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + \frac{h^5}{120}.$

3. $h = x: P_5 = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120}.$

4. $h = x: P_5 = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}.$

5. $h = x: P_5 = h + \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120}.$

$$6. h = x: P_5 = 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24}.$$

$$7. h = x - 1: P_5 = 1 + h - h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{6} - \frac{3h^5}{4}.$$

$$8. h = x - 4: P_5 = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + \frac{h^3}{512} - \frac{5h^4}{16384} + \frac{7h^5}{131072}.$$

$$9. P_5(x) = \sum_{k=0}^5 \binom{\alpha}{k} x^k, \text{ com } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

No item 7, o índice da raiz é a própria variável: $\sqrt{x} = x^{1/x}$ para $x > 0$. No item 9, os coeficientes também podem ser escritos como $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)/k!$ para $k \geq 1$.

11.45 São necessários nove termos, de $1/0!$ até $1/8!$. O resto satisfaz $0 < E_8(1) < 3/9! < 10^{-5}$. Oito termos não bastam, pois $E_7(1) > 1/8! > 10^{-5}$; somas anteriores têm erro ainda maior, porque todos os termos omitidos são positivos.

11.46 O polinômio de ordem 7 coincide com o de ordem 6:

$$P_7(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

Como $|f^{(8)}| = |\cos| \leq 1$, o erro em 1 é no máximo $1/8! < 10^{-4}$. Portanto,

$$\cos 1 \approx P_7(1) = \frac{389}{720} \approx 0,5402778.$$

11.47 Temos $P_4(x) = 1 - 2x^2 + (2/3)x^4$ e $\cos(2x) = P_4(x) + E_4(x)$, com $E_4(x)/x^4 \rightarrow 0$. Logo,

$$\frac{1 - \cos(2x)}{3x^2} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x^2 - \frac{E_4(x)}{3x^2} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

11.48 $f' = 3(x + 1)(x - 3)$: a função cresce em $(-\infty, -1)$ e $(3, \infty)$ e decresce em $(-1, 3)$. Há máximo local em $(-1, 7)$ e mínimo local em $(3, -25)$. Como $f'' = 6(x - 1)$, a concavidade é para baixo em $(-\infty, 1)$ e para cima em $(1, \infty)$, com inflexão em $(1, -9)$.

11.49 Os candidatos são $x = 2$ e os extremos $1/2$ e 6 . Como $f(1/2) = 17/2$, $f(2) = 4$ e $f(6) = 20/3$, o máximo absoluto é $17/2$ em $x = 1/2$ e o mínimo absoluto é 4 em $x = 2$. O teorema dos extremos exige comparar também os extremos do intervalo fechado.

11.50 Se a região impressa mede x por y , então $xy = 432$ e a área do papel é

$$A(x) = (x + 6)(432/x + 8) = 480 + 8x + 2592/x.$$

Seu mínimo ocorre em $x = 18$ cm, quando $y = 24$ cm. Logo, o papel deve medir $24 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$.

11.51 $L(q) = R(q) - C(q) = -0,4q^2 + 102q - 900$. O vértice ocorre em $q = 127,5$ e fornece $L_{\max} = R\$ 5\,602,50$. Se q precisar ser inteiro, 127 e 128 devem ser comparados; ambos dão $R\$ 5\,602,40$.

11.52 No primeiro limite, duas aplicações de L'Hôpital dão $\lim 4e^{2x}/2 = 2$. No segundo, uma aplicação fornece $\lim_{x \rightarrow \infty} 2/\sqrt{x} = 0$.

11.53 $T'(x) = 7e^{-x/4}(1 - x/4)$, logo a temperatura máxima ocorre a 4 m do conector e vale $20 + 28/e \approx 30,30^\circ\text{C}$. Quando $x \rightarrow \infty$, $T(x) \rightarrow 20^\circ\text{C}$.

11.54 $P_2(x) = (x - 1) - (x - 1)^2/2$. Portanto, $\ln(1,06) \approx 0,06 - 0,06^2/2 = 0,0582$.

11.55 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ e $f^{(3)}(0) = -6$. Assim, $P_3(x) = x^2 - x^3$.

11.56 Se $x_1 < x_2$, o Teorema do Valor Médio fornece $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. Logo, $f(x_2) > f(x_1)$ e dois pontos distintos não podem ter a mesma imagem.

12.1 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

1. $\frac{x^2}{2} + C$.

2. $\frac{3}{2}x^2 + x + C$.

3. $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

4. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$.

5. $-\frac{1}{x} + C$.

6. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + C$.

7. $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$.

8. $\frac{7}{3}x^{9/7} + \sin x + C$.

9. $\frac{1}{4}e^{4x} + C$.

10. $\frac{1}{3}\sin(3x) + C$.

$$11. \frac{x^2}{2} + \frac{3}{5}e^{5x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C.$$

$$12. x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x) - 7\cos(x/7) + C.$$

$$13. \operatorname{arcsen} x + C.$$

$$14. \operatorname{arctg} x + C.$$

$$15. \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

$$16. \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x) + C.$$

$$17. \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C.$$

No item 3, a fórmula exibida requer $n \neq -1$ e $x > 0$ para expoente real arbitrário; para $n = -1$, a resposta é $\ln|x| + C$, em cada lado de 0. Nos itens 7 e 8, as potências com denominadores ímpares designam raízes reais; as fórmulas também valem para $x < 0$ e estendem-se a 0. No item 17, usamos $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

12.2 1. $(0, \infty)$.

2. $1/x$, para $x > 0$.

3. $(-\infty, 0)$.

4. Pela regra da cadeia, $(\ln(-x))' = (-1)/(-x) = 1/x$, para $x < 0$.

5. Em cada um dos dois intervalos, $\int (1/x) dx = \ln|x| + C$. Para descrever todas as primitivas no domínio desconexo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos escolher constantes independentes C_- para $x < 0$ e C_+ para $x > 0$.

12.3 1. No item 9, use $u = 4x$.

2. No item 10, use $u = 3x$.

3. No item 11, a parcela polinomial é direta; nas demais, use $u = 5x$ e $u = 2x$.

4. No item 12, a constante integra diretamente; nas parcelas trigonométricas, use $u = 4x$ e $u = x/7$.

5. No item 16, use $u = 2x$.

12.4 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

$$1. \frac{(x^4 + 3)^7}{7} + C.$$

$$2. \frac{(3x^2 + 2x - 4)^5}{5} + C.$$

$$3. \frac{(x^2 + 4)^8}{16} + C.$$

$$4. \frac{(5x^2 + 21x + 2)^5}{5} + C.$$

$$5. \frac{(2x^3 + 5x^2 + 1)^8}{8} + C.$$

$$6. -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$7. \frac{\cos(5 - 2x)}{2} + C.$$

$$8. \cotg(3 - x) + C.$$

$$9. \frac{1}{5} \ln |5x + 3| + C.$$

$$10. \frac{2}{3} \sqrt{3x + 1} + C.$$

$$11. \frac{2}{3} (x + 5)^{3/2} - 10\sqrt{x + 5} + C.$$

$$12. -\frac{1}{6(x^3 + 5)^2} + C.$$

$$13. -\sqrt{4 - x^2} + C.$$

$$14. \frac{1}{3} \ln |\sec(3x) + \tg(3x)| + C.$$

$$15. \frac{2}{9} x^{9/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} + C.$$

$$16. e^{2\sqrt{x}} + C.$$

$$17. \frac{2}{5} \sqrt{x^5 + 3} + C.$$

$$18. -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + C.$$

$$19. \frac{1}{2} (\ln(2x))^2 + C.$$

$$20. -\frac{\cotg^3 x}{3} + C.$$

$$21. \ln|x+8| + C.$$

$$22. \frac{5}{2} \ln|2x+9| + C.$$

$$23. -\frac{\cos(x^2)}{2} + C.$$

$$24. \frac{1}{3} \operatorname{tg}(x^3+4) + C.$$

$$25. -\cotg(x) - x + C.$$

$$26. \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2}(x) + C.$$

$$27. \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(x^4+1) + C \text{ (substitua } u = \operatorname{sen}(x^4+1)).$$

$$28. \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x^2) + C \text{ (substitua } u = \operatorname{tg}(x^2)).$$

$$29. \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} - \sqrt{x^2+1} + C \text{ (escreva } x^3 = x[(x^2+1)-1] \text{ antes de substituir).}$$

12.5 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

$$1. \frac{1}{4} e^{4x+1} + C.$$

$$2. \frac{1}{4} e^{x^4} + C.$$

$$3. \frac{1}{2} e^{(x-2)^2} + C.$$

$$4. x - 3e^{-x} + C.$$

$$5. -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-4x} + C.$$

$$6. \frac{5^{2x}}{2 \ln 5} + C.$$

$$7. \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C.$$

$$8. \frac{1}{8} (\ln x)^2 + C.$$

$$9. \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

$$10. \frac{5}{2}(\ln x)^2 + C.$$

$$11. \frac{1}{3} \ln |\ln(x^3)| + C.$$

$$12. \frac{x^2}{2} + 5x + 2 \ln |x| + C.$$

$$13. \frac{x^3}{3} + x^2 + x + 3 \ln |x| + C.$$

$$14. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

$$15. \frac{x^2}{2} + 5x + 6 \ln |x - 2| + C.$$

$$16. x^2 - 7x + 19 \ln |x + 2| + C.$$

$$17. \ln |x + 2| + C.$$

$$18. x^2 - x + 3 \ln(x^2 + 2x + 4) + C.$$

$$19. 4 \ln(x^2 + 6x + 11) + C.$$

$$20. 3 \ln |3x^2 + 10x + 21| + C.$$

$$21. -\frac{x^2}{2} + 5x + 15 \ln(x^2 - 5x + 10) + C.$$

$$22. 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

$$23. 4 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right) + C.$$

$$24. 12 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

$$25. \frac{3}{4} \arccos\left(\frac{4}{|x|}\right) + C.$$

$$26. \frac{7}{5} \arccos\left(\frac{5}{|x|}\right) + C.$$

$$27. \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C \text{ (substitua } u = 1 + e^{2x}).$$

28. $\ln|x \ln x| + C$ (separe em $\frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x}$ antes de integrar).

