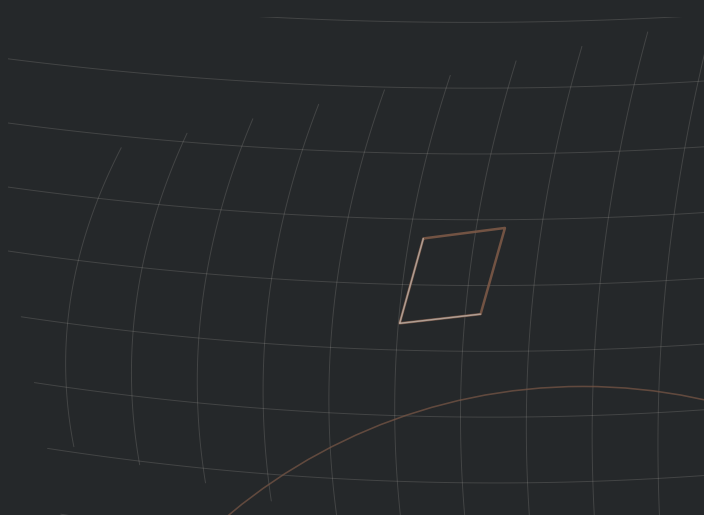
Cálculo Vetorial e Tensorial

Aspectos diferenciais e integrais

Daniel Miranda

2026



Copyright © 2018 Daniel Miranda.
Versão de trabalho — 2026.

Copyright © 2018 por Daniel Miranda
É permitido copiar, distribuir e/ou modificar este documento sob os termos da Licença de Documentação Livre GNU, Versão 1.3 ou qualquer versão posterior publicada pela Free Software Foundation; sem Seções Invariantes, sem Textos de Capa Frontal e sem Textos de Contracapa.

Estas notas foram escritas com base no código-fonte LaTeX do livro "Multivariable and Vector Calculus" de David Santos e incluem trechos de "Vector Calculus" de Michael Corral, de "Linear Algebra via Exterior Products" de Sergei Winitzki, "Linear Algebra" de David Santos e de "Introduction to Tensor Calculus" de Taha Sochi.

Esses livros também estão disponíveis sob os termos da Licença de Documentação Livre GNU.

Colaboração matemática e editorial

Este livro é de autoria de **Daniel Miranda** e foi desenvolvido e preparado editorialmente em colaboração com **Soleira — ChatGPT (OpenAI), GPT-5.6 Sol**. O trabalho recente compreendeu a tradução e a uniformização do texto, a reorganização e a reescrita de trechos, o desenvolvimento e o refinamento de demonstrações e argumentos, a revisão matemática de definições, teoremas e resultados, e o aperfeiçoamento de exemplos e exercícios. Incluiu ainda a padronização da notação, a organização didática e editorial, a revisão e reconstrução de figuras, a composição tipográfica e a manutenção do código LaTeX.

A responsabilidade final pelo conteúdo matemático e pelas escolhas autorais permanece com o autor.

Agradecimentos

Agradeço a Alan Gomes, Ana Maria Slivar e Tiago Leite Dias por todos os comentários e correções.

Percursos de leitura e exercícios

O livro pode ser lido integralmente ou em etapas. O percurso abaixo mantém o conteúdo das demonstrações e indica os pré-requisitos que permitem adiar certas generalizações até uma segunda leitura.

Núcleo de graduação. Comece pelos vetores e pelas bases do capítulo 1. No capítulo 2, use imediatamente bolas, vizinhanças, pontos de acumulação, limites relativos ao domínio e continuidade; retome compacidade quando precisar garantir extremos. O capítulo de diferenciação 3 organiza a aproximação linear, a regra da cadeia e os operadores vetoriais. Depois, curvas e superfícies (capítulo 4) dão os objetos sobre os quais integramos. Os capítulos 5 a 7 desenvolvem integrais múltiplas, trabalho, circulação e fluxo, até Green, Gauss e Stokes. As coordenadas curvilíneas do capítulo 8 completam esse núcleo ao adaptar os cálculos à geometria dos problemas.

Aplicações físicas. Kepler e os operadores diferenciais podem ser retomados após a derivada total. Potenciais e conservação são retomados nas integrais de linha; fluxo e fontes, nas integrais de superfície. O capítulo de aplicações tensoriais 11 exige os fundamentos dos capítulos 9 e 10. Uma métrica, uma forma bilinear e um operador têm componentes matriciais, mas suas mudanças de base e seus significados são diferentes.

Generalizações e aprofundamento. As seções marcadas com asterisco, os resultados locais mais avançados de diferenciação e o cálculo tensorial podem receber uma segunda leitura. Para chegar às formas diferenciais, siga a sequência: espaços duais e tensores (capítulo 9), linguagem de componentes (capítulo 10),

produto exterior (capítulo 12) e integração de formas (capítulo 13). Assim, as regras de alternância e do produto exterior precedem seu uso sistemático em integração. A derivada covariante apresentada nas coordenadas tensoriais é uma ponte com o cálculo curvilíneo euclidiano; uma teoria geral de curvatura não é pré-requisito para os capítulos anteriores.

Problemas que reaparecem. Em vez de tratar cada ferramenta isoladamente, acompanhe a cadeia de perguntas de um mesmo modelo:

Modelo	Continuidade das ferramentas
Temperatura e sensores	Limites e continuidade; diferencial e taxa observada; gradiente; fluxo térmico e condutividade anisotrópica.
Fluxo e fontes	Divergência; integrais múltiplas; superfície aberta e tampa; Gauss; forma de fluxo e conservação.
Anisotropia	Mudança de base; operador e forma bilinear; métrica e contração; direções principais e modelos físicos.

Por exemplo, para $T = 20 + x^2y + e^z$, o sensor encontra no ponto $(1, 2, 0)$ a taxa $dT(v) = 4v_1 + v_2 + v_3$. Com a condutividade $K = \operatorname{diag}(2, 1, 3)$, o fluxo nesse ponto passa a ser $q = -K\nabla T = (-8, -1, -3)$. A análise de limites, a aproximação linear e o tensor de condutividade participam, assim, do mesmo problema.

Objetivo e dificuldade dos exercícios. **Consolidação** pede reconhecer conceitos e executar procedimentos; **aplicação** pede interpretar um modelo geométrico ou físico; **justificação** pede explicar uma hipótese, escolha de método ou argumento; **aprofundamento** estende a teoria ou combina ferramentas menos imediatas. Os níveis **básico**, **médio** e **difícil** são relativos aos pré-requisitos da seção. Um exercício básico de tensores ainda exige álgebra linear. Nos grupos históricos que compartilham um enunciado, a classificação vale para o grupo; as letras A, B e C originais foram preservadas. Nos marcadores compactos, C, A, J e P indicam os quatro objetivos, nessa ordem; 1, 2 e 3 indicam os três níveis. Assim, [J2] significa justificação de nível médio.

Os códigos **N001–N214** identificam os exercícios acrescentados na primeira revisão, e **A001–A024**, os desta ampliação. Os códigos permanecem fixos mesmo com a reorganização dos capítulos. O *Gabarito comentado* apresenta os enunciados e as soluções dos dois conjuntos. Antes de consultá-lo, tente explicar por que o método escolhido se aplica; depois compare hipóteses, orientação, unidades e resultado.

Sumário

Percursos de leitura e exercícios vi

I. Cálculo Vetorial 1

1. Vetores em Dimensões Superiores 2
1.1. Espaços Vetoriais . . . 2
1.2. Bases e Mudança de Base . . . 10
1.2.1. Independência linear e conjuntos geradores . . . 10
1.2.2. Bases . . . 12
1.2.3. Coordenadas . . . 14
1.3. Transformações Lineares e Matrizes . . . 17
1.4. O Espaço Tridimensional . . . 20
1.4.1. Produto vetorial . . . 20
1.4.2. Coordenadas cilíndricas e esféricas . . . 25
1.5. ∗ Produto Vetorial em Dimensão n . . . 31
1.6. Funções de Várias Variáveis . . . 33
1.6.1. Representação gráfica de campos vetoriais . . . 34
1.7. Símbolos de Levi–Civita e Notação de Einstein . . . 37
1.7.1. Definições usuais na notação de Einstein . . . 41
1.7.2. Exemplos de demonstrações com a notação de Einstein . 41

2. Limites e Continuidade 43
2.1. Alguns conceitos de topologia . . . 43
2.2. Limites . . . 52
2.3. Continuidade . . . 61
2.4. ∗ Compacidade . . . 63

3. Diferenciação de Funções Vetoriais **67**
3.1. Diferenciação de Funções Vetoriais de uma Variável Real 68
3.1.1. Antiderivadas 76
3.2. Lei de Kepler 78
3.3. Definição da Derivada de uma Função Vetorial 81
3.4. Derivadas Parciais e Direcionais 84
3.5. A Matriz Jacobiana 87
3.6. Propriedades das Transformações Diferenciáveis 93
3.7. Gradientes, Rotacionais e Derivadas Direcionais 99
3.8. O Significado Geométrico da Divergência e do Rotacional 110
3.8.1. Divergência 110
3.8.2. Rotacional 111
3.9. Equações de Maxwell 114
3.10. Funções Inversas 116
3.11. Funções Implícitas 119
3.12. Operações Diferenciais Comuns na Notação de Einstein 122
3.12.1. Identidades Comuns na Notação de Einstein 124
3.12.1. Exemplos de Uso da Notação de Einstein para Demonstrar Identidades 127

4. Curvas e superfícies **130**
4.1. Curvas paramétricas 130
4.2. Superfícies 136
4.2.1. Superfície implícita 140
4.2.2. Duas descrições da mesma esfera 140
4.3. Exemplos clássicos de superfícies 142
4.4. ⋆ Variedades 151
4.5. Otimização com restrições 153

5. Integrais Múltiplas **159**
5.1. Integrais Duplas 159
5.2. Integrais Iteradas e o Teorema de Fubini 165
5.3. Integrais Duplas sobre Regiões Gerais 173
5.4. Integrais Triplas 178
5.5. Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas 182
5.6. Aplicação: Centro de Massa 192
5.7. Aplicação: Probabilidade e Valor Esperado 197

6. Integrais de Linha **211**
6.1. Integrais de Linha de Campos Vetoriais 211
6.2. Invariância de Parametrização e Outras Propriedades das Integrais de Linha 216
6.3. Integral de Linha de Campos Escalares 218
6.3.1. Área acima de uma Curva 220
6.4. O Primeiro Teorema Fundamental 223
6.5. Teste para um Campo Gradiente 226
6.5.1. Campos vetoriais irrotacionais 227
6.5.2. Trabalho e energia potencial 228
6.6. O Segundo Teorema Fundamental 230
6.7. Construção de Funções Potenciais 231
6.8. Teorema de Green no Plano 235
6.8.1. Escolher o método: três cálculos do mesmo trabalho . . 243
6.9. Aplicação do Teorema de Green: Área 245
6.10. Formas vetoriais do Teorema de Green 248

7. Integrais de Superfície **251**
7.1. O Produto Vetorial Fundamental 251
7.2. A Área de uma Superfície Parametrizada 255
7.2.1. A Área do Gráfico de uma Função 263
7.2.2. Teorema de Pappus 265
7.3. Integrais de Superfície de Funções Escalares 267
7.4. Integrais de Superfície de Funções Vetoriais 270
7.4.1. Orientação 270
7.4.2. Fluxo 272
7.5. Teorema de Kelvin–Stokes 276
7.6. Teorema de Gauss 284
7.6.1. Lei de Gauss para campos de inverso do quadrado . . . 287
7.6.2. Fechar uma superfície: controlar o fluxo da tampa . . . 290
7.7. Aplicações de Integrais de Superfície 291
7.7.1. Forças conservativas e potenciais 291
7.7.2. Leis de conservação 292
7.8. Decomposição de Helmholtz 294
7.9. Identidades de Green 296

II. Cálculo Tensorial **299**

8. Coordenadas Curvilíneas **300**
8.1. Coordenadas Curvilíneas 300
8.2. Elementos de Linha e de Volume em Sistemas de Coordenadas Ortogonais 307
8.3. Gradiente em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais 311
8.3.1. Expressões para os Vetores Unitários 312
8.4. Divergência em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais 313
8.5. Rotacional em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais 315
8.6. O Laplaciano em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais 317
8.7. Exemplos de Coordenadas Ortogonais 319

9. Tensores **325**
9.1. Funcional linear 325
9.2. Espaços duais 327
9.2.1. A base dual 329
9.3. Formas Bilineares 330
9.4. Tensores 332
9.4.1. Base de tensores 336
9.4.2. Contração 338
9.4.3. Um tensor de três argumentos, do objeto às componentes 338
9.5. Mudança de coordenadas 340
9.5.1. Vetores e covetores 341
9.5.2. Formas bilineares 341
9.6. Propriedades de simetria dos tensores 342
9.7. Formas 344
9.7.1. Motivação 344
9.7.2. Produto exterior 345
9.7.3. Operador estrela de Hodge 350

10. Tensores em coordenadas **352**
10.1. Notação indicial para tensores 352
10.1.1. Começar pelo tipo antes de começar pelos índices 352
10.1.2. Definição da notação indicial 354
10.1.3. Vantagens e desvantagens da notação indicial 357
10.2. Tensores novamente: mudança de coordenadas 358
10.2.1. Uma mudança de base acompanhada do começo ao fim . 358
10.2.2. A métrica: medir comprimentos sem supor ortogonalidade 359

10.2.3. Ordem 363
10.2.4. Exemplos de tensores de diferentes ordens 364
10.3. Operações tensoriais em coordenadas 366
10.3.1. Adição e subtração 366
10.3.2. Multiplicação por escalar 367
10.3.3. Produto tensorial 368
10.3.4. Contração 369
10.3.5. Produto interno 370
10.3.6. Permutação 371
10.3.7. Contração, avaliação e produto: conferir o resultado . . 372
10.3.8. Transposição e adjunto: qual operação é intrínseca? . . 372
10.3.9. Uma contração completa que mede um tensor 373
10.3.10. Por que a contração independe da base 373
10.4. Delta de Kronecker e símbolo de Levi-Civita 374
10.4.1. Kronecker δ 375
10.4.2. Permutação ϵ 375
10.4.3. Identidades úteis envolvendo δ e/ou ϵ 376
10.4.4. $*$ Delta de Kronecker generalizado 380
10.4.5. Do símbolo alternante à forma volume 380
10.5. Tipos de campos tensoriais 382
10.5.1. Tensores isotrópicos e anisotrópicos 382
10.5.2. Tensores simétricos e antissimétricos 383
10.5.3. Campos tensoriais: a base também pode variar 385
10.5.4. Recuperar divergência e gradiente em polares 386

11. Aplicações de tensores **388**
11.1. O tensor de inércia 388
11.1.1. Teorema dos eixos paralelos 391
11.2. Lei de Ohm 393
11.3. Equação do movimento de um fluido: equação de Navier–Stokes 395
11.3.1. Tensor de tensão 396
11.3.2. Derivação das equações de Navier–Stokes 396

12. Produto exterior **402**
12.1. Motivação 402
12.1.1. Área orientada bidimensional 402
12.1.2. Paralelogramos em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^n$ 405
12.2. Produto exterior 408
12.2.1. Definição do produto exterior 409

12.2.2. * Produto tensorial simétrico 416
12.3. Propriedades dos espaços $\bigwedge^k V$ 417
12.3.1. Aplicações lineares entre espaços $\bigwedge^k V$ 419
12.3.2. Produto exterior e dependência linear 422
12.3.3. Cálculo da base dual 426
12.3.4. Eliminação de Gauss 429
12.3.5. Posto de um conjunto de vetores 432
12.3.6. Produto exterior na notação indicial 435
12.3.7. * Álgebra exterior (álgebra de Grassmann) 439

13. Integração de Formas **443**
13.1. Formas diferenciais 443
13.2. Integração de Formas Diferenciais 447
13.3. Variedades de dimensão zero 449
13.4. Variedades de dimensão um 450
13.5. Formas fechadas e exatas 456
13.6. Variedades de dimensão dois 462
13.7. Variedades de dimensão três 464
13.8. Integrais de superfície 466
13.9. Teoremas de Green, Stokes e Gauss 471
13.9.1. Uma partição da unidade em um intervalo 471

Referências **481**

Gabarito comentado **483**
Capítulo 1: Vetores em Dimensões Superiores 483
Capítulo 2: Limites e Continuidade 487
Capítulo 3: Diferenciação de Funções Vetoriais 489
Capítulo 4: Curvas e superfícies 495
Capítulo 5: Integrais Múltiplas 499
Capítulo 6: Integrais de Linha 500
Capítulo 7: Integrais de Superfície 507
Capítulo 8: Coordenadas Curvilíneas 513
Capítulo 9: Tensores 517
Capítulo 10: Tensores em coordenadas 523
Capítulo 11: Aplicações de tensores 528
Capítulo 12: Produto exterior 531
Capítulo 13: Integração de Formas 535

Parte I.

Cálculo Vetorial

CAPÍTULO

1

Vetores em Dimensões Superiores

1.1. Espaços Vetoriais

Neste capítulo começamos a organizar a geometria de $\mathbb{R}^n$ a partir de sua estrutura algébrica. Para $n = 2$ e $n = 3$, estamos acostumados a interpretar os elementos de $\mathbb{R}^n$ como coordenadas de pontos no plano ou no espaço. Quando $n \geq 4$, essa visualização direta deixa de ser possível, mas muitas das ideias geométricas familiares continuam válidas e ajudam a compreender o caso geral.

> **Definição 1.1**
> O **espaço n-dimensional** $\mathbb{R}^n$ é o conjunto
>
> $$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,:\, x_k \in \mathbb{R}\}.$$

Os elementos $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ serão chamados de **vetores**. No texto, usaremos normalmente o negrito $\mathbf{v}$; no quadro, é comum representá-los por uma seta, $\vec{v}$.

Definição 1.2

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, sua **soma vetorial** $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é definida coordenada a coordenada por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \tag{1.1}$$

Observe que o símbolo "+" desempenha dois papéis em (1.1): à esquerda, denota a soma de vetores que acabamos de definir; à direita, denota a soma usual de números reais.

O vetor cujas componentes são todas nulas é chamado de **vetor nulo** e denotado por $\mathbf{0}$. Ele satisfaz $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ e, portanto, é o elemento neutro da soma vetorial.

Definição 1.3

Um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ será chamado de **escalar**. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, definimos a **multiplicação por escalar** por

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \tag{1.2}$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$, equipado com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas acima, é o espaço vetorial real n-dimensional.

O vetor $(-1)\mathbf{x}$ também é denotado por $-\mathbf{x}$ e chamado de **oposto** de $\mathbf{x}$.

As propriedades fundamentais dessas operações são reunidas no teorema a seguir.

Teorema 1.1

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então

1. $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{z} + \mathbf{x}$ (comutatividade da soma);
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{z}) + \mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{z} + \mathbf{y})$ (associatividade da soma);
3. existe um único vetor $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
4. para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, existe um único vetor $-\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
5. $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{x}$;

6 $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{x}$;

7 $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z}$;

8 $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

A verificação é imediata a partir das operações coordenada a coordenada. Em particular,

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0),$$

e, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, então

$$-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

Escrevemos $\mathbf{x} + (-\mathbf{z})$ simplesmente como $\mathbf{x} - \mathbf{z}$. Quando interpretado como ponto, o vetor $\mathbf{0}$ é a origem.

Em um contexto mais geral, um conjunto não vazio V, munido de duas operações de soma e multiplicação por escalares, é chamado de **espaço vetorial** quando satisfaz as propriedades do Teorema 1.1. Seus elementos são chamados vetores.

Em $\mathbb{R}^n$, um mesmo elemento pode ser visto como ponto ou como vetor. Usaremos a palavra *vetor* quando quisermos enfatizar a estrutura algébrica e a palavra *ponto* quando o aspecto geométrico for mais importante.

Definição 1.4

A **base canônica ordenada** de $\mathbb{R}^n$ é a coleção

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\},$$

em que

$$\mathbf{e}_k = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)}_{\text{1 na } k\text{-ésima posição e 0 nas demais}}.$$

Para todo $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} v_k\mathbf{e}_k = (v_1, v_2, \dots, v_n). \tag{1.3}$$

Assim, todo vetor pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base canônica. Voltaremos a esse fato na seção seguinte.

Definição 1.5

Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ pontos distintos e $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. A **reta paramétrica** que passa por $\mathbf{a}$ na direção de $\mathbf{x}$ é o conjunto

$$\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{x}, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 1.1

Determine uma equação paramétrica da reta que passa pelos pontos $(1, 2, 3)$ e $(-2, -1, 0)$.

Solução. Um vetor diretor é

$$(1 - (-2), 2 - (-1), 3 - 0) = (3, 3, 3).$$

Logo, uma equação da reta é

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 3, 3).$$

Equivalentemente,

$$(x, y, z) = (-2, -1, 0) + t(3, 3, 3).$$

◁

Comprimento, distância e produto interno

Definição 1.6

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, seu **produto interno** é definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Teorema 1.2

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valem:

1. $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$;
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
3. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$;
4. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Essas propriedades seguem diretamente da definição coordenada a coordenada. A **norma**, ou **comprimento**, de $\mathbf{x}$ é

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Definição 1.7

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, a **distância** entre eles é

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Para $n = 1$, essa definição reduz-se ao valor absoluto. Para $n = 2$ e $n = 3$, recuperamos as fórmulas usuais da geometria euclidiana.

Definição 1.8

Um vetor $\mathbf{x}$ é chamado de **vetor unitário** quando

$$\|\mathbf{x}\| = 1.$$

Definição 1.9

Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, o **versor** associado a $\mathbf{x}$, denotado por $\hat{\mathbf{x}}$, é o vetor unitário

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Uma das desigualdades fundamentais da análise nasce diretamente dessa geometria.

Teorema 1.3 — Desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz
Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Demonstração. Se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, ambos os lados são nulos. Para $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, escolha

$$t_0 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Esse é o coeficiente da projeção de $\mathbf{x}$ sobre a reta gerada por $\mathbf{y}$. Pela não negatividade da norma ao quadrado,

$$0 \leq \|\mathbf{x} - t_0\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Multiplicando por $\|\mathbf{y}\|^2$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos a desigualdade. A igualdade ocorre precisamente quando $\mathbf{x} = t_0\mathbf{y}$; incluindo o caso nulo, isso equivale à dependência linear dos dois vetores. ∎

Em coordenadas, a desigualdade pode ser escrita como

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Teorema 1.4 — Desigualdade triangular
Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\\ &\le \|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2\\ &= (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$

Como ambos os lados são não negativos, basta extrair a raiz quadrada. ∎

Corolário 1.5

Se $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$, então $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|+\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|$.

Demonstração. Escreva $\mathbf{x}-\mathbf{y}=(\mathbf{x}-\mathbf{z})+(\mathbf{z}-\mathbf{y})$ e aplique a desigualdade triangular. ∎

Definição 1.10

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores não nulos de $\mathbb{R}^n$, o ângulo $\widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ entre eles é definido pela relação

$$\cos\widehat{(\mathbf{x},\mathbf{y})}=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

A desigualdade de Cauchy–Schwarz garante que o lado direito pertence ao intervalo $[-1,1]$.

Definição 1.11

Dois vetores não nulos $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ são **ortogonais** quando o ângulo entre eles é 90°. Equivalentemente,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0.$$

Seja $P_0=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ e seja $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\dots,n_n)$ um vetor não nulo.

Definição 1.12

O **hiperplano** determinado pelo ponto P_0 e pelo vetor normal $\mathbf{n}$ é o conjunto dos pontos $P=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tais que o vetor de P_0 a P é perpendicular a $\mathbf{n}$.

Em termos do produto interno, a condição é

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0)=0.$$

Desenvolvendo,

$$n_1(x_1 - p_1) + \cdots + n_n(x_n - p_n) = 0,$$

que é a forma ponto–normal da equação de um hiperplano. Equivalentemente,

$$n_1 x_1 + \cdots + n_n x_n + d = 0,$$

onde

$$d = -(n_1 p_1 + \cdots + n_n p_n).$$

Exemplo 1.2 — Força útil em uma direção

Uma força $\mathbf{F} = (6, 2, -1)$, em newtons, atua sobre um mecanismo que só pode mover-se na direção de $\mathbf{d} = (2, 1, 2)$. Determine a componente vetorial da força nessa direção e a força transversal.

Solução. A direção unitária é $\mathbf{u} = \mathbf{d}/3$. A componente escalar é

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \frac{12 + 2 - 2}{3} = 4 \text{ N}.$$

Logo, $\mathbf{F}_{\parallel} = 4\mathbf{u} = (8/3, 4/3, 8/3)$ e

$$\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\parallel} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{11}{3}\right).$$

Conferimos $\mathbf{F}_{\perp} \cdot \mathbf{d} = 0$. A componente longitudinal produz trabalho em um deslocamento nessa direção; a transversal é equilibrada pela restrição do mecanismo. ◁

Exercícios

Exercício N001 — Consolidação; básico

Calcule a norma, o versor e a projeção de $(3, -1, 2)$ sobre a reta gerada por $(1, 2, 2)$.

Exercício N002 — Aplicação; médio

Determine o ponto do plano $2x - y + 2z = 3$ mais próximo de $P = (1, 2, 3)$ e sua distância a P. Use a direção normal ao plano.

Exercício N003 **Aplicação; médio**

Uma força $\mathbf{F} = (4, 3, 0)$ N atua ao longo de um deslocamento $\mathbf{s} = (2, -1, 2)$ m. Calcule $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ e decomponha $\mathbf{F}$ em componentes paralela e perpendicular a $\mathbf{s}$.

Exercício N004 **Justificação; médio**

Deduza a desigualdade triangular inversa $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ e determine os casos de igualdade em Cauchy–Schwarz.

1.2. Bases e Mudança de Base

Uma base permite separar o vetor geométrico de sua descrição por coordenadas. A independência linear garante a unicidade dessa descrição, enquanto a propriedade de gerar o espaço garante sua existência. A mudança de base modifica os coeficientes, mas preserva o vetor.

1.2.1. Independência linear e conjuntos geradores

Definição 1.13

Se $\lambda_i \in \mathbb{R}$, uma expressão da forma

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j$$

é chamada de **combinação linear** dos vetores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Definição 1.14

Os vetores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ são **linearmente dependentes** quando existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Definição 1.15

Os vetores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ são **linearmente independentes** quando a única combinação linear que produz o vetor nulo é a trivial; isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Exemplo 1.3

A família

$$\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)\}$$

é linearmente dependente em $\mathbb{R}^3$, pois

$$(1,2,3) - 2(4,5,6) + (7,8,9) = (0,0,0).$$

Definição 1.16

Uma família $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}^n$ **gera** $\mathbb{R}^n$ se todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores da família.

Exemplo 1.4

Pela identidade (1.3), a base canônica gera $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.6

Se uma família $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ gera $\mathbb{R}^n$, então qualquer família que a contenha também gera $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Basta observar que uma combinação linear dos vetores originais continua sendo uma combinação linear da família maior, atribuindo coeficiente zero aos vetores acrescentados. ■

Exemplo 1.5

A família

$$\{\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)\}$$

gera $\mathbb{R}^3$, pois

$$(a,b,c) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Exemplo 1.6

Mostre que

$$\{\mathbf{t}_1 = (1,0,0), \mathbf{t}_2 = (1,1,0), \mathbf{t}_3 = (1,1,1)\}$$

gera $\mathbb{R}^3$.

Solução. Para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a,b,c) = (a-b)\mathbf{t}_1 + (b-c)\mathbf{t}_2 + c\mathbf{t}_3.$$

◁

1.2.2. Bases

Definição 1.17

Uma família $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma **base** de $\mathbb{R}^n$ se

1. é linearmente independente;
2. gera $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.7

A família canônica

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

com 1 na i-ésima posição, é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.7

Todas as bases de $\mathbb{R}^n$ têm o mesmo número de vetores.

Definição 1.18

A **dimensão** de $\mathbb{R}^n$ é o número de vetores de qualquer de suas bases, isto é, n.

Teorema 1.8

Uma família $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma base se, e somente se, a matriz A cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ é invertível.

Demonstração. Para $X = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, $AX = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n$. Se A é invertível, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ existe um único vetor de coeficientes $X = A^{-1}\mathbf{v}$ tal que $AX = \mathbf{v}$. Portanto, as colunas de A geram $\mathbb{R}^n$ e são linearmente independentes, logo formam uma base.

Reciprocamente, se $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base, todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ possui uma única representação como combinação linear dessas colunas. Assim, para cada $\mathbf{v}$ a equação $AX = \mathbf{v}$ possui solução única, e A é invertível. ∎

Definição 1.19

1. Uma base $E = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ é **ortogonal** se $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0$ sempre que $i \neq j$.
2. Uma base ortogonal é **ortonormal** se todos os seus vetores têm norma 1.

1.2.3. Coordenadas

Teorema 1.9

Se $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ admite uma única representação

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Demonstração. A existência decorre de E gerar $\mathbb{R}^n$. Para a unicidade, suponha também que

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n.$$

Subtraindo as duas representações,

$$\mathbf{0} = (x_1 - b_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (x_n - b_n)\mathbf{e}_n.$$

Como a base é linearmente independente, todos os coeficientes são nulos, e portanto $x_i = b_i$ para todo i. ∎

Definição 1.20

Uma **base ordenada** é uma base na qual a ordem dos vetores foi fixada. Se $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base ordenada e

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n,$$

os escalares $a_1, \dots, a_n$ são as **coordenadas** de $\mathbf{x}$ na base E. Denotamos o vetor de coordenadas por

$$[\mathbf{x}]_E,$$

ou simplesmente $[\mathbf{x}]$ quando a base estiver clara.

Exemplo 1.8

A base ordenada canônica de $\mathbb{R}^3$ é $E = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. O vetor $(1, 2, 3)$ tem coordenadas $(1, 2, 3)_E$. Se trocarmos a ordem para $F = \{\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}\}$, o mesmo vetor terá coordenadas $(1, 3, 2)_F$.

Observação 1.10

Quando uma base não é indicada, assumiremos a base canônica.

Exemplo 1.9

Como

$$(1,2,3) = -(1,0,0) - (1,1,0) + 3(1,1,1),$$

na base ordenada

$$E = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\},$$

temos

$$(1,2,3) = (-1,-1,3)_E.$$

Exemplo 1.10

Considere as bases

$$E = \{(1,1),(1,2)\}, \qquad F = \{(2,1),(1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas, na base F, do vetor cujas coordenadas na base E são $(3,4)_E$.

Solução. Procuramos x, y tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (x,y)_F.$$

Logo,

$$(x,y)_F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}_F.$$

De fato,

$$(3,4)_E = 3(1,1) + 4(1,2) = (7,11),$$

e

$$(6,-5)_F = 6(2,1) - 5(1,-1) = (7,11).$$

◁

Sejam agora E e F duas bases de $\mathbb{R}^n$. Se A é a matriz formada pelas colunas de E e B a matriz formada pelas colunas de F, então, para vetores de coordenadas X_E e Y_F do mesmo vetor,

$$AX_E = BY_F.$$

Como A e B são invertíveis,

$$Y_F = B^{-1}AX_E, \qquad X_E = A^{-1}BY_F.$$

Definição 1.21

Sejam $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ e $F = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^n$. Se A e B são, respectivamente, as matrizes cujas colunas são os vetores de E e de F, então

$$P = B^{-1}A$$

é a **matriz de mudança de base** de E para F, enquanto

$$P^{-1} = A^{-1}B$$

é a matriz de mudança de base de F para E.

Exemplo 1.11

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$E = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\},$$

$$F = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (2,0,0)\}.$$

Determine a matriz de mudança de base de E para F, sua inversa e as coordenadas em F do vetor $(1,2,3)_E$.

Solução. Tomando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$P = B^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

e

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$Y_F = P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ \dfrac{11}{2} \end{pmatrix}_F .$$

A verificação na base canônica fornece o mesmo vetor $(6, 3, 1)$ em ambos os casos.◁

Exercícios

Exercício N005 **Consolidação; médio**

Para $E = ((1, 1), (1, -1))$ e $F = ((1, 0), (1, 2))$, determine a matriz de mudança de E para F e as coordenadas em F do vetor $[v]_E = (2, -3)$. Confira o vetor na base canônica.

Exercício N006 **Consolidação; básico**

Determine para quais valores de a os vetores $(1, a, 0)$, $(0, 1, a)$ e $(a, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício N007 **Justificação; médio**

Se E é ortonormal, mostre que $[v]_E$ tem componentes $v \cdot e_i$. Explique por que essa fórmula precisa ser modificada em uma base não ortogonal.

1.3. Transformações Lineares e Matrizes

As coordenadas também permitem representar operações geométricas por matrizes. Cada coluna registra a imagem de um vetor da base do domínio; por isso, a ordem das bases precisa ser fixada antes de calcular a matriz.

Definição 1.22

Uma **transformação linear** $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função que satisfaz

- **aditividade:** $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$;
- **homogeneidade:** $L(\lambda \mathbf{x}) = \lambda L(\mathbf{x})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente,

$$L(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + \lambda L(\mathbf{y}).$$

Se $E = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$ e $F = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^m$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^m$, escrevemos

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{x}_1) &= a_{11}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{m1}\mathbf{y}_m &&= \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_F \\
L(\mathbf{x}_2) &= a_{12}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{m2}\mathbf{y}_m &&= \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}_F \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots &&\qquad\quad \vdots \\
L(\mathbf{x}_n) &= a_{1n}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{y}_m &&= \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}_F .
\end{aligned}$$

Definição 1.23

A matriz

$$M_L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a **representação matricial** de L relativamente às bases E e F.

Exemplo 1.12

Considere $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$L(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, z).$$

1. Determine a matriz de L na base canônica.
2. Determine a matriz de L na base ordenada $E = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, usada tanto no domínio quanto na imagem.

Solução.

1 Como

$$L(1,0,0) = (1,1,0), \quad L(0,1,0) = (-1,1,0), \quad L(0,0,1) = (-1,1,1),$$

a matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2 Na base E,

$$L(1,0,0) = (0,1,0)_E,$$
$$L(1,1,0) = (-2,2,0)_E,$$
$$L(1,0,1) = (-3,2,1)_E.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz procurada.

◁

Definição 1.24

O **posto por colunas** de uma matriz A é a dimensão do espaço gerado por suas colunas; o **posto por linhas** é a dimensão do espaço gerado por suas linhas.

Um teorema fundamental da Álgebra Linear afirma que esses dois números são iguais. Seu valor comum é chamado simplesmente de **posto** da matriz.

Exercícios

Exercício N008 **Aplicação; básico**

Uma deformação plana é $L(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. Determine sua matriz, as imagens dos eixos e a razão entre as áreas de uma região e de sua imagem.

Exercício N009 **Consolidação; básico**

Para $L(x, y, z) = (x - y, y - z)$, determine o núcleo, a imagem e o posto.

Exercício N010 **Justificação; médio**

Se P transforma coordenadas de E para F e A_E representa L em E, deduza $A_F = PA_EP^{-1}$ e aplique ao operador $L(x, y) = (3x, y)$ com E canônica e $F = ((1, 1), (1, -1))$.

1.4. O Espaço Tridimensional

Vamos agora especializar algumas das construções anteriores ao caso particularmente importante de $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.25

O espaço tridimensional é

$$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{r} = (x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Depois de escolher o eixo z apontando para cima, ainda precisamos fixar a orientação dos eixos x e y. Adotaremos o **sistema de coordenadas orientado pela mão direita**, mostrado na Figura 1.1. Defina

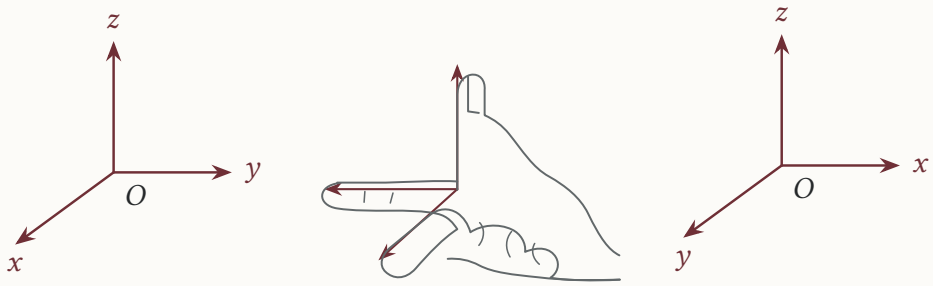
$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1),$$

de modo que

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

1.4.1. Produto vetorial

O produto vetorial de **dois** vetores, na forma usual, é definido apenas em $\mathbb{R}^3$. Mais adiante, na Seção 1.5, veremos uma generalização para dimensões arbitrárias.



Mão direita. Regra da mão direita. Mão esquerda.

Figura 1.1.: Orientação dos eixos: trocar x e y inverte a orientação.

Definição 1.26

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto vetorial** $\times$ satisfaz

1. **anticomutatividade:** $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$;
2. **bilinearidade:**
$$(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{z} \times \mathbf{y},$$
$$\mathbf{x} \times (\mathbf{z} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{x} \times \mathbf{y};$$
3. **homogeneidade:** $(\lambda \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\lambda \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$;
4. $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
5. **regra da mão direita:**
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Geometricamente, o produto vetorial produz, a partir de dois vetores não paralelos de um plano, um vetor perpendicular a esse plano.

Exemplo 1.13

Calcule
$$(1, 0, -3) \times (0, 1, 2)\,.$$

Solução. Temos

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}-3\mathbf{k})\times(\mathbf{j}+2\mathbf{k}) &= \mathbf{i}\times\mathbf{j}+2\mathbf{i}\times\mathbf{k}-3\mathbf{k}\times\mathbf{j}-6\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\ &= \mathbf{k}-2\mathbf{j}+3\mathbf{i}\\ &= 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(1,0,-3)\times(0,1,2)=(3,-2,1)\,.$$

◁

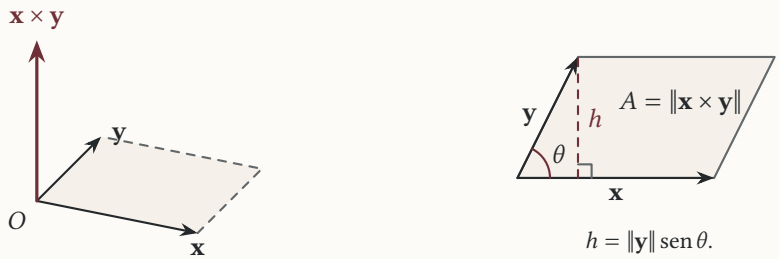
Observação 1.11

O produto vetorial não é associativo. Por exemplo,

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j},$$

enquanto

$$(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}=\mathbf{0}.$$



Normal ao plano dos vetores.

Figura 1.2.: Produto vetorial e área do paralelogramo.

Teorema 1.12

Se $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ e $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$, então

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=(x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Demonstração. Expanda o produto usando a bilinearidade e aplique as relações da regra da mão direita. Os termos $\mathbf{i}\times\mathbf{i}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}\times\mathbf{k}$ são nulos, e os seis termos mistos se agrupam exatamente nos três coeficientes acima. ∎

Uma forma mnemônica conveniente é o determinante formal

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema 1.13

O vetor $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ é perpendicular tanto a $\mathbf{x}$ quanto a $\mathbf{y}$.

Demonstração. Substituindo a expressão coordenada do produto vetorial no produto interno $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$, os seis termos cancelam dois a dois. O mesmo argumento vale para $\mathbf{y}$. ∎

Embora o produto vetorial não seja associativo, vale a identidade do produto vetorial triplo:

Teorema 1.14

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Demonstração. Escreva $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ e $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Para a primeira componente,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= b_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - c_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}). \end{aligned}$$

As outras duas componentes são obtidas do mesmo modo. Portanto,

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

∎



$V = A_{\text{base}}h$ $V = |(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}|$

Figura 1.3.: Volume do paralelepípedo: área da base vezes a altura perpendicular.

Teorema 1.15

Se $\widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \in [0, \pi]$ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, então

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Demonstração. Uma expansão direta mostra que

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2.$$

Como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})},$$

segue que

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2 \widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Extraindo a raiz quadrada obtemos o resultado. ∎

Assim, $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ é a área do paralelogramo gerado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; veja a Figura 1.2.

Corolário 1.16

Dois vetores não nulos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ satisfazem $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ se, e somente se, são paralelos.

Corolário 1.17 — Identidade de Lagrange

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2.$$

Teorema 1.18

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$, o volume orientado do paralelepípedo gerado por eles é

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\bullet\mathbf{z}.$$

Demonstração. A base do paralelepípedo tem área $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$. Se θ é o ângulo entre $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, sua altura orientada é $\|\mathbf{z}\|\cos\theta$. Logo,

$$V = \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\|\cos\theta = (\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}.$$

■

Observação 1.19

Pela simetria cíclica,

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = (\mathbf{y}\times\mathbf{z})\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{z}\times\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}.$$

Em particular,

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}.$$

1.4.2. Coordenadas cilíndricas e esféricas

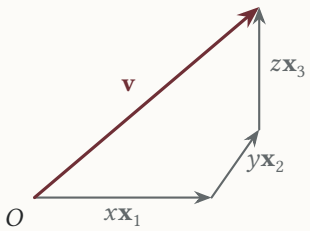


Figura 1.4.: Decomposição de $\mathbf{v}$ como soma de três deslocamentos.

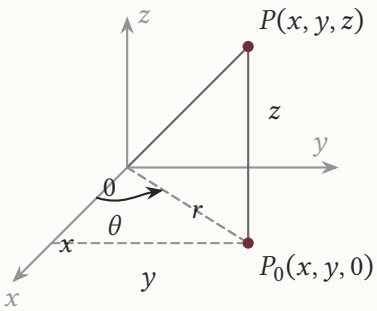
Se $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$, cada vetor $\mathbf{v}$ possui uma decomposição única

$$\mathbf{v} = x\mathbf{x}_1 + y\mathbf{x}_2 + z\mathbf{x}_3.$$

As coordenadas (x, y, z) podem ser interpretadas como deslocamentos ao longo de três direções fixas. Em sistemas de coordenadas curvilíneas, os caminhos coordenados podem ser curvos. Aqui nos concentraremos nos dois exemplos mais importantes no espaço: coordenadas cilíndricas e esféricas.

As coordenadas cilíndricas são especialmente naturais em problemas com simetria em torno do eixo z; as esféricas, em problemas com simetria em torno da origem.

Seja $P = (x, y, z)$ e seja $P_0 = (x, y, 0)$ sua projeção no plano xy. Denote por (r, θ) as coordenadas polares de (x, y), por ρ a distância da origem a P e por ϕ o ângulo entre o segmento OP e o semieixo positivo z. Então (r, θ, z) são as **coordenadas cilíndricas** e (ρ, θ, ϕ) as **coordenadas esféricas** de P.[1]

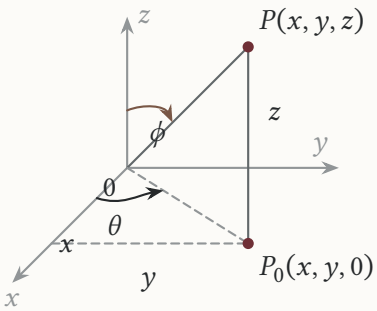


Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta &= \frac{x}{r}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \quad (r > 0) \\ z &= z & z &= z \end{aligned}$$

O par $(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$ determina o quadrante correto de θ.

[1] Na convenção mais comum em Matemática, ϕ é o ângulo polar medido a partir do eixo z. Em Física é frequente trocar os papéis de θ e ϕ.



Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ):

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z = \rho \cos\phi \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

nas expressões da coluna da direita em que os denominadores são não nulos.

Os ângulos θ e ϕ são medidos em radianos. Tomamos $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\rho \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. O ângulo θ não é definido quando $(x, y) = (0, 0)$, e ϕ não é definido na origem.

Exemplo 1.14

Converta o ponto $(-2, -2, 1)$ de coordenadas cartesianas para (a) cilíndricas e (b) esféricas.

Solução. (a) Temos

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \theta = \frac{5\pi}{4}.$$

Logo,

$$(r, \theta, z) = \left(2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, 1\right).$$

(b) Além disso,

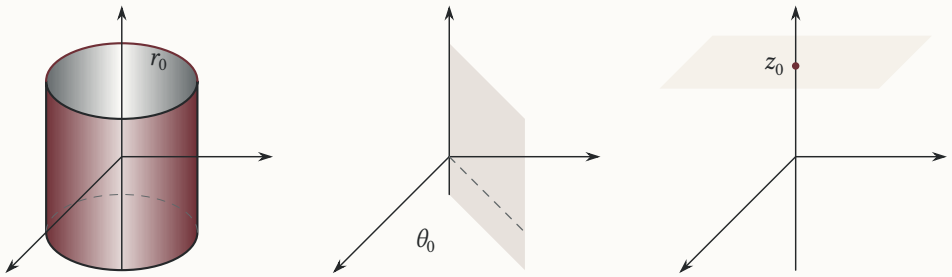
$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Portanto,

$$(\rho, \theta, \phi) = \left(3, \frac{5\pi}{4}, \cos^{-1}\frac{1}{3}\right).$$

◁

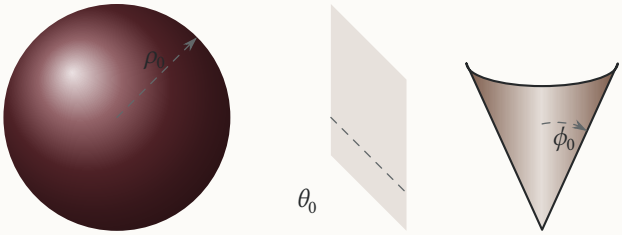
Em coordenadas cilíndricas, as superfícies $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ e $z = z_0$ são, respectivamente, um cilindro circular em torno do eixo z, um semiplano com bordo nesse eixo e um plano paralelo ao plano xy.



(a) $r = r_0$ (b) $\theta = \theta_0$ (c) $z = z_0$

Figura 1.5.: Superfícies coordenadas cilíndricas.

Em coordenadas esféricas, as superfícies $\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$ e $\phi = \phi_0$ são, respectivamente, uma esfera centrada na origem, um semiplano com bordo no eixo z e um cone circular com vértice na origem.



(a) $\rho = \rho_0$ (b) $\theta = \theta_0$ (c) $\phi = \phi_0$

Figura 1.6.: Superfícies coordenadas esféricas.

As Figuras 1.5(a) e 1.6(a) explicam a origem dos nomes desses sistemas.

Exemplo 1.15
Escreva a equação do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ em coordenadas cilíndricas.

Solução. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a equação é simplesmente $r = 2$. ◁

Exemplo 1.16
Escreva $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ em coordenadas esféricas.

Solução. Expandindo,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 5 = 9.$$

Substituindo as coordenadas esféricas,

$$\rho^2 - 4\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta - 2\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta - 4 = 0.$$

Nesse caso, a expressão esférica é menos transparente que a cartesiana, na qual vemos imediatamente uma esfera de raio 3 e centro $(2, 1, 0)$. ◁

Exemplo 1.17
Descreva a superfície dada por $\theta = z$ em coordenadas cilíndricas.

Solução. Essa superfície é um *helicoide*. À medida que z aumenta, o ângulo θ aumenta na mesma proporção, enquanto r permanece livre. O resultado lembra uma escada em espiral. A Figura 1.7 mostra a parte com $0 \leq z \leq 4\pi$ e $0 \leq r \leq 2$. ◁

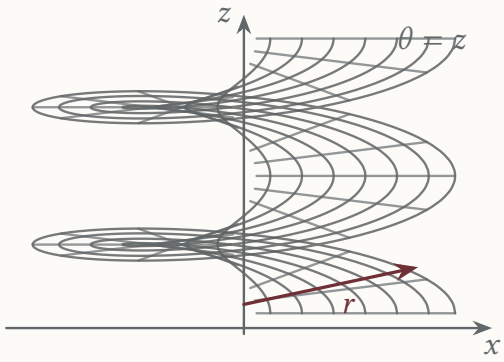


Figura 1.7.: Helicoide $\theta = z$.

Exercícios

A

Nos Exercícios 1–4, determine as coordenadas (a) cilíndricas e (b) esféricas do ponto dado em coordenadas cartesianas.

1 [C1] $(2, 2\sqrt{3}, -1)$

2 [C1] $(-5, 5, 6)$

3 [C1] $(\sqrt{21}, -\sqrt{7}, 0)$

4 [C1] $(0, \sqrt{2}, 2)$

Nos Exercícios 5–7, escreva a equação dada em coordenadas (a) cilíndricas e (b) esféricas.

5 [C1] $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

6 [C1] $x^2 + y^2 = 2y$

7 [C1] $x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$

B

8 [A2] Descreva a interseção das superfícies $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e $\phi = \dfrac{\pi}{4}$ em coordenadas esféricas.

9 [J2] Mostre que, para $a \neq 0$, a equação $\rho = 2a \operatorname{sen}\phi \cos\theta$ descreve uma esfera de centro $(a, 0, 0)$ e raio $|a|$.

C

10 [A3] Seja $P = (a, \theta, \phi)$ em coordenadas esféricas, com $a > 0$ e $0 < \phi < \pi$. Prolongue o segmento da origem a P até sua interseção com o cilindro $r = a$. Determine as coordenadas cilíndricas desse ponto.

11 [J3] Se P_1 e P_2 têm coordenadas esféricas $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$ e $(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$, mostre que o ângulo γ entre seus vetores posição satisfaz

$$\cos\gamma = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

12 [J3] Mostre que a distância entre pontos de coordenadas cilíndricas (r_1, θ_1, z_1) e (r_2, θ_2, z_2) é

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (z_2 - z_1)^2}.$$

13 [A3] Obtenha uma fórmula análoga para a distância entre dois pontos dados em coordenadas esféricas.

1.5. ∗ Produto Vetorial em Dimensão n

É natural perguntar até que ponto o produto vetorial tridimensional pode ser generalizado para $\mathbb{R}^n$. A resposta depende das propriedades que desejamos preservar.

Duas generalizações imediatas seriam procurar um produto binário

$$\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

ou um produto de $n-1$ vetores

$$\times : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n-1 \text{ fatores}} \to \mathbb{R}^n.$$

Sob hipóteses naturais, um produto binário com propriedades análogas ao produto vetorial usual existe apenas nas dimensões 3 e 7; veja [1]. Aqui adotaremos a segunda generalização.

Definição 1.27

Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. O **produto vetorial generalizado** $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é o

único vetor de $\mathbb{R}^n$ tal que, para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{n-1} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$, onde o determinante é calculado nas coordenadas da base canônica. Essa definição usa o produto interno e a orientação canônica de $\mathbb{R}^n$; em particular, $\mathbf{e}_1 \times \cdots \times \mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{e}_n$.

Também escreveremos

$$\bigtimes(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}.$$

Proposição 1.20

Se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ é a base canônica e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ têm coordenadas v_{ij}, então

$$\bigtimes(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & \cdots & v_{n-1,n} \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}.$$

A posição da linha dos vetores da base garante que a família ordenada

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \bigtimes(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}))$$

tenha orientação positiva em relação à base canônica, desde que os vetores de entrada sejam linearmente independentes. No caso dependente, o produto é nulo e a família não define uma orientação.

Proposição 1.21

O produto vetorial generalizado satisfaz:

1. $\bigtimes(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ é perpendicular a cada $\mathbf{v}_i$;
2. seu módulo é o volume do paralelepípedo $(n-1)$-dimensional gerado pelos vetores de entrada;

3 para $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{v}_n \cdot (\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}.$$

Demonstração. A fórmula por cofatores mostra a existência do vetor definido pelo determinante. A unicidade segue porque, se dois vetores têm o mesmo produto interno com todo $\mathbf{w}$, sua diferença tem produto interno nulo consigo mesma. Substituindo $\mathbf{w}$ por qualquer vetor de entrada, o determinante possui duas linhas iguais e se anula: isso prova a perpendicularidade. Se C é a matriz cujas linhas são os vetores de entrada, a identidade de Cauchy–Binet dá

$$\left\| \bigtimes (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \right\|^2 = \det(CC^{T}).$$

O lado direito é o quadrado do volume do paralelepípedo gerado por essas linhas, inclusive no caso degenerado. A última propriedade é a própria definição. ∎

Exercícios

Exercício N011 **Aprofundamento; médio**

Em $\mathbb{R}^4$, calcule $\bigtimes(e_1, e_2, e_3)$ e $\bigtimes(e_2, e_1, e_3)$; interprete a mudança de sinal.

Exercício N012 **Aprofundamento; médio**

Calcule o produto generalizado de $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$ e $(0,0,1,1)$ e verifique sua perpendicularidade aos três vetores.

Exercício N013 **Justificação; médio**

Use a matriz de Gram para conferir o módulo do vetor obtido no exercício anterior.

1.6. Funções de Várias Variáveis

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Grande parte do cálculo multivariável estuda funções

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Quando $m = 1$, chamamos f de **campo escalar**. Para $m \geq 2$, falaremos em uma **função vetorial**; no caso particular $m = n$, é comum chamá-la de **campo vetorial**

em $\mathbb{R}^n$.

Nosso objetivo será desenvolver para essas funções uma teoria análoga à do cálculo de uma variável: limites, continuidade, diferenciabilidade e integração. O aumento do número de variáveis traz novas dificuldades geométricas. O gráfico de $f : A \to \mathbb{R}^m$ é

$$\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m},$$

e, quando $n + m > 3$, já não podemos visualizá-lo diretamente. O caso $n = 2$, $m = 1$, porém, ainda produz uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e fornece boa intuição.

Definição 1.28

Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$, uma **curva de nível** de valor c é o conjunto $\{(x, y) \in A : f(x, y) = c\}$. No gráfico de f, essa curva corresponde à interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $z = c$.

Exemplo 1.18

As curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ são as elipses concêntricas

$$x^2 + 3y^2 = c, \qquad c > 0.$$

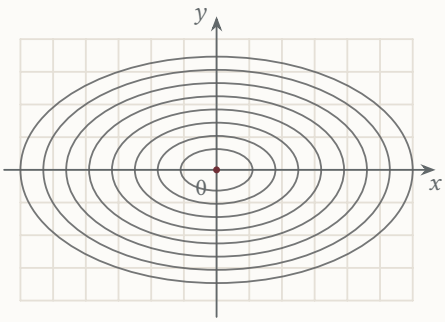


Figura 1.8.: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

1.6.1. Representação gráfica de campos vetoriais

Em dimensões baixas, podemos representar um campo vetorial desenhando, em cada ponto, uma seta correspondente ao vetor atribuído pelo campo. Assim, um

campo

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

associa a (x, y, z) o vetor

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Exemplo 1.19

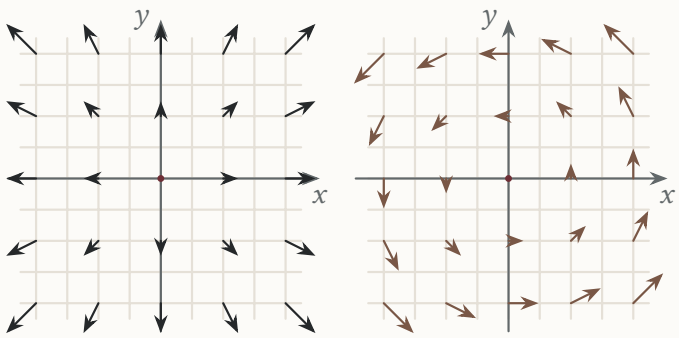
Esboce os campos

a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;

b) $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$;

c) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Solução. (a) O campo é nulo na origem e, nos demais pontos, aponta radialmente para fora.
(b) Em cada ponto, o campo é perpendicular ao do item anterior e descreve uma rotação em torno da origem.
(c) É a versão tridimensional do campo radial do item (a). ◁



Exemplo 1.20

Suponha que uma massa M esteja na origem. O campo gravitacional produzido por ela atrai uma massa teste m de acordo com a lei de Newton. Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ é o vetor posição e $r = \|\mathbf{r}\|$, então o campo gravitacional por unidade de massa é

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}.$$

Seu módulo é GM/r^2, e o sinal negativo indica que o campo aponta em direção à massa central.

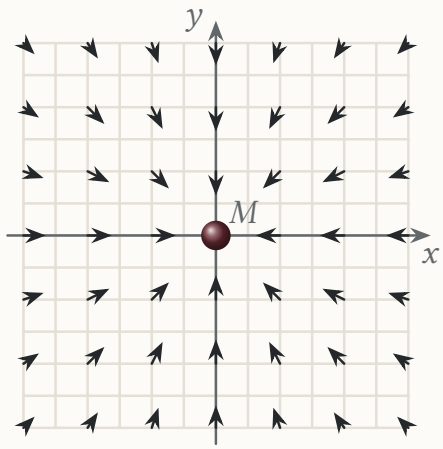


Figura 1.9.: Campo gravitacional.

Exercícios

Problema: [A1] Esboce as curvas de nível das funções:

1. $(x, y) \mapsto x + y$;
2. $(x, y) \mapsto xy$;
3. $(x, y) \mapsto \min(|x|, |y|)$;
4. $(x, y) \mapsto x^3 - x$;
5. $(x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$;
6. $(x, y) \mapsto \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$;
7. $(x, y) \mapsto \cos(x^2 - y^2)$.

Problema: [A1] Esboce as superfícies de nível das funções:

1. $(x, y, z) \mapsto x + y + z$;
2. $(x, y, z) \mapsto xyz$;
3. $(x, y, z) \mapsto \min(|x|, |y|, |z|)$;
4. $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$;
5. $(x, y, z) \mapsto x^2 + 4y^2$;
6. $(x, y, z) \mapsto \operatorname{sen}(z - x^2 - y^2)$;
7. $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.

1.7. Símbolos de Levi–Civita e Notação de Einstein

À medida que as expressões vetoriais e tensoriais se tornam mais longas, a notação por índices oferece uma forma compacta e eficiente de registrar somas e contrações. Usaremos famílias de índices com faixas previamente fixadas; por exemplo,

$$a, b, c, \dots$$
$$i, j, k, \dots$$
$$\lambda, \beta, \gamma, \dots$$

Podemos, por exemplo, reservar i, j, k para valores em $\{1, \dots, n\}$ e λ, β, γ para $\{1, \dots, m\}$ ao estudar transformações entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Na **convenção de soma de Einstein**, um índice repetido em um termo indica soma sobre todos os valores permitidos. Um índice que aparece apenas uma vez é chamado **índice livre**; um índice somado é chamado **índice mudo**. Por exemplo,

$$A^i{}_i = \sum_{i=1}^{n} A^i{}_i.$$

Como ocorre com a variável de integração em uma integral definida, índices mudos podem ser renomeados sem alterar a expressão.

> **Observação 1.22**
>
> Quando quisermos enfatizar o uso da convenção de Einstein, escreveremos a expressão dentro de $\langle\cdot\rangle$.

Exemplo 1.21

O produto interno pode ser escrito como

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x_t y_t \rangle.$$

Exemplo 1.22

Se a_i, b_j, c_k, d_l são as componentes de vetores de $\mathbb{R}^3$, então

$$\langle a_i b_i c_k d_k \rangle = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}).$$

Exemplo 1.23

Se $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathbf{M}_{n\times r}(\mathbb{R})$, então

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \langle A_{it} B_{tj} \rangle.$$

Exemplo 1.24

Para uma matriz quadrada A,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{t=1}^{n} A_{tt} = \langle A_{tt} \rangle.$$

Exemplo 1.25

Mostre, usando a convenção de Einstein, que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Solução. Temos

$$\operatorname{tr}(AB) = \langle A_{tk} B_{kt} \rangle, \qquad \operatorname{tr}(BA) = \langle B_{tk} A_{kt} \rangle.$$

Como t e k são índices mudos, podemos trocá-los, e a igualdade segue da comutatividade da multiplicação de escalares. ◁

Definição 1.29 — Delta de Kronecker

Define-se

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Exemplo 1.26

Temos

$$\langle \delta_{ik}\delta_{kj} \rangle = \delta_{ij}.$$

Exemplo 1.27

Também,

$$\langle \delta_{ij}a_i b_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Recorde que uma permutação de objetos distintos é apenas uma reordenação. As seis permutações de $\{1, 2, 3\}$ se dividem em pares e ímpares conforme o número de transposições necessárias para retornar à ordem 123 seja par ou ímpar.

Definição 1.30 — Símbolo alternante de Levi–Civita

O símbolo ε_{jkl} é definido por

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 0, & \{j,k,l\} \neq \{1,2,3\}, \\ -1, & (j,k,l) \text{ é uma permutação ímpar de } (1,2,3), \\ +1, & (j,k,l) \text{ é uma permutação par de } (1,2,3). \end{cases}$$

Em particular,

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \qquad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1,$$

e qualquer componente com índices repetidos é nula.

Exemplo 1.28

O produto vetorial pode ser escrito como

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \langle \varepsilon_{jkl}(x_k y_l)\mathbf{e_j} \rangle.$$

Exemplo 1.29

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz 3×3, então

$$\det A = \langle \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \rangle.$$

Exemplo 1.30

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, então

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \langle x_i (\mathbf{y} \times \mathbf{z})_i \rangle = \langle x_i \varepsilon_{ikl} y_k z_l \rangle.$$

Identidades envolvendo δ e ε

$$\epsilon_{ijk} \delta_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} = \epsilon_{123} = 1. \tag{1.5}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \tag{1.7}$$

Essa última identidade é especialmente útil na simplificação de expressões vetoriais e tensoriais. Além disso,

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \tag{1.8}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6. \tag{1.9}$$

Exemplo 1.31

Escreva em notação de Einstein:

1. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$;
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

Solução. A primeira identidade torna-se

$$\epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \epsilon_{kij} C_k A_i B_j = \epsilon_{jki} B_j C_k A_i,$$

e a segunda,

$$\epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m = B_i (A_m C_m) - C_i (A_l B_l).$$

◁

1.7.1. Definições usuais na notação de Einstein

O traço de uma matriz $\mathbf{A}$ é

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = A_{ii}. \tag{1.10}$$

Para uma matriz 3×3,

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}. \tag{1.11}$$

Para uma matriz $n \times n$,

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{i_1 \cdots i_n} A_{1 i_1} \cdots A_{n i_n}. \tag{1.12}$$

O produto matriz–vetor é

$$[\mathbf{Ab}]_i = A_{ij} b_j, \tag{1.13}$$

e o produto de duas matrizes é

$$[\mathbf{AB}]_{ik} = A_{ij} B_{jk}. \tag{1.14}$$

O produto interno é

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i. \tag{1.15}$$

O produto vetorial é

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k. \tag{1.16}$$

O produto misto escalar é

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k. \tag{1.17}$$

1.7.2. Exemplos de demonstrações com a notação de Einstein

Exemplo 1.32

Mostre que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}).$$

Solução. Pela definição do produto misto,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k.$$

Permutações cíclicas dos índices não alteram o sinal de ϵ_{ijk}, e portanto

$$\epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \epsilon_{kij} C_k A_i B_j = \epsilon_{jki} B_j C_k A_i.$$

Isso fornece as outras duas expressões. ◁

Exemplo 1.33

Mostre que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Solução. Na i-ésima componente,

$$\begin{aligned}[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i &= \epsilon_{ijk} A_j \epsilon_{klm} B_l C_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= B_i(A_m C_m) - C_i(A_l B_l).\end{aligned}$$

Como i é livre, a identidade vale componente a componente. ◁

Exercícios

Problema: [J2] Se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, mostre que

$$\langle x_i y_i z_j \rangle = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) z_j, \qquad j = 1, 2, 3.$$

CAPÍTULO

2

Limites e Continuidade

2.1. Alguns conceitos de topologia

Roteiro de leitura: proximidade agora, compacidade depois

Este capítulo tem dois ritmos de leitura. Para começar a calcular limites, precisamos saber o que significa aproximar um ponto pelo domínio da função. Para justificar resultados válidos em uma região inteira, precisaremos mais tarde de compacidade. Os dois conjuntos de ideias permanecem no texto, mas podem ser estudados em momentos diferentes.

Conceito	Função no percurso do livro
Bola e vizinhança	Traduzir "suficientemente perto" na definição de limite.
Ponto de acumulação	Garantir que existem aproximações pelo domínio, mesmo quando a função não está definida no ponto.
Interior e fronteira	Identificar de quais direções o domínio permite aproximações.
Aberto e fechado	Descrever domínios de diferenciação e conjuntos de restrição; preparar a caracterização dos compactos.
Compacidade	Garantir extremos de funções contínuas e permitir controles uniformes nas provas de integração.

Na primeira leitura, concentre-se nos três primeiros usos e passe aos limites. Retorne aos fechados e à compacidade antes da otimização e das integrais múltiplas. Isso organiza a leitura sem dispensar as demonstrações. Em particular, a frase

"aproximar a origem" sempre significa aproximá-la por pontos do domínio: vazões positivas, por exemplo, não permitem todos os caminhos do plano.

O limite exige controlar todos os pontos suficientemente próximos de um ponto de referência. Bolas e vizinhanças formalizam essa proximidade. Antes de calcular limites, distinguiremos pontos interiores, pontos de fronteira e pontos de acumulação, pois o domínio determina por onde podemos aproximar-nos.

Definição 2.1

Seja $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e seja $\varepsilon > 0$. A **bola aberta** de centro $\mathbf{a}$ e raio ε é

$$B_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}.$$

Uma **caixa aberta** é um produto cartesiano de intervalos abertos

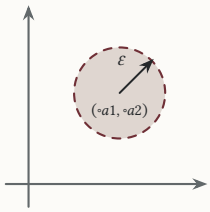
$$]a_1; b_1[\times]a_2; b_2[\times \cdots \times]a_n; b_n[,$$

em que $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ e $a_k < b_k$.

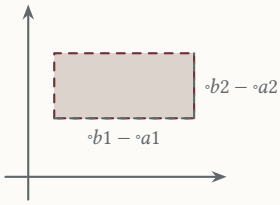
A bola $B_\varepsilon(\mathbf{a})$ também é chamada de **vizinhança-ε** de $\mathbf{a}$.

Exemplo 2.1

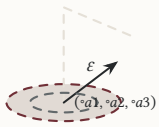
Uma bola aberta em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto; em $\mathbb{R}^2$, é um disco aberto; e, em $\mathbb{R}^3$, é uma bola aberta no sentido geométrico usual. Uma caixa aberta em $\mathbb{R}$ é um intervalo aberto; em $\mathbb{R}^2$, é um retângulo sem sua fronteira; e, em $\mathbb{R}^3$, é uma caixa sem sua fronteira.



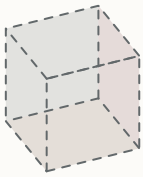
Bola aberta em $\mathbb{R}^2$.



Retângulo aberto em $\mathbb{R}^2$.



Bola aberta em $\mathbb{R}^3$.



Caixa aberta em $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.2

Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é **aberto** se, para todo $\mathbf{a} \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subseteq A.$$

Em outras palavras, cada ponto de A pode ser cercado por uma bola aberta suficientemente pequena inteiramente contida em A.

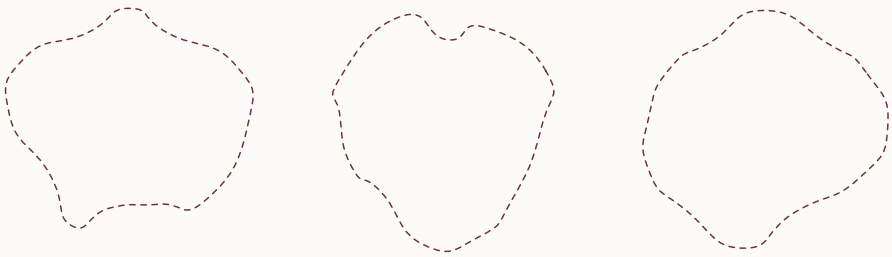


Figura 2.1.: Conjuntos abertos

Exemplo 2.2

O intervalo aberto $]-1;1[$ é aberto em $\mathbb{R}$. O intervalo $]-1;1]$, porém, não é aberto, pois nenhum intervalo centrado em 1 está inteiramente contido em $]-1;1]$.

Exemplo 2.3

A região $]-1;1[\times]0;+\infty[$ é aberta em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.4

A região elíptica $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 < 4\right\}$ é aberta em $\mathbb{R}^2$.

Caixas abertas e regiões definidas por desigualdades estritas de funções contínuas fornecem exemplos naturais de abertos. Além disso, uniões arbitrárias de conjuntos abertos e interseções finitas de conjuntos abertos continuam sendo abertas.

Definição 2.3

Um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** em $\mathbb{R}^n$ se seu complemento $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto.

Exemplo 2.5

O intervalo fechado $[-1;1]$ é fechado em $\mathbb{R}$, pois seu complemento, $\mathbb{R} \setminus [-1;1] =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ é aberto em $\mathbb{R}$. O intervalo $]-1;1]$, porém, não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.6

A região $[-1;1]\times[0;+\infty[\times[0;2]$ é fechada em $\mathbb{R}^3$.

Lema 2.1

Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_r(\mathbf{x}_0)$ para algum $r > 0$, então todo ponto do segmento de reta que liga $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ também pertence a $B_r(\mathbf{x}_0)$.

Demonstração. Um ponto do segmento tem a forma

$$\mathbf{x} = t\mathbf{x}_2 + (1-t)\mathbf{x}_1, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Como

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) + (1-t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0),$$

a desigualdade triangular fornece

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le t\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| + (1-t)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < tr + (1-t)r = r.$$

Logo, $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$. ∎

Definição 2.4

Uma sequência de pontos $\{\mathbf{x}_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ **converge para** $\overline{\mathbf{x}}$ se

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \overline{\mathbf{x}}\| = 0.$$

Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \overline{\mathbf{x}}.$$

Os dois teoremas seguintes decorrem disso, da definição de distância em $\mathbb{R}^n$ e do que já sabemos sobre convergência em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2

Seja

$$\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}), \quad k \geq 1.$$

Então $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \overline{\mathbf{x}}$ se, e somente se,

$$\lim_{k\to\infty} x_{ik} = \overline{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

isto é, uma sequência $\{\mathbf{x}_k\}$ de pontos em $\mathbb{R}^n$ converge para um limite $\overline{\mathbf{x}}$ se, e somente se, as sequências de componentes de $\{\mathbf{x}_k\}$ convergem para as respectivas componentes de $\overline{\mathbf{x}}$.

Teorema 2.3 — Critério de convergência de Cauchy

Uma sequência $\{\mathbf{x}_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ converge se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe um inteiro K tal que

$$\|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s\| < \varepsilon \text{ se } r, s \geq K.$$

Definição 2.5

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

1. $\mathbf{x}_0$ é um **ponto de acumulação** de S se, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\big(B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}\big) \cap S \neq \emptyset.$$

2. $\mathbf{x}_0$ é um **ponto de fronteira** de S se toda vizinhança de $\mathbf{x}_0$ contém pelo menos um ponto de S e pelo menos um ponto de S^c. O conjunto desses pontos é a **fronteira** de S, denotada por ∂S.

3. O **fecho** de S, denotado por $\overline{S}$, é o conjunto formado pelos pontos de S e por seus pontos de acumulação. Equivalentemente,

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

4. $\mathbf{x}_0$ é um **ponto isolado** de S se $\mathbf{x}_0 \in S$ e existe uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ que não contém nenhum outro ponto de S.

5. $\mathbf{x}_0$ é **exterior** a S se pertence ao interior de S^c. O conjunto desses pontos é o **exterior** de S.