12.6 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

1. $\frac{1}{2} \arcsen(3x^2) + C.$

2. $\frac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{4}\right) + C.$

3. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{2}\right) + C.$

4. $\arccos\left(\frac{1}{3|x|}\right) + C.$

5. $\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{2x}{5}\right) + C.$

6. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$

7. $4 \arcsen\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$

8. $5 \arcsen\left(\frac{x-5}{6}\right) + C.$

9. $\frac{7}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+4}{5}\right) + C.$

10. $\frac{5}{2} \ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{7}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$

11. $-\frac{3}{2} \ln(x^2 + 8x + 41) + \frac{21}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+4}{5}\right) + C.$

12. $x + \frac{9}{2} \ln(x^2 - 6x + 15) + \frac{5}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{\sqrt{6}}\right) + C.$

13. $\frac{x^2}{2} - 8 \ln(x^2 + 16) + C.$

14. $\frac{x^2}{2} - 2x - 4 \ln(x^2 + 2x + 10) + \frac{28}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.$

15. $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos x) + C.$

16. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{sen} x) + C.$

17. $-\sec x + C.$

18. $5\sqrt{x^2 - 4x - 1} + C.$

19. $\sqrt{x^2 - 8x + 10} + C.$

20. $\frac{1}{4} \arcsen(x^4) + C$ (substitua $u = x^4$).

21. $\frac{x^3}{3} - x + 2 \operatorname{arctg}(x) + C$ (divida antes: $\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$).

22. $\ln |\sen x| + C.$

23. $\ln |\operatorname{cossec} x - \cotg x| + C.$

24. $-\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$

25. $\ln(1 + e^x) + C.$

26. $-\frac{1}{5} \cos(5x + 1) + C.$

12.7 Uma escolha natural é, respectivamente: $u = x^3$, $dv = e^x dx$; $u = x$, $dv = \cos(2x) dx$; e $u = \ln x$, $dv = dx$.

12.8

$$\int x \cos(2x) dx = \frac{x}{2} \sen(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C.$$

12.9

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

12.10 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

1. $-x \cos x + \sen x + C.$

2. $-(x + 1)e^{-x} + C.$

3. $-x^2 \cos x + 2x \sen x + 2 \cos x + C.$

4. $-x^3 \cos x + 3x^2 \sen x + 6x \cos x - 6 \sen x + C.$

5. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C.$

$$6. e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$$

$$7. -\frac{1}{4}(2x + 1)e^{-2x} + C.$$

$$8. \frac{1}{5}e^{2x}(2 \cos x + \operatorname{sen} x) + C.$$

$$9. \frac{1}{13}e^{2x}(2 \operatorname{sen}(3x) - 3 \cos(3x)) + C.$$

$$10. \frac{1}{10}e^{5x}(\cos(5x) + \operatorname{sen}(5x)) + C.$$

$$11. \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C.$$

$$12. x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$13. x \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C.$$

$$14. \frac{1}{2}(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

$$15. x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$16. x \operatorname{senh} x - \cosh x + C.$$

$$17. x \cosh x - \operatorname{senh} x + C.$$

$$18. \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$19. \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} + 2x + C.$$

$$20. \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x - 1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C.$$

$$21. \frac{x^2}{2} \ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$22. \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

$$23. x((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + C.$$

$$24. (x + 1)((\ln(x + 1))^2 - 2 \ln(x + 1) + 2) + C.$$

$$25. x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$$

26. $-x \cotg x + \ln |\sen x| + C.$

Os itens 12 e 15 retomam a mesma integral: no segundo, pode-se conferir diretamente a primitiva por diferenciação. Nos itens 5 e 11, uma substituição simples resolve o cálculo mesmo estando o exercício na seção de integração por partes.

12.11 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

1. $x \tg x + \ln |\cos x| + C.$

2. $x \tg x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$

3. $-x \cotg x + \ln |\sen x| - \frac{x^2}{2} + C.$

4. $-\operatorname{cosec} x + C.$

12.12 As fórmulas valem em cada intervalo do domínio real do integrando. A constante pode ser diferente em componentes distintos.

1. $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sen(\ln x)) + C.$

2. $2\sqrt{x} \sen(\sqrt{x}) + 2 \cos(\sqrt{x}) + C.$

3. $\frac{x}{3}(\ln x - 1) + C.$

4. $\frac{2}{3}\sqrt{x} e^{3\sqrt{x}} - \frac{2}{9}e^{3\sqrt{x}} + C.$

5. $\ln x + C.$

As substituições dos itens 1, 2 e 4 são $u = \ln x$, $u = \sqrt{x}$ e $u = \sqrt{x}$, respectivamente. No item 3, $\ln(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \ln x$; no item 5, $e^{-\ln x} = 1/x$, sempre com $x > 0$.

12.13 $x^6 + 2/x^2 + 3 \sen x - 2e^x + C$, em cada intervalo que não contém 0. A derivada dessa expressão é o integrando dado.

12.14 $s(t) = t^3 - 4t^2 + 6t + 14$. A constante 14 é a posição inicial $s(0)$.

12.15 Com $u = 5 - x^2$ e $du = -2x \, dx$,

$$\int x\sqrt{5-x^2} \, dx = -\frac{1}{3}(5-x^2)^{3/2} + C.$$

12.16 Escreva $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$ e faça $u = \cos x$. Então

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

12.17

$$Q(t) = 250 + 40t + \frac{72}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi t}{6}\right) \quad \text{litros.}$$

12.18 Escolhendo $u = \ln(x+1)$ e $dv = x \, dx$, o logaritmo é simplificado ao derivar.

Para $x > -1$,

$$\int x \ln(x+1) \, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) + C.$$

12.19 Integração por partes ($u = x^n$, $dv = e^{2x} \, dx$) fornece $K_n = \frac{x^n e^{2x}}{2} - \frac{n}{2} K_{n-1}$.

Portanto, $K_2 = \frac{e^{2x}}{4} (2x^2 - 2x + 1) + C$.

12.20 Calcule a derivada de cada expressão e verifique se ambas coincidem com o integrando dado. Se isso ocorre, a derivada da diferença é zero; portanto, em cada intervalo do domínio, as duas primitivas diferem por uma constante. Por exemplo, $x^2/2$ e $(x^2 + 1)/2$ são primitivas de x e diferem pela constante $1/2$.

12.21 1. $x(t) = t^2 - t + 2$.

2. $x(t) = \arctg t$.

3. $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + 1$.

4. $x(t) = e^{-t} + t$.

5. $x(t) = t + \frac{1 - \cos(3t)}{9}$.

12.22 1. $f(x) = \frac{5}{2}x^2 - x + 3$.

2. $f(x) = \sin x - 2$.

3. $f(x) = 3e^x - 2$.

4. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5$.

5. $f(x) = 3 - \cotg x$.

6. $f(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + 2 - \frac{3}{\ln 3}$.

7. $f(x) = 4x^2 + 3x + 5$.

8. $f(x) = 2x^3 - 2x + 4$.

9. $f(x) = 3e^x - 2x - 1$.

10. $f(\theta) = -\cos \theta + \theta + 4$.

11. $f(x) = x^3 + \frac{3^x - 1}{(\ln 3)^2} + \sin x + \left(3 - \frac{1}{\ln 3}\right)x$.

12. $f(x) = 5x - 9$.

13. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$ (substitua $u = x^2$).

14. $f(x) = x - \ln x + 1$.

12.23 $v(5) = 13 \text{ m/s}$ e $x(5) = 44 \text{ m}$.

12.24 $a = -4 \text{ m/s}^2$ e o deslocamento é 100 m .

12.25 A velocidade é $v(t) = 19,6 - 9,8t$, portanto o máximo ocorre em $t = 2 \text{ s}$. A altura é

$$y(2) = 5 + 19,6(2) - 4,9(2)^2 = 24,6 \text{ m}.$$

13.1 Como $\Delta x = 1/2$, obtemos $L_4 = 3/2$, $R_4 = 5/2$ e $M_4 = 2$. Como $\int_0^2 x \, dx = 2$, a soma de pontos médios é exata; a soma esquerda subestima e a direita superestima.

13.2 A soma esquerda é menor ou igual à soma direita, pois em cada subintervalo $f(x_{i-1}) \leq f(x_i)$.

13.3 Com $h = 2 \text{ s}$,

$$S_4 = \frac{2}{3}[120 + 4(150 + 132) + 2(138) + 110] = \frac{3268}{3} \approx 1089,33 \text{ J}.$$

13.4 Usando os cinco valores de e^{-x^2} nos pontos indicados,

$$T_4 \approx 0,880619, \quad S_4 \approx 0,881812.$$

Os resultados são próximos. O integrando e^{-x^2} não possui primitiva elementar, por isso são usados métodos numéricos.

13.5 Os comprimentos são $1/4$ e $3/4$. Portanto,

$$R_{f,P,C} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{49}{256}, \quad |P| = \frac{3}{4}.$$

13.6 Para toda partição e toda escolha de marcas,

$$R_{f,P,C} = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a).$$

Como a soma já é independente da partição e das marcas, $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$.

13.7 Temos $\Delta x = 1/n$ e $x_i^* = i/n$. Logo,

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

13.8 Mantenha $[0, 1/2]$ como um único subintervalo e divida $[1/2, 1]$ em n partes iguais. O número de subintervalos tende ao infinito, mas a malha de toda partição é $1/2$. Assim, aumentar apenas o número de partes não garante que todos os subintervalos se tornem pequenos.

13.9 Pela aditividade, o valor é $3 + (-1) = 2$.

13.10 Como o intervalo tem comprimento 3, temos $6 \leq \int_1^4 f(x) \, dx \leq 15$.

13.11 Pela linearidade, $3(-2) + 2(5) = 4$.

13.12

$$f_m = \frac{1}{2} \int_0^2 3x^2 \, dx = 4.$$

Logo $3c^2 = 4$ e podemos tomar $c = 2/\sqrt{3}$.

13.13

$$q_m = \frac{1}{5} \int_0^5 (20 + 4t) \, dt = 30.$$

Como $20 + 4c = 30$, temos $c = 2,5$ minutos.

13.14 Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, $G'(x) = x^3 + 1$.

13.15 Pelo Teorema Fundamental e pela regra da cadeia,

$$H'(x) = 2x\sqrt{1+x^8}.$$

13.16

$$K'(x) = -e^{-x^2}.$$

O sinal negativo aparece porque aumentar o extremo inferior reduz a acumulação entre x e 3.

13.17 Usamos $G'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$ para $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$.

1. $\sqrt{1+2x}$.
2. $\ln(x)$.
3. $-\cos(x^2)$.
4. $(-\cos(x) - \cos(\cos(x)))\sin(x)$.
5. $(\cos(e^x) + e^x)e^x$.
6. $-2x \cos^2(e^{x^2})e^{x^2}$.
7. $\cos^2(e^x)e^x + 2x \cos^2(e^{x^2})e^{x^2}$.
8. $-\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt[4]{x}} + 3x^2\sqrt{x^3}\cos(x^3)$.

No item 1, a derivada bilateral vale para $x > -1/2$; no extremo $-1/2$, a derivada pela direita é 0. No item 2, $x > 0$. No item 8, $x > 0$; a função acumulada também está definida em 0, mas não possui derivada lateral finita ali. Nos itens 6 e 7, é essencial preservar o quadrado do cosseno; no item 7, a derivada do extremo inferior negativo produz o sinal positivo do segundo termo.

13.18 1. $\frac{13}{8}$.

2. $\frac{16385}{7}$.

3. 7π .

4. $\frac{265}{6}$.

5. $\frac{2}{5}$.

6. $\frac{45}{4}$.

7. $-\frac{7}{13} + \frac{56 \cdot 2^{\frac{5}{7}}}{13}$.

8. Não existe como integral de Riemann: o integrando é ilimitado em 0. Como integral imprópria, as partes em $[-5, 0)$ e $(0, 5]$ divergem para $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente. Não se podem cancelar essas divergências; o valor principal simétrico 0 é um conceito diferente.

9. $\frac{156}{7}$.

10. 2.

11. 1.

12. Não existe como integral de Riemann; a cossecante ao quadrado é ilimitada nos extremos. Como integral imprópria, diverge para $+\infty$. A primitiva $-\cotg \theta$ só pode ser avaliada por limites dentro de $(\pi, 2\pi)$. As integrais impróprias serão estudadas no capítulo correspondente.

13. $-e + e^2$.

14. $\frac{4}{\ln(5)}$.

15. $\frac{\pi}{4}$.

13.19 1. 0.

2. $\frac{44633821}{22}$.

3. $\frac{52}{9}$.

4. 2.

5. $-1 + e$.

6. $-\ln(2)$.

7. $\frac{352}{15}$.

8. $\frac{2}{3}$.

9. $\frac{1}{5}$.

10. $\frac{1}{2} - \frac{e}{2}$.

11. $\frac{\pi}{2}$.

12. $\frac{\pi}{2}$.

13. $\frac{\pi}{6}$.

Nos itens 1 a 5, as novas integrais são, respectivamente, $\frac{1}{3} \int_0^{3\pi} \cos u \, du$, $\frac{1}{2} \int_4^5 u^{10} \, du$, $\frac{1}{3} \int_1^9 \sqrt{u} \, du$, $2 \int_0^{\pi/2} \sin u \, du$ e $\int_0^1 e^u \, du$. No item 4, a extensão contínua no extremo foi explicitada no enunciado; a substituição inversa $x = u^2$ também é regular em $u = 0$.

13.20 1. π .

2. $-\frac{2}{e}$.

3. 0.

4. $-12 + \frac{3\pi^2}{2}$.

5. $\frac{1}{2}$.

6. $6 - 2e$.

7. $-\frac{5}{4e^4} + \frac{3}{4e^2}$.

8. $\frac{1}{2} + \frac{e^\pi}{2}$.

9. $\frac{e^\pi}{5} + \frac{1}{5e^\pi}$.

No item 3, a paridade dá o resultado diretamente. No item 4, o integrando é par, e a integral vale duas vezes a integral em $[0, \pi/2]$.

13.21 1. 0.

2. $(-9 + 3r)e^{\frac{r}{3}} + C$.

3. $\left(-\frac{2}{m^3} + \frac{x^2}{m}\right) \sin(xm) + \frac{2x \cos(xm)}{m^2} + C$.

4. $-\frac{1}{2} - x + \frac{(1+2x) \ln(1+2x)}{2} + C$.

5. $(-6 + 6t - 3t^2 + t^3)e^t + C$.

6. $x(2 - 2 \ln(x) + \ln(x)^2) + C$.

7. $-\sinh(z) + z \cosh(z) + C$.

8. $3 - \frac{6}{e}$.

9. $-\frac{28}{9} + \frac{16 \ln(4)}{3}$.

$$10. \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

$$11. \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)^2}.$$

$$12. \frac{x(\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x)))}{2} + C.$$

No item 3, a fórmula exibida vale para $m \neq 0$; se $m = 0$, a primitiva é $x^3/3 + C$. No item 4, $x > -1/2$; nos itens 6 e 12, $x > 0$. Nas integrais indefinidas, a constante é arbitrária.

13.22 O deslocamento é $\int_0^3 (t-1) dt = 3/2$. Como a velocidade muda de sinal em $t = 1$, a distância é

$$\int_0^1 (1-t) dt + \int_1^3 (t-1) dt = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

13.23 O deslocamento é $s(2) - s(0) = 2$. Como $v(t) = 3(t^2 - 1)$ muda de sinal em $t = 1$, a distância é

$$|s(1) - s(0)| + |s(2) - s(1)| = 2 + 4 = 6.$$

13.24 O veículo acelera linearmente de 0 a 6 m/s nos dois primeiros segundos, mantém essa velocidade até $t = 5$ e freia linearmente até parar em $t = 7$. A área sob o gráfico é

$$\int_0^2 3t dt + \int_2^5 6 dt + \int_5^7 (21 - 3t) dt = 6 + 18 + 6 = 30 \text{ m}.$$

Como $v(t) \geq 0$, deslocamento e distância percorrida são ambos iguais a 30 m. Assim, $s(7) = 34$ m e a velocidade média é $30/7$ m/s.

13.25

$$\ln(3e^2) - \ln 3 = \ln(e^2) = 2.$$

13.26 Como $G(x) = \ln(1 + x^2)$,

$$G'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

13.27 Se $u = \exp(a)$ e $v = \exp(b)$, então

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v = a + b.$$

Aplicando a inversa $\exp$ aos dois lados, obtemos $uv = \exp(a + b)$.

13.28 $\Delta x = 2/n$ e $x_i^* = 1 + (i - 1/2)2/n$. Assim, a integral é o limite de

$$\sum_{i=1}^n [2(x_i^*)^2 - x_i^*] \frac{2}{n}.$$

13.29 A função é negativa em $[0, 3]$ e positiva em $[3, 4]$. Logo,

$$A = - \int_0^3 (x^2 - 2x - 3) \, dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - 3) \, dx = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}.$$

Uma única integral assinada subtrairia a área abaixo do eixo.

13.30 Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela regra da cadeia, $F'(x) = 2x \cos(1 + x^6)$; portanto, $F'(0) = 0$.

13.31 Com $u = 1 + x^3$, os limites passam de 0, 1 para 1, 2, e a integral vale $\int_1^2 du/u = \ln 2$. Em uma integral definida, mudar os limites evita voltar à variável x .

13.32 Com $u = x$ e $dv = e^{-x} \, dx$,

$$\int_0^2 x e^{-x} \, dx = [-x e^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} \, dx = 1 - 3e^{-2}.$$

Os termos de fronteira são avaliados nos limites, e não se acrescenta uma constante de integração.

13.33 $v(t) = t(2 - 0,3t) \geq 0$ em $[0, 6]$, portanto não é preciso separar intervalos. O deslocamento e a distância percorrida coincidem:

$$\int_0^6 (2t - 0,3t^2) \, dt = 14,4 \, \text{m}.$$

13.34 $f_{\text{med}} = \frac{1}{9} \int_0^9 \sqrt{x} \, dx = 2$. Como $\sqrt{c} = 2$, podemos tomar $c = 4$.

13.35

$$E = \int_0^8 P(t) \, dt = 400 \, \text{J}, \quad P_{\text{med}} = E/8 = 50 \, \text{W}.$$

13.36 Dividindo a integral em a e fazendo $t = as$ na segunda parcela,

$$\ln(ab) = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln a + \int_1^b \frac{ds}{s} = \ln a + \ln b.$$

13.37 O produto $q c(t)$ tem unidade $(\text{L/min})(\text{mg/L}) = \text{mg/min}$ e representa a taxa de passagem de massa. Sua integral de 0 a 60 min, portanto, fornece a massa total em miligramas.