Exemplo 2.7

Seja $S = (-\infty, -1] \cup (1, 2) \cup \{3\}$. Então

1. O conjunto dos pontos de acumulação de S é $(-\infty, -1] \cup [1, 2]$.
2. $\partial S = \{-1, 1, 2, 3\}$ e $\overline{S} = (-\infty, -1] \cup [1, 2] \cup \{3\}$.
3. 3 é o único ponto isolado de S.
4. O exterior de S é $(-1, 1) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$.

Exemplo 2.8

Para $n \geq 1$, seja

$$I_n = \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right] \quad \text{e} \quad S = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Então

1. O conjunto dos pontos de acumulação de S é $S \cup \{0\}$.
2. $\partial S = \{x | x = 0 \text{ ou } x = 1/n \ (n \geq 2)\}$ e $\overline{S} = S \cup \{0\}$.
3. S não tem pontos isolados.
4. O exterior de S é

$$(-\infty, 0) \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right)\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Exemplo 2.9

Seja S o conjunto dos números racionais. Como todo intervalo contém um número racional, todo número real é ponto de acumulação de S; portanto, $\overline{S} = \mathbb{R}$. Como todo intervalo também contém um irracional, todo número real é ponto de fronteira de S; portanto, $\partial S = \mathbb{R}$. O interior e o exterior de S são ambos vazios, e S não possui pontos isolados. S não é aberto nem fechado.

O teorema seguinte afirma que S é fechado se, e somente se, $S = \overline{S}$ (Exercício 2.1).

Teorema 2.4

Um conjunto S é fechado se, e somente se, nenhum ponto de S^c é ponto de acumulação de S.

Demonstração. Suponha que S seja fechado e que $x_0 \in S^c$. Como S^c é aberto, existe uma vizinhança de x_0 contida em S^c e, portanto, sem pontos de S. Logo, x_0 não pode ser ponto de acumulação de S. Reciprocamente, se nenhum ponto de S^c é ponto de acumulação de S, então todo ponto de S^c possui uma vizinhança contida em S^c. Portanto, S^c é aberto e S é fechado. ■

O Teorema 2.4 costuma ser enunciado da seguinte forma.

Corolário 2.5

Um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

A **curva poligonal** P é uma curva especificada por uma sequência de pontos $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ chamados de seus vértices. A curva é formada pelos segmentos de reta que ligam vértices consecutivos.

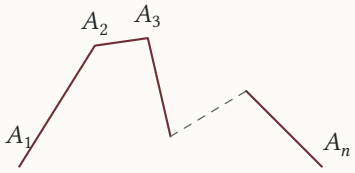


Figura 2.2.: Curva poligonal

Definição 2.6

Um **domínio** é um conjunto aberto e conexo por caminhos. Um conjunto D é **conexo por caminhos** se, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, existe uma curva contínua

$$\gamma : [0,1] \to D$$

tal que $\gamma(0) = \mathbf{x}$ e $\gamma(1) = \mathbf{y}$.

Em um aberto de $\mathbb{R}^n$, a conexão por caminhos pode ser verificada usando curvas poligonais: quaisquer dois pontos de um domínio podem ser ligados por uma curva poligonal contida no próprio domínio.

Definição 2.7

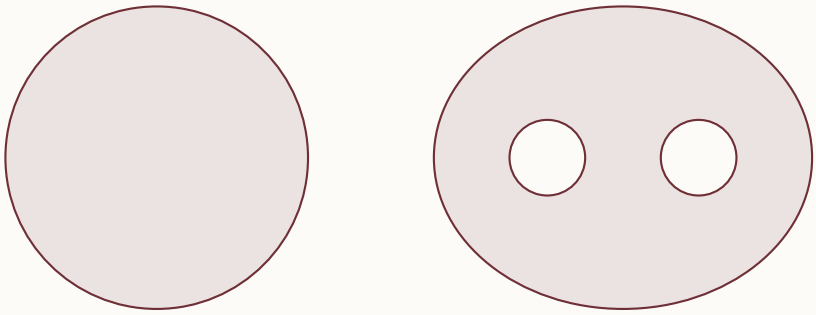
Um domínio $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** se toda curva fechada em U pode ser contraída continuamente a um ponto sem sair de U.

Mais precisamente, se $\gamma : [0,1] \to U$ satisfaz $\gamma(0) = \gamma(1)$, existe uma deformação contínua de γ para uma curva constante, inteiramente contida em U.

Exercícios

Problema: [C1] Determine se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são abertos, fechados ou nenhum dos dois em $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 1\}$
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$



(a) Domínio simplesmente conexo

(b) Domínio não simplesmente conexo

Figura 2.3.: Domínios

4 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \leq y \leq x\}$

5 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy > 1\}$

6 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \leq 1\}$

7 $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| \leq 9, x < y^2\}$

Problema — Exame Putnam de 1969: [P3] Seja $p(x, y)$ um polinômio com coeficientes reais nas variáveis x e y, definido em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Quais são as possibilidades para a imagem (contradomínio) de $p(x, y)$?

Problema — Putnam 1998: [P3] Seja F uma coleção finita de discos abertos em $\mathbb{R}^2$ cuja união contém um conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Mostre que existe uma subcoleção de discos dois a dois disjuntos $D_1, \ldots, D_N$ em F tais que

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} 3D_j,$$

onde $3D_j$ denota o disco concêntrico a D_j com raio três vezes maior.

Problema: [J2] Um conjunto S é fechado se, e somente se, nenhum ponto de S^c é ponto de acumulação de S.

2.2. Limites

Passamos da proximidade entre pontos à proximidade entre valores de uma função. Um limite conjunto deve ser o mesmo para toda aproximação permitida pelo domínio. Encontrar dois caminhos com resultados diferentes prova sua inexistência; verificar alguns caminhos com o mesmo resultado apenas sugere um candidato.

Definição 2.8

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $\mathbf{a}$ um ponto de acumulação de A. Dizemos que f tem limite $\mathbf{L}$ em $\mathbf{a}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in A$,

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon.$$

Não é necessário que f esteja definida em $\mathbf{a}$. A exigência de que $\mathbf{a}$ seja ponto de acumulação evita uma condição vazia. Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}.$$

As noções de limites infinitos, limites no infinito e continuidade em um ponto são definidas de modo análogo.

Teorema 2.6

Uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m),$$

satisfaz

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m)$$

se, e somente se,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = L_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Demonstração. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}$, então, para cada i,

$$|f_i(\mathbf{x}) - L_i| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|,$$

e portanto $f_i(\mathbf{x}) \to L_i$.

Reciprocamente, suponha que todas as componentes convirjam. Dado $\varepsilon > 0$, para cada i existe $\delta_i > 0$ tal que

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_i \quad \Longrightarrow \quad |f_i(\mathbf{x}) - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, obtemos

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |f_i(\mathbf{x}) - L_i|^2 < \varepsilon^2.$$

Logo, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}$. ■

Limites em mais de uma dimensão talvez sejam mais difíceis de encontrar, pois é preciso aproximar-se do ponto de teste por infinitas direções.

Exemplo 2.10

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \frac{x^5 y^3}{x^6+y^4} \right)$

Solução. Para a primeira componente, usamos uma estimativa válida em todo ponto diferente da origem:

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le |y| \longrightarrow 0.$$

Para a segunda, a desigualdade $2|x|^3|y|^2 \le x^6 + y^4$ fornece

$$\left| \frac{x^5 y^3}{x^6+y^4} \right| = |x|^2|y| \frac{|x|^3|y|^2}{x^6+y^4} \le \frac{1}{2}|x|^2|y| \longrightarrow 0.$$

As estimativas incluem os pontos dos eixos em que a função está definida e independem do caminho. Pelo Teorema 2.6, o limite vetorial é $(0,0)$. ◁

Exemplo 2.11 — Mistura de correntes: limite dependente da operação (médio)

Duas correntes de um mesmo líquido, com temperaturas de 80 °C e 20 °C, são misturadas sem perdas de calor. Admitindo capacidades térmicas iguais e vazões positivas q_1, q_2, a temperatura é

$$T(q_1, q_2) = \frac{80q_1 + 20q_2}{q_1 + q_2}.$$

Existe uma temperatura limite quando ambas as vazões tendem a zero?

Solução. No caminho $q_1 = q_2 = t > 0$, temos $T = 50$. No caminho $q_1 = 3t$, $q_2 = t$, temos $T = 65$. Ambos se aproximam de $(0,0)$ dentro do domínio físico e produzem resultados diferentes. Portanto, o limite conjunto não existe. O modelo conserva a razão entre as vazões; reduzir a vazão total não fixa essa razão. Nenhuma escolha de $T(0,0)$ torna a função contínua na origem. ◁

Exemplo 2.12 — Controle de erro em uma leitura térmica (médio)

Em coordenadas adimensionais, uma correção térmica é modelada por

$$T(x,y) = T_0 + \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Mostre que a leitura converge para T_0 e obtenha uma tolerância espacial que assegure erro menor que ε.

Solução. Como $y^2/(x^2+y^2) \leq 1$,

$$|T(x,y) - T_0| \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Assim, basta exigir $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, com $\delta = \varepsilon$. Essa escolha serve simultaneamente para todos os caminhos. Definir $T(0,0) = T_0$ produz uma extensão contínua. ◁

Exemplo 2.13 — Calibração: por que todas as retas podem enganar (difícil)

Uma resposta normalizada de dois sensores é

$$G(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Investigue sua estabilidade perto da origem, comparando aproximações retilíneas e não retilíneas.

Solução. Na reta $y = mx$, com $x \neq 0$,

$$G(x,mx) = \frac{m^2 x}{1+m^4x^2} \longrightarrow 0.$$

Na reta vertical $x = 0$, a resposta também é zero. Portanto, toda reta pela origem fornece o mesmo candidato. Entretanto, na parábola $x = y^2$, com $y \neq 0$, temos $G(y^2,y) = 1/2$. O limite conjunto não existe. A escolha da parábola vem do equilíbrio entre os termos do denominador, x^2 e y^4. Mesmo a estimativa $|G| \leq 1/2$, obtida de $2|x|y^2 \leq x^2 + y^4$, assegura apenas que a resposta é limitada; ela não assegura convergência. ◁

Exemplo 2.14 — Erro oscilante em um modelo tridimensional (difícil)
Um erro de medição é dado, fora da origem, por

$$E(x,y,z) = \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\,\operatorname{sen}\!\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Determine seu limite e um raio que garanta $|E| < \varepsilon$.

Solução. Ponha $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$x^2y^2z^2 \le \left(\frac{r^2}{3}\right)^3, \qquad |E| \le \frac{r^4}{27}.$$

Embora o seno oscile indefinidamente, sua amplitude tende a zero. Logo, $E \to 0$. A escolha $\delta = (27\varepsilon)^{1/4}$ satisfaz a definição de limite. A estimativa quantifica a precisão do modelo, além de determinar o limite. ◁

Exemplo 2.15
Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x+y}{x^2-y^2}$.

Solução. Quando $y = 0$,

$$\frac{1+x}{x^2} \to +\infty,$$

quando $x \to 0$. Quando $x = 0$,

$$\frac{1+y}{-y^2} \to -\infty,$$

quando $y \to 0$. O limite não existe. ◁

Exemplo 2.16
Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^6}{x^6+y^8}$.

Solução. Fazendo $x = t^4$, $y = t^3$, obtemos

$$\frac{xy^6}{x^6 + y^8} = \frac{1}{2t^2} \to +\infty,$$

quando $t \to 0$. Mas, quando $y = 0$, a função é 0. Portanto, o limite não existe. ◁

Exemplo 2.17

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{((x-1)^2 + y^2)\log_e((x-1)^2 + y^2)}{|x| + |y|}$.

Solução. Quando $y = 0$, temos

$$\frac{2(x-1)^2 \ln(|1-x|)}{|x|} \sim -\frac{2x}{|x|},$$

e, portanto, a função não tem limite em $(0, 0)$. ◁

Exemplo 2.18

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^4) + \operatorname{sen}(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}$.

Solução. Usando $|\operatorname{sen} u| \leq |u|$,

$$|\operatorname{sen}(x^4) + \operatorname{sen}(y^4)| \leq x^4 + y^4.$$

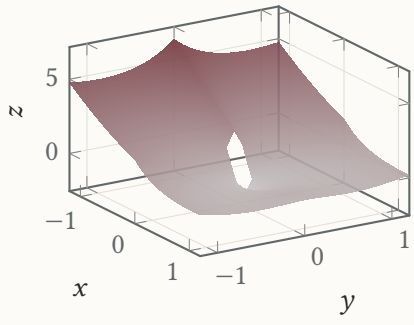
Portanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x^4) + \operatorname{sen}(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}\right| \leq \sqrt{x^4 + y^4} \longrightarrow 0$$

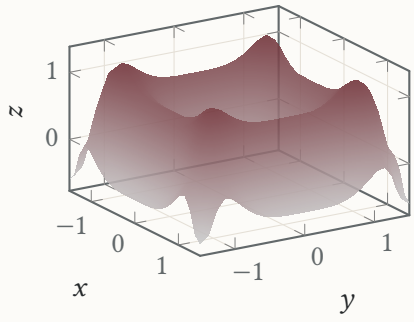
quando $(x, y) \to (0, 0)$. ◁

Exemplo 2.19

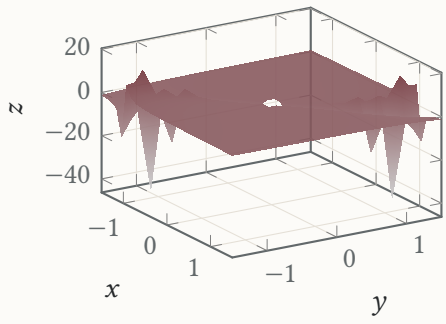
Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} x - y}{x - \operatorname{sen} y}$.



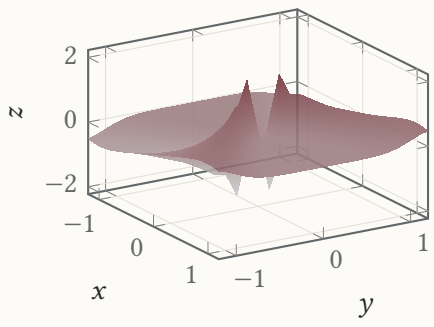
Exemplo 2.17.



Exemplo 2.18.



Exemplo 2.19.



Exemplo 2.16.

Solução. Quando $y = 0$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1,$$

quando $x \to 0$. Quando $y = x$, a função é identicamente -1. Portanto, o limite não existe. ◁

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, os limites iterados

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right), \qquad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

devem ser tratados com cuidado. Valem as seguintes observações.

1. Se o limite conjunto $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ existe e, para y próximo de y_0, existe o limite interno $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, então o limite iterado correspondente, quando definido, é igual a L. O mesmo vale com x e y trocados.
2. Se os dois limites iterados existem e são diferentes, então o limite conjunto não existe.
3. A igualdade dos limites iterados não garante a existência do limite conjunto. Também pode ocorrer que o limite conjunto exista, mas algum limite interno necessário para formar um dos limites iterados não exista.

Exercícios

Problema: [A1] Esboce o domínio de definição de $(x,y) \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Problema: [A1] Esboce o domínio de definição de $(x,y) \mapsto \log(x + y)$.

Problema: [A1] Esboce o domínio de definição de $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Problema: [C1] Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$.

Problema: [C1] Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x}$.

Problema: [C2] Para qual valor de c a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}, & \text{se } x^2 + 4y^2 \le 1, \\ c, & \text{se } x^2 + 4y^2 > 1 \end{cases}$$

é contínua em todo o plano xy?

Problema: [C1] Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Problema: [C1] Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{\max(|x|,|y|)}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

Problema: [C1] Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2\operatorname{sen} y^2 + y^4 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Problema: [J2] Demonstre que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

Problema: [J2] Mostre que

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right) = 1 = -\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right).$$

O limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ existe?

Problema: [J2] Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} + y\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0,\ y\neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, mas que os limites iterados $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\right)$ e $\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\right)$ não existem.

Problema: [J2] Mostre que

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = 0,$$

e que

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = 0,$$

mas ainda assim $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ não existe.

2.3. Continuidade

Quando o valor da função coincide com seu limite, pequenas alterações das entradas produzem pequenas alterações da saída. Em funções definidas por partes, o trabalho está em compatibilizar as expressões na interface; fora dela, as regras usuais de continuidade normalmente resolvem a questão.

Definição 2.9

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um domínio e seja $f : U \to \mathbb{R}^d$ uma função. Dizemos que f é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definição 2.10

Se f é contínua em todo ponto $a \in U$, dizemos que f é contínua em U (ou simplesmente que f é contínua).

Valem novamente os resultados usuais sobre continuidade do cálculo de uma variável. Somas, produtos, quocientes (com denominador não nulo) e composições de funções contínuas também são funções contínuas.

A noção de continuidade é útil para calcular limites ao longo de curvas arbitrárias.

Proposição 2.7

Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}^d$. Seja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ uma *função contínua qualquer* tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma(t) \neq a$ para todo $t > 0$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = l$, então $\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = l$.

Corolário 2.8

Se existem duas funções contínuas $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ tais que, para $i \in \{1, 2\}$, temos $\gamma_i(0) = a$ e $\gamma_i(t) \neq a$ para todo $t > 0$. Se $\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t))$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ não pode existir.

Teorema 2.9

A função vetorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $\mathbf{a}$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas $f_1, \dots, f_m$ é contínua em $\mathbf{a}$.

A demonstração deste teorema é muito semelhante à demonstração do Teorema 2.6.

Exemplo 2.20 — Compatibilidade em uma interface

Para $(x, y) \neq (0, 0)$, seja $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ e ponha $f(0, 0) = c$. Determine c para que f seja contínua em todo o plano.

Solução. Fora da origem, a função é um quociente de funções contínuas com denominador positivo. Na origem,

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow 0.$$

Logo, a única escolha possível é $c = 0$, e ela é suficiente. A verificação exige um limite conjunto; o valor nos eixos, isoladamente, não seria suficiente. ◁

Exercícios

Exercício N014 Consolidação; básico

Determine os valores de c que tornam contínua na origem a função $f(x, y) = x^2 y/(x^2 + y^2)$ fora dela e $f(0, 0) = c$.

Exercício N015 Aplicação; médio

Um modelo de leitura é $H(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ fora da origem. Mostre que nenhuma escolha de $H(0, 0)$ torna a leitura contínua.

Exercício N016 Consolidação; médio

Para $\alpha > 0$, estude a continuidade na origem de $f_\alpha(x, y) = (x^2+y^2)^{\alpha/2} \operatorname{sen}(1/(x^2+y^2))$, estendida por zero. Encontre uma tolerância δ em função de ε.

Exercício N017 **Justificação; médio**

Prove a proposição sobre restrição de limites a curvas, aplicando a continuidade de γ à escolha de δ na definição de limite.

2.4. ⋆ Compacidade

A compacidade transforma controles locais em controles válidos em um conjunto inteiro. Ela será usada, por exemplo, para garantir extremos de funções contínuas e para escolher finitamente muitas vizinhanças em argumentos de integração.

A noção de compacidade desempenhará um papel importante em vários argumentos posteriores. Começamos com o diâmetro de um conjunto.

Definição 2.11

Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, seu **diâmetro** é

$$d(S) = \sup\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| : \mathbf{x},\mathbf{y}\in S\}.$$

Se $d(S)<\infty$, dizemos que S é **limitado**; caso contrário, S é **ilimitado**.

Uma coleção $\mathscr{H}$ de conjuntos abertos é uma **cobertura aberta** de S se

$$S \subseteq \bigcup_{H\in\mathscr{H}} H.$$

Definição 2.12

Um conjunto $S\subseteq\mathbb{R}^n$ é **compacto** se toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura finita.

Antes de caracterizar os compactos de $\mathbb{R}^n$, registramos um princípio de encaixe.

Teorema 2.10 — Princípio dos conjuntos encaixados

Se $S_1, S_2, \dots$ são subconjuntos fechados não vazios de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$$

e

$$\lim_{r\to\infty} d(S_r) = 0,$$

então

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} S_r$$

contém exatamente um ponto.

Demonstração. Escolha $\mathbf{x}_r \in S_r$ para cada $r \geq 1$. Como os conjuntos são encaixados, $\mathbf{x}_r \in S_k$ sempre que $r \geq k$. Assim,

$$\|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s\| \leq d(S_k), \qquad r, s \geq k.$$

Como $d(S_k) \to 0$, a sequência $\{\mathbf{x}_r\}$ é de Cauchy e, pelo Teorema 2.3, converge para algum $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$.

Fixado k, toda a cauda da sequência pertence ao fechado S_k; portanto, $\overline{\mathbf{x}} \in S_k$. Logo,

$$\overline{\mathbf{x}} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Se $\mathbf{y}$ também pertence a essa interseção, então

$$\|\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| \leq d(S_k)$$

para todo k. Fazendo $k \to \infty$, obtemos $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{x}}$. ∎

Teorema 2.11 — Teorema de Heine–Borel

Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Demonstração. O caso $S = \emptyset$ é imediato. Suponha primeiro que S seja fechado e limitado. Seja $\mathscr{H}$ uma cobertura aberta de S e suponha, por contradição, que nenhuma subcoleção finita de $\mathscr{H}$ cubra S.

Como S é limitado, ele está contido em algum hipercubo fechado T_0. Divida T_0 em 2^n hipercubos fechados congruentes. Pelo menos um deles, digamos T_1, tem a propriedade de que $S_1 = S \cap T_1$ não pode ser coberto por uma subcoleção finita de $\mathscr{H}$. Repetindo o procedimento, construímos hipercubos encaixados

$$T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \cdots$$

e conjuntos fechados não vazios

$$S_k = S \cap T_k$$

tais que nenhum S_k admite uma subcobertura finita extraída de $\mathscr{H}$. A cada etapa, o comprimento dos lados é dividido por 2; portanto,

$$d(S_k) \leq d(T_k) \longrightarrow 0.$$

Pelo princípio dos conjuntos encaixados, existe um único ponto

$$\overline{\mathbf{x}} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Como $\mathscr{H}$ cobre S, existe $H \in \mathscr{H}$ com $\overline{\mathbf{x}} \in H$. Como H é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(\overline{\mathbf{x}}) \subseteq H.$$

Para k suficientemente grande, $d(S_k) < \varepsilon$. Como $\overline{\mathbf{x}} \in S_k$, segue que

$$S_k \subseteq B_\varepsilon(\overline{\mathbf{x}}) \subseteq H,$$

contradizendo a escolha de S_k. Logo, S é compacto.

Reciprocamente, suponha que S seja compacto. A família

$$\{B_k(\mathbf{0}) \,:\, k \in \mathbb{N}\}$$

é uma cobertura aberta de S. Uma subcobertura finita mostra que S está contido em alguma bola $B_K(\mathbf{0})$; portanto, S é limitado.

Resta mostrar que S é fechado. Seja $\mathbf{x} \notin S$. Para cada $\mathbf{y} \in S$, considere a bola

$$B_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|/2}(\mathbf{y}).$$

Essas bolas cobrem S. Pela compacidade, basta uma quantidade finita delas, com centros $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N$. Defina

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq N} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\| > 0.$$

Se $\mathbf{z} \in S$ e $\mathbf{z} \in B_{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}_i\|/2}(\mathbf{y}_i)$, então

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\| - \|\mathbf{y}_i - \mathbf{z}\| > \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\| \geq \delta.$$

Assim, $B_\delta(\mathbf{x}) \cap S = \emptyset$. Todo ponto de S^c possui, portanto, uma vizinhança contida em S^c; logo, S^c é aberto e S é fechado. ∎

Teorema 2.12 — Bolzano–Weierstrass

Todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^n$ possui pelo menos um ponto de acumulação.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ seja infinito, limitado e não possua pontos de acumulação. Então S é fechado. Além disso, para cada $\mathbf{x} \in S$, existe uma vizinhança aberta $N_{\mathbf{x}}$ tal que

$$N_{\mathbf{x}} \cap S = \{\mathbf{x}\}.$$

A família

$$\mathscr{H} = \{N_{\mathbf{x}} : \mathbf{x} \in S\}$$

é uma cobertura aberta de S. Pelo Teorema de Heine–Borel, S é compacto; portanto, uma quantidade finita dessas vizinhanças cobre S. Como cada uma contém apenas um ponto de S, concluímos que S é finito, contradição. ∎

Exercícios

Exercício N018 — **Consolidação; básico**

Classifique como compactos ou não: $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$, $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ e $\{(x,y) : xy = 1\}$. Identifique qual hipótese de Heine–Borel falta em cada caso negativo.

Exercício N019 — **Justificação; médio**

Considere $K_n = [-1/n, 1/n]^2$. Calcule seu diâmetro e sua interseção. Compare com os conjuntos fechados encaixados $[n, +\infty)$, cuja interseção é vazia.

Exercício N020 — **Justificação; médio**

Usando a compacidade, prove que uma função contínua em um compacto é limitada. Dica: em uma vizinhança de cada ponto, seu valor difere do valor no centro por menos que 1; extraia uma subcobertura finita.

CAPÍTULO

3

Diferenciação de Funções Vetoriais

Neste capítulo consideramos funções $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Essas funções são usualmente classificadas de acordo com as dimensões n e m:

1. se as dimensões n e m são ambas iguais a 1, uma função desse tipo é chamada de **função real de uma variável real**.
2. se $m = 1$ e $n > 1$, a função é chamada de função real de uma variável vetorial ou, mais brevemente, de **campo escalar**.
3. se $n = 1$ e $m > 1$, ela é chamada de **função vetorial de uma variável real**.
4. se $n > 1$ e $m > 1$, ela é chamada de **função vetorial de uma variável vetorial**. Quando $m = n$, é comum chamá-la também de **campo vetorial** em $\mathbb{R}^n$.

Supomos que os casos de funções reais de uma variável real e de campos escalares já tenham sido estudados anteriormente.

Este capítulo estende os conceitos de limite, continuidade e derivada às funções vetoriais e aos campos vetoriais.

Começamos pelas funções vetoriais de uma variável real, que descrevem trajetórias. Em seguida, a derivada será tratada como uma aplicação linear; isso permitirá organizar as derivadas parciais, a regra da cadeia e os operadores de campo em uma

mesma linguagem.

Três percursos dentro do capítulo

A ideia central é a aproximação linear. No percurso de **fundamentos**, estudamos derivadas de trajetórias, derivada total, derivadas direcionais, Jacobiano e regra da cadeia. A Lei de Kepler pode ser lida como aplicação intercalada; não é necessária para compreender a definição da derivada total. No percurso de **aplicações físicas**, voltamos a Kepler e estudamos os significados de gradiente, divergência e rotacional, chegando a Maxwell. No percurso de **resultados avançados**, aprofundamos as estimativas locais, os teoremas das funções inversa e implícita e o cálculo com índices. Os conteúdos e suas demonstrações foram mantidos; o roteiro permite escolher uma primeira leitura e depois completá-la.

Uma mesma situação acompanhará parte desse percurso: um sensor percorre uma região com temperatura variável. Sua velocidade descreve o movimento; o diferencial da temperatura recebe essa velocidade e fornece a taxa observada. Quando a direção do deslocamento é fixada, surge a derivada direcional. Quando buscamos a direção de maior variação por unidade de comprimento, usamos o gradiente.

3.1. Diferenciação de Funções Vetoriais de uma Variável Real

Definição 3.1

Uma **função vetorial de uma variável real** é uma regra que associa um vetor $\mathbf{f}(t)$ a um número real t, em que t pertence a algum subconjunto D de $\mathbb{R}$ (chamado **domínio** de $\mathbf{f}$). Escrevemos $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ para indicar que $\mathbf{f}$ é uma aplicação de D em $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \qquad t \in D,$$

em que

$$f_1, f_2, \dots, f_n : D \to \mathbb{R}$$

são chamadas de **funções componentes** de $\mathbf{f}$.

Em $\mathbb{R}^3$, uma função vetorial de uma variável real pode ser escrita na forma de componentes como

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

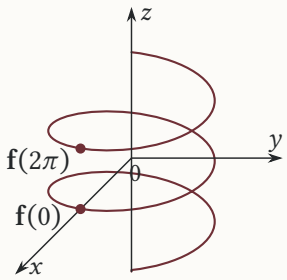
ou na forma

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

para certas funções reais $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. A primeira forma é usada com frequência quando se deseja enfatizar que $\mathbf{f}(t)$ é um vetor, enquanto a segunda é útil quando se consideram apenas as extremidades dos vetores. Identificando vetores com suas extremidades, uma curva no espaço pode ser escrita como uma função vetorial.

Exemplo 3.1

Por exemplo, $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ é uma função vetorial em $\mathbb{R}^3$, definida para todo número real t. Para $t = 1$, o valor da função é o vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, cuja extremidade, em coordenadas cartesianas, é o ponto $(1, 1, 1)$.



Exemplo 3.2

Defina $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ por $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.
Essa é a equação de uma *hélice* (veja a Figura 1.8.1). À medida que t aumenta, as extremidades de $\mathbf{f}(t)$ descrevem uma curva que sobe em espiral. Para cada t, as coordenadas x e y de $\mathbf{f}(t)$ são $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, de modo que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Portanto, a curva está contida na superfície do cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 1$.

É útil pensar nas funções vetoriais de uma variável real em $\mathbb{R}^n$ como uma generalização das funções paramétricas em $\mathbb{R}^2$ estudadas no cálculo de uma variável. Grande parte da teoria das funções reais de uma variável real pode ser aplicada a funções vetoriais de uma variável real.

Definição 3.2

Seja $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ uma função vetorial e seja a um número real em seu domínio. A **derivada** de $\mathbf{f}(t)$ em a, denotada por $\mathbf{f}'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}(a)$, é o limite

$$\mathbf{f}'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a)}{h}$$

se esse limite existir. Equivalentemente, $\mathbf{f}'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_n'(a))$, se as derivadas das componentes existirem. Dizemos que $\mathbf{f}(t)$ é **diferenciável** em a se $\mathbf{f}'(a)$ existe.

A derivada $\mathbf{f}'(a)$ fornece um vetor tangente à curva parametrizada por $\mathbf{f}$. Quando $\mathbf{f}'(a) \neq \mathbf{0}$, a reta tangente no ponto $\mathbf{f}(a)$ é dada por $\mathbf{f}(a) + s\,\mathbf{f}'(a)$ (veja a Figura 3.1).

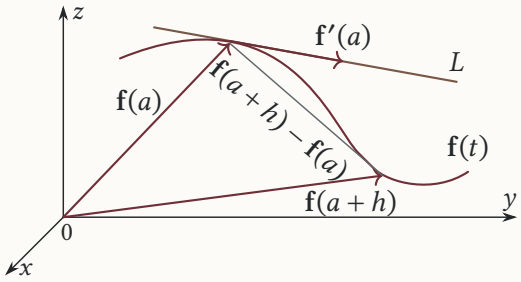


Figura 3.1.: Vetor tangente $\mathbf{f}'(a)$ e reta tangente $L = \mathbf{f}(a) + s\mathbf{f}'(a)$

Exemplo 3.3

Seja $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Então $\mathbf{f}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$ para todo t. A reta tangente L à curva em $\mathbf{f}(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$ é $L = \mathbf{f}(2\pi) + s\,\mathbf{f}'(2\pi) = (1, 0, 2\pi) + s(0, 1, 1)$, ou, em forma paramétrica, $x = 1$, $y = s$, $z = 2\pi + s$ para $-\infty < s < \infty$.

Observe que, se $u(t)$ é uma função escalar e $\mathbf{f}(t)$ é uma função vetorial, então seu produto, definido por $(u\,\mathbf{f})(t) = u(t)\,\mathbf{f}(t)$ para todo t, é uma função vetorial (pois o produto de um escalar por um vetor é um vetor).

As propriedades básicas das derivadas de funções vetoriais estão resumidas no teorema a seguir.

Teorema 3.1

Sejam $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ funções vetoriais diferenciáveis, $u(t)$ uma função escalar diferenciável, k um escalar e $\mathbf{c}$ um vetor constante. No último item, suponha que $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ tomem valores em $\mathbb{R}^3$. Então

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{c} = \mathbf{0}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\mathbf{f}) = k\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{f}-\mathbf{g}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\,\mathbf{f}) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathbf{f} + u\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{f}\times\mathbf{g}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{g} + \mathbf{f}\times\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$

Demonstração. Os itens (1)–(5) seguem das regras de derivação das componentes. Para o produto interno em $\mathbb{R}^n$, a soma é finita, portanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{n}(f_i'\,g_i + f_i g_i') = \mathbf{f}'\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}'.$$

Para o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$, sua i-ésima componente é $\varepsilon_{ijk}f_j g_k$, com soma em j,k. Como o símbolo de Levi–Civita é constante,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_{ijk}f_j g_k) = \varepsilon_{ijk}f_j'\,g_k + \varepsilon_{ijk}f_j g_k'.$$

São precisamente as componentes de $\mathbf{f}'\times\mathbf{g} + \mathbf{f}\times\mathbf{g}'$. A ordem dos fatores foi preservada, pois o produto vetorial não é comutativo. ∎

Exemplo 3.4

Suponha que $\mathbf{f}(t)$ seja diferenciável. Determine a derivada de $\|\mathbf{f}(t)\|$.

Solução. Primeiro suponha $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}$. A norma é então a composição diferenciável $\sqrt{\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t)}$. Pela regra da cadeia e pela regra do produto interno,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{f}(t)\| = \frac{\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}(t)\|}.$$

A condição de não anulação é necessária para esta fórmula. Por exemplo, se $\mathbf{f}(t) = (t, 0)$, sua norma é $|t|$ e não possui derivada em 0, embora $\mathbf{f}$ seja diferenciável nesse ponto. Já a identidade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{f}(t)\|^2 = 2\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t)$$

vale também quando $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$. ◁

Como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{f}(t)\|^2 = 2\,\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t),$$

obtemos uma caracterização que não exige dividir por $\|\mathbf{f}(t)\|$.

Proposição 3.2

Se $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um intervalo I, então $\|\mathbf{f}(t)\|$ é constante em I se, e somente se,

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

Isso significa que, se uma curva está inteiramente contida em uma esfera (ou circunferência) centrada na origem, então o vetor tangente $\mathbf{f}'(t)$ é sempre perpendicular ao *vetor posição* $\mathbf{f}(t)$.

Exemplo 3.5

A *espiral esférica* $\mathbf{f}(t) = \left(\dfrac{\cos t}{\sqrt{1+a^2t^2}}, \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1+a^2t^2}}, \dfrac{-at}{\sqrt{1+a^2t^2}} \right)$, para $a \neq 0$.

A Figura 3.2 mostra o gráfico da curva para $a = 0.2$. Nos exercícios, o leitor deverá mostrar que essa curva está contida na esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e verificar diretamente que $\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$ para todo t.

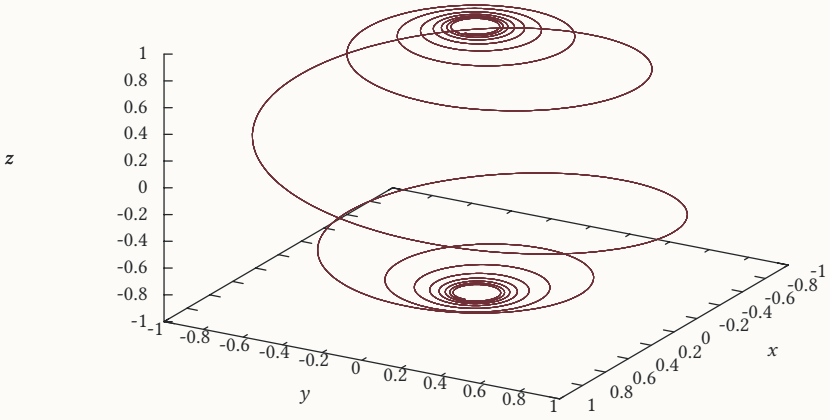


Figura 3.2.: Espiral esférica com $a = 0.2$

Assim como no cálculo de uma variável, derivadas de ordem superior de funções vetoriais são obtidas derivando repetidamente a derivada (primeira) da função:

$$\mathbf{f}''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{f}'(t)\,, \qquad \mathbf{f}'''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{f}''(t)\,, \quad \ldots \quad , \quad \frac{\mathrm{d}^n\mathbf{f}}{\mathrm{d}t^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

Podemos usar funções vetoriais para representar grandezas físicas, como velocidade, aceleração, força, quantidade de movimento etc. Por exemplo, seja a variável real t o tempo transcorrido a partir de um instante inicial ($t = 0$) e suponha que um objeto de massa constante m esteja sujeito a uma força e, por isso, se mova no espaço, com sua posição (x, y, z) no instante t dependendo de t. Isto é, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ para certas funções reais $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Chamamos $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

de **vetor posição** do objeto. Podemos definir várias grandezas físicas associadas ao objeto da seguinte forma:[1]

$$\begin{aligned}
\textit{posição}\colon \mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\
\textit{velocidade}\colon \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= (x'(t), y'(t), z'(t)) \\
\textit{aceleração}\colon \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}''(t) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \\
&= (x''(t), y''(t), z''(t)) \\
\textit{quantidade de movimento}\colon \mathbf{p}(t) &= m\mathbf{v}(t) \\
\textit{força}\colon \mathbf{F}(t) &= \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

O módulo $\|\mathbf{v}(t)\|$ do vetor velocidade é chamado de *rapidez* do objeto. Observe que, como a massa m é constante, a equação da força assume a forma familiar $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$.

Exemplo 3.6

Seja $\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 3\operatorname{sen} t, 4\operatorname{sen} t)$ o vetor posição de um objeto no instante $t \geq 0$. Determine seus vetores (a) velocidade e (b) aceleração.

Solução. (a) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (-5\operatorname{sen} t, 3\cos t, 4\cos t)$

(b) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = (-5\cos t, -3\operatorname{sen} t, -4\operatorname{sen} t)$

Observe que $\|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{25\cos^2 t + 25\operatorname{sen}^2 t} = 5$ para todo t; portanto, pelo Exemplo 3.4, sabemos que $\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ para todo t (o que também pode ser verificado diretamente a partir do item (a)). De fato, $\|\mathbf{v}(t)\| = 5$ para todo t. Além disso, $\mathbf{r}(t)$ não apenas pertence à esfera de raio 5 centrada na origem: talvez menos evidente seja o fato de que ele está inteiramente contido em uma *circunferência* de raio 5 centrada na origem. Observe ainda que $\mathbf{a}(t) = -\mathbf{r}(t)$. Veremos (Exercício 16) que, sempre que um objeto se move em uma circunferência com rapidez constante, o vetor aceleração aponta na direção oposta ao vetor posição (isto é, em direção ao centro da circunferência). ◁

[1] Em situações envolvendo física, usaremos frequentemente a notação clássica de pontos para derivadas.

Exemplo 3.7 — Trajetória e impacto de um projétil (médio)
Sem resistência do ar, a posição de um projétil, em metros, é

$$\mathbf{r}(t) = (12t,\, 5t,\, 20t - 5t^2), \qquad t \geq 0.$$

Determine a velocidade, a aceleração, o instante do retorno ao solo e a direção de impacto.

Solução. Derivando cada componente, obtemos $\mathbf{v}(t) = (12, 5, 20 - 10t)$ e $\mathbf{a}(t) = (0, 0, -10)$. O modelo usa aceleração gravitacional de $10\ \mathrm{m/s^2}$. A equação $20t - 5t^2 = 0$ dá o retorno em $t = 4$ s. Nesse instante,

$$\mathbf{r}(4) = (48, 20, 0), \qquad \mathbf{v}(4) = (12, 5, -20).$$

A rapidez é $\sqrt{569}$ m/s e a direção unitária é $(12, 5, -20)/\sqrt{569}$. O módulo mede a rapidez; a terceira componente negativa registra o movimento descendente. ◁

Exemplo 3.8 — Robô em uma hélice com rotação variável (difícil)
Em um modelo com tempo e posição adimensionais, um robô percorre

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t^2,\, 2\,\mathrm{sen}\, t^2,\, 3t), \qquad t > 0.$$

Determine sua rapidez e decomponha a aceleração em uma parte paralela e outra perpendicular à velocidade em $t = 1$.

Solução. A regra da cadeia dá

$$\mathbf{v}(t) = (-4t\,\mathrm{sen}\, t^2,\, 4t\cos t^2,\, 3),$$
$$\mathbf{a}(t) = (-4\,\mathrm{sen}\, t^2 - 8t^2\cos t^2,\; 4\cos t^2 - 8t^2\,\mathrm{sen}\, t^2,\; 0).$$

Logo, $\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{16t^2 + 9}$. Em $t = 1$, a rapidez é 5, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 16$ e $\|\mathbf{a}\|^2 = 80$. A projeção sobre a velocidade é

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{16}{25}\mathbf{v}(1), \qquad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}(1) - \frac{16}{25}\mathbf{v}(1).$$

Seus módulos são $16/5$ e $4\sqrt{109}/5$. O primeiro coincide com a derivada da rapidez em 1; o segundo mede a mudança de direção. O termo t^2 altera a velocidade angular, embora a curva continue sobre o cilindro de raio 2. ◁

3.1.1. Antiderivadas

Definição 3.3

Uma **antiderivada** de uma função vetorial $\mathbf{f}$ é uma função vetorial $\mathbf{F}$ tal que

$$\mathbf{F}'(t) = \mathbf{f}(t).$$

A **integral indefinida** $\int \mathbf{f}(t)\, dt$ de uma função vetorial $\mathbf{f}$ é a antiderivada geral de $\mathbf{f}$ e representa o conjunto de todas as antiderivadas de $\mathbf{f}$.

O mesmo raciocínio que nos permite derivar uma função vetorial componente a componente também se aplica à integração. Lembre-se de que a integral de uma soma é a soma das integrais e de que fatores constantes podem ser retirados da integral. Assim, dada $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, podemos integrar componente a componente. Mais formalmente,

Se $\mathbf{f}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, então

$$\int \mathbf{f}(t)\, dt = \left(\int x(t)\, dt\right)\mathbf{i} + \left(\int y(t)\, dt\right)\mathbf{j} + \left(\int z(t)\, dt\right)\mathbf{k}.$$

Proposição 3.3

Duas antiderivadas de $\mathbf{f}(t)$ diferem por um vetor constante; isto é, se $\mathbf{F}(t)$ e $\mathbf{G}(t)$ são antiderivadas de f, então existe $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t) = \mathbf{c}.$$

Exercícios

Problema: [A2]

Nos Exercícios 1–4, calcule $\mathbf{f}'(t)$ e determine a reta tangente em $\mathbf{f}(0)$.

1. $\mathbf{f}(t) = (t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1)$
2. $\mathbf{f}(t) = (e^t + 1, e^{2t} + 1, e^{t^2} + 1)$
3. $\mathbf{f}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, t)$
4. $\mathbf{f}(t) = (\operatorname{sen} 2t, 2\operatorname{sen}^2 t, 2\cos t)$

Nos Exercícios 5–6, determine a velocidade $\mathbf{v}(t)$ e a aceleração $\mathbf{a}(t)$ de um objeto com o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ dado.

5. $\mathbf{r}(t) = (t, t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$

6. $\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 2\operatorname{sen} t, 1)$

Problema: [J2]

1 Seja

$$\mathbf{f}(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, \frac{-at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}} \right),$$

com $a \neq 0$.

(a) Mostre que $\|\mathbf{f}(t)\| = 1$ para todo t.

(b) Mostre diretamente que $\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$ para todo t.

2 Se $\mathbf{f}'(t) = \mathbf{0}$ para todo t em algum intervalo (a, b), mostre que $\mathbf{f}(t)$ é um vetor constante em (a, b).

3 Para um vetor constante $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, a função $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{c}$ representa uma reta paralela a $\mathbf{c}$.

(a) Que tipo de curva $\mathbf{g}(t) = t^3\mathbf{c}$ representa? Explique.

(b) Que tipo de curva $\mathbf{h}(t) = e^t\mathbf{c}$ representa? Explique.

(c) Compare $\mathbf{f}'(0)$ e $\mathbf{g}'(0)$. À luz de sua resposta ao item (a), como se explica a diferença entre as duas derivadas?

4 Mostre que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{f} \times \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathbf{f} \times \dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{f}}{\mathrm{d}t^2}$.

5 Seja uma partícula de massa (constante) m com vetor posição $\mathbf{r}(t)$, velocidade $\mathbf{v}(t)$, aceleração $\mathbf{a}(t)$ e quantidade de movimento $\mathbf{p}(t)$ no instante t. O *momento angular* $\mathbf{L}(t)$ da partícula em relação à origem no instante t é definido por $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$. Se $\mathbf{F}(t)$ é a força que atua sobre a partícula no instante t, defina o *torque* $\mathbf{N}(t)$ em relação à origem por $\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$. Mostre que $\mathbf{L}'(t) = \mathbf{N}(t)$.

6 Mostre que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{f} \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{h})) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t} \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) + \mathbf{f} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{h}\right) + \mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{g} \times \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{h}}{\mathrm{d}t}\right)$.

7 O Teorema do Valor Médio não vale para funções vetoriais: mostre que, para $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, não existe t no intervalo $(0, 2\pi)$ tal que

$$\mathbf{f}'(t) = \frac{\mathbf{f}(2\pi) - \mathbf{f}(0)}{2\pi - 0}.$$

3.2. Lei de Kepler

Por que os planetas têm órbitas elípticas? Nesta seção reduziremos o problema gravitacional de dois corpos ao movimento relativo de uma partícula sob uma força central. A trajetória relativa é uma seção cônica com foco na origem; no caso de movimento ligado, ela é uma elipse. Essa é a forma matemática da primeira lei de Kepler no modelo de dois corpos.

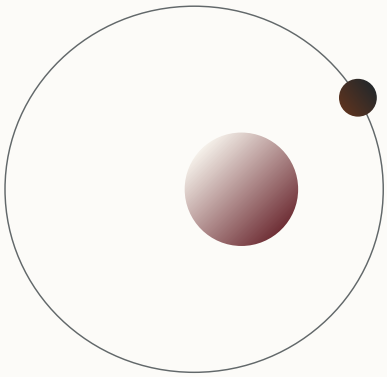


Figura 3.3.: Sistema de dois corpos

Faremos duas hipóteses simplificadoras:

1 Os corpos são esfericamente simétricos e podem ser tratados como massas pontuais.

2 Não há forças externas nem internas atuando sobre os corpos, além da gravitação mútua.

Dois objetos pontuais de massas m_1 e m_2 e vetores posição $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, em relação a algum referencial inercial, estão sujeitos às forças gravitacionais:

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Defina o vetor posição relativo

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \qquad r = \|\mathbf{r}\|, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Dividindo pelas respectivas massas e subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos a equação do movimento relativo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{3.1}$$

em que μ é o parâmetro

$$\mu = G(m_1 + m_2).$$

Como $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, registraremos a equação anterior também como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{3.2}$$

Para o movimento sob qualquer força central, isto é, uma força paralela a $\mathbf{r}$, o vetor

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

permanece constante. Fisicamente, ele é o momento angular por unidade de massa reduzida. Esse fato é facilmente deduzido:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Como o produto vetorial do vetor posição com sua velocidade permanece constante, esses vetores devem permanecer no mesmo plano, ortogonal a $\mathbf{L}$. Isso implica que a função vetorial descreve uma curva plana.

De 3.2 segue que

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r\hat{\mathbf{r}} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{\mathbf{r}}) = r\hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{\mathbf{r}}}) = r^2(\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}}) + r\dot{r}(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) = r^2\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}}$$

Agora considere

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times (r^2\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}}) = -\mu\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}}) = -\mu[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}})\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\dot{\hat{\mathbf{r}}}]$$

Como $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = |\hat{\mathbf{r}}|^2 = 1$, temos

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{\hat{\mathbf{r}}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 0$$

Substituindo esses valores na equação anterior, obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \mu \dot{\hat{\mathbf{r}}}$$

Integrando ambos os lados,

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = \mu \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{c}$$

em que $\mathbf{c}$ é um vetor constante. Se calcularmos o produto interno da equação anterior com $\mathbf{r}$, obtemos um resultado interessante:

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = \mathbf{r} \cdot (\mu \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{c}) = \mu \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \mu r(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) + rc\cos(\theta) = r(\mu + c\cos(\theta))$$

em que θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{c}$. Isolando r,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})}{\mu + c\cos(\theta)} = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{L}}{\mu + c\cos(\theta)} = \frac{|\mathbf{L}|^2}{\mu + c\cos(\theta)}$$

Finalmente, no plano do movimento, (r, θ) são coordenadas polares da trajetória relativa. Fazendo as substituições $p = \dfrac{|\mathbf{L}|^2}{\mu}$ e $e = \dfrac{c}{\mu}$, chegamos à equação

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta} \tag{3.3}$$

A Equação 3.3 é a equação polar de uma seção cônica com foco na origem. Para $0 \leq e < 1$, a órbita é elíptica; para $e = 1$, parabólica; e, para $e > 1$, hiperbólica. Em particular, órbitas ligadas não degeneradas correspondem a $0 \leq e < 1$ e são elipses.

A constância de $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ significa que o movimento mantém seu plano orbital e sua velocidade areolar. A forma da cônica depende ainda da energia e das condições iniciais. A solução circular é um caso particular de excentricidade zero, não uma hipótese do argumento.

Exercícios

Exercício N021 **Aplicação; médio**

Para $r(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t, 0)$, calcule $r \times \dot{r}$ e a velocidade areolar. Explique por que o parâmetro t desta curva não descreve, em geral, um movimento gravitacional kepleriano.

Exercício N022 **Aplicação; médio**

Uma órbita circular de raio R é regida por $\ddot{r} = -\mu r/\|r\|^3$, com $\mu > 0$. Determine sua velocidade angular e seu período.

Exercício N023 **Justificação; médio**

Usando $r \times \ddot{r} = 0$ para uma força central, prove a constância de $r \times \dot{r}$ e explique o papel da hipótese de momento angular não nulo.

3.3. Definição da Derivada de uma Função Vetorial

Em várias variáveis não há um quociente de diferenças vetorial análogo ao caso unidimensional. A noção correta de derivada é a melhor aproximação linear local da função.

Definição 3.4

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Uma função $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ é **diferenciável** em $\mathbf{a} \in A$ se existe uma transformação linear

$$\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

A transformação linear $\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}$ é chamada **derivada de f em a**.

Equivalentemente, podemos escrever

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{h}) + \mathbf{E}(\mathbf{h}),$$

onde o termo de erro satisfaz

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{E}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Em outras palavras, o erro da aproximação linear é de ordem estritamente menor que $\|\mathbf{h}\|$.

Teorema 3.4

A derivada $\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}$, quando existe, é única.

Demonstração. Suponha que $T, L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sejam transformações lineares que satisfaçam a definição. Então existem erros $\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{E}_L$ tais que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = T(\mathbf{h}) + \mathbf{E}_T(\mathbf{h}) = L(\mathbf{h}) + \mathbf{E}_L(\mathbf{h}),$$

com

$$\frac{\|\mathbf{E}_T(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0, \qquad \frac{\|\mathbf{E}_L(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0.$$

Fixe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Para $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos imediatamente $T(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$. Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tome $\mathbf{h} = t\mathbf{v}$. Para $t \neq 0$ suficientemente pequeno,

$$t(T - L)(\mathbf{v}) = \mathbf{E}_L(t\mathbf{v}) - \mathbf{E}_T(t\mathbf{v}).$$

Logo,

$$\|(T-L)(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\| \left(\frac{\|\mathbf{E}_L(t\mathbf{v})\|}{\|t\mathbf{v}\|} + \frac{\|\mathbf{E}_T(t\mathbf{v})\|}{\|t\mathbf{v}\|} \right).$$

Fazendo $t \to 0$, o lado direito tende a zero. Portanto, $T(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}$, e $T = L$. ∎

Exemplo 3.9

Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear, então

$$\mathrm{D}_{\mathbf{a}} L = L$$

para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Solução. Pela linearidade,

$$L(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - L(\mathbf{a}) - L(\mathbf{h}) = \mathbf{0}.$$

Assim, o termo de erro é identicamente nulo. ◁

Exemplo 3.10

Considere o produto interno usual

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Mostre que f é diferenciável e determine sua derivada.

Solução. Para incrementos $(\mathbf{h}, \mathbf{k})$,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{y} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}.$$

A parte linear é

$$(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \longmapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{y}.$$

O erro é $\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}$. Pela desigualdade

$$|\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}| \leq \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{h}\|^2 + \|\mathbf{k}\|^2 \right),$$

temos, para a norma produto

$$\|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| = \sqrt{\|\mathbf{h}\|^2 + \|\mathbf{k}\|^2},$$

que

$$\frac{|\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}|}{\|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|} \leq \frac{1}{2} \|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\mathrm{D}_{(\mathbf{x},\mathbf{y})} f(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{y}.$$

◁

Assim como no caso de uma variável, diferenciabilidade implica continuidade.

Teorema 3.5

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ diferenciável. Então $\mathbf{f}$ é contínua.

Demonstração. Fixe $\mathbf{a} \in A$. Pela diferenciabilidade,

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{h}) + \mathbf{E}(\mathbf{h}),$$

onde

$$\frac{\|\mathbf{E}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0.$$

Toda transformação linear entre espaços euclidianos de dimensão finita é contínua; portanto,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}(\mathbf{h}) \to \mathbf{0} \qquad \text{quando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Além disso, a condição sobre o erro implica $\mathbf{E}(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$. Logo,

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \to \mathbf{f}(\mathbf{a}),$$

e $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$. ∎

Exercícios

Problema: [J2] Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e

$$F : \mathbf{x} \to \mathbf{x} \times L(\mathbf{x})\mathbb{R}^3\mathbb{R}^3.$$

Mostre que F é diferenciável e que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(F)(\mathbf{h}) = \mathbf{x} \times L(\mathbf{h}) + \mathbf{h} \times L(\mathbf{x}).$$

Problema: [J2] Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 1, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ a norma usual em $\mathbb{R}^n$, com $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$. Prove que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(f)(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{x}\|},$$

para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, mas que $\mathbf{f}$ não é diferenciável em $\mathbf{0}$.

3.4. Derivadas Parciais e Direcionais

As derivadas parciais medem a variação ao longo dos eixos, enquanto a derivada direcional permite escolher outro vetor de deslocamento. A existência de todas essas derivadas, isoladamente, ainda não garante uma aproximação linear válida para todos os deslocamentos.

Definição 3.5

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ e

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

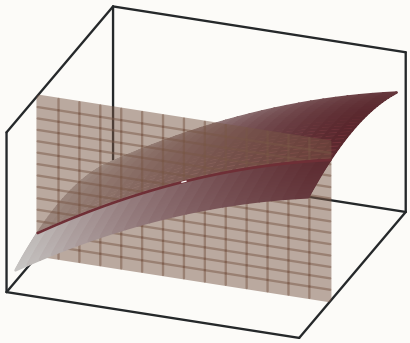
Aqui $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A **derivada parcial** $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ é definida por

$$\partial_j f_i(x) := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h},$$

sempre que esse limite existir.

Para determinar derivadas parciais em relação à j-ésima variável, mantemos as demais variáveis fixas e derivamos em relação à j-ésima variável.

$$x_i = cte$$



Exemplo 3.11

Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{f}(x, y, z) = x + y^2 + z^3 + 3xy^2z^3$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 + 3y^2z^3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + 6xyz^3,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 9xy^2z^2.$$

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com A aberto. A derivada direcional em $\mathbf{x}$ ao longo de $\mathbf{u}$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t},$$

quando esse limite existe. Se f é diferenciável em $\mathbf{x}$, a regra da cadeia fornece

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \mathrm{D}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}).$$

Para medir uma taxa por unidade de distância, escolhemos $\|\mathbf{u}\| = 1$. Para um vetor não unitário, o parâmetro t inclui também a escala do deslocamento. Nas regras abaixo, supomos a existência das derivadas indicadas; no produto vetorial, as funções tomam valores em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3.6

1. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, então $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$.
2. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, então $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}_1(\mathbf{x})) \times \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \times (D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}_2(\mathbf{x}))$.

Exemplo 3.12 — Derivadas em todas as direções sem diferenciabilidade (difícil)

Seja $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$ fora da origem e $f(0,0) = 0$. Calcule todas as derivadas direcionais na origem e verifique se f é diferenciável ali.

Solução. Para $\mathbf{u} = (a,b) \neq (0,0)$,

$$f(ta,tb) = t\frac{a^3}{a^2+b^2}, \qquad D_{\mathbf{u}} f(0,0) = \frac{a^3}{a^2+b^2}.$$

Nos eixos, as derivadas parciais são 1 e 0, de modo que a única candidata à derivada total seria $L(h,k) = h$. Contudo, $D_{(1,1)} f(0,0) = 1/2 \neq L(1,1)$. Mais diretamente, ao

longo de $h = k = t$,

$$\frac{|f(t,t) - L(t,t)|}{\sqrt{2}|t|} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

que não tende a zero. A função é contínua, pois $|f(x,y)| \le |x|$, mas não é diferenciável. As derivadas direcionais não formam uma aplicação linear do vetor de direção. ◁

Exercícios

Exercício N024 — **Aplicação; básico**

Calcule as derivadas parciais de $T(x,y,z) = 20 + x^2 y + e^z$ e a derivada direcional em $(1,2,0)$ na direção unitária de $(2,-1,2)$.

Exercício N025 — **Consolidação; básico**

Compare $D_{(1,2)}f$ e $D_{(1,2)/\sqrt{5}}f$ para $f(x,y) = x^2 + xy$ em $(1,1)$ e explique a diferença.

Exercício N026 — **Aprofundamento; difícil**

Para $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ fora da origem e $f(0,0) = 0$, examine as derivadas direcionais bilaterais e a diferenciabilidade. Considere cuidadosamente o sinal de t.

3.5. A Matriz Jacobiana

O mesmo objeto, diferentes representações

Para $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em a, a derivada é a aplicação linear que satisfaz

$$F(a+h) = F(a) + DF_a(h) + o(\|h\|).$$

Essa igualdade é a referência comum às notações abaixo.

Notação	Significado e condições
Derivada total DF_a	Aplicação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; descreve a aproximação de primeira ordem.
Jacobiano $J_F(a)$	Matriz $m \times n$ de DF_a nas bases escolhidas; em coordenadas canônicas, suas entradas são $\partial_j F_i(a)$.
Diferencial dF_a	Outra notação para a derivada total. Se $m = 1$, é um covetor: recebe um deslocamento e devolve um escalar.
Gradiente $\nabla f(a)$	Vetor que representa df_a depois de escolhida a métrica: $df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$.
Derivada direcional $D_v F(a)$	Sob diferenciabilidade, vale $DF_a(v)$. Sua definição por limite também pode ser usada quando a derivada total não existe.

Para $f(x, y, z) = 20 + x^2 y + e^z$ em $a = (1, 2, 0)$, temos

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad df_a(h) = 4h_1 + h_2 + h_3,$$

$$\nabla f(a) = (4, 1, 1), \qquad D_v f(a) = 4v_1 + v_2 + v_3.$$

A matriz linha e o vetor gradiente têm os mesmos números apenas porque estamos usando uma base cartesiana ortonormal e a métrica euclidiana. O covetor e o vetor cumprem papéis diferentes; essa distinção será retomada nos capítulos de tensores. As derivadas parciais fornecem os candidatos às entradas do Jacobiano, mas sua mera existência não prova que o resto seja $o(\|h\|)$.

Estabeleceremos agora uma forma de simplificar o processo de encontrar a derivada de uma função em um dado ponto.

Como a derivada de uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, ela pode ser representada por meio de matrizes. O teorema a seguir nos permitirá determinar a representação matricial de $\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}$ nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

Teorema 3.7

Seja

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Suponha que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ seja aberto e que $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ seja diferenciável. Então cada derivada parcial $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ existe, e a representação matricial de $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ com

respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é a **matriz jacobiana**

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Seja $\mathbf{e}_j, 1 \leq j \leq n$, a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Para obter a matriz jacobiana, devemos calcular $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)$, que nos fornece a j-ésima coluna da matriz. Seja $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = (J_{ij})$ e observe que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{e}_j) = \begin{bmatrix} J_{1j} \\ J_{2j} \\ \vdots \\ J_{mj} \end{bmatrix}.$$

e ponha $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{e}_j, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\begin{aligned} &\frac{||\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{y} - \mathbf{x})||}{||\mathbf{y} - \mathbf{x}||} \\ &= \frac{||\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_j + \varepsilon, \ldots, x_n) - \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) - \varepsilon \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{e}_j)||}{|\varepsilon|}. \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo tende a 0 quando $\varepsilon \to 0$, o mesmo ocorre com a i-ésima componente do numerador e, portanto,

$$\frac{|f_i(x_1, \ldots, x_j + \varepsilon, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) - \varepsilon J_{ij}|}{|\varepsilon|} \to 0.$$

Isso implica que

$$J_{ij} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f_i(x_1, \ldots, x_j + \varepsilon, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{\varepsilon} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Isso conclui a demonstração. ■

Observação 3.8

Reservaremos $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ para a derivada de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}$, entendida como aplicação linear, e $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ para sua matriz nas bases canônicas. Assim, não identificaremos notacionalmente a derivada com sua representação matricial.

Exemplo 3.13 — Sensores e aproximação com erro controlado (difícil)

Dois sensores têm respostas normalizadas $F(x, y) = (x^2 + xy, y^2)$. Linearize o sistema perto de $(2, 1)$, estime a resposta à perturbação $(h, k) = (0{,}01, -0{,}02)$ e obtenha um limite para o erro.

Solução. As respostas são polinomiais, portanto diferenciáveis. A matriz jacobiana é

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}, \qquad J_F(2, 1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A variação linear prevista é $(5h + 2k, 2k) = (0{,}01, -0{,}04)$. Expandindo sem aproximações,

$$F(2 + h, 1 + k) - F(2, 1) = J_F(2, 1)(h, k) + (h^2 + hk, k^2).$$

Se $r = \sqrt{h^2 + k^2}$, o erro satisfaz

$$\|(h^2 + hk, k^2)\| \leq h^2 + |hk| + k^2 \leq \frac{3}{2} r^2.$$

Assim, erro dividido por r tende a zero, como exige a diferenciabilidade. Para a perturbação dada, o erro exato é $(-0{,}0001, 0{,}0004)$ e a variação real é $(0{,}0099, -0{,}0396)$. A matriz fornece a sensibilidade de primeira ordem e o resto quantifica a precisão.◁

Exemplo 3.14

Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy + yz, \ln(xy))$, definida onde $xy > 0$. Calcule a matriz jacobiana de $\mathbf{f}$.

Solução. A matriz jacobiana é a matriz 2×3

$$J_{\mathbf{f}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x f_1(x, y, z) & \partial_y f_1(x, y, z) & \partial_z f_1(x, y, z) \\ \partial_x f_2(x, y, z) & \partial_y f_2(x, y, z) & \partial_z f_2(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x + z & y \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} & 0 \end{bmatrix}.$$

◁

Exemplo 3.15

Seja $\mathbf{f}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z)$ a função que transforma coordenadas cilíndricas em coordenadas cartesianas. Temos

$$J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.16

Seja $\mathbf{f}(\rho, \phi, \theta) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \cos\phi)$ a função que transforma coordenadas esféricas em coordenadas cartesianas. Temos

$$J_{\mathbf{f}}(\rho, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \rho \cos\theta \cos\phi & -\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \rho \operatorname{sen}\theta \cos\phi & \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi & -\rho \operatorname{sen}\phi & 0 \end{bmatrix}.$$

O conceito de **derivadas parciais sucessivas** é análogo ao de diferenciação sucessiva. O mesmo vale para o conceito de diferenciação parcial implícita. Nos exemplos a seguir, distinguiremos a derivação sucessiva, em que as variáveis são independentes, da derivação implícita, em que uma variável depende das outras.

Exemplo 3.17

Seja $\mathbf{f}(u, v, w) = e^{uv} \cos w$. Determine

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u \, \partial v}(u, v, w)$$

e avalie a expressão no ponto $(1, -1, \pi/4)$.

Solução. Temos

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v} = u e^{uv} \cos w,$$

e, portanto,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial u \, \partial v} = (1 + uv) e^{uv} \cos w.$$

No ponto $(1, -1, \pi/4)$, o fator $1 + uv$ é zero. Logo, o valor da derivada mista é 0. ◁

Exemplo 3.18

A equação $z^{xy} + (xy)^z + xy^2z^3 = 3$ define z implicitamente como uma função de x e y. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em $(1, 1, 1)$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} z^{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} e^{xy \log z} \\
&= \left(y \log z + \frac{xy}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) z^{xy}, \\
\frac{\partial}{\partial x} (xy)^z &= \frac{\partial}{\partial x} e^{z \log xy} \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \log xy + \frac{z}{x} \right) (xy)^z, \\
\frac{\partial}{\partial x} xy^2z^3 &= y^2z^3 + 3xy^2z^2 \frac{\partial z}{\partial x},
\end{aligned}$$

Portanto, em $(1, 1, 1)$ temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 1 + 1 + 3\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}.$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} z^{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} e^{xy \log z} \\
&= \left(x \log z + \frac{xy}{z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) z^{xy}, \\
\frac{\partial}{\partial y} (xy)^z &= \frac{\partial}{\partial y} e^{z \log xy} \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial y} \log xy + \frac{z}{y} \right) (xy)^z, \\
\frac{\partial}{\partial y} xy^2z^3 &= 2xyz^3 + 3xy^2z^2 \frac{\partial z}{\partial y},
\end{aligned}$$

Portanto, em $(1, 1, 1)$ temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} + 1 + 2 + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}.$$

◁

Exercícios

Problema: [C1] Seja $\mathbf{f} : [0;+\infty[\times]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $\mathbf{f}(r,t) = t^n e^{-r^2/4t}$, em que n é uma constante. Determine n de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

Problema: [C1] Seja

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{f}(x,y) = \min(x, y^2).$$

Determine $\dfrac{\partial \mathbf{f}(x,y)}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \mathbf{f}(x,y)}{\partial y}$.

Problema: [J2] Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(xy^2x^2y\right), \qquad \mathbf{g}(x,y,z) = (x - y + 2zxy).$$

Calcule $J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(1,0,1)$, se estiver definida. Caso não esteja, explique. Calcule $J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(1,0)$, se estiver definida. Caso não esteja, explique.

Problema: [C1] Sejam $\mathbf{f}(x,y) = (xyx + y)$ e $\mathbf{g}(x,y) = \left(x - yx^2y^2x + y\right)$. Determine $J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(0,1)$.

Problema: [C2] Supondo que a equação $xy^2 + 3z = \cos z^2$ defina z implicitamente como uma função de x e y, determine $\partial_x z$.

Problema: [C1] Se $w = e^{uv}$, $u = r + s$ e $v = rs$, determine $\dfrac{\partial w}{\partial r}$.

Problema: [C2] Seja z uma função de x e y definida implicitamente pela equação $(x+z)^2 + (y+z)^2 = 8$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ em $(1,1,1)$.

3.6. Propriedades das Transformações Diferenciáveis

A derivada de uma composição descreve uma cadeia de dependências: primeiro a entrada altera as variáveis intermediárias, depois essas variáveis alteram a saída. A ordem das aplicações e os pontos em que as derivadas são avaliadas precisam acompanhar essa sequência.

Assim como no caso de uma variável, valem as seguintes regras de diferenciação.

Teorema 3.9

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, diferenciáveis em A, $\mathbf{h} : B \to \mathbb{R}^l$ diferenciável em B, e $\mathbf{f}(A) \subseteq B$. Então:

- **R**egra da soma: $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}((\mathbf{f} + \alpha\mathbf{g})) = \mathrm{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{f}) + \alpha\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{g})$.
- **R**egra da cadeia: $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}(\mathbf{h} \circ \mathbf{f}) = \mathrm{D}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\mathbf{h} \circ \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$.

Como a composição de aplicações lineares representadas por matrizes corresponde à multiplicação matricial, a regra da cadeia assume a forma alternativa a seguir quando aplicada à matriz jacobiana:

$$J_{\mathbf{h}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{h}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}). \tag{3.4}$$

Exemplo 3.19

Sejam

$$\mathbf{f}(u, v) = (ue^v, u + v, uv)$$

e

$$\mathbf{h}(x, y, z) = \left(x^2 + y, y + z\right).$$

Determine $J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{h}}(x, y, z)$.

Solução. Temos

$$J_{\mathbf{f}}(u, v) = \begin{bmatrix} e^v & ue^v \\ 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}, \qquad J_{\mathbf{h}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{h}(x, y, z) = (x^2 + y, y + z),$$

segue que

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(x, y, z)) = \begin{bmatrix} e^{y+z} & (x^2 + y)e^{y+z} \\ 1 & 1 \\ y + z & x^2 + y \end{bmatrix}.$$

Pela regra da cadeia,

$$J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{h}}(x, y, z) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(x, y, z))J_{\mathbf{h}}(x, y, z),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 2xe^{y+z} & (1+x^2+y)e^{y+z} & (x^2+y)e^{y+z} \\ 2x & 2 & 1 \\ 2x(y+z) & x^2+2y+z & x^2+y \end{bmatrix}.$$

◁

Exemplo 3.20

Seja

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{f}(u,v) = u^2 + e^v,$$

e sejam

$$u(x,y,z) = xz, \qquad v(x,y,z) = y+z.$$

Defina

$$h(x,y,z) = \mathbf{f}\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big).$$

Determine as derivadas parciais de h.

Solução. Defina

$$\mathbf{g}(x,y,z) = (xz, y+z).$$

Então $h = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$,

$$J_{\mathbf{g}}(x,y,z) = \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_{\mathbf{f}}(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & e^v \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$J_h(x,y,z) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(x,y,z))J_{\mathbf{g}}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xz & e^{y+z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e, portanto,

$$J_h(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xz^2 & e^{y+z} & 2x^2z + e^{y+z} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2xz^2, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = e^{y+z}, \qquad \frac{\partial h}{\partial z} = 2x^2z + e^{y+z}.$$

◁

Teorema 3.10

Seja $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e suponha que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n, \tag{3.5}$$

existam em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ e sejam contínuas em $\mathbf{x}_0$. Então $\mathbf{F}$ é diferenciável em $\mathbf{x}_0$.

Dizemos que $\mathbf{F}$ é **continuamente diferenciável** em um conjunto S se S está contido em um aberto no qual as derivadas parciais em (3.5) são contínuas. Os lemas seguintes fornecem propriedades de transformações continuamente diferenciáveis que serão usadas posteriormente.

Usaremos a norma de operador $\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$. A continuidade de J_F fornece controles locais tanto para o alongamento máximo quanto, quando J_F é invertível, para o alongamento mínimo. Esses controles explicam por que uma transformação com derivada invertível não colapsa pontos suficientemente próximos.