14.1 Como $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$,

$$\frac{3x + 5}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{11/3}{x - 2} - \frac{2/3}{x + 1}.$$

Logo,

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 - x - 2} \, dx = \frac{11}{3} \ln |x - 2| - \frac{2}{3} \ln |x + 1| + C.$$

14.2

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2},$$

portanto

$$2 \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C.$$

14.3

$$\frac{4x-1}{x(x+2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{9}{2(x+2)},$$

logo

$$-\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{9}{2} \ln|x+2| + C.$$

14.4 $\frac{1}{x^2-3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{3(x-3)},$ para $x \neq 0, 3.$

14.5 $\frac{7-x}{x^2-9} = \frac{2}{3(x-3)} - \frac{5}{3(x+3)},$ para $x \neq \pm 3.$

14.6 Multiplicando pelo denominador, queremos $mx+n = A(x-\beta) + B(x-\alpha).$ Tomando $x = \alpha$ e $x = \beta$, obtemos $A = (m\alpha+n)/(\alpha-\beta)$ e $B = (m\beta+n)/(\beta-\alpha).$ Esses valores satisfazem a identidade polinomial; a decomposição vale para $x \neq \alpha, \beta.$

14.7 1. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

2. $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}.$

3. $\frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{3}{4} \ln|x+2| + C.$

4. $-4 \ln|x+1| + 5 \ln|x+2| + C.$

14.8 Para qualquer $\alpha \neq 0$, inclusive negativo, $\frac{d}{dx}[\alpha^{-1} \operatorname{arctg}(x/\alpha)] = 1/(\alpha^2 + x^2).$ Assim,

1. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C.$

2. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C.$

3. $\frac{3}{2} \ln \frac{6}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

14.9 Escreva $mx+n = m(x-\alpha) + (m\alpha+n).$ Logo, $A = m$ e $B = m\alpha+n$; a identidade vale para $x \neq \alpha.$

14.10 1. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$

2. $-2 \ln |x-2| + 3 \ln |x-3| + C.$

3. $\frac{2}{3} + \ln \frac{3}{2}.$

4. $\frac{x^2}{2} + 2x + 4 \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + C.$

5. $x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$

6. $-\frac{1}{6} \ln |x| - \frac{2}{15} \ln |x+3| + \frac{3}{10} \ln |x-2| + C.$

7. $\frac{x^2}{2} - \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |x+1| + \frac{3}{2} \ln |x-1| + C.$

14.11 As primitivas valem em cada intervalo do domínio real do integrando; a constante pode variar entre componentes distintos.

1. $3 \ln |x+2| + \ln |4x^2 + 3x - 2| + C.$

2. $\frac{13}{20} \ln |x+2| + \frac{47}{40} \ln(x^2 + 16) - \frac{27}{40} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4}\right) + C.$

3. $\ln |x-2| + 2 \ln(x^2 + 4x + 13) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$

4. $x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 17) - \frac{9}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{4}\right) + C.$

5. $\frac{1}{4} \ln |x| - \frac{1}{8} \ln(x^2 + 3x + 4) - \frac{3\sqrt{7}}{28} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + C.$

6. $\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x| - \ln |x-1| + 3 \ln |x+4| + C$ (item mais difícil: exige divisão de polinômios antes de decompor).

7. $2 \ln |x+1| + 3 \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{x+1} - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ (item mais difícil: fator quadrático irreduzível combinado com fator linear repetido).

14.12 Em todas as integrais indefinidas, trabalhamos em cada intervalo em que o denominador não se anula.

1. $4 \ln |x-3| + 5 \ln |x+6| + C.$

2. $-3 \ln |x| + 11 \ln |x+1| + C.$

3. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+4}{x-4} \right| + C.$
4. $2 \ln |x+6| - \frac{3}{x+6} + C.$
5. $-4 \ln |x+9| - \frac{5}{x+9} + C.$
6. $5 \ln |x| + 3 \ln |x+1| + \frac{4}{x+1} + C.$
7. $3 \ln |x-2| + 4 \ln |x+5| - 2 \ln |2x-5| + C.$
8. $-\frac{1}{3} \ln |3x-2| + \frac{3}{4} \ln |4x-1| + \frac{2}{5} \ln |5x+2| + C.$
9. $x + 2 \ln |x-2| - \ln |x+3| + C.$
10. $\frac{x^2}{2} + 2x - 2 \ln |x-2| + \frac{9}{2} \ln |x+3| + C.$
11. $4x + C$ (repare que o numerador é 4 vezes o denominador — não é preciso decompor).
12. $\ln |x+3| + \ln(x^2+25) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{5}\right) + C.$
13. $\ln |x-4| + 3 \ln(x^2+2x+10) - 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.$
14. $x + \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+29) - \frac{7}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{5}\right) + C.$
15. $\frac{1}{10} \ln |x| - \frac{1}{20} \ln(x^2+5x+10) - \frac{\sqrt{15}}{30} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{15}}\right) + C.$
16. $2 \ln |x+3| + \ln |3x^2+2x-5| + C.$
17. $-3 \ln |x-5| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+13) + 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$
18. $2 \ln |x-6| + 2 \ln(x^2+2x+17) - 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{4}\right) + C.$
19. $4 \ln |x+3| + \frac{1}{2} \ln(x^2+6x+13) - 3 \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C.$
20. $\frac{22}{3} \ln 7 - \frac{34}{3} \ln 2.$
21. $4 \ln 5 - \ln 3.$

$$22. \ln \frac{7}{9} + \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

$$23. \frac{1}{16}.$$

$$24. \ln|3x^2 + 4x + 1| + C.$$

$$25. \frac{3x}{x^2 + 4} + 2 \ln|x + 1| - \ln(x^2 + 4) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C \text{ (item mais difícil: fator quadrático irreduzível repetido).}$$

$$26. \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x) + \frac{9}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C \text{ (item mais difícil: dois fatores quadráticos irreduzíveis distintos).}$$

14.13

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

14.14

$$\frac{4x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{5}{4(x-1)} + \frac{11}{4(x+3)}.$$

14.15

$$\frac{2x+5}{x(x-2)^2} = \frac{5}{4x} - \frac{5}{4(x-2)} + \frac{9}{2(x-2)^2}.$$

14.16

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{2}{5(x+1)} + \frac{3(x-1)}{5(x^2+4)}.$$

$$14.17 \quad 1. -\frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

$$2. \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

$$3. -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

$$4. -\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + C.$$

$$5. \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{2}{9} \sin^9 x + \frac{1}{11} \sin^{11} x + C.$$

$$6. \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{3}{5} \sin^5 x + \frac{3}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

$$7. \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin(4x) + C.$$

$$8. -\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{16} \cos(8x) + C.$$

$$9. \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos(3x) + C.$$

$$10. \frac{1}{8} \sin(4x) - \frac{1}{20} \sin(10x) + C.$$

$$11. \frac{\sin(\pi x)}{2\pi} - \frac{\sin(3\pi x)}{6\pi} + C.$$

$$12. \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{6} \sin(3x) + C.$$

$$13. \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + C.$$

$$14. \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$$

$$15. \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$$

$$16. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C.$$

$$17. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

$$18. -\frac{1}{3} \sec^3 x + \frac{1}{5} \sec^5 x + C.$$

$$19. \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{2}{7} \sec^7 x + \frac{1}{9} \sec^9 x + C.$$

$$20. x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$$

$$21. \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

$$22. \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

$$23. \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x - \frac{1}{8} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

$$24. \frac{2}{5}.$$

$$25. 0.$$

$$26. \frac{32}{315}.$$

14.18 1. $\frac{1}{2}$.

2. $\frac{2}{3}$.

3. $\frac{1}{5}$.

4. $\frac{16}{15}$.

14.19 1. $\frac{1}{14} \sin(7x) - \frac{1}{18} \sin(9x) + C$.

2. $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

3. $\frac{x}{2} + \frac{1}{16} \sin(8x) + C$.

4. $-\frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{36} \cos(9x) - \frac{1}{44} \cos(11x) + \frac{1}{304} \cos(19x) - \frac{1}{336} \cos(21x) + C$.

5. $-\frac{1}{6} \cos^3(2x) + C$.

6. $\frac{\pi}{32}$.

7. 0.

No item 4, as frequências são diferentes: use $\cos^4(5x) = [3 + 4 \cos(10x) + \cos(20x)]/8$ e transforme cada produto em soma.

14.20 1. $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C$.

2. $-\frac{x^2 + 6}{5} (9 - x^2)^{3/2} + C$.

3. $\frac{x^2 - 18}{3} \sqrt{x^2 + 9} + C$.

4. $\frac{64}{1215}$.

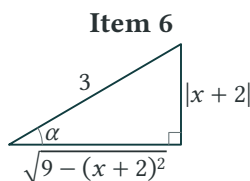
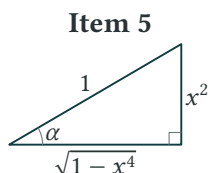
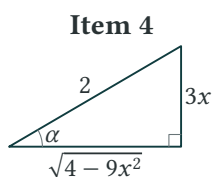
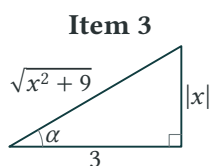
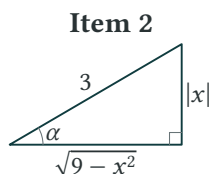
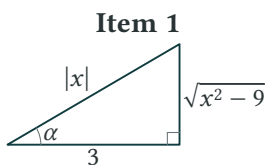
5. $\frac{1}{4} \arcsen(x^2) + \frac{x^2}{4} \sqrt{1 - x^4} + C$.

6. $\frac{(x+2)^3}{243(9 - (x+2)^2)^{3/2}} + \frac{x+2}{81\sqrt{9 - (x+2)^2}} + C$.

Para os triângulos de referência abaixo, o cateto horizontal é adjacente ao ângulo

agudo de referência α . Nos itens 1 e 3, desenhamos o ramo $x > 0$; quando $x < 0$, os comprimentos usam $|x|$ e os sinais vêm do quadrante escolhido. No item 6, usamos $|x + 2|$ para o comprimento. As substituições e os domínios são:

1. $x = 3 \sec \theta$, $|x| > 3$; para $x < -3$, pode-se tomar $\pi/2 < \theta < \pi$ e usar $\sqrt{x^2 - 9} = 3|\operatorname{tg} \theta|$.
2. $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, $-3 < x < 3$.
3. $x = 3 \operatorname{tg} \theta$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $3x = 2 \operatorname{sen} \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.
5. $x^2 = \operatorname{sen} \theta$, $|x| < 1$; a primitiva obtida vale também em $x = 0$ por diferenciação.
6. $x + 2 = 3 \operatorname{sen} \theta$, $-5 < x < 1$.



14.21 1. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 5} + \frac{5}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 5}) + C.$

2. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 9} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) + C.$

3. $\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

4. $\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{5}\right) + C.$

5. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C.$

6. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 25} - \frac{25}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| + C.$
7. $\frac{x}{2}\sqrt{9x^2 + 1} + \frac{1}{6} \ln(3x + \sqrt{9x^2 + 1}) + C.$
8. $\frac{x}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + \frac{1}{4} \arcsen(2x) + C.$
9. $\frac{x}{2}\sqrt{25x^2 - 1} - \frac{1}{10} \ln|5x + \sqrt{25x^2 - 1}| + C.$
10. $6 \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C.$
11. $5 \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{11}}\right) + C.$
12. $7 \ln|x + \sqrt{x^2 - 12}| + C.$
13. $\sqrt{x^2 - 5} + C.$
14. $\sqrt{x^2 - 13} - \sqrt{13} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 13}}{\sqrt{13}}\right) + C.$
15. $\frac{3x}{2}\sqrt{x^2 - 6} + 9 \ln|x + \sqrt{x^2 - 6}| + C.$
16. $\frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$
17. $\frac{x + 3}{8(x^2 + 6x + 13)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg}\left(\frac{x + 3}{2}\right) + C.$
18. $-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} + C.$
19. $\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} - \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C.$
20. $2 \arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^3 - 2x}{4}\sqrt{4 - x^2} + C.$
21. $-\frac{1}{5} \arcsen\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{8 - x^2}}{5x} + C.$
22. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 5} - \frac{5}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 5}) + C.$
23. $6 + \frac{25}{2} \arcsen\left(\frac{3}{5}\right).$

24. $78 - \frac{25}{2} \ln 5.$

25. $-\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C$ (item mais difícil: potência de x no denominador exige redução extra após a substituição).

26. $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x+13} + 2\ln((x-3)+\sqrt{x^2-6x+13}) + C$ (item mais difícil: completar o quadrado antes da substituição trigonométrica).

Cada primitiva vale nos intervalos do domínio real do integrando. No item 9, o fator x que acompanha a raiz é indispensável. No item 14, a forma com $\arctg(\sqrt{x^2-13}/\sqrt{13})$ vale nos dois ramos $|x| > \sqrt{13}$. No item 17, completar o quadrado dá $(x+3)^2 + 4$, de modo que o argumento correto é $(x+3)/2$.

14.22 1. $8 \ln 2 + \frac{15}{2}.$

2. $\frac{2}{108} + \frac{\pi}{108}.$

3. $4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}.$

4. $-\frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{81}{4} \arcsen\left(\frac{1}{3}\right).$

14.23 No domínio original, $x \neq 3$, o integrando é $x+3$. Portanto,

$$\frac{x^2}{2} + 3x + C$$

em cada intervalo do domínio.

14.24 Como $e^{2x} - 1 = (e^x - 1)(e^x + 1)$, o integrando é $e^x - 1$. Logo,

$$e^x - x + C.$$

14.25 Por agrupamento,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1),$$

portanto a integral é

$$\frac{x^3}{3} + x + C,$$

em cada intervalo do domínio original $x \neq -1$.

14.26 A derivada de $x^2 + 4$ já aparece no integrando, a menos do fator constante 2. Com $u = x^2 + 4$, a integral se torna $\frac{1}{2} \int u^{1/2} du$, que é imediata.

$$14.27 \quad 1. \quad \frac{2}{5}(x+3)^{5/2} - 4(x+3)^{3/2} + 18\sqrt{x+3} + C.$$

$$2. \quad \frac{t}{2}(\sin(\ln t) - \cos(\ln t)) + C.$$

$$3. \quad e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

$$4. \quad \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - 6\sqrt{x+3} + C.$$

$$5. \quad -\frac{1}{2} \cotg(2t) - \frac{1}{3} \cotg^3(2t) - \frac{1}{10} \cotg^5(2t) + C.$$

$$6. \quad \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-1/2}{x+3/2} \right| + C.$$

$$7. \quad \ln|x-2| + C.$$

$$8. \quad \frac{1}{2} \sin(x^2) - \frac{1}{2} x^2 \cos(x^2) + C.$$

$$9. \quad \ln(1 + \cosh x) + C.$$

$$10. \quad \frac{e^{3z}}{25} (3 \cos(4z) + 4 \sin(4z)) + C.$$

$$11. \quad 4 \ln|x+1| - \frac{1}{3x^3} + C.$$

$$12. \quad \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3(2t) + \frac{1}{10} \operatorname{tg}^5(2t) + C.$$

$$13. \quad \frac{x\sqrt{4x^2-9}}{8} + \frac{9}{16} \ln|2x + \sqrt{4x^2-9}| + C.$$

$$14. \quad \frac{x(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}{8} - \frac{1}{8} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$15. \quad 0.$$

$$16. \quad \frac{2}{3} y^{3/2} \ln y - \frac{4}{9} y^{3/2} + C.$$

$$17. \quad \frac{2}{7}(x-2)^{7/2} + \frac{8}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{8}{3}(x-2)^{3/2} + C.$$

$$18. \quad \frac{1}{12} \operatorname{arctg}(4x/3) + C.$$

$$19. \quad \frac{x\sqrt{16x^2+9}}{32} - \frac{9}{128} \ln(4x + \sqrt{16x^2+9}) + C.$$

$$20. \quad \frac{1}{4} \ln(4x + \sqrt{16x^2+9}) + C.$$

$$21. \quad \cosh(\ln x) + C.$$

22. 0.

Nos itens 1 e 4, $x > -3$; no item 2, $t > 0$; no item 7, conservam-se as exclusões $x = -1, 0, 2$ do integrando original; no item 13, $|x| > 3/2$; no item 16, $y > 0$; no item 17, a fórmula vale para $x > 2$ e se estende ao extremo 2; no item 21, $x > 0$. As outras restrições são as dos denominadores e funções trigonométricas.

$$14.28 \quad 1. -2 \cdot 2^{-\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2} \right) + C.$$

$$2. -\cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x + C.$$

$$3. -\frac{1}{2(e^{2t}-1)} - \frac{1}{4(e^{2t}-1)^2} + C.$$

$$4. \frac{1}{3}(x^2 + 16)^{3/2} - 16\sqrt{x^2 + 16} + C.$$

$$5. \frac{\pi}{2}.$$

$$6. -\frac{1}{22} \cos(11x) + \frac{1}{10} \cos(5x) + C.$$

$$7. \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + C.$$

$$8. \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

$$10. \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

$$11. -\frac{x}{4} + \frac{7}{32} \sin(2x) - \frac{1}{16} \sin(4x) + \frac{1}{96} \sin(6x) + C.$$

$$12. x - \ln|x+2| - 2 \ln|x+1| + C.$$

$$13. \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

No item 1, a fórmula vale para $x > 0$ e admite extensão diferenciável pela direita em 0. No item 2, mantemos $\cos x \neq 0$, mesmo após simplificar o integrando. No item 3, $t \neq 0$. Nos demais, consideram-se os intervalos do domínio real do integrando.

14.29 Na ordem: integração por partes repetida; redução de potência por identidades trigonométricas; frações parciais; substituição $u = 16 - x^2$; integração por partes com $u = \ln x$ e $dv = dx$.

14.30

$$\int x^2 \cos(3x) \, dx = \frac{x^2}{3} \sin(3x) + \frac{2x}{9} \cos(3x) - \frac{2}{27} \sin(3x) + C.$$

14.31 Como $du = -\operatorname{cosec}^2 x \, dx$, a integral se torna $-\int u^3 \, du$. Logo, o resultado é $-\cotg^4 x/4 + C$; não é necessário converter nem simplificar quocientes trigonométricos.

14.32 Como $x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4$,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + C.$$

14.33

$$\frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2},$$

portanto a integral é $2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + C$.

14.34 Com $x = 6 \sin \theta$,

$$\int \sqrt{36 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{36 - x^2} + 18 \operatorname{arcsen}(x/6) + C.$$

O número $36 = 6^2$ corresponde ao quadrado do raio do semicírculo $y = \sqrt{36 - x^2}$.

14.35 Usando a primitiva do exercício anterior ou a simetria do círculo,

$$\int_{-6}^6 \sqrt{36 - x^2} \, dx = 18\pi \, \text{cm}^2,$$

igual a metade de $\pi 6^2$.

14.36 A afirmação é falsa. Por exemplo, $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$ é resolvida diretamente pela regra da potência. Também em $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx$, a substituição algébrica $u = x^2 + 1$ é mais direta.

15.1 1. Integrando a diferença entre as curvas em $[0, 2\pi]$, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2} + 2 \right) dx = \pi(\pi + 4).$$

2. Em $[-1, 1]$,

$$A = \int_{-1}^1 (-3x^3 - x^2 + 2x + 3) \, dx = \frac{16}{3}.$$

3. A altura da região é constante e igual a 1, logo $A = \int_0^\pi 1 \, dx = \pi$.

4. Em $[0, \pi/4]$,

$$A = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin(4x)) \, dx = \frac{1}{2}.$$

5. Como $4^x \geq 2^x$ em $[0, 1]$,

$$A = \int_0^1 (4^x - 2^x) \, dx = \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 4}.$$

6. Novamente a altura é 1 em um intervalo de comprimento π , portanto $A = \pi$.

15.2 1. Faixas verticais em $[-1, 2]$, altura $(9 - x^2) - (x + 1)$. Assim, $A = \int_{-1}^2 (8 - x - x^2) \, dx = \frac{39}{2}$.

2. Seja $a \approx 0,876726$ a raiz positiva de $\sin a = a^2$. A região está em $0 \leq x \leq a$, entre x^2 e $\sin x$. Logo, $A = \int_0^a (\sin x - x^2) \, dx = 1 - \cos a - a^3/3 \approx 0,135698$. A raiz é única em $(0, 1)$, pois $\sin x - x^2$ é estritamente côncava ali, começa com derivada positiva e vale um número negativo em 1.

3. Faixas verticais em $[-1, 1]$, altura $x^2 - x^4$. Logo, $A = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx = \frac{4}{15}$.