Lema 3.11

Suponha que $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seja continuamente diferenciável em uma vizinhança N de $\mathbf{x}_0$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \le (\|J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)\| + \epsilon)|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{se} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0). \tag{3.6}$$

Demonstração. Considere a função auxiliar

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}. \tag{3.7}$$

As componentes de $\mathbf{G}$ são

$$g_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\, x_j,$$

de modo que

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}.$$

Assim, $\partial g_i/\partial x_j$ é contínua em N e se anula em $\mathbf{x}_0$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{mn}} \quad \text{para} \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n, \quad \text{se} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta. \tag{3.8}$$

Agora suponha que $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$. Aplicando o Teorema do Valor Médio de uma variável à restrição de cada componente ao segmento entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$,

$$g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\mathbf{x}_i)}{\partial x_j}(x_j - y_j), \tag{3.9}$$

em que $\mathbf{x}_i$ pertence ao segmento de reta de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, logo $\mathbf{x}_i \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$. De (3.8), (3.9) e da desigualdade de Schwarz,

$$(g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y}))^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_i)}{\partial x_j}\right]^2\right)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 < \frac{\epsilon^2}{m}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2.$$

Somando de $i = 1$ até $i = m$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$|\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y})| \le \epsilon|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{se} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0). \tag{3.10}$$

Para concluir a demonstração, observe que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{3.11}$$

e, portanto, (3.10) e a desigualdade triangular implicam (3.6). ■

Lema 3.12

Suponha que $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja continuamente diferenciável em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ e que $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$ seja não singular. Seja

$$r = \frac{1}{\|(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0))^{-1}\|}. \tag{3.12}$$

Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \ge (r - \epsilon)|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{se} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0). \tag{3.13}$$

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pontos arbitrários de $D_{\mathbf{F}}$ e seja $\mathbf{G}$ como em (3.7). De (3.11),

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \geq \big||J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{y})| - |\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{y})|\big|. \tag{3.14}$$

Como

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = [J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)]^{-1} J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

(3.12) implica

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \frac{1}{r}|J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{y})|,$$

e, portanto,

$$|J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \geq r|\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \tag{3.15}$$

Agora escolha $\delta > 0$ de modo que (3.10) seja válida. Então (3.14) e (3.15) implicam (3.13). ∎

Definição 3.6

Uma função $\mathbf{f}$ é dita **continuamente diferenciável** se $\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}$ existe para todo $\mathbf{x}$ do domínio e depende continuamente de $\mathbf{x}$.
Funções continuamente diferenciáveis são ditas de **classe** C^1. Uma função é de **classe** C^2 se a primeira e a segunda derivadas existem e são contínuas. Mais geralmente, uma função é dita de **classe** C^k se suas primeiras k derivadas existem e são contínuas. Se as derivadas $\mathbf{f}^{(n)}$ existem para todo inteiro positivo n, a função é dita **suave** ou, equivalentemente, de **classe** C^∞.

Exemplo 3.21 — Potência elétrica e propagação de incertezas (médio)
Um resistor tem potência $P(V,R) = V^2/R$, com $R > 0$. Perto de $V = 12\,\mathrm{V}$ e $R = 6\,\Omega$, estime a variação de potência quando $\Delta V = 0{,}1\,\mathrm{V}$ e $\Delta R = 0{,}05\,\Omega$.

Solução. A potência nominal é 24 W e

$$P_V = \frac{2V}{R}, \qquad P_R = -\frac{V^2}{R^2}.$$

No ponto nominal, essas derivadas valem 4 e -4, nas respectivas unidades. Assim,

$$\Delta P \approx 4\Delta V - 4\Delta R = 0{,}2\ \mathrm{W}.$$

A potência exata é $12{,}1^2/6{,}05 = 24{,}2\,\mathrm{W}$; neste deslocamento particular a previsão coincide com o resultado exato. Para erros independentes com $|\Delta V| \leq 0{,}1$ e $|\Delta R| \leq$

0,05, a estimativa de primeira ordem é $|\Delta P| \lesssim 0{,}6$ W. Essa última expressão é uma aproximação de sensibilidade, não uma garantia rigorosa sem controlar o resto. ◁

Exercícios

Exercício N027 **Aplicação; médio**

Uma partícula percorre $r(t) = (t, e^t)$ e um campo tem temperatura $T(x, y) = x^2 y$. Calcule $\mathrm{d}T(r(t))/\,\mathrm{d}t$ pela regra da cadeia e por substituição direta.

Exercício N028 **Consolidação; médio**

Para $F(x, y) = (e^{x+y}, x - y)$ e $G(u, v) = (uv, u^2)$, calcule $J_{G\circ F}(0, 0)$ e confira as dimensões das matrizes.

Exercício N029 **Aplicação; médio**

Um cilindro tem volume $\pi r^2 h$. Estime o maior erro relativo de primeira ordem quando os erros relativos em r e h são limitados por 1% e 2%.

3.7. Gradientes, Rotacionais e Derivadas Direcionais

Definição 3.7

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável. O **gradiente** de f em $\mathbf{x}$ é o vetor

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Pelo produto interno euclidiano, a derivada pode ser escrita como

$$\mathrm{D}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

O símbolo

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

é chamado **operador gradiente**.

Teorema 3.13

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciável. Se $\mathbf{x} \in A$ pertence ao conjunto de nível

$$f(\mathbf{x}) = K,$$

então $\nabla f(\mathbf{x})$ é ortogonal a todo vetor tangente ao conjunto de nível em $\mathbf{x}$. Em particular, se $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ e o conjunto de nível é uma hipersuperfície regular perto de $\mathbf{x}$, o gradiente é um vetor normal a essa hipersuperfície.

Demonstração. Seja $\mathbf{c}(t)$ uma curva diferenciável contida no conjunto de nível e suponha que $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{x}$. Como

$$f(\mathbf{c}(t)) = K$$

para todo t próximo de t_0, a regra da cadeia fornece

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=t_0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}'(t_0).$$

Logo, o gradiente é ortogonal a todo vetor tangente obtido dessa forma. ∎

Observação 3.14

Para um vetor unitário $\mathbf{u}$, a derivada direcional satisfaz

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta,$$

em que θ é o ângulo entre $\nabla f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{u}$. Portanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

e, quando $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, a maior taxa de crescimento ocorre na direção

$$\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}.$$

Exemplo 3.22

Determine um vetor unitário normal à superfície $x^3 + y^3 + z = 4$ no ponto $(1, 1, 2)$.

Solução. Aqui, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z - 4$ tem gradiente

$$\nabla f(x, y, z) = \left(3x^2, 3y^2, 1\right),$$

que em $(1, 1, 2)$ é $(3, 3, 1)$. Normalizando esse vetor, obtemos

$$\left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}\right).$$

◁

Exemplo 3.23

Determine a direção de maior taxa de crescimento de $f(x, y, z) = xye^z$ no ponto $(2, 1, 2)$.

Solução. A direção é a do vetor gradiente. Aqui,

$$\nabla f(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z),$$

que em $(2, 1, 2)$ se torna $\left(e^2, 2e^2, 2e^2\right)$. Normalizando esse vetor, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 2).$$

◁

Exemplo 3.24

Esboce o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$, bem como várias curvas de nível dessa função.

Solução. As curvas de nível de uma função são definidas por

$$f(x, y) = k$$

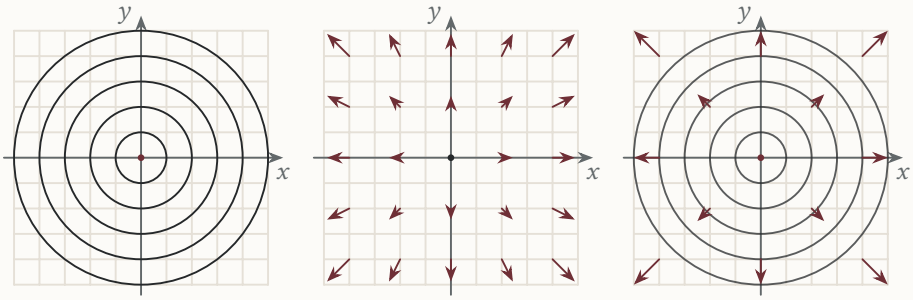
para diferentes valores de k. Para nossa função, portanto, as curvas de nível são definidas pela equação

$$x^2 + y^2 = k$$

e são circunferências centradas na origem, de raio $\sqrt{k}$. O campo vetorial gradiente dessa função é

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}.$$

A seguir apresentamos um esboço de algumas curvas de nível e do campo vetorial gradiente. ◁



Exemplo 3.25

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x + y^2 - z^2$. Determine a equação do plano tangente à superfície de nível de f que passa por $(1, 2, 3)$.

Solução. Um vetor normal ao plano é $\nabla f(1, 2, 3)$. Como

$$\nabla f(x, y, z) = (1, 2y, -2z),$$

em $(1, 2, 3)$ obtemos

$$(1, 4, -6).$$

A equação do plano tangente é, portanto,

$$1(x - 1) + 4(y - 2) - 6(z - 3) = 0,$$

ou

$$x + 4y - 6z = -9.$$

◁

Definição 3.8

Seja

$$f : \mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbb{R}^n\mathbb{R}^n$$

um campo vetorial com

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})).$$

A **divergência** de $\mathbf{f}$ é definida e denotada por

$$\div f x = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \operatorname{Tr}(\mathrm{D}f(\mathbf{x})) := \partial_1 f_1(\mathbf{x}) + \partial_2 f_2(\mathbf{x}) + \cdots + \partial_n f_n(\mathbf{x}).$$

Exemplo 3.26

Se $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, ye^{z^2})$, então

$$\div f x = 2x + 2y + 2yze^{z^2}.$$

Teorema do Valor Médio para Campos Escalares O Teorema do Valor Médio se generaliza para campos escalares. A ideia é usar uma parametrização para obter uma função real de uma variável e, em seguida, aplicar o teorema de uma variável.

Teorema 3.15 — Teorema do Valor Médio para Campos Escalares

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável. Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ e o segmento que liga esses pontos está contido em U, então existe um ponto $\mathbf{z}$ no segmento aberto entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tal que

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Demonstração. Defina

$$g(t) = f\big((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}\big), \qquad 0 \le t \le 1.$$

A função g é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(c).$$

Pela regra da cadeia,

$$g'(c) = \nabla f\big((1-c)\mathbf{x} + c\mathbf{y}\big) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Tomando

$$\mathbf{z} = (1-c)\mathbf{x} + c\mathbf{y},$$

obtemos o resultado. ∎

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \le \|\nabla f(\mathbf{z})\|\,\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Rotacional

Definição 3.9

Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial com componentes $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, definimos o **rotacional de F** por

$$\nabla \times \mathbf{F} \triangleq \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

Ele também é denotado, algumas vezes, por $\operatorname{curl}(\mathbf{F})$.

Observação 3.16

Um recurso mnemônico para lembrar essa fórmula consiste em escrever

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix},$$

e calcular o produto vetorial tratando os dois termos como vetores tridimensionais.

Exemplo 3.27

Se $\mathbf{F}(x) = x/|x|^3$, então $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Observação 3.17

No exemplo anterior, $\mathbf{F}$ é proporcional à força gravitacional exercida por um corpo na origem. Sabemos, pela experiência, que quando uma esfera é atraída para a Terra apenas pela gravidade ela não começa a girar, o que é consistente com o cálculo $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Exemplo 3.28

Se $v(x, y, z) = (\operatorname{sen} z, 0, 0)$, então $\nabla \times v = (0, \cos z, 0)$.

Observação 3.18

Pense em v como o campo de velocidades de um fluido entre duas placas situadas em $z = 0$ e $z = \pi$. Uma pequena esfera colocada mais próxima da placa inferior experimenta uma velocidade maior em sua parte superior do que em sua parte inferior e, portanto, deve começar a girar no sentido anti-horário em torno do eixo y. Isso é consistente com nosso cálculo de $\nabla \times v$.

A definição do operador rotacional pode ser generalizada ao espaço de dimensão n.

Definição 3.10

Sejam $\mathbf{g}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n-2$, campos vetoriais com $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in})$. Então o **rotacional** de $(g_1, g_2, \ldots, g_{n-2})$ é

$$\operatorname{curl}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{n-2})(\mathbf{x}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \partial_1 & \partial_2 & \cdots & \partial_n \\ g_{11}(\mathbf{x}) & g_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{1n}(\mathbf{x}) \\ g_{21}(\mathbf{x}) & g_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{(n-2)1}(\mathbf{x}) & g_{(n-2)2}(\mathbf{x}) & \cdots & g_{(n-2)n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.29

Se $\mathbf{f}(x, y, z, w) = (e^{xyz}, 0, 0, w^2)$ e $g(x, y, z, w) = (0, 0, z, 0)$, então

$$\text{rotacional}(f, g)(x, y, z, w) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & \partial_4 \\ e^{xyz} & 0 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix} = (xz^2 e^{xyz})\mathbf{e}_4.$$

Definição 3.11

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável em A. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{x} + t\mathbf{v} \in A$ para $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno. Então a **derivada direcional de f na direção de v no ponto x** é definida e denotada por

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}.$$

Observação 3.19

Alguns autores exigem que o vetor $\mathbf{v}$ na Definição 3.11 seja unitário.

Teorema 3.20

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável em A. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $\mathbf{x} + t\mathbf{v} \in A$ para $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno. Então a **derivada direcional de f na direção de v no ponto x** é dada por

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

Exemplo 3.30

Determine a derivada direcional de $\mathbf{f}(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^2$ na direção de $(1, 2, 3)$.

Solução. Temos

$$\nabla f(x, y, z) = \left(3x^2, 3y^2, -2z\right),$$

e, portanto,

$$\nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{v} = 3x^2 + 6y^2 - 6z.$$

◁

A seguir reunimos algumas fórmulas úteis de diferenciação em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.21

1. $\nabla \cdot \psi\mathbf{u} = \psi\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\psi$
2. $\nabla \times \psi\mathbf{u} = \psi\nabla \times \mathbf{u} + \nabla\psi \times \mathbf{u}$
3. $\nabla \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$
4. $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u})$
5. $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u})$
6. $\nabla \times (\nabla\psi) = curl \quad (grad \quad \psi) = \mathbf{0}$
7. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = div \quad (curl \quad \mathbf{u}) = 0$
8. $\nabla \cdot (\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2) = 0$
9. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = curl \quad (curl \quad \mathbf{u}) = grad \quad (div \quad \mathbf{u}) - \nabla^2\mathbf{u}$

em que

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

é o operador laplaciano e

$$\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_x)\mathbf{i} + (\Delta u_y)\mathbf{j} + (\Delta u_z)\mathbf{k}.$$

Aqui cada Δu_i é o laplaciano escalar da componente correspondente; essa expressão usa a base cartesiana constante.

Finalmente, para o vetor posição $\mathbf{r}$, valem as seguintes identidades:

1. $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$
2. $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{u}$

em que $\mathbf{u}$ é um vetor qualquer.

Exercícios

Problema: [A2] A temperatura em um ponto do espaço é $T = xy + yz + zx$.

a) Determine a direção na qual a temperatura varia mais rapidamente com a distância a partir de $(1, 1, 1)$. Qual é a taxa máxima de variação?

b) Determine a derivada de T na direção do vetor $3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$ em $(1, 1, 1)$.

Problema: [C1] Para cada uma das funções vetoriais $\mathbf{F}$ a seguir, determine se $\nabla\phi = \mathbf{F}$ possui solução e, em caso afirmativo, determine-a.

a) $\mathbf{F} = 2xyz^3\mathbf{i} - (x^2z^3 + 2y)\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$

b) $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (y^2 + 1)\mathbf{k}$

Problema: [C1] Seja $\mathbf{f}(x, y, z) = xe^{yz}$. Determine

$$(\nabla f)(2, 1, 1).$$

Problema: [C1] Seja $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, e^{xy}, z)$. Determine

$$(\nabla \times f)(2, 1, 1).$$

Problema: [A1] Determine o plano tangente à superfície $\dfrac{x^2}{2} - y^2 - z^2 = 0$ no ponto $(2, -1, 1)$.

Problema: [A1] Determine o ponto da superfície

$$x^2 + y^2 - 5xy + xz - yz = -3$$

para o qual o plano tangente é $x - 7y = -6$.

Problema: [C1] Determine um vetor que aponte na direção em que $\mathbf{f}(x, y, z) = 3xy - 9xz^2 + y$ cresce mais rapidamente no ponto $(1, 1, 0)$.

Problema: [C1] Seja $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(x,y)$ a derivada direcional de $\mathbf{f}$ em (x,y) na direção do vetor unitário $\mathbf{u}$. Se $\nabla f(1,2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determine $D_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})}\,\mathbf{f}(1,2)$.

Problema: [C1] Use uma aproximação linear da função $\mathbf{f}(x,y) = e^{x\cos 2y}$ em $(0,0)$ para estimar $\mathbf{f}(0.1, 0.2)$.

Problema: [J2] Prove que

$$\nabla \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \bullet (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Problema: [A2] Determine o ponto da superfície

$$2x^2 + xy + y^2 + 4x + 8y - z + 14 = 0$$

para o qual o plano tangente é $4x + y - z = 0$.

Problema: [J2] Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar e sejam $\mathbf{U}, \mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vetoriais. Prove que

1. $\nabla \cdot \phi\mathbf{V} = \phi\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla\phi$
2. $\nabla \times \phi\mathbf{V} = \phi\nabla \times \mathbf{V} + (\nabla\phi) \times \mathbf{V}$
3. $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$
5. $\nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{U})$

Problema: [C1] Determine os ângulos formados pelo gradiente de $\mathbf{f}(x,y) = x^{\sqrt{3}} + y$ no ponto $(1,1)$ com os eixos coordenados.

Exemplo 3.31 — Sensor em movimento em um campo térmico (médio) Seja $T(x,y) = 100e^{-(x^2+4y^2)}$. No ponto $(1, 1/2)$, determine a direção unitária de maior aumento de temperatura e a taxa registrada por um sensor com velocidade $(1,-1)$.

Solução. O gradiente é

$$\nabla T = (-200xe^{-(x^2+4y^2)}, -800ye^{-(x^2+4y^2)}).$$

No ponto dado, $\nabla T = (-200,-400)e^{-2}$. A direção de maior aumento é $(-1,-2)/\sqrt{5}$ e a taxa máxima por unidade de distância é $200\sqrt{5}\,e^{-2}$. Pela regra da cadeia, o sensor registra

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \nabla T \cdot (1,-1) = 200e^{-2}.$$

A taxa no tempo inclui a velocidade do sensor; a taxa direcional por unidade de distância exige uma direção unitária. ◁

3.8. O Significado Geométrico da Divergência e do Rotacional

Nesta seção apresentamos algumas interpretações heurísticas para o significado da divergência e do rotacional. Essas interpretações serão demonstradas formalmente nos capítulos 6 e 7.

3.8.1. Divergência

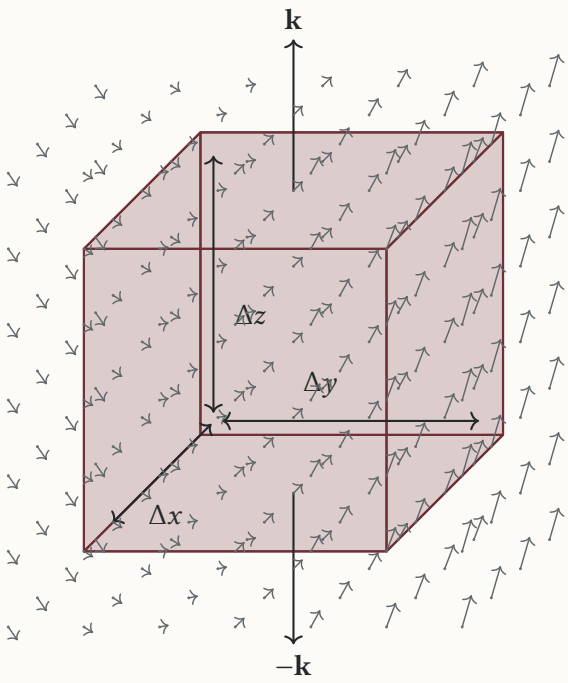


Figura 3.4.: Cálculo da contribuição vertical para o fluxo.

Considere um pequeno paralelepípedo fechado, com faces paralelas aos planos coordenados, como na Figura 3.4. Qual é o fluxo de **F** para fora do paralelepípedo?

Considere primeiro a contribuição vertical, isto é, o fluxo para cima através da face superior somado ao fluxo através da face inferior. Essas duas faces têm área

$\Delta A = \Delta x\,\Delta y$, mas seus vetores normais exteriores apontam em direções opostas, de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{\text{superior+inferior}} \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{A} &\approx \mathbf{F}(z+\Delta z)\cdot\mathbf{k}\,\Delta x\,\Delta y - \mathbf{F}(z)\cdot\mathbf{k}\,\Delta x\,\Delta y\\ &\approx \Big(F_z(z+\Delta z) - F_z(z)\Big)\,\Delta x\,\Delta y\\ &\approx \frac{F_z(z+\Delta z)-F_z(z)}{\Delta z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\\ &\approx \frac{\partial F_z}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \qquad \text{pelo Teorema do Valor Médio}\end{aligned}$$

em que multiplicamos e dividimos por Δz para obter o volume $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ no terceiro passo e usamos a definição de derivada no último passo.

Repetindo o argumento para os pares restantes de faces, segue que o fluxo total para fora do paralelepípedo é

$$\text{fluxo total} = \sum_{\text{paralelepípedo}} \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{A} \approx \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta V$$

Como o fluxo total é proporcional ao volume do paralelepípedo, ele tende a zero quando o volume do paralelepípedo tende a zero. A quantidade interessante é, portanto, a razão entre fluxo e volume; essa razão é chamada divergência.

Em qualquer ponto P, podemos definir a divergência de um campo vetorial $\mathbf{F}$, escrita $\nabla\cdot\mathbf{F}$, como o fluxo de $\mathbf{F}$ por unidade de volume que sai de um pequeno paralelepípedo em torno de P.

Assim, a divergência de $\mathbf{F}$ no ponto P é o fluxo por unidade de volume através de um pequeno paralelepípedo em torno de P, que, em coordenadas retangulares, é dado por

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\text{fluxo}}{\text{volume unitário}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Cálculos análogos permitem determinar expressões para a divergência em outros sistemas de coordenadas, a partir das correspondentes mudanças de variáveis.

3.8.2. Rotacional

Intuitivamente, o rotacional é a circulação por unidade de área, isto é, a densidade de circulação ou taxa de rotação (a intensidade da torção em um único ponto).

Considere um pequeno retângulo no plano yz, com lados paralelos aos eixos coordenados, como na figura. Qual é a circulação de $\mathbf{F}$ ao redor desse retângulo?

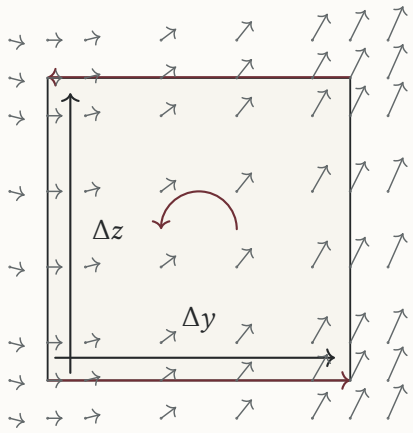


Figura 3.5.: Cálculo da contribuição horizontal para a circulação ao redor de um pequeno retângulo.

Considere primeiro as arestas horizontais, em cada uma das quais $d\mathbf{r} = \Delta y\,\mathbf{j}$. Entretanto, ao calcular a circulação de $\mathbf{F}$ ao redor do retângulo, percorremos essas duas arestas em sentidos opostos. Em particular, ao percorrer o retângulo no sentido anti-horário, $\Delta y < 0$ na parte superior e $\Delta y > 0$ na parte inferior.

$$\begin{aligned}\sum_{\text{superior+inferior}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &\approx -\mathbf{F}(z+\Delta z)\cdot\mathbf{j}\,\Delta y + \mathbf{F}(z)\cdot\mathbf{j}\,\Delta y \\ &\approx -\Big(F_y(z+\Delta z) - F_y(z)\Big)\,\Delta y \\ &\approx -\frac{F_y(z+\Delta z)-F_y(z)}{\Delta z}\,\Delta y\,\Delta z \\ &\approx -\frac{\partial F_y}{\partial z}\,\Delta y\,\Delta z \qquad \text{pelo Teorema do Valor Médio}\end{aligned} \tag{3.16}$$

em que multiplicamos e dividimos por Δz para obter o elemento de área $\Delta A = \Delta y\,\Delta z$ no terceiro passo e usamos a definição de derivada no passo final.

Assim como no caso da divergência, nesse argumento estamos supondo que $\mathbf{F}$ não varia muito nas direções x e y, embora nos interesse sua variação na direção z.

Repetindo o argumento para os dois lados restantes, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{\text{lados}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &\approx \mathbf{F}(y+\Delta y)\cdot\mathbf{k}\,\Delta z - \mathbf{F}(y)\cdot\mathbf{k}\,\Delta z \\ &\approx \Big(F_z(y+\Delta y) - F_z(y)\Big)\,\Delta z \\ &\approx \frac{F_z(y+\Delta y)-F_z(y)}{\Delta y}\,\Delta y\,\Delta z \\ &\approx \frac{\partial F_z}{\partial y}\;\Delta y\,\Delta z\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde é preciso ter cuidado com os sinais, que são diferentes dos de (3.16). Somando as duas expressões, obtemos

$$\text{circulação total no plano } yz \approx \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\Delta y\,\Delta z. \tag{3.18}$$

Como isso é proporcional à área do retângulo, a expressão tende a zero quando a área tende a zero. A quantidade interessante é, portanto, a razão entre a circulação e a área.

Estamos calculando a componente **i** do rotacional.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{i} := \frac{\text{circulação no plano } yz}{\text{área unitária}} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \tag{3.19}$$

A expressão retangular para o rotacional completo segue agora por simetria cíclica:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{3.20}$$

e é mais fácil de memorizar na forma

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

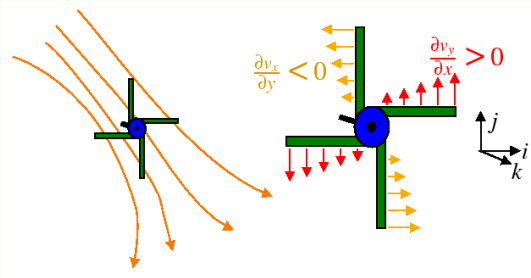


Figura 3.6.: Considere uma pequena roda de pás colocada em um campo vetorial de posição. Se a componente v_y é uma função crescente de x, isso tende a fazer a roda girar (no sentido positivo, anti-horário) em torno do eixo $\hat{k}$. Se a componente v_x é uma função decrescente de y, isso também tende a fazer a roda girar no sentido positivo, anti-horário, em torno do eixo $\hat{k}$. O impulso resultante para a rotação em torno do eixo $\hat{k}$ é a soma dos dois.
Fonte: MIT

Exercícios

Exercício N030 **Aplicação; básico**

Para $v = (ax, by, cz)$, calcule a divergência e interprete o sinal de $a + b + c$ em um pequeno volume de fluido.

Exercício N031 **Aplicação; básico**

Para a rotação rígida $v = (-\omega y, \omega x, 0)$, calcule o rotacional e compare seu módulo com a velocidade angular.

Exercício N032 **Aplicação; médio**

Um fluido incompressível tem $v = (x^2, -2xy, w(x, y, z))$. Determine a condição sobre w_z e dê um exemplo de campo que a satisfaça.

3.9. Equações de Maxwell

Os operadores de divergência e rotacional descrevem agora relações entre campos físicos. As equações abaixo são escritas em unidades SI, para o vácuo, com fontes ρ e $\mathbf{j}$. Em meios materiais, a descrição macroscópica exige também relações constitutivas.

As equações de Maxwell formam um conjunto de quatro equações que descrevem o comportamento do eletromagnetismo. Em conjunto com a lei da força de Lorentz e as condições iniciais e de contorno apropriadas, elas constituem a descrição clássica dos campos e de sua ação sobre cargas.

Para começar, há dois campos fundamentais no eletromagnetismo, conhecidos como campos *elétrico* e *magnético*. Eles são denotados por $\mathbf{E}(r,t)$ e $\mathbf{B}(r,t)$, respectivamente.

Para compreender o eletromagnetismo, precisamos explicar como os campos elétrico e magnético são formados e como esses campos afetam partículas carregadas. Esta última parte é relativamente direta e é descrita pela lei da força de Lorentz.

Definição 3.12 — Lei da força de Lorentz

Uma carga pontual q sofre uma força

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}).$$

A dinâmica dos próprios campos é governada pelas equações de Maxwell. Para enunciá-las, precisamos primeiro introduzir mais dois conceitos.

Definição 3.13 — Densidade de carga e densidade de corrente

- $\rho(\mathbf{r},t)$ é a **densidade de carga**, definida como a carga por unidade de volume.
- $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ é a **densidade de corrente**, definida como a corrente elétrica por unidade de área da seção transversal.

As equações de Maxwell são

Definição 3.14 — Equações de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\\ \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j},\end{aligned}$$

em que ε_0 é a constante elétrica (isto é, a permissividade do vácuo) e μ_0 é a constante magnética (isto é, a permeabilidade do vácuo), ambas constantes.

Exercícios

Exercício N033 **Justificação; médio**

Supondo campos suficientemente regulares para comutar as derivadas, aplique a divergência à lei de Ampère–Maxwell e deduza $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

Exercício N034 **Aprofundamento; difícil**

No vácuo sem fontes, use as equações de Maxwell para obter $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E}$.

Exercício N035 **Aplicação; básico**

Uma carga q tem velocidade $(v, 0, 0)$ em campos $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ e $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Determine a força de Lorentz e a condição para ela se anular.

3.10. Funções Inversas

A aproximação linear também indica quando as saídas podem servir como novas entradas. O Teorema da Função Inversa torna essa ideia precisa: a invertibilidade da derivada garante uma inversa em uma vizinhança, mas não elimina ambiguidades globais, como a periodicidade de um ângulo.

Uma função $\mathbf{f}$ é **injetiva** se pontos distintos de seu domínio têm imagens distintas. Nesse caso, cada ponto $\mathbf{u} \in \operatorname{Im}(\mathbf{f})$ é imagem de um único ponto do domínio, e podemos definir

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u}) = \text{o único } \mathbf{x} \in \operatorname{Dom}(\mathbf{f}) \text{ tal que } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}.$$

Assim,

$$\mathrm{Dom}(\mathbf{f}^{-1}) = \mathrm{Im}(\mathbf{f}), \qquad \mathrm{Im}(\mathbf{f}^{-1}) = \mathrm{Dom}(\mathbf{f}),$$

e

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}.$$

Mesmo que $\mathbf{f}$ não seja injetiva em todo o domínio, pode ser injetiva em um subconjunto S. Nesse caso, a restrição

$$\mathbf{f}|_S : S \to \mathbf{f}(S)$$

possui inversa, denotada por $\mathbf{f}_S^{-1}$.

Definição 3.15

Dizemos que $\mathbf{f}$ é **localmente invertível** em $\mathbf{x}_0$ se existe uma vizinhança U de $\mathbf{x}_0$ na qual a restrição $\mathbf{f}|_U$ é injetiva.

O caso linear sugere a condição correta. Se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

com $\mathbf{A}$ quadrada, então $\mathbf{f}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$, e

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}.$$

Além disso,

$$\mathrm{D}(\mathbf{f}^{-1}) = \big(\mathrm{D}\mathbf{f}\big)^{-1}.$$

Para funções não lineares, a invertibilidade da derivada garante invertibilidade apenas local, não global. Por exemplo,

$$\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$$

satisfaz

$$\det J_{\mathbf{f}}(x, y) = \det \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix} = e^{2x} \neq 0,$$

mas não é injetiva em $\mathbb{R}^2$, pois é 2π-periódica na variável y.

Teorema 3.22 — Teorema da Função Inversa

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e seja $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Se $\mathbf{a} \in U$ e $\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}$ é invertível, então existem abertos $U' \subseteq U$ e $V' \subseteq \mathbb{R}^n$, com

$$\mathbf{a} \in U', \qquad \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V',$$

tais que

$$\mathbf{f}|_{U'} : U' \to V'$$

é bijetiva e sua inversa $\mathbf{g} : V' \to U'$ é de classe C^1. Além disso,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\mathbf{g} = \left(\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}\right)^{-1}, \qquad \mathbf{x} \in U'.$$

A condição de invertibilidade da derivada também é necessária para a existência de uma inversa diferenciável. De fato, se $\mathbf{g}$ é uma inversa local diferenciável de $\mathbf{f}$, então

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathrm{Id}\,.$$

Pela regra da cadeia,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{f}(\mathbf{a})}\mathbf{g} \circ \mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f} = I,$$

de modo que $\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{f}$ é invertível.

Exercícios

Exercício N036 **Consolidação; básico**

Para $F(x, y) = (x + y, x - y)$, encontre a inversa e verifique a fórmula de sua derivada.

Exercício N037 **Justificação; médio**

Determine os pontos em que $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ admite inversa local diferenciável. Mostre que ela não é globalmente injetiva no plano sem a origem.

Exercício N038 **Justificação; médio**

Para $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$, escolha uma faixa angular de largura menor que 2π e descreva uma inversa na imagem. Explique por que a escolha da faixa é necessária.

3.11. Funções Implícitas

O Teorema da Função Implícita permite resolver localmente uma equação para algumas variáveis em função das demais.

Teorema 3.23 — Teorema Especial da Função Implícita

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e seja $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Suponha que $(\mathbf{a}, b) \in U$,

$$c = f(\mathbf{a}, b)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0.$$

Então existem abertos $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V' \subseteq \mathbb{R}$, com $\mathbf{a} \in U'$ e $b \in V'$, e uma única função $g : U' \to V'$ de classe C^1 tal que

$$g(\mathbf{a}) = b$$

e

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = c \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in U'.$$

Além disso,

$$\{(\mathbf{x}, y) \in U' \times V' \,:\, f(\mathbf{x}, y) = c\} = \{(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \,:\, \mathbf{x} \in U'\}.$$

Demonstração. Defina

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, y) = \big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, y)\big).$$

A matriz derivada de $\mathbf{F}$ em $(\mathbf{a}, b)$ tem a forma triangular em blocos

$$\mathrm{D}_{(\mathbf{a},b)}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \end{bmatrix},$$

e, portanto, é invertível. Pelo Teorema da Função Inversa, $\mathbf{F}$ possui uma inversa local de classe C^1.

Como as primeiras n coordenadas de $\mathbf{F}$ são preservadas, essa inversa tem a forma

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, z) = \big(\mathbf{x}, G(\mathbf{x}, z)\big).$$

Fixando $z = c$ e definindo

$$g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, c),$$

obtemos

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = c.$$

A unicidade local também decorre da invertibilidade de $\mathbf{F}$. ■

Observação 3.24

No caso $n = 1$, a equação $f(x, y) = c$ descreve localmente uma curva. A condição $\partial f/\partial y \neq 0$ garante que essa curva pode ser escrita, perto do ponto considerado, na forma $y = g(x)$.

Observação 3.25

A escolha de y como última coordenada é apenas uma convenção. Se uma derivada parcial $\partial_i f$ é não nula no ponto, podemos resolver localmente a equação para a coordenada x_i em função das demais.

Teorema 3.26 — Teorema Geral da Função Implícita

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ aberto e seja

$$\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$$

de classe C^1. Escreva os pontos de $\mathbb{R}^{n+m}$ como $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Suponha que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

e que a matriz

$$\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right]_{1 \le i,j \le m}$$

seja invertível. Então existem abertos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$, contendo respectivamente $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e uma única função

$$\mathbf{g} : A \to B$$

de classe C^1 tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

para todo $\mathbf{x} \in A$.
Além disso,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{g} = -\left[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right]^{-1} \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Demonstração. Considere $H(x, y) = (x, f(x, y))$. Sua derivada no ponto (a, b) é

$$DH_{(a,b)} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ D_x f_{(a,b)} & D_y f_{(a,b)} \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $\det D_y f_{(a,b)} \neq 0$. Pelo teorema da função inversa, H possui inversa local de classe C^1. Como preserva as primeiras coordenadas, essa inversa tem a forma $(x, z) \mapsto (x, h(x, z))$. Diminuindo as vizinhanças, podemos definir $g(x) = h(x, 0)$ para todo $x \in A$. Então $f(x, g(x)) = 0$. Se $y \in B$ também satisfaz $f(x, y) = 0$, a injetividade local de H implica $y = g(x)$, dando a unicidade. Diferenciando a identidade, obtemos

$$D_x f_{(x,g(x))} + D_y f_{(x,g(x))}\, Dg_x = 0.$$

Por continuidade, o bloco $D_y f$ continua invertível depois de uma nova redução das vizinhanças. Multiplicá-lo pela inversa fornece a fórmula da derivada enunciada. Assim o sistema de equações foi resolvido localmente, com controle tanto da existência quanto da variação da solução. ∎

Em outras palavras, quando o bloco de derivadas em relação às variáveis $\mathbf{y}$ é invertível, a equação

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

determina localmente $\mathbf{y}$ como uma função diferenciável de $\mathbf{x}$.

Exemplo 3.32

Considere as equações

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5, \qquad (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 5,$$

para as quais $(0, 0, 2)$ é uma solução. Determine quais variáveis podem ser expressas, perto desse ponto, como funções diferenciáveis das demais.

Solução. Defina

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 5 \\ (x+1)^2 + y^2 + z^2 - 5 \end{pmatrix}.$$

No ponto $\mathbf{a} = (0, 0, 2)$,

$$\mathrm{D}_{\mathbf{a}}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

O menor 2×2 formado pelas colunas correspondentes a x e z é invertível. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, x e z podem ser expressos localmente e de modo único como funções de y.

De fato, resolvendo explicitamente,

$$x = 0, \qquad z = \sqrt{4 - y^2}$$

na vizinhança de $(0, 0, 2)$. ◁

Exercícios

Exercício N039 **Aplicação; médio**

Na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, obtenha z_x e z_y perto de $(1, 2, 2)$ e escreva o plano tangente.

Exercício N040 **Aplicação; médio**

Um equilíbrio térmico satisfaz $T^4 + pT - q = 0$. Para $p, q > 0$ e uma solução $T > 0$, justifique a dependência local $T = T(p, q)$ e determine T_p, T_q, interpretando seus sinais.

Exercício N041 **Consolidação; médio**

Para $x + y + z = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, verifique se y, z podem ser escritos como funções de x perto de $(0, 1, -1)$ e calcule $\dot{y}(0), \dot{z}(0)$.

3.12. Operações Diferenciais Comuns na Notação de Einstein

Apresentamos aqui as operações diferenciais mais comuns escritas na notação de Einstein.

O operador ∇ é um operador diferencial parcial espacial definido, em sistemas de coordenadas cartesianas, por

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.22}$$

O gradiente de uma função escalar diferenciável de posição f é o vetor dado por

$$[\nabla f]_i = \nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = f_{,i} \tag{3.23}$$

O gradiente de uma função vetorial diferenciável de posição $\mathbf{A}$ (que é o produto externo entre o operador ∇ e o vetor, a ser definido em § 10.3.3) é definido por

$$[\nabla \mathbf{A}]_{ij} = \partial_i A_j \tag{3.24}$$

Observe que a operação gradiente é distributiva, mas não comutativa nem associativa:

$$\nabla (f + h) = \nabla f + \nabla h \tag{3.25}$$

$$\nabla f \neq f \nabla \tag{3.26}$$

$$(\nabla f)\, h \neq \nabla (fh) \tag{3.27}$$

em que f e h são funções escalares diferenciáveis da posição.

A divergência de um vetor diferenciável $\mathbf{A}$ é o escalar dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \delta_{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \nabla_i A_i = \partial_i A_i = A_{i,i} \tag{3.28}$$

A operação divergência é distributiva, mas não comutativa nem associativa:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \tag{3.29}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \cdot \nabla \tag{3.30}$$

$$\nabla \cdot (f \mathbf{A}) \neq \nabla f \cdot \mathbf{A} \tag{3.31}$$

em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são funções vetoriais diferenciáveis da posição.

O rotacional de um vetor diferenciável $\mathbf{A}$ é o vetor dado por

$$[\nabla \times \mathbf{A}]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \nabla_j A_k = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k = \epsilon_{ijk} A_{k,j} \tag{3.32}$$

A operação rotacional é distributiva, mas não comutativa nem associativa:

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \tag{3.33}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \times \nabla \tag{3.34}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \neq (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} \tag{3.35}$$

O operador laplaciano escalar, também chamado operador harmônico, atuando sobre um escalar diferenciável f, é dado por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \delta_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \nabla_{ii} f = \partial_{ii} f = f_{,ii} \tag{3.36}$$

O operador laplaciano atuando sobre um vetor diferenciável $\mathbf{A}$ é definido componente a componente, de maneira análoga ao laplaciano de um escalar:

$$\left[\nabla^2 \mathbf{A}\right]_i = \partial_{jj} A_i \tag{3.37}$$

O operador diferencial escalar a seguir é usado com frequência em ciências (por exemplo, em dinâmica dos fluidos):

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_i \nabla_i = A_i \frac{\partial}{\partial x_i} = A_i \partial_i \tag{3.38}$$

em que $\mathbf{A}$ é um vetor. Como indicado anteriormente, a ordem de A_i e ∂_i deve ser respeitada.

O operador diferencial vetorial a seguir também aparece com frequência em aplicações científicas:

$$[\mathbf{A} \times \nabla]_i = \epsilon_{ijk} A_j \partial_k. \tag{3.39}$$

3.12.1. Identidades Comuns na Notação de Einstein

Apresentamos aqui algumas identidades amplamente utilizadas do cálculo vetorial, tanto na notação vetorial tradicional quanto em sua forma equivalente na notação de Einstein. Nos itens a seguir, f e h são campos escalares diferenciáveis; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são campos vetoriais diferenciáveis; e $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ é o vetor posição.

Exemplo 3.33

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= n \\ &\Updownarrow \\ \partial_i x_i &= n \end{aligned} \tag{3.40}$$

em que n é a dimensão do espaço.

Exemplo 3.34

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= \mathbf{0} \\ &\Updownarrow \\ \epsilon_{ijk}\partial_j x_k &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Exemplo 3.35

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) &= \mathbf{a} \\ &\Updownarrow \\ \partial_i\left(a_j x_j\right) &= a_i \end{aligned} \tag{3.42}$$

em que **a** é um vetor constante.

Exemplo 3.36

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\nabla f) &= \nabla^2 f \\ &\Updownarrow \\ \partial_i(\partial_i f) &= \partial_{ii} f \end{aligned} \tag{3.43}$$

Exemplo 3.37

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Exemplo 3.38

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \mathbf{0} \\ &\Updownarrow \\ \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k f &= 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Exemplo 3.39

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &\Updownarrow \\ \partial_i \left(\epsilon_{ijk} A_j B_k \right) &= B_k \left(\epsilon_{kij} \partial_i A_j \right) - A_j \left(\epsilon_{jik} \partial_i B_k \right) \end{aligned} \tag{3.46}$$

Na notação de Einstein, a condição para que um campo vetorial $\mathbf{A}$ seja solenoidal é

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \partial_i A_i &= 0 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Na notação de Einstein, a condição para que um campo vetorial $\mathbf{A}$ seja irrotacional é

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{0} \\ &\Updownarrow \\ \epsilon_{ijk} \partial_j A_k &= 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Exercícios

Escreva as identidades a seguir usando a notação de Einstein:

Problema: [J2] $\nabla(fh) = f\nabla h + h\nabla f$

Problema: [J2] $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla f$

Problema: [J2] $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f\nabla\times\mathbf{A} + \nabla f\times\mathbf{A}$

Problema: [J2] $\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{B})\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{B}$

Problema: [J2] $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

Problema: [J2] $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

Problema: [J2] $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

Problema: [J2] $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} \end{vmatrix}$

Problema: [J2] $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]\,\mathbf{C} - [\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]\,\mathbf{D}$

3.12.1. Exemplos de Uso da Notação de Einstein para Demonstrar Identidades

Exemplo 3.40

Mostre que $\nabla\cdot\mathbf{r} = n$:

Solução.

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{r} &= \partial_i x_i && \text{(Eq. 3.28)} \\ &= \delta_{ii} && \text{(Eq. 10.25)} \\ &= n && \text{(Eq. 10.25)} \end{aligned} \tag{3.49}$$

◁

Exemplo 3.41

Mostre que $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$:

Solução.

$$\begin{aligned} [\nabla\times\mathbf{r}]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j x_k && \text{(Eq. 3.32)} \\ &= \epsilon_{ijk}\delta_{kj} && \text{(Eq. 10.24)} \\ &= \epsilon_{ijj} && \text{(Eq. 10.21)} \\ &= 0 && \text{(Eq. 10.19)} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Como i é um índice livre, a identidade está demonstrada para todas as componentes. ◁

Exemplo 3.42
$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{a}$:

Solução.

$$\begin{aligned}
[\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})]_i &= \partial_i\left(a_j x_j\right) && \text{(Eqs. 3.23 \& 1.15)}\\
&= a_j\partial_i x_j + x_j\partial_i a_j && \text{(regra do produto)}\\
&= a_j\partial_i x_j && (a_j \text{ é constante})\\
&= a_j\delta_{ji} && \text{(Eq. 10.24)}\\
&= a_i && \text{(Eq. 10.21)}\\
&= [\mathbf{a}]_i && \text{(definição de índice)}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Como i é um índice livre, a identidade está demonstrada para todas as componentes. ◁

Exercícios

Demonstre as identidades a seguir.

Problema: [J2] $\nabla\cdot(\nabla f) = \nabla^2 f$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla f) &= \partial_i\left[\nabla f\right]_i && \text{(Eq. 3.28)}\\
&= \partial_i\left(\partial_i f\right) && \text{(Eq. 3.23)}\\
&= \partial_i\partial_i f && \text{(regras de derivação)}\\
&= \partial_{ii} f && \text{(definição de segunda derivada)}\\
&= \nabla^2 f && \text{(Eq. 3.36)}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Problema: [J2] $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

Problema: [J2] $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

Problema: [J2] $\nabla (fh) = f\nabla h + h\nabla f$

Problema: [J2] $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$

Problema: [J2] $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$

Problema: [J2] $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$:

Problema: [J2] $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Problema: [J2] $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$:

Problema: [J2] $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

Problema: [J2] $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

Problema: [J2] $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}$

Problema: [J2] $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] \mathbf{C} - [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] \mathbf{D}$

CAPÍTULO

4

Curvas e superfícies

Três perguntas que organizam a geometria

Como descrever o objeto? Uma curva ou superfície pode ser dada por parâmetros, por equações implícitas ou por ambas as descrições. A escolha mais útil depende do cálculo: parâmetros ajudam a integrar; equações implícitas frequentemente tornam normais e restrições mais visíveis.

Como reconhecer seus pontos regulares? Para uma curva, examinamos se a velocidade é não nula. Para uma superfície parametrizada, verificamos se os vetores coordenados são independentes. Para um conjunto de nível, examinamos a independência dos gradientes das restrições. Uma falha de parâmetros pode ser corrigida por outra carta; uma singularidade do próprio objeto exige uma análise diferente.

Como otimizar uma função sobre ele? Primeiro identificamos o conjunto admissível e verificamos existência de extremos. Depois usamos sua geometria tangente para encontrar candidatos. Por fim, comparamos valores e examinamos os pontos em que as hipóteses do método falham. O cálculo de multiplicadores, isoladamente, não conclui a classificação.

4.1. Curvas paramétricas

Há várias maneiras de descrever uma curva. Uma equação como $x^2 + y^2 = 1$, por exemplo, caracteriza o círculo unitário, mas não registra como percorremos seus

pontos. Uma parametrização acrescenta essa informação: ela descreve a posição de uma partícula em função de um parâmetro e, assim, determina também uma orientação para o percurso.

Definição 4.1

Uma **parametrização de curva** é uma função diferenciável $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Sua imagem $\Gamma = \gamma([a, b])$ é a curva traçada por γ.
A função γ também é chamada de curva paramétrica.

Uma mesma imagem pode corresponder a parametrizações diferentes, que podem percorrê-la em velocidades e sentidos distintos.

Observação 4.1

Quando o contexto permitir, usaremos a mesma letra para a curva e sua parametrização; escreveremos, por exemplo, $\gamma(t)$ para a posição ao longo do percurso.

Definição 4.2

Uma parametrização $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^n$ é **regular** se $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

A parametrização fornece uma orientação à curva. Como $\Gamma = \gamma([a, b])$, podemos pensar na curva como a trajetória de um movimento que começa em $\gamma(a)$ e termina em $\gamma(b)$.

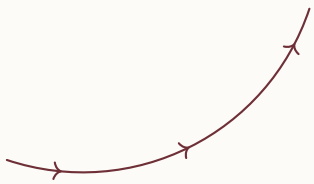


Figura 4.1.: Orientação de uma curva

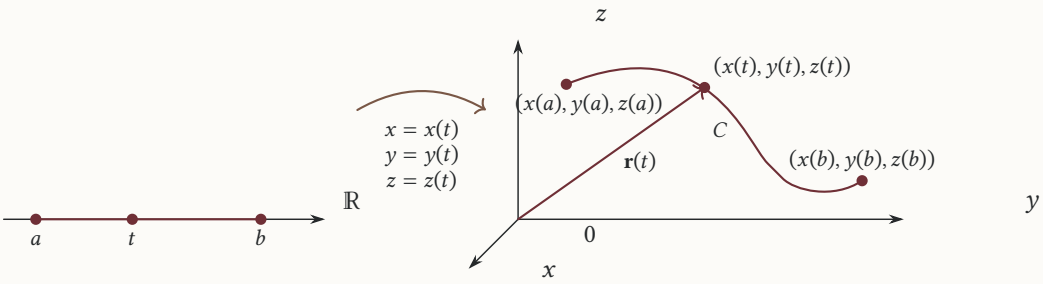


Figura 4.2.: Parametrização de uma curva C em $\mathbb{R}^3$

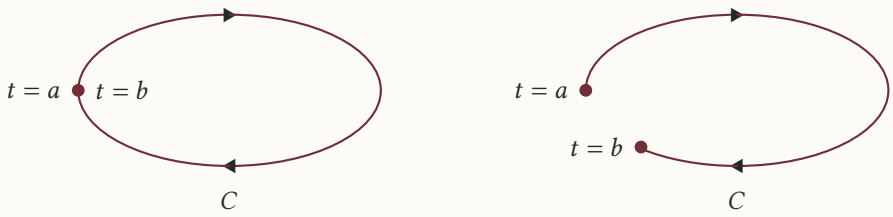
Exemplo 4.1

A curva $x^2 + y^2 = 1$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

Dada uma curva paramétrica $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$,

- A curva é **simples** se γ é injetiva em $[a, b]$.
- Um ponto p é um **ponto múltiplo** se é atingido em dois parâmetros distintos, exceto pela repetição obrigatória entre as extremidades de uma curva fechada simples.
- A curva γ é dita **fechada** se $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- A curva fechada é **simples** se a única repetição de ponto no percurso é a igualdade entre as extremidades: γ é injetiva em $[a, b)$.

Por exemplo, o percurso de um oito tem uma auto-interseção e não é simples; cada laço, considerado separadamente, é uma curva fechada simples.



(a) Fechada (b) Não fechada

Figura 4.3.: Curvas fechadas e não fechadas

Teorema 4.2 — Teorema da Curva de Jordan

Seja γ uma curva fechada simples no plano $\mathbb{R}^2$. Então seu complemento, $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, consiste exatamente de duas componentes conexas. Uma delas é limitada (o interior) e a outra é ilimitada (o exterior), e a curva γ é a fronteira de cada componente.

O Teorema da Curva de Jordan afirma que toda curva fechada simples no plano divide-o em uma região "interior", limitada pela curva, e uma região "exterior". Embora o enunciado seja intuitivamente evidente, sua demonstração é complexa.

Exemplo 4.2

Encontre uma representação paramétrica da curva resultante da interseção do plano $3x + y + z = 1$ e do cilindro $x^2 + 2y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$.

Solução. A projeção da interseção do plano $3x + y + z = 1$ com o cilindro é a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ no plano xy. Essa elipse pode ser parametrizada por

$$x = \cos t, \ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Da equação do plano,

$$z = 1 - 3x - y = 1 - 3\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t.$$

Assim, podemos tomar a parametrização

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \left(\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t, 1 - 3\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t\right).$$

◁

Proposição 4.3

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1, seja $c \in \mathbb{R}^n$ e suponha que $\mathrm{D}F_p$ tenha posto n em todo ponto p de $F^{-1}(c)$. Então, perto de cada um desses pontos, o conjunto de nível é a imagem de uma parametrização regular de curva.

Demonstração. Fixe $p \in F^{-1}(c)$. Como $\mathrm{D}F_p$ tem posto n, alguma submatriz $n \times n$ é invertível. Reordenando as coordenadas, podemos supor que isso ocorre nas primeiras n coordenadas. Pelo teorema da função implícita, existem vizinhanças $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $g : I \to W$ tais que, perto de p, o conjunto de nível é o gráfico $(g(t), t)$, $t \in I$. A derivada dessa parametrização tem última coordenada igual a 1, logo não se anula. ∎

Observação 4.4

Uma curva pode ter muitas parametrizações. Por exemplo, $\delta(t) = (\cos t, \operatorname{sen}(-t))$ também parametriza o círculo unitário, mas percorre-o no sentido horário, em vez do anti-horário. Escolher uma parametrização requer escolher a direção de percurso da curva.

Podemos reparametrizar $\mathbf{r}$ por uma mudança de variável suave $\tilde{u} = \tilde{u}(u)$, com derivada não nula. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tilde{u}} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}u}$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tilde{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u} \Big/ \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}u}$$

Proposição 4.5

Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização regular e seja $a = \gamma(t_0)$. A reta tangente à curva nesse ponto é $\{\gamma(t_0) + s\gamma'(t_0) : s \in \mathbb{R}\}$.

Se pensamos em $\gamma(t)$ como a posição de uma partícula no instante t, o resultado acima afirma que o espaço tangente é gerado pela *velocidade* da partícula.

A velocidade da partícula é tangente à curva. A aceleração, definida como γ'', não precisa ser tangente. Se a parametrização é regular e $|\gamma'|$ é constante, então, derivando $\gamma' \cdot \gamma' = |\gamma'|^2$, obtemos $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$: a aceleração é perpendicular à velocidade.

Até aqui sempre exigimos que todas as curvas e parametrizações fossem diferenciáveis ou C^1. Agora relaxamos essa exigência e passamos a supor apenas que todas as curvas (e parametrizações) são **diferenciáveis por partes**, ou C^1 **por partes**.

Definição 4.3

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é chamada C^1 **por partes** se existe uma partição finita $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tal que cada restrição $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$ é C^1 (com derivadas laterais nas extremidades dos subintervalos). Em particular, uma curva C^1 por partes é contínua em todo $[a, b]$.

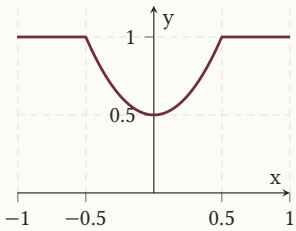


Figura 4.4.: Função C^1 por partes

Definição 4.4

Uma curva (conexa) γ é C^1 **por partes** se possui uma parametrização contínua e C^1 por partes.

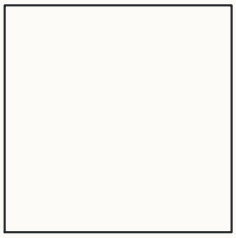


Figura 4.5.: A fronteira de um quadrado é uma curva C^1 por partes, mas não é uma curva diferenciável.

Observação 4.6

A condição por partes controla a regularidade em cada trecho; exigir continuidade global impede que a imagem tenha saltos entre esses trechos.

Exercícios

Exercício N042 **Consolidação; básico**

Parametrize a interseção de $x^2+y^2=4$ com $z=x+y$. Calcule um vetor tangente no ponto $(2,0,2)$.

Exercício N043 **Justificação; básico**

Compare $\gamma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)$, $0\le t\le 2\pi$, e $\eta(s)=(\cos 2s,\operatorname{sen} 2s)$, $0\le s\le 2\pi$. Discuta imagem, orientação e número de percursos.

Exercício N044 **Justificação; médio**

A curva $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ é regular na origem? Determine a direção limite das secantes e explique a diferença entre existência de uma direção tangente e regularidade da parametrização.

4.2. Superfícies

Uma curva usa um parâmetro livre; uma superfície usa dois. A regularidade exige que as duas variações coordenadas sejam independentes, para que a parametrização não reduza localmente a superfície a uma curva. A descrição implícita usa, em vez disso, uma equação que restringe os pontos do espaço.

Vimos que uma curva espacial C pode ser parametrizada por uma função vetorial $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u)$, onde u percorre algum intervalo I do eixo u. De maneira análoga, podemos parametrizar uma superfície S no espaço por uma função vetorial $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, onde (u,v) percorre alguma região Ω do plano uv.

Definição 4.5

Uma **parametrização de superfície** é uma aplicação de classe C^1 $\mathbf{r}:\Omega\to\mathbb{R}^3$, onde Ω é uma região do plano $\mathbb{R}^2$. Sua imagem é a superfície traçada por $\mathbf{r}$. A parametrização não precisa ser injetiva em toda a região: coordenadas angulares, por exemplo, podem ter uma costura, e os polos da esfera têm várias

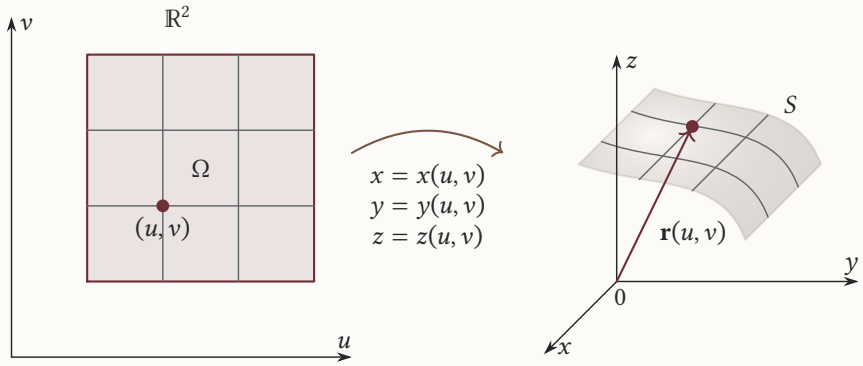


Figura 4.6.: Parametrização de uma superfície S em $\mathbb{R}^3$

representações. Escrevendo

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

suas componentes descrevem as coordenadas cartesianas da imagem.

Exemplo 4.3

(O gráfico de uma função) O gráfico de uma função

$$y = f(x), x \in [a, b]$$

pode ser parametrizado tomando

$$r(u) = u\mathbf{i} + f(u)\mathbf{j}, u \in [a, b].$$

De maneira análoga, o gráfico de uma função

$$z = f(x, y), (x, y) \in \Omega$$

pode ser parametrizado tomando

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in \Omega.$$

À medida que (u, v) percorre Ω, a extremidade de $\mathbf{r}(u, v)$ descreve o gráfico de f.

Exemplo 4.4 — Plano

Se dois vetores **a** e **b** não são paralelos, então o conjunto de todas as combinações lineares $u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ gera um plano p_0 que passa pela origem. Podemos parametrizar esse plano tomando

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

O plano p paralelo a p_0 e que passa pela extremidade de **c** pode ser parametrizado tomando

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + \mathbf{c}, (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Observe que o plano contém as retas

$$l_1 : r(u, 0) = u\mathbf{a} + \mathbf{c} \text{ e } l_2 : r(0, v) = v\mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Exemplo 4.5 — Esfera

A esfera de raio $a > 0$ centrada na origem pode ser parametrizada em coordenadas esféricas por

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j} + a \operatorname{sen} v\mathbf{k}$$

com (u, v) variando no retângulo $R : 0 \leq u \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.
Os pontos de latitude v formam um círculo de raio $a \cos v$ na altura $z = a \operatorname{sen} v$. À medida que v varia de $-\pi/2$ a $\pi/2$, esses círculos cobrem a esfera. As identidades trigonométricas dão

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 v(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u) + a^2 \operatorname{sen}^2 v = a^2.$$

Exemplo 4.6 — Cone

Considere um cone com semiângulo do vértice α e altura inclinada s. Os pontos de altura inclinada v formam um círculo de raio $v \operatorname{sen} \alpha$ no plano horizontal $z = v \cos \alpha$. Esse círculo pode ser parametrizado por

$$\mathbf{C}(u) = v \operatorname{sen} \alpha(\cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\mathbf{j}) + v \cos \alpha\mathbf{k}$$

$$= v \cos u \operatorname{sen} \alpha\mathbf{i} + v \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \alpha\mathbf{j} + v \cos \alpha\mathbf{k}, u \in [0, 2\pi].$$

Como obtemos o cone inteiro fazendo v variar de 0 a s, o cone é parametrizado por

$$\mathbf{r}(u, v) = v \cos u \operatorname{sen} \alpha \mathbf{i} + v \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j} + v \cos \alpha \mathbf{k},$$

com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq s$.

Exemplo 4.7 — Rampa espiral

Uma haste de comprimento l, inicialmente apoiada sobre o eixo x e presa por uma extremidade ao eixo z, descreve uma superfície ao girar em torno do eixo z com taxa constante ω e subir com taxa constante b.
Para parametrizar essa superfície, marcamos o ponto da haste a uma distância u do eixo z ($0 \leq u \leq l$) e determinamos a posição desse ponto no instante v. No instante v, a haste terá subido uma distância bv e girado um ângulo ωv. Assim, o ponto estará na extremidade do vetor

$$u(\cos \omega v \mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega v \mathbf{j}) + bv\mathbf{k} = u \cos \omega v \, \mathbf{i} + u \operatorname{sen} \omega v \mathbf{j} + bv\mathbf{k}.$$

A superfície inteira pode ser parametrizada por

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos \omega v \mathbf{i} + u \operatorname{sen} \omega v \mathbf{j} + bv\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq l, \ 0 \leq v.$$

Definição 4.6

Uma parametrização $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, com $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, é **regular** se é C^1 e sua diferencial tem posto 2 em todo ponto de U.

Uma parametrização pode deixar de ser regular mesmo quando a superfície é regular: nas coordenadas esféricas, por exemplo, o mapa perde posto nos polos. Isso é uma singularidade da carta; no cone, em contraste, o vértice é de fato um ponto singular da superfície.

Sejam (u, v) coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e (x, y, z) coordenadas em $\mathbb{R}^3$. Escrevendo $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, a condição de regularidade equivale à independência linear dos vetores φ_u e φ_v.

4.2.1. Superfície implícita

Uma equação $F(x, y, z) = q$ descreve uma superfície implícita quando seu conjunto de soluções tem localmente duas dimensões. O critério do valor regular abaixo garante essa propriedade e também fornece os planos tangentes.

Seja $F : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto. Um **ponto regular** de F é um ponto $p \in U$ no qual $\mathrm{D}F_p$ é sobrejetivo, ou, equivalentemente, $\nabla F(p) \neq \mathbf{0}$.

Dizemos que q é um **valor regular** se, para todo ponto p em $F^{-1}(q)$, p é um ponto regular.

Teorema 4.7 — Teorema do valor regular

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto e seja $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se q é um valor regular de F, então $F^{-1}(q)$ é uma superfície regular (possivelmente vazia).

Exemplo 4.8

Mostre que o cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ é uma superfície regular.

Solução. Defina $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$. O cilindro é o conjunto $F^{-1}(0)$.

Temos $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$.

O gradiente só se anula quando $x = y = 0$, mas esses pontos não pertencem a $F^{-1}(0)$, pois nele $x^2 + y^2 = 1$. Portanto, 0 é valor regular e o teorema mostra que o cilindro é uma superfície regular.

◁

4.2.2. Duas descrições da mesma esfera

Exemplo 4.9 — Falha de uma carta e regularidade da superfície

Compare a parametrização angular da esfera unitária com a descrição do hemisfério superior como gráfico. Determine onde cada parametrização é regular e explique como as duas se complementam.

Solução. A descrição angular é

$$p(\theta, \phi) = (\operatorname{sen}\phi \cos\theta, \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \cos\phi).$$

Seu produto fundamental tem módulo $\operatorname{sen}\phi$. Nos polos, ele se anula porque variar θ não altera o ponto. Fora dos polos, restringindo o ângulo azimutal a uma faixa apropriada, obtemos cartas regulares. A parametrização gráfica

$$q(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}), \qquad u^2+v^2<1,$$

é regular em todo o disco aberto, inclusive no polo norte, porque $q_u \times q_v = (u/\sqrt{1-u^2-v^2}, v/\sqrt{1-u^2-v^2}, 1)$ tem terceira componente 1. Ela não inclui o equador; suas derivadas se tornam ilimitadas ao aproximar a circunferência do domínio.

Na sobreposição com $0<\phi<\pi/2$, a mudança de parâmetros é $u=\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $v=\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$. Seu determinante, na ordem (θ,ϕ), é $-\operatorname{sen}\phi\cos\phi$, não nulo ali. A falha angular no polo é resolvida pelo gráfico, e a limitação do gráfico no equador é resolvida por cartas angulares. A esfera em si é regular em todos os pontos, pois o gradiente de $x^2+y^2+z^2$ nunca se anula no nível 1. ◁

Exercícios

Exercício N045 Consolidação; médio

Para $r(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, verifique a regularidade e calcule o plano tangente em $(1,1,2)$.

Exercício N046 Justificação; médio

Considere $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$. Determine onde seu conjunto de nível zero é regular e examine separadamente a origem.

Exercício N047 Consolidação; médio

Parametrize um cilindro de raio $a>0$, calcule os vetores coordenados e compare a descrição paramétrica com a condição de valor regular.

Exercícios de ampliação

Exercício A001 **Justificação; difícil**

Compare a parametrização angular da esfera unitária com a parametrização estereográfica $q(u, v) = (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)/(1 + u^2 + v^2)$. Determine onde cada uma é regular, qual ponto q não cobre e como as duas descrições se complementam.

Exercício A002 **Justificação; médio**

Compare $r(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$ com $q(s, z) = (\cos(s^3), \operatorname{sen}(s^3), z)$ perto de $\theta = s = 0$. Elas descrevem a mesma região do cilindro? Onde são regulares? A mudança $\theta = s^3$ é uma mudança regular de parâmetros na origem?

Exercício A003 **Justificação; médio**

Compare $p(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ e $q(s, t) = (s + t, s - t, 2s^2 + 2t^2)$. Calcule o determinante da mudança de parâmetros, relacione os produtos fundamentais e explique o efeito sobre orientação e área.

4.3. Exemplos clássicos de superfícies

Nesta seção consideramos várias superfícies que encontraremos periodicamente nas seções seguintes.

Comecemos pelo plano. Lembre que, se a, b, c são números reais, não todos nulos, então a equação cartesiana de um plano com vetor normal (a, b, c) e que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Se sabemos que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes e pertencem ao plano (são paralelos a ele), então, com os parâmetros p, q, a equação do plano é

$$\begin{aligned} x - x_0 &= pu_1 + qv_1, \\ y - y_0 &= pu_2 + qv_2, \\ z - z_0 &= pu_3 + qv_3. \end{aligned}$$

Definição 4.7

Uma superfície S constituída pelas retas paralelas a uma direção fixa que passam por uma curva dada γ é chamada de **cilindro**. A curva é uma **diretriz**; as retas são as **geratrizes**.

Observação 4.8

Suponha que a equação da superfície dependa de dois planos secantes $A = 0$ e $B = 0$ apenas por meio das expressões afins $A(x, y, z)$ e $B(x, y, z)$, isto é, que seja da forma $f(A(x, y, z), B(x, y, z)) = 0$. A equação é invariante por translações paralelas à reta $A = B = 0$. Quando a equação $f(A, B) = 0$ descreve uma curva no plano de coordenadas (A, B), sua pré-imagem é um cilindro com geratrizes nessa direção. Em particular, se uma coordenada não aparece na equação, as geratrizes são paralelas ao eixo dessa coordenada.

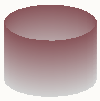


Figura 4.7.: Cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$.



Figura 4.8.: Cilindro parabólico $z = y^2$.

Exemplo 4.10

A Figura 4.7 mostra o cilindro de equação cartesiana $x^2 + y^2 = 1$. Começamos com o círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy e o deslocamos para cima e para baixo ao longo do eixo z. Uma parametrização desse cilindro é:

$$x = \cos v, \qquad y = \operatorname{sen} v, \qquad z = u, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi].$$

Exemplo 4.11

A Figura 4.8 mostra o cilindro parabólico de equação cartesiana $z = y^2$. Começamos com a parábola $z = y^2$ no plano yz e a deslocamos para cima e para baixo ao longo do eixo x. Uma parametrização desse cilindro parabólico é:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = v^2, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.12

A Figura 4.9 mostra o cilindro hiperbólico de equação cartesiana $x^2 - y^2 = 1$. Começamos com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ no plano xy e a deslocamos para cima e para baixo ao longo do eixo z. Uma parametrização desse cilindro hiperbólico é:

$$x = \pm \cosh v, \qquad y = \operatorname{senh} v, \qquad z = u, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

É necessário escolher um sinal para cada uma das partes. Usamos o fato de que $\cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v = 1$.

Definição 4.8

Dado um ponto $\Omega \in \mathbb{R}^3$ (chamado **vértice**) e uma curva γ (chamada curva geratriz), a superfície S obtida traçando semirretas a partir de Ω que passam por γ é chamada de **cone**.

Observação 4.9

Se uma equação pode ser escrita como $f(A/C, B/C) = 0$, onde A, B, C são coordenadas afins independentes cujo zero comum é um ponto Ω, então, na região $C \neq 0$, suas soluções são invariantes por dilatações de centro Ω. Quando a superfície inclui os limites no plano $C = 0$, ela é um cone de vértice Ω.

Exemplo 4.13

A superfície em $\mathbb{R}^3$ definida implicitamente por

$$z^2 = x^2 + y^2$$

é um cone: a equação é homogênea de grau 2, de modo que, junto com cada ponto da superfície, contém toda a reta que o liga à origem. O vértice está em $(0, 0, 0)$, e o gráfico aparece na Figura 4.11.

Definição 4.9

Uma superfície S obtida fazendo uma curva γ girar em torno de uma reta Δ é chamada de **superfície de revolução**. Dizemos então que Δ é o eixo de revolução. A interseção de S com um semiplano limitado por Δ é chamada de **meridiano**.

Observação 4.10

Em coordenadas cilíndricas em torno de um eixo, uma superfície de revolução tem uma equação que depende apenas da coordenada ao longo do eixo e da distância ao eixo. Essa forma deixa explícita a invariância por rotações em torno dele.



Figura 4.9.: Cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 1$.



Figura 4.10.: O toro.

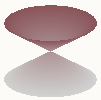


Figura 4.11.: Cone $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$.

Exemplo 4.14

Encontre a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da hipérbole

$$x^2 - 4z^2 = 1$$

em torno do eixo z.

Solução. Seja (x, y, z) um ponto de S. Se esse ponto estivesse no plano xz, estaria na hipérbole, e sua distância ao eixo de rotação seria $|x| = \sqrt{1 + 4z^2}$. Em qualquer outro caso, a distância de (x, y, z) ao eixo de rotação é igual à distância de (x, y, z) a $(0, 0, z)$, isto é, $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4z^2},$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1.$$

Essa superfície é chamada de **hiperboloide de uma folha**. Veja a Figura 4.15. Observe que, quando $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ é um círculo no plano xy. Quando $x = 0$, $y^2 - 4z^2 = 1$ é uma hipérbole no plano yz. Quando $y = 0$, $x^2 - 4z^2 = 1$ é uma hipérbole no plano xz.

A parametrização desse hiperboloide é

$$x = \sqrt{1 + 4u^2}\cos v, \qquad y = \sqrt{1 + 4u^2}\,\operatorname{sen} v, \qquad z = u, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi].$$

◁

Exemplo 4.15

O círculo $(y - a)^2 + z^2 = r^2$ no plano yz (a, r positivos) gira em torno do eixo z, formando um toro T. Encontre a equação desse toro.

Solução. Seja (x, y, z) um ponto de T. Se esse ponto estivesse no plano yz, estaria sobre o círculo, e sua distância ao eixo de rotação seria $y = a + \operatorname{sgn}(y - a)\sqrt{r^2 - z^2}$, onde $\operatorname{sgn}(t)$ é o sinal de t. Em qualquer outro ponto, a distância de (x, y, z) ao eixo z é $\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto,

$$x^2 + y^2 = (a + \operatorname{sgn}(y - a)\sqrt{r^2 - z^2})^2 = a^2 + 2a\operatorname{sgn}(y - a)\sqrt{r^2 - z^2} + r^2 - z^2.$$

Reorganizando,

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2 = 2a \operatorname{sgn}(y-a)\sqrt{r^2 - z^2},$$

ou

$$(x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + r^2))^2 = 4a^2r^2 - 4a^2z^2$$

Para $|z| < r$, temos $y \neq a$ e, portanto, $\operatorname{sgn}(y-a)^2 = 1$; nos extremos $z = \pm r$, a raiz já é nula e a equação obtida vale por continuidade. Reorganizando novamente,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(a^2 + r^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 - r^2)z^2 + (a^2 - r^2)^2 = 0.$$

A equação do toro é, portanto, de quarto grau, e seu gráfico aparece na Figura 4.10.

Uma parametrização do toro gerado pela rotação do círculo $(y-a)^2 + z^2 = r^2$ em torno do eixo z é

$$x = a\cos\theta + r\cos\theta\cos\alpha, \qquad y = a\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\theta\cos\alpha, \qquad z = r\operatorname{sen}\alpha,$$

com $(\theta, \alpha) \in [-\pi; \pi]^2$.

◁

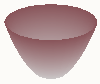


Figura 4.12.: Paraboloide $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.



Figura 4.13.: Paraboloide hiperbólico $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$.

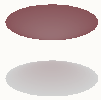


Figura 4.14.: Hiperboloide de duas folhas $z^2/c^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1$.

Exemplo 4.16

A superfície $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$, com $a, b > 0$, é chamada de **paraboloide elíptico**. Para $z = c > 0$ fixo, sua seção é a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = c$; os cortes $y = 0$ e $x = 0$ são parábolas. Veja a Figura 4.12. Uma parametrização é

$$x = a\sqrt{u}\cos v, \qquad y = b\sqrt{u}\operatorname{sen} v, \qquad z = u, \qquad u \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Exemplo 4.17

A superfície $z = x^2 - y^2$ é chamada de **paraboloide hiperbólico** ou **sela**. Se $z = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ é um par de retas no plano xy. Quando $y = 0$, $z = x^2$ é uma parábola no plano xz. Quando $x = 0$, $z = -y^2$ é uma parábola no plano yz. Veja a Figura 4.13. Uma parametrização desse paraboloide hiperbólico é:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = u^2 - v^2, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.18

A superfície $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ é chamada de **hiperboloide de duas folhas**. Para $z^2 - 1 < 0$, $x^2 + y^2 < 0$ é impossível e, portanto, não há gráfico quando $-1 < z < 1$. Quando $y = 0$, $z^2 - x^2 = 1$ é uma hipérbole no plano xz. Quando $x = 0$, $z^2 - y^2 = 1$ é uma hipérbole no plano yz. Quando $z = c$ é constante, com $c > 1$, os conjuntos $x^2 + y^2 = c^2 - 1$ são círculos. Veja a Figura 4.14. Uma parametrização da folha superior desse hiperboloide de duas folhas é

$$x = u\cos v, \qquad y = u\operatorname{sen} v, \qquad z = u^2 + 1, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi]$$

e a parametrização da folha inferior é

$$x = u\cos v, \qquad y = u\operatorname{sen} v, \qquad z = -u^2 - 1, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi],$$

Exemplo 4.19

A superfície $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ é chamada de **hiperboloide de uma folha**. Para $x^2 + y^2 < 1$, $z^2 < 0$ é impossível e, portanto, não há gráfico quando $x^2 + y^2 < 1$. Quando $y = 0$, $z^2 - x^2 = -1$ é uma hipérbole no plano xz. Quando $x = 0$, $z^2 - y^2 = -1$ é uma hipérbole no plano yz. Para $z = c$ constante, $x^2 + y^2 = c^2 + 1$ são círculos. Veja a Figura 4.15. Uma parametrização desse hiperboloide de uma folha é

$$x = \sqrt{u^2 + 1}\cos v, \qquad y = \sqrt{u^2 + 1}\operatorname{sen} v, \qquad z = u, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi],$$



Figura 4.15.: Hiperboloide de uma folha $z^2/c^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$.



Figura 4.16.: Elipsoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$.

Exemplo 4.20

Sejam a, b, c números reais estritamente positivos. A superfície $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é chamada de **elipsoide**. Para $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma elipse no plano xy. Quando $y = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é uma elipse no plano xz. Quando $x = 0$, $\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é uma elipse no plano yz. Veja a Figura 4.16. Podemos parametrizar o elipsoide usando coordenadas esféricas:

$$x = a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad z = c\cos\phi,$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$.

Exercícios

Problema: [A1] Encontre a equação da superfície de revolução S gerada pela rotação da elipse $4x^2 + z^2 = 1$ em torno do eixo z.

Problema: [A1] Encontre a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da reta $3x + 4y = 1$ em torno do eixo y.

Problema: [A1] Descreva a superfície parametrizada por $\varphi(u, v) = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, au)$, $(u, v) \in (0, 2\pi)\times(0, 1)$, $a > 0$.

Problema: [A1] Descreva a superfície parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (au\cos v, bu\,\mathrm{sen}\,v, u^2),$$

com $u > 1$, $0 < v < 2\pi$ e $a, b > 0$.

Problema: [A1] Considere a parte da esfera unitária situada acima do plano $z = 1/\sqrt{2}$. Parametrize S usando coordenadas cartesianas, esféricas e cilíndricas.

Problema: [J2] Mostre que o conjunto em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$e^{x^2+y^2+z^2} - (x+z)e^{-2xz} = e^{-2xz}$$

é um cilindro e determine a direção de suas geratrizes.

Problema: [J2] Mostre que a superfície em $\mathbb{R}^3$ definida implicitamente por

$$x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz(x+y+z) = 1$$

é uma superfície de revolução; encontre seu eixo.

Problema: [J2] Mostre que a superfície S em $\mathbb{R}^3$ dada implicitamente pela equação

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 1$$

é um cilindro; encontre a direção de suas geratrizes.

Problema: [J2] Mostre que a superfície S em $\mathbb{R}^3$ definida implicitamente por

$$xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 0$$

é de revolução; encontre seu eixo.

Problema: [J2] Mostre que a superfície em $\mathbb{R}^3$ dada implicitamente por

$$z^2 - xy = 2z - 1$$

é um cone.

Problema — Exame Putnam 1970: [A3] Determine, com demonstração, o raio do maior círculo que pode estar contido no elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c > 0.$$

Problema: [A1] O hiperboloide de uma folha da Figura 4.17 tem a propriedade de que, quando cortado pelos planos $z = \pm 2$, sua projeção no plano xy produz a elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, e, quando cortado pelo plano $z = 0$, sua projeção no plano xy produz a elipse $4x^2 + y^2 = 1$. Encontre sua equação.

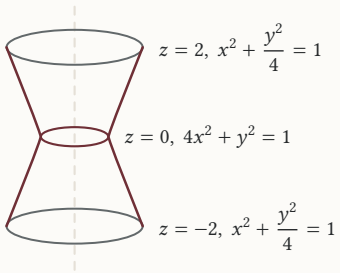


Figura 4.17.: Hiperboloide determinado no Problema 4.3.

4.4. ⋆ Variedades

Curvas e superfícies são casos de uma mesma ideia: um conjunto pode ter poucas coordenadas locais, embora esteja contido em um espaço de dimensão maior. O espaço tangente registra as velocidades de curvas que permanecem nesse conjunto; as equações de restrição fornecem suas direções normais.

Definição 4.10

Um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^N$ é uma **variedade diferenciável de dimensão** d se, perto de cada $a \in M$, ele pode ser descrito por uma vizinhança ambiente W e uma parametrização $\varphi : V \to M \cap W$, com $V \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto, de classe C^1, com diferencial de posto d e homeomorfismo sobre sua imagem. Assim, cada ponto tem coordenadas locais em d variáveis.

Observação 4.11

Para $d = 1$, trata-se simplesmente de uma curva; para $d = 2$, de uma superfície.

Observação 4.12

A definição é local. O círculo pode ser parametrizado regularmente em cada arco, mas não por uma parametrização injetiva de um único intervalo que o cubra inteiro. A esfera também exige mais de uma carta regular.

O teorema da função implícita fornece uma fonte importante de variedades: conjuntos de nível regulares. Para $F : \mathbb{R}^{n+d} \to \mathbb{R}^n$, o posto máximo da diferencial é n; assim, um conjunto de nível regular tem dimensão $(n + d) - n = d$.

Proposição 4.13

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{n+d}$ aberto e $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, seja $c \in \mathbb{R}^n$ e suponha que $\mathrm{D}F_p$ tenha posto n para todo $p \in F^{-1}(c)$. Então $F^{-1}(c)$ é uma variedade de dimensão d.

A mesma condição de posto que garante a regularidade do conjunto de nível também permite descrever seu espaço tangente.

Definição 4.11

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $M = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ seu gráfico. Ele é uma variedade de dimensão d. Fixe $(a, f(a)) \in M$.

- O **plano tangente** no ponto $(a, f(a))$ é o conjunto afim

$$\{(a + h, f(a) + \mathrm{D}f_a h) : h \in \mathbb{R}^d\}$$

- O **espaço tangente** no ponto $(a, f(a))$ é o subespaço linear

$$T_{(a,f(a))}M = \{(h, \mathrm{D}f_a h) : h \in \mathbb{R}^d\}.$$

Observação 4.14

O espaço tangente tem dimensão d e vive em $\mathbb{R}^{d+1}$. Para $d = 1$ é uma reta; para $d = 2$ é um plano. Como o gráfico tem codimensão um, seu espaço tangente é um hiperplano.

Proposição 4.15

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^{n+d}$ aberto e $F = (F_1, \dots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Suponha que $\mathrm{D}F_a$ tenha posto n em $M = F^{-1}(c)$. Então $T_a M = \ker(\mathrm{D}F_a)$, e os vetores $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_n(a)$ são linearmente independentes e normais a $T_a M$.

Demonstração. Se γ é uma curva em M com $\gamma(0) = a$, então $F(\gamma(t)) = c$. Pela regra da cadeia, $\mathrm{D}F_a\,\gamma'(0) = 0$, de modo que $T_a M \subseteq \ker(\mathrm{D}F_a)$. Ambos têm dimensão d: o primeiro por definição e o segundo pelo teorema posto-nulidade. Logo são iguais. As linhas de $\mathrm{D}F_a$ são os funcionais $h \mapsto \nabla F_i(a) \cdot h$; portanto, esses gradientes são normais ao núcleo, e sua independência decorre do posto n. ∎

Exercícios

Exercício N048 **Consolidação; médio**

Para $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = 0\}$, determine a dimensão, o espaço tangente e os vetores normais em $(1, 0, 0)$.

Exercício N049 **Consolidação; básico**

Encontre a dimensão e o espaço tangente de $\{(x, y, z, w) : x + y = 0,\ z - w = 0\}$ em um ponto arbitrário.

Exercício N050 **Justificação; médio**

Explique por que o conjunto $\{(x, y) : xy = 0\}$ não é uma variedade de dimensão 1 perto da origem, embora o seja perto de qualquer outro ponto.

4.5. Otimização com restrições

Em um problema com restrição, nem todo deslocamento é admissível. Em um extremo, a derivada da função objetivo se anula nas direções tangentes ao conjunto permitido. Os multiplicadores de Lagrange traduzem essa condição geométrica em um sistema de equações; encontrar suas soluções ainda exige comparar valores e examinar a fronteira ou pontos singulares.

Considere uma superfície definida implicitamente $S = \{x \in U : g(x) = c\}$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^3$ é aberto. Queremos encontrar extremos de uma função f restrita a S.

Definição 4.12

Dizemos que uma função f atinge um máximo local em a sobre a superfície S se existe $\epsilon > 0$ tal que $\|x - a\| < \epsilon$ e $x \in S$ impliquem $f(a) \geq f(x)$.

Observação 4.16

Isso também é chamado de máximo local com restrição, ou máximo local sujeito à restrição $g = c$.

Proposição 4.17

Se $f, g : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^1, f atinge um extremo local em a sobre $S = \{g = c\}$ e $\nabla g(a) \neq \mathbf{0}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Demonstração. Como $\nabla g(a) \neq 0$, o conjunto S é localmente uma superfície e $T_a S = \ker(\mathrm{D}g_a)$. Em um extremo restrito, a derivada de f se anula em toda direção tangente: $\mathrm{D}f_a(v) = 0$ para $v \in T_a S$. Assim, o funcional $\mathrm{D}f_a$ se anula no núcleo do funcional não nulo $\mathrm{D}g_a$; logo é seu múltiplo. Identificando os diferenciais com gradientes pelo produto interno, obtemos a igualdade. ∎

Proposição 4.18 — Múltiplas restrições

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^d$ aberto e sejam $f, g_1, \ldots, g_m : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se f atinge um extremo local em a no conjunto $M = \{x \in U : g_i(x) = c_i,\ 1 \leq i \leq m\}$ e os gradientes $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_m(a)$ são linearmente independentes, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a)$.

Demonstração. A regularidade das restrições dá $T_a M = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(\mathrm{D}g_i(a))$. Em um extremo, $\mathrm{D}f_a$ se anula nesse espaço tangente. O anulador dessa interseção é o espaço gerado pelos funcionais $\mathrm{D}g_i(a)$; portanto, $\mathrm{D}f_a$ é combinação linear deles. Identificando diferenciais e gradientes pelo produto interno, obtemos a fórmula. ∎

Para encontrar candidatos a extremos com restrições em $\mathbb{R}^d$, resolvemos as equações de Lagrange e as restrições. A independência dos gradientes das restrições é necessária para aplicar o resultado acima.

- Resolva simultaneamente o sistema de equações

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(x) \\ g_1(x) &= c_1, \\ &\cdots \\ g_m(x) &= c_m. \end{aligned}$$

- As incógnitas são as d coordenadas de x e os multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. São $m + d$ variáveis.
- A primeira equação acima é vetorial, com d coordenadas em cada lado. As demais são equações escalares. Assim, o sistema tem $m + d$ equações e $m + d$ variáveis.

- Em muitos exemplos, o sistema produz um número finito de soluções; isso depende da função e das restrições.
- As equações fornecem apenas candidatos. Para classificá-los, é preciso estudar a função restrita ao conjunto admissível, por exemplo, comparando valores quando todos os candidatos são conhecidos ou usando um teste de segunda ordem apropriado.

Exemplo 4.21

Encontre condições necessárias para que $f(x, y) = y$ atinja máximos ou mínimos locais sujeitos à restrição $y = g(x)$.

Pelo cálculo de uma variável, sabemos que os máximos e mínimos locais devem ocorrer em pontos onde $g' = 0$. Vamos rever isso usando a técnica de otimização com restrições acima.

Solução. Observe que nossa restrição tem a forma $y - g(x) = 0$. Portanto, em um máximo local, devemos ter

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla f = \lambda \nabla (y - g(x)) = \lambda \begin{pmatrix} -g'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad y = g(x).$$

Isso implica $\lambda = 1$ e, portanto, $g'(x) = 0$, como esperado. ■

Exemplo 4.22

Maximize e minimize xy sujeito à restrição $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a, b > 0$.

Solução. Em um extremo local,

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \nabla(xy) = \lambda \nabla\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big) = \lambda \begin{bmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2. \end{bmatrix}$$

o que implica $y^2 = x^2 b^2 / a^2$. Substituindo isso na restrição, obtemos $x = \pm a/\sqrt{2}$ e $y = \pm b/\sqrt{2}$. Os pontos $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ e $(-a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$ dão o máximo $ab/2$; os dois pontos com sinais opostos dão o mínimo $-ab/2$. ■

Proposição 4.19 — Cauchy–Schwarz

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, então $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$.

Demonstração. Se algum vetor é nulo, a afirmação é imediata. Fixe $a = \|\mathbf{x}\| > 0$ e considere o máximo de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$ na esfera $\|\mathbf{u}\| = a$. A esfera é compacta, e no ponto de máximo a condição de Lagrange dá $\mathbf{y} = 2\lambda \mathbf{u}$. Como $\mathbf{y} \neq 0$, o máximo ocorre em $\mathbf{u} = a\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$ e vale $a\|\mathbf{y}\|$. Logo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. Aplicando o mesmo argumento a $-\mathbf{x}$ obtemos o limite inferior oposto, e portanto a desigualdade com valor absoluto. ∎

Proposição 4.20 — Desigualdade das médias

Se $x_i \ge 0$, então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{1/n}.$$

Demonstração. Fixe a soma $s = \sum_i x_i$. Se algum $x_i = 0$, a desigualdade é imediata. Caso todos sejam positivos, o produto atinge um máximo no simplex compacto $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \ge 0,\ \sum_i x_i = s\}$. Como o produto é positivo quando $x_i = s/n$, seu máximo não ocorre na fronteira. No interior, maximize $\sum_i \log x_i$ sob a mesma restrição. A condição de Lagrange dá $1/x_i = \lambda$ para todo i, logo $x_i = s/n$. Portanto, $\prod_i x_i \le (s/n)^n$, que é a desigualdade afirmada. ∎

Proposição 4.21 — Desigualdade de Young

Se $p, q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$, então

$$|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Demonstração. Ponha $X = |x|$ e $Y = |y|$. Para $X > 0$, a função $h(Y) = XY - Y^q/q$ em $Y \ge 0$ atinge seu máximo quando $h'(Y) = X - Y^{q-1} = 0$, isto é, em $Y = X^{1/(q-1)} = X^{p-1}$. Nesse ponto, $h(Y) = X^p/p$. Assim $XY \le X^p/p + Y^q/q$. Se $X = 0$, a desigualdade é imediata. ∎

Exemplo 4.23 — Extremos de temperatura sobre uma superfície restrita

Em coordenadas normalizadas, a temperatura é $T = T_0 + x + 2y + z$, e um sensor só pode ocupar pontos da superfície $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$. Determine as temperaturas extremas e os pontos em que ocorrem.

Solução. O conjunto é compacto, portanto os extremos existem. O gradiente da restrição $g = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ não se anula nessa superfície. Pelo método de Lagrange,

$$(1, 2, 1) = \lambda(2x, 4y, 8z).$$

Logo, $\lambda \neq 0$ e $(x, y, z) = (1/(2\lambda), 1/(2\lambda), 1/(8\lambda))$. Substituindo em $g = 1$,

$$\frac{13}{16\lambda^2} = 1, \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Os candidatos são

$$p_\pm = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{1}{2\sqrt{13}}\right), \qquad T(p_\pm) = T_0 \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Todos os extremos satisfazem a condição necessária e só há esses dois candidatos; a comparação classifica o máximo e o mínimo globais. O gradiente da temperatura é normal à superfície nesses pontos. ◁

Exercícios

Exercício N051 Consolidação; médio

Encontre os extremos de xy em $x^2 + 4y^2 = 4$ e classifique os candidatos por comparação dos valores.

Exercício N052 Aplicação; difícil

Uma caixa retangular de volume fixo $V > 0$ tem lados positivos x, y, z. Encontre a menor área total. Justifique que o mínimo global existe e trate a possibilidade de algum lado tender a zero ou ao infinito.

Exercício N053 Aplicação; médio

Determine os pontos de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mais próximos e mais distantes de $(2, 0, 0)$. Compare a solução por Lagrange com uma solução geométrica.

Exercício N054 Justificação; médio

No conjunto $x^2 + y^2 = 0$, a função $f(x, y) = x$ tem um extremo restrito. Mostre por que a condição de Lagrange falha e identifique a hipótese ausente.

CAPÍTULO

5

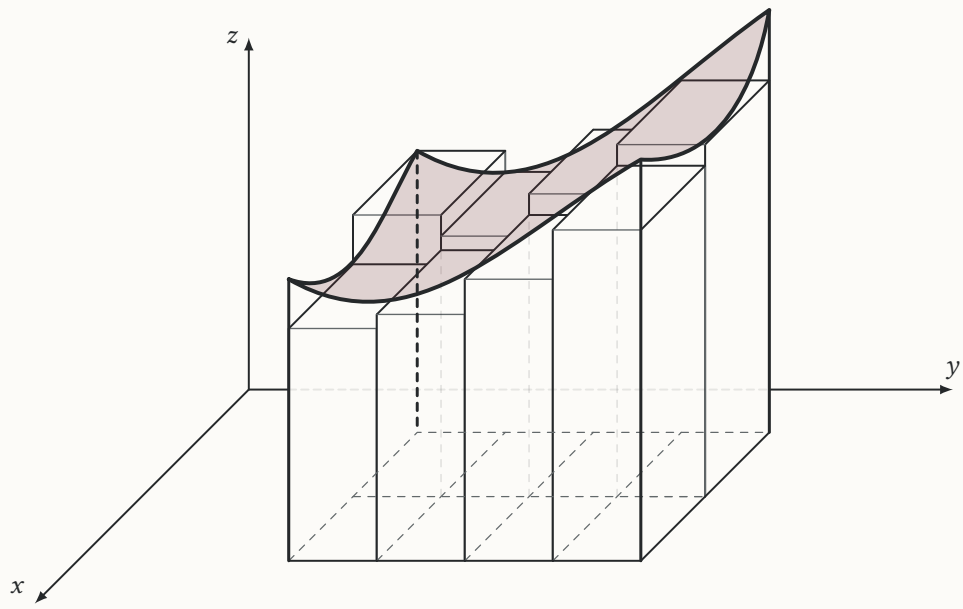
Integrais Múltiplas

Neste capítulo desenvolvemos a integração de funções escalares em regiões do plano e do espaço. O princípio é somar uma quantidade local, como densidade, pressão ou taxa de aquecimento, multiplicada pelo tamanho de uma pequena região. A geometria do domínio determina os limites de integração; o modelo determina o integrando.

Recordemos também que a integral definida de uma função não negativa $f(x) \geq 0$ representa a área sob a curva $y = f(x)$. Veremos agora que a *integral dupla* de uma função real não negativa $f(x, y) \geq 0$ representa o *volume* sob a superfície $z = f(x, y)$.

5.1. Integrais Duplas

Seja $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ um retângulo e seja $f : R \to \mathbb{R}$ contínua. Seja P uma partição formada por $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = b$ e $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = d$. O conjunto P determina uma partição de R em uma malha de retângulos, sem sobreposição, $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, para $0 \leq i < M$ e $0 \leq j < N$. Fixada P, escolha pontos $\mathsf{M} = \{\xi_{i,j}\}$ tais que $\xi_{i,j} \in R_{i,j}$ para todos i, j.



Definição 5.1

A **soma de Riemann** de f associada à partição P e aos pontos M é definida por

$$\mathscr{R}(f,P,\mathsf{M}) \triangleq \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_{i,j})\,\mathrm{area}(R_{i,j}) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_{i,j})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

Definição 5.2

A **malha** de uma partição P é definida por

$$\|P\| = \max_{0\le i<M,\,0\le j<N} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{j+1}-y_j)^2}.$$

Definição 5.3

A **integral de Riemann** de f sobre o retângulo R é definida por

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \triangleq \lim_{\|P\|\to 0} \mathscr{R}(f,P,\mathsf{M}),$$

desde que o limite exista e seja independente da escolha dos pontos M. Dizemos que uma função é **integrável à Riemann** em R se sua integral de Riemann existe e é finita.

Observação 5.1

Outras notações usuais para a integral são

$$\iint_R f\,dA, \quad \iint_R f\,dx\,dy, \quad \iint_R f\,dx_1\,dx_2, \quad \text{e} \quad \iint_R f.$$

Observação 5.2

Se $f \geq 0$, a integral dupla representa o volume da região entre seu gráfico e o plano de base. Para uma função de sinal variável, ela representa o volume com sinal, isto é, a diferença entre as contribuições positivas e negativas. Alternativamente, se $f(x,y)$ é a densidade de uma lâmina no ponto (x,y), a integral dupla representa sua massa total.

Teorema 5.3

Toda função contínua em um retângulo fechado e limitado é integrável à Riemann.

Demonstração. Como o retângulo R é compacto, f é uniformemente contínua: para cada $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que pontos de R a distância menor que δ têm valores que diferem por menos que η. Se $\|P\| < \delta$, a oscilação de f em cada célula é menor que η. Assim, as somas superior e inferior satisfazem

$$U(f,P) - L(f,P) \leq \eta \operatorname{area}(R).$$

Para obter diferença menor que ε, basta tomar $\eta < \varepsilon/\operatorname{area}(R)$, supondo área positiva.

Pelo critério de Darboux, f é integrável. Cada soma de Riemann fica entre a soma inferior e a superior; por isso, o limite independe dos pontos escolhidos. No caso de área nula, todas as somas são zero. ∎

Observação 5.4

A maioria das funções limitadas que encontraremos será integrável à Riemann. Funções limitadas com descontinuidades suficientemente simples, por exemplo um número finito de saltos, em geral são integráveis à Riemann em retângulos limitados. Um exemplo de função excessivamente descontínua que não é integrável à Riemann é $f(x,y) = 1$ se $x, y \in \mathbb{Q}$ e 0 caso contrário.

Suponha agora que $U \subseteq \mathbb{R}^2$ seja um domínio limitado regular[1] e que $f : U \to \mathbb{R}$ seja uma função. Escolha um retângulo limitado $R \supseteq U$ e, como antes, seja P uma partição de R em uma malha de retângulos. Definimos agora a soma de Riemann somando apenas sobre os retângulos $R_{i,j}$ inteiramente contidos em U. Explicitamente, seja

$$\chi_{i,j} = \begin{cases} 1 & R_{i,j} \subseteq U \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e defina

$$\mathscr{R}(f, P, \mathsf{M}, U) = \sum_{\substack{0 \le i < M,\ 0 \le j < N \\ R_{i,j} \subseteq U}} f(\xi_{i,j})(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Definição 5.4

A **integral de Riemann** de f sobre o domínio U é definida por

$$\iint_U f(x,y)\,dx\,dy \triangleq \lim_{\|P\| \to 0} \mathscr{R}(f, P, \mathsf{M}, U),$$

desde que o limite exista e seja independente da escolha dos pontos M. Dizemos que f é **integrável à Riemann** em U se a integral de Riemann existe e é finita.

[1] Neste capítulo, "regular" significa aberto e conexo, com fronteira formada por um número finito de curvas diferenciáveis por partes. Em particular, a fronteira tem área zero, que é a propriedade necessária para a definição por somas de Riemann. A ressalva importa: existem conjuntos abertos de área finita cuja fronteira tem área infinita.

Teorema 5.5

Toda função contínua e limitada em uma região limitada regular, cuja fronteira tem área zero, é integrável à Riemann.

Observação 5.6

Como antes, a maioria das funções limitadas razoáveis que encontraremos será integrável à Riemann.

Para tratar funções não limitadas ou domínios não limitados, usamos um processo de limite.

Definição 5.5

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio, não necessariamente limitado, e seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função, também não necessariamente limitada. Para cada $R > 0$, suponha que a função $p \mapsto \min\{|f(p)|, R\}$ seja integrável no sentido de Riemann em $U \cap B(0, R)$. Dizemos que f é absolutamente integrável no sentido impróprio se

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{U\cap B(0,R)} \min\{|f|, R\}\, dA$$

existe e é finito. A truncação contínua do valor de f é dada por $f_R(p) = \max\{-R, \min\{f(p), R\}\}$.

Proposição 5.7

Se f é absolutamente integrável no sentido impróprio em U, então

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{U\cap B(0,R)} f_R\, dA$$

existe e é finito.

Demonstração. Se $S > R$, a diferença entre as integrais truncadas, em módulo, é limitada por

$$\iint_{U\cap B(0,S)} \min\{|f|, S\}\,dA - \iint_{U\cap B(0,R)} \min\{|f|, R\}\,dA.$$

De fato, em $U \cap B(0,R)$ vale $|f_S - f_R| \le \min\{|f|,S\} - \min\{|f|,R\}$, e fora dessa bola $|f_S| \le \min\{|f|,S\}$. Como as integrais absolutas truncadas convergem, essa diferença tende a zero quando $R, S \to \infty$. As integrais assinadas truncadas formam, portanto, uma família de Cauchy e convergem. ∎

Observação 5.8

Se f é absolutamente integrável no sentido impróprio, o limite acima não depende da forma particular como o domínio é expandido, desde que as regiões cresçam até preencher U e as truncações absolutas correspondentes tenham o mesmo limite. Por exemplo, podemos tomar o limite das integrais sobre $U \cap [-R,R]^2$ e obteremos o mesmo valor.

Definição 5.6

Se f é absolutamente integrável no sentido impróprio, definimos

$$\iint_U f\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \iint_{U\cap B(0,R)} f_R\,dA$$

Exemplo 5.1 — Potência recebida por um painel (médio)

Um painel ocupa $R = [0,2]\times[0,3]$, com coordenadas em metros, e recebe a densidade de potência $q(x,y) = 100 + 20x + 10y$, em $\mathrm{W/m^2}$. Calcule a potência total a partir de somas de Riemann em malhas uniformes, tomando os centros das células.

Solução. Em uma malha com M colunas e N linhas, cada célula tem área $6/(MN)$. Os centros têm coordenadas $x_i = 2(i+1/2)/M$ e $y_j = 3(j+1/2)/N$. Como

$$\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} x_i = 1, \qquad \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j = \frac{3}{2},$$

a soma é

$$\frac{6}{MN}\sum_{i,j}(100+20x_i+10y_j)=6(100+20+15)=810\ \text{W}.$$

Ela já é exata em qualquer uma dessas malhas, porque q é afim. Seu limite é a integral dupla. A potência média por unidade de área é $810/6=135\ \text{W/m}^2$. Integrar a densidade muda a unidade de W/m^2 para W. ◁

Exercícios

Exercício N055 **Aplicação; básico**

Uma placa em $[0,2]\times[0,1]$ tem densidade superficial constante de $3\ \text{kg/m}^2$. Calcule sua massa e explique o fator de área em cada parcela de uma soma de Riemann.

Exercício N056 **Justificação; médio**

Para $f(x,y)=x+y$ em $[0,1]^2$, calcule as somas inferior e superior de uma malha uniforme $n\times n$ e mostre que sua diferença tende a zero.

Exercício N057 **Consolidação; básico**

Compare $\iint_R f\,dA$ e $\iint_R |f|\,dA$ para $f(x,y)=x$ em $R=[-1,1]\times[0,1]$. Interprete a diferença.

5.2. Integrais Iteradas e o Teorema de Fubini

A definição por somas explica o significado da integral. Para calculá-la, queremos somar primeiro ao longo de uma variável e depois ao longo da outra. O Teorema de Fubini justifica essa passagem e esclarece quando a ordem pode ser trocada. Em regiões limitadas, funções contínuas não apresentam dificuldade; singularidades e domínios ilimitados exigem verificar integrabilidade absoluta.

Seja $f(x,y)$ uma função contínua tal que $f(x,y)\geq 0$ para todo (x,y) no **retângulo** $R=\{(x,y)\,:\,a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}\subseteq\mathbb{R}^2$. Escreveremos frequentemente $R=[a,b]\times[c,d]$. Para um número x_0 no intervalo $[a,b]$, corte a superfície $z=f(x,y)$ pelo plano $x=x_0$, paralelo ao plano yz. A interseção da superfície com esse plano é a curva $z=f(x_0,y)$, na qual x_0 permanece fixo e apenas y varia. A área A sob essa curva, isto é, a área entre a curva e o plano xy, quando y percorre $[c,d]$, depende apenas do valor de x_0. Usando então a variável x no lugar de x_0, denotemos essa área por $A(x)$; veja a Figura 5.1.

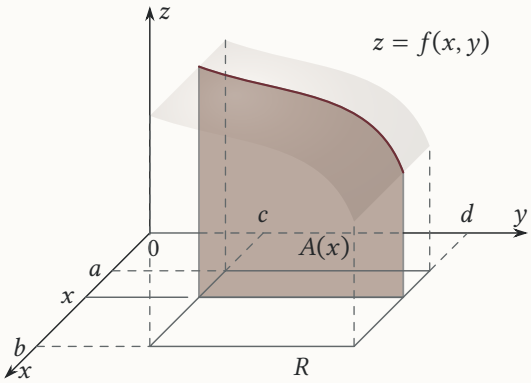


Figura 5.1.: A área $A(x)$ varia com x

Temos $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, pois x é mantido fixo e apenas y varia. Para cada x fixado, $f(x,y)$ é uma função contínua de y em $[c,d]$, de modo que a área sob a curva é dada pela integral definida. Como $A(x)$ é função de x, o método das seções transversais do cálculo de uma variável mostra que o volume V do *sólido* situado sob $z = f(x,y)$, acima do plano xy e sobre o retângulo R, é a integral, em $[a,b]$, das áreas dessas seções:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \tag{5.1}$$

Chamaremos esse volume simplesmente de "volume sob a superfície". A expressão acima envolve **integrais iteradas**. Primeiro integramos $f(x,y)$ como função de y, tratando x como constante; isso é *integrar em relação a* y. É o que ocorre na integral "interna", entre colchetes, em (5.1): essa é a primeira integral iterada. Depois dessa integração, resta uma expressão apenas em x, que pode ser *integrada em relação a* x. Essa é a integral "externa", a segunda integral iterada. O resultado final é um número, o volume. O processo de realizar essas duas integrações sucessivas é chamado de *integração dupla*, e a última expressão em (5.1) é uma **integral dupla**.

Observe que integrar $f(x,y)$ em relação a y é a operação inversa de derivar parcialmente f em relação a y. Poderíamos igualmente usar seções sob a superfície paralelas ao plano xz; nesse caso, a área da seção dependeria apenas de y, e o volume V seria

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy\,. \tag{5.2}$$

O Teorema de Fubini garante, sob hipóteses adequadas, que a ordem das integrais iteradas não altera o resultado. Em geral omitiremos os colchetes e escreveremos

simplesmente

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy\,, \tag{5.3}$$

O fato de dx aparecer antes de dy indica que $f(x,y)$ é primeiro integrada em relação a x, entre os limites "internos" a e b; a função resultante é então integrada em relação a y, entre os limites "externos" c e d. A ordem de integração pode ser trocada quando isso for conveniente.

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio.

Definição 5.7

Para $x \in \mathbb{R}$, defina

$$S_x U = \{y \mid (x,y) \in U\} \quad \text{e} \quad T_y U = \{x \mid (x,y) \in U\}$$

Exemplo 5.2

Se $U = [a,b] \times [c,d]$, então

$$S_x U = \begin{cases} [c,d] & x \in [a,b] \\ \varnothing & x \notin [a,b] \end{cases} \quad \text{e} \quad T_y U = \begin{cases} [a,b] & y \in [c,d] \\ \varnothing & y \notin [c,d]. \end{cases}$$

Nos domínios que consideraremos, $S_x U$ e $T_y U$ serão tipicamente intervalos, ou uniões finitas de intervalos.

Definição 5.8

Dada uma função $f : U \to \mathbb{R}$, definimos as duas integrais *iteradas* por

$$\int_{x\in\mathbb{R}} \Big(\int_{y \in S_x U} f(x,y)\,dy \Big)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{y\in\mathbb{R}} \Big(\int_{x \in T_y U} f(x,y)\,dx \Big)\,dy,$$

com a convenção de que a integral sobre o conjunto vazio vale 0. Os parênteses foram mantidos acima apenas para clareza e serão omitidos à medida que a notação se tornar familiar.

Suponha que $f(x,y)$ represente a densidade de uma lâmina no ponto (x,y). Para

qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{y \in S_x U} f(x,y)\,dy$$

representa a massa por unidade de comprimento na direção x, obtida ao integrar a densidade ao longo da seção vertical. A massa de uma faixa estreita de largura Δx é aproximadamente essa quantidade multiplicada por Δx. É natural esperar que, integrando essas massas de seção em x, obtenhamos a massa total, isto é, a integral dupla. Pelo mesmo argumento, devemos obter o mesmo valor se primeiro tomarmos seções horizontais. Portanto, esperamos que as duas integrais iteradas coincidam com a integral dupla. Isso é verdadeiro sob uma hipótese de finitude.

Teorema 5.9 — Teorema de Fubini

Suponha que U seja uma região regular e que $f : U \to \mathbb{R}$ seja contínua (ou contínua por partes, com conjunto de descontinuidades de área zero). Se pelo menos uma das integrais iteradas abaixo, envolvendo $|f|$, é finita,

$$\begin{gathered}\int_{x\in\mathbb{R}} \Big(\int_{y \in S_x U} |f(x,y)|\,dy \Big)\,dx < \infty \quad \text{ou} \\ \int_{y\in\mathbb{R}} \Big(\int_{x \in T_y U} |f(x,y)|\,dx \Big)\,dy < \infty.\end{gathered} \tag{5.4}$$

então f é absolutamente integrável no sentido impróprio em U e

$$\iint_U f\,dA = \int_{x\in\mathbb{R}} \Big(\int_{y \in S_x U} f(x,y)\,dy \Big)\,dx = \int_{y\in\mathbb{R}} \Big(\int_{x \in T_y U} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Sem a hipótese (5.4), as integrais iteradas podem existir e ser finitas sem, contudo, serem iguais.

Exemplo 5.3

Para $(x,y) \in (0,1)^2$, defina

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

No interior do quadrado, essa expressão é $-\partial_x \partial_y \arctan(y/x)$. As identidades

$\partial_y\big(y/(x^2+y^2)\big) = f(x,y)$ e $\partial_x\big(x/(x^2+y^2)\big) = -f(x,y)$ dão

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{\pi}{4}$$

Exemplo 5.4

Seja $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$ se $x, y > 0$ e 0 caso contrário, e seja $U = (0,1)^2$. Para x fixo, uma primitiva em y é $y/(x+y)^2$; para y fixo, uma primitiva em x é $-x/(x+y)^2$. Portanto, $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}$ e $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = -\int_0^1 (1+y)^{-2}\,dy = -\frac{1}{2}$.

Exemplo 5.5

Defina

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \in (x, x+1) \text{ e } x \geq 0 \\ -1 & y \in (x-1, x) \text{ e } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Integrando primeiro em y, as duas faixas de largura 1 se cancelam para cada $x \geq 0$, e o resultado é 0. Na ordem inversa, a integral em x vale $-(y+1)$ para $-1 < y < 0$, $y-1$ para $0 < y < 1$ e 0 fora desses intervalos. Sua integral em y é $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.

Exemplo 5.6

Calcule o volume V sob o plano $z = 8x+6y$ sobre o retângulo $R = [0,1]\times[0,2]$.

Solução. Como $f(x, y) = 8x + 6y \geq 0$ para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$, temos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^1 (8x + 6y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^2 \left(4x^2 + 6xy \Big|_{x=0}^{x=1}\right) dy \\ &= \int_0^2 (4 + 6y)\, dy \\ &= 4y + 3y^2 \Big|_0^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Suponha agora que invertamos a ordem de integração. Podemos verificar que o resultado permanece o mesmo:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^2 (8x + 6y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(8xy + 3y^2 \Big|_{y=0}^{y=2}\right) dx \\ &= \int_0^1 (16x + 12)\, dx \\ &= 8x^2 + 12x \Big|_0^1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

◁

Exemplo 5.7

Calcule o volume V sob a superfície $z = e^{x+y}$ sobre o retângulo $R = [2, 3] \times [1, 2]$.

Solução. Como $f(x, y) = e^{x+y} > 0$ para todo (x, y),

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \int_2^3 e^{x+y}\, dx\, dy \\ &= \int_1^2 \left(e^{x+y} \Big|_{x=2}^{x=3} \right) dy \\ &= \int_1^2 (e^{y+3} - e^{y+2})\, dy \\ &= e^{y+3} - e^{y+2} \Big|_1^2 \\ &= e^5 - e^4 - (e^4 - e^3) \;=\; e^5 - 2e^4 + e^3 \end{aligned}$$

◁

Para uma função geral $f(x)$, a integral $\int_a^b f(x)\, dx$ representa área orientada: regiões entre o gráfico $y = f(x)$ e o eixo x contribuem positivamente quando $f(x) \geq 0$ e negativamente quando $f(x) \leq 0$. De modo análogo, a integral dupla de uma função contínua $f(x, y)$ representa volume orientado: a parte situada entre $z = f(x, y)$ e o plano xy contribui com sinal positivo quando $f(x, y) \geq 0$ e com sinal negativo quando $f(x, y) \leq 0$. Assim, a integração dupla por integrais iteradas pode ser usada para calcular a integral dupla de *qualquer* função contínua sobre um retângulo, independentemente do sinal de f.

Exemplo 5.8

Calcule $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x + y)\, dx\, dy$.

Solução. A função $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ assume valores positivos e negativos no retângulo $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Ainda assim, podemos calcular a integral dupla:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x + y)\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \left(-\cos(x + y) \Big|_{x=0}^{x=\pi} \right) dy \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(y + \pi) + \cos y)\, dy \\ &= \left[-\operatorname{sen}(y + \pi) + \operatorname{sen} y \right]_0^{2\pi} \\ &= -\operatorname{sen} 3\pi + \operatorname{sen} 2\pi + \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = 0 \end{aligned}$$

◁

Exemplo 5.9 — Carga distribuída sobre uma placa (médio)
Uma placa retangular $R=[0,2]\times[0,3]$, com coordenadas em metros, recebe pressão $p(x,y)=100+20x+10y+5xy$, em pascals. Determine a força normal total e confira o resultado nas duas ordens.

Solução. A força elementar é $p\,dA$. Como a pressão é contínua no retângulo, Fubini permite escrever

$$F=\int_0^2\int_0^3 p(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^2(345+82{,}5x)\,\mathrm{d}x=855\ \text{N}.$$

Na outra ordem,

$$F=\int_0^3\int_0^2 p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^3(240+30y)\,\mathrm{d}y=855\ \text{N}.$$

A unidade é $\text{Pa}\,\text{m}^2=\text{N}$. As duas ordens somam a mesma carga por faixas distintas.◁

Exercícios

A

Nos Exercícios 1–4, calcule o volume sob a superfície $z=f(x,y)$ sobre o retângulo R.

1. [C1] $f(x,y)=4xy$, $R=[0,1]\times[0,1]$

2. [C1] $f(x,y)=e^{x+y}$, $R=[0,1]\times[-1,1]$

3. [C1] $f(x,y)=x^3+y^2$, $R=[0,1]\times[0,1]$

4. [C1] $f(x,y)=x^4+xy+y^3$, $R=[1,2]\times[0,2]$

Nos Exercícios 5–12, calcule a integral dupla indicada.

5. [C1] $\displaystyle\int_0^1\int_1^2(1-y)x^2\,dx\,dy$

6. [C1] $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 x(x+y)\,dx\,dy$

7. [C1] $\displaystyle\int_0^2\int_0^1(x+2)\,dx\,dy$

8. [C1] $\displaystyle\int_{-1}^2\int_{-1}^1 x(xy+\operatorname{sen}x)\,dx\,dy$

9. [C1] $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1 xy\cos(x^2y)\,dx\,dy$ **10.** [C1] $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\cos(y-\pi)\,dx\,dy$

11. [C1] $\displaystyle\int_0^2\int_1^4 xy\,dx\,dy$ **12.** [C1] $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^2 1\,dx\,dy$

13. [J2] Seja M constante. Mostre que $\displaystyle\int_c^d\int_a^b M\,dx\,dy = M(d-c)(b-a)$.

5.3. Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Em uma região não retangular, os limites internos acompanham sua fronteira. Antes de integrar, descreva uma seção típica e identifique a projeção do domínio sobre o eixo externo. Trocar a ordem significa redescrever a mesma região; não basta permutar os símbolos diferenciais.

Na seção anterior vimos o significado de uma integral dupla sobre um retângulo. Podemos agora definir a integral dupla de uma função real $f(x,y)$ sobre regiões mais gerais de $\mathbb{R}^2$.

Suponha que uma região R no plano xy seja limitada à esquerda pela reta vertical $x=a$, à direita pela reta $x=b$, com $a<b$, abaixo pela curva $y=g_1(x)$ e acima pela curva $y=g_2(x)$, como na Figura 5.2(a). Suporemos que $g_1(x)$ e $g_2(x)$ não se intersectem no intervalo aberto (a,b), embora possam se encontrar nos extremos.

Pelo método das seções da seção anterior, a integral dupla de uma função real $f(x,y)$ sobre R, denotada por $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$, é dada por

$$\iint_R f(x,y)\,dA \;=\; \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \tag{5.5}$$

Isto corresponde a tomar seções verticais em R entre as curvas $y=g_1(x)$ e $y=g_2(x)$. O símbolo dA é chamado, às vezes, de *elemento de área* ou *infinitesimal*, com A indicando área. Observe que $f(x,y)$ é primeiro integrada em relação a y, com funções de x como limites de integração. O resultado da primeira integral iterada depende apenas de x, permitindo então realizar a segunda integral em x.

Analogamente, se R é limitada à esquerda por $x=h_1(y)$, à direita por $x=h_2(y)$, abaixo pela reta horizontal $y=c$ e acima pela reta $y=d$, com $c<d$, como na Figura 5.2(b), e se $h_1(y)$ e $h_2(y)$ não se intersectam no intervalo aberto (c,d), então

seções horizontais fornecem

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy \tag{5.6}$$

Essas definições incluem, em particular, o caso em que R é um retângulo. Além disso, se $f(x,y) \geq 0$ em toda a região R, então $\iint_R f(x,y)\,dA$ é o volume sob a superfície $z = f(x,y)$ sobre R.

Exemplo 5.10

Calcule o volume V sob o plano $z = 8x + 6y$ sobre a região $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2x^2\}$.

Solução. A região R está representada na figura ao lado. Usando seções verticais, obtemos:

$$\begin{aligned}
V &= \iint_R (8x+6y)\,dA \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2x^2} (8x+6y)\,dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(8xy + 3y^2\Big|_{y=0}^{y=2x^2}\right) dx \\
&= \int_0^1 (16x^3 + 12x^4)\,dx \\
&= 4x^4 + \tfrac{12}{5}x^5\Big|_0^1 = 4 + \tfrac{12}{5} = \tfrac{32}{5} = 6.4
\end{aligned}$$

O mesmo resultado é obtido usando seções horizontais:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (8x+6y)\,dA \\ &= \int_0^2 \left[\int_{\sqrt{y/2}}^1 (8x+6y)\,dx \right] dy \\ &= \int_0^2 \left(4x^2 + 6xy \Big|_{x=\sqrt{y/2}}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_0^2 (4 + 6y - (2y + \tfrac{6}{\sqrt{2}} y\sqrt{y}))\,dy \;=\; \int_0^2 (4 + 4y - 3\sqrt{2}y^{3/2})\,dy \\ &= 4y + 2y^2 - \tfrac{6\sqrt{2}}{5} y^{5/2} \Big|_0^2 \;=\; 8 + 8 - \tfrac{6\sqrt{2}\sqrt{32}}{5} \;=\; 16 - \tfrac{48}{5} \;=\; \tfrac{32}{5} \;=\; 6.4 \end{aligned}$$

◁

Exemplo 5.11

Calcule o volume V do sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $2x + y + 4z = 4$.

Solução. O sólido aparece na Figura 5.3(a), com uma seção vertical típica. O volume V é dado por $\iint_R f(x,y)\,dA$, onde $f(x,y) = z = \frac{1}{4}(4 - 2x - y)$ e a região R, mostrada na Figura 5.3(b), é $R = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -2x + 4\}$. Usando seções verticais em R, as seções em R fornecem

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \tfrac{1}{4}(4 - 2x - y)\,dA \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{-2x+4} \tfrac{1}{4}(4 - 2x - y)\,dy \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\tfrac{1}{8}(4 - 2x - y)^2 \Big|_{y=0}^{y=-2x+4} \right) dx \\ &= \int_0^2 \tfrac{1}{8}(4 - 2x)^2\,dx \\ &= -\tfrac{1}{48}(4 - 2x)^3 \Big|_0^2 \;=\; \tfrac{64}{48} \;=\; \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

◁

Para uma região geral R, que pode não ser de nenhum dos tipos considerados até aqui, a integral dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$ pode ser construída diretamente. Suponha que

$f(x, y)$ seja não negativa e que R seja uma região limitada de $\mathbb{R}^2$, contida em algum retângulo $[a, b] \times [c, d]$. Divida esse retângulo em uma malha de sub-retângulos e considere apenas aqueles inteiramente contidos em R, como os sub-retângulos sombreados da Figura 5.4(a). Em cada $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, escolha um ponto (x_{i*}, y_{j*}). O volume sob $z = f(x, y)$ sobre esse sub-retângulo é aproximadamente $f(x_{i*}, y_{j*})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$, onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $f(x_{i*}, y_{j*})$ é a altura e $\Delta x_i \Delta y_j$ é a área da base do paralelepípedo, como na Figura 5.4(b). Assim, o volume total é aproximado pela soma dos volumes desses paralelepípedos, paralelepípedos, a saber,

$$\sum_j \sum_i f(x_{i*}, y_{j*})\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,, \tag{5.7}$$

onde a soma percorre os índices dos sub-retângulos contidos em R. Tomando sub-retângulos cada vez menores, de modo que o comprimento da maior diagonal tenda a 0, eles preenchem uma porção cada vez maior de R e a soma acima converge para o volume efetivo sob $z = f(x, y)$ sobre R. Definimos então $\iint_R f(x, y)\,dA$ como o limite dessa soma dupla, tomando o limite sobre todas as subdivisões do retângulo $[a, b] \times [c, d]$ à medida que a maior diagonal dos sub-retângulos tende a 0.

Uma definição análoga vale para funções $f(x, y)$ que não sejam sempre não negativas: quando $f(x, y) < 0$, substitui-se a interpretação de volume pela de volume orientado negativo. Para regiões do tipo mostrado na Figura 5.2, a definição de integral de Riemann de uma variável reduz a definição de $\iint_R f(x, y)\,dA$ a duas integrais iteradas.

Por fim, a região R não precisa ser limitada. Integrais duplas *impróprias*, seja por domínio não limitado, seja pela presença de pontos onde $f(x, y)$ não está definida, podem ser calculadas como uma sequência de integrais impróprias iteradas de uma variável.

Exemplo 5.12

Calcule $\displaystyle\int_1^\infty \int_0^{1/x^2} 2y\,dy\,dx$.

Solução.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \int_0^{1/x^2} 2y\,dy\,dx &= \int_1^\infty \left(y^2 \Big|_{y=0}^{y=1/x^2} \right) dx \\ &= \int_1^\infty x^{-4}\,dx = -\tfrac{1}{3}x^{-3}\Big|_1^\infty = 0 - (-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

◁

Exemplo 5.13 — Dose acumulada e escolha da ordem (difícil)
Em coordenadas adimensionais, uma taxa espacial de exposição é $q(x, y) = e^{y^2}$ na região $D = \{(x, y) : 0 \le x \le y \le 1\}$. Calcule a exposição total $Q = \iint_D q\, dA$.

Solução. Com seções verticais,

$$Q = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

A integral interna não tem primitiva elementar. A região também se descreve por $0 \le y \le 1$ e $0 \le x \le y$. Como o integrando é contínuo e o domínio é limitado, podemos trocar a ordem:

$$Q = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 y e^{y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{e-1}{2}.$$

A fronteira $x = y$ passa a fornecer o limite superior interno. A dificuldade desaparece porque a variável ausente do integrando é integrada primeiro. ◁

Exercícios

A

Nos Exercícios 1–6, calcule a integral dupla indicada.

1. [C1] $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 24x^2 y\, dy\, dx$

2. [C1] $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{y} \operatorname{sen} x\, dx\, dy$

3. [C1] $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} 4x\, dy\, dx$

4. [C1] $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2}\, dx\, dy$

5. [C1] $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \cos x\, \operatorname{sen} y\, dx\, dy$

6. [C2] $\displaystyle\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$

7. [C1] $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{y} 1\, dx\, dy$

8. [C1] $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} 2\, dy\, dx$

9. [A1] Calcule o volume V do sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

10. [A1] Calcule o volume V do sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + 5z = 6$.

B

11. [J2] Explique por que a integral dupla $\iint_R 1\,dA$ fornece a área de R. Para simplificar, você pode supor que R seja uma região do tipo mostrado na Figura 5.2(a).

C

12. [J3] Prove que o volume de um tetraedro com três arestas adjacentes mutuamente perpendiculares de comprimentos a, b e c, como na figura ao lado, é $\frac{abc}{6}$. (*Sugestão: imite o Exemplo 5.11 e recorde como três pontos não colineares determinam um plano.*)

13. [P3] Mostre como o Exercício 12 pode ser usado para resolver o Exercício 10.

5.4. Integrais Triplas

A integral tripla acrescenta uma terceira direção de acumulação. Para montar seus limites, escolha primeiro uma projeção plana do sólido; sobre cada ponto dessa projeção, descreva o intervalo da variável restante. A densidade é por unidade de volume, de modo que a integral fornece massa, carga ou outra quantidade total.

A definição de integral dupla de uma função real $f(x, y)$ sobre uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ estende-se naturalmente à *integral tripla* de uma função real $f(x, y, z)$ sobre um sólido limitado $S \subseteq \mathbb{R}^3$ cuja fronteira tenha volume zero. Procedemos como antes: encerramos S em um paralelepípedo retangular e o subdividimos em pequenos paralelepípedos. Em cada bloco contido em S, com arestas Δx, Δy e Δz, escolhemos um ponto (x_*, y_*, z_*). Definimos então a integral tripla de f sobre S, denotada por $\iiint_S f(x, y, z)\,dV$, por

$$\iiint_S f(x, y, z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum\sum\sum f(x_*, y_*, z_*)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,, \tag{5.8}$$

onde P percorre partições do paralelepípedo que contém S e $\|P\|$ é o comprimento da maior diagonal de seus subparalelepípedos, e a soma tripla percorre todos os subparalelepípedos contidos em S. Pode-se mostrar que o limite não depende da escolha do paralelepípedo retangular exterior. O símbolo dV é chamado de *elemento de volume*.

Geometricamente, a integral tripla generaliza a interpretação da integral dupla. Uma integral dupla pode ser vista como o volume sob uma superfície bidimensional; de modo análogo, a integral tripla pode ser interpretada como o *hipervolume* sob uma *hipersuperfície* tridimensional $w = f(x, y, z)$ em $\mathbb{R}^4$. Em geral, a palavra "volume" é usada em sentido amplo para a medida de um objeto n-dimensional, incluindo comprimento em $\mathbb{R}^1$ e área em $\mathbb{R}^2$. Embora seja difícil visualizar o volume de um objeto quadridimensional, a integral fornece uma maneira precisa de calculá-lo.

No caso em que S é um paralelepípedo retangular $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$, isto é, $S = \{(x, y, z) : x_1 \leq x \leq x_2,\ y_1 \leq y \leq y_2,\ z_1 \leq z \leq z_2\}$, a integral tripla é uma sequência de três integrais iteradas:

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,, \tag{5.9}$$

e a ordem de integração pode ser permutada. Este é o caso mais simples.

Um caso mais geral ocorre quando S é limitado abaixo por $z = g_1(x, y)$, acima por $z = g_2(x, y)$, enquanto y varia entre as curvas $h_1(x)$ e $h_2(x)$ e x varia entre a e b. Então

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx\,. \tag{5.10}$$

Nesse caso, a primeira integral iterada produz uma função de x e y, pois seus limites dependem dessas variáveis, restando depois uma integral dupla do tipo estudado na seção anterior. Naturalmente, há muitas variações possíveis, por exemplo permutando os papéis de x, y e z. A principal dificuldade prática das integrais triplas costuma ser descrever corretamente o sólido e escolher uma ordem de integração conveniente. Por ora, o essencial é dominar o cálculo dessas integrais; veremos adiante outras aplicações.

Exemplo 5.14

Calcule $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (xy + z)\, dx\, dy\, dz$.

Solução.

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (xy+z)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}x^2y + xz\Big|_{x=0}^{x=1}\right) dy\,dz \\ &= \int_0^3\int_0^2 \left(\tfrac{1}{2}y + z\right) dy\,dz \\ &= \int_0^3 \left(\tfrac{1}{4}y^2 + yz\Big|_{y=0}^{y=2}\right) dz \\ &= \int_0^3 (1+2z)\,dz \\ &= z + z^2\Big|_0^3 \;=\; 12\end{aligned}$$

◁

Exemplo 5.15

Calcule $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x-y} (x+y+z)\,dz\,dy\,dx.$

Solução. Integramos primeiro em z, mantendo x, y fixos:

$$\begin{aligned}H(x,y) &= \int_0^{2-x-y} (x+y+z)\ \mathrm{d}z \\ &= (x+y)(2-x-y) + \tfrac{1}{2}(2-x-y)^2 \\ &= 2 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

A integral pedida é $I = \int_0^1\int_0^{1-x} H(x,y)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$. Uma primitiva de H em y é $2y - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3$. Substituindo $y = 1-x$ e $y = 0$, obtemos

$$I = \int_0^1 \left(\frac{11}{6} - 2x + \frac{x^3}{6}\right)\mathrm{d}x = \frac{11}{6} - 1 + \frac{1}{24} = \frac{7}{8}.$$

Cada limite foi substituído apenas na etapa relativa à sua variável. ◁

Observe que o volume V de um sólido em $\mathbb{R}^3$ é dado por

$$V \;=\; \iiint_S 1\,dV\,. \tag{5.11}$$

Como o integrando é a constante 1, a integral tripla acima reduz-se a uma integral dupla do tipo estudado na seção anterior quando o sólido é limitado acima por uma superfície $z = f(x, y)$ e abaixo pelo plano xy, isto é, $z = 0$. Há muitas outras possibilidades. Por exemplo, o sólido pode ser limitado abaixo e acima por $z = g_1(x, y)$ e $z = g_2(x, y)$, respectivamente, com y entre $h_1(x)$ e $h_2(x)$ e x entre a e b. Então

$$V = \iiint_S 1\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} 1\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} (g_2(x, y) - g_1(x, y))\, dy\, dx.$$

como em (5.10). Veja o Exercício 10 para um exemplo.

Exemplo 5.16 — Quantidade de soluto em um reservatório (difícil)
Em coordenadas normalizadas, um reservatório ocupa $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le z \le 4\}$ e contém concentração $c(x, y, z) = c_0(1 + z)$, com $c_0 > 0$. Determine a quantidade total de soluto dividida pela escala de volume usada na normalização.

Solução. Para evitar antecipar uma mudança de coordenadas, usamos seções horizontais: em uma altura $z \in [0, 4]$, a seção é o disco $x^2 + y^2 \le z$, cuja área é πz. A concentração é constante nessa seção. Portanto,

$$M = \int_0^4 c_0(1 + z)\pi z \, \mathrm{d}z = \pi c_0 \left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right]_0^4 = \frac{88\pi c_0}{3}.$$

A integral tripla foi reduzida a uma integral de áreas ponderadas. Em coordenadas físicas com escala de comprimento ℓ, a quantidade total é $\ell^3 M$. A mesma região poderá ser descrita em coordenadas cilíndricas na próxima seção. ◁

Exercícios

A

Nos Exercícios 1–8, calcule a integral tripla indicada.

1. [C1] $\displaystyle\int_0^3\int_0^2\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz$

2. [C2] $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_0^y xyz\,dz\,dy\,dx$

3. [C2] $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{x}\int_0^{xy} x^2\operatorname{sen} z\,dz\,dy\,dx$

4. [C2] $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^y ze^{y^2}\,dx\,dy\,dz$

5. [C2] $\displaystyle\int_1^e\int_0^y\int_0^{1/y} x^2z\,dx\,dz\,dy$

6. [C2] $\displaystyle\int_1^2\int_0^{y^2}\int_0^{z^2} yz\,dx\,dz\,dy$

7. [C1] $\displaystyle\int_1^2\int_2^4\int_0^3 1\,dx\,dy\,dz$

8. [C1] $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} 1\,dz\,dy\,dx$

9. [J2] Seja M constante. Mostre que $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} M\,dx\,dy\,dz = M(z_2-z_1)(y_2-y_1)(x_2-x_1)$.

B

10. [A2] Calcule o volume V do sólido S limitado pelos três planos coordenados, acima pelo plano $x+y+z=2$ e abaixo pelo plano $z=x+y$.

C

11. [P3] Suponha $a<b$ e f contínua em $[a,b]$. Mostre que

$$\int_a^b\int_a^z\int_a^y f(x)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f(x)\,dx.$$

(*Sugestão: examine como a mudança da ordem de integração altera os limites da integral tripla.*)

5.5. Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Uma boa mudança de variáveis simplifica simultaneamente o domínio e o integrando. O jacobiano corrige a área ou o volume de cada célula transformada. Em integrais escalares usamos seu valor absoluto; o sinal ficará relevante mais adiante, nas integrais orientadas de formas.

Diante da dificuldade de algumas integrais múltiplas, é natural perguntar se uma substituição adequada pode simplificá-las. A resposta é afirmativa, embora a mudança de variáveis seja um pouco mais sutil do que no cálculo de uma variável.

Recordemos primeiro um exemplo de uma variável. Considere a integral

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx\,,$$

Fazemos a substituição

$$\begin{aligned} u = x^2 - 1 \;&\Rightarrow\; x^2 = u+1 \\ du = 2x\,dx \end{aligned}$$

o que altera os limites de integração

$$\begin{aligned} x = 1 \;&\Rightarrow\; u = 0 \\ x = 2 \;&\Rightarrow\; u = 3 \end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx \;&=\; \int_1^2 \tfrac{1}{2}x^2\cdot 2x\sqrt{x^2-1}\,dx \\ &=\; \int_0^3 \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{u}\,du \\ &=\; \tfrac{1}{2}\int_0^3 \left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)du \\ &=\; \tfrac{14\sqrt{3}}{5}\,. \end{aligned}$$

Vale a pena reinterpretar essa substituição, pois isso esclarece o que ocorre em várias variáveis. Tomamos $u = x^2 - 1$. No intervalo $[1,2]$, a função $x \mapsto x^2 - 1$ é estritamente crescente e leva $[1,2]$ sobre $[0,3]$; portanto possui uma inversa nesse último intervalo. Assim, em $[0,3]$ podemos escrever x como função de u:

$$x \;=\; g(u) \;=\; \sqrt{u+1}\,.$$

Substituindo essa expressão de x em $f(x) = x^3\sqrt{x^2-1}$, obtemos

$$f(x) \;=\; f(g(u)) \;=\; (u+1)^{3/2}\sqrt{u}\,,$$

e observamos que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} \;=\; g'(u) \;\Rightarrow\; dx \;&=\; g'(u)\,du \\ dx \;&=\; \tfrac{1}{2}(u+1)^{-1/2}\,du\,, \end{aligned}$$

Além disso, como

$$g(0) = 1 \;\Rightarrow\; 0 = g^{-1}(1)$$
$$g(3) = 2 \;\Rightarrow\; 3 = g^{-1}(2)$$

a substituição realizada acima fornece

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= \int_0^3 \tfrac{1}{2}(u+1)\sqrt{u}\,du \ , \text{ que também pode ser escrita como} \\ &= \int_0^3 (u+1)^{3/2}\sqrt{u}\cdot\tfrac{1}{2}(u+1)^{-1/2}\,du \ , \text{ isto é,} \\ \int_1^2 f(x)\,dx &= \int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(2)} f(g(u))\,g'(u)\,du\,.\end{aligned}$$

Em geral, se $x = g(u)$ é uma função diferenciável e estritamente crescente de um intervalo $[c,d]$ sobre $[a,b]$, com $g'(u) \neq 0$ em (c,d), $a = g(c)$ e $b = g(d)$, então $c = g^{-1}(a)$, $d = g^{-1}(b)$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\,g'(u)\,du\,. \tag{5.12}$$

Essa é a *fórmula de mudança de variável* para integrais de funções de uma variável, usada implicitamente na integração por substituição. Ela é um caso particular de uma fórmula mais geral para integrais múltiplas. Enunciaremos as versões para integrais duplas e triplas de funções reais de duas e três variáveis, respectivamente. Suporemos que as mudanças de coordenadas sejam continuamente diferenciáveis e que as regiões e os sólidos tenham fronteiras de medida nula. A demonstração do teorema seguinte está além do escopo deste texto.

Teorema 5.10

Fórmula de Mudança de Variáveis para Integrais Múltiplas
Sejam $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ funções continuamente diferenciáveis que definem uma mudança de coordenadas de uma região R' do plano uv sobre uma região R do plano xy. Suponha que a aplicação seja injetiva no interior

de R', que as fronteiras tenham área nula e que o determinante

$$J(u,v) \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

não se anule no interior de R'. Então, para toda função integrável f,

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dA(x,y) \;=\; \iint\limits_{R'} f(x(u,v),y(u,v))\;|J(u,v)|\;dA(u,v)\,. \tag{5.14}$$

Usamos as notações $dA(x,y)$ e $dA(u,v)$ para os elementos de área nas coordenadas (x,y) e (u,v), respectivamente.
Analogamente, suponha que $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ e $z = z(u,v,w)$ definam uma mudança de coordenadas de um sólido S' no espaço uvw sobre um sólido S no espaço xyz, injetiva no interior de S', com fronteiras de volume nulo e determinante

$$J(u,v,w) \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{5.15}$$

não nulo no interior de S'. Então, para toda função integrável f,

$$\begin{gathered} \iiint_S f(x,y,z)\;\mathrm{d}V = \iiint_{S'} f(T(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\;\mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w, \\ T(u,v,w) = (x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)). \end{gathered} \tag{5.16}$$

O determinante $J(u,v)$ em (5.13) é o **jacobiano** de x e y em relação a u e v, e também é escrito como

$$J(u,v) \;=\; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,. \tag{5.17}$$

Analogamente, o jacobiano $J(u,v,w)$ de três variáveis pode ser escrito como

$$J(u,v,w) \;=\; \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,. \tag{5.18}$$

A fórmula (5.14) afirma, em particular, que $dA(x,y) = |J(u,v)|\;dA(u,v)$, a versão

bidimensional da relação $dx = g'(u)\,du$ do caso de uma variável.

O exemplo seguinte mostra como usar a fórmula de mudança de variáveis.

Exemplo 5.17

Calcule $\iint\limits_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dA$, onde $R = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

Solução. Sem uma substituição, esta integral dupla é difícil de calcular em forma fechada. A forma do expoente sugere $u = x - y$ e $v = x + y$. Para aplicar (5.14), precisamos escrever x e y em termos de u e v. Resolvendo o sistema, obtemos $x = \frac{1}{2}(u+v)$ e $y = \frac{1}{2}(v-u)$. A Figura 5.5 mostra como a aplicação $x = x(u,v) = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = y(u,v) = \frac{1}{2}(v-u)$ leva a região R' sobre R de modo injetivo.

Agora,

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow |J(u,v)| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

e, usando seções horizontais em R', obtemos

$$\begin{aligned} \iint\limits_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dA &= \iint\limits_{R'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,dA \\ &= \int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\frac{1}{2}\,du\,dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{v}{2} e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v} \right) dv \\ &= \int_0^1 \frac{v}{2}(e - e^{-1})\,dv \\ &= \frac{v^2}{4}(e - e^{-1})\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2-1}{4e} \end{aligned}$$

◁

A fórmula de mudança de variáveis também permite calcular integrais duplas em coordenadas polares. Tomando

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

temos

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = r,$$

e, portanto, obtemos a fórmula:

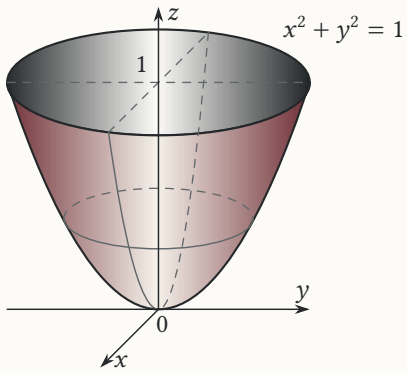
Integral Dupla em Coordenadas Polares

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta\,, \tag{5.19}$$

onde $r \geq 0$, θ varia em um intervalo de comprimento 2π, e a aplicação $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ é injetiva no interior de R'; a origem e a semirreta escolhida como corte angular são conjuntos de área nula.

Exemplo 5.18

Calcule o volume V no interior do paraboloide $z = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 1$.



Solução: Usando seções verticais, temos

$$V = \iint_R (1-z)\,dA = \iint_R (1-(x^2+y^2))\,dA\,,$$

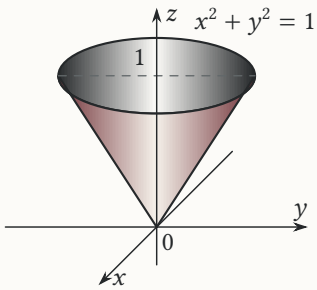
onde $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$ (veja a figura ao lado). Em coordenadas polares (r,θ), $x^2 + y^2 = r^2$ e o disco unitário corresponde a

$R' = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 5.19

Calcule o volume V no interior do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ para $0 \le z \le 1$.



Solução: Usando seções verticais, temos

$$V = \iint_R (1-z)\, dA = \iint_R \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA\,,$$

onde $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$. Em coordenadas polares (r,θ), temos $\sqrt{x^2+y^2} = r$, e o disco unitário corresponde a $R' =$

$\{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^2)\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=1}\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{6}\,d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

De modo semelhante, pode-se mostrar, veja os Exercícios 5–6, que integrais triplas em coordenadas cilíndricas e esféricas assumem as formas seguintes:

Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz\,, \tag{5.20}$$

onde $r \ge 0$, θ varia em um intervalo de comprimento 2π, e a aplicação $(r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$ é injetiva no interior de S', salvo no eixo e na semirreta de corte angular, conjuntos de volume nulo.

Integral Tripla em Coordenadas Esféricas

$$\begin{gathered} \iiint_S f(x,y,z)\ \mathrm{d}V = \iiint_{S'} f(T(\rho,\theta,\phi))\,\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta, \\ T(\rho,\theta,\phi) = (\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\phi). \end{gathered} \tag{5.21}$$

onde $\rho \ge 0$, $0 \le \phi \le \pi$, θ varia em um intervalo de comprimento 2π, e a aplicação $x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho\cos\phi$ é injetiva no interior das regiões de coordenadas; a origem, o eixo e a semirreta de corte angular têm volume nulo.

Exemplo 5.20

Para $a > 0$, calcule o volume V da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

Solução: Em coordenadas esféricas, o interior da esfera corresponde a $0 \le \rho \le a$, e portanto

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S 1\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} 1\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=a}\right)\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^3}{3}\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^3}{3}\cos\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2a^3}{3}\,d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.21 — Lâmina elíptica não homogênea (difícil)

Uma lâmina ocupa $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$, com $a, b > 0$, e tem densidade $\rho(x,y) = \rho_0(1 + x^2/a^2 + y^2/b^2)$, $\rho_0 > 0$. Determine sua massa e seu momento de inércia $I_z = \iint (x^2+y^2)\rho\, dA$ em torno do eixo normal pelo centro.

Solução. A geometria sugere $x = ar\cos\theta$, $y = br\operatorname{sen}\theta$, com $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. O jacobiano em módulo é abr; a aplicação é injetiva no interior após escolher $0 < \theta < 2\pi$, e as exceções na origem e na borda têm área zero. Assim,

$$M = \rho_0 ab \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1+r^2) r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi\rho_0 ab}{2}.$$

Para o momento, $x^2 + y^2 = r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)$, logo

$$I_z = \rho_0 ab\left(\int_0^1 (r^3 + r^5)\ \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)\ \mathrm{d}\theta\right) = \frac{5\pi\rho_0 ab(a^2+b^2)}{12}.$$

A razão $I_z/M = 5(a^2+b^2)/18$ tem dimensão de comprimento ao quadrado. A densidade maior perto da borda aumenta a importância das massas afastadas do eixo. ◁

Exercícios

A

1. [A1] Calcule o volume V no interior do paraboloide $z = x^2 + y^2$ para $0 \leq z \leq 4$.