4. No primeiro quadrante, $y = (1 - \sqrt{x})^2$ e $y = 1 - x$, para $0 \leq x \leq 1$. Então $A = \int_0^1 [1 - x - (1 - \sqrt{x})^2] \, dx = \frac{1}{3}$.

5. As curvas se encontram em $x = 1$. Para $1 \leq x \leq 2$, $1/x \geq 1/x^2$. Assim, $A = \int_1^2 (x^{-1} - x^{-2}) \, dx = \ln 2 - 1/2$.

6. Faixas horizontais, $-1 \leq y \leq 1/2$, entre $x = 2y^2$ e $x = 1 - y$. Portanto $A = \int_{-1}^{1/2} (1 - y - 2y^2) \, dy = \frac{9}{8}$.

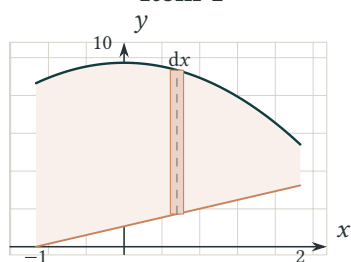
7. As interseções ocorrem em $0, \pi/2$ e π . A área das duas regiões é $A = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos x - 1 + 2x/\pi) \, dx = 2 - \pi/2$. Em $[0, \pi/2]$, a concavidade do cosseno o coloca acima da corda; a simetria em torno de $(\pi/2, 0)$ descreve a outra metade.

8. As fronteiras trocam de ordem em $x = 1$. No intervalo $[0, 1]$, o seno é não negativo e $x^2 - x$ é não positivo; em $[1, 2]$, ocorre o contrário. Assim, $A = \int_0^1 [\sin(\pi x) - x^2 + x] \, dx + \int_1^2 [x^2 - x - \sin(\pi x)] \, dx = 1 + \frac{4}{\pi}$.

9. Faixas verticais entre $\cos x$ e $\sec^2 x$, para $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$. Portanto $A = 2 \int_0^{\pi/3} (\sec^2 x - \cos x) \, dx = \sqrt{3}$.

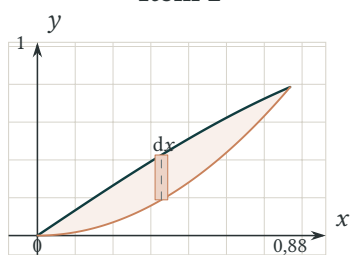
Nos esboços a seguir, o segmento tracejado indica a altura (ou a largura, no item 6) de uma faixa típica; sua espessura é dx (ou dy). As curvas e os intervalos usados no cálculo estão identificados em cada item.

Item 1



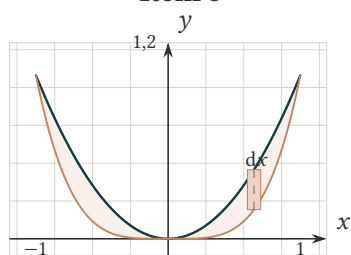
$$y = 9 - x^2 \text{ e } y = x + 1$$

Item 2



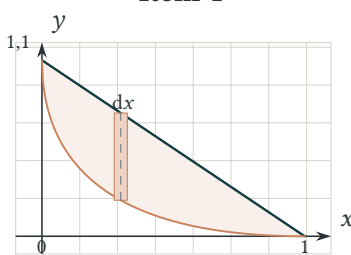
$$y = \text{sen } x \text{ e } y = x^2$$

Item 3



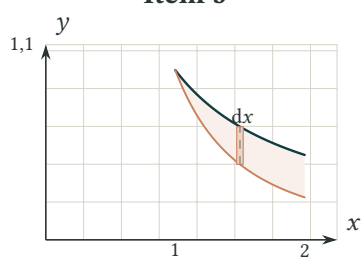
$$y = x^2 \text{ e } y = x^4$$

Item 4



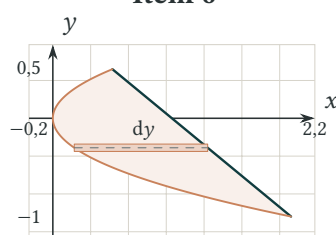
$$y = 1 - x \text{ e } y = (1 - \sqrt{x})^2$$

Item 5



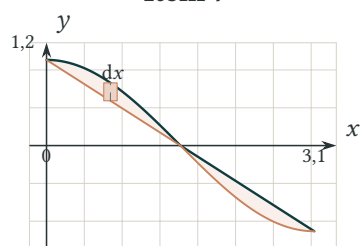
$$y = 1/x \text{ e } y = 1/x^2$$

Item 6



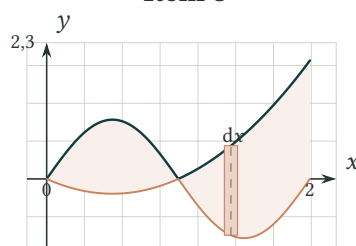
$$x = 1 - y \text{ e } x = 2y^2$$

Item 7



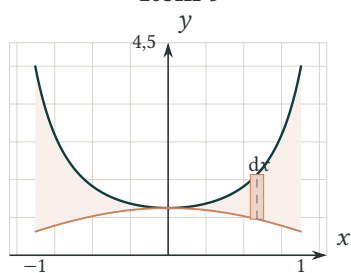
$$y = \cos x \text{ e } y = 1 - 2x/\pi$$

Item 8



$$y = \text{sen}(\pi x) \text{ e } y = x^2 - x$$

Item 9



$$y = \sec^2 x \text{ e } y = \cos x$$

15.3 A tangente é $y = 2x - 1$, que encontra o eixo x em $x = 1/2$. A região tem fronteira superior x^2 ; a inferior é 0 em $[0, 1/2]$ e $2x - 1$ em $[1/2, 1]$. Logo, $A = \int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 [x^2 - (2x - 1)] dx = 1/12$.

15.4 A região tem $0 \leq y \leq 4$ e $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$. Uma faixa horizontal tem largura $2\sqrt{y}$, de modo que sua área total é

$$A = \int_0^4 2\sqrt{y} dy = \frac{32}{3}.$$

A reta $y = b$, com $0 < b < 4$, divide a área ao meio quando

$$\int_0^b 2\sqrt{y} dy = \frac{16}{3}.$$

Portanto, $\frac{4}{3}b^{3/2} = \frac{16}{3}$ e $b = 4^{2/3}$.

15.5 As curvas se encontram em $x = \pm|c|$. A área é $\int_{-|c|}^{|c|} 2(c^2 - x^2) dx = 8|c|^3/3$. Igualando a 576, obtemos $|c|^3 = 216$, portanto $c = 6$ ou $c = -6$. Se c for convencionado como parâmetro positivo, a resposta é 6.

15.6 Por simetria, basta calcular quatro vezes a área no primeiro quadrante. Ali, $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, portanto

$$A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Com $x = a \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, obtemos

$$A = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4ab \frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

15.7 1. Em x : $A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (x-3)^2/4 dx = 1$. Em y : $A = \int_1^2 [3-3\sqrt{y-1}] dy = 1$.

2. Em x : $A = \int_0^1 (\sqrt{x} + x/2) dx + \int_1^2 (3-3x/2) dx = 5/3$. Em y : $A = \int_{-1}^0 [(3-y)/2 + 2y] dy + \int_0^1 [(3-y)/2 - y^2] dy = 5/3$.

3. Em y : $A = \int_{-2}^1 (1-y/2 - y^2/2) dy = 9/4$. Em x : $A = \int_0^{1/2} 2\sqrt{2x} dx + \int_{1/2}^2 [2-2x + \sqrt{2x}] dx = 9/4$.

4. Em x : $A = \int_0^1 x^{1/3} dx - \int_{1/2}^1 \sqrt{x-1/2} dx = 3/4 - \sqrt{2}/6$. Em y : $A = \int_0^{1/\sqrt{2}} (y^2 + 1/2 - y^3) dy + \int_{1/\sqrt{2}}^1 (1-y^3) dy = 3/4 - \sqrt{2}/6$.

15.8 1. As áreas das seções são $\pi(x - x^2)$, de modo que $V = \pi \int_0^1 (x - x^2) dx = \pi/6$.

2. O raio é $3 - x^2$ em $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$; assim,

$$V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)^2 dx = \frac{48\sqrt{3}\pi}{5}.$$

3. Como o raio é $5x$ para $1 \leq x \leq 2$, temos $V = 25\pi \int_1^2 x^2 dx = 175\pi/3$.

4. O método dos discos fornece $V = \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \pi^2/4$.

15.9 1. A área da arruela é $\pi(y^2 - y^4)$, logo $V = \pi \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = 2\pi/15$.

2. As seções têm área $\pi(3 - y)$ para $0 \leq y \leq 3$, portanto $V = 9\pi/2$.

3. Como a seção à altura y tem raio $y/5$, obtemos $V = \pi \int_5^{10} y^2/25 dy = 35\pi/3$.

4. Temos $V = \pi \int_0^1 (\arccos y)^2 dy = \pi^2 - 2\pi$. Por partes, uma primitiva é $y(\arccos y)^2 - 2 \arccos y \sqrt{1 - y^2} - 2y$.

15.10 1. a) Em torno do eixo x , $V = \pi \int_0^1 x dx = \pi/2$.

b) Em torno de $y = 1$, as arruelas têm área $\pi[1 - (1 - \sqrt{x})^2] = \pi(2\sqrt{x} - x)$; portanto, $V = 5\pi/6$.

c) Em torno do eixo y , arruelas horizontais têm raio externo 1 e raio interno y^2 ; assim, $V = \pi \int_0^1 (1 - y^4) dy = 4\pi/5$.

d) Em torno de $x = 1$, usamos discos horizontais de raio $1 - y^2$: $V = \pi \int_0^1 (1 - y^2)^2 dy = 8\pi/15$.