2. [A1] Calcule o volume V no interior do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \leq z \leq 3$.

B

3. [A2] Calcule o volume V do sólido contido simultaneamente em $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. [A2] Calcule o volume V contido simultaneamente na esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e no cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. [J2] Demonstre a fórmula (5.20).

6. [J2] Demonstre a fórmula (5.21).

7. [C2] Calcule $\iint_R \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) dA$, onde R é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$. (*Sugestão: use a mudança de variáveis* $u = (x + y)/2$, $v = (x - y)/2$.)

8. [A2] Calcule o volume do sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

9. [A2] Calcule o volume no interior do cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, para $0 \leq z \leq 2$.

C

10. [J3] Mostre que, para $a, b, c > 0$, o volume do elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é $\frac{4\pi abc}{3}$. (*Sugestão: use* $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ *e o Exemplo 5.20.*)

11. [P3] Mostre que a *função Beta*, definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt\,, \quad \text{para } x > 0,\ y > 0,$$

satisfaz $B(y, x) = B(x, y)$ para $x > 0$, $y > 0$.

12. [P3] Usando a substituição $t = u/(u + 1)$, mostre que a função Beta pode ser escrita como

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\, du\,, \quad \text{para } x > 0,\ y > 0.$$

5.6. Aplicação: Centro de Massa

O centro de massa é uma média das posições ponderada pela massa. A integral da densidade fornece o denominador; a integral da coordenada multiplicada pela densidade fornece o numerador. Simetrias só podem simplificar o cálculo quando preservam tanto o domínio quanto a densidade.

Recordemos do cálculo de uma variável que, para uma região $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ representando uma lâmina fina (veja a figura ao lado), com f contínua em $[a, b]$, supondo que R tenha área positiva, as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do *centro de massa* de R são

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M}\,,$$

onde

$$M_x = \int_a^b \frac{(f(x))^2}{2}\,dx\,, \quad M_y = \int_a^b x f(x)\,dx\,, \quad M = \int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{5.22}$$

supondo que R tenha *densidade uniforme*, isto é, que sua massa esteja distribuída uniformemente. Nesse caso, a área M da região é tomada como sua massa, com densidade constante igual a 1 para simplificar.

No caso geral, a densidade de uma região, ou *lâmina*, R é uma função contínua $\delta = \delta(x, y)$ das coordenadas (x, y) dos pontos de R. Para uma região limitada regular $R \subseteq \mathbb{R}^2$ e densidade contínua não negativa com massa total positiva, as coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ do centro de massa são dadas por

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M}\,, \tag{5.23}$$

onde

$$M_y = \iint_R x\delta(x, y)\,dA\,, \quad M_x = \iint_R y\delta(x, y)\,dA\,, \quad M = \iint_R \delta(x, y)\,dA\,, \tag{5.24}$$

As quantidades M_x e M_y são os *momentos*, ou *primeiros momentos*, de R em relação aos eixos x e y, respectivamente. A quantidade M é a massa de R. Para compreender a fórmula, considere um pequeno retângulo em R, de dimensões Δx e Δy próximas de 0. Sua massa é aproximadamente $\delta(x_*, y_*)\Delta x\,\Delta y$, para algum ponto (x_*, y_*) do retângulo. A massa total de R é o limite das somas dessas massas quando as diagonais dos retângulos tendem a 0, isto é, $\iint_R \delta(x, y)\,dA$.

As fórmulas em (5.22) são o caso particular de (5.24) em que $\delta(x, y) = 1$ em toda a região R.

Exemplo 5.22

Determine o centro de massa da região $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2x^2\}$ se a densidade no ponto (x, y) é $\delta(x, y) = x + y$.

Solução. A região R está representada na figura ao lado. Temos

$$\begin{aligned} M &= \iint_R \delta(x,y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} (x+y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 + 2x^4)\,dx \\ &= \frac{x^4}{2} + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y\delta(x,y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} y(x+y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x^5 + \frac{8x^6}{3})\,dx \\ &= \frac{x^6}{3} + \frac{8x^7}{21}\Big|_0^1 = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x\delta(x,y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} x(x+y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x^4 + 2x^5)\,dx \\ &= \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{3}\Big|_0^1 = \frac{11}{15}, \end{aligned}$$

portanto o centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ é

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{11/15}{9/10} = \frac{22}{27}, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{5/7}{9/10} = \frac{50}{63}.$$

Observe que esse centro de massa está um pouco mais deslocado em direção ao canto superior de R do que no caso de densidade uniforme. De fato, (5.22) fornece $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{5})$ nesse caso. Isso é coerente com o fato de que $\delta(x, y) = x + y$ cresce à medida que (x, y) se aproxima daquele canto. ◁

Se $\delta(x, y)$ é constante em R, o centro de massa $(\overline{x}, \overline{y})$ é chamado de *centroide* de R.

As fórmulas do centro de massa em $\mathbb{R}^2$ generalizam-se para um sólido limitado regular $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Se S possui densidade de massa contínua não negativa $\delta(x, y, z)$ e massa total positiva, então seu centro de massa tem coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, onde

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}, \tag{5.25}$$

onde

$$M_{yz} = \iiint_S x\delta \, \mathrm{d}V, \qquad M_{xz} = \iiint_S y\delta \, \mathrm{d}V, \tag{5.26}$$

$$M_{xy} = \iiint_S z\delta \, \mathrm{d}V, \qquad M = \iiint_S \delta \, \mathrm{d}V. \tag{5.27}$$

Nesse caso, M_{yz}, M_{xz} e M_{xy} são os *momentos*, ou *primeiros momentos*, de S em relação aos planos yz, xz e xy, respectivamente. Além disso, M é a massa de S.

Exemplo 5.23

Determine o centro de massa do sólido $S = \{(x, y, z) : z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ se a densidade é $\delta(x, y, z) = 1$.

Solução. O sólido S é o hemisfério superior da esfera de raio a centrada na origem. Como a densidade é constante e S é simétrico em torno do eixo z, temos $\overline{x} = \overline{y} = 0$; resta calcular $\overline{z}$. Temos

$$M = \iiint_S \delta(x, y, z)\, dV = \iiint_S 1\, dV = \mathrm{Vol}(S).$$

Como o volume de S é metade do volume da esfera de raio a, que pelo Exemplo 5.20

vale $\frac{4\pi a^3}{3}$, temos $M = \frac{2\pi a^3}{3}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint_S z\delta(x,y,z)\,dV \\
&= \iiint_S z\,dV \quad , \text{ que, em coordenadas esféricas, é} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} (\rho\cos\phi)\,\rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\,\cos\phi\left(\int_0^{a}\rho^3\,d\rho\right)d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{4}\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\phi\,d\phi\,d\theta \\
M_{xy} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{a^4}{8}\,\operatorname{sen}2\phi\,d\phi\,d\theta \quad (\text{pois } \operatorname{sen}2\phi = 2\operatorname{sen}\phi\,\cos\phi) \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a^4}{16}\cos 2\phi\Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{a^4}{8}\,d\theta \\
&= \frac{\pi a^4}{4}\,,
\end{aligned}$$

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}\,.$$

Assim, o centro de massa de S é $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(0,0,\frac{3a}{8}\right)$. ◁

Exemplo 5.24 — Centro de massa com densidade assimétrica (médio)

Em coordenadas normalizadas, uma lâmina triangular ocupa $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ e tem densidade $\rho = k(x + 2y)$, com $k > 0$. Determine seu centro de massa.

Solução. Usamos $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1 - x$. As integrais são

$$M = k\int_0^1 \int_0^{1-x} (x + 2y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{k}{2},$$
$$M_y = k\int_0^1 \int_0^{1-x} x(x + 2y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{k}{6},$$
$$M_x = k\int_0^1 \int_0^{1-x} y(x + 2y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{5k}{24}.$$

Portanto, $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/3, 5/12)$. O ponto satisfaz $\bar{x}, \bar{y} > 0$ e $\bar{x} + \bar{y} < 1$, como esperado para uma média ponderada em um triângulo. A maior densidade na direção de y desloca o centro acima do centroide uniforme $(1/3, 1/3)$. O fator k cancela nas razões. ◁

Exercícios

A

Nos Exercícios 1–5, determine o centro de massa da região R com a densidade indicada $\delta(x, y)$.

1. [A1] $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$, $\delta(x, y) = 2y$

2. [A1] $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$, $\delta(x, y) = x + y$

3. [A1] Para $a > 0$, $R = \{(x, y) : y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le a^2\}$, $\delta(x, y) = 1$

4. [A1] $R = \{(x, y) : y \ge 0,\ x \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

5. [A1] $R = \{(x, y) : y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$, $\delta(x, y) = y$

B

Nos Exercícios 6–10, determine o centro de massa do sólido S com a densidade indicada $\delta(x, y, z)$.

6. [A2] $S = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$, $\delta(x, y, z) = xyz$

7. [A2] Para $a > 0$, $S = \{(x, y, z) : z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$, $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

8. [A2] Para $a > 0$, $S = \{(x, y, z) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\}$, $\delta(x, y, z) = 1$

9. [A2] $S = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$, $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

10. [A2] $S = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x - y\}$, $\delta(x, y, z) = 1$

5.7. Aplicação: Probabilidade e Valor Esperado

Uma densidade de probabilidade funciona como uma distribuição de massa total igual a 1. Integrar sobre uma região fornece a probabilidade do evento; integrar uma coordenada multiplicada pela densidade fornece sua média. Em duas variáveis, o formato do suporte pode produzir dependência mesmo quando a expressão da densidade é simples.

Nesta seção discutiremos brevemente algumas aplicações de integrais múltiplas à teoria da probabilidade. Em particular, veremos como usá-las para calcular *probabilidades* e *valores esperados*.

Probabilidade

Considere um dado honesto de seis faces e seja X a variável que registra o resultado. A *probabilidade* de obter 3, escrita $P(X = 3)$, é $\frac{1}{6}$, pois os seis resultados são equiprováveis. Da mesma forma, a probabilidade de obter *no máximo* 3, isto é, $P(X \leq 3)$, vale $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, pois há três resultados possíveis, 1, 2 e 3, entre os seis. Observe que $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$. Dizemos que X é uma *variável aleatória discreta* no *espaço amostral*, ou *espaço de probabilidade*, Ω formado por todos os resultados possíveis: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Um *evento* A é um subconjunto do espaço amostral. No exemplo do dado, o evento $X \leq 3$ é $\{1, 2, 3\}$.

Agora seja X uma variável que representa um número real escolhido ao acaso em $(0, 1)$. O conjunto dos reais entre 0 e 1 não é discreto, nem enumerável: não pode ser colocado em correspondência biunívoca com os inteiros positivos.[2] Nesse caso, para cada $x \in (0, 1)$, a probabilidade $P(X = x)$ deve ser 0. Em vez disso, consideramos $P(X \leq x) = x$. A razão é simples: $(0, 1)$ tem comprimento 1, enquanto $(0, x)$ tem comprimento x. Como X é escolhido uniformemente em $(0, 1)$, isto é, é *uniformemente distribuído*, temos

$$P(X \leq x) = \frac{\text{comprimento de } (0, x)}{\text{comprimento de } (0, 1)} = \frac{x}{1} = x\,.$$

Dizemos que X é uma *variável aleatória contínua* no espaço amostral $\Omega = (0, 1)$. Um *evento* A é um subconjunto do espaço amostral; por exemplo, o evento $X \leq x$ corresponde ao intervalo $(0, x)$.

Para uma variável aleatória discreta, a probabilidade de um evento é a *soma* das probabilidades dos resultados que o compõem. Para uma variável aleatória contínua, a probabilidade de um evento será, em vez disso, a *integral* de uma função, como

[2] De fato, se os reais de $(0, 1)$ fossem uma lista $x_1, x_2, \ldots$, poderíamos construir um número $x \in (0, 1)$ cuja n-ésima casa decimal difere da n-ésima casa decimal de x_n, escolhendo essa casa entre 1 e 2. Assim, x não estaria na lista.

veremos a seguir.

Seja X uma variável aleatória contínua real que assume valores em $\Omega = (a, b)$ com probabilidade 1. A *função de distribuição* F de X é definida por

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \text{para } -\infty < x < \infty \tag{5.28}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{para } x \geq b \\ P(X \leq x), & \text{para } a < x < b \\ 0, & \text{para } x \leq a . \end{cases} \tag{5.29}$$

Suponha que exista uma função integrável não negativa f em $\mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy, \quad \text{para } -\infty < x < \infty , \tag{5.30}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 . \tag{5.31}$$

Chamamos f de *função densidade de probabilidade*, ou *f.d.p.*, de X. Assim,

$$P(X \leq x) = \int_{a}^{x} f(y)\, dy, \quad \text{para } a < x < b . \tag{5.32}$$

Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, nos pontos em que f é contínua,

$$F'(x) = f(x) . \tag{5.33}$$

Exemplo 5.25

Seja X um número real escolhido uniformemente em $(0, 1)$. Dizemos que X tem *distribuição uniforme* em $(0, 1)$, com função de distribuição

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \geq 1 \\ x, & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{para } x \leq 0 , \end{cases} \tag{5.34}$$

e uma função densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.35}$$

Em geral, se X é escolhido uniformemente em um intervalo (a, b), então sua

função de distribuição é

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{para } a < x < b \\ 0, & \text{para } x \leq a\,, \end{cases} \tag{5.36}$$

e uma função densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{para } a < x < b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.37}$$

Exemplo 5.26

Uma distribuição fundamental é a *distribuição normal padrão*, cuja função densidade de probabilidade f é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,, \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \tag{5.38}$$

Essa densidade produz a conhecida "curva em sino" e é amplamente usada em estatística. Como f deve ser uma densidade, devemos ter

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 1 \tag{5.39}$$

pela fórmula (5.31), o que equivale a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}\,. \tag{5.40}$$

Podemos verificar essa identidade usando uma integral dupla em coordenadas polares. Primeiro,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 \end{aligned}$$

pois a mesma função é integrada duas vezes, apenas com nomes diferentes para as variáveis. Por outro lado, em coordenadas polares,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-e^{-r^2/2}\Big|_{r=0}^{r=\infty}\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(0-(-e^0))\,d\theta = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta \;=\; 2\pi\,,\end{aligned}$$

e portanto

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2 \;=\; 2\pi \;\text{, e portanto}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

Além de variáveis aleatórias individuais, podemos considerar variáveis *conjuntamente distribuídas*. Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias contínuas reais definidas no mesmo espaço amostral Ω (a discussão para duas variáveis é análoga). A *função de distribuição conjunta* F de X, Y e Z é dada por

$$F(x,y,z) \;=\; P(X\le x,\; Y\le y,\; Z\le z)\,, \quad \text{para } -\infty < x,y,z < \infty. \tag{5.41}$$

Se existe uma função integrável não negativa f em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$F(x,y,z) \;=\; \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v,w)\,du\,dv\,dw\,, \quad \text{para } -\infty < x,y,z < \infty \tag{5.42}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; 1\,, \tag{5.43}$$

então chamamos f de *função densidade de probabilidade conjunta*, ou *f.d.p. conjunta*, de X, Y e Z. Em geral, se $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ e $a_3 < b_3$, temos

$$P(a_1 < X \le b_1,\; a_2 < Y \le b_2,\; a_3 < Z \le b_3) \;=\; \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,, \tag{5.44}$$

Os símbolos $\leq$ e $<$ podem ser trocados em qualquer combinação. Assim, uma integral tripla pode representar uma probabilidade quando f é uma densidade.

Exemplo 5.27

Escolha a, b e c independentemente e uniformemente em $(0,1)$. Qual é a probabilidade de a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possuir pelo menos uma raiz real x?

Solução. Pela fórmula quadrática, existe pelo menos uma raiz real se $b^2 - 4ac \geq 0$. Devemos portanto calcular $P(b^2 - 4ac \geq 0)$. Usaremos três variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas. Como $0 < a, b, c < 1$,

$$b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow 0 < 4ac \leq b^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{a}\sqrt{c} \leq b < 1\,,$$

onde a última relação vale para todos $0 < a, c < 1$ tais que

$$0 < 4ac < 1 \Leftrightarrow 0 < c < \frac{1}{4a}\,.$$

Considerando a, b e c como variáveis reais, a região R no plano ac onde a relação acima vale é $R = \{(a,c) : 0 < a < 1,\ 0 < c < 1,\ 0 < c < \frac{1}{4a}\}$. Ela é a união das regiões R_1 e R_2, como mostra a figura ao lado.

Sejam agora X, Y e Z variáveis aleatórias contínuas, cada uma uniforme em $(0,1)$; pense nelas como representando a, b e c, respectivamente. Assim como $f(x) = 1$ é a densidade uniforme em $(0,1)$, $f(x,y,z) = 1$ para $x, y, z \in (0,1)$ e 0 fora desse cubo é a densidade conjunta de X, Y e Z. Portanto,

$$P(b^2 - 4ac \geq 0) \;=\; P((a,c) \in R,\ 2\sqrt{a}\sqrt{c} \leq b < 1)\,,$$

essa probabilidade é a integral tripla de $f(a,b,c) = 1$, com b variando de $2\sqrt{a}\sqrt{c}$ até 1 e (a,c) percorrendo R. Como $R = R_1 \cup R_2$, dividimos a integral em duas partes,

usando seções verticais em R:

$$\begin{aligned}
P(b^2-4ac\geq 0) &= \underbrace{\int_0^{1/4}\int_0^{1}}_{R_1}\int_{2\sqrt{a}\,\sqrt{c}}^{1} 1\,db\,dc\,da \;+\; \underbrace{\int_{1/4}^{1}\int_0^{1/4a}}_{R_2}\int_{2\sqrt{a}\,\sqrt{c}}^{1} 1\,db\,dc\,da \\
&= \int_0^{1/4}\int_0^{1}(1-2\sqrt{a}\,\sqrt{c})\,dc\,da \;+\; \int_{1/4}^{1}\int_0^{1/4a}(1-2\sqrt{a}\,\sqrt{c})\,dc\,da \\
&= \int_0^{1/4}\left(c-\tfrac{4}{3}\sqrt{a}\,c^{3/2}\Big|_{c=0}^{c=1}\right)da \;+\; \int_{1/4}^{1}\left(c-\tfrac{4}{3}\sqrt{a}\,c^{3/2}\Big|_{c=0}^{c=1/4a}\right)da \\
&= \int_0^{1/4}\left(1-\tfrac{4}{3}\sqrt{a}\right)da \;+\; \int_{1/4}^{1}\frac{1}{12a}\,da \\
&= a-\frac{8}{9}a^{3/2}\Big|_0^{1/4} \;+\; \frac{1}{12}\ln a\Big|_{1/4}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(0-\frac{1}{12}\ln\frac{1}{4}\right) \;=\; \frac{5}{36}+\frac{1}{12}\ln 4 \\
P(b^2-4ac\geq 0) &= \frac{5+3\ln 4}{36} \;\approx\; 0.2544
\end{aligned}$$

Em outras palavras, a probabilidade de $ax^2+bx+c=0$ ter ao menos uma raiz real é de aproximadamente 25%. ◁

Valor Esperado

O *valor esperado* EX de uma variável aleatória X pode ser interpretado como o valor médio de X, ponderado pelas probabilidades. Se X é discreta, então

$$EX \;=\; \sum_x x\,P(X=x)\,, \tag{5.45}$$

onde a soma percorre todos os valores x do espaço amostral. Por exemplo, se X representa o resultado de um dado de seis faces, então

$$EX \;=\; \sum_{x=1}^{6} x\,P(X=x) \;=\; \sum_{x=1}^{6} x\,\frac{1}{6} \;=\; 3.5 \tag{5.46}$$

é o valor esperado de X, isto é, a média dos números de 1 a 6.

Se X é uma variável aleatória contínua real com densidade f e $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\,dx<\infty$, então

$$EX \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx\,. \tag{5.47}$$

Por exemplo, se X tem distribuição uniforme em $(0,1)$, sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{5.48}$$

e portanto

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}\,. \tag{5.49}$$

Para duas variáveis aleatórias contínuas reais X e Y, conjuntamente distribuídas com densidade $f(x,y)$ e com primeiros momentos finitos, os valores esperados de X e Y são

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{e} \quad EY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy\,, \tag{5.50}$$

respectivamente.

Exemplo 5.28

Se escolhermos $n > 2$ números reais independentes e uniformes em $(0,1)$, quais são os valores esperados do menor e do maior desses números?

Solução. Sejam $U_1, \ldots, U_n$ variáveis aleatórias contínuas independentes, cada uma uniforme em $(0,1)$. Defina as variáveis aleatórias X e Y por

$$X = \min(U_1, \ldots, U_n) \quad \text{e} \quad Y = \max(U_1, \ldots, U_n)\,.$$

Sabe-se[3] que a densidade conjunta de X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & \text{para } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.51}$$

[3] Veja o Cap. 6 de [2].

Logo, o valor esperado de X é

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^1 \int_x^1 n(n-1)x(y-x)^{n-2}\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(nx(y-x)^{n-1}\Big|_{y=x}^{y=1} \right) dx \\ &= \int_0^1 nx(1-x)^{n-1}\,dx \ , \text{ e, integrando por partes, obtemos} \\ &= -x(1-x)^n - \frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\Big|_0^1 \\ EX &= \frac{1}{n+1}\,, \end{aligned}$$

e, analogamente, veja o Exercício 3,

$$EY = \int_0^1 \int_0^y n(n-1)y(y-x)^{n-2}\,dx\,dy = \frac{n}{n+1}\,.$$

Por exemplo, se repetirmos muitas vezes o experimento de escolher $n = 3$ números uniformes em $(0,1)$ e registrarmos o mínimo e o máximo de cada amostra, a média dos mínimos se aproximará de $\frac{1}{4}$ e a média dos máximos de $\frac{3}{4}$ à medida que o número de amostras cresce. O Exercício 4 propõe uma verificação computacional simples desse fato. ◁

Exemplo 5.29 — Dois tempos normalizados dependentes (difícil)

Dois tempos normalizados X, Y têm densidade conjunta $f(x,y) = 6x$ em $0 < x < y < 1$, e zero fora desse triângulo. Verifique a normalização, calcule $P(Y > 3/4)$, as médias e a covariância.

Solução. Integrando primeiro em x,

$$\int_0^1 \int_0^y 6x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 3y^2\ \mathrm{d}y = 1.$$

A mesma descrição do suporte dá

$$P(Y > 3/4) = \int_{3/4}^1 3y^2\ \mathrm{d}y = \frac{37}{64}.$$

As médias e o produto médio são

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 \int_0^y 6x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 3y^3 \, \mathrm{d}y = \frac{3}{4},$$
$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^y 6x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{2}{5}.$$

Logo, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 2/5 - (1/2)(3/4) = 1/40 > 0$. As variáveis são dependentes: o suporte já impõe $X < Y$, e a covariância não nula confirma essa conclusão. Nenhum produto de probabilidades marginais foi usado. ◁

Exercícios

B

1. [C2] Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ usando os resultados deste capítulo.

2. [C2] Para $\sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx$.

3. [J2] Mostre que $EY = \frac{n}{n+1}$ no Exemplo 5.28.

C

4. [P3] Escreva um programa, na linguagem de sua escolha, que verifique numericamente o Exemplo 5.28 para $n = 3$, usando um grande número de amostras.

5. [P3] Repita o exercício anterior para $n = 4$.

6. [A3] Para variáveis aleatórias contínuas X, Y com densidade conjunta $f(x,y)$, defina os *segundos momentos* $E(X^2)$ e $E(Y^2)$ por

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{e} \quad E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

e as *variâncias* $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$ por

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2\,.$$

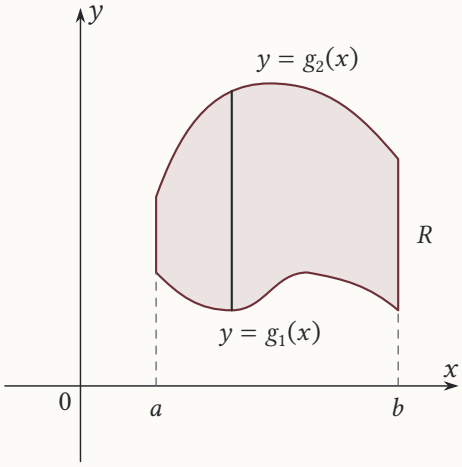
Calcule $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$ para X e Y do Exemplo 5.28.

7. [P3] Prosseguindo o exercício anterior, a *correlação* ρ entre X e Y é definida por

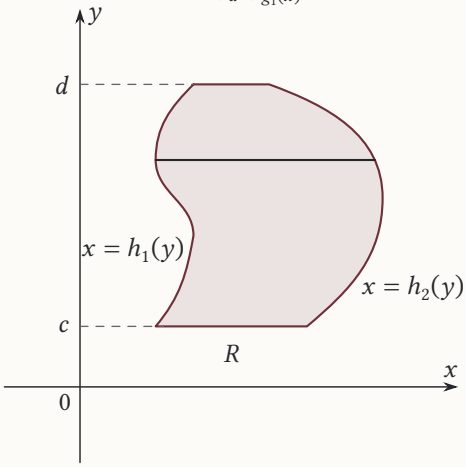
$$\rho = \frac{E(XY) - (EX)(EY)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}},$$

onde $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$. Calcule ρ para X e Y do Exemplo 5.28.
(Observação: $E(XY) - (EX)(EY)$ é a *covariância* de X e Y.)

8. [P3] No Exemplo 5.27, a resposta mudaria se o intervalo $(0, 100)$ fosse usado no lugar de $(0, 1)$? Explique.

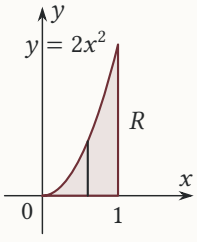


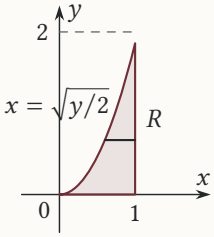
(a) Seção vertical: $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

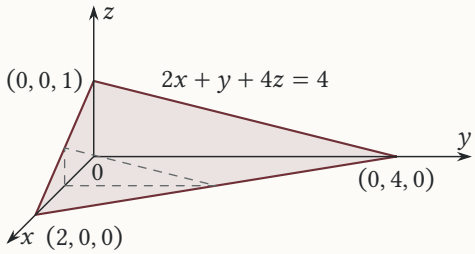


(b) Seção horizontal: $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

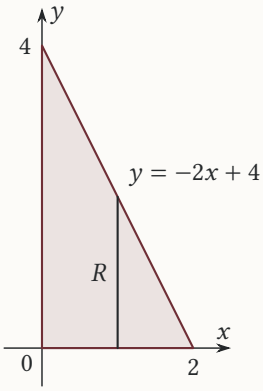
Figura 5.2.: Integral dupla sobre uma região não retangular R





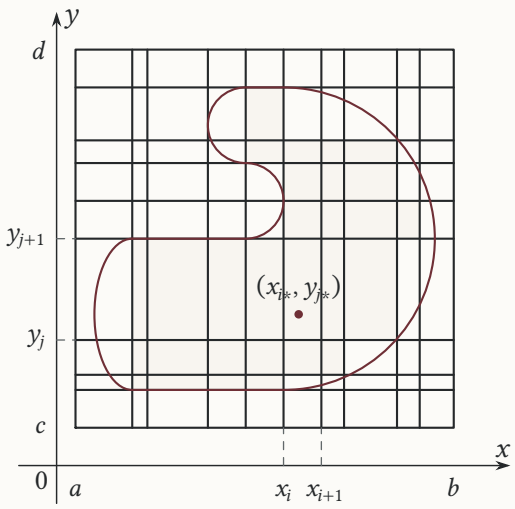


(a)

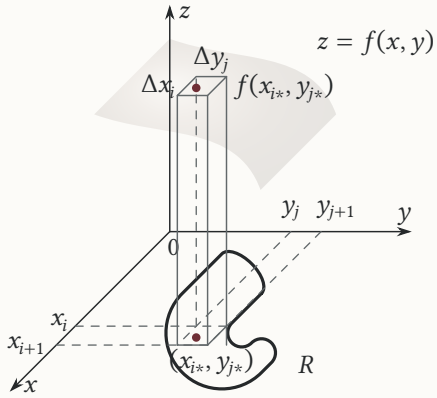


(b)

Figura 5.3.

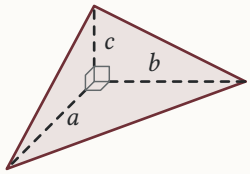


(a) Sub-retângulos no interior da região R



(b) Paralelepípedo sobre um sub-retângulo, com volume $f(x_{i*}, y_{j*})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$

Figura 5.4.: Integral dupla sobre uma região geral R



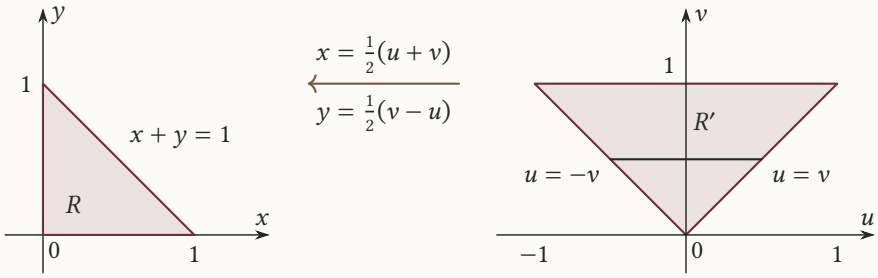
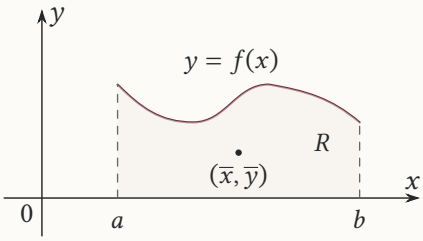
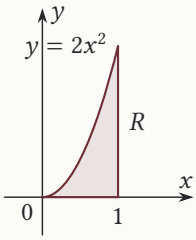
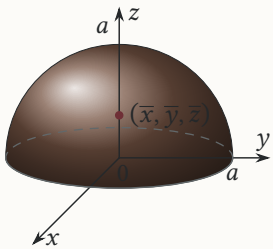
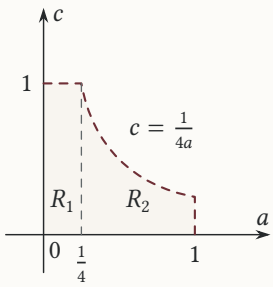


Figura 5.5.: As regiões R e R'









CAPÍTULO

6

Integrais de Linha

6.1. Integrais de Linha de Campos Vetoriais

O produto interno seleciona a componente da força na direção do deslocamento. Ao somar essas contribuições ao longo de uma curva orientada, obtemos trabalho. Será essencial distinguir o vetor de deslocamento, que muda de sinal ao inverter o percurso, do comprimento de arco, que é sempre não negativo.

Começamos com uma motivação. Para isso, recordemos a definição de trabalho:

> **Definição 6.1**
>
> Se uma força constante $\mathbf{f}$, atuando sobre um corpo, produz um deslocamento $\Delta\mathbf{x}$, então o **trabalho** realizado pela força é $\mathbf{f} \cdot \Delta\mathbf{x}$.

Queremos generalizar essa definição para o caso em que a força não é constante. Para isso, seja $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ uma curva, com uma direção de percurso dada, e seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial.

Aqui $\mathbf{f}$ representa a força que atua sobre um corpo e o empurra ao longo da curva γ. O trabalho realizado pela força pode ser aproximado por

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{f}(x_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{f}(x_i) \cdot \Delta\mathbf{x}_i$$

onde $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ são pontos sucessivos de γ, escolhidos na direção do percurso.

O limite quando a maior distância entre vizinhos tende a 0 é o trabalho realizado:

$$W = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{f}(x_i) \cdot \Delta \mathbf{x}_i$$

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 6.2

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização por partes C^1 de uma curva orientada γ, e seja $\mathbf{f} : \gamma \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. A **integral de linha** de $\mathbf{f}$ sobre γ é definida por

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \\ &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) \cdot \Delta \mathbf{x}_i.\end{aligned}$$

se o limite acima existir. Aqui P é induzida por uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$, com $\mathbf{x}_i = \gamma(t_i)$, e $\mathbf{x}_i^*$ é um ponto do arco percorrido entre $\gamma(t_i)$ e $\gamma(t_{i+1})$. A malha é a maior distância entre parâmetros consecutivos:

$$\|P\| = \max_{0\le i<N} (t_{i+1} - t_i).$$

Observação 6.1

Se $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, onde $f_i : \gamma \to \mathbb{R}$ são funções, costuma-se escrever a integral de linha, na notação de **forma diferencial**, como

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_\gamma f_1 \ \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \ \mathrm{d}x_n$$

O resultado seguinte fornece uma maneira explícita de calcular integrais de linha usando uma parametrização da curva.

Teorema 6.2

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização por partes C^1 de γ (na direção do percurso), então

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_a^b \mathbf{f} \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t \tag{6.1}$$

Demonstração. Em cada trecho C^1, escrevemos $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)\ \mathrm{d}t$. Como $\mathbf{f} \circ \gamma$ e γ' são contínuas nesse trecho, a soma $\sum_i \mathbf{f}(\gamma(\tau_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$, com $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, converge, quando a malha tende a zero, para

$$\int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Somamos os limites dos trechos da parametrização. ∎

Na notação de formas diferenciais (quando $n = 2$), escrevemos

$$\mathbf{f} = (f, g) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

onde $f, g : \gamma \to \mathbb{R}$ são funções. Então o Teorema 6.2 afirma que

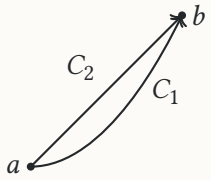
$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_\gamma f\ \mathrm{d}x + g\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left[f(x(t), y(t))\, x'(t) + g(x(t), y(t))\, y'(t) \right]\ \mathrm{d}t$$

Observação 6.3

A fórmula (6.1) também pode ser usada como definição da integral de linha. A invariância por reparametrização, demonstrada a seguir, garante que o valor não depende da escolha de parâmetro, desde que a orientação seja preservada.

Exemplo 6.1

Considere $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xe^y, z^2, xy)$ e calculemos a integral de linha de $\mathbf{a} = (0,0,0)$ a $\mathbf{b} = (1,1,1)$.



Primeiro integramos ao longo da curva $C_1 : \mathbf{r}(u) = (u, u^2, u^3)$. Então $\mathbf{r}'(u) = (1, 2u, 3u^2)$ e $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) = (ue^{u^2}, u^6, u^3)$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(u)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 ue^{u^2} + 2u^7 + 3u^5\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e}{2} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Agora tentamos integrar ao longo de outra curva $C_2 : \mathbf{r}(t) = (t, t, t)$. Assim, $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell &= \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 te^t + 2t^2\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Vemos que, em geral, a integral de linha depende da curva C, e não apenas de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Exemplo 6.2

Suponha que um corpo de massa M esteja na origem. A força experimentada por um corpo de massa m no ponto $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ é dada por $\mathbf{f}(x) = \dfrac{-GMm\,x}{|x|^3}$, onde G é a **constante gravitacional**. Calcule o trabalho realizado quando o corpo é deslocado de a a b ao longo de uma reta.

Solução. Seja γ a reta que une a e b. Claramente, $\gamma : [0,1] \to \gamma$, definida por $\gamma(t) = a + t(b-a)$, é uma parametrização de γ. Então

$$W = \int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = -GMm \int_0^1 \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3} \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{GMm}{|b|} - \frac{GMm}{|a|}. \qquad \blacksquare$$

◁

Observação 6.4

Se o segmento que liga a a b passa pela origem, o campo não está definido ao longo de todo o caminho; nesse caso, a integral acima não se aplica sem tratar a singularidade. Veremos mais adiante que a gravidade é uma **força conservativa**, e que a integral de linha acima depende apenas dos extremos, e não do caminho percorrido.

Exemplo 6.3 — Trabalho em uma volta de um atuador

Em unidades normalizadas, um atuador exerce $F(x,y) = (-ky, kx)$, com $k > 0$. Determine o trabalho ao percorrer uma circunferência de raio $R > 0$ no sentido anti-horário e no sentido oposto.

Solução. Parametrize $\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Então $F(\gamma(t)) = k\gamma'(t)$ e

$$W = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} kR^2\ \mathrm{d}t = 2\pi kR^2.$$

Ao inverter o percurso, o trabalho é $-2\pi kR^2$. O campo atua tangencialmente e favorece um dos sentidos. A integral fechada não nula mostra que ele não é conservativo. ◁

Exercícios

Exercício N058 **Aplicação; básico**

Calcule o trabalho de $F = (y, x)$ no segmento de $(0, 0)$ a $(1, 2)$, usando uma parametrização explícita.

Exercício N059 **Aplicação; médio**

Para $F = (-y, x)$, compare o trabalho de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ pelo segmento e pelo caminho que passa por $(1, 0)$.

Exercício N060 **Aplicação; médio**

Uma força gravitacional $F = -\mu r/\|r\|^3$ atua fora da origem. Calcule seu trabalho em um segmento radial que liga distâncias a e b, ambas positivas.

6.2. Invariância de Parametrização e Outras Propriedades das Integrais de Linha

A integral deve depender do percurso orientado e de sua multiplicidade. Uma reparametrização que preserva o sentido altera a velocidade usada na descrição, mas a substituição na integral compensa essa alteração. Inverter o sentido muda o sinal; percorrer a curva duas vezes duplica o resultado.

Como as integrais de linha podem ser definidas em termos de integrais usuais, elas compartilham muitas de suas propriedades.

Definição 6.3

A curva γ é dita união de duas curvas γ_1 e γ_2 se γ é definida em um intervalo $[a, b]$, e as curvas γ_1 e γ_2 são as restrições $\gamma|_{[a,d]}$ e $\gamma|_{[d,b]}$.

Proposição 6.5

- propriedade de linearidade em relação ao integrando,

$$\int_\gamma (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{G}) \cdot \mathrm{d}\ell = \alpha \int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell + \beta \int_\gamma \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\ell$$

- propriedade aditiva em relação ao caminho de integração: onde a união das duas curvas γ_1 e γ_2 é a curva γ.

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell$$

As demonstrações dessas propriedades seguem imediatamente da definição da integral de linha.

Definição 6.4

Seja $h : I \to I_1$ uma função C^1 bijetiva, com $I = [a, b]$ e $I_1 = [a_1, b_1]$, e seja $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ um caminho por partes C^1. A composição

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ h : I \to \mathbb{R}^n$$

é chamada uma **reparametrização** de γ_1.

Está implícito na definição que h deve levar extremidades a extremidades; isto é, ou $h(a) = a_1$ e $h(b) = b_1$, ou $h(a) = b_1$ e $h(b) = a_1$. Distinguimos esses dois tipos de reparametrizações.

- No primeiro caso, a reparametrização é dita **preservadora de orientação**, e uma partícula que percorre o caminho $\gamma_1 \circ h$ move-se na mesma direção que uma partícula que percorre γ_1.
- No segundo caso, a reparametrização é descrita como **inversora de orientação**, e uma partícula que percorre o caminho $\gamma_1 \circ h$ move-se na direção oposta à de uma partícula que percorre γ_1.

Proposição 6.6 — Invariância por reparametrização

Se $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$, onde $h : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ é uma bijeção crescente de classe C^1, então as duas parametrizações percorrem o caminho na mesma direção e

$$\int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f} \circ \gamma_1(t) \cdot \gamma_1'(t) \ \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f} \circ \gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) \ \mathrm{d}t.$$

Demonstração. Pela regra da cadeia,

$$\gamma_2'(t) = \gamma_1'(h(t))h'(t).$$

Logo,

$$\int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f}(\gamma_1(h(t))) \cdot \gamma_1'(h(t))h'(t)\, \mathrm{d}t.$$

A mudança de variável $s = h(t)$ transforma a última integral na integral sobre $[a_1, b_1]$. ∎

Exercícios

Exercício N061 **Consolidação; básico**

Calcule $\int_C (x, y) \cdot \mathrm{d}r$ no segmento de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ com $\gamma(t) = (t, t)$, $0 \le t \le 1$, e com $\eta(s) = (2s, 2s)$, $0 \le s \le 1/2$.

Exercício N062 **Consolidação; básico**

Compare a integral de $F = (-y, x)$ no círculo unitário percorrido uma vez, duas vezes e uma vez no sentido horário.

Exercício N063 **Justificação; médio**

Demonstre a regra de mudança de sinal para uma reparametrização estritamente decrescente, explicando a troca dos extremos.

6.3. Integral de Linha de Campos Escalares

Para acumular a massa de um fio ou uma quantidade distribuída sobre uma curva, usamos uma densidade escalar multiplicada pelo comprimento de arco. Surge o fator $\|\gamma'(t)\|$, sem sinal de orientação. A geometria é a mesma do trabalho, mas a quantidade acumulada e seu elemento de integração são diferentes.

Definição 6.5

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é uma parametrização por partes C^1 de γ, então

$$\operatorname{length}(\gamma) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

onde P é induzida por uma partição $a = t_0 < \cdots < t_N = b$, com $x_i = \gamma(t_i)$, e $\|P\| = \max_i(t_{i+1} - t_i)$.

Mais geralmente:

Definição 6.6

Se $f : \gamma \to \mathbb{R}$ é uma função escalar contínua, definimos[a]

$$\int_\gamma f \, |d\ell| \triangleq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*) \, |x_{i+1} - x_i| \,,$$

[a] Infelizmente, $\int_\gamma f \, |\mathrm{d}\ell|$ também é chamada integral de linha. Para evitar confusão, chamaremos esta de **integral de linha em relação ao comprimento de arco**.

A integral $\int_\gamma f \, |\mathrm{d}\ell|$ também é denotada por

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_\gamma f \, |\mathrm{d}\ell|$$

Teorema 6.7

Seja $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ uma curva por partes C^1, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização por partes C^1 (na direção de percurso dada), e $f : \gamma \to \mathbb{R}$ uma função escalar contínua. Então

$$\int_\gamma f \, |\mathrm{d}\ell| = \int_a^b f(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t,$$

e, consequentemente,

$$\text{length}(\gamma) = \int_\gamma 1 \, |\mathrm{d}\ell| = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Exemplo 6.4

Calcule a circunferência de um círculo de raio r.

Exemplo 6.5

O traço de

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\, t + \mathbf{k}t$$

é conhecido como uma *hélice cilíndrica.* Para encontrar o comprimento da hélice quando t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$. Como

$$\mathbf{r}'(t) = -\,\mathrm{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

temos $|\mathrm{d}\ell| = \sqrt{2}\ \mathrm{d}t$ e, portanto, o comprimento é

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}.$$

6.3.1. Área acima de uma Curva

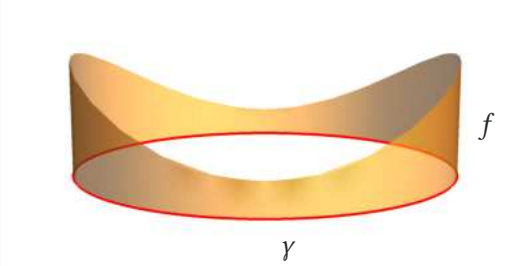
Se γ é uma curva no plano xy e $f(x, y)$ é uma função contínua não negativa definida na curva γ, então a integral

$$\int_\gamma f(x, y)\,|\mathrm{d}\ell|$$

pode ser interpretada como a área A da cortina obtida pela união de todos os segmentos verticais que se estendem para cima do ponto (x, y) até a altura $f(x, y)$, isto é, a área limitada pela curva γ e pelo gráfico de f.

Esse fato decorre da aproximação por retângulos:

$$\text{área} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, y_i^*)\,|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|\,.$$



Exemplo 6.6

Use uma integral de linha para mostrar que a área lateral A de um cilindro circular reto de raio r e altura h é $2\pi rh$.

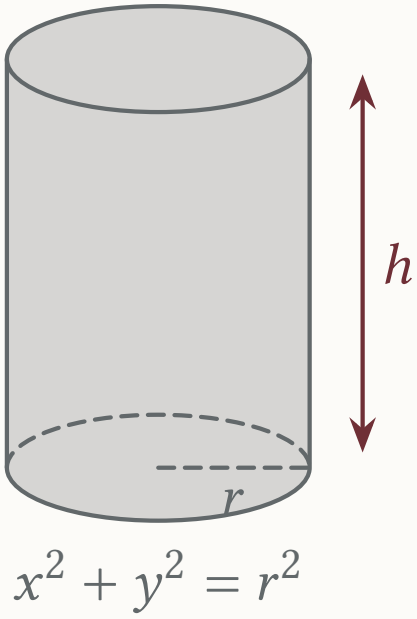


Figura 6.1.: Cilindro circular reto de raio r e altura h

Solução. Usaremos o cilindro circular reto com base circular C dada por $x^2 + y^2 = r^2$ e altura h na direção positiva de z (veja a Figura 4.1.3). Parametrizemos C da seguinte forma:

$$x = x(t) = r\cos t\,, \quad y = y(t) = r\,\mathrm{sen}\,t\,, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

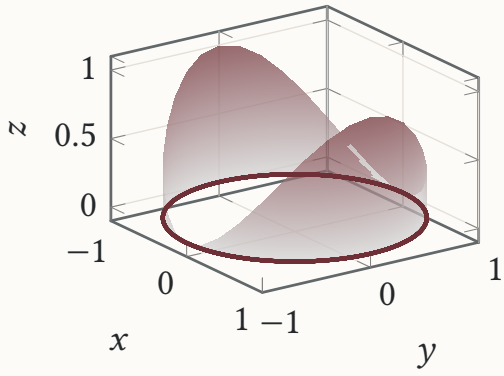
Seja $f(x,y) = h$ para todo (x,y). Então

$$\begin{aligned} A &= \int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} h\sqrt{(-r\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt \\ &= h\int_0^{2\pi} r\sqrt{\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t}\,dt \\ &= rh\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi rh \end{aligned}$$

◁

Exemplo 6.7

Calcule a área da superfície que se estende para cima do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy até o cilindro parabólico $z = 1 - y^2$.



Solução. O círculo C dado por $x^2 + y^2 = 1$ pode ser parametrizado da seguinte forma:

$$x = x(t) = \cos t\,, \quad y = y(t) = \mathrm{sen}\,t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Seja $f(x,y) = 1 - y^2$ para todo (x,y). Ao longo do círculo, temos $f(x(t),y(t)) =$

$1 - \operatorname{sen}^2 t$. Então

$$\begin{aligned} A &= \int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\operatorname{sen}^2 t)\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - \operatorname{sen}^2 t\,dt = \pi \end{aligned}$$

◁

Exercícios

Exercício N064 **Aplicação; médio**

Um fio é a hélice $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$, e tem densidade linear $\lambda = 1 + t$. Determine sua massa em unidades normalizadas.

Exercício N065 **Consolidação; básico**

Calcule $\int_C (x^2 + y^2)\,ds$ no círculo de raio $a > 0$ e explique por que a orientação não afeta o resultado.

Exercício N066 **Aplicação; médio**

Calcule o comprimento de $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$, e use densidade constante λ_0 para obter a massa do fio.

6.4. O Primeiro Teorema Fundamental

Quando o campo é um gradiente, a regra da cadeia transforma sua integral ao longo da curva na variação de uma função escalar. O cálculo passa a depender apenas dos extremos. A existência de um potencial, porém, deve ser verificada em todo o domínio do caminho.

Definição 6.7

Suponha que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ seja um domínio. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é um **campo gradiente** em U se existe uma função C^1 $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi.$$

A função φ é chamada potencial do campo vetorial $\mathbf{F}$.

Definição 6.8

Suponha que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ seja um domínio. Um campo vetorial contínuo $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ é **independente do caminho** se sua integral sobre uma curva por partes C^1 depende apenas dos extremos, para toda curva desse tipo em U.

Teorema 6.8 — Primeiro teorema fundamental das integrais de linha

Suponha que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ seja um domínio, que $\varphi : U \to \mathbb{R}$ seja C^1 e que γ seja uma curva por partes C^1 que começa em a, termina em b e está inteiramente contida em U. Então

$$\int_\gamma \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\ell = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Demonstração. Seja $\gamma : [0,1] \to \gamma$ uma parametrização por partes C^1 de γ. Observe que

$$\int_\gamma \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\ell = \int_0^1 \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\gamma(t))\ \mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a).$$

■

O teorema acima pode ser reformulado assim: um campo vetorial gradiente é um campo vetorial independente do caminho.

Se γ é uma curva fechada, então as integrais de linha sobre γ são denotadas por

$$\oint_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Corolário 6.9

Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é C^1 e $\gamma \subset U$ é uma curva fechada por partes C^1, então

$$\oint_\gamma \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\ell = 0.$$

Definição 6.9

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Dizemos que $\mathbf{f}$ é uma **força conservativa** (ou **campo vetorial conservativo**) se

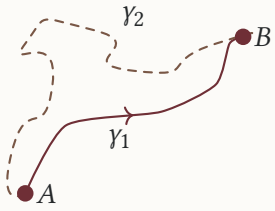
$$\oint_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = 0,$$

para toda curva fechada γ completamente contida em U.

Pelo primeiro teorema fundamental, todo campo gradiente é conservativo. Reciprocamente, em um domínio conexo por caminhos, a condição de integral nula sobre toda curva fechada implica independência do caminho e, pelo segundo teorema fundamental abaixo, a existência de um potencial. A simples conexidade será necessária mais adiante para o critério baseado no rotacional. Para um campo vetorial conservativo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell &= \int_\gamma \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\ell \\ &= [\phi]_a^b \\ &= \phi(b) - \phi(a)\end{aligned}$$

Observamos que o resultado é *independente do caminho* γ que une a a b.



Exemplo 6.8

Se φ não for C^1 sequer em um ponto, o resultado acima pode falhar de modo bastante grave. Seja $\varphi(x, y) = \operatorname{Arg}(x + iy)$, definida no domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ com valores em $(-\pi, \pi)$. No domínio de φ, seu gradiente é

$$\nabla\varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

A expressão à direita estende o gradiente a um campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x).$$

Esse campo está definido em toda a circunferência unitária $\gamma = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$. Entretanto, é fácil calcular

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell = 2\pi \neq 0.$$

Isso não contradiz o corolário anterior: a própria φ não está definida em todo γ, embora seu gradiente admita a extensão vetorial acima. Esse exemplo conduz ao chamado **número de enrolamento**, ao qual retornaremos mais adiante.

Exercícios

Exercício N067 **Consolidação; básico**

Para $\phi = x^2 y + z^2$, calcule $\int_C \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{r}$ em qualquer caminho de $(0,1,0)$ a $(2,3,1)$.

Exercício N068 **Aplicação; médio**

Uma força tem energia potencial $V = mgz + k(x^2+y^2)/2$. Determine a força e seu trabalho entre dois pontos dados.

Exercício N069 **Justificação; básico**

Mostre que a integral de um gradiente sobre uma curva fechada é zero, mesmo que a curva tenha autointerseções.

6.5. Teste para um Campo Gradiente

A igualdade das derivadas mistas fornece um teste local necessário. Para concluir a existência de um potencial global, a topologia do domínio também importa. Campos em regiões com buracos podem passar no teste diferencial e ainda ter circulação não nula.

Se $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ e φ é de classe C^2, a igualdade das derivadas parciais mistas implica

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Se alguma dessas igualdades falha, o campo não pode ser gradiente.

Isso nos dá uma maneira simples de determinar que um campo vetorial *não* é um campo gradiente.

Exemplo 6.9

O campo vetorial $\mathbf{F} = (-y, x, -yx)$ não é gradiente, pois $\partial_y F_1 = -1$ não é igual a $\partial_x F_2 = 1$.

Se U é um domínio simplesmente conexo e $\mathbf{F} \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, o critério também funciona no sentido inverso. Se $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ satisfaz

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \text{ para todo } i, j$$

então $\mathbf{F}$ é um campo gradiente (isto é, existe uma função potencial f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$). Isso nos dá uma maneira muito útil de verificar se um campo vetorial é um campo gradiente.

Exemplo 6.10

O campo vetorial $\mathbf{F} = (x, z, y)$ é um campo gradiente porque $\mathbf{F}$ está definido em todo $\mathbb{R}^3$, cada componente possui derivadas parciais contínuas, e $M_y = 0 = N_x$, $M_z = 0 = P_x$, e $N_z = 1 = P_y$. Observe que $f = x^2/2 + yz$ fornece $\nabla f = \langle x, z, y \rangle = \mathbf{F}$.

6.5.1. Campos vetoriais irrotacionais

Nesta seção restringimos nossa atenção ao espaço tridimensional.

Definição 6.10

Seja $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial C^1 definido no conjunto aberto U. Então o campo vetorial $\mathbf{f}$ é chamado **irrotacional** se, e somente se, seu rotacional é $\mathbf{0}$ em todo U, isto é, se

$$\nabla \times \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}.$$

Para todo campo escalar C^2 φ em U, temos

$$\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \mathbf{0}.$$

Portanto todo campo vetorial gradiente C^1 em U também é um campo vetorial irrotacional em U.

Desde que U seja simplesmente conexo, a recíproca também é verdadeira:

Teorema 6.10

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um domínio simplesmente conexo e seja f um campo vetorial C^1 em U. Então são equivalentes:

- f é um campo vetorial irrotacional;
- f é um campo vetorial gradiente em U;
- f é um campo vetorial conservativo em U.

A demonstração deste teorema é apresentada na Seção 7.7.1.

A afirmação acima *não* é verdadeira em geral se U não for simplesmente conexo, como já vimos no exemplo 6.8.

6.5.2. Trabalho e energia potencial

Definição 6.11 — Trabalho e energia potencial

Se $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é uma força, então $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\ell$ é o *trabalho realizado* pela força ao longo da curva C. É o limite de uma soma de termos $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r}$, isto é, da força na direção de $\delta\mathbf{r}$.

Considere uma partícula pontual movendo-se sob $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ de acordo com a segunda lei de Newton: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}$.

Como a energia cinética é definida por

$$T(t) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{r}}\|^2,$$

a taxa de variação da energia é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t) = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Suponha que o caminho da partícula seja uma curva C de $\mathbf{a} = \mathbf{r}(\alpha)$ a $\mathbf{b} = \mathbf{r}(\beta)$. Então

$$T(\beta) - T(\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{r}}\ \mathrm{d}t = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}.$$

Logo, o trabalho realizado sobre a partícula é a variação da energia cinética.

Definição 6.12 — Energia potencial

Dada uma força conservativa $\mathbf{F} = -\nabla V$, $V(\mathbf{x})$ é a *energia potencial.* Então

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = V(\mathbf{a}) - V(\mathbf{b}).$$

Portanto, para uma força conservativa, temos $\mathbf{F} = -\nabla V$, onde $V(\mathbf{r})$ é a energia potencial.

Assim, o trabalho realizado (ganho de energia cinética) é a perda de energia potencial. Logo, a energia total $T + V$ é conservada, isto é, constante durante o movimento.

Nesse contexto, a existência de uma energia potencial V está diretamente ligada ao caráter conservativo da força.

Exercícios

Exercício N070 **Consolidação; médio**

Examine se $F = (2xy, x^2 + 2y)$ é conservativo em $\mathbb{R}^2$ e encontre um potencial.

Exercício N071 **Justificação; médio**

Para $F = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$, calcule o rotacional fora da origem e a circulação no círculo unitário. Explique a diferença entre a conclusão local e a global.

Exercício N072 **Consolidação; médio**

Determine quais valores de a, b tornam $F = (ayz, bxz, xy)$ um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$.

6.6. O Segundo Teorema Fundamental

A recíproca constrói o potencial a partir da própria integral de linha. Fixamos um ponto de referência e acumulamos o campo até cada ponto do domínio. A independência do caminho torna essa definição inequívoca; a continuidade do campo permitirá provar a diferenciabilidade do potencial.

O teorema do gradiente afirma que, se o campo vetorial $\mathbf{f}$ é o gradiente de alguma função escalar, então $\mathbf{f}$ é um campo vetorial independente do caminho. Este teorema possui uma recíproca poderosa:

Teorema 6.11

Suponha que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ seja um domínio e que $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ seja contínuo. Se $\mathbf{F}$ é independente do caminho em U, então $\mathbf{F}$ é o gradiente de alguma função escalar.

É direto mostrar que um campo vetorial é independente do caminho se, e somente se, a integral do campo vetorial sobre todo laço fechado em seu domínio é zero. Assim, a recíproca pode ser enunciada alternativamente da seguinte forma: se a integral de $\mathbf{f}$ sobre todo laço fechado no domínio de $\mathbf{f}$ é zero, então $\mathbf{f}$ é o gradiente de alguma função escalar.

Demonstração. Fixe $a \in U$. Como um domínio aberto e conexo por caminhos admite caminhos poligonais, defina

$$\phi(x) = \int_a^x F \cdot \mathrm{d}\ell,$$

usando qualquer caminho C^1 por partes em U. A independência do caminho garante que ϕ está bem definida. Fixe x e tome h pequeno o bastante para que o segmento $x + th$, $0 \le t \le 1$, permaneça em U. Pela aditividade,

$$\phi(x+h) - \phi(x) = \int_0^1 F(x+th) \cdot h \; \mathrm{d}t.$$

Subtraindo $F(x) \cdot h$ e aplicando Cauchy–Schwarz,

$$\frac{|\phi(x+h) - \phi(x) - F(x)\cdot h|}{\|h\|} \le \sup_{0\le t\le 1} \|F(x+th) - F(x)\| \longrightarrow 0.$$

A última convergência decorre da continuidade de F em x: todos os pontos do segmento ficam a distância no máximo $\|h\|$ de x. Portanto, ϕ é diferenciável e

$\mathrm{D}_x\phi(h) = F(x)\cdot h$, isto é, $\nabla\phi = F$. Como F é contínuo, ϕ é de classe C^1. O argumento controla todos os deslocamentos, e não apenas as direções tomadas separadamente. ∎

Exercícios

Exercício N073 **Consolidação; básico**

Partindo da independência do caminho, defina um potencial de $F = (2x, 2y)$ com referência em $(1, 0)$ e determine a constante correspondente.

Exercício N074 **Justificação; médio**

Mostre que dois potenciais de um mesmo campo diferem por uma constante em cada componente conexa do domínio.

Exercício N075 **Justificação; médio**

Deduza a equivalência entre independência do caminho e integral nula em todo caminho fechado, usando a concatenação de caminhos.

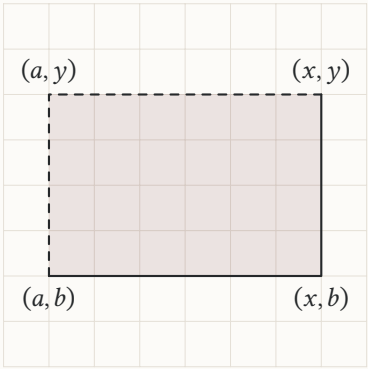
6.7. Construção de Funções Potenciais

Para calcular um potencial, integramos uma componente e recuperamos as funções das outras variáveis usando as componentes restantes. Essas funções de integração são indispensáveis. Ao final, conferir todas as derivadas parciais é uma verificação simples que detecta termos omitidos.

Se $\mathbf{f}$ é um campo conservativo em um conjunto aberto conexo U, a integral de linha de $\mathbf{f}$ é independente do caminho em U. Portanto, podemos encontrar um potencial simplesmente integrando $\mathbf{f}$ de um ponto fixo $\mathbf{a}$ até um ponto arbitrário $\mathbf{x}$ em U, usando qualquer caminho suave por partes contido em U. O campo escalar assim obtido depende da escolha do ponto inicial a. Se começarmos de outro ponto inicial, digamos b, obteremos um novo potencial. Mas, pela propriedade aditiva das integrais de linha, eles podem diferir apenas por uma constante, que é a integral de $\mathbf{f}$ de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

Construção de um potencial em um retângulo aberto. Se $\mathbf{f}$ é um campo vetorial conservativo em um retângulo aberto de $\mathbb{R}^n$, um potencial f pode ser construído integrando de um ponto fixo até um ponto arbitrário ao longo de um conjunto de segmentos paralelos aos eixos coordenados.

Simplificaremos a dedução, supondo que $n = 2$. Nesse caso, podemos integrar



primeiro de (a, b) a (x, b) ao longo de um segmento horizontal e depois de (x, b) a (x, y) ao longo de um segmento vertical. No segmento horizontal usamos a representação paramétrica

$$\gamma_1(t) = t\mathbf{i} + b\mathbf{j}, \qquad a \le t \le x,$$

e no segmento vertical usamos a parametrização

$$\gamma_2(t) = x\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \qquad b \le t \le y.$$

Se $F(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$, a fórmula resultante para um potencial $f(x, y)$ é

$$f(x, y) = \int_a^x F_1(t, b)\ \mathrm{d}t + \int_b^y F_2(x, t)\ \mathrm{d}t.$$

Também poderíamos integrar primeiro de (a, b) a (a, y) ao longo de um segmento vertical e depois de (a, y) a (x, y) ao longo de um segmento horizontal, como indicado pelas linhas pontilhadas da figura. Isso fornece outra fórmula para $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \int_b^y F_2(a, t)\ \mathrm{d}t + \int_a^x F_1(t, y)\ \mathrm{d}t.$$

As duas fórmulas fornecem o mesmo valor para $f(x, y)$ porque a integral de linha de um gradiente é independente do caminho.

Construção de um potencial usando antiderivadas Há outra maneira de encontrar um potencial: integramos uma das componentes e determinamos a função residual pelas demais. Por exemplo, de $\partial_x V = F_1$ obtemos

$$V(x, y) = \int_a^x F_1(u, y)\ \mathrm{d}u + G(y).$$

Derivando essa expressão em relação a y e impondo $\partial_y V = F_2$, determinamos G.

Exemplo 6.11

Mostre que

$$\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$$

é conservativo em seu domínio natural e encontre uma função potencial para ele.

Solução.

O domínio natural de F é todo o espaço, que é conexo e simplesmente conexo. Definamos:

$$M = e^x \cos y + yz$$
$$N = xz - e^x \operatorname{sen} y$$
$$P = xy + z$$

e calculemos

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y = \frac{\partial M}{\partial z}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Como as derivadas parciais são contínuas, F é conservativo. Agora que sabemos que existe uma função f cujo gradiente é igual a F, vamos encontrá-la.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + z$$

Se integrarmos a primeira das três equações em relação a x, obtemos

$$f(x, y, z) = \int (e^x \cos y + yz)dx = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

onde $g(y, z)$ é uma constante dependente das variáveis y e z. Calculamos então a derivada parcial em relação a y dessa equação e a igualamos à equação acima.

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y,z)) = -e^x \operatorname{sen} y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y$$

Isso significa que a derivada parcial de g em relação a y é zero, eliminando completamente y de g e deixando-a como função apenas de z.

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

Repetimos então o processo com a derivada parcial em relação a z.

$$\frac{\partial}{\partial z}(f(x,y,z)) = xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = xy + z$$

o que significa que

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = z$$

portanto podemos encontrar $h(z)$ por integração:

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

Portanto,

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

Ainda temos infinitas funções potenciais para F, uma para cada valor de C. ◁

Exercícios

Exercício N076 Consolidação; médio

Encontre um potencial de $F = (2xy + e^x, x^2 + 2yz, y^2)$ e confira todas as componentes.

Exercício N077 Consolidação; médio

Para $F = (yz, xz, xy)$, construa um potencial por segmentos paralelos aos eixos, partindo da origem.

Exercício N078 **Justificação; médio**

Ao integrar $F_1 = 2xy$ em x, um aluno obtém apenas $x^2y + C$. Explique por que deve escrever $x^2y + g(y,z)$ e termine a construção para $F = (2xy, x^2 + z, z + y)$.

6.8. Teorema de Green no Plano

O Teorema de Green relaciona uma circulação na fronteira a uma soma de rotacionais no interior. O cancelamento das bordas internas explica essa relação e também a orientação dos buracos: a região deve ficar à esquerda em cada componente da fronteira.

Definição 6.13

A **curva orientada positivamente** é uma curva plana simples e fechada tal que, ao percorrê-la, seu interior fica sempre à esquerda. Se, na definição anterior, trocarmos esquerda e direita, obteremos uma **curva orientada negativamente**.

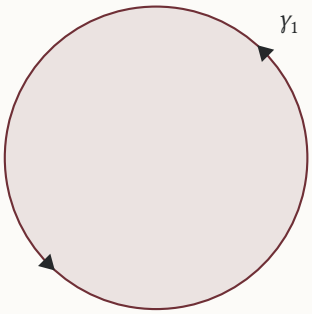
Veremos agora uma maneira de calcular a integral de linha de um campo vetorial *suave* ao redor de uma curva simples fechada. Um campo vetorial $\mathbf{f}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$ é **suave** se suas funções componentes $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são suaves. Usaremos o *Teorema de Green* (às vezes chamado *Teorema de Green no plano*) para relacionar a integral *de linha* ao redor de uma curva fechada com uma integral *dupla* sobre a região interior à curva:

Teorema 6.12 — Teorema de Green — Regiões simples

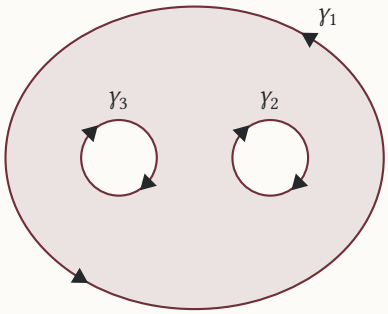
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada cuja fronteira é uma curva simples, fechada e por partes C^1, orientada positivamente. Seja $\mathbf{f}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$ um campo vetorial de classe C^1 em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$. Então

$$\oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell \;=\; \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA\,, \tag{6.2}$$

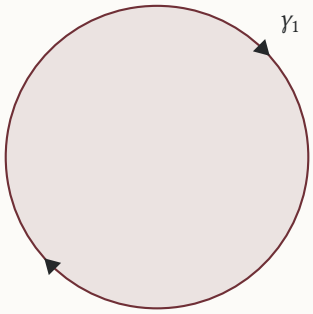
onde γ é percorrida de modo que Ω esteja sempre do lado esquerdo de γ.



(a) curva orientada positivamente



(b) fronteira orientada positivamente de uma região com buracos



(c) curva orientada negativamente

Figura 6.2.: Orientações de curvas

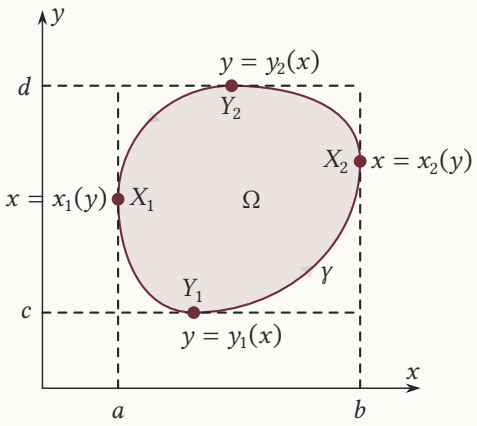
Demonstração. Demonstraremos o teorema primeiro para uma região que seja simultaneamente simples nas direções horizontal e vertical, isto é, quando a curva fronteira γ pode ser escrita como $C = \gamma_1 \cup \gamma_2$ de duas maneiras:

$$\gamma_1 = \text{a curva } y = y_1(x) \text{ do ponto } X_1 \text{ ao ponto } X_2 \tag{6.3}$$
$$\gamma_2 = \text{a curva } y = y_2(x) \text{ do ponto } X_2 \text{ ao ponto } X_1, \tag{6.4}$$

onde X_1 e X_2 são, respectivamente, os pontos de C mais à esquerda e mais à direita; e

$$\gamma_1 = \text{a curva } x = x_1(y) \text{ do ponto } Y_2 \text{ ao ponto } Y_1 \tag{6.5}$$
$$\gamma_2 = \text{a curva } x = x_2(y) \text{ do ponto } Y_1 \text{ ao ponto } Y_2, \tag{6.6}$$

onde Y_1 e Y_2 são, respectivamente, os pontos mais baixo e mais alto de γ. Veja a figura.



Integre $P(x, y)$ ao redor de γ usando a representação $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Como $y = y_1(x)$ ao longo de γ_1 (quando x vai de a a b) e $y = y_2(x)$ ao longo de γ_2 (quando x vai de b a a), como vemos na figura, temos

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma P(x,y)\,dx &= \int_{\gamma_1} P(x,y)\,dx + \int_{\gamma_2} P(x,y)\,dx \\
&= \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, y_2(x))\,dx \\
&= \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, y_2(x))\,dx \\
&= -\int_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right)\,dx \\
&= -\int_a^b \left(P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\right)\,dx \\
&= -\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx \quad \text{(TFC)} \\
&= -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dA\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, integre $Q(x, y)$ ao redor de γ usando a representação $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Como $x = x_1(y)$ ao longo de γ_1 (quando y vai de d a c) e $x = x_2(y)$ ao longo de γ_2

(quando y vai de c a d), como vemos na figura, temos

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma Q(x,y)\,dy &= \int_{\gamma_1} Q(x,y)\,dy + \int_{\gamma_2} Q(x,y)\,dy \\
&= \int_d^c Q(x_1(y),y)\,dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)\,dy \\
&= -\int_c^d Q(x_1(y),y)\,dy + \int_c^d Q(x_2(y),y)\,dy \\
&= \int_c^d \left(Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)\right)\,dy \\
&= \int_c^d \left(Q(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}\right)\,dy \\
&= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy \quad \text{(TFC)} \\
&= \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA\,, \text{ e portanto}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} &= \oint_\gamma P(x,y)\,dx + \oint_\gamma Q(x,y)\,dy \\
&= -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dA + \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA\,.
\end{aligned}$$

■

Observação 6.13

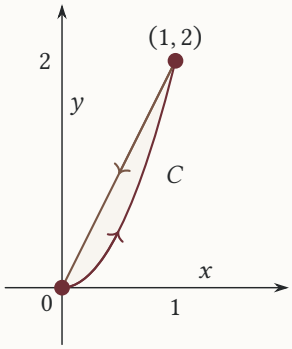
A hipótese de regularidade exige que P e Q tenham derivadas parciais contínuas em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$. Uma singularidade no interior ou na fronteira pode invalidar a aplicação do teorema.

O cálculo acima trata diretamente uma região simples nas direções horizontal e vertical. O caso de uma fronteira simples por partes C^1 geral segue por subdivisão

e aproximação por regiões elementares; as integrais nas fronteiras internas se cancelam.

Exemplo 6.12

Calcule $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\ \mathrm{d}y$, onde C é a fronteira da região percorrida no sentido anti-horário $R = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 2x\}$.



Solução. R é a região sombreada na figura acima. Pelo Teorema de Green, para $P(x, y) = x^2 + y^2$ e $Q(x, y) = 2xy$, temos

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\ \mathrm{d}y &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_\Omega (2y - 2y)\,dA = \iint_\Omega 0\,dA = 0\,.\end{aligned}$$

Há outra maneira de ver que a resposta é zero. O campo vetorial $\mathbf{f}(x, y) = (x^2+y^2)\,\mathbf{i}+2xy\,\mathbf{j}$ possui uma função potencial $F(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$, e portanto $\oint_C \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$. ◁

Exemplo 6.13

Seja $\mathbf{f}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$, onde

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,,$$

e seja $\Omega = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Para a curva fronteira exterior $C : x^2 + y^2 = 1$, percorrida no sentido anti-horário, a parametrização $\gamma(t) =$

$(\cos t, \operatorname{sen} t)$ dá

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\ dt = 2\pi.$$

Mas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_\Omega 0\, dA = 0\,.$$

Isso parece contradizer o Teorema de Green. Entretanto, Ω não é a região inteira delimitada por C: o ponto $(0,0)$ não pertence a Ω, e a singularidade do campo está justamente nesse ponto. Portanto, o Teorema de Green não se aplica.

Exemplo 6.14

Calcule o trabalho realizado pela força

$$\mathbf{f}(x,y) = (\operatorname{sen} x - y^3)\,\mathbf{i} + (e^y + x^3)\,\mathbf{j}$$

para mover uma partícula ao redor do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ no sentido anti-horário.

Solução.

$$W = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\ell \tag{6.7}$$

$$= \oint_C (\operatorname{sen} x - y^3)\,dx + (e^y + x^3)\ dy \tag{6.8}$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y + x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x - y^3)\right] dA \tag{6.9}$$

Teorema de Green

$$\tag{6.10}$$

$$= 3\iint_D (x^2 + y^2)\, dA \tag{6.11}$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\ dr\ d\theta = \frac{3\pi}{2}. \tag{6.12}$$

usando coordenadas polares

(6.13)

◁

O Teorema de Green pode ser generalizado:

Teorema 6.14 — Teorema de Green — Regiões com buracos

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada conexa, regular e com número finito de buracos. Denote por γ a fronteira exterior e por $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ as fronteiras interiores, todas por partes C^1. Escreva $\mathbf{f} = (P, Q)$ e suponha que $\mathbf{f}$ seja de classe C^1 em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$. Então

$$\iint_\Omega \left[\partial_x Q - \partial_y P\right] \, dA = \oint_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell + \sum_{i=1}^{N} \oint_{\gamma_i} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell,$$

onde a fronteira exterior é percorrida no sentido **anti-horário** e cada fronteira interior no sentido **horário**; assim, todas as componentes têm a orientação positiva induzida pela região.

Observação 6.15

Uma convenção comum é denotar a **fronteira** de Ω por $\partial\Omega$ e escrever

$$\partial\Omega = \gamma \cup \left[\bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i\right].$$

Então o Teorema 6.14 torna-se

$$\iint_\Omega \left[\partial_x Q - \partial_y P\right] \, dA = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell,$$

onde novamente a fronteira exterior é orientada no sentido **anti-horário** e as fronteiras interiores são todas orientadas no sentido **horário**.

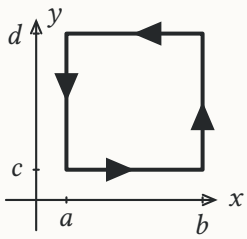
Observação 6.16

Na notação de formas diferenciais, o Teorema de Green é escrito como

$$\iint_\Omega \left[\partial_x Q - \partial_y P\right]\, dA = \int_{\partial\Omega} P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y,$$

onde $P, Q : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções C^1. (Usamos as mesmas hipóteses anteriores sobre o domínio Ω e as orientações das integrais de linha na fronteira.)

Demonstração. A demonstração completa é um pouco trabalhosa. Mas a ideia principal pode ser vista provando-o primeiro quando Ω é um quadrado. De fato, suponha inicialmente que $\Omega = (0,1)^2$.

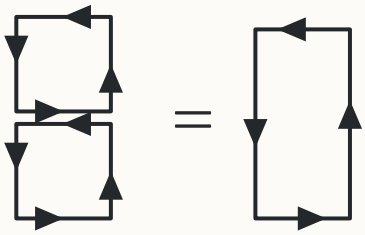


Então o Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$\iint_\Omega \left[\partial_x Q - \partial_y P\right]\, dA = \int_{y=0}^{1} [Q(1,y) - Q(0,y)]\ \mathrm{d}y - \int_{x=0}^{1} [P(x,1) - P(x,0)]\ \mathrm{d}x$$

A primeira integral é a integral de linha de $\mathbf{f}$ nos dois lados verticais do quadrado, e a segunda é a integral de linha de $\mathbf{f}$ nos dois lados horizontais do quadrado. Isso prova o Teorema 6.14 no caso em que Ω é um quadrado.

Para integrais de linha, ao somar dois retângulos com uma aresta comum, as arestas comuns são percorridas em sentidos opostos, de modo que a soma é simplesmente a integral de linha ao longo da fronteira exterior.



Analogamente, ao somar muitos retângulos, tudo se cancela, exceto a fronteira exterior. Isso estende o Teorema de Green em um retângulo ao Teorema de Green

em uma soma de retângulos. Para regiões regulares, essa ideia é formalizada por uma decomposição em sub-regiões simples e por um argumento de aproximação; as contribuições nas fronteiras internas se cancelam duas a duas.

■

Exemplo 6.15

Calcule $\oint_C y^3\,dx - x^3\,dy$, onde γ são os dois círculos de raios 2 e 1 centrados na origem, com orientação positiva.

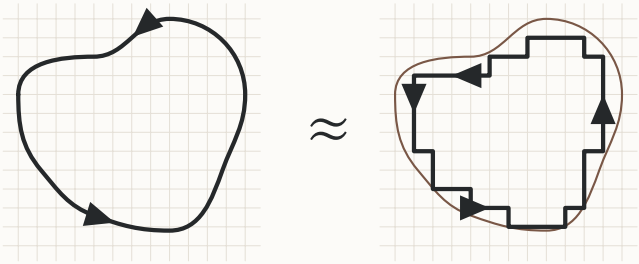
Solução.

$$\oint_\gamma y^3\,dx - x^3\,dy = -3\int\int_D (x^2+y^2)dA \tag{6.14}$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\,dr\,d\theta \tag{6.15}$$

$$= -\frac{45\pi}{2} \tag{6.16}$$

◁



6.8.1. Escolher o método: três cálculos do mesmo trabalho

Exemplo 6.16 — Cálculo direto, potencial e Green

Para $F = (2xy, x^2 + 2y)$, calcule o trabalho de $A = (0,0)$ até $B = (1,1)$ na parábola $C : r(t) = (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$, pelos três métodos. Ao usar Green, explique por que é necessário completar um percurso fechado.

Solução. Cálculo direto. Temos $F(r(t)) = (2t^3, 3t^2)$ e $r' = (1, 2t)$. Logo $W = \int_0^1 8t^3 dt = 2$.

Potencial. O campo é $\nabla\phi$ para $\phi = x^2y + y^2$. Portanto $W = \phi(B) - \phi(A) = 2$. Essa é a escolha mais curta depois de reconhecer o potencial.

Green. Acrescente o segmento L de A até B e percorra C de A até B, retornando por L. A curva fechada tem orientação positiva na região $x^2 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$. Como $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 2x - 2x = 0$, Green dá $\int_C F \cdot dr - \int_L F \cdot dr = 0$. No segmento $r(t) = (t, t)$, o integrando é $3t^2 + 2t$, cuja integral é 2. Logo o trabalho em C também é 2.

Green não foi aplicado diretamente ao caminho aberto. Nesse exemplo, o fechamento permite transferir o cálculo para um caminho mais simples, mas o potencial continua sendo o método mais eficiente. Se a integral fechada tivesse rotacional constante e região de área conhecida, Green poderia ser a primeira escolha. ◁

Exercícios

Exercício N079 Consolidação; básico

Use Green para calcular $\oint_C (-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y)$ quando C é a fronteira positiva de $x^2/4 + y^2 \le 1$.

Exercício N080 Consolidação; médio

Calcule a circulação de $F = (-y, x)$ na fronteira positiva da região $1 \le x^2 + y^2 \le 4$. Confira as orientações das duas componentes.

Exercício N081 Justificação; médio

Explique por que Green não pode ser aplicado diretamente ao campo $(-y/r^2, x/r^2)$ sobre um disco que contém a origem; aplique-o corretamente a uma coroa circular.

Exercícios de ampliação

Exercício A004 Aplicação; médio

Escolha e justifique o método mais eficiente em cada caso: o trabalho de $F = (3x^2, 2y)$ em um caminho de $(0, 0)$ a $(2, 1)$; a circulação positiva de $G = (-y, x)$ na elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Depois confira cada resultado por outro método em um percurso apropriado.

Exercício A005 **Justificação; médio**

Para $F = (-y^2, x^2)$, calcule a circulação no círculo unitário positivo e compare Green com a parametrização direta. O resultado permite concluir que o campo é conservativo em $\mathbb{R}^2$? Justifique.

6.9. Aplicação do Teorema de Green: Área

Escolhendo um campo com rotacional escalar igual a 1, a circulação mede a área. Para curvas orientadas no sentido oposto, a fórmula fornece a área com sinal contrário. Para polígonos, ela se reduz a uma soma calculada diretamente dos vértices.

O Teorema de Green pode ser usado para calcular áreas por meio de integrais de linha. Seja C uma curva plana simples, fechada, suave por partes e orientada positivamente, e seja U a região limitada por C. A área do domínio U é dada por $A = \iint_U dA$.

Então, se escolhermos P e Q tais que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, a área é dada por

$$A = \oint_C (P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y).$$

Algumas fórmulas possíveis para a área de U são:

$$A = \oint_C x\ \mathrm{d}y = -\oint_C y\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_C (-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y).$$

Corolário 6.17

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada regular, com fronteira por partes C^1 orientada positivamente. Então

$$\operatorname{area}\Omega = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} [-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y] = \int_{\partial\Omega} -y\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} x\ \mathrm{d}y$$

Exemplo 6.17

Use o Teorema de Green para calcular a área do disco D de raio r.

Solução. A fronteira de D é o círculo de raio r:

$$C(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Então

$$C'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t, r\cos t),$$

e, pelo Corolário 6.17,

$$\begin{aligned}
\text{área de } D &= \iint dA \\
&= \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(r\cos t)(r\cos t) - (r\,\mathrm{sen}\, t)(-r\,\mathrm{sen}\, t)]dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t)dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi r^2.
\end{aligned}$$

◁

Exemplo 6.18

Use o Teorema de Green para calcular a área da região limitada pelo eixo x e pelo arco da ciclóide:

$$x = t - \mathrm{sen}(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Solução. Pela fórmula $A = \oint_C -y\ \mathrm{d}x$, a contribuição do eixo x é nula. A parametrização do arco, com t crescente, percorre-o no sentido oposto à orientação positiva da fronteira. Portanto,

$$A = -\int_0^{2\pi} -(1-\cos t)^2\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\ \mathrm{d}t = 3\pi.$$

◁

Corolário 6.18 — Fórmula do Agrimensor

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^2$ um polígono simples (não necessariamente convexo) cujos vértices, ordenados no sentido anti-horário, são (x_1, y_1), ..., (x_N, y_N). Então

$$\operatorname{area} P = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_Ny_1 - x_1y_N)}{2}.$$

Demonstração. Considere um polígono simples com vértices (x_i, y_i) em ordem anti-horária e adote $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (x_1, y_1)$. Em cada aresta orientada, use

$$x(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i), \qquad y(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \quad 0 \le t \le 1.$$

Substituindo na forma $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, os termos em t se cancelam:

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i.$$

Somando as integrais sobre as arestas, o Corolário 6.17 fornece

$$\operatorname{area}(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i).$$

Se os vértices forem dados no sentido horário, a soma será negativa; nesse caso, tome seu valor absoluto para obter a área geométrica. ∎

Exercícios

Exercício N082 **Consolidação; básico**

Use a fórmula de Green para obter a área da elipse $\gamma(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t)$, com $a, b > 0$.

Exercício N083 **Consolidação; médio**

Calcule a área do polígono com vértices $(0,0), (3,0), (2,2), (0,1)$ pela soma de determinantes e por uma decomposição geométrica.

Exercício N084 **Justificação; básico**

Calcule a área de uma coroa de raios $a < b$ pela integral de $(x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x)/2$ e explique o sinal da borda interna.

6.10. Formas vetoriais do Teorema de Green

O mesmo Teorema de Green admite duas leituras: circulação associada ao rotacional e fluxo exterior associado à divergência. A diferença está no componente do campo selecionado na fronteira, tangencial no primeiro caso e normal no segundo.

Teorema 6.19 — Teorema de Stokes no Plano

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada com fronteira por partes C^1 orientada positivamente, denote $\gamma = \partial\Omega$ e oriente o elemento de área por $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{k}\ \mathrm{d}A$. Seja $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ de classe C^1 em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$. Então

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \iint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Demonstração.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Na região Ω, podemos escrever $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}A$ e $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{k}\ \mathrm{d}A$. Assim, usando o Teorema de Green:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \iint_{\Omega} \hat{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}\ \mathrm{d}A \\ &= \iint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\end{aligned}$$

■

Teorema 6.20 — Teorema da Divergência no Plano

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região limitada com fronteira por partes C^1 orientada positivamente, e seja $\mathbf{F} = M\mathbf{i} - L\mathbf{j}$ de classe C^1 em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$.

Denote por $\hat{n}$ a normal unitária exterior à fronteira. Então

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}s$$

Demonstração.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}$$

e, aplicando o Teorema de Green ao par $P = -M, Q = L$, obtemos

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint_\gamma F_1 \, \mathrm{d}y - F_2 \, \mathrm{d}x$$

Pode-se mostrar agora que

$$\hat{n} \, \mathrm{d}s = (\mathrm{d}y\mathbf{i} - \mathrm{d}x\mathbf{j})$$

Aqui s é o comprimento de arco ao longo de $\partial\Omega$ e $\hat{n}$ é a normal unitária exterior. Portanto, podemos reescrever o Teorema de Green como

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}A = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}s$$

■

Teorema 6.21 — Identidades de Green no Plano

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira $\gamma = \partial\Omega$ por partes C^1, orientada positivamente, e sejam ϕ, ψ funções C^2 em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$. Então

$$\oint_\gamma \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \iint_\Omega \left(\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

e

$$\oint_\gamma \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) \mathrm{d}s = \iint_\Omega \left(\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Demonstração. Aplique o teorema da divergência no plano ao campo $\mathbf{F} = \phi\nabla\psi$. Como

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$$

e $\mathbf{F}\cdot\hat{n} = \phi\,\partial_n\psi$, obtemos a primeira identidade. Trocando ϕ e ψ e subtraindo as duas fórmulas, obtemos a segunda. ∎

Exercícios

Exercício N085 Aplicação; médio

Para $F = (x, y)$, calcule o fluxo exterior na fronteira do disco de raio a usando a divergência no plano e depois uma parametrização.

Exercício N086 Justificação; médio

Para $F = (-y, x)$, compare o fluxo exterior e a circulação no mesmo círculo. Relacione cada resultado ao operador correto.

Exercício N087 Justificação; médio

Aplique a primeira identidade de Green a u harmônica com valor zero na fronteira de uma região limitada e conexa. Mostre, sob as hipóteses de regularidade da identidade, que $u = 0$.

CAPÍTULO

7

Integrais de Superfície

Neste capítulo restringimos nosso estudo ao caso de superfícies no espaço tridimensional. Resultados semelhantes para variedades no espaço n-dimensional são apresentados no capítulo 13.

7.1. O Produto Vetorial Fundamental

Passamos das curvas às superfícies. Dois vetores tangentes descrevem as variações locais, e seu produto vetorial determina tanto uma direção normal quanto a área de uma pequena célula. Separar essas duas funções será útil ao distinguir integrais escalares e fluxos.

Definição 7.1

Uma **superfície parametrizada** em $\mathbb{R}^3$ é a imagem de uma aplicação de classe C^1 $\mathbf{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um domínio. Escrevemos

$$\mathbf{r}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big).$$

Em geral, exigiremos que a parametrização seja injetiva no interior de Ω; identificações na fronteira, como as que aparecem nas coordenadas esféricas, serão permitidas quando não afetarem a superfície descrita.

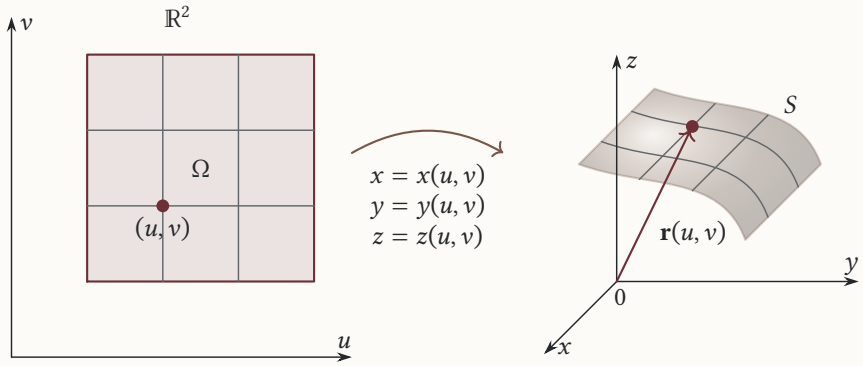


Figura 7.1.: Parametrização de uma superfície S em $\mathbb{R}^3$

Definição 7.2

- Uma parametrização é dita **regular** no ponto (u_0, v_0) do interior de Ω se

$$\partial_u \mathbf{r}(u_0, v_0) \times \partial_v \mathbf{r}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}.$$

- A parametrização é regular se essa condição vale em todo ponto interior de Ω. Degenerescências na fronteira do domínio de parâmetros são permitidas quando representam apenas uma singularidade de coordenadas, como ocorre nos polos das coordenadas esféricas.
- Uma **superfície regular** é uma superfície que, na vizinhança de cada ponto, admite uma parametrização regular.

Daqui em diante, trabalharemos com superfícies regulares. Quando uma única parametrização não cobrir toda a superfície, usaremos várias cartas regulares ou argumentos por partes.

Consideremos agora duas curvas em S. A primeira, C_1, é dada pela função vetorial

$$r_1(u) = \mathbf{r}(u, v_0), \qquad u \in (a, b),$$

obtida mantendo a variável v fixa em v_0. A segunda curva, C_2, é dada pela função vetorial

$$r_2(v) = \mathbf{r}(u_0, v), \qquad v \in (c, d)$$

desta vez mantendo a variável u fixa em u_0.

As duas curvas passam pelo ponto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$:

- A curva C_1 tem vetor tangente $r_1'(u_0) = \partial_u \mathbf{r}(u_0, v_0)$;
- A curva C_2 tem vetor tangente $r_2'(v_0) = \partial_v \mathbf{r}(u_0, v_0)$.

O produto vetorial $\mathbf{n}(u_0, v_0) = \partial_u \mathbf{r}(u_0, v_0) \times \partial_v \mathbf{r}(u_0, v_0)$, que supusemos diferente de zero, é portanto perpendicular a ambas as curvas no ponto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ e pode ser tomado como um vetor normal à superfície nesse ponto.

Registramos o resultado da seguinte forma:

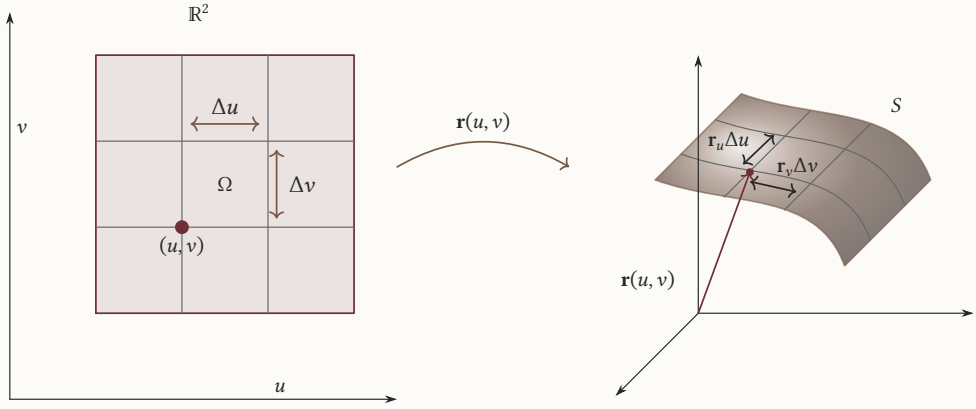


Figura 7.2.: Parametrização de uma superfície S em $\mathbb{R}^3$

Definição 7.3

Se S é uma superfície regular dada por uma função diferenciável $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, então o produto vetorial

$$\mathbf{n}(u, v) = \partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}$$

é chamado de **produto vetorial fundamental** da superfície.

Exemplo 7.1

Para o plano $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + \mathbf{c}$, temos
$\partial_u \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}$ e $\partial_v \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{b}$. Portanto, $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é normal ao plano; a normal

unitária correspondente é

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}.$$

Exemplo 7.2

Para $a > 0$, parametrizamos a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ fazendo

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + a \cos v\mathbf{k},$$

com $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$. Nesse caso,

$$\partial_u \mathbf{r}(u, v) = -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + a \cos u \operatorname{sen} v\mathbf{j}$$

e

$$\partial_v \mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v\mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \cos v\mathbf{j} - a \operatorname{sen} v\mathbf{k}.$$

Portanto,

$$\mathbf{n}(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ a \cos u \cos v & a \operatorname{sen} u \cos v & -a \operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$

$$= -a \operatorname{sen} v \left(a \cos u \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + a \cos v\, \mathbf{k}\right)$$

$$= -a \operatorname{sen} v\, \mathbf{r}(u, v).$$

Como era de esperar, o produto vetorial fundamental é paralelo ao vetor raio $\mathbf{r}(u, v)$. Observe que essa parametrização é regular para $0 < v < \pi$; os polos podem ser tratados por outra carta ou por passagem ao limite.

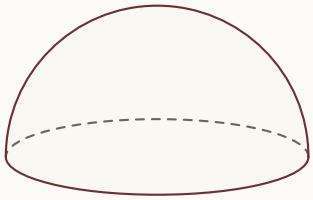
Definição 7.4 — Fronteira

Uma superfície S pode ter uma **fronteira** ∂S. Estamos interessados no caso em que a fronteira consiste em uma curva suave por partes ou em uma união de curvas suaves por partes.

Uma superfície é **limitada** se puder ser contida em uma esfera sólida de raio R; caso contrário, é chamada *ilimitada*. Uma superfície limitada sem fronteira é chamada **fechada**.

Exemplo 7.3

A fronteira de um hemisfério é um círculo (desenhado em vermelho).



Exemplo 7.4

A esfera e o toro são exemplos de superfícies fechadas. Ambas são limitadas e sem fronteiras.

Exercícios

Exercício N088 **Consolidação; básico**

Para $r(u, v) = (u, v, uv)$, calcule $r_u \times r_v$ e mostre que a superfície é regular.

Exercício N089 **Consolidação; básico**

Parametrize o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, calcule o produto vetorial fundamental e escolha uma normal exterior.

Exercício N090 **Justificação; médio**

Na parametrização esférica de raio a, identifique os pontos do domínio em que o produto fundamental se anula e explique por que isso não torna a esfera singular.

7.2. A Área de uma Superfície Parametrizada

A área depende de quanto a parametrização alonga cada pequena região do plano de parâmetros. O fator correto é o módulo do produto vetorial dos vetores coordenados; trocar a ordem dos parâmetros muda a normal, mas preserva esse módulo.

Aprenderemos agora a realizar integração sobre uma *superfície* em $\mathbb{R}^3$.

Assim como usamos uma parametrização de uma curva para definir a integral de linha ao longo dela, usaremos uma parametrização de uma superfície para definir

uma *integral de superfície*. Usaremos *duas* variáveis, u e v, para parametrizar uma superfície S em $\mathbb{R}^3$: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, para (u,v) em alguma região Ω de $\mathbb{R}^2$ (veja a Figura 7.3).

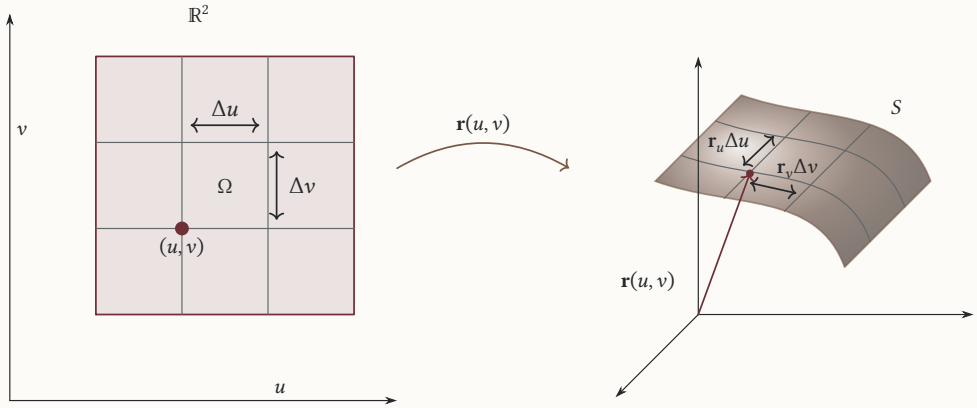


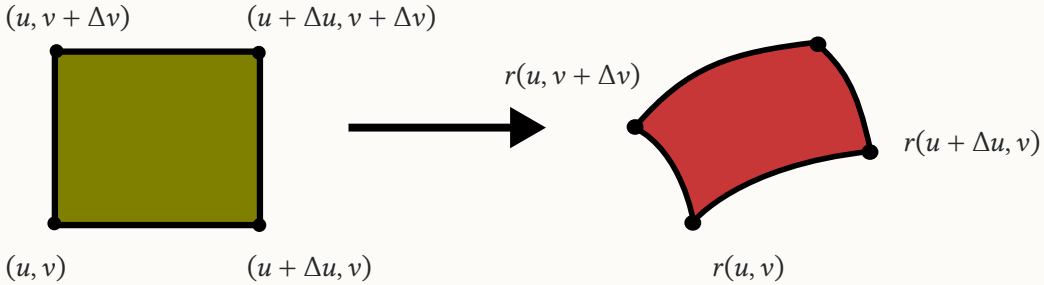
Figura 7.3.: Parametrização de uma superfície S em $\mathbb{R}^3$

Nesse caso, o vetor posição de um ponto da superfície S é dado pela função vetorial

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \text{ para } (u,v) \text{ em } \Omega.$$

A parametrização de S pode ser vista como uma "transformação" de uma região em $\mathbb{R}^2$ (no plano uv) em uma superfície bidimensional em $\mathbb{R}^3$. Essa parametrização da superfície às vezes é chamada de *patch*, com base na ideia de "colar" a região Ω sobre S na forma de uma grade, como mostra a Figura 7.3.

De fato, essas linhas de grade em Ω indicam como definiremos uma integral de superfície sobre S. Ao longo das linhas de grade verticais em Ω, a variável u é constante. Assim, essas linhas são mapeadas em curvas sobre S, e a variável u é constante ao longo do vetor posição $\mathbf{r}(u,v)$. Portanto, o vetor tangente a essas curvas no ponto (u,v) é $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Analogamente, as linhas de grade horizontais em Ω são mapeadas em curvas sobre S cujos vetores tangentes são $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$.



Considere agora um ponto (u, v) em Ω, por exemplo, o canto inferior esquerdo de uma das regiões retangulares da grade em Ω, como mostra a Figura 7.3. Suponha que esse retângulo tenha largura e altura pequenas, respectivamente Δu e Δv. Os vértices desse retângulo são (u, v), $(u + \Delta u, v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ e $(u, v + \Delta v)$. Assim, a área desse retângulo é $A = \Delta u\, \Delta v$.

Então esse retângulo é mapeado pela parametrização em uma região da superfície S que, para Δu e Δv suficientemente pequenos, terá uma área de superfície (chame-a de d§) muito próxima da área do paralelogramo cujos lados adjacentes são $\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)$ (correspondente ao segmento de reta de (u, v) a $(u + \Delta u, v)$ em Ω) e $\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)$ (correspondente ao segmento de reta de (u, v) a $(u, v + \Delta v)$ em Ω). Combinando a noção usual de derivada parcial com a derivada de uma função vetorial aplicada a uma função de duas variáveis, temos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \approx \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta u}, \quad \text{e}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \approx \frac{\mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v)}{\Delta v},$$

e, portanto, o elemento de área da superfície d§ é aproximadamente

$$\|(\mathbf{r}(u+\Delta u, v)-\mathbf{r}(u, v))\times(\mathbf{r}(u, v+\Delta v)-\mathbf{r}(u, v))\| \approx \|(\Delta u \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u})\times(\Delta v \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v})\| = \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\|\, \Delta u\, \Delta v$$

Assim, a área total da superfície S de S é aproximadamente a soma de todas as quantidades $\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\|\, \Delta u\, \Delta v$, somadas sobre os retângulos de Ω.

Tomando o limite dessa soma quando a diagonal do maior retângulo tende a 0, obtemos

$$S = \iint_{\Omega} \|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\|\, du\, dv\,. \tag{7.1}$$

Escreveremos a integral dupla à direita usando a notação especial

$$\iint_{S} \mathrm{d}\S = \iint_{\Omega} \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\| du\, dv\,. \tag{7.2}$$

Essa fórmula formaliza a área de uma superfície parametrizada. Mais adiante, substituiremos o integrando constante 1 por uma função definida sobre a superfície e obteremos a integral de superfície de uma função escalar.

Definição 7.5

Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

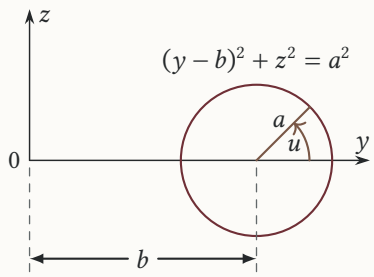
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

para (u, v) em uma região Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ o vetor posição de qualquer ponto de S. A área de superfície S de S é definida por

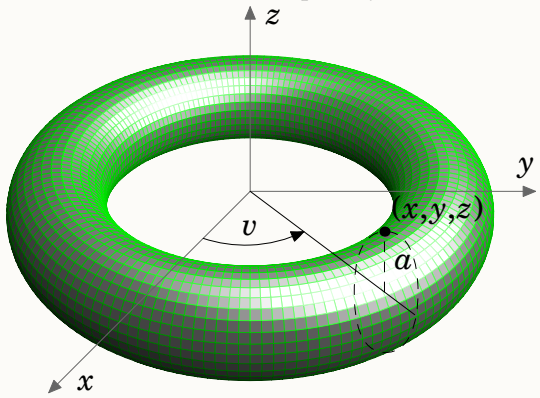
$$S = \iint_S 1 \, d\S = \iint_\Omega \| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \| \, du \, dv \tag{7.3}$$

Exemplo 7.5

Um *toro* T é uma superfície obtida pela rotação de um círculo de raio a no plano yz em torno do eixo z, cujo centro está a uma distância b do eixo z ($0 < a < b$), como na Figura 7.4. Encontre a área de superfície de T.



(a) Círculo no plano yz



(b) Toro T

Figura 7.4.

Solução.

Para qualquer ponto do círculo, o segmento de reta que liga o centro do círculo a esse ponto forma um ângulo u com o eixo y na direção positiva de y (veja a Figura 7.4(a)). E, à medida que o círculo gira em torno do eixo z, o segmento de reta que liga a origem ao centro desse círculo percorre um ângulo v com o eixo x positivo (veja a Figura 7.4(b)). Assim, o toro pode ser parametrizado por:

$$x = (b + a\cos u)\cos v\,, \quad y = (b + a\cos u)\operatorname{sen} v\,, \quad z = a\operatorname{sen} u$$

Os parâmetros variam em $0 \leq u, v \leq 2\pi$. Assim, para o vetor posição

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v) &= x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \\ &= (b + a\cos u)\cos v\,\mathbf{i} + (b + a\cos u)\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + a\operatorname{sen} u\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

vemos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -a \operatorname{sen} u \cos v\, \mathbf{i} - a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\, \mathbf{j} + a \cos u\, \mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -(b + a\cos u) \operatorname{sen} v\, \mathbf{i} + (b + a\cos u) \cos v\, \mathbf{j} + 0\mathbf{k}\,,$$

e, calculando o produto vetorial, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -a(b + a\cos u)(\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u),$$

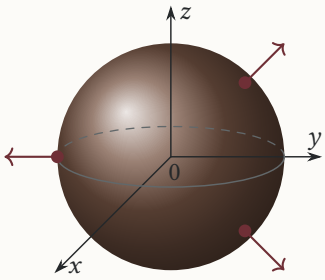
cujo módulo é

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a(b + a\cos u)\,.$$

Portanto, a área de superfície de T é

$$\begin{aligned} S &= \iint_S 1 \, d\S \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a\cos u)\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(abu + a^2 \operatorname{sen} u \Big|_{u=0}^{u=2\pi} \right) dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi ab\, dv \\ &= 4\pi^2 ab \end{aligned}$$

◁



Exemplo 7.6

[A área de uma esfera] A função

$$\mathbf{r}(u,v) = a\cos\, u\,\text{sen}\, v\mathbf{i} + a\,\text{sen}\, u\,\text{sen}\, v\mathbf{j} + a\cos\, v\mathbf{k},$$

com $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq \pi$ parametriza a esfera de raio a (com a degenerescência usual nos polos). Para essa parametrização,

$$\mathbf{n}(u,v) = -a\,\text{sen}\, v\,\mathbf{r}(u,v) \text{ e } \|\mathbf{n}(u,v)\| = a^2\,|\text{sen}\, v| = a^2\,\text{sen}\, v.$$

Logo,

$$\text{área da esfera} = \iint_\Omega a^2\,\text{sen}\, v\ du\ dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} a^2\,\text{sen}\, v\ dv\right) du = 2\pi a^2\int_0^{\pi}\text{sen}\, v\ dv = 4\pi a^2,$$

como se sabe que deve ser.

Exemplo 7.7 — A área de uma região do plano

Se S é uma região plana Ω, então S pode ser parametrizada fazendo

$$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \qquad (u,v) \in \Omega.$$

Aqui $\mathbf{n}(u,v) = \partial_u\mathbf{r}(u,v) \times \partial_v\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\|\mathbf{n}(u,v)\| = 1$. Nesse caso, recuperamos a fórmula conhecida

$$A = \iint_\Omega du\ dv.$$

Exemplo 7.8 — A área de uma superfície de revolução

Seja S a superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função

$$y = f(x), x \in [a,b]$$

em torno do eixo x. Suporemos que f é positiva e continuamente diferenciável.

Podemos parametrizar S fazendo

$$\mathbf{r}(u,v) = v\mathbf{i} + f(v)\cos u\,\mathbf{j} + f(v)\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

com (u,v) variando no conjunto $\Omega : 0 \le u \le 2\pi, a \le v \le b$. Nesse caso,

$$\mathbf{n}(u,v) = \partial_u\mathbf{r}(u,v) \times \partial_v\mathbf{r}(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -f(v)\,\text{sen}\ u & f(v)\cos\ u \\ 1 & f'(v)\cos\ u & f'(v)\,\text{sen}\ u \end{vmatrix}$$

$$= -f(v)f'(v)i + f(v)\cos\ u\ j + f(v)\,\text{sen}\ u\ k.$$

Portanto, $\|\mathbf{n}(u,v)\| = f(v)\sqrt{[f'(v)]^2 + 1}$ e

$$\text{area}\,S = \iint_\Omega f(v)\sqrt{[f'(v)]^2 + 1}\ \,\mathrm{d}u\ \,\mathrm{d}v$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_a^b f(v)\sqrt{[f'(v)]^2 + 1}\ \,\mathrm{d}v\right)du = \int_a^b 2\pi f(v)\sqrt{[f'(v)]^2 + 1}\ \,\mathrm{d}v.$$

Exemplo 7.9 — Rampa espiral

Para $b, \omega, l > 0$, uma volta da rampa espiral do Exemplo 5 é a superfície

$$S : \mathbf{r}(u,v) = u\cos\omega v\ \mathbf{i} + u\,\text{sen}\ \omega v\ \mathbf{j} + bv\ \mathbf{k}$$

com (u,v) variando no conjunto $\Omega = \{(u,v) : 0 \le u \le l,\ 0 \le v \le 2\pi/\omega\}$. Nesse caso,

$$\partial_u\mathbf{r}(u,v) = \cos\omega v\ \mathbf{i} + \text{sen}\,\omega v\ \mathbf{j},$$
$$\partial_v\mathbf{r}(u,v) = -\omega u\,\text{sen}\,\omega v\ \mathbf{i} + \omega u\cos\omega v\ \mathbf{j} + b\mathbf{k}.$$

Portanto,

$$\mathbf{n}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\omega v & \text{sen}\ \omega v & 0 \\ -\omega u\,\text{sen}\ \omega v & \omega u\cos\ \omega v & b \end{vmatrix} = b\,\text{sen}\ \omega v\ \mathbf{i} - b\cos\omega v\ \mathbf{j} + \omega u\mathbf{k}$$

e

$$\|\mathbf{n}(u,v)\| = \sqrt{b^2 + \omega^2u^2}.$$

Assim,

$$\text{area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{b^2 + \omega^2 u^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} \left(\int_0^l \sqrt{b^2 + \omega^2 u^2} du \right) \mathrm{d}v = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^l \sqrt{b^2 + \omega^2 u^2} du.$$

A integral pode ser calculada fazendo $u = (b/\omega)\,\mathrm{tg}\ x$.

7.2.1. A Área do Gráfico de uma Função

Seja S a superfície do gráfico de uma função $f(x, y)$:

$$z = f(x, y), (x, y) \in \Omega.$$

Devemos mostrar que, se f é continuamente diferenciável, então

$$\text{area}\, S = \iint_{\Omega} \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + \left[f'_y(x, y)\right]^2 + 1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Podemos parametrizar S fazendo

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}, (u, v) \in \Omega.$$

Podemos igualmente usar x e y e escrever

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, (x, y) \in \Omega.$$

Claramente,

$$\mathbf{r}_x(x, y) = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \text{ e } \mathbf{r}_y(x, y) = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}.$$

Portanto,

$$\mathbf{n}(x, y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = -f_x(x, y)\ \mathbf{i} - f_y(x, y)\ \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Consequentemente, $\|\mathbf{n}(x, y)\| = \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + \left[f'_y(x, y)\right]^2 + 1}$ e a fórmula está verificada.

Exemplo 7.10

Calcule a área de superfície da parte do cilindro parabólico $z = y^2$ que está sobre o triângulo com vértices $(0,0), (0,1), (1,1)$ no plano xy.

Solução.

Aqui $f(x,y) = y^2$, de modo que

$$f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 2y.$$

O triângulo da base pode ser descrito por

$$\Omega : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y.$$

A superfície tem área

$$\begin{aligned} \text{area} &= \iint_\Omega \sqrt{[f_x'(x,y)]^2 + \left[f_y'(x,y)\right]^2 + 1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2+1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y\sqrt{4y^2+1}\ \mathrm{d}y = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}. \end{aligned}$$

◁

Exemplo 7.11

Calcule a área de superfície da parte do paraboloide hiperbólico $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Solução. Seja $f(x,y) = xy$, de modo que

$$f_x(x,y) = y, f_y(x,y) = x.$$

A fórmula fornece

$$A = \iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+1}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Em coordenadas polares, a região da base tem a forma

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Assim, temos

$$A = \iint_\Omega \sqrt{r^2+1}\, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{r^2+1}\, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(a^2+1)^{3/2} - 1].$$

Há uma versão elegante e geometricamente intuitiva dessa última fórmula de área. Sabemos que o vetor

$$\mathbf{r}_x(x,y) \times \mathbf{r}_y(x,y) = -f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

é normal à superfície no ponto $(x, y, f(x,y))$. O vetor unitário nessa direção,

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{-f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}},$$

é chamado de **normal unitária superior** (é a normal unitária com componente k não negativa).

Seja agora $\gamma(x,y)$ o ângulo entre $\mathbf{n}(x,y)$ e $\mathbf{k}$. Como $\mathbf{n}(x,y)$ e $\mathbf{k}$ são ambos vetores unitários,

$$\cos[\gamma(x,y)] = \mathbf{n}(x,y) \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{[f_x'(x,y)]^2 + \left[f_y'(x,y)\right]^2 + 1}}.$$

Tomando os recíprocos, temos

$$\sec[\gamma(x,y)] = \sqrt{[f_x'(x,y)]^2 + \left[f_y'(x,y)\right]^2 + 1}.$$

A fórmula da área pode, portanto, ser escrita como

$$A = \iint_\Omega \sec[\gamma(x,y)] \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y.$$

◁

7.2.2. Teorema de Pappus

Teorema 7.1

Seja γ um arco simples de curva plana regular, situado inteiramente de um lado de uma reta do mesmo plano, sem intersectá-la. O centroide é calculado com densidade uniforme por comprimento de arco. A área da superfície obtida pela rotação de γ em torno dessa reta é o produto do comprimento de arco de γ pela distância percorrida pelo seu centroide.

Demonstração. Seja C um arco simples de curva plana regular, de comprimento $\ell > 0$, inteiramente contido no semiplano $x > 0$, e parametrizado por $(x(t), z(t))$, $a \le t \le b$. O centroide de C é entendido com respeito à densidade uniforme por comprimento de arco. Ao girar C em torno do eixo z, obtemos uma superfície parametrizada por

$$\gamma(s,t) = \big(x(t)\cos s, x(t)\operatorname{sen} s, z(t)\big), \qquad a \le t \le b, \quad 0 \le s \le 2\pi.$$

As derivadas parciais são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \big(-x(t)\operatorname{sen} s, x(t)\cos s, 0\big), \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \big(x'(t)\cos s, x'(t)\operatorname{sen} s, z'(t)\big); \end{aligned}$$

Seu produto vetorial é

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma}{\partial t} = x(t)\big(z'(t)\cos s, z'(t)\operatorname{sen} s, -x'(t)\big);$$

o vetor fundamental é

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\| ds\, dt = x(t)\sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2}\, ds\, dt.$$

A área de superfície de S é

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2}\, ds\, dt = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2}\, dt.$$

Se

$$\ell = \int_a^b \sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2}\, dt$$

denota o comprimento de arco de C, a área de S torna-se

$$2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2}\, dt = 2\pi\, \ell \left(\frac{1}{\ell} \int_a^b x(t)\sqrt{z'(t)^2 + x'(t)^2}\, dt \right) = \ell\, (2\pi\, \overline{x}),$$

o comprimento de C vezes a circunferência do círculo percorrido pelo centroide de C. De fato,

$$\overline{x} = \frac{1}{\ell}\int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

é a distância do centroide ao eixo de rotação. A hipótese $x > 0$ evita que a rotação cruze o eixo.

■

Exercícios

Exercício N091 **Consolidação; básico**

Calcule a área do gráfico $z = x + y$ sobre o quadrado $[0,1]^2$.

Exercício N092 **Consolidação; médio**

Determine a área de $z = x^2 + y^2$ sobre $x^2 + y^2 \le 1$.

Exercício N093 **Aplicação; médio**

Use Pappus para calcular a área de um toro com raio maior R e raio menor a, $0 < a < R$, verificando a hipótese sobre o eixo.

7.3. Integrais de Superfície de Funções Escalares

Com o elemento de área disponível, podemos somar massa, carga ou temperatura sobre uma superfície. Uma densidade superficial é multiplicada por área; uma média exige ainda dividir a integral pela área ou pela massa, conforme a ponderação escolhida.

Definição 7.6

Seja S uma superfície regular parametrizada, sem sobreposições no interior, por $\mathbf{r} : \Omega \to S$, com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, e seja $f : S \to \mathbb{R}$ contínua. Definimos

$$\iint_S f \,\mathrm{d}\S := \iint_\Omega f(\mathbf{r}(u,v))\,\|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Observação 7.2

Se

$$J_S(u,v) = \|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|,$$

então podemos escrever simbolicamente

$$\mathrm{d}\S = J_S(u,v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v,$$

e, portanto,

$$\iint_S f\ \mathrm{d}\S = \iint_\Omega f(\mathbf{r}(u,v)) J_S(u,v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v.$$

Exemplo 7.12

Calcule

$$\iint_S z\,\mathrm{d}\S$$

onde S é a metade superior de uma esfera de raio 2.

Solução. Use coordenadas esféricas:

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 2\cos\phi),$$

com $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \phi \le \pi/2$. Então $z = 2\cos\phi$ e $\mathrm{d}\S = 4\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta$. Logo,

$$\iint_S z\ \mathrm{d}\S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 8\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta = 8\pi.$$

◁

Exemplo 7.13

Integre a função $g(x,y,z) = yz$ sobre a superfície da cunha no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 2$ e $y + z = 1$.

Solução. Dividimos a fronteira em cinco faces. Nas faces $y = 0$ e $z = 0$, o integrando yz se anula. Nas faces $x = 0$ e $x = 2$, a área elementar é $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ e a contribuição de cada face é

$$I_1 = I_2 = \int_0^1\int_0^{1-y} yz\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y(1-y)^2\ \mathrm{d}y = \frac{1}{24}.$$

Na face inclinada, usamos $r(x, y) = (x, y, 1 - y)$, com $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 1$. Temos $|r_x \times r_y| = \sqrt{2}$, portanto

$$I_5 = \sqrt{2} \int_0^2 \int_0^1 y(1 - y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Somando, $\int_S yz\, \mathrm{d}S = 1/12 + \sqrt{2}/3$. A orientação das faces não altera essa integral escalar. ◁

Exemplo 7.14

A temperatura em cada ponto da superfície de uma esfera de raio 3 é dada por $T(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy + z)$. Calcule a temperatura média.

Solução. A temperatura média é

$$\overline{T} = \frac{1}{\operatorname{area}(S)} \iint_S T\, \mathrm{d}\S.$$

A transformação $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ preserva a esfera e o elemento de área, mas transforma $xy + z$ em $-(xy + z)$. Como o seno é ímpar, os valores de T se cancelam aos pares. Portanto,

$$\iint_S T\, \mathrm{d}\S = 0 \qquad \text{e} \qquad \overline{T} = 0.$$

◁

Exemplo 7.15

Considere a superfície que é o hemisfério superior de raio 3, com densidade $\delta(x, y, z) = z^2$. Calcule sua área, sua massa e seu centro de massa.

Solução. Uma parametrização é

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (3 \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 3 \cos\phi),$$

com $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \phi \le \pi/2$, e $\mathrm{d}\S = 9 \operatorname{sen}\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta$. Assim,

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta = 18\pi,$$

e

$$M = \iint_S z^2\, \mathrm{d}\S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (3 \cos\phi)^2\, 9 \operatorname{sen}\phi\, \mathrm{d}\phi\, \mathrm{d}\theta = 54\pi.$$

Por simetria, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Além disso,

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S z^3 \, d\S = \frac{1}{54\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (3\cos\phi)^3 \, 9\,\operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{9}{4}.$$

Logo, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 9/4)$. ◁

Exercícios

Exercício N094 **Aplicação; básico**

Uma casca esférica de raio a tem densidade superficial constante σ_0. Determine a massa e o centro de massa.

Exercício N095 **Aplicação; médio**

Uma superfície é $z = x + y$ sobre $[0,1]^2$ e tem densidade $\sigma = 1 + x$. Determine sua massa em unidades normalizadas.

Exercício N096 **Aplicação; médio**

Calcule a temperatura média de uma esfera de raio a com $T(x,y,z) = T_0 + \alpha z^2$, usando a simetria entre x^2, y^2, z^2.

7.4. Integrais de Superfície de Funções Vetoriais

Um fluxo mede quanto de um campo atravessa uma superfície orientada. O produto com a normal seleciona a componente transversal. Trocar a orientação inverte o sinal, e escolher uma parametrização exige conferir se seu produto vetorial aponta para o lado desejado.

7.4.1. Orientação

Assim como uma curva pode ser percorrida em dois sentidos, uma superfície orientável admite duas orientações. Para curvas, a orientação é descrita pelo vetor tangente unitário $\hat{\tau}$; para superfícies, por uma escolha contínua de vetor normal unitário $\hat{\mathbf{n}}$. Trocar $\hat{\mathbf{n}}$ por $-\hat{\mathbf{n}}$ inverte a orientação.

Definição 7.7

Dizemos que $(S, \hat{\mathbf{n}})$ é uma **superfície orientada** se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície C^1, $\hat{\mathbf{n}} : S \to \mathbb{R}^3$ é uma função contínua tal que, para todo $x \in S$, o vetor $\hat{\mathbf{n}}(x)$ é normal à superfície S no ponto x, e $\|\hat{\mathbf{n}}(x)\| = 1$.

Exemplo 7.16

Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x\| = 1\right\}$ e escolha $\hat{\mathbf{n}}(x) = x/\|x\|$.

Observação 7.3

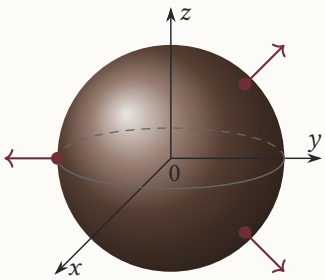
Em qualquer ponto $x \in S$ há exatamente duas escolhas possíveis para $\hat{\mathbf{n}}(x)$. Uma superfície orientada fornece uma escolha consistente de uma delas **de modo contínuo** em toda a *superfície*. Surpreendentemente, isso nem sempre é possível! Por exemplo, a superfície de uma faixa de Möbius não pode ser orientada.

Exemplo 7.17

Se S é o gráfico de uma função, orientamos S escolhendo $\hat{\mathbf{n}}$ sempre como o vetor normal unitário com coordenada z positiva.

Exemplo 7.18

Se S é uma superfície fechada, normalmente orientamos S tomando $\hat{\mathbf{n}}$ como o vetor normal **apontando para fora**.



Recorde que os vetores normais a um plano podem apontar em duas direções opostas. Por **vetor normal unitário exterior** a uma superfície S, entendemos o vetor unitário normal a S que aponta para a parte "externa" da superfície.

Exemplo 7.19

Se S é a superfície de uma faixa de Möbius, por exemplo, ela não pode ser orientada.

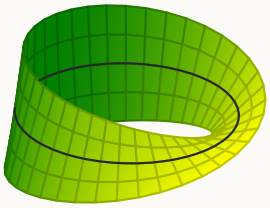


Figura 7.5.: A faixa de Möbius é um exemplo de superfície não orientável

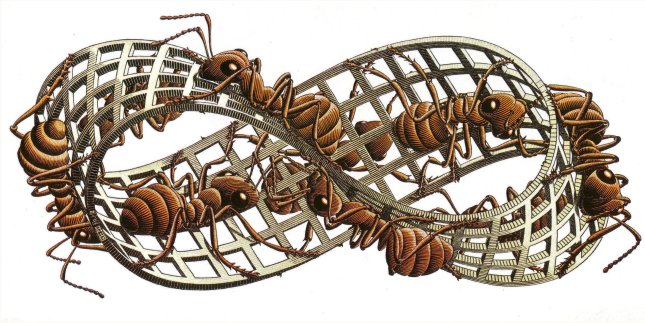


Figura 7.6.: Faixa de Möbius II — M.C. Escher

7.4.2. Fluxo

Se S é uma superfície orientada com normal unitária $\hat{\mathbf{n}}$, então a quantidade de fluido que atravessa S por unidade de tempo é exatamente

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S.$$

Observe que tanto $\mathbf{f}$ quanto $\hat{\mathbf{n}}$ são **funções vetoriais**, e $\mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} : S \to \mathbb{R}$ é uma função escalar. A integral de superfície dessa função foi definida na seção anterior.

Definição 7.8

Seja $(S, \hat{\mathbf{n}})$ uma superfície orientada, e seja $\mathbf{f} : S \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo. A **integral de superfície** de $\mathbf{f}$ sobre S é definida por

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S.$$

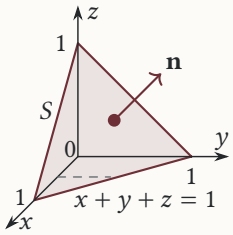
Observação 7.4

Outra notação comum para a integral de superfície é

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S = \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}, \qquad d\mathbf{S} := \hat{\mathbf{n}} \, d\S$$

Exemplo 7.20

Calcule a integral de superfície $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{f}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ e S é a parte do plano $x + y + z = 1$ com $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, orientada pela normal unitária $\mathbf{n}$ cuja componente z é positiva.



Solução.

Como o vetor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ é normal ao plano $x + y + z = 1$ (por quê?), então dividindo $\mathbf{v}$ por seu comprimento, obtemos a normal unitária compatível com a orientação escolhida, $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Agora precisamos parametrizar S. Como podemos ver na figura, projetar S no plano xy produz uma região triangular $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Assim, usando (u, v) em vez de (x, y),

vemos que

$$x = u,\ y = v,\ z = 1 - (u + v),\ \text{ para } 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1 - u$$

é uma parametrização de S sobre Ω (pois $z = 1 - (x + y)$ em S). Portanto, em S,

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} &= (yz, xz, xy) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(yz + xz + xy) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}((x + y)z + xy) = \frac{1}{\sqrt{3}}((u + v)(1 - (u + v)) + uv) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}((u + v) - (u + v)^2 + uv)
\end{aligned}$$

para (u, v) em Ω, e, para $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - (u + v))\mathbf{k}$ temos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1) \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{3}\,.$$

Portanto, integrando sobre Ω usando fatias verticais (por exemplo, como indicado pela linha tracejada na Figura 4.4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\ d\S \\
&= \iint_\Omega (\mathbf{f}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{n}) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dv\, du \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{\sqrt{3}}((u + v) - (u + v)^2 + uv)\sqrt{3}\, dv\, du \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(u + v)^2}{2} - \frac{(u + v)^3}{3} + \frac{uv^2}{2} \Big|_{v=0}^{v=1-u} \right) du \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{u}{2} - \frac{3u^2}{2} + \frac{5u^3}{6} \right) du \\
&= \frac{u}{6} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{2} + \frac{5u^4}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}\,.
\end{aligned}$$

◁

Proposição 7.5

Seja Ω conexo e $\mathbf{r} : \Omega \to S$ uma parametrização regular da superfície orientada $(S, \hat{\mathbf{n}})$, compatível com uma única carta. Então ou

$$\hat{\mathbf{n}} \circ \mathbf{r} = \frac{\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}}{\|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|} \tag{7.4}$$

em todo Ω, ou

$$\hat{\mathbf{n}} \circ \mathbf{r} = -\frac{\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}}{\|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|} \tag{7.5}$$

em todo Ω. Consequentemente, no caso em que (7.4) vale, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}\S = \iint_\Omega (\mathbf{F} \circ \mathbf{r}) \cdot (\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \tag{7.6}$$

Demonstração. O vetor $\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}$ é **normal** a S e, portanto, paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$. Assim,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}}{\|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|}$$

deve ser uma função que assume apenas os valores ± 1. Como essa função é contínua e Ω é conexo, ela é identicamente igual a 1 ou identicamente igual a -1. ■

Exemplo 7.21

A lei de Gauss afirma que a carga total encerrada por uma superfície S é dada por

$$Q = \epsilon_0 \iint_S E \cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo e E é o campo elétrico. Por convenção, escolhe-se o vetor normal apontando para fora.
Se $E(x) = e_3$, calcule a carga encerrada pela superfície fechada formada pelo hemisfério superior da esfera unitária e pelo disco de base $x_3 = 0$.

Solução. O fluxo pelo hemisfério é π, a área de sua projeção no plano xy. No disco de base, a normal exterior é $-e_3$, e o fluxo é $-\pi$. Portanto, o fluxo total é zero e $Q = 0$. ◁

Exemplo 7.22 — Fluxo através de uma tampa inclinada

Uma tampa é o gráfico $z = 2 - x - y$ sobre $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$, orientado para cima. Calcule o fluxo do campo constante $F = (0, 0, v_0)$, com $v_0 > 0$.

Solução. Usamos $r(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$, de modo que $r_x \times r_y = (1, 1, 1)$, cuja componente vertical é positiva. Portanto,

$$\iint_S F \cdot n \, \mathrm{d}S = \iint_D (0, 0, v_0) \cdot (1, 1, 1) \, \mathrm{d}A = v_0 \, \operatorname{area}(D) = 2v_0.$$

A área real da tampa é $2\sqrt{3}$, mas sua componente normal vertical é $1/\sqrt{3}$. Os fatores se compensam: um fluxo vertical constante depende da área projetada horizontalmente. ◁

Exercícios

Exercício N097 **Consolidação; básico**

Calcule o fluxo de $F = (x, y, z)$ pela esfera de raio a, diretamente com a normal exterior.

Exercício N098 **Consolidação; básico**

Calcule o fluxo de $F = (0, 0, 1)$ pelo gráfico $z = x^2 + y^2$ sobre o disco unitário, orientado para cima.

Exercício N099 **Justificação; médio**

Para uma esfera dividida em dois hemisférios, explique como escolher suas normais para obter o fluxo exterior da superfície fechada.

7.5. Teorema de Kelvin–Stokes

O Teorema de Stokes permite substituir a circulação na fronteira pelo fluxo do rotacional em uma superfície que a preenche. A escolha da superfície pode simplificar o cálculo, desde que o campo seja regular em sua vizinhança e as orientações sejam compatíveis.

Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira ∂S, você pode escolher livremente a orientação de S, isto é, a direção da normal, mas deve orientar S e ∂S de maneira

coerente. Isso significa que, se você é um "observador" caminhando ao longo da fronteira da superfície com a normal como direção vertical, você se move no sentido positivo quando, olhando para a superfície, o interior de S fica *à esquerda* de ∂S.

Exemplo 7.23

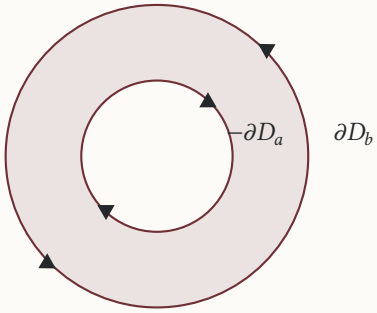
Considere a coroa circular

$$A := \{(x, y, 0) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

no plano (x, y), e, entre os dois possíveis vetores normais unitários $(0, 0, \pm 1)$, escolha $\hat{n} := (0, 0, 1)$. Se você é um "observador" caminhando ao longo da fronteira da superfície com a normal igual a $\hat{n}$, isso significa que o círculo da fronteira exterior de A deve ser orientado no sentido anti-horário. Observando a figura, você pode se convencer de que o círculo da fronteira interior deve ser orientado no sentido horário para que o interior de A fique à esquerda de ∂A. Pode-se escrever

$$\partial A = \partial D_b - \partial D_a \,,$$

onde D_r é o disco de raio r centrado na origem, e seu círculo de fronteira ∂D_r é orientado no sentido anti-horário.

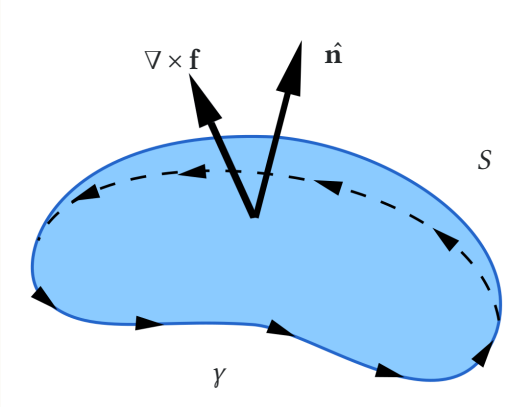


Teorema 7.6 — Teorema de Kelvin–Stokes

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio, e seja $(S, \hat{\mathbf{n}}) \subseteq U$ uma superfície limitada, orientada e por partes C^1, cuja fronteira é a curva γ (por partes C^1). Se $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial C^1, então

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}\S = \oint_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Aqui, γ é percorrida no sentido anti-horário quando vista por um observador de pé sobre a superfície, com a cabeça apontando na direção do vetor normal.



Demonstração. Suponha inicialmente que S seja dada por uma única parametrização $\mathbf{r} : \Omega \to S$ de classe C^2, compatível com a orientação. Essa regularidade permite comutar as derivadas mistas usadas no cálculo abaixo. Escreva $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ e defina

$$A = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \partial_u \mathbf{r}, \qquad B = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \partial_v \mathbf{r}.$$

A fronteira de Ω é levada, com a orientação induzida, a ∂S. Assim,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\partial \Omega} A \, \mathrm{d}u + B \, \mathrm{d}v.$$

Pelo teorema de Green,

$$\oint_{\partial \Omega} A \, \mathrm{d}u + B \, \mathrm{d}v = \iint_{\Omega} (\partial_u B - \partial_v A) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

A regra da cadeia e a igualdade das derivadas mistas de $\mathbf{r}$ fornecem

$$\partial_u B - \partial_v A = (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{r}) \cdot (\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}).$$

Logo,

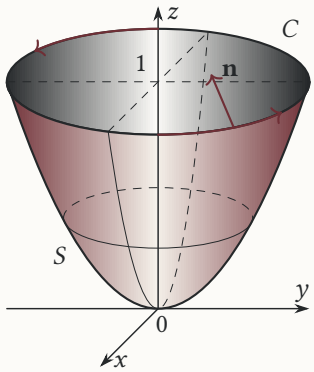
$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{S} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}\S.$$

Se forem necessárias várias parametrizações e uma decomposição finita em partes regulares, aplicamos o argumento a cada parte; as integrais nas fronteiras internas

aparecem com orientações opostas e se cancelam. A extensão a superfícies de classe C^1 por partes requer um argumento adicional de aproximação, que não desenvolvemos aqui. ■

Exemplo 7.24

Verifique o teorema de Stokes para $\mathbf{f}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ quando S é o paraboloide $z = x^2 + y^2$ com $z \leq 1$.



Solução. O vetor normal unitário positivo à superfície $z = z(x, y) = x^2 + y^2$ é

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{-2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}},$$

e $\nabla \times \mathbf{f} = (1 - 0)\,\mathbf{i} + (1 - 0)\,\mathbf{j} + (1 - 0)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, logo

$$(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} = (-2x - 2y + 1)/\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,.$$

Como S pode ser parametrizada por $\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}$ para (x, y) na

região $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, então

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\S &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, \| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \| \, dx \, dy \\
&= \iint_D \frac{-2x - 2y + 1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy \\
&= \iint_D (-2x - 2y + 1) \, dx \, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r \cos\theta - 2r \operatorname{sen}\theta + 1) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r^2 \cos\theta - 2r^2 \operatorname{sen}\theta + r) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2r^3}{3} \cos\theta - \frac{2r^3}{3} \operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=1} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3} \cos\theta - \frac{2}{3} \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta \\
&= \left[-2 \operatorname{sen}\theta/3 + 2 \cos\theta/3 + \theta/2 \right]_0^{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

A curva de fronteira C é o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ contido no plano $z = 1$ (ver Figura), que pode ser parametrizado por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} ((1)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) + (\operatorname{sen} t)(0)) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \quad \left(\text{aqui usamos } \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \\
&= \cos t + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \Big|_0^{2\pi} = \pi \, .
\end{aligned}$$

Portanto, vemos que $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, d\S$, como previsto pelo Teorema de Stokes. ◁

A integral de linha no exemplo anterior foi muito mais simples de calcular do que a integral de superfície, mas isso nem sempre ocorrerá.

Exemplo 7.25

Seja S a parte de uma esfera de raio a com $0 \leq \theta \leq \alpha$. Em coordenadas esféricas,

$$\mathrm{d}\S = a^2 \operatorname{sen}\theta \mathbf{e}_r \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\varphi.$$

Seja $\mathbf{F} = (0, xz, 0)$. Então $\nabla \times \mathbf{F} = (-x, 0, z)$. Logo,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pi a^3 \cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha.$$

A fronteira $C = \partial S$ é

$$\mathbf{r}(\varphi) = a(\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi, \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi, \cos\alpha).$$

O lado direito do teorema de Stokes é

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\ell &= \int_0^{2\pi} \underbrace{a\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi}_{x}\underbrace{a\cos\alpha}_{z}\underbrace{a\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi \ \mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}y} \\ &= a^3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi \ \mathrm{d}\varphi \\ &= \pi a^3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Portanto, os dois lados coincidem.

Observação 7.7

A regra que determina o sentido de percurso de γ é frequentemente chamada de **regra da mão direita**. Se o polegar da mão direita aponta na direção de $\hat{\mathbf{n}}$, os dedos curvados indicam o sentido positivo de percurso de γ.

Observação 7.8

Se a superfície S tem furos, então (como fizemos com o teorema de Green) orientamos cada furo no sentido horário e a fronteira exterior no sentido anti-horário, seguindo a regra da mão direita. Nesse caso, o teorema de Kelvin–Stokes torna-se

$$\int_S \nabla\times\mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}\S = \int_{\partial S}\mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\ell,$$

onde a integral de linha sobre ∂S é definida como a soma das integrais de linha sobre cada componente da fronteira.

Observação 7.9

Se S está contida no plano x, y e é orientada escolhendo-se $\hat{\mathbf{n}} = e_3$, então o teorema de Kelvin–Stokes se reduz ao teorema de Green.

O teorema de Kelvin–Stokes permite ver rapidamente como o rotacional de um campo vetorial mede a circulação infinitesimal.

Proposição 7.10

Suponha que uma pequena roda de pás rígida, de raio a, seja colocada em um fluido, com centro em x_0 e eixo de rotação paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$. Seja $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial que descreve a velocidade do fluido circundante. Se ω é a velocidade angular de rotação da roda de pás em torno do eixo $\hat{\mathbf{n}}$, então

$$\lim_{a\to 0} \omega = \frac{\nabla \times v(x_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{2}.$$

Demonstração. Seja S a superfície de um disco com centro em x_0, raio a e face perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$, e seja $\gamma = \partial S$. (Aqui, S representa a face da roda de pás, e γ, sua fronteira.) A velocidade angular ω será tal que

$$\oint_\gamma (v - a\omega\hat{\tau}) \cdot \mathrm{d}\ell = 0,$$

onde $\hat{\tau}$ é um vetor unitário tangente a γ, apontando na direção do percurso. Consequentemente

$$\omega = \frac{1}{2\pi a^2} \oint_\gamma v \cdot \mathrm{d}\ell = \frac{1}{2\pi a^2} \iint_S \nabla \times v \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}\S \xrightarrow{a\to 0} \frac{\nabla \times v(x_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{2}. \qquad \blacksquare$$

$\blacksquare$

Exemplo 7.26

Seja S o paraboloide elíptico $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ para $z \leq 1$, e seja C sua curva de fronteira. Calcule $\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$ para $\mathbf{f}(x,y,z) = (9xz+2y)\mathbf{i}+(2x+y^2)\mathbf{j}+(-2y^2+2z)\mathbf{k}$, onde C é percorrida no sentido anti-horário.

Solução. A superfície é semelhante à do Exemplo 7.24, exceto que agora a curva de fronteira C é a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ contida no plano $z = 1$. Nesse caso, usar o Teorema de Stokes é mais simples do que calcular diretamente a integral de linha. Assim como no Exemplo 7.24, em cada ponto $(x, y, z(x, y))$ da superfície $z = z(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ o vetor

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\,\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{-\dfrac{x}{2}\,\mathbf{i} - \dfrac{2y}{9}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4y^2}{81}}},$$

é um vetor normal unitário positivo a S. Calculando o rotacional de $\mathbf{f}$, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{f} = (-4y - 0)\mathbf{i} + (9x - 0)\mathbf{j} + (2 - 2)\mathbf{k} = -4y\,\mathbf{i} + 9x\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k},$$

logo

$$(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} = \frac{(-4y)(-\dfrac{x}{2}) + (9x)(-\dfrac{2y}{9}) + (0)(1)}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4y^2}{9}}} = \frac{2xy - 2xy + 0}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4y^2}{9}}} = 0,$$

e, portanto, pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}\, d\S = \iint_S 0\, d\S = 0.$$

◁

Exercícios

Exercício N100 **Consolidação; básico**

Use Stokes para calcular a circulação de $F = (-y/2, x/2, z)$ na borda do disco unitário orientado para cima.

Exercício N101 **Justificação; médio**

Calcule a circulação de $F = (z, x, y)$ na interseção de $z = 1$ com $x^2 + y^2 = 1$ e compare as superfícies do disco e do paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Exercício N102 **Justificação; médio**

Mostre que o fluxo de um rotacional através de uma superfície fechada é zero sob as hipóteses de regularidade e explique por que uma superfície com fronteira pode ter fluxo não nulo.

7.6. Teorema de Gauss

O Teorema de Gauss compara o fluxo exterior de uma superfície fechada com a integral da divergência no volume encerrado. Antes de aplicá-lo, confira se a superfície está completa, se a normal é exterior e se o campo não tem singularidades dentro do sólido.

Teorema 7.11 — Teorema da divergência ou teorema de Gauss

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio limitado cuja fronteira é uma superfície C^1 por partes, denotada por ∂U. Se $\mathbf{f}$ é um campo vetorial C^1 em uma vizinhança de $\overline{U}$, então

$$\iiint_U (\nabla \cdot \mathbf{f})\, dV = \oiint_{\partial U} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\S,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário apontando para fora.

Observação 7.12

De modo semelhante à nossa convenção para integrais de linha, denotamos integrais de superfície sobre **superfícies fechadas** pelo símbolo $\oiint$.

Observação 7.13

Seja $B_R = B(x_0, R)$ e observe que

$$\lim_{R\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_R)} \int_{\partial B_R} \mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\S = \lim_{R\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_R)} \int_{B_R} \nabla\cdot\mathbf{f}\, dV = \nabla\cdot\mathbf{f}(x_0),$$

o que justifica nossa intuição de que $\nabla\cdot\mathbf{f}$ mede o fluxo exterior de um campo vetorial.

Observação 7.14

Se $V \subseteq \mathbb{R}^2$, $U = V \times [a,b]$ é um cilindro e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial que não depende de x_3, então o teorema da divergência se reduz ao teorema de Green.

Ideia da demonstração do teorema da divergência. Suponha primeiro que o domínio U seja o cubo unitário $(0,1)^3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Nesse caso,

$$\iiint_U \nabla\cdot\mathbf{f}\, dV = \iiint_U (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)\, dV.$$

Considerando o primeiro termo à direita, o teorema fundamental do cálculo fornece

$$\begin{aligned}\iiint_U \partial_1 f_1\, dV &= \int_{x_3=0}^{1}\int_{x_2=0}^{1} (f_1(1,x_2,x_3) - f_1(0,x_2,x_3))\, dx_2\, dx_3 \\ &= \int_L \mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\S + \int_R \mathbf{f}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\S,\end{aligned}$$

onde L e R são, respectivamente, as faces esquerda e direita do cubo. Os termos $\partial_2 f_2$ e $\partial_3 f_3$ fornecem as integrais de superfície sobre as outras quatro faces. Isso prova o resultado para o cubo unitário. Para uma união finita de caixas, somamos as identidades: os fluxos nas faces internas se cancelam porque essas faces recebem orientações opostas. O caso geral é obtido por localização e aproximação por domínios regulares (ou, equivalentemente, por mudança de coordenadas em cartas de fronteira).

■

Exemplo 7.27

Calcule $\iint_S \mathbf{f}\cdot d\S$, onde $\mathbf{f}(x,y,z) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ e S é a esfera unitária $x^2+y^2+z^2 = 1$.

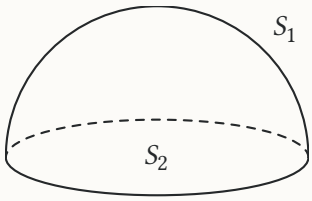
Solução. Temos $\operatorname{div}\mathbf{f} = 1+1+1 = 3$, portanto

$$\iint_S \mathbf{f}\cdot d\S = \iiint_U \operatorname{div}\mathbf{f}\, dV = \iiint_U 3\, dV$$
$$= 3\iiint_U 1\, dV = 3\,\mathrm{vol}(U) = 3\cdot\frac{4\pi(1)^3}{3} = 4\pi\,.$$

◁

Exemplo 7.28

Considere um hemisfério.