2. a) Em torno do eixo x , $V = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx = 512\pi/15$.

b) Em torno de $y = 4$, $V = \pi \int_{-2}^2 (16 - x^4) dx = 256\pi/5$.

c) Em torno de $y = -1$, $V = \pi \int_{-2}^2 [(5 - x^2)^2 - 1] dx = 832\pi/15$.

d) Em torno de $x = 2$, use seções horizontais. Para $0 \leq y \leq 4$, os raios externo e interno são $2 + \sqrt{4 - y}$ e $2 - \sqrt{4 - y}$; portanto,

$$V = \pi \int_0^4 [(2 + \sqrt{4 - y})^2 - (2 - \sqrt{4 - y})^2] dy = \frac{128\pi}{3}.$$

3. a) Em torno do eixo x , $V = \pi \int_1^2 [(3 - x)^2 - 1] dx = 4\pi/3$.

b) Em torno de $y = 2$, $V = \pi \int_1^2 [1 - (x - 1)^2] dx = 2\pi/3$.

c) Em torno do eixo y , as seções horizontais são arruelas de raio externo $3 - y$ e raio interno 1: $V = \pi \int_1^2 [(3 - y)^2 - 1] dy = 4\pi/3$.

d) Em torno de $x = 1$, discos horizontais de raio $2 - y$ fornecem $V = \pi \int_1^2 (2 - y)^2 dy = \pi/3$.

4. a) Em torno do eixo x ,

$$V = \pi \int_1^3 [(2x - 1)^2 - (x^2 - 2x + 2)^2] dx = \frac{104\pi}{15}.$$

b) Em torno de $y = 1$,

$$V = \pi \int_1^3 [(2x - 2)^2 - (x - 1)^4] dx = \frac{64\pi}{15}.$$

c) Em torno de $y = 5$,

$$V = \pi \int_1^3 [(3 + 2x - x^2)^2 - (6 - 2x)^2] dx = \frac{32\pi}{5}.$$

5. a) Em torno do eixo x , $V = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi^2/2$.

b) Em torno de $y = 1$,

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = 4\pi \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\pi^2}{2}.$$

c) Em torno de $y = -1$,

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = 4\pi \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi^2}{2}.$$

6. a) Em torno do eixo x , $V = 3\pi \int_0^2 x^2 dx = 8\pi$.

b) Em torno de $y = 4$, $V = \pi \int_0^2 [(4 - x)^2 - (4 - 2x)^2] dx = 8\pi$.

c) Em torno do eixo y , usamos arruelas horizontais em dois intervalos:

$$V = \pi \int_0^2 \left(y^2 - \frac{y^2}{4} \right) dy + \pi \int_2^4 \left(4 - \frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{16\pi}{3}.$$

d) Em torno de $x = 2$, novamente dividimos as seções horizontais:

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(2 - \frac{y}{2} \right)^2 - (2 - y)^2 \right] dy + \pi \int_2^4 \left(2 - \frac{y}{2} \right)^2 dy = \frac{8\pi}{3}.$$

A ordem dos subitens é a dos eixos em cada enunciado. As integrais foram montadas com raios externos e internos não negativos; quando a descrição da seção horizontal muda com a altura, dividimos a integral nos intervalos correspondentes.

15.11 Medindo x a partir do vértice, a seção a distância $x \in [0, 10]$ tem raio $x/2$ e área $A(x) = \pi x^2/4$. Portanto, $V = \int_0^{10} \pi x^2/4 \, dx = 250\pi/3$ unidades cúbicas.

15.12 As seções paralelas à base, a uma mesma distância perpendicular do vértice, têm o mesmo raio que no cone do Exercício 15.11. Pelo princípio de Cavalieri, ou integrando $A(x) = \pi x^2/4$ de 0 a 10, obtemos $V = 250\pi/3$ unidades cúbicas.

15.13 A distância perpendicular x ao vértice varia de 0 a 10. Por semelhança, cada seção tem catetos $2x/5$ e área $A(x) = \frac{1}{2}(2x/5)^2 = 2x^2/25$. Logo, $V = \int_0^{10} 2x^2/25 \, dx = 80/3$ unidades cúbicas.

15.14 Medimos $x \in [0, 10]$ a partir da face quadrada. A seção perpendicular ao comprimento é um trapézio de altura 5, base inferior 5 e base superior $5 - x/2$. Assim, $A(x) = \frac{5}{2}[5 + (5 - x/2)] = 25 - 5x/4$. O volume é $V = \int_0^{10} (25 - 5x/4) \, dx = 375/2 = 187,5$ unidades cúbicas.

15.15 1. Por simetria, usamos apenas $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. As cascas têm raio x e altura $3 - x^2$:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x(3 - x^2) \, dx = \frac{9\pi}{2}.$$

2. Para $0 \leq x \leq 1$, a altura é $10 - 5 = 5$; para $1 \leq x \leq 2$, é $10 - 5x$. Assim,

$$V = 2\pi \left(\int_0^1 5x \, dx + \int_1^2 x(10 - 5x) \, dx \right) = \frac{35\pi}{3}.$$

$$3. V = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = 2\pi [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} = \pi^2 - 2\pi.$$

$$4. V = 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} - x) \, dx = 2\pi(2/5 - 1/3) = 2\pi/15.$$

15.16

$$W = \int_0^4 (10 + x) \, dx = \left[10x + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 48 \text{ J}.$$

15.17 A componente da força na direção do movimento é $F(x) \cos 60^\circ$. Logo,

$$W = \int_0^3 \frac{300}{1+x} \frac{1}{2} \, dx = 150 \ln 4 \text{ J}.$$

15.18 Para afastar a partícula lentamente, a força externa deve ter intensidade k/r^2 no sentido do deslocamento. Assim,

$$W = \int_a^b \frac{k}{r^2} \, dr = k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

15.19

$$W = \int_{0,10}^{0,25} 40x \, dx = 20(0,25^2 - 0,10^2) = 1,05 \text{ J.}$$

15.20 Pela lei de Hooke, $k = 18/0,12 = 150 \text{ N/m}$. Assim,

$$W = \int_{0,05}^{0,20} 150x \, dx = 75(0,20^2 - 0,05^2) = 2,8125 \text{ J.}$$

15.21 Um elemento situado a uma distância y do topo percorre a distância y e tem peso por unidade de comprimento $0,5g$. Logo,

$$W = 0,5g \int_0^{20} y \, dy = 4,9 \cdot 200 = 980 \text{ J.}$$

15.22 Uma lâmina horizontal à altura y tem volume $4\pi \, dy$ e precisa subir $5 - y$. Portanto,

$$W = 9800 \cdot 4\pi \int_0^5 (5 - y) \, dy = 490000\pi \text{ J.}$$

15.23 Adotando $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ para a água:

$$1. F = 1000 \cdot 9,8 \cdot 2 \int_0^3 y \, dy = 88200 \text{ N.}$$

$$2. F = 1000 \cdot 9,8 \cdot 2 \int_2^4 y \, dy = 117600 \text{ N.}$$

$$3. \text{ À profundidade } y, \text{ a largura é } 2y/3. \text{ Logo, } F = 1000 \cdot 9,8 \int_0^3 y(2y/3) \, dy = 58800 \text{ N.}$$

$$4. F = 850 \cdot 9,8 \cdot 1,2 \int_1^3 y \, dy = 39984 \text{ N.}$$

15.24 A pressão é constante em toda a escotilha: $p = 1000 \cdot 9,8 \cdot 3$. Como a área é $\pi(0,5)^2 = \pi/4$,

$$F = 7350\pi \text{ N.}$$

15.25 À profundidade y , a faixa tem área $L \, dy$. Logo,

$$F = \rho g L \int_d^{d+H} y \, dy = \rho g LH \left(d + \frac{H}{2} \right).$$

15.26 À profundidade y , a largura é $w(y) = 3(1 - y/4)$. Portanto,

$$F = 9800 \int_0^4 y 3 \left(1 - \frac{y}{4} \right) dy = 78400 \text{ N.}$$

15.27 À profundidade y , a largura é $2\sqrt{1-y^2}$. Assim,

$$F = 9800 \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} \, dy = \frac{19600}{3} \text{ N.}$$

15.28 A placa ocupa as profundidades $2,5 \leq y \leq 5,5$. Logo,

$$F = 9800 \cdot 2 \int_{2,5}^{5,5} y \, dy = 235200 \text{ N.}$$

Como a área é 6 m^2 , o mesmo valor é $1000 \cdot 9,8 \cdot 6 \cdot 4$.

15.29

$$F = 800 \cdot 9,8 \cdot 1,5 \int_{0,5}^2 y \, dy = 22050 \text{ N.}$$

15.30 Como $y' = \sqrt{x}$,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

15.31 Como $y' = 1$,

$$A = 2\pi \int_0^R x\sqrt{2} \, dx = \pi\sqrt{2} R^2.$$

O cone tem raio R e geratriz $R\sqrt{2}$, logo sua área lateral é também $\pi R(R\sqrt{2})$.

15.32 Como $y' = \sqrt{x+1}$,

$$L = \int_0^3 \sqrt{x+2} \, dx = \frac{2}{3} (5^{3/2} - 2^{3/2}).$$

15.33 Um pequeno segmento tem comprimento $ds \approx \sqrt{1+[f'(x)]^2} \, dx$ e, ao girar, percorre uma circunferência de raio $f(x)$ e comprimento $2\pi f(x)$. A área lateral do pequeno tronco é aproximadamente $2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} \, dx$; a soma limite produz a integral.

15.34

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R,$$

portanto $L = R \int_0^{\pi/2} dt = \pi R/2$.

15.35 Como $x'(t) = t^2$ e $y'(t) = t$,

$$L = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2} \, dt = \frac{1}{3} (2^{3/2} - 1).$$

15.36 A derivada de $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ não é finita nos extremos. Por isso, fixamos primeiro $0 < c < R$ e calculamos a área gerada pelo arco com $-c \leq x \leq c$, onde as hipóteses da fórmula estão satisfeitas. Como

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

temos

$$A(c) = 2\pi \int_{-c}^c \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi Rc.$$

Fazendo $c \rightarrow R^-$, obtemos

$$A = \lim_{c \rightarrow R^-} A(c) = 4\pi R^2.$$

15.37 A área é $A_0 = 1/2$. Portanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{A_0} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{3}, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A_0} \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

15.38 Por simetria, $\bar{x} = 0$. A área é $A_0 = 32/3$ e

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-x^2)^2 dx = \frac{256}{15}.$$

Logo, $\bar{y} = M_x/A_0 = 8/5$, e o centro de massa é $(0, 8/5)$.