V é um hemisfério sólido

$$x^2+y^2+z^2 \le a^2, \quad z \ge 0,$$

e $\partial V = S_1 + S_2$, o hemisfério e o disco na base.
Tome $\mathbf{F} = (0,0,z+a)$ e $\nabla\cdot\mathbf{F} = 1$. Então

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = \frac{2}{3}\pi a^3,$$

o volume do hemisfério.
Parametrize o hemisfério por

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = a(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \cos\phi), \qquad 0\le\theta\le 2\pi, \quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}.$$

O elemento vetorial de área orientado para fora é

$$d\mathbf{S} = a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{r}(\theta,\phi)\, d\phi\, d\theta.$$

Como $z = a\cos\phi$, temos

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = a^3\cos\phi(1+\cos\phi)\operatorname{sen}\phi\; d\phi\; d\theta.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= 2\pi a^3\int_0^{\pi/2}\cos\phi(1+\cos\phi)\operatorname{sen}\phi\; d\phi\\ &= \frac{5}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

No disco S_2, a normal exterior é $-\mathbf{e}_3$ e $z=0$; logo $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}} = -a$ e

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\pi a^3.$$

Assim,

$$\iint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{5}{3}-1\right)\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3,$$

em acordo com o teorema de Gauss.

7.6.1. Lei de Gauss para campos de inverso do quadrado

Proposição 7.15 — Lei gravitacional de Gauss

Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo gravitacional de uma distribuição de massa, entendido como a força por unidade de massa de teste. Se S é uma superfície fechada de classe C^1, então

$$\oint_S g\cdot\hat{\mathbf{n}}\; d\S = -4\pi GM,$$

onde M é a massa contida na região delimitada por S. Aqui G é a constante gravitacional e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário apontando para fora.

Demonstração. O núcleo da demonstração é o cálculo a seguir. Dado um $y \in \mathbb{R}^3$ fixo fora de S, defina o campo vetorial $\mathbf{f}$ por

$$\mathbf{f}(x) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3}.$$

O campo vetorial $-Gm\mathbf{f}(x)$ representa o campo gravitacional de uma massa localizada em $\mathbf{y}$. Então

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S = \begin{cases} 4\pi & \text{se } \mathbf{y} \text{ está na região delimitada por } S, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{7.7}$$

Por simplicidade, suporemos daqui em diante que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Para provar (7.7), observe que

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0,$$

quando $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Seja U a região delimitada por S. Se $\mathbf{0} \notin U$, então o teorema da divergência se aplica na região U e temos

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S = \iiint_U \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = 0.$$

Por outro lado, se $\mathbf{0} \in U$, o teorema da divergência não se aplica diretamente, pois $\mathbf{f} \notin C^1(U)$. Para contornar isso, tome $\epsilon > 0, U' = U - B(0, \epsilon)$ e seja S' a fronteira de U'. Como $0 \notin U'$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 em todo U' e o teorema da divergência fornece

$$0 = \iiint_{U'} \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \int_{\partial U'} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S,$$

Na esfera interna, a normal exterior a U' aponta para o centro, isto é, vale $-\hat{\mathbf{r}}$. Como $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{r}}/\epsilon^2$ nessa esfera, seu fluxo com a orientação de $\partial U'$ é -4π. Portanto,

$$0 = \oint_{\partial U'} \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S = \oint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S - 4\pi,$$

e assim

$$\oint_S \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\S = 4\pi,$$

como afirmado.

Agora, no caso geral, suponha que a distribuição de massa tenha densidade ρ. Então o campo gravitacional $g(x)$ será a superposição dos campos gravitacionais em

x devidos a uma massa pontual de tamanho $\rho(y)\,\mathrm{d}V$ colocada em y. Isso significa que

$$g(x) = -G\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)(x-y)}{\|x-y\|^3}\,\mathrm{d}V(y).$$

Usando agora o teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\iint_S g(x)\cdot\hat{\mathbf{n}}(x)\,\mathrm{d}\S(x) &= -G\int_{y\in\mathbb{R}^3}\rho(y)\int_{x\in S}\frac{x-y}{\|x-y\|^3}\cdot\hat{\mathbf{n}}(x)\,\mathrm{d}\S(x)\,\mathrm{d}V(y)\\ &= -4\pi G\int_{y\in U}\rho(y)\,\mathrm{d}V(y) = -4\pi GM,\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue de (7.7). ■

Exemplo 7.29

Suponha que ρ seja contínua e que o campo eletrostático $\mathbf{E}$ seja de classe C^1. Um sistema de cargas elétricas possui uma *densidade de carga* $\rho(x,y,z)$ e produz o campo $\mathbf{E}(x,y,z)$. A *lei de Gauss* afirma que

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\S \;=\; 4\pi\iiint_U \rho\;\mathrm{d}V$$

para toda superfície fechada regular por partes $S=\partial U$, orientada para fora. Mostre que $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$. Esta é uma das *equações de Maxwell*.[a]

[a] Em unidades gaussianas (ou CGS).

Solução. Pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}\iiint_U \nabla\cdot\mathbf{E}\;\mathrm{d}V &= \iint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\S\\ &= 4\pi\iiint_U \rho\;\mathrm{d}V \quad \text{(lei de Gauss)}\\ \iiint_U (\nabla\cdot\mathbf{E} - 4\pi\rho)\;\mathrm{d}V &= 0 \quad \text{para todo } U \text{ regular,}\\ \nabla\cdot\mathbf{E} - 4\pi\rho &= 0 \quad \text{pela continuidade do integrando, logo}\\ \nabla\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho\,.\end{aligned}$$

◁

7.6.2. Fechar uma superfície: controlar o fluxo da tampa

Exemplo 7.30 — A tampa que não pode ser esquecida

Seja S o hemisfério superior da esfera unitária, orientado para fora, e D o disco que o fecha em $z = 0$, com normal para baixo. Calcule o fluxo de $F = (x, y, z + 1)$ por S, comparando cálculo direto com a aplicação de Gauss à superfície fechada $S \cup D$.

Solução. A divergência é 3, e a meia bola tem volume $2\pi/3$. Logo o fluxo fechado é 2π. Na tampa, $F \cdot (-e_z) = -1$, e seu fluxo é $-\pi$. Portanto

$$\text{Fluxo}(S) = 2\pi - (-\pi) = 3\pi.$$

Diretamente na esfera, $n = (x, y, z)$ e $F \cdot n = 1 + z$. A área do hemisfério é 2π, enquanto

$$\int_S z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \pi.$$

O total é novamente 3π. Subtrair o fluxo da tampa é indispensável: o fluxo fechado é 2π e não é o fluxo do hemisfério. Uma tampa geométrica simples só simplifica o método se seu fluxo também for calculado com a orientação correta. ◁

Exercícios

Exercício N103 **Consolidação; médio**

Use Gauss para calcular o fluxo de $F = (x^3, y^3, z^3)$ pela esfera de raio a, com normal exterior.

Exercício N104 **Aplicação; médio**

Um cilindro fechado de raio a e altura h está no eixo z. Calcule o fluxo de $F = (x, y, 2z)$ e confira as contribuições da lateral e das tampas.

Exercício N105 **Justificação; difícil**

Para $F = r/\|r\|^3$, compare o fluxo em esferas que encerram a origem e em esferas cujo interior não a contém. Justifique em quais regiões Gauss pode ser aplicado.

Exercícios de ampliação

Exercício A006 **Aplicação; médio**

No hemisfério superior unitário, com normal exterior, calcule o fluxo de $F = (0, 0, z + 2)$. Feche a superfície com a tampa em $z = 0$, calcule seu fluxo com a normal exterior da meia bola e compare o fluxo aberto com o fechado.

Exercício A007 **Aplicação; médio**

A região V é $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Para $F = (0, 0, z)$, calcule os fluxos exteriores no paraboloide e na tampa e confira sua soma por Gauss. Qual seria o fluxo no paraboloide se sua orientação fosse para cima?

7.7. Aplicações de Integrais de Superfície

As integrais de superfície dão uma forma global às leis de conservação. A variação da quantidade armazenada em um volume é equilibrada pelo fluxo na fronteira e por eventuais fontes internas. A forma diferencial surge quando a igualdade vale para todo volume de controle.

7.7.1. Forças conservativas e potenciais

Vimos anteriormente que toda força potencial deve ser conservativa. Demonstraremos aqui a recíproca.

Teorema 7.16

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ um domínio simplesmente conexo e $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1. Então $\mathbf{f}$ é uma força conservativa se, e somente se, $\mathbf{f}$ é uma força potencial se, e somente se, $\nabla \times \mathbf{f} = 0$.

Demonstração. Claramente, se $\mathbf{f}$ é uma força potencial, a igualdade das derivadas parciais mistas mostra que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$. Suponha agora que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$. Como U é simplesmente conexo, toda curva fechada por partes C^1 em U pode ser contraída a um ponto em U; aplicando Stokes a uma superfície que realiza essa contração, obtemos

$$\oint_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{S} \nabla \times \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \mathrm{d}\S = 0,$$

e, portanto, $\mathbf{f}$ é conservativo. Para concluir a demonstração, resta mostrar que uma

força conservativa é uma força potencial. Faremos isso a seguir.

Suponha que $\mathbf{f}$ seja uma força conservativa. Fixe $x_0 \in U$ e defina

$$V(x) = -\int_\gamma \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\ell,$$

onde γ é *qualquer* caminho que liga x_0 a x e está inteiramente contido em U. Como $\mathbf{f}$ é conservativo, vimos anteriormente que a integral de linha acima *não* depende do caminho, mas apenas dos pontos extremos.

Fixe $a \in U$. Para h suficientemente pequeno, escolha um caminho de x_0 até a e acrescente a ele o segmento que vai de a a $a + h\mathbf{e}_1$. Pela independência do caminho,

$$V(a + h\mathbf{e}_1) - V(a) = -\int_0^h f_1(a + t\mathbf{e}_1)\ \mathrm{d}t.$$

Dividindo por h e fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\partial_1 V(a) = -f_1(a).$$

As demais derivadas parciais podem ser calculadas de modo análogo, obtendo-se $\mathbf{f} = -\nabla V$, o que conclui a demonstração. ∎

7.7.2. Leis de conservação

Definição 7.9 — Equação de conservação

Suponha que estejamos interessados em uma grandeza Q. Seja $\rho(\mathbf{r}, t)$ a densidade da grandeza Q por unidade de volume e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ sua densidade de fluxo (por exemplo, se Q é carga, j é a densidade de corrente).
A equação de conservação é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Isso é mais forte do que afirmar que a quantidade total de Q no universo é fixa. Significa que Q não pode simplesmente desaparecer aqui e aparecer em outro lugar: deve fluir continuamente para fora.

Suponha que ρ e $\mathbf{j}$ sejam suficientemente regulares para permitir a diferenciação sob o sinal de integral. Seja V um volume fixo, independente do tempo, com fronteira $S = \partial V$. Então

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t)\ \mathrm{d}V$$

A taxa de variação da quantidade de Q em V é

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\ \mathrm{d}V = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}\ \mathrm{d}V = -\iint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}\S.$$

Pelo teorema da divergência. Assim, a taxa de *diminuição* de Q em V é o fluxo exterior de $\mathbf{j}$ através da fronteira. A equação local expressa precisamente que a grandeza só pode variar em V por transporte através de sua fronteira.

Em particular, se Q é integrável em todo o espaço e, para as esferas de raio R, o fluxo de $\mathbf{j}$ tende a zero quando $R \to \infty$ (por exemplo, se $\mathbf{j} = o(R^{-2})$ uniformemente sobre essas esferas), podemos tomar o limite dos volumes esféricos. Nesse caso, a quantidade total de Q permanece constante:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Exemplo 7.31

Se $\rho(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de carga (isto é, $\rho \delta V$ é a quantidade de carga em um pequeno volume δV), então $Q(t)$ é a carga total em V. $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de corrente elétrica. Assim, $\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}\S$ é a carga que atravessa δS por unidade de tempo.

Exemplo 7.32

Seja $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidades. Então $(\rho \mathbf{u}\ \delta t) \cdot \delta \S$ é igual à massa de fluido que atravessa δS no intervalo δt. Logo,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\iint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}\S$$

implica de fato a conservação da massa. A equação de conservação neste caso é

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

No caso em que ρ é constante e uniforme (isto é, independente de $\mathbf{r}$ e t), obtemos $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Dizemos que o fluido é *incompressível*.

Exercícios

Exercício N106 **Justificação; médio**

Partindo do balanço de massa em um volume fixo, deduza $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0$, sob regularidade suficiente.

Exercício N107 **Aplicação; médio**

Um campo tem velocidade $v = (ax, ay, az)$ e densidade espacialmente uniforme $\rho(t)$. Determine $\rho(t)$ a partir da conservação de massa e de $\rho(0) = \rho_0$.

Exercício N108 **Aplicação; médio**

Explique como o balanço muda quando há uma fonte volumétrica $s(x, t)$ e escreva a equação diferencial correspondente.

7.8. Decomposição de Helmholtz

A divergência identifica fontes locais, enquanto o rotacional identifica circulação local. A decomposição de Helmholtz reúne essas informações por meio de potenciais. Condições no infinito ou na fronteira são parte do problema; elas impedem que campos adicionais fiquem indeterminados.

O teorema de Helmholtz, também conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo Vetorial**, decompõe um campo vetorial em uma parte irrotacional e outra solenoidal. Em $\mathbb{R}^3$, sob condições adequadas de regularidade e decaimento no infinito, a divergência e o rotacional determinam o campo. Em domínios limitados, são necessários também dados de fronteira.

Teorema 7.17 — Decomposição de Helmholtz para $\mathbb{R}^3$

Suponha que $\mathbf{F} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ e que $\mathbf{F}$ e suas derivadas até segunda ordem sejam $O(|\mathbf{r}|^{-2-\varepsilon})$ no infinito para algum $\varepsilon > 0$. Então $\mathbf{F}$ pode ser decomposto em um componente sem rotacional e um componente sem divergência:

$$\mathbf{F} = -\nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A},$$

Demonstração. A construção usa o potencial newtoniano, componente a componente:

$$\mathbf{Z}(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{F}(r')}{\|r - r'\|}\, \mathrm{d}V'.$$

As hipóteses de decaimento garantem a convergência no infinito; a singularidade $1/\|r-r'\|$ é localmente integrável em três dimensões, pois sua integral em uma bola é proporcional a $\int_0^\delta s\, \mathrm{d}s$.

A propriedade fundamental desse potencial é $-\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{F}$. Ela decorre de $-\Delta(1/(4\pi\|r\|)) = \delta_0$: fora da origem o laplaciano é zero, e o fluxo de seu gradiente por uma esfera de raio ϵ é -1. Integrar em uma região com essa esfera removida e passar ao limite fornece a identidade com a fonte concentrada. Aplicada a cada componente de F, essa identidade dá a equação de Poisson acima; a regularidade assumida permite interpretá-la classicamente.

Agora use a identidade vetorial

$$-\Delta \mathbf{Z} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Z}).$$

Definindo $\Phi = \nabla \cdot \mathbf{Z}$ e $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{Z}$, obtemos

$$\mathbf{F} = -\nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A}. \tag{7.8}$$

O primeiro termo tem rotacional nulo e o segundo tem divergência nula. Integração por partes, com os termos no infinito anulados pelo decaimento, fornece ainda

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot F(r')}{\|r - r'\|}\, \mathrm{d}V', \qquad A(r) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \times F(r')}{\|r - r'\|}\, \mathrm{d}V'.$$

Essas fórmulas exibem a dependência da divergência e do rotacional. A normalização no infinito é indispensável: sem ela, um campo constante, por exemplo, tem divergência e rotacional nulos, mas não é o campo zero. ∎

Teorema 7.18 — Decomposição de Helmholtz para domínios limitados

Se $V \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira $S = \partial V$ por partes C^1 e $\mathbf{F}$ é de classe C^2 em uma vizinhança de $\overline{V}$, então $\mathbf{F}$ pode ser decomposto em um componente sem rotacional e um componente sem divergência:

$$\mathbf{F} = -\nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A},$$

onde

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS'$$

e ∇' é o gradiente em relação a $\mathbf{r}'$, não a $\mathbf{r}$.

Exercícios

Exercício N109 *Aprofundamento; médio*

Para $F = (x, y, z)$, construa uma decomposição local $F = -\nabla\Phi + \nabla\times A$ com $A = 0$. Explique por que esse campo não satisfaz o teorema com decaimento no infinito.

Exercício N110 *Aprofundamento; médio*

Para $F = (-y, x, 0)$, encontre um potencial vetorial $A = (0, 0, a(x, y))$ e uma decomposição com $\Phi = 0$.

Exercício N111 *Justificação; médio*

Mostre que substituir A por $A+\nabla\chi$ não muda $\nabla\times A$. Explique por que o potencial vetorial precisa de uma normalização adicional.

7.9. Identidades de Green

As identidades de Green combinam o Teorema de Gauss com a regra do produto. Elas relacionam derivadas no interior a valores e derivadas normais na fronteira, permitindo demonstrar, por exemplo, unicidade de soluções de problemas de Laplace.

Teorema 7.19

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira $S = \partial U$ por partes C^1, orientada pela normal exterior, e sejam ϕ e ψ campos escalares de classe C^2 em uma vizinhança de $\overline{U}$. Então

- $\displaystyle\oiint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right] dS = \iiint_U \left[\phi \nabla^2 \psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi)\right] dV$ *primeira identidade de Green*

■ $\iint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = \iiint_U (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, \mathrm{d}V$ *segunda identidade de Green.*

Demonstração. Considere a grandeza

$$\mathbf{F} = \phi \nabla \psi$$

Segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \\ \hat{n} \cdot \mathbf{F} &= \phi \partial \psi / \partial n \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\iint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = \iiint_U [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)]\, \mathrm{d}V$$

que é conhecida como a *primeira identidade de Green.* Trocando ϕ e ψ, temos

$$\iint_S \left[\psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = \iiint_U [\psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi)]\, \mathrm{d}V$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira, obtemos

$$\iint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right] \mathrm{d}S = \iiint_U (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, \mathrm{d}V$$

que é conhecida como a *segunda identidade de Green.*

■

Exercícios

Exercício N112 Justificação; médio

Aplique a primeira identidade de Green a u harmônica em um domínio limitado, com $u = 0$ na fronteira, e prove a unicidade do problema de Dirichlet.

Exercício N113 Justificação; médio

Use a segunda identidade de Green para duas funções harmônicas e interprete a igualdade das integrais de fronteira resultantes.

Exercício N114 Justificação; médio

Se u é harmônica e $\partial_n u = 0$ na fronteira de um domínio limitado e conexo, use a primeira identidade para mostrar que u é constante.

Parte II.

Cálculo Tensorial

CAPÍTULO

8

Coordenadas Curvilíneas

8.1. Coordenadas Curvilíneas

Escolher coordenadas adaptadas à geometria pode simplificar um campo ou uma região. O custo é que os vetores de base passam a depender da posição. Os fatores de escala convertem incrementos das coordenadas em comprimentos físicos.

A posição de um ponto P no espaço pode ser representada de muitas maneiras diferentes. Três sistemas comumente usados em aplicações são o *sistema cartesiano retangular de coordenadas* (x, y, z), o *sistema de coordenadas polares cilíndricas* (r, ϕ, z) e o *sistema de coordenadas esféricas* (r, φ, ϕ). Os dois últimos são os exemplos mais importantes de sistemas de coordenadas *curvilíneas ortogonais* (u_1, u_2, u_3).

Definição 8.1

Uma função $\mathbf{u} : U \to V$ é chamada de **mudança de coordenadas** (diferenciável) se

- $\mathbf{u}$ é bijetiva
- U e V são abertos e $\mathbf{u}$ é de classe C^1
- D$\mathbf{u}$ é invertível em todo ponto.

No caso tridimensional, suponha que (x, y, z) possam ser expressas como funções unívocas das variáveis (u_1, u_2, u_3). Suponha também que (u_1, u_2, u_3) possam ser

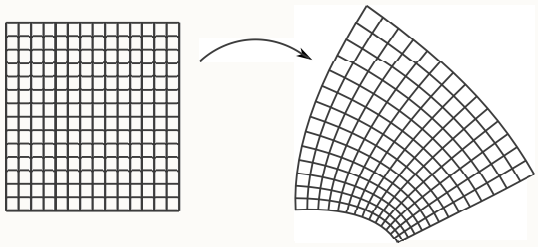
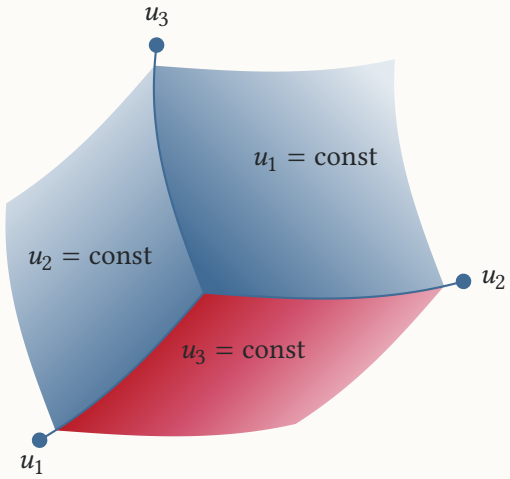


Figura 8.1.: Sistema de Coordenadas

expressas como funções unívocas de (x, y, z).

Por cada ponto $P : (a, b, c)$ do espaço passam três superfícies: $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ e $u_3 = c_3$, em que as constantes c_i são dadas por $c_i = u_i(a, b, c)$.

Se, por exemplo, u_2 e u_3 forem mantidos fixos e u_1 variar, obtém-se uma *trajetória*. Essa trajetória é chamada de *curva* u_1. As curvas u_2 e u_3 são construídas de modo análogo.



O sistema (u_1, u_2, u_3) é chamado de **sistema de coordenadas curvilíneas**.

Exemplo 8.1

As coordenadas cilíndricas parabólicas são definidas em termos das coordena-

das cartesianas por:

$$x = \sigma\tau$$
$$y = \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \sigma^2\right)$$
$$z = z$$

As superfícies coordenadas constantes são o plano

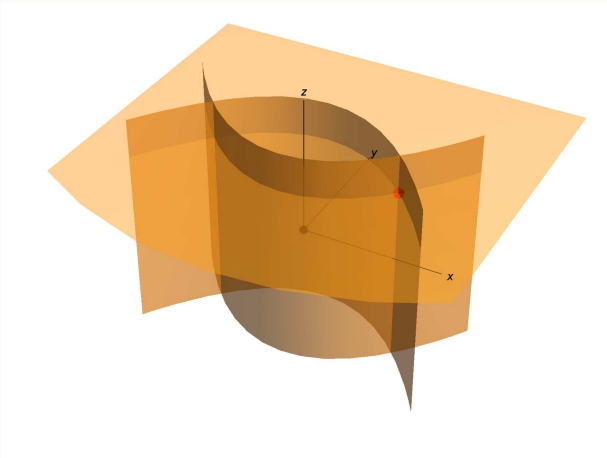
$$z = z_1$$

e os cilindros parabólicos

$$2y = \frac{x^2}{\sigma^2} - \sigma^2$$

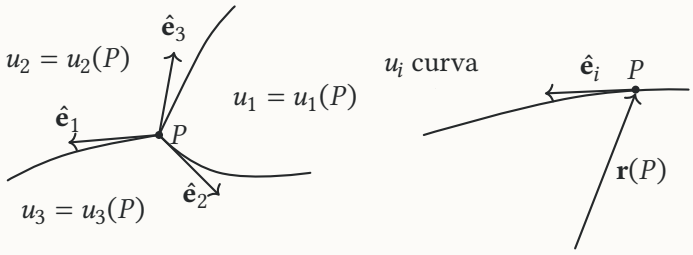
e

$$2y = -\frac{x^2}{\tau^2} + \tau^2$$



Coordenadas I

As superfícies $u_2 = u_2(P)$ e $u_3 = u_3(P)$ se intersectam em uma curva ao longo da qual apenas u_1 varia.



Seja $\hat{\mathbf{e}}_1$ o vetor unitário tangente à curva em P. Sejam $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ vetores unitários tangentes às curvas ao longo das quais apenas u_2 e u_3, respectivamente, variam.

Claramente,

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} / \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right\|.$$

E, se definirmos $h_i = |\partial \mathbf{r}/\partial u_i|$, então

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot h_i$$

As quantidades h_i são frequentemente chamadas de **fatores de escala** do sistema de coordenadas.

Exemplo 8.2 — Versores em Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas, $\mathbf{r} = (r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), r\cos(\phi))$; portanto:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\|} = \frac{(\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \cos(\phi))}{1}$$

$$\mathbf{e}_r = (\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \cos(\phi))$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|} = \frac{(-r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), r\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), 0)}{r\,\mathrm{sen}(\phi)}$$

$$\mathbf{e}_\theta = (-\,\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta), 0)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} = \frac{(r\cos(\theta)\cos(\phi), r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), -r\,\mathrm{sen}(\phi))}{r}$$

$$\mathbf{e}_\phi = (\cos(\theta)\cos(\phi), \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi), -\mathrm{sen}(\phi))$$

Coordenadas II

Sejam $(\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2, \hat{\mathbf{e}}^3)$ vetores unitários em P, nas direções normais a $u_1 = u_1(P)$, $u_2 = u_2(P)$ e $u_3 = u_3(P)$, respectivamente, orientados de modo que u_1, u_2, u_3 cresçam nas direções $\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2, \hat{a}_3$. Claramente, devemos ter

$$\hat{\mathbf{e}}^i = \nabla(u_i)/|\nabla u_i|$$

Definição 8.2

Se $(\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2, \hat{\mathbf{e}}^3)$ são mutuamente ortogonais, dizemos que o sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas curvilíneas **ortogonais**.

Teorema 8.1

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $(\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2, \hat{\mathbf{e}}^3)$ são mutuamente ortogonais;
2. $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ são mutuamente ortogonais;
3. $\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}^i = \dfrac{\partial \mathbf{r}/\partial u_i}{|\partial \mathbf{r}/\partial u_i|} = \nabla u_i/|\nabla u_i|$ para $i = 1, 2, 3$

Assim, associamos a um sistema geral de coordenadas curvilíneas dois conjuntos de vetores de base em cada ponto:

$$\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$$

é a **base covariante**, e

$$\{\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2, \hat{\mathbf{e}}^3\}$$

é a **base contravariante**.

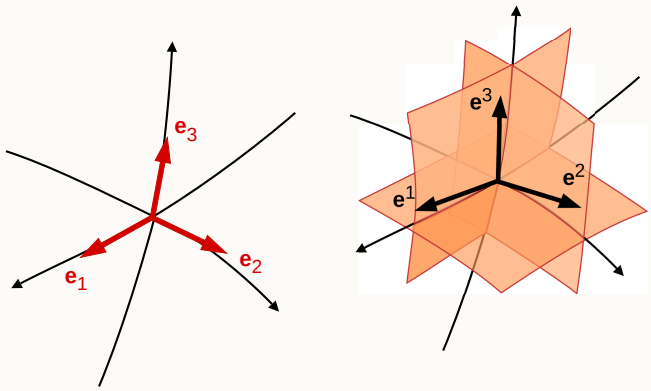


Figura 8.2.: Bases Covariante e Contravariante

Observe a seguinte igualdade importante:

$$\hat{\boldsymbol{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta^i_j.$$

Exemplo 8.3

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z & z &= z \end{aligned}$$

em que $0 \leq \theta \leq \pi$ se $y \geq 0$ e $\pi < \theta < 2\pi$ se $y < 0$ Para as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e as constantes r_0, θ_0 e z_0, vemos na Figura 1.5 que a superfície $r = r_0$ é um cilindro de raio r_0 centrado no eixo z, a superfície $\theta = \theta_0$ é um semiplano que parte do eixo z, e a superfície $z = z_0$ é um plano paralelo ao plano xy.

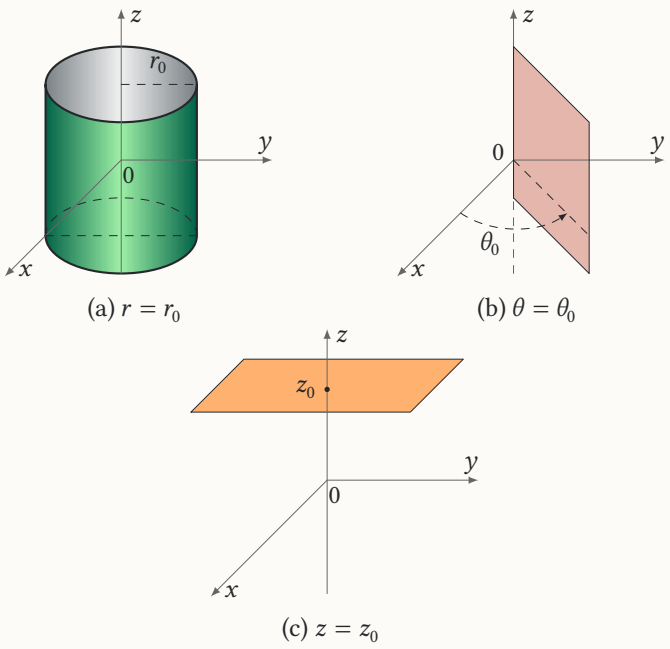


Figura 8.3.: Superfícies coordenadas cilíndricas

Os vetores unitários $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}$ em qualquer ponto P são perpendiculares às superfícies r = constante, θ = constante e z = constante que passam por P, nas direções de crescimento de r, θ e z. Observe que as direções dos vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ variam de ponto para ponto, ao contrário dos vetores unitários cartesianos correspondentes.

Observação 8.2

Nas fórmulas do rotacional e nas relações por produto vetorial, assumimos que a base ortonormal local $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ tem orientação positiva. As componentes A_i deste capítulo são componentes físicas nessa base unitária. Elas não devem ser confundidas com componentes na base coordenada não normalizada $\partial r/\partial u_i$, que serão estudadas no cálculo tensorial.

Exercícios

Exercício N115 **Consolidação; médio**

Calcule os fatores de escala de $r(u, v, z) = (uv, (v^2 - u^2)/2, z)$ e verifique a ortogonalidade. Determine onde a parametrização é singular.

Exercício N116 **Consolidação; básico**

Para as coordenadas cilíndricas, expresse os vetores unitários em termos de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e derive-os em relação a θ.

Exercício N117 **Justificação; médio**

Explique por que nenhuma faixa angular que identifique θ e $\theta + 2\pi$ pode ser usada como uma única carta bijetiva.

8.2. Elementos de Linha e de Volume em Sistemas de Coordenadas Ortogonais

Os fatores de escala aparecem no comprimento, na área e no volume. Em coordenadas ortogonais, as direções coordenadas são perpendiculares, de modo que o elemento de volume é o produto dos três comprimentos locais.

Definição 8.3 — Elemento de Linha

Como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$, o *elemento de linha* $\mathrm{d}\mathbf{r}$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\,\mathrm{d}u_3 \\ &= h_1\,\mathrm{d}u_1\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + h_2\,\mathrm{d}u_2\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}} + h_3\,\mathrm{d}u_3\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{3}}\end{aligned}$$

Se o sistema é ortogonal, segue que

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}\mathbf{r})\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}) = h_1^2(\mathrm{d}u_1)^2 + h_2^2(\mathrm{d}u_2)^2 + h_3^2(\mathrm{d}u_3)^2$$

Daqui em diante, suporemos que o sistema seja ortogonal, de modo que

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial u_i}{|\partial \mathbf{r}/\partial u_i|} = \nabla u_i/|\nabla u_i| \qquad \text{para } i = 1, 2, 3$$

Em particular, os elementos de linha ao longo das curvas de interseção das superfícies u_i têm comprimentos $h_1\,\mathrm{d}u_1$, $h_2\,\mathrm{d}u_2$, $h_3\,\mathrm{d}u_3$, respectivamente.

Definição 8.4 — Elemento de Volume

Em $\mathbb{R}^3$, o elemento de volume é dado por

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z.$$

Em um sistema de coordenadas $x = x(u_1, u_2, u_3)$, $y = y(u_1, u_2, u_3)$, $z = z(u_1, u_2, u_3)$, o elemento de volume é:

$$\mathrm{d}V = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}\right| \mathrm{d}u_1\ \mathrm{d}u_2\ \mathrm{d}u_3.$$

Proposição 8.3

Em um sistema ortogonal, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= (h_1\,\mathrm{d}u_1)(h_2\,\mathrm{d}u_2)(h_3\,\mathrm{d}u_3)\\ &= h_1h_2h_3\ \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

Nesta seção, obtemos as expressões dos elementos de linha e de volume em alguns sistemas clássicos de coordenadas ortogonais.

(i) Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}\\ (\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}\mathbf{r})\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}) = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\end{aligned}$$

(ii) Coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z) As coordenadas se relacionam com as cartesianas por

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z$$

Temos $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$, mas podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathrm{d}z\\ &= (\cos\theta)\ \mathrm{d}r - (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\ \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\mathrm{d}\theta + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathrm{d}z \\ &= (\operatorname{sen}\theta)\ \mathrm{d}r + (r\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\ &= \cdots = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \end{aligned}$$

Assim, para esse sistema de coordenadas, os fatores de escala são

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = 1$$

e o elemento de volume é

$$\mathrm{d}V = r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

(iii) Coordenadas polares esféricas (r, ϕ, θ) Neste caso, a relação entre as coordenadas é

$$x = r\operatorname{sen}\phi\cos\theta;\ \ y = r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta;\ \ z = r\cos\phi$$

Novamente, temos $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$ e sabemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi \\ &= (\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (-r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta + r\cos\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi \\ &= \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}r + r\operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + r\cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

juntamente com

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi \\ &= (\cos\phi)\,\mathrm{d}r - (r\operatorname{sen}\phi)\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, após alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 \\ &= \cdots = (\mathrm{d}r)^2 + r^2(\mathrm{d}\phi)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\phi(\mathrm{d}\theta)^2 \end{aligned}$$

Assim, os fatores de escala são

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\,\mathrm{sen}\,\phi$$

e o elemento de volume é

$$\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

Exemplo 8.4

Determine o volume e a área da superfície de uma esfera de raio a, bem como a área de uma calota esférica que subtende um ângulo α no centro da esfera.

$$\mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

e um elemento de superfície de uma esfera de raio a é, retirando o fator $h_1\,\mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}S = a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta$$

$\therefore$ o volume total é

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}V &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a} r^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi[-\cos\phi]_0^{\pi}\int_0^a r^2\ \mathrm{d}r \\ &= 4\pi a^3/3\end{aligned}$$

A área da superfície é

$$\begin{aligned}\int_S \mathrm{d}S &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi a^2[-\cos\phi]_0^{\pi} \\ &= 4\pi a^2\end{aligned}$$

A área da calota é

$$\begin{aligned}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\alpha} a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta &= 2\pi a^2[-\cos\phi]_0^{\alpha} \\ &= 2\pi a^2(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

Exercícios

Exercício N118 **Justificação; médio**

Deduza os elementos de linha, área em $r = a$ e volume das coordenadas esféricas.

Exercício N119 **Aplicação; básico**

Uma hélice tem $r = a$, $\theta = t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$. Calcule o comprimento usando o elemento de linha cilíndrico.

Exercício N120 **Consolidação; básico**

Use o elemento de volume esférico para calcular o volume entre as esferas de raios $a < b$.

8.3. Gradiente em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

O gradiente é um vetor geométrico, e sua expressão deve produzir a mesma variação escalar em qualquer sistema. Comparar $\mathrm{d}\Phi$ com $\nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ determina os fatores de escala sem memorizar uma fórmula.

Seja

$$\nabla\Phi = \lambda_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \lambda_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

em um sistema geral de coordenadas, em que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ devem ser determinados. Recorde que o elemento de comprimento é dado por

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1\,\mathrm{d}u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + h_2\,\mathrm{d}u_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + h_3\,\mathrm{d}u_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

Agora,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\,\mathrm{d}u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\,\mathrm{d}u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\,\mathrm{d}u_3 \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\ &= (\nabla\Phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \end{aligned}$$

Mas, usando as expressões acima para $\nabla\Phi$ e $\mathrm{d}\mathbf{r}$:

$$(\nabla\Phi) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \lambda_1 h_1\,\mathrm{d}u_1 + \lambda_2 h_2\,\mathrm{d}u_2 + \lambda_3 h_3\,\mathrm{d}u_3$$

e, portanto, vemos que

$$h_i \lambda_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Assim, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 8.4 — Gradiente em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

$$\nabla\Phi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

Essa proposição permite escrever facilmente ∇ em outros sistemas de coordenadas.

(i) Coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z) Recorde que $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. Assim,

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

(ii) Coordenadas polares esféricas (r, ϕ, θ) Temos $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\,\mathrm{sen}\,\phi$ e, portanto,

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\phi}}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\hat{\theta}}{r\,\mathrm{sen}\,\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Exemplo 8.5

Calcule o gradiente da função expressa em coordenadas cilíndricas por

$$f(r, \theta, z) = r\,\mathrm{sen}\,\theta + z.$$

Solução.

$$\nabla f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{8.1}$$

$$= \hat{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{\theta}\cos\theta + \hat{z} \tag{8.2}$$

◁

8.3.1. Expressões para os Vetores Unitários

Da expressão para ∇ que acabamos de obter, vemos imediatamente que

$$\hat{\mathbf{e}}_i = h_i\nabla u_i$$

Alternativamente, como os vetores unitários são ortogonais, se conhecemos dois deles podemos determinar o terceiro pela relação

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = h_2h_3(\nabla u_2 \times \nabla u_3)$$

e, de modo análogo, para as demais componentes, por permutação cíclica.

Exercícios

Exercício N121 **Consolidação; médio**

Para $\Phi(r,\theta,z) = r^2\cos\theta + z^2$, calcule o gradiente cilíndrico em $r>0$.

Exercício N122 **Consolidação; básico**

Para $\Phi(r) = 1/r$ em $r>0$, calcule o gradiente esférico e interprete a direção.

Exercício N123 **Justificação; básico**

Calcule $\nabla(x^2+y^2)$ em coordenadas cartesianas e cilíndricas e mostre que os vetores obtidos coincidem.

8.4. Divergência em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

A divergência mede fluxo por volume. Em coordenadas curvilíneas, as áreas das faces de uma célula variam com a posição; por isso, derivamos o produto da componente física do campo pelos fatores de área.

Suponha que tenhamos um campo vetorial

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2\hat{\mathbf{e}}_2 + A_3\hat{\mathbf{e}}_3$$

Considere então

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(A_1\hat{\mathbf{e}}_1) &= \nabla\cdot\left[A_1 h_2 h_3(\nabla u_2\times\nabla u_3)\right]\\ &= A_1h_2h_3\nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3) + \nabla(A_1h_2h_3)\cdot\frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_2h_3}\end{aligned}$$

usando os resultados estabelecidos acima. Além disso, sabemos que

$$\nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{C}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{C}$$

e, portanto,

$$\nabla\cdot(\nabla u_2\times\nabla u_3) = (\nabla u_3)\cdot\operatorname{curl}(\nabla u_2) - (\nabla u_2)\cdot\operatorname{curl}(\nabla u_3) = 0$$

pois o rotacional de um gradiente é sempre nulo. Resta, portanto,

$$\nabla\cdot(A_1\hat{\mathbf{e}}_1) = \nabla(A_1h_2h_3)\cdot\frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_2h_3} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3)$$

Podemos proceder de modo análogo para as outras componentes e concluir que

Proposição 8.5 — Divergência em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

Usando a proposição acima, torna-se simples escrever a divergência em outros sistemas de coordenadas.

(i) Coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z)

Como $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$, usando a fórmula acima temos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{\partial}{\partial \theta}(A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(rA_3)\right] \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial r} + \frac{A_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\end{aligned}$$

(ii) Coordenadas polares esféricas (r, ϕ, θ)

Temos $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \operatorname{sen}\phi$. Logo,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r \operatorname{sen}\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial \theta}(rA_3)\right]$$

Exemplo 8.6

Calcule a divergência do campo vetorial expresso em coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) por $\mathbf{f} = \hat{r} + \hat{\phi} + \hat{\theta}$

Solução.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \operatorname{sen}\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r \operatorname{sen}\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} r\right] && (8.3) \\ &= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\phi}\left[2r \operatorname{sen}\phi + r\cos\phi\right] && (8.4)\end{aligned}$$

◁

Exercícios

Exercício N124 **Consolidação; básico**

Em coordenadas cilíndricas, calcule a divergência de $A = cr\,\hat{r}$ e confira o resultado em coordenadas cartesianas.

Exercício N125 **Consolidação; médio**

Em coordenadas esféricas, determine a condição para $A = f(r)\hat{r}$ ter divergência nula em $a < r < b$.

Exercício N126 **Aplicação; médio**

Um escoamento cilíndrico radial tem vazão por unidade de altura constante. Use a divergência para encontrar a dependência de sua velocidade com r.

8.5. Rotacional em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

O rotacional mede circulação por área orientada. Sua expressão envolve tanto as componentes do campo quanto a variação dos vetores de base. A notação por determinante organiza o cálculo, mas as derivadas devem atuar sobre os produtos indicados na última linha.

Vamos calcular o rotacional da primeira componente de $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (A_1 \hat{\mathbf{e}}_1) &= \nabla \times (A_1 h_1 \nabla u_1) \\
&= A_1 h_1 \nabla \times (\nabla u_1) + \nabla(A_1 h_1) \times \nabla u_1 \\
&= 0 + \nabla(A_1 h_1) \times \nabla u_1 \\
&= \left[\frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_1) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) \right] \times \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1} \\
&= \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1) - \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)
\end{aligned}$$

(pois $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = 0$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_3$, $\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2$).

Podemos, naturalmente, obter $\operatorname{curl}(A_2\hat{\mathbf{e}}_2)$ e $\operatorname{curl}(A_3\hat{\mathbf{e}}_3)$ de modo análogo. Obtém-se

$$\nabla \times (A_2 \hat{\mathbf{e}}_2) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_2 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 A_2) - \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)$$

$$\nabla \times (A_3 \hat{\mathbf{e}}_3) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 A_3)$$

Somando essas três contribuições, podemos escrever o resultado na forma do determinante

Proposição 8.6 — Rotacional em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

$$\operatorname{curl}\mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{e}}_1 & h_2\hat{\mathbf{e}}_2 & h_3\hat{\mathbf{e}}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

A partir daí, é imediato escrever as expressões do rotacional em diversos sistemas de coordenadas ortogonais.

(i) Coordenadas polares cilíndricas

$$\operatorname{curl}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ A_1 & rA_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

(ii) Coordenadas polares esféricas

$$\operatorname{curl}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\phi}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & r\operatorname{sen}\phi\hat{\theta} \\ \partial_r & \partial_\phi & \partial_\theta \\ A_1 & rA_2 & r\operatorname{sen}\phi A_3 \end{vmatrix}$$

Exercícios

Exercício N127 **Consolidação; básico**

Calcule o rotacional de $A = \omega r\,\hat{\theta}$ em coordenadas cilíndricas.

Exercício N128 **Justificação; médio**

Para $A = c\hat{\theta}/r$, com $r > 0$, calcule o rotacional e a circulação em um círculo de raio a. Explique por que os resultados são compatíveis.

Exercício N129 **Justificação; médio**

Use a fórmula cilíndrica para conferir que o rotacional de $\nabla\Phi$ é zero para $\Phi = r^2 z$, em uma carta regular.

8.6. O Laplaciano em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

O laplaciano escalar é a divergência do gradiente. Combinar as fórmulas anteriores conserva os fatores geométricos necessários. Para campos com simetria radial, ele se reduz a uma equação de uma variável, útil em problemas de difusão e potencial.

Das fórmulas já obtidas para o gradiente e a divergência, vemos que

Proposição 8.7 — O Laplaciano em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \nabla\cdot(\nabla\Phi)\\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1})+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2})+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3})\right]\end{aligned}$$

(i) Coordenadas polares cilíndricas (r,θ,z)

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\\ &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

(ii) Coordenadas polares esféricas (r,ϕ,θ)

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\operatorname{sen}\phi\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\operatorname{sen}\phi\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right]\\ &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\end{aligned}$$

Exemplo 8.7

Em coordenadas cartesianas, a diferenciação direta mostra que $\nabla\|\mathbf{r}\|^2 = 2\,\mathbf{r}$ e $\Delta\|\mathbf{r}\|^2 = 6$, em que $\mathbf{r}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ em coordenadas cartesianas. Verifique que obtemos os mesmos resultados ao passar para coordenadas esféricas.

Solução: Como $\|\mathbf{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ em coordenadas esféricas, tome $F(\rho,\theta,\phi) = \rho^2$ (de modo que $F(\rho,\theta,\phi) = \|\mathbf{r}\|^2$). O gradiente de F em coordenadas esféricas é

$$\begin{aligned}
\nabla F &= \frac{\partial F}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \phi}\,\mathbf{e}_\phi \\
&= 2\rho\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}(0)\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}(0)\,\mathbf{e}_\phi \\
&= 2\rho\,\mathbf{e}_\rho = 2\rho\,\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\text{, como mostramos anteriormente; portanto} \\
&= 2\rho\,\frac{\mathbf{r}}{\rho} = 2\,\mathbf{r}\text{, como esperado. E o laplaciano é} \\
\Delta F &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial F}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial F}{\partial \phi}\right) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\,2\rho) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}(0) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi\,(0)) \\
&= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho^3) + 0 + 0 \\
&= \frac{1}{\rho^2}(6\rho^2) = 6\text{, como esperado.}
\end{aligned}$$

$\nabla\Phi$	=	$\frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$
$\nabla\cdot\mathbf{A}$	=	$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$
$\operatorname{curl}\mathbf{A}$	=	$\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{e}}_1 & h_2\hat{\mathbf{e}}_2 & h_3\hat{\mathbf{e}}_3 \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$
$\nabla^2\Phi$	=	$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3\frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1\frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3})\right]$

Tabela 8.1.: Operadores vetoriais em coordenadas curvilíneas ortogonais u_1, u_2, u_3.

Exemplo 8.8 — Condução radial em uma casca esférica

Uma casca $a < r < b$, com $0 < a < b$, tem condutividade constante e não possui fontes internas. Em regime estacionário e com simetria esférica, a temperatura $T(r)$ satisfaz $\Delta T = 0$. Determine T quando $T(a) = T_a$ e $T(b) = T_b$.

Solução. A fórmula esférica reduz a equação a

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0.$$

Integrando, $r^2 T' = C$ e $T = A + B/r$. Pelas condições de fronteira,

$$B = \frac{T_a - T_b}{1/a - 1/b}, \qquad A = T_a - \frac{B}{a}.$$

O fluxo radial de calor é $q_r = -\kappa T' = \kappa B/r^2$. Seu fluxo por qualquer esfera da casca é $4\pi r^2 q_r = 4\pi\kappa B$, constante. A queda com $1/r^2$ compensa o aumento da área, como exige a conservação em regime estacionário. ◁

Exercícios

Exercício N130 **Consolidação; médio**

Calcule Δr^p em coordenadas esféricas, para $r > 0$ e $p \in \mathbb{R}$, e identifique os valores de p que dão funções harmônicas.

Exercício N131 **Aplicação; médio**

Uma temperatura estacionária depende apenas do raio cilíndrico em $a < r < b$. Resolva $\Delta T = 0$ com $T(a) = T_a$ e $T(b) = T_b$.

Exercício N132 **Justificação; médio**

Confira o laplaciano de $x^2 + y^2 + z^2$ em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

8.7. Exemplos de Coordenadas Ortogonais

Os sistemas abaixo são escolhidos pelo formato de suas superfícies coordenadas. Os fatores de escala devem ser calculados das derivadas da parametrização e usados apenas onde a mudança de coordenadas é regular. Eixos, polos e cortes angulares exigem outras cartas ou tratamento separado.

Coordenadas Polares Esféricas $(r, \phi, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \tag{8.5}$$
$$y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \tag{8.6}$$
$$z = r \cos \phi \tag{8.7}$$

Os fatores de escala das coordenadas polares esféricas são:

$$h_1 = 1 \tag{8.8}$$
$$h_2 = r \tag{8.9}$$
$$h_3 = r \operatorname{sen} \phi \tag{8.10}$$

Coordenadas Polares Cilíndricas $(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$

$$x = r \cos \theta \tag{8.11}$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta \tag{8.12}$$
$$z = z \tag{8.13}$$

Os fatores de escala das coordenadas polares cilíndricas são:

$$h_1 = h_3 = 1 \tag{8.14}$$
$$h_2 = r \tag{8.15}$$

Coordenadas Cilíndricas Parabólicas $(u, v, z) \in (-\infty, \infty) \times [0, \infty) \times (-\infty, \infty)$

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \tag{8.16}$$
$$y = uv \tag{8.17}$$
$$z = z \tag{8.18}$$

Os fatores de escala das coordenadas cilíndricas parabólicas são:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{8.19}$$
$$h_3 = 1 \tag{8.20}$$

Coordenadas Paraboloidais $(u, v, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, 2\pi)$

$$x = uv\cos\theta \tag{8.21}$$
$$y = uv\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{8.22}$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \tag{8.23}$$

Os fatores de escala das coordenadas paraboloidais são:

$$h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{8.24}$$
$$h_3 = uv \tag{8.25}$$

Coordenadas Cilíndricas Elípticas $(u, v, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$

$$x = a\cosh u\cos v \tag{8.26}$$
$$y = a\sinh u\,\mathrm{sen}\,v \tag{8.27}$$
$$z = z \tag{8.28}$$

Os fatores de escala das coordenadas cilíndricas elípticas são:

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2 u + \mathrm{sen}^2\, v} \tag{8.29}$$
$$h_3 = 1 \tag{8.30}$$

Coordenadas Esferoidais Prolatas $(\xi, \eta, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$

$$x = a\sinh\xi\,\mathrm{sen}\,\eta\cos\theta \tag{8.31}$$
$$y = a\sinh\xi\,\mathrm{sen}\,\eta\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{8.32}$$
$$z = a\cosh\xi\cos\eta \tag{8.33}$$

Os fatores de escala das coordenadas esferoidais prolatas são:

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2\xi + \mathrm{sen}^2\,\eta} \tag{8.34}$$
$$h_3 = a\sinh\xi\,\mathrm{sen}\,\eta \tag{8.35}$$

Coordenadas Esferoidais Oblatas $(\xi, \eta, \theta) \in [0, \infty) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi)$

$$x = a\cosh\xi\cos\eta\cos\theta \tag{8.36}$$
$$y = a\cosh\xi\cos\eta\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{8.37}$$
$$z = a\sinh\xi\,\mathrm{sen}\,\eta \tag{8.38}$$

Os fatores de escala das coordenadas esferoidais oblatas são:

$$h_1 = h_2 = a\sqrt{\operatorname{sinh}^2 \xi + \operatorname{sen}^2 \eta} \tag{8.39}$$
$$h_3 = a \cosh \xi \cos \eta \tag{8.40}$$

Coordenadas Elipsoidais

$$(\lambda, \mu, \nu) \tag{8.41}$$
$$\lambda < c^2 < b^2 < a^2, \tag{8.42}$$
$$c^2 < \mu < b^2 < a^2, \tag{8.43}$$
$$c^2 < b^2 < \nu < a^2, \tag{8.44}$$

$\frac{x^2}{a^2-q_i} + \frac{y^2}{b^2-q_i} + \frac{z^2}{c^2-q_i} = 1$ em que $(q_1, q_2, q_3) = (\lambda, \mu, \nu)$

Os fatores de escala das coordenadas elipsoidais são: $h_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(q_j-q_i)(q_k-q_i)}{(a^2-q_i)(b^2-q_i)(c^2-q_i)}}$

Coordenadas Bipolares $(u, v, z) \in [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$

$$x = \frac{a \operatorname{sinh} v}{\cosh v - \cos u} \tag{8.45}$$
$$y = \frac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u} \tag{8.46}$$
$$z = z \tag{8.47}$$

Os fatores de escala das coordenadas bipolares são:

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \tag{8.48}$$
$$h_3 = 1 \tag{8.49}$$

Coordenadas Toroidais $(u, v, \theta) \in (-\pi, \pi] \times [0, \infty) \times [0, 2\pi)$

$$x = \frac{a \operatorname{sinh} v \cos \theta}{\cosh v - \cos u} \tag{8.50}$$
$$y = \frac{a \operatorname{sinh} v \operatorname{sen} \theta}{\cosh v - \cos u} \tag{8.51}$$
$$z = \frac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u} \tag{8.52}$$

Os fatores de escala das coordenadas toroidais são:

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\cosh v - \cos u} \tag{8.53}$$

$$h_3 = \frac{a \sinh v}{\cosh v - \cos u} \tag{8.54}$$

Coordenadas Cônicas

$$(\lambda, \mu, \nu) \tag{8.55}$$

$$\nu^2 < b^2 < \mu^2 < a^2 \tag{8.56}$$

$$\lambda \in [0, \infty) \tag{8.57}$$

$$x = \frac{\lambda \mu \nu}{ab} \tag{8.58}$$

$$y = \frac{\lambda}{a}\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}} \tag{8.59}$$

$$z = \frac{\lambda}{b}\sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{a^2 - b^2}} \tag{8.60}$$

Os fatores de escala das coordenadas cônicas são:

$$h_1 = 1 \tag{8.61}$$

$$h_2^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - a^2)(b^2 - \mu^2)} \tag{8.62}$$

$$h_3^2 = \frac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)} \tag{8.63}$$

Exercícios

A

Nos Exercícios 1–6, determine o laplaciano da função $f(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas.

1. [C1] $f(x, y, z) = x + y + z$

2. [C1] $f(x, y, z) = x^5$

3. [C1] $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

4. [C1] $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

5. [C1] $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$

6. [C1] $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$

7. [A1] Determine o laplaciano da função do Exercício 3 em coordenadas esféricas.

8. [A1] Determine o laplaciano da função do Exercício 6 em coordenadas esféricas.

9. [A1] Seja $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$ em coordenadas cartesianas. Determine ∇f em coordenadas cilíndricas.

10. [A1] Para $\mathbf{f}(r,\theta,z) = r\,\mathbf{e}_r + z\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_\theta + rz\,\mathbf{e}_z$ em coordenadas cilíndricas, determine div $\mathbf{f}$ e curl $\mathbf{f}$.

11. [A1] Para $\mathbf{f}(\rho,\theta,\phi) = \mathbf{e}_\rho + \rho\,\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta + \rho\,\mathbf{e}_\phi$ em coordenadas esféricas, determine div $\mathbf{f}$ e curl $\mathbf{f}$.

B

Nos Exercícios 12–23, demonstre a fórmula indicada ($r = \|\mathbf{r}\|$ é o comprimento do campo vetorial posição $\mathbf{r}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$).

12. [J2] $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$

13. [J2] $\Delta(1/r) = 0$

14. [J2] $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3) = 0$

15. [J2] $\nabla(\ln r) = \mathbf{r}/r^2$

16. [J2] $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G}$

17. [J2] $\operatorname{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{curl}\mathbf{F} + \operatorname{curl}\mathbf{G}$

18. [J2] $\operatorname{div}(f\,\mathbf{F}) = f\operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

19. [J2] $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{G}$

20. [J2] $\operatorname{div}(\nabla f\times\nabla g) = 0$

21. [J2] $\operatorname{curl}(f\,\mathbf{F}) = f\operatorname{curl}\mathbf{F} + (\nabla f)\times\mathbf{F}$

22. [J2] $\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}$

23. [J2] $\Delta(fg) = f\,\Delta g + g\,\Delta f + 2(\nabla f\cdot\nabla g)$

CAPÍTULO

9

Tensores

Começamos pelos covetores e pelas formas bilineares e, a partir deles, definimos tensores como aplicações multilineares. Em seguida, estudamos suas componentes, mudanças de base, simetrias e o produto exterior.

9.1. Funcional linear

Um covetor mede um vetor e devolve um número. Essa interpretação já apareceu no diferencial de uma função: em um ponto fixo, o diferencial recebe um deslocamento e fornece sua variação de primeira ordem. A linearidade dessa medida é a propriedade central.

Definição 9.1

A função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um **funcional linear** se satisfaz a

$$\textbf{condição de linearidade:} \quad f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}),$$

ou, em palavras: "o valor em uma combinação linear é a combinação linear dos valores."

Um funcional linear também é chamado de **função linear**, **1-forma** ou **covetor**. Isso se estende facilmente a combinações lineares com qualquer número de

termos; por exemplo,

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{N} v^i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} v^i f(\mathbf{e}_i)$$

onde os coeficientes $f_i \equiv f(\mathbf{e}_i)$ são as "componentes" de um covetor em relação à base $\{\mathbf{e}_i\}$, ou, em nossa notação abreviada,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(v^i \mathbf{e}_i) && \text{(expressão na base)} \\ &= v^i f(\mathbf{e}_i) && \text{(linearidade)} \\ &= v^i f_i \,. && \text{(definição das componentes)} \end{aligned}$$

Um covetor f é inteiramente determinado por seus valores f_i nos vetores da base, isto é, por suas componentes em relação a essa base.

Nossa condição de linearidade costuma ser apresentada separadamente como duas condições relativas às operações que definem um espaço vetorial:

- regra da soma: o valor da função na soma de vetores é a soma dos valores, $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$;
- regra do múltiplo escalar: o valor da função em um múltiplo escalar de um vetor é o escalar vezes o valor no vetor, $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$.

Exemplo 9.1

Na notação usual em $\mathbb{R}^3$, com coordenadas cartesianas $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$, todo funcional linear tem a forma $f(x, y, z) = ax + by + cz$.

Exemplo 9.2

Se fixarmos um vetor $\mathbf{n}$ no espaço euclidiano usual $\mathbb{R}^n$, temos uma função $\mathbf{n}^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{n}^*(\mathbf{v}) := \mathbf{n} \cdot \mathbf{v},$$

que é uma função linear.

Exercícios

Exercício N133 **Consolidação; básico**

Determine quais funções são funcionais lineares: $x+y$, $x+y+1$, xy e $2x-3y+z$.

Exercício N134 **Aplicação; básico**

Um sensor tem resposta linear $\alpha(x,y,z) = 3x - y + 2z$. Determine suas componentes na base canônica e o conjunto de deslocamentos que não alteram a leitura.

Exercício N135 **Justificação; básico**

Para $f(u) = a \cdot u$, mostre a linearidade e explique qual estrutura foi usada para transformar a em um covetor.

9.2. Espaços duais

Os covetores formam um espaço vetorial próprio. A base dual registra como extrair cada coordenada de um vetor, sem exigir que a base original seja ortogonal. Identificar vetores e covetores pelo produto interno é uma escolha adicional; o pareamento entre eles existe antes dessa escolha.

Definição 9.2

Definimos o **espaço dual** de $\mathbb{R}^n$, denotado por $(\mathbb{R}^n)^*$, como o conjunto de todas as funções lineares reais definidas em $\mathbb{R}^n$;

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{f \ : \ f \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ é uma função linear } \}$$

O espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ é, ele próprio, um espaço vetorial de dimensão n, com combinações lineares de covetores definidas da maneira usual para combinações lineares de funções, isto é, em termos dos valores: Para covetores f, g, escalares a, b e um vetor v, temos

$$(af + bg)(v) = af(v) + bg(v).$$

Teorema 9.1

Suponha que os vetores de $\mathbb{R}^n$ sejam representados como vetores coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Para cada vetor linha

$$[a] = [a_1 \ \dots \ a_n]$$

existe um funcional linear f definido por

$$f(\mathbf{x}) = [a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

e todo funcional linear em $\mathbb{R}^n$ pode ser expresso dessa forma

Observação 9.2

Como consequência do teorema anterior, podemos ver vetores como colunas e covetores como matrizes linha. A ação de covetores sobre vetores é o produto matricial do vetor linha pelo vetor coluna.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in \mathbb{R} \right\} \tag{9.1}$$

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{[a_1 \dots a_n], a_i \in \mathbb{R}\} \tag{9.2}$$

Exercício 9.1 — Fechamento do espaço dual

[J2]

Mostre que o espaço dual é fechado sob essa operação de combinação linear. Em outras palavras, mostre que, se f, g são funções lineares que satisfazem nossa condição de linearidade, então $a\,f + b\,g$ também satisfaz a condição de linearidade das funções lineares:

$$(a\,f + b\,g)(c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v}) = c_1(a\,f + b\,g)(\mathbf{u}) + c_2(a\,f + b\,g)(\mathbf{v}).$$

9.2.1. A base dual

Vamos construir uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$, chamada base dual $\{\mathbf{e}^i\}$ ou "a base dual a $\{\mathbf{e}_i\}$", definindo n covetores que satisfazem as seguintes "relações de dualidade":

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i = j\,, \\ 0 & \text{se } i \neq j\,, \end{cases}$$

onde o símbolo δ^i_j é chamado de "delta de Kronecker", nada mais que um símbolo para as componentes da matriz identidade $n \times n$, $I = (\delta^i_j)$. Em seguida, estendemos esses covetores a qualquer outro vetor por linearidade. Então, pela linearidade,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i(\mathbf{v}) &= \mathbf{e}^i(v^j \mathbf{e}_j) && \text{(expansão na base)} \\ &= v^j \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) && \text{(linearidade)} \\ &= v^j \delta^i_j && \text{(dualidade)} \\ &= v^i && \text{(definição do delta de Kronecker)} \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de que, para cada i, apenas o termo com $j = i$ na soma em j contribui para a soma. Alternativamente, multiplicar um vetor pela matriz identidade, $\delta^i_j v^j = v^i$, não altera o vetor. Assim, o cálculo mostra que o i-ésimo covetor da base dual, $\mathbf{e}^i$, seleciona a i-ésima componente v^i de um vetor v.

Teorema 9.3

Os n covetores $\{\mathbf{e}^i\}$ formam uma base de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Demonstração. Se $f \in V^*$, defina $f_i = f(e_i)$. Para $v = v^j e_j$, a linearidade dá

$$f(v) = v^j f(e_j) = f_j v^j = (f_i e^i)(v).$$

Como a igualdade vale para todo v, temos $f = f_i e^i$, portanto a família gera V^*. Para a independência, se $a_i e^i = 0$, avalie em cada e_j:

$$0 = (a_i e^i)(e_j) = a_i \delta^i_j = a_j.$$

Todos os coeficientes são nulos. A família é uma base e $\dim V^* = \dim V = n$. O argumento também mostra que as componentes de um covetor são seus valores nos vetores da base original. ∎

Exemplo 9.3 — Uma medida em duas bases

No plano, use a base $E = ((1,1),(1,-1))$. Encontre sua base dual, as coordenadas de $v = (3,1)$ e as componentes do covetor $\alpha(x,y) = 2x - y$. Confira $\alpha(v)$.

Solução. Escrevemos $(x,y) = c_1(1,1) + c_2(1,-1)$, de onde $c_1 = (x+y)/2$ e $c_2 = (x-y)/2$. Logo,

$$e^1(x,y) = \frac{x+y}{2}, \qquad e^2(x,y) = \frac{x-y}{2}.$$

As coordenadas de v são $(2,1)$, e as componentes do covetor são $\alpha(e_1) = 1$, $\alpha(e_2) = 3$. Portanto,

$$\alpha(v) = \alpha_i v^i = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5,$$

igual ao cálculo cartesiano $2 \cdot 3 - 1$. Vetor e covetor alteram suas componentes de formas diferentes, mas a leitura permanece a mesma. ◁

Exercícios

Exercício N136 **Consolidação; médio**

Encontre a base dual de $E = ((1,0),(1,2))$ e avalie cada covetor nos dois vetores da base.

Exercício N137 **Consolidação; médio**

Determine as componentes de $\alpha(x,y) = x - 2y$ em $E = ((1,1),(1,-1))$ e confira sua ação em $(2,3)$.

Exercício N138 **Justificação; médio**

Se B tem como colunas os vetores de uma base, mostre que as linhas de B^{-1} representam sua base dual em coordenadas canônicas.

9.3. Formas Bilineares

Uma forma bilinear mede dois vetores de maneira linear em cada um separadamente. Sua matriz permite calcular esses valores, mas não a transforma automaticamente em um operador de vetores. A diferença aparecerá tanto na mudança de base quanto no uso de uma métrica.

Uma forma bilinear é uma função linear em cada argumento separadamente:

1 $B(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = B(\mathbf{u},\mathbf{w}) + B(\mathbf{v},\mathbf{w})$ e $B(\lambda\mathbf{u},\mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u},\mathbf{v})$

2 $B(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}) = B(\mathbf{u},\mathbf{v}) + B(\mathbf{u},\mathbf{w})$ e $B(\mathbf{u},\lambda\mathbf{v}) = \lambda B(\mathbf{u},\mathbf{v})$

Seja $B(\mathbf{v},\mathbf{w})$ uma forma bilinear e sejam $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ uma base desse espaço. Os números B_{ij} determinados pela fórmula

$$B_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \tag{9.3}$$

chamam-se **coordenadas** ou **componentes** da forma B na base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Os números de 9.3 são escritos na forma de uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}, \tag{9.4}$$

que é chamada matriz da forma bilinear B na base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Para o elemento B_{ij} da matriz 9.4, o primeiro índice i especifica o número da linha e o segundo índice j especifica o número da coluna.

A matriz de uma forma bilinear simétrica B também é simétrica: $B_{ij} = B_{ji}$. Sejam $v^1, \ldots, v^n$ e $w^1, \ldots, w^n$ as coordenadas de dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ na base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Então os valores $B(\mathbf{v},\mathbf{w})$ são calculados pelas seguintes fórmulas:

$$B(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\, v^i\, w^j, \tag{9.5}$$

Exemplo 9.4 — Energia quadrática de dois modos

Em um modelo normalizado, a energia de dois deslocamentos é $E(u) = \frac{1}{2}u^T K u$, com $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule $E(1,2)$ e a força de restituição. Explique o papel da forma bilinear.

Solução. A forma é $B(u,v) = u^T K v$. Para $u = (1,2)$,

$$Ku = (4,7), \qquad B(u,u) = 18, \qquad E(u) = 9.$$

Como K é simétrica, o diferencial da energia é $\mathrm{d}E_u(h) = B(u,h)$. Essa expressão é um covetor em h. Após usar a métrica euclidiana para representá-lo por um vetor, $\nabla E = Ku$ e a força de restituição é $-\nabla E = (-4,-7)$. A forma bilinear e o operador associado têm matrizes iguais nessa base ortonormal, mas seus papéis geométricos são diferentes. ◁

Exercícios

Exercício N139 **Consolidação; básico**

Escreva a matriz da forma $B(u,v) = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 3u_2v_2$ e calcule $B((1,2),(2,-1))$.

Exercício N140 **Justificação; médio**

Para a forma anterior, mostre que $B(u,u) > 0$ para $u \neq 0$, completando quadrados.

Exercício N141 **Consolidação; básico**

Determine as partes simétrica e antissimétrica da forma com matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9.4. Tensores

A multilinearidade estende os exemplos anteriores a vários argumentos. O tipo do tensor informa quais argumentos são vetores e quais são covetores. As componentes são obtidas avaliando esses argumentos em bases e bases duais; não constituem a definição do objeto.

Seja $V = \mathbb{R}^n$ e seja $V^* = \mathbb{R}^{n*}$ seu espaço dual. Definimos

$$V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}}.$$

Definição 9.3

Uma **aplicação multilinear** de ordem k em V é uma função $\mathsf{T} : V^k \to \mathbb{R}$ que é linear em cada variável. Para cada posição i, mantendo os demais argumentos fixos,

$$\begin{aligned} &T(v_1, \dots, \lambda v + w, \dots, v_k) \\ &\quad = \lambda T(v_1, \dots, v, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, w, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Em outras palavras, dados $(k-1)$ vetores, $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$, a aplicação $\mathsf{T}_i : V \to \mathbb{R}$ definida por $\mathsf{T}_i(\mathbf{v}) = \mathsf{T}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_k)$ é linear.

Definição 9.4

- Um **tensor de tipo** (r, s) em V é uma aplicação multilinear

$$\mathsf{T} : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- Um k-tensor **contravariante** em V é uma aplicação multilinear $\mathsf{T} : (V^*)^k \to \mathbb{R}$; portanto, é um tensor de tipo $(k, 0)$.
- Um k-tensor **covariante** em V é uma aplicação multilinear $\mathsf{T} : V^k \to \mathbb{R}$; portanto, é um tensor de tipo $(0, k)$.

Essa convenção é a usual: o primeiro número conta os índices superiores (contravariantes) e o segundo, os índices inferiores (covariantes).

Exemplo 9.5

- Vetores podem ser vistos como funções $V^* \to \mathbb{R}$, portanto são tensores contravariantes.
- Funcionais lineares são tensores covariantes.
- Produtos internos são funções de $V \times V \to \mathbb{R}$, portanto são tensores covariantes.
- Em dimensão n, o determinante é uma função multilinear das n colunas (ou linhas) de uma matriz quadrada. Portanto, como aplicação $(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, é um tensor covariante de tipo $(0, n)$.

A terminologia acima parece invertida; Michael Spivak explica:

> "Hoje em dia, tais situações são sempre distinguidas chamando de 'covariantes' as coisas que seguem na mesma direção e de 'contravariantes' as que seguem na direção oposta. A terminologia clássica usava essas mesmas palavras, mas acabou invertendo essa distinção. [...] Portanto, é fácil lembrar qual tipo de tensor é covariante e qual é contravariante: basta considerar o oposto do que ele logicamente deveria ser."

Definição 9.5

Denotamos o **espaço de tensores** de tipo (r, s) por $\mathsf{T}^r_s(V)$.

Em particular,

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^k(V) &:= \mathsf{T}^k_0(V) = \{\text{tensores contravariantes de ordem } k\},\\ \mathsf{T}_k(V) &:= \mathsf{T}^0_k(V) = \{\text{tensores covariantes de ordem } k\}.\end{aligned}$$

Dois casos especiais importantes são:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^1(V) &= V^{**} \cong V,\\ \mathsf{T}_1(V) &= V^*.\end{aligned}$$

A primeira linha significa que podemos considerar vetores $\mathbf{v} \in V$ como 1-tensores contravariantes. Isto é, todo vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser considerado um funcional linear $V^* \to \mathbb{R}$ por meio de

$$v(\omega) := \omega(\mathbf{v}),$$

onde $\omega \in V^*$.

A **ordem** de um tensor de tipo (r, s) é $r + s$.

Em particular, vetores e covetores têm ordem 1.

Definição 9.6

Se $\mathsf{S} \in \mathsf{T}^{r_1}_{s_1}(V)$ é um tensor (r_1, s_1) e $\mathsf{T} \in \mathsf{T}^{r_2}_{s_2}(V)$ é um tensor (r_2, s_2), podemos definir seu **produto tensorial** $\mathsf{S} \otimes \mathsf{T} \in \mathsf{T}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ por

$$\begin{aligned}&(S \otimes T)(\omega_1, \dots, \omega_{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2})\\ &\quad = S(\omega_1, \dots, \omega_{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1})\\ &\qquad \cdot T(\omega_{r_1+1}, \dots, \omega_{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}).\end{aligned}$$

Exemplo 9.6

Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Como $V \cong \mathsf{T}^1(V)$, podemos considerar $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como tensores de tipo $(1, 0)$. Seu produto tensorial $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in \mathsf{T}^2(V)$ é um tensor de tipo $(2, 0)$ definido por $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\omega, \eta) = \omega(\mathbf{u})\,\eta(\mathbf{v})$

Exemplo 9.7

Seja $V = \mathbb{R}^3$. Escreva $\mathbf{u} = (1,2,3)^\top \in V$ na base padrão, e $\eta = (4,5,6) \in V^*$ na base dual. Para as entradas, escrevamos também $\omega = (x,y,z) \in V^*$ e $\mathbf{v} = (p,q,r)^\top \in V$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}\otimes\eta)(\omega,\mathbf{v}) &= \omega(\mathbf{u})\,\eta(\mathbf{v}) \\
&= [x,y,z]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot[4,5,6]\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix} \\
&= (x+2y+3z)(4p+5q+6r) \\
&= 4px+5qx+6rx \\
&\quad +8py+10qy+12ry \\
&\quad +12pz+15qz+18rz \\
&= [x,y,z]\begin{bmatrix}4&5&6\\8&10&12\\12&15&18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix} \\
&= \omega\begin{bmatrix}4&5&6\\8&10&12\\12&15&18\end{bmatrix}\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Exemplo 9.8

Se S é de tipo $(1,2)$, com componentes $\alpha^j{}_{ik}$, e T é de tipo $(2,0)$, com componentes β^{rs}, então $\mathsf{S}\otimes\mathsf{T}$ é de tipo $(3,2)$ e suas componentes são

$$(\mathsf{S}\otimes\mathsf{T})^{jrs}{}_{ik} = \alpha^j{}_{ik}\beta^{rs}.$$

Os tensores satisfazem leis algébricas como:

(i) $\mathsf{R}\otimes(\mathsf{S}+\mathsf{T}) = \mathsf{R}\otimes\mathsf{S}+\mathsf{R}\otimes\mathsf{T}$,

(ii) $(\lambda\mathsf{R})\otimes\mathsf{S} = \lambda(\mathsf{R}\otimes\mathsf{S}) = \mathsf{R}\otimes(\lambda\mathsf{S})$,

(iii) $(\mathsf{R}\otimes\mathsf{S})\otimes\mathsf{T} = \mathsf{R}\otimes(\mathsf{S}\otimes\mathsf{T})$.

Em geral, porém,

$$\mathsf{S}\otimes\mathsf{T} \neq \mathsf{T}\otimes\mathsf{S}.$$

A diferença não vem da multiplicação das componentes, que são escalares e portanto comutam, mas da ordem dos argumentos. Por exemplo, para $f, g \in V^*$,

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v), \qquad (g \otimes f)(u, v) = g(u)f(v),$$

e essas duas expressões não precisam coincidir. Tomando $f = \mathbf{e}^1$, $g = \mathbf{e}^2$, $u = \mathbf{e}_1$ e $v = \mathbf{e}_2$, obtemos respectivamente 1 e 0.

Seguiremos essa convenção em todo o restante do livro: índices superiores correspondem às cópias de V e índices inferiores às cópias de V^*.

9.4.1. Base de tensores

Fixe uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de V e sua base dual $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$.

Teorema 9.4

Uma base de $\mathsf{T}^r_s(V)$ é formada pelos tensores

$$\mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_s}, \qquad 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n.$$

Em particular,

$$\dim \mathsf{T}^r_s(V) = n^{r+s}.$$

Para $\mathsf{T} \in \mathsf{T}^r_s(V)$, definimos suas componentes nessa base por

$$T^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} := \mathsf{T}(\mathbf{e}^{i_1}, \dots, \mathbf{e}^{i_r}, \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_s}).$$

Teorema 9.5

O tensor T é reconstruído a partir de suas componentes pela fórmula

$$\mathsf{T} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n} T^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s}\, \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_s}.$$

A fórmula anterior é a versão multilinear da expansão em uma base: os valores do tensor nos elementos das bases de V^* e V determinam todos os seus valores.

Teorema 9.6

Se

$$\omega_a = \sum_{i_a=1}^{n} (\omega_a)_{i_a} \mathbf{e}^{i_a}, \qquad 1 \leq a \leq r,$$

e

$$\mathbf{v}_b = \sum_{j_b=1}^{n} v_b^{j_b} \mathbf{e}_{j_b}, \qquad 1 \leq b \leq s,$$

então

$$\mathsf{T}(\omega_1, \ldots, \omega_r, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n} T^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} (\omega_1)_{i_1} \cdots (\omega_r)_{i_r} v_1^{j_1} \cdots v_s^{j_s}.$$

Exemplo 9.9

Considere uma função trilinear

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Uma base de $\mathbb{R}^2$ é $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$. Seja

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \mathsf{A}_{ijk},$$

onde $i, j, k \in \{1, 2\}$. Em outras palavras, a constante A_{ijk} é o valor da função em uma das oito triplas possíveis de vetores da base (pois há duas escolhas para cada um dos três argumentos), a saber:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2), \\ &(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \quad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), \quad (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Cada vetor $\mathbf{v}_i \in V_i = \mathbb{R}^2$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{2} v_i^j \mathbf{e}_j = v_i^1 \mathbf{e}_1 + v_i^2 \mathbf{e}_2 = v_i^1 (1,0) + v_i^2 (0,1).$$

O valor da função em uma coleção arbitrária de três vetores $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso como

$$f(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\mathsf{A}_{ijk}v_1^i v_2^j v_3^k.$$

Ou, na forma expandida,

$$\begin{aligned} f((a,b),(c,d),(e,h)) &= ace\, f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+ach\, f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) && (9.6)\\ &+ade\, f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)+adh\, f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) && (9.7)\\ &+bce\, f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+bch\, f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) && (9.8)\\ &+bde\, f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)+bdh\, f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2). && (9.9)\end{aligned}$$

9.4.2. Contração

O caso básico de contração é o pareamento canônico entre V e V^*:

$$C:V\otimes V^*\longrightarrow\mathbb{R},\qquad C(\mathbf{v}\otimes f)=f(\mathbf{v}).$$

Essa operação se estende a tensores de tipo (r,s) com $r,s\geq 1$. Escolhemos um fator contravariante e um fator covariante e aplicamos o pareamento acima. Em componentes, se contraímos o a-ésimo índice superior com o b-ésimo índice inferior, obtemos

$$(C_{ab}T)^{i_1\ldots\widehat{i_a}\ldots i_r}{}_{j_1\ldots\widehat{j_b}\ldots j_s}=\sum_{k=1}^{n}T^{i_1\ldots k\ldots i_r}{}_{j_1\ldots k\ldots j_s}.$$

O chapéu indica o índice que desaparece depois da contração. Portanto,

$$C_{ab}:\mathsf{T}^r_s(V)\longrightarrow\mathsf{T}^{r-1}_{s-1}(V).$$

A definição independe da base: a soma acima é apenas a expressão em coordenadas do pareamento natural $V^*\times V\to\mathbb{R}$.

9.4.3. Um tensor de três argumentos, do objeto às componentes

Exemplo 9.10 — Três direções medidas separadamente

Em $V=\mathbb{R}^2$, considere

$$T(u,v,w)=u_1v_2w_1-u_2v_1w_2.$$

Identifique seu tipo, calcule suas componentes, avalie em $u=(1,2)$, $v=(3,-1)$, $w=(2,1)$ e descreva a forma bilinear obtida quando se fixa o terceiro

argumento. Depois transforme as componentes para a base $E = ((1,0),(1,1))$ e confira a mesma avaliação.

Solução. Cada argumento pertence a V e a saída é real. A expressão é linear em cada argumento separadamente; portanto T é um tensor de tipo $(0,3)$, isto é, um elemento de $V^* \otimes V^* \otimes V^*$. Na base canônica, $T_{ijk} = T(e_i, e_j, e_k)$ fornece apenas $T_{121} = 1$ e $T_{212} = -1$ como componentes não nulas. Sua avaliação é $1(-1)2 - 2(3)1 = -8$.

Fixando $w = (2,1)$, obtemos a forma bilinear $B_w(u,v) = 2u_1v_2 - u_2v_1$, de matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esse procedimento reduz o número de argumentos por avaliação. Não é uma contração entre dois índices do próprio tensor.

Na base E, as componentes são $T'_{ijk} = T(E_i, E_j, E_k)$. As não nulas são

$$T'_{121} = 1, \quad T'_{122} = 1, \quad T'_{212} = -1, \quad T'_{221} = 1.$$

A componente T'_{222} é zero porque os dois termos se cancelam. As coordenadas dos três vetores são $u' = (-1,2)$, $v' = (4,-1)$ e $w' = (1,1)$. Contraindo com as quatro componentes, obtemos

$$T(u,v,w) = 1 + 1 - 8 - 2 = -8.$$

O objeto e sua avaliação permanecem os mesmos; a lista de componentes não nulas mudou. O cálculo mostra por que um tensor não deve ser identificado com um arranjo numérico fixo. ◁

Exercícios

Exercício N142 — Consolidação; médio

Se $\alpha = (1,2)$ e $\beta = (3,-1)$ na base dual canônica, calcule as quatro componentes de $\alpha \otimes \beta$ e sua avaliação em $u = (1,0)$ e $v = (0,1)$.

Exercício N143 **Consolidação; médio**

Para $T(u,v,w) = u_1 v_2 w_1 - u_2 v_1 w_2$, determine as componentes não nulas e verifique a multilinearidade.

Exercício N144 **Justificação; médio**

Para o operador $A = v \otimes \alpha$, mostre que $A(w) = \alpha(w)v$ e que sua contração é $\operatorname{tr} A = \alpha(v)$.

Exercício N145 **Justificação; médio**

Explique por que contrair dois índices covariantes exige uma métrica inversa, enquanto o pareamento de um índice superior com um inferior é natural.

Exercícios de ampliação

Exercício A008 **Consolidação; médio**

Sejam $\alpha(x,y) = x + 2y$ e $H(v,w) = v_1 w_1 + 3 v_2 w_2$. Identifique o tipo de $T(u,v,w) = \alpha(u) H(v,w)$, liste suas componentes não nulas e avalie em $u = (1,1)$, $v = (1,2)$, $w = (2,-1)$.

Exercício A009 **Consolidação; médio**

Identifique espaços de entrada, saída e tipo tensorial dos objetos: $A(w) = \alpha(w)v$; $H(u,w) = \beta(u)\gamma(w)$; $T(\alpha,\beta,w) = \alpha(u)\beta(v)\gamma(w)$, para vetores e covetores fixos indicados pelas respectivas letras.

Exercício A010 **Consolidação; médio**

Para $T(u,v) = (u_1 v_1, u_2 v_1 + u_1 v_2)$, verifique a bilinearidade, interprete T como tensor de tipo $(1,2)$, determine suas componentes não nulas e calcule $T((1,2),(3,-1))$.

9.5. Mudança de coordenadas

A mudança de base altera os vetores básicos e, em sentido compensatório, as componentes. A identidade que deve permanecer é o valor de uma avaliação completa, como $\alpha(v)$ ou $B(u,v)$. Usaremos essa invariância para conferir as fórmulas.

9.5.1. Vetores e covetores

Sejam $E = (v_1, \dots, v_n)$ e $F = (w_1, \dots, w_n)$ bases ordenadas de V, com bases duais $E^* = (v^1, \dots, v^n)$ e $F^* = (w^1, \dots, w^n)$. Escrevamos a mudança de base na forma

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i^j v_j, \qquad \Lambda = (\lambda_i^j).$$

Para encontrar a mudança correspondente na base dual, escrevemos

$$w^j = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^j v^k, \qquad M = (\mu_k^j).$$

A condição de dualidade $w^j(w_i) = \delta_i^j$ dá

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i^k \mu_k^j = \delta_i^j, \qquad \Lambda M = I.$$

Portanto, $M = \Lambda^{-1}$. Em particular, se listamos as bases duais em colunas, sua relação é

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} = \Lambda^{-T} \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}.$$

Essa é a transformação das bases. Para distinguir dela a transformação das componentes, escreva $x = \sum_i x_E^i v_i = \sum_i x_F^i w_i$. A relação entre as bases implica $x_F = \Lambda^{-T} x_E$. Para um covetor $\alpha = \sum_i a_i v^i = \sum_j \tilde{a}_j w^j$, como $M = \Lambda^{-1}$, temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Assim, as componentes de um covetor transformam pela matriz inversa da transposta que transforma as componentes de um vetor.

9.5.2. Formas bilineares

Sejam $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ e $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n$ duas bases de um espaço vetorial V. Denotemos por S a matriz de transição da primeira base para a segunda. Defina $\mathsf{T} = S^{-1}$. A partir de 9.3, obtemos facilmente a fórmula que relaciona as componentes de uma forma bilinear $\mathsf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ nessas duas bases. Para isso, basta substituir a expressão da mudança de base na fórmula 9.3 e usar a bilinearidade da forma $\mathsf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$:

$$\mathsf{f}_{ij} = \mathsf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \mathsf{T}_i^k \mathsf{T}_j^q \mathsf{f}(\tilde{\mathbf{e}}_k, \tilde{\mathbf{e}}_q) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \mathsf{T}_i^k \mathsf{T}_j^q \tilde{f}_{kq}.$$

A fórmula inversa, que expressa $\tilde{f}_{kq}$ em termos de f_{ij}, é obtida de modo semelhante:

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \mathsf{T}_i^k \, \mathsf{T}_j^q \, \tilde{f}_{kq}, \tilde{f}_{kq} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_k^i \, S_q^j \, f_{ij}. \tag{9.10}$$

Na forma matricial, essas relações são escritas como:

$$F = \mathsf{T}^T \, \tilde{F} \, T, \tilde{F} = S^T \, F \, S. \tag{9.11}$$

Aqui, S^T e T^T são as matrizes obtidas de S e T por transposição.

Exercícios

Exercício N146 **Consolidação; médio**

Considere a base com matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Transforme as componentes de $v = (2, 3)$ e de $\alpha = (1, -2)$ e confira $\alpha(v)$.

Exercício N147 **Consolidação; médio**

Para uma forma bilinear de matriz canônica $G = I$, calcule $G_E = B^T G B$ na base do exercício anterior e confira o comprimento de um vetor.

Exercício N148 **Justificação; médio**

Compare a transformação por congruência de uma forma bilinear com a transformação por semelhança de um operador linear na mesma mudança de base.

9.6. Propriedades de simetria dos tensores

A simetria é uma propriedade do tensor, e por isso não depende da base. Para tensores de segunda ordem, a decomposição em partes simétrica e antissimétrica separa dois comportamentos sob a troca dos argumentos e é única sobre os reais.

As propriedades de simetria envolvem o comportamento de um tensor sob a troca de dois ou mais argumentos. Para considerar o valor de um tensor após a permutação de alguns argumentos, os argumentos devem ser do mesmo tipo; isto é, covetores devem ocupar argumentos de covetores e vetores devem ocupar argumentos de vetores, sem outras combinações.

O caso mais simples são tensores com apenas 2 argumentos do mesmo tipo. Para argumentos vetoriais, temos tensores de tipo $(0, 2)$. Para um tensor desse tipo T,

introduzimos a seguinte terminologia:

$$\begin{aligned} &\mathsf{T}(Y,X) = \mathsf{T}(X,Y)\,, && \mathsf{T} \text{ é } \textbf{simétrico} \text{ em } X \text{ e } Y,\\ &\mathsf{T}(Y,X) = -\mathsf{T}(X,Y)\,, && \mathsf{T} \text{ é } \textbf{antissimétrico}, \text{ ou } \textbf{alternado}, \text{ em } X \text{ e } Y. \end{aligned}$$

Tomando $(X,Y) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ e usando a definição de componentes, obtemos uma condição correspondente para as componentes:

$$\begin{aligned} &T_{ji} = T_{ij}\,, && \mathsf{T} \text{ é simétrico no par de índices } (i,j),\\ &T_{ji} = -T_{ij}\,, && \mathsf{T} \text{ é antissimétrico (alternado) no par de índices } (i,j). \end{aligned}$$

Para um tensor antissimétrico, a última condição implica imediatamente que nenhum índice pode se repetir sem que a componente correspondente seja nula:

$$T_{ji} = -T_{ij} \to T_{ii} = 0\,.$$

Todo tensor $(0,2)$ pode ser decomposto em partes simétrica e antissimétrica, definindo

$$\begin{aligned} [\mathrm{SYM}(\mathsf{T})](X,Y) &= \frac{1}{2}[\mathsf{T}(X,Y) + \mathsf{T}(Y,X)]\,, && \text{(parte simétrica de } \mathsf{T}),\\ [\mathrm{ALT}(\mathsf{T})](X,Y) &= \frac{1}{2}[\mathsf{T}(X,Y) - \mathsf{T}(Y,X)]\,, && \text{(parte antissimétrica de } \mathsf{T}),\\ T &= \mathrm{SYM}(\mathsf{T}) + \mathrm{ALT}(\mathsf{T})\,. \end{aligned}$$

A última igualdade vale porque avaliá-la no par (X,Y) conduz imediatamente a uma identidade.

Novamente, tomando $(X,Y) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, obtemos as fórmulas correspondentes para as componentes:

$$\begin{aligned} [\mathrm{SYM}(T)]_{ij} &= \tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = T_{(ij)},\\ [\mathrm{ALT}(T)]_{ij} &= \tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = T_{[ij]},\\ T_{ij} &= T_{(ij)} + T_{[ij]}. \end{aligned}$$

Há $n(n+1)/2$ componentes independentes na parte simétrica e $n(n-1)/2$ na antissimétrica. Sua soma é n^2, o número de componentes do tensor original.

Parênteses em torno de um par de índices denotam a operação de simetrização, enquanto colchetes denotam a antissimetrização. Essa é uma abreviação muito conveniente. Tudo isso pode ser repetido para tensores de tipo $(2,0)$ e apenas reflete o que já sabemos sobre as partes simétrica e antissimétrica de matrizes.

Exercícios

Exercício N149 **Consolidação; básico**

Decomponha $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ em partes simétrica e antissimétrica.

Exercício N150 **Justificação; médio**

Prove a unicidade da decomposição $T = S + A$, com S simétrico e A antissimétrico.

Exercício N151 **Consolidação; médio**

Conte as componentes independentes de um tensor totalmente alternado de ordem 3 em dimensão 4 e compare com um tensor sem simetrias.

9.7. Formas

As formas alternadas registram área e volume com orientação. O produto exterior reúne esse comportamento em uma álgebra válida em qualquer dimensão. A estrela de Hodge acrescenta métrica e orientação, estabelecendo a ponte com os produtos e operadores do cálculo vetorial.

9.7.1. Motivação

Área e volume orientados Fixada uma orientação do plano, definimos a função de **área orientada** $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ por

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta,$$

onde θ é o ângulo orientado de $\mathbf{a}$ para $\mathbf{b}$, positivo no sentido anti-horário.

Propriedade: A área orientada $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de um paralelogramo gerado pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ no espaço euclidiano bidimensional é uma função antissimétrica e bilinear dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= -A(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \\ A(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \lambda\, A(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c}). \qquad \text{(lei da soma)} \end{aligned}$$

A área ordinária (não orientada) é obtida como o valor absoluto da área orientada, $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |A(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$. Verifica-se que a área orientada, devido às suas propriedades

estritas de linearidade, é uma construção muito mais conveniente e poderosa que a área não orientada.

Teorema 9.7

Sejam $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ vetores em $\mathbb{R}^3$. O volume orientado do paralelepípedo gerado por eles é $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Propriedade: O volume orientado $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ de um paralelepípedo gerado pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ no espaço euclidiano tridimensional é uma função antissimétrica e trilinear dos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= -V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}), \\ V(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \lambda\, V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \\ V(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{d}, \mathbf{c}) &= V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + V(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Essas propriedades seguem imediatamente da fórmula do produto misto

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

ou, equivalentemente, da multilinearidade e da alternância do determinante.

9.7.2. Produto exterior

Em três dimensões, uma área orientada é representada pelo produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, que é de fato um produto antissimétrico e bilinear. Portanto, esperamos que a área orientada em dimensões maiores possa ser representada por algum novo produto antissimétrico de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; denotemos esse produto (a ser definido abaixo) por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, lido "a cunha b". O valor de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ será um vetor em um espaço vetorial *novo*. Também construiremos explicitamente esse novo espaço.

Definição do produto exterior A maneira mais limpa de construir o produto exterior é partir da álgebra tensorial. Seja

$$T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V^{\otimes 3}) \oplus \cdots$$

e seja I o ideal gerado pelos elementos $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, com $\mathbf{v} \in V$.

Definição 9.7

A **álgebra exterior** de V é o quociente

$$\bigwedge V := T(V)/I.$$

A imagem de $\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_k$ nesse quociente é denotada por

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k,$$

e a componente homogênea de grau k é chamada de **k-ésima potência exterior** de V e denotada por $\bigwedge^k V$.

Por construção, o produto $\wedge$ é bilinear e associativo e satisfaz

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0.$$

Aplicando essa identidade a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, obtemos

$$0 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u},$$

e portanto

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \tag{9.12}$$

Em particular, o produto exterior é alternado. Mais geralmente, para $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Essa construção também explica a relação com tensores antissimétricos. Sobre $\mathbb{R}$, $\bigwedge^k V$ pode ser identificado canonicamente, por antissimetrização, com o espaço dos tensores totalmente antissimétricos de grau k. Dependendo da normalização escolhida para o operador de antissimetrização, aparecem fatores como $k!$; a álgebra exterior evita que esses fatores contaminem as regras de cálculo.

Teorema 9.8

Se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de V, então

$$\left\{ \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k} \;:\; 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \right\}$$

é uma base de $\bigwedge^k V$. Consequentemente,

$$\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}, \qquad \bigwedge^k V = \{0\} \quad \text{se } k > n.$$

Demonstração. Pela multilinearidade, cada produto de k vetores se expande em produtos de vetores da base. Termos com um índice repetido se anulam; os demais podem ser reordenados, com um sinal, para índices estritamente crescentes. Assim, a família indicada gera $\bigwedge^k V$.

Para provar a independência, fixe $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ e use a forma alternada

$$\omega_I(v_1, \dots, v_k) = \det\big(e^{i_a}(v_b)\big)_{a,b=1}^{k}.$$

Ela induz um funcional em $\bigwedge^k V$ e assume valor 1 no produto básico de índices I e 0 em todos os outros produtos básicos crescentes. Avaliar uma combinação linear nula nesses funcionais força cada coeficiente a ser zero. Há $\binom{n}{k}$ escolhas de índices; se $k > n$, todo produto básico tem repetição e é nulo. ∎

Assim, cálculos com o produto exterior são feitos apenas com multilinearidade, associatividade e antissimetria. Por exemplo,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}.$$

O termo $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ desaparece automaticamente.

Elementos de $\bigwedge^2 V$ são chamados de **bivetores**. Um bivetor não precisa ser decomponível, isto é, não precisa ter a forma $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Analogamente, elementos de $\bigwedge^k V$ são chamados de k-vetores. Adotamos ainda

$$\bigwedge^0 V = \mathbb{R}, \qquad \bigwedge^1 V = V.$$

Para vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, a notação

$$\bigwedge_{j=1}^{k} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$$

será usada sem ambiguidade. Em particular,

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k = (-1)^k \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{u}.$$

Pergunta: Como calcular expressões que contêm vários produtos, como $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$?

Resposta: Aplique as regras de multilinearidade, associatividade e antissimetria. Por exemplo, podemos permutar vetores adjacentes e trocar o sinal,

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} = -\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}\wedge\mathbf{c} = \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{a},$$

podemos expandir os parênteses,

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{x}+4\mathbf{y})\wedge\mathbf{b} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{x}\wedge\mathbf{b} + 4\mathbf{a}\wedge\mathbf{y}\wedge\mathbf{b},$$

e assim por diante. Se os vetores $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ são dados como combinações lineares de vetores de uma base $\{\mathbf{e}_j\}$, podemos reduzir $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ a uma combinação linear de produtos exteriores de vetores da base, como $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_4$, etc.

Exemplo 1: Suponha que trabalhemos em $\mathbb{R}^3$ com os vetores $\mathbf{a} = \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b} = (2,-2,0)$ e $\mathbf{c} = (-2,5,-3)$. Vamos calcular alguns produtos exteriores. Os cálculos ficam mais simples se introduzirmos explicitamente a base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{b} = 2(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{c} = -2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3.$$

Calculamos o 2-vetor $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ usando as propriedades do produto exterior, como $\mathbf{x}\wedge\mathbf{x}=0$ e $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} = -\mathbf{y}\wedge\mathbf{x}$, e simplesmente expandindo os parênteses como na álgebra usual:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\wedge 2(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\\ &= (\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)\wedge(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\\ &= \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2\\ &= -\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

A última expressão é o resultado; observe que agora não há mais nada a calcular ou simplificar. Expressões como $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ são as expressões básicas a partir das quais o espaço $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ é construído.

Vamos também calcular o 3-vetor $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}\\ &= (-\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3)\wedge(-2\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Ao expandirmos os parênteses, termos como $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1$ se anulam, pois

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 = 0,$$

portanto, basta manter os termos que contêm vetores distintos, e obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} &= 3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\\ &= (3-5+2)\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3 = 0.\end{aligned}$$

Observamos que todos os termos são proporcionais ao 3-vetor $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$; assim, bastava determinar o coeficiente de $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$; por coincidência, esse coeficiente acabou sendo zero. Portanto, o resultado é o 3-vetor nulo. ■

Observação: origem do nome "exterior" A construção do produto exterior é uma formulação moderna de ideias que remontam a H. Grassmann (1844). Um 2-vetor $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ representa um elemento de área orientado do paralelogramo gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Analogamente, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ representa um elemento de 3-volume orientado. Com o produto interno induzido em $\bigwedge^2 V$, por exemplo,

$$\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle^2,$$

de modo que a norma recupera a área ordinária; a norma de um 3-vetor recupera o volume ordinário, enquanto uma forma volume orientada registra seu sinal. Pela antissimetria do produto exterior, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}) = 0$ e $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{d}) = 0$, entre outras identidades. Geometricamente, isso diz que o "produto" de dois volumes se anula quando eles têm um vetor em comum. Essa observação motivou Grassmann a chamar seu produto antissimétrico de "exterior": em sua interpretação, o produto de duas "quantidades extensivas", como retas, áreas ou volumes, é não nulo apenas quando cada uma está geometricamente "no exterior" da outra.

Exercício 9.2 — Potências exteriores de grau maior que a dimensão

[J2]

Mostre que, em um espaço *bidimensional* V, todo 3-vetor, como $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$, reduz-se ao 3-vetor nulo. Prove o mesmo para n-vetores em espaços de dimensão N quando $n > N$.

Também podemos considerar as potências exteriores do espaço *dual* V^*. Elementos de $\bigwedge^n V^*$ são geralmente chamados, por razões históricas, de n-**formas** (em vez de "n-covetores").

Definição 3: A ação de uma k-forma $\mathbf{f}_1^*\wedge\ldots\wedge\mathbf{f}_k^*$ sobre um k-vetor $\mathbf{v}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_k$ é definida por

$$\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\mathbf{f}_1^*(\mathbf{v}_{\sigma(1)})\cdots\mathbf{f}_k^*(\mathbf{v}_{\sigma(k)}),$$

onde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação e S_k é o conjunto das permutações de $\{1,\ldots,k\}$. Essa soma é o determinante da matriz com entradas $\mathbf{f}_i^*(\mathbf{v}_j)$.

Exemplo 2: Para $k = 3$, temos

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}^* \wedge \mathbf{q}^* \wedge \mathbf{r}^*)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \\ = \mathbf{p}^*(\mathbf{a})\mathbf{q}^*(\mathbf{b})\mathbf{r}^*(\mathbf{c}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{a})\mathbf{q}^*(\mathbf{c})\mathbf{r}^*(\mathbf{b}) \\ - \mathbf{p}^*(\mathbf{b})\mathbf{q}^*(\mathbf{a})\mathbf{r}^*(\mathbf{c}) + \mathbf{p}^*(\mathbf{b})\mathbf{q}^*(\mathbf{c})\mathbf{r}^*(\mathbf{a}) \\ + \mathbf{p}^*(\mathbf{c})\mathbf{q}^*(\mathbf{a})\mathbf{r}^*(\mathbf{b}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{c})\mathbf{q}^*(\mathbf{b})\mathbf{r}^*(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Exercício 9.3 — Permutações e potências de bivetores

[P3]

a) Mostre que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \omega = \omega \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, onde ω é qualquer multivetor homogêneo (por exemplo, $\omega = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$).

b) Mostre que

$$\omega_1 \wedge \mathbf{a} \wedge \omega_2 \wedge \mathbf{b} \wedge \omega_3 = -\omega_1 \wedge \mathbf{b} \wedge \omega_2 \wedge \mathbf{a} \wedge \omega_3,$$

onde ω_1, ω_2 e ω_3 são multivetores homogêneos arbitrários e $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são vetores.

c) Devido à antissimetria, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ para qualquer vetor $\mathbf{a} \in V$. Também é verdade que $\omega \wedge \omega = 0$ para qualquer bivetor $\omega \in \bigwedge^2 V$?

9.7.3. Operador estrela de Hodge

Seja V um espaço euclidiano orientado de dimensão n. O produto interno em V induz um produto interno em $\bigwedge^k V^*$ e determina a forma volume unitária vol. O **operador estrela de Hodge** é a aplicação linear

$$\star : \bigwedge^k V^* \longrightarrow \bigwedge^{n-k} V^*$$

caracterizada por

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{ vol}, \qquad \alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*.$$

Em uma base ortonormal positivamente orientada $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, com base dual $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, a estrela envia uma forma básica no produto exterior das formas complementares, com o sinal determinado pela orientação. Em $\mathbb{R}^3$, por exemplo,

$$\star\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3, \qquad \star(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2) = \mathbf{e}^3, \qquad \star(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3) = 1.$$

Essa operação fará a ponte entre a linguagem de formas diferenciais e os operadores usuais do cálculo vetorial.

Exercícios

Exercício N152 **Consolidação; básico**

Calcule $(e_1 + 2e_2) \wedge (e_2 + e_3)$ em $\mathbb{R}^3$ e expresse o resultado na base de bivetores.

Exercício N153 **Aprofundamento; difícil**

Para $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ em $\mathbb{R}^4$, calcule $\alpha \wedge \alpha$ e conclua que α não é decomponível.

Exercício N154 **Consolidação; médio**

Em $\mathbb{R}^3$ euclidiano positivamente orientado, calcule $\star(e^1 \wedge e^3)$ e $\star(e^2 + 2e^3)$.

CAPÍTULO

10

Tensores em coordenadas

”A introdução dos números como coordenadas é um ato de violência.”
Hermann Weyl.

10.1. Notação indicial para tensores

10.1.1. Começar pelo tipo antes de começar pelos índices

A primeira pergunta de um cálculo tensorial é: quais são as entradas e qual é a saída? O número e a posição dos índices registram essa informação. Fixemos uma base e_i de V e sua base dual e^j.

Objeto	Componentes	Ação ou representação
Vetor v	v^i	$v = v^i e_i$; recebe uma avaliação de covetor.
Covetor α	α_i	$\alpha(v) = \alpha_i v^i$.
Operador A	$A^i{}_j$	$(Av)^i = A^i{}_j v^j$.
Forma bilinear H	H_{ij}	$H(u, v) = H_{ij} u^i v^j$.
Tensor trilinear T	T_{ijk}	$T(u, v, w) = T_{ijk} u^i v^j w^k$.

Um vetor pode ser entendido como funcional sobre covetores pela avaliação $\alpha \mapsto \alpha(v)$, usando a identificação canônica com o bidual em dimensão finita. Isso torna a descrição multilinear compatível com os índices superiores; não significa que um vetor seja um covetor.

Exemplo 10.1 — Ler uma expressão antes de calculá-la
Interprete $A^i{}_j B^j{}_k v^k$, $H_{ij}v^j$ e $v^i\alpha_j$.

Solução. Na primeira expressão, j, k são somados e apenas i é livre. A saída é um vetor: primeiro B atua em v e depois A atua no resultado. Na segunda, apenas i é livre e inferior: a saída é o covetor $u \mapsto H(u, v)$. Na terceira, os dois índices são livres; obtemos um operador de tipo $(1, 1)$ que envia w em $\alpha(w)v$. Em dimensão dois, por exemplo,

$$(H_{ij}v^j)_1 = H_{11}v^1 + H_{12}v^2, \qquad (H_{ij}v^j)_2 = H_{21}v^1 + H_{22}v^2.$$

É a mesma multiplicação matricial encontrada em outros cálculos, mas aqui o tipo da saída é covariante. A aparência de uma coluna de números não decide se ela representa vetor ou covetor. ◁

Para conferir uma igualdade, verifique que os índices livres coincidem nos dois lados e mantêm sua posição. Depois confira cada índice somado: na convenção geral, deve aparecer exatamente duas vezes, uma acima e uma abaixo. Por fim, se há derivadas ou uma métrica, verifique se a base é fixa, coordenada ou ortonormal. Essas verificações dão significado às regras que serão apresentadas a seguir.

Agora que o objeto tensorial foi definido, a notação por índices serve para executar cálculos. Antes de manipular uma expressão, identifique o tipo do tensor, a faixa dos índices e quais deles são livres. Essa leitura fornece uma verificação rápida da consistência de cada igualdade.

Até agora usamos um formalismo independente de coordenadas para definir e descrever tensores. Entretanto, em muitos cálculos uma base de V é fixada, e é necessário calcular as componentes dos tensores nessa base. Nesses casos, a **notação indicial** facilita os cálculos.

Suponha que a base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ de V esteja fixada; então a base dual $\left\{\mathbf{e}^k\right\}$ também está fixada. Todo vetor $\mathbf{v} \in V$ se decompõe como $\mathbf{v} = \sum_k v^k \mathbf{e}_k$, e todo covetor como $\mathbf{f}^* = \sum_k f_k \mathbf{e}^k$.

Todo tensor de $V \otimes V$ se decompõe como

$$A = \sum_{j,k} A^{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \in V \otimes V,$$

e assim por diante. A ação de um covetor sobre um vetor é

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{v}) = \sum_k f_k v^k,$$

e, se $A : V \to V$ é um operador linear com componentes $A^j{}_k$, então

$$A(\mathbf{v}) = \sum_{j,k} A^j{}_k v^k \mathbf{e}_j.$$

Como é trabalhoso escrever continuamente essas somas, a notação indicial retém apenas as componentes e deixa implícitas as somas determinadas pelos índices repetidos.

Definição 10.1

Seja $T \in \mathrm{T}^r_s(V)$. Fixada uma base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de V e sua base dual $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, escrevemos

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r} \sum_{j_1,\ldots,j_s} T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\, \mathbf{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_s}.$$

A expressão

$$T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$$

é a notação indicial das componentes de T nessa base.

10.1.2. Definição da notação indicial

As regras para expressar tensores na notação indicial são as seguintes:

- Os vetores da base $\mathbf{e}_k$ e os tensores da base (por exemplo, $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^*_l$) nunca são escritos explicitamente. (Supõe-se que a base esteja fixada e seja conhecida.)
- Em vez de um vetor $\mathbf{v} \in V$, escreve-se seu conjunto de componentes v^k com o índice *sobrescrito*. Os covetores $\mathbf{f}^* \in V^*$ são escritos como f_k, com índice *subscrito*. O índice k percorre os inteiros de 1 a n. As componentes de vetores e tensores podem ser vistas como números.
- Os tensores são escritos como matrizes multidimensionais de componentes com índices sobrescritos ou subscritos conforme necessário, por exemplo $\mathrm{A}_{jk} \in V^* \otimes V^*$ ou $\mathrm{B}^{lm}_k \in V \otimes V \otimes V^*$. Assim, por exemplo, o símbolo delta de Kronecker é escrito como $\delta^j{}_k$ quando representa o operador identidade $\hat{1}_V$.
- Tensores com índices subscritos, como A_{ij}, são chamados covariantes, enquanto tensores com índices sobrescritos, como A^k, são chamados contravariantes. Tensores com os dois tipos de índices, como A^{lmn}_{lk}, são chamados de tipo misto.

- Índices subscritos, e não apenas tensores subscritos, também são chamados de "covariantes", e índices sobrescritos, de "contravariantes".

- Para a invariância tensorial, um par de índices mudos deve, em geral, ser complementar quanto ao tipo de variância; isto é, um covariante e o outro contravariante.

- A ordem de um tensor de tipo (r, s) é $r + s$. Em uma expressão indicial, porém, os índices repetidos são somados e apenas os índices livres descrevem o tipo do tensor resultante. Assim, uma expressão com um único índice livre representa um tensor de ordem 1, e uma expressão com dois índices livres representa um tensor de ordem 2.

- A escolha dos índices deve ser consistente; cada índice corresponde a uma cópia particular de V ou V^*. Assim, é errado escrever $v_j = u_k$ ou $v_i + u^i = 0$. As equações corretas são $v_j = u_j$ e $v^i + u^i = 0$. Isso impede expressões sem sentido como $\mathbf{v}^* + \mathbf{u}$ (não se podem somar vetores de espaços diferentes).

- Somatórios sobre índices, como $\sum_{k=1}^{n} a_k b^k$, não são escritos explicitamente; o símbolo $\sum$ é omitido e usa-se a **convenção de somatório de Einstein**: a soma sobre todos os valores de um índice é *sempre implícita* quando sua letra aparece uma vez como subscrito e uma vez como sobrescrito. Nesse caso, a letra é chamada de **índice mudo** (ou **silencioso**). Assim, escreve-se $f_k v^k$ em vez de $\sum_k f_k v^k$ e $\mathrm{A}^j{}_k v^k$ em vez de $\sum_k \mathrm{A}^j{}_k v^k$.

- A soma é permitida *somente* sobre um índice subscrito e um sobrescrito, mas nunca sobre dois índices subscritos ou dois sobrescritos, e nunca sobre três ou mais índices coincidentes. Isso corresponde a exigir que só possamos calcular o pareamento canônico de V e V^*, e nenhum outro pareamento. A expressão $v^k v^k$ não é permitida porque não existe pareamento canônico entre V e V; por exemplo, a soma $\sum_{k=1}^{n} v^k v^k$ depende da escolha da base. Pela mesma razão (dependência da base), expressões como $u^i v^i w^i$ ou $\mathrm{A}_{ii}\mathrm{B}^{ii}$ não são permitidas. Expressões corretas são $u_i v^i w_k$ e $\mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}^{ik}$.

- É preciso prestar muita atenção à escolha e à posição das letras como j, k, l etc. usadas como índices. Índices que não se repetem são índices **livres**. Eles determinam o tipo da expressão tensorial resultante. Assim, $\mathrm{A}^j_k v^k$ é um tensor de tipo $(1, 0)$ e ordem 1 (isto é, um vetor), pois a expressão possui um único índice livre, j, e uma soma sobre k está implícita.

- O símbolo do produto tensorial $\otimes$ nunca é escrito. Por exemplo, se

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{f}^* = \sum_{j,k} v^j f_k \, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k,$$

escreve-se simplesmente $v^j f_k$ para representar suas componentes. As letras dos índices na expressão $v^k f_j$ são escolhidas intencionalmente para serem *diferentes* (neste caso, k e j), de modo que nenhum somatório seja implícito. Em outras palavras, um produto tensorial é escrito simplesmente como um produto de componentes, com as letras dos índices escolhidas adequadamente. Assim, pode-se interpretar $v^k f_j$ apenas como o produto de *números*. Em particular, não faz diferença escrever $f_j v^k$ ou $v^k f_j$. A *posição dos índices* (e não a ordem dos vetores) mostra, em cada caso, como o produto tensorial é formado. Observe que não é possível distinguir $V \otimes V^*$ de $V^* \otimes V$ na notação indicial.

Exemplo 10.2

Segue da definição de $\delta^i{}_j$ que $\delta^i{}_j v^j = v^i$. Essa é a representação indicial da transformação identidade $\hat{1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Exemplo 10.3

Suponha que $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sejam vetores de V cujas componentes são w^i, x^i, y^i e z^i. Quais são as componentes do tensor $\mathbf{w} \otimes \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \in V \otimes V$?

Solução. $w^i x^k + 2y^i z^k$. (Precisamos escolher outra letra para o segundo índice livre, k, que corresponde à segunda cópia de V em $V \otimes V$.) ◁

Exemplo 10.4

O operador $\hat{A} \equiv \hat{1}_V + \lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^* \in V \otimes V^*$ atua sobre um vetor $\mathbf{x} \in V$. Calcule o vetor resultante $\mathbf{y} \equiv \hat{A}\mathbf{x}$.
Na notação sem índices, o cálculo é

$$\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x} = \left(\hat{1}_V + \lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}^*\right)\mathbf{x} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}^*(\mathbf{x})\,\mathbf{v}.$$

Na notação indicial, o cálculo fica:

$$y^k = \left(\delta^k{}_j + \lambda v^k u_j\right) x^j = x^k + \lambda v^k u_j x^j.$$

Nessa fórmula, j é um índice mudo e k é um índice livre. Também poderíamos ter escrito $\lambda x^j v^k u_j$ em vez de $\lambda v^k u_j x^j$, pois a ordem das componentes não faz diferença na notação indicial.

Exemplo 10.5

Em um livro de física, você encontra a seguinte fórmula,

$$H^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\beta\mu\nu} + h_{\beta\nu\mu} - h_{\mu\nu\beta}\right) g^{\alpha\beta}.$$

A que espaços pertencem os tensores H, g e h (supondo que essas grandezas representem tensores)? Reescreva essa fórmula na notação independente de coordenadas.

Solução. $H \in V \otimes V^* \otimes V^*$, $h \in V^* \otimes V^* \otimes V^*$, $g \in V \otimes V$. Supondo o caso mais simples,

$$h = \mathbf{h}_1^* \otimes \mathbf{h}_2^* \otimes \mathbf{h}_3^*,\ g = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2,$$

a fórmula independente de coordenadas é

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{g}_1 \otimes \left(\mathbf{h}_1^*(\mathbf{g}_2)\,\mathbf{h}_2^* \otimes \mathbf{h}_3^* + \mathbf{h}_1^*(\mathbf{g}_2)\,\mathbf{h}_3^* \otimes \mathbf{h}_2^* - \mathbf{h}_3^*(\mathbf{g}_2)\,\mathbf{h}_1^* \otimes \mathbf{h}_2^*\right).$$

◁

10.1.3. Vantagens e desvantagens da notação indicial

A notação indicial é conceitualmente mais fácil que a notação sem índices, pois podemos imaginar que manipulamos "apenas" tabelas de números, em vez de "vetores abstratos". Em outras palavras, trabalhamos com objetos *menos abstratos*. O preço é obscurecer a interpretação geométrica do que fazemos, e tornar mais difíceis de compreender as demonstrações de teoremas gerais.

A principal vantagem da notação indicial é tornar mais rápidos os cálculos com tensores complicados.

Algumas *desvantagens* da notação indicial são:

- Se a base muda, todas as componentes precisam ser recalculadas. Em livros que usam a notação indicial, dedica-se bastante tempo ao estudo das leis de transformação das componentes sob uma mudança de base. Se bases diferentes forem usadas simultaneamente, pode surgir confusão.

- O significado geométrico de muitos cálculos parece escondido atrás de uma massa de índices. Às vezes não fica claro se uma expressão longa com índices pode ser simplificada nem como prosseguir com os cálculos.

Apesar dessas desvantagens, a notação indicial permite realizar cálculos práticos com espaços de tensores de ordem alta, como os necessários na teoria de campos e na relatividade geral. Por esse motivo, e também por razões históricas (Einstein usou a notação indicial ao desenvolver a teoria da relatividade), a maioria dos livros de física usa essa notação. Em alguns casos, os cálculos podem ser feitos com a mesma rapidez nas notações indicial e sem índices. Em outros, especialmente na dedução de propriedades gerais dos tensores, a notação sem índices é superior.

Exercícios

Exercício N155 **Consolidação; básico**

Expanda $A^i{}_j v^j$ em dimensão 2 e identifique o índice livre e o índice mudo.

Exercício N156 **Justificação; médio**

Explique quais expressões são inválidas pela convenção de Einstein: $A^i{}_i v^i$, $v^i + w_j$ e $A^i{}_j v^j$. Corrija as inválidas sem mudar uma operação pretendida bem definida.

Exercício N157 **Consolidação; básico**

Renomeie os índices mudos em $A^i{}_j B^j{}_k v^k$ e confira que a componente de saída não muda.

10.2. Tensores novamente: mudança de coordenadas

10.2.1. Uma mudança de base acompanhada do começo ao fim

Se B tem como colunas a base nova escrita na base antiga, então $v = Bv'$. Essa igualdade fixa o sentido da mudança e evita memorizar matrizes de transição sem saber de onde partem. Representaremos vetores e covetores por colunas de componentes, mas a avaliação é $\alpha^T v$. Da invariância dos objetos, deduzimos

$$v' = B^{-1}v, \qquad \alpha' = B^T\alpha, \qquad A' = B^{-1}AB, \qquad H' = B^T HB.$$

As duas últimas regras seguem, respectivamente, de comparar as coordenadas de Av e de escrever $H(u, v)$ em coordenadas novas. A mesma matriz numérica na base antiga pode representar objetos de tipos diferentes; sua regra de transformação depende do tipo escolhido.

Exemplo 10.6 — Vetor, covetor, operador e forma na mesma base oblíqua

Use $E = ((1,0),(1,1))$ e os dados cartesianos

$$v = (2,3), \quad \alpha = (1,-2), \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule todas as representações novas e confira uma avaliação, uma ação de operador e um valor da forma bilinear.

Solução. A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem inversa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo

$$v' = (-1,3), \qquad \alpha' = (1,-1),$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad H' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A leitura é $\alpha'^T v' = -4 = \alpha^T v$. A ação do operador tem coordenadas $A'v' = (-5,9)$; retornando à base canônica, $B(-5,9)^T = (4,9)^T = Av$. A avaliação quadrática é

$$(v')^T H' v' = 35 = v^T H v.$$

Assim três resultados geométricos permaneceram iguais, embora suas representações fossem diferentes. O operador passou a ter uma matriz não simétrica; a forma bilinear continuou simétrica. Isso não contradiz a auto-adjunção do operador euclidiano: a noção correta em uma base oblíqua também envolve a métrica. ◁

Para um tensor covariante de ordem três,

$$T'_{ijk} = B^a{}_i B^b{}_j B^c{}_k T_{abc}.$$

Cada argumento vetorial introduz uma cópia de B. Para um tensor misto, cada índice superior introduz B^{-1} e cada inferior introduz B. Essa observação recupera as fórmulas gerais do capítulo: no formalismo ali adotado, $T = B$ e $S = B^{-1}$, com a posição dos índices correspondente.

10.2.2. A métrica: medir comprimentos sem supor ortogonalidade

Nesta discussão euclidiana, a métrica é uma forma bilinear positiva definida. Em uma base geral, seus números são $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, de modo que

$$\langle u, v \rangle = g_{ij} u^i v^j, \qquad v_i = g_{ij} v^j, \qquad v^j = g^{ij} v_j.$$

A matriz g^{ij} é a inversa da matriz g_{ij}. Abaixar índices transforma o vetor em seu covetor métrico; elevar faz a operação inversa. Isso acrescenta estrutura à avaliação canônica, não redefine essa avaliação.

Na base E do exemplo,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para as coordenadas $v' = (-1, 3)$ do vetor cartesiano $(2, 3)$, as componentes covariantes são $(v_i) = (2, 5)$, e $v_i v^i = -2 + 15 = 13$. O comprimento é $\sqrt{13}$. As duas listas representam papéis distintos da mesma informação métrica.

Se f é uma função diferenciável, seu diferencial tem componentes $\alpha_i = \partial_i f$, enquanto seu gradiente tem componentes

$$(\nabla f)^i = g^{ij} \partial_j f.$$

Em uma base ortonormal, a matriz g é a identidade e as listas numéricas coincidem. Em uma base coordenada oblíqua ou curvilínea, essa simplificação não é válida. Aqui reaparece a distinção entre diferencial e gradiente estudada no capítulo de diferenciação.

A lei de transformação expressa a invariância do objeto geométrico quando suas coordenadas mudam. Cada índice superior acompanha a transformação das componentes de um vetor; cada índice inferior acompanha a de um covetor. Um quadro de números só representa um tensor se obedecer à lei correspondente.

Vetores, covetores, operadores lineares e formas bilineares são exemplos de tensores. São aplicações multilineares que são representadas numericamente quando se escolhe uma base no espaço.

Essa representação numérica é específica para cada um: vetores e covetores são representados por arrays unidimensionais, enquanto operadores lineares e formas quadráticas são representados por arrays bidimensionais. Além do número de índices, sua posição também importa. As coordenadas de um vetor são numeradas por um índice superior, chamado índice contravariante. As coordenadas de um covetor são numeradas por um índice inferior, chamado índice covariante. Em uma matriz de forma bilinear usamos dois índices inferiores; por isso, formas bilineares são chamadas de **tensores duas vezes covariantes**. Operadores lineares são tensores de **tipo misto**; suas componentes são numeradas por um índice superior e um inferior. O número de índices e suas posições determinam as regras de transformação, isto é, a maneira como as componentes de cada tensor particular se comportam sob uma mudança de base. No caso geral, todo tensor é representado por uma matriz multidimensional com um número definido de índices superiores e um

número definido de índices inferiores. Denotemos esses números por r e s. Então temos um tensor de **tipo** (r, s). Um tensor de tipo (r, s) é chamado de tensor r**-vezes contravariante** e s**-vezes covariante**. Essa é a terminologia; passemos agora à definição coordenada, que codifica precisamente essas leis de transformação.

Definição 10.2 — Definição coordenada de tensor

Um arranjo de números reais $\mathrm{X}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$, com $r + s$ índices, cujas componentes obedecem às regras de transformação

$$\mathrm{X}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \sum_{\substack{h_1,\dots,h_r \\ k_1,\dots,k_s}}^{n}\cdots\sum^{n} \mathrm{S}^{i_1}_{h_1}\dots\mathrm{S}^{i_r}_{h_r}\mathrm{T}^{k_1}_{j_1}\dots\mathrm{T}^{k_s}_{j_s}\tilde{\mathrm{X}}^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s}, \tag{10.1}$$

$$\tilde{\mathrm{X}}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = \sum_{\substack{h_1,\dots,h_r \\ k_1,\dots,k_s}}^{n}\cdots\sum^{n} \mathrm{T}^{i_1}_{h_1}\dots\mathrm{T}^{i_r}_{h_r}\mathrm{S}^{k_1}_{j_1}\dots\mathrm{S}^{k_s}_{j_s}\mathrm{X}^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s}. \tag{10.2}$$

sob uma mudança de base é chamado **tensor** de tipo (r, s). Aqui, $\tilde{X}$ denota as componentes na base antiga e X, as componentes na base nova. As matrizes S e T são inversas entre si, com índices posicionados de modo que

$$T^k{}_j S^j{}_h = \delta^k{}_h, \qquad S^j{}_h T^h{}_i = \delta^j{}_i.$$

Em particular, as componentes de um vetor transformam-se por $v^i = S^i{}_h \tilde{v}^h$, enquanto as de um covetor transformam-se por $f_j = T^k{}_j \tilde{f}_k$. As duas leis são compatíveis com a invariância do pareamento $f_j v^j$.

A fórmula 10.2 é a inversa de 10.1, portanto basta conhecer uma delas. Tomemos 10.1. Embora extensa, sua estrutura é simples: cada índice superior recebe um fator S, e cada índice inferior, um fator T.

Os índices $i_1, \dots, i_r$ e $j_1, \dots, j_s$ são índices livres. No lado direito da igualdade 10.1, eles aparecem distribuídos nas matrizes S e T, cada um com uma única ocorrência e mantendo sua posição; isto é, os índices superiores $i_1, \dots, i_r$ continuam superiores, e os índices inferiores $j_1, \dots, j_s$ continuam inferiores no lado direito de 10.1.

Os demais índices $h_1, \dots, h_r$ e $k_1, \dots, k_s$ São índices de soma; eles entram no lado direito de 10.1 em pares: uma vez como índice superior e outra como índice inferior, uma vez em uma das matrizes S ou T e outra nas componentes do array $\tilde{\mathrm{X}}^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s}$.

Ao expressar $\mathrm{X}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ em termos de $\tilde{\mathrm{X}}^{h_1\dots h_r}_{k_1\dots k_s}$, cada índice superior é associado à matriz de transição direta S e produz uma soma em 10.1:

$$\mathsf{X}^{\cdots i_\alpha \cdots}_{\cdots\cdots\cdots} = \sum \cdots \sum_{h_\alpha=1}^{n} \cdots \sum \cdots \mathsf{S}^{i_\alpha}_{h_\alpha} \cdots \tilde{\mathsf{X}}^{\cdots h_\alpha \cdots}_{\cdots\cdots\cdots}. \tag{10.3}$$

De modo semelhante, cada índice inferior é associado à matriz de transição inversa T e também produz uma soma na fórmula 10.1:

$$\mathsf{X}^{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots j_\alpha \cdots} = \sum \cdots \sum_{k_\alpha=1}^{n} \cdots \sum \cdots \mathsf{T}^{k_\alpha}_{\ j_\alpha} \cdots \tilde{\mathsf{X}}^{\cdots\cdots\cdots}_{\cdots k_\alpha \cdots}. \tag{10.4}$$

As fórmulas 10.3 e 10.4 são equivalentes a 10.1 e destacam a estrutura de 10.1. A seguir, veremos exemplos de objetos conhecidos cujas componentes obedecem a essa lei de transformação.

Exemplo 10.7

Verifique que as fórmulas de mudança de base de vetores, covetores, transformações lineares e formas bilineares são casos especiais da fórmula 10.1. Quais são os tipos de vetores, covetores, operadores lineares e formas bilineares quando considerados como tensores?

Solução. Se $\tilde{v}^h$ são as componentes de um vetor na base antiga, então $v^i = S^i{}_h \tilde{v}^h$, que é a lei de 10.1 para $(r, s) = (1, 0)$. Para um covetor, $f_j = T^k{}_j \tilde{f}_k$, correspondente a $(0, 1)$. Um operador linear tem componentes

$$A^i{}_j = S^i{}_h T^k{}_j \tilde{A}^h{}_k,$$

de tipo $(1, 1)$; uma forma bilinear tem componentes

$$a_{ij} = T^h{}_i T^k{}_j \tilde{a}_{hk},$$

de tipo $(0, 2)$. Portanto, vetores são contravariantes, covetores são covariantes, operadores são mistos e formas bilineares são duas vezes covariantes. ◁

Exemplo 10.8

O δ^j_i é um tensor.

Solução.

$$\delta'^j{}_i = A^j_k (A^{-1})^l_i \delta^k_l = A^j_k (A^{-1})^k_i = \delta^j{}_i$$

◁

Exemplo 10.9

O ϵ_{ijk} é um pseudotensor.

Solução. Em dimensão n, o símbolo de Levi-Civita com n índices não obedece à lei de transformação de um tensor covariante sob uma mudança ortogonal arbitrária. Para uma matriz ortogonal Q, a transformação de suas componentes introduz o fator $\det Q$:

$$\epsilon'_{i_1\ldots i_n} = \det(Q)\,\epsilon_{i_1\ldots i_n}.$$

Assim, ele é preservado pelas transformações ortogonais que preservam a orientação e troca de sinal pelas que a invertem; esse comportamento é o que se chama de pseudotensor. Para mudanças de base gerais, as componentes da forma volume incluem também o fator de volume determinado pela métrica. ◁

Exemplo 10.10

Seja a uma forma bilinear não degenerada, com matriz a_{ij}. Denotemos por b^{ij} as componentes da matriz inversa de a_{ij}. Prove que a matriz b^{ij}, sob uma mudança de base, se transforma como a matriz de um tensor duas vezes contravariante. Assim, ela determina um tensor b de tipo $(2,0)$. O tensor b é chamado de **forma bilinear dual** de a.

Solução. A matriz inversa satisfaz $\tilde{a}_{hk}\tilde{b}^{kq} = \delta_h{}^q$. Na base nova,

$$a_{ij} = T^h{}_i T^k{}_j \tilde{a}_{hk}.$$

Defina $b^{j\ell} = S^j{}_p S^\ell{}_q \tilde{b}^{pq}$. Então

$$\begin{aligned} a_{ij}b^{j\ell} &= T^h{}_i T^k{}_j \tilde{a}_{hk} S^j{}_p S^\ell{}_q \tilde{b}^{pq} \\ &= T^h{}_i \tilde{a}_{hp} S^\ell{}_q \tilde{b}^{pq} \\ &= T^h{}_i S^\ell{}_h = \delta_i{}^\ell. \end{aligned}$$

Logo b^{ij} é a matriz inversa de a_{ij} em toda base e transforma-se como um tensor de tipo $(2,0)$. ◁

10.2.3. Ordem

Neste texto, a **ordem** de um tensor de tipo (r,s) é $r+s$. Assim, por exemplo, $\mathrm{A}^i{}_{jk}$ é um tensor de ordem 3.

É importante distinguir a ordem do tensor do número de índices livres em uma expressão. Índices repetidos em uma contração são índices mudos. A contração de um índice superior com um índice inferior produz um *novo* tensor de tipo $(r-1, s-1)$ e, portanto, reduz a ordem em duas unidades.

- O **tensor nulo** é o tensor cujas componentes são todas nulas.
- Escalares são tensores de ordem 0; vetores e covetores têm ordem 1.
- Tensores de ordem ≥ 1 podem ser descritos de modo intrínseco, sem índices, ou por suas componentes em uma base. A notação indicial é muito eficiente para cálculos, mas as componentes dependem da base escolhida.

10.2.4. Exemplos de tensores de diferentes ordens

- Tensores de ordem 0 são escalares. Exemplos físicos incluem massa, temperatura, energia, volume e densidade. Um escalar é descrito por um único número, independentemente da escolha de base; por isso, é invariante sob transformações de coordenadas.
- Tensores de ordem 1 incluem vetores e covetores. Deslocamento, velocidade, aceleração, força e campo elétrico são exemplos usuais de vetores. Em uma base de um espaço n-dimensional, um vetor é descrito por n componentes; essas componentes mudam quando a base muda, embora o vetor geométrico permaneça o mesmo.
- Tensores de ordem 2 incluem formas bilineares, operadores lineares e, em aplicações, os tensores de tensão, deformação e inércia. Suas componentes possuem dois índices.
- Tensores de ordem 3 aparecem, por exemplo, nos módulos piezoelétricos. Em dimensão três, o símbolo de Levi-Civita também possui três índices e, depois de fixadas métrica e orientação, representa as componentes da forma volume.
- Exemplos de tensores de ordem 4 incluem os tensores de elasticidade, rigidez e complacência, além do tensor de momento de inércia de quarta ordem.
- Tensores de ordens elevadas são relativamente raros na ciência.

Exemplo 10.11 — Métrica em uma base oblíqua

No plano euclidiano, use a base $E = ((1,0),(1,1))$. Calcule as componentes da métrica, rebaixe o índice do vetor de coordenadas $v^i = (2,-1)$ e confira seu comprimento.

Solução. A matriz cujas colunas são os vetores de E é $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, portanto

$$g = B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (v_i) = g(v^i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O comprimento ao quadrado é $g_{ij}v^i v^j = v_i v^i = 2$. Na base canônica, o vetor é $B(2,-1)^T = (1,-1)^T$, cuja norma ao quadrado também é 2. A diferença entre (v^i) e (v_i) é essencial nessa base: rebaixar um índice não é apenas deslocar o símbolo no papel. ◁

Exercícios

Exercício N158 Consolidação; médio

Calcule a matriz de um operador com matriz canônica $\mathrm{diag}(2,3)$ na base $E = ((1,0),(1,1))$.

Exercício N159 Consolidação; médio

Na mesma base, calcule as componentes da forma bilinear de matriz canônica $\mathrm{diag}(2,3)$ e compare os dois resultados.

Exercício N160 Justificação; médio

Mostre por substituição nas leis de transformação que $\alpha_i v^i$ é invariante.

Exercícios de ampliação

Exercício A011 **Consolidação; médio**

Em coordenadas polares com métrica $g = \mathrm{diag}(1, r^2)$ e $r > 0$, tome $f = r^2 \cos\theta$. Calcule as componentes de df, as componentes coordenadas e físicas de ∇f e a norma ao quadrado do gradiente.

Exercício A012 **Consolidação; médio**

Para $\alpha = (2, 1)$ na base dual canônica e $T = \alpha \otimes \alpha \otimes \alpha$, transforme as componentes para $E = ((1, 0), (1, 1))$. Confira $T(v, v, v)$ para o vetor com coordenadas $[v]_E = (1, -1)$.

10.3. Operações tensoriais em coordenadas

As operações em componentes devem reproduzir operações geométricas bem definidas. Somas exigem tipos compatíveis; produtos acrescentam argumentos; contrações usam o pareamento entre vetor e covetor. Conferir os índices livres antes e depois do cálculo ajuda a distinguir essas operações.

Há muitas operações que podem ser realizadas sobre tensores para produzir, em geral, outros tensores. Alguns exemplos são adição/subtração, multiplicação por um escalar (tensor de ordem 0), multiplicação de tensores (cada um de ordem > 0), contração e permutação. Algumas dessas operações, como adição e multiplicação, envolvem mais de um tensor, enquanto outras são realizadas sobre um único tensor, como contração e permutação.

Na álgebra tensorial, não há uma operação canônica de divisão por um tensor. Pode-se dividir um tensor por um escalar não nulo, mas tomar o recíproco componente a componente, por exemplo $1/A_i$, em geral *não* produz as componentes de um tensor.

10.3.1. Adição e subtração

Tensores da mesma ordem e do mesmo tipo podem ser somados algebricamente para produzir um tensor da mesma ordem e do mesmo tipo, por exemplo,

$$a = b + c \tag{10.5}$$

$$\mathrm{A}_i = \mathrm{B}_i - \mathrm{C}_i \tag{10.6}$$

$$\mathrm{A}^i_j = \mathrm{B}^i_j + \mathrm{C}^i_j \tag{10.7}$$

Definição 10.3

Dados dois tensores X e Y do mesmo tipo (r, s), definimos sua soma componente a componente por

$$Z^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} = X^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} + Y^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s}.$$

Teorema 10.1

A soma de dois tensores do mesmo tipo (r, s) é novamente um tensor de tipo (r, s).

Demonstração. As componentes de X e Y obedecem à mesma lei de transformação. Somando essas duas leis termo a termo e usando a distributividade, obtemos

$$Z^{i_1\ldots i_r}{}_{j_1\ldots j_s} = S^{i_1}{}_{h_1}\cdots S^{i_r}{}_{h_r} T^{k_1}{}_{j_1}\cdots T^{k_s}{}_{j_s}\,\widetilde{Z}^{h_1\ldots h_r}{}_{k_1\ldots k_s},$$

que é exatamente a lei de transformação de um tensor de tipo (r, s). ∎

A adição de tensores é associativa e comutativa:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \tag{10.8}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{10.9}$$

10.3.2. Multiplicação por escalar

Um tensor pode ser multiplicado por qualquer escalar para produzir um tensor do mesmo tipo e da mesma ordem, por exemplo,

$$\mathrm{A}^{j}_{ik} = a\mathrm{B}^{j}_{ik} \tag{10.10}$$

onde a é um escalar.

Definição 10.4

Dado $\mathrm{X}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$, um tensor de tipo (r, s), e dado α, um escalar, definimos a multiplicação de $\mathrm{X}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ por α como:

$$\mathrm{Y}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \alpha\,\mathrm{X}^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}.$$

Teorema 10.2

Se X é um tensor de tipo (r,s) e $\alpha \in \mathbb{R}$, então αX também é um tensor de tipo (r,s).

Demonstração. Se X satisfaz a lei de transformação de tipo (r,s), então

$$Y^{i_1\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s} = \alpha X^{i_1\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s} = S^{i_1}{}_{h_1}\cdots S^{i_r}{}_{h_r} T^{k_1}{}_{j_1}\cdots T^{k_s}{}_{j_s}\big(\alpha \widetilde{X}^{h_1\dots h_r}{}_{k_1\dots k_s}\big),$$

pois o escalar α não depende da base. Esta é a lei de transformação de um tensor do mesmo tipo. ∎

Como indicado acima, multiplicar um tensor por um escalar significa multiplicar cada componente do tensor por esse escalar.

A multiplicação por um escalar é comutativa e associativa quando há mais de dois fatores envolvidos.

10.3.3. Produto tensorial

Essa operação também é chamada, em alguns contextos, de produto direto ou diádico. Não deve ser confundida com o *produto exterior* $\wedge$, que é uma operação antissimétrica.

O produto tensorial é definido por uma fórmula um pouco mais elaborada. Suponha que tenhamos o tensor X de tipo (r,s) e o tensor Y de tipo (p,q). Então podemos escrever:

$$\mathrm{Z}^{i_1\dots i_{r+p}}{}_{j_1\dots j_{s+q}} = \mathrm{X}^{i_1\dots i_r}{}_{j_1\dots j_s}\,\mathrm{Y}^{i_{r+1}\dots i_{r+p}}{}_{j_{s+1}\dots j_{s+q}}. \tag{10.11}$$

A fórmula 10.11 define um tensor Z de tipo $(r+p, s+q)$, chamado **produto tensorial** de X e Y e denotado por $Z = X \otimes Y$.

Exemplo 10.12

$$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j = \mathrm{C}_{ij} \tag{10.12}$$

$$A^{ij}\mathrm{B}_{kl} = \mathrm{C}^{ij}{}_{kl} \tag{10.13}$$

A multiplicação direta de tensores não é comutativa.

Exemplo 10.13 — Produto tensorial de vetores

Em $\mathbb{R}^3$, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm componentes u^i e v^j, então $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ tem componentes $u^i v^j$. Na representação matricial associada a uma base,

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 v^1 & u^1 v^2 & u^1 v^3 \\ u^2 v^1 & u^2 v^2 & u^2 v^3 \\ u^3 v^1 & u^3 v^2 & u^3 v^3 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz é apenas a representação do tensor na base escolhida; o tensor em si é independente de coordenadas.

O produto tensorial é distributivo em relação à soma:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C, \qquad (B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A.$$

A multiplicação de um tensor por um escalar (veja § 10.3.2) pode ser considerada um caso particular da multiplicação direta.

O tensor de ordem 2 construído como resultado da multiplicação direta de dois vetores é comumente chamado díade.

Tensores podem ser expressos como somas finitas de produtos tensoriais dos elementos dos espaços envolvidos. Em cada produto simples, a ordem do produto resultante é igual ao número de fatores de ordem um envolvidos (por exemplo, 2 para díades e 3 para tríades).

Nem todo tensor pode ser sintetizado como produto de tensores de ordem inferior.

10.3.4. Contração

A contração é definida escolhendo um índice superior e um índice inferior, igualando seus símbolos e somando sobre o índice repetido. Para um tensor de tipo (r, s) com $r, s \geq 1$, a contração produz um tensor de tipo $(r-1, s-1)$. Por exemplo,

$$\mathrm{A}_i^j \quad \xrightarrow{\text{contração}} \quad \mathrm{A}_i^i \tag{10.14}$$

$$\mathrm{A}_{il}^{jk} \quad \xrightarrow{\text{contração em } jl} \quad \mathrm{A}_{im}^{mk} \tag{10.15}$$

A contração reduz a ordem em 2, pois implica a eliminação de dois índices livres. Portanto, a contração de um tensor de ordem 2 é um escalar, a de um tensor de ordem 3 é um tensor de ordem 1 (vetor ou covetor, conforme a variância restante), a de um tensor de ordem 4 é um tensor de ordem 2, e assim por diante.

A exigência de um índice superior e um inferior não depende do sistema de coordenadas: ela expressa o pareamento canônico entre V^* e V. Contrações entre dois índices do mesmo tipo só fazem sentido depois de introduzida uma estrutura adicional, como uma métrica.

Um tensor de tipo (p, q) pode ter $p \times q$ contrações possíveis, isto é, uma contração para cada par formado por um índice inferior e um superior.

Exemplo 10.14 — Traço

Na álgebra matricial, calcular o traço (somar os elementos da diagonal) também pode ser considerado uma contração da matriz, que sob certas condições pode representar um tensor de ordem 2; assim, produz o traço, que é um escalar.

10.3.5. Produto interno

Ao tomar o produto tensorial de dois tensores de ordem pelo menos um e contrair um índice superior com um inferior, obtém-se uma operação de produto interno. A contração canônica só é possível quando há índices de variância oposta; para contrair dois índices do mesmo tipo, é preciso introduzir uma estrutura adicional, como uma métrica. Uma única contração reduz a ordem total em duas unidades: se os fatores têm ordens m e n, o resultado tem ordem $m + n - 2$.

A operação de produto interno costuma ser simbolizada por um único ponto entre os dois tensores, por exemplo, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, para indicar uma contração após a multiplicação externa.

Em geral, o produto interno não é comutativo. Quando um ou ambos os tensores envolvidos têm ordem > 1, a ordem dos fatores é relevante.

A operação de produto interno é distributiva em relação à soma algébrica de tensores:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad \& \qquad (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \pm \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \tag{10.16}$$

Exemplo 10.15 — Produto escalar

O produto escalar de dois vetores não é uma contração canônica de dois tensores contravariantes: ele requer um produto interno. Ao passar à notação do cálculo tensorial, denotamos essa métrica por g, suas componentes por g_{ij} e as componentes da matriz inversa por g^{ij}. A subida e a descida de índices

são dadas por

$$A^i = g^{ij}A_j, \qquad A_i = g_{ij}A^j.$$

Assim, por exemplo, o produto escalar é

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = g_{ij}u^i v^j.$$

Equivalentemente, primeiro abaixamos um índice, $u_i = g_{ij}u^j$, e depois contraímos $u_i v^i$.

Exemplo 10.16 — Matriz atuando sobre vetores

Uma transformação linear $A : V \to V$ é um tensor misto de tipo $(1,1)$. Sua ação sobre $\mathbf{b}$ é a contração

$$c^i = A^i{}_j b^j,$$

que produz novamente um vetor.

A multiplicação de duas matrizes $n \times n$ é outro exemplo de produto interno (veja a Eq. 1.14).

Para tensores cujo produto externo produz um tensor de ordem > 2, podem ocorrer várias operações de contração entre diferentes conjuntos de índices e, assim, podem ser definidos vários produtos internos, em geral diferentes. Além disso, quando o produto externo produz um tensor de ordem > 3, mais de uma contração pode ocorrer simultaneamente.

Observação 10.3

Uma contração canônica elimina um índice superior e um inferior. Se uma fórmula em uma base cartesiana contrai dois índices inferiores, há uma métrica inversa implícita. Em uma base não ortonormal, essa métrica precisa ser escrita; a repetição dos índices, por si só, não define a contração.

10.3.6. Permutação

Um tensor pode ser obtido trocando os índices de outro tensor, por exemplo, pela troca dos argumentos de uma forma bilinear. A transposição da matriz de um operador de tipo $(1,1)$ não representa, em uma base arbitrária, outro operador do mesmo tipo sem uma identificação adicional entre vetores e covetores.

Evidentemente, a permutação tensorial aplica-se apenas a tensores de ordem ≥ 2.

Permutar índices produz, em geral, outro tensor da mesma ordem; quando o tensor possui simetrias, algumas dessas permutações podem coincidir ou diferir apenas por um sinal.

10.3.7. Contração, avaliação e produto: conferir o resultado

Exemplo 10.17 — Operações diferentes com os mesmos dados

Tome $v = (1, 2)$ e $\alpha = (3, -1)$. Compare o operador $v \otimes \alpha$, a leitura $\alpha