15.39 A área é $A_0 = 1/3$. Assim,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{1/3} = \frac{3}{4}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx}{1/3} = \frac{3}{10}.$$

15.40 Por simetria, $\bar{x} = 0$. Como

$$A_0 = \frac{4}{3}, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{8}{15},$$

temos $\bar{y} = 2/5$.

15.41 Por simetria, $\bar{x} = 0$. A área é $A_0 = 4/3$ e

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^4) dx = \frac{4}{5}.$$

Logo, $\bar{y} = M_x/A_0 = 3/5$.

15.42 A área do semicírculo é $\pi r^2/2$. Se d é a distância procurada, Pappus fornece

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi d \frac{\pi r^2}{2}.$$

Portanto,

$$d = \frac{4r}{3\pi}.$$

15.43 O retângulo tem área ah e centroide a distância $R + a/2$ do eixo. Assim,

$$V = 2\pi \left(R + \frac{a}{2}\right) ah = \pi((R + a)^2 - R^2)h,$$

que coincide com a área da coroa circular vezes a altura.

16.1 Na ordem dada, os valores são:

1. $1/2$, usando a primitiva $-1/(x + 1)$.

2. $1/3$, usando a primitiva $-e^{-3x}/3$.

3. 2, pela paridade: $2 \int_0^\infty e^{-x} dx = 2$.

4. 1, por integração por partes.

5. $\pi/2$, pois $\arctg b \rightarrow \pi/2$.

6. π : cada semirreta contribui com $\pi/2$.

16.2 1. Diverge por oscilação: $\int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$ não possui limite quando $b \rightarrow \infty$.

2. Diverge para $+\infty$, pois $\int_0^b 1/(x + 1) dx = \ln(b + 1)$.

3. Converge e vale $\pi/\sqrt{5}$. Complete o quadrado, escrevendo $x^2 + 4x + 9 = (x + 2)^2 + 5$.

4. Converge e vale $\frac{1}{2} \ln 3$, usando a primitiva $\frac{1}{2} \ln |(x - 1)/(x + 1)|$.

16.3 1. -1 , pois $[x \ln x - x]_\varepsilon^1 \rightarrow -1$ e $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$.

2. 2, pois $\lim_{a \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{a}) = 2$.

3. 4: a função é par e cada integral unilateral em torno de 0 vale 2.

4. Diverge para $+\infty$: $\int_a^{\pi/2} 1/\sin^2 x dx = \cotg a \rightarrow +\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$.

16.4 1. Diverge para $+\infty$. A singularidade em 1 exige duas integrais, e ambas divergem.

2. Diverge para $-\infty$: uma primitiva é $\ln |\ln x|$.

3. Converge e vale $1/\ln 2$: uma primitiva é $-1/\ln x$, cujo limite em 0^+ é zero.

16.5 1. Converge para $0 < p < 1$ e vale $1/(1 - p)$. Para $p \geq 1$, diverge.

2. Converge para $p > 1$ e vale $1/(p-1)$. Para $0 < p \leq 1$, diverge.

16.6 1. Converge e vale 1, por integração por partes.

2. Diverge para $+\infty$, pois uma primitiva é $2\sqrt{\ln x}$.

3. Diverge para $+\infty$, pois uma primitiva é $\ln(\ln x)$.

4. Converge e vale π . Com $u = \ln x$, separe a integral em $x = 1$; as duas parcelas valem $\pi/2$.

5. Converge e vale -1 . O integrando é a derivada de $\sin x/x$, e os limites dessa função nos extremos são 1 e 0.

6. Converge e vale $4\pi/(3\sqrt{3})$, após completar o quadrado.

7. Converge e vale $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 3$.

16.7 1. Diverge pelo teste de comparação pelo limite com $g(x) = 1/x$: a razão tende a $\sqrt{3} > 0$.

2. Converge pelo teste de comparação pelo limite com $g(x) = x^{-3/2}$: a razão tende a $4/\sqrt{7} > 0$.

3. Diverge pelo teste de comparação pelo limite com $g(x) = 1/x$, a partir de $x = 1$: a razão tende a 1. Não há singularidade em $[0, 1]$, pois $x^3 - x^2 + x + 1 = x(x^2 - x + 1) + 1 > 0$ para $x \geq 0$.

4. Converge por comparação direta: $0 \leq e^{-x} \ln x \leq xe^{-x}$ para $x \geq 1$, e $\int_1^\infty xe^{-x} dx = 2/e$.

5. Converge por comparação direta com e^{-x} . Para $x \geq 5$, $x^2 - 4x - 1 > 0$, de modo que $-x^2 + 3x + 1 \leq -x$.

6. Converge por comparação direta. O integrando é contínuo em $[0, 1]$; para $x \geq 1$, $0 \leq \sqrt{x}e^{-x} \leq xe^{-x}$, cuja integral converge.

16.8 Com $x = \tan \theta$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, a condição de normalização é $c\pi/2 = 1$, isto é, $c = 2/\pi$.

16.9 Integrando por partes e usando $E[X] = 1/\lambda$,

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Portanto,

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

16.10 A função é não negativa e, por simetria,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Além disso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1 < \infty.$$

Assim, o valor esperado existe; como $xf(x)$ é ímpar, $E[X] = 0$. Para a densidade de Cauchy, a integral de $|x|f(x)$ diverge, de modo que a simetria não legitima o cancelamento e o valor esperado não existe.

16.11 Pelo cálculo dos momentos,

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{se } \alpha > 1, \quad E[X^2] = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \quad \text{se } \alpha > 2.$$

Assim:

1. a esperança é finita para $\alpha > 1$;
2. o segundo momento é finito para $\alpha > 2$;
3. a esperança é finita e a variância é infinita exatamente quando $1 < \alpha \leq 2$.

16.12 Como $E[T] = 1/\lambda = 1200$, temos $\lambda = 1/1200$. A função de sobrevivência é $P(T > t) = e^{-t/1200}$, logo

$$P(T > 1000) = e^{-5/6}, \quad P(500 \leq T \leq 1500) = e^{-5/12} - e^{-5/4}.$$

A mediana m satisfaz $1 - e^{-m/1200} = 1/2$, portanto $m = 1200 \ln 2$ horas. Por fim,

$$P(T > 1800 | T > 600) = \frac{P(T > 1800)}{P(T > 600)} = e^{-1}.$$

Esse é também o valor de $P(T > 1200)$: no modelo exponencial, o tempo de vida adicional não depende da idade já alcançada.

Referências

- Apostol, Tom M (2007). *Calculus, Volume I*. John Wiley & Sons.
- Cabral, Marco Aurélio Palumbo (2013). *Curso de Cálculo de Uma Variável*.
- Courant, Richard (2011). *Differential and Integral Calculus*. Vol. 2. John Wiley & Sons.
- Demidovitch, Boris (1977). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*.
- Dence, Thomas P e Joseph B Dence (2009). *Advanced Calculus: A Transition to Analysis*. Academic Press.
- Edwards, Charles Henry e David E Penney (1982). *Calculus and Analytic Geometry*. Prentice-Hall.
- Fitzpatrick, Patrick (2006). *Advanced Calculus*. Vol. 5. American Mathematical Soc.
- Guichard, David, Neal Koblitz e H Jerome Keisler (2014). *Calculus: Early Transcendentals*. Whitman College.
- Guidorizzi, Hamilton Luiz (2001). *Um Curso de Cálculo*. Livros Técnicos e Científicos Editora.
- Hartman, Gregory (2015). *APEX Calculus I*.
- Kallam, Linda G. e Michael Kallam (1996). *An Investigation into a Problem-Solving Strategy for Indefinite Integration and Its Effect on Test Scores of General Calculus Students*. Research/Technical Report ED393674. ERIC.
- Kline, Morris (1998). *Calculus: An Intuitive and Physical Approach*. Courier Corporation.
- Krantz, Steven G (2011). *The Integral: a Crux for Analysis*. Vol. 4. 1. Morgan & Claypool Publishers, pp. 1–105.
- Leithold, Louis (1972). *The Calculus with Analytic Geometry*. Vol. 1. Harper & Row.
- Lima, Elon Lages (2008). *Análise Real Volume 1*.
- Malta, Iaci, Sinésio Pesco e Hélio Lopes (2002). *Cálculo a Uma Variável: Uma Introdução ao Cálculo*. Editora PUC-Rio/Loyola.
- Mercer, Peter R (2014). *More Calculus of a Single Variable*. Springer.
- Oliveira, Oswaldo de et al. (2013). «The Implicit and Inverse Function Theorems: Easy Proofs». Em: *Real Analysis Exchange* 39.1, pp. 207–218.
- Pugh, Charles Chapman (2002). *Real Mathematical Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer.
- Rudin, Walter et al. (1964). *Principles of mathematical analysis*. Vol. 3. McGraw-hill New York.
- Schoenfeld, Alan H. (1978). «Presenting a Strategy for Indefinite Integration». Em: *The American Mathematical Monthly* 85.8, pp. 673–678. DOI: 10.2307/2320344.
- Simmons, George F (1985). *Calculus with Analytic Geometry*. New York: McGraw-Hill.
- Spivak, Michael (1984). *Calculus*.
- (1995). *The Hitchhiker's Guide to Calculus*. Mathematical Assn of America.
- Stewart, James (2015). *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.

- Swokowski, Earl William (1979). *Calculus with Analytic Geometry*. Taylor & Francis.
- Tan, Soo (2010). *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.
- Tao, Terence (2006). *Analysis*. Vol. 1. Springer.
- Zorich, Vladimir Antonovich (2004). *Mathematical analysis II*. Vol. 65. Springer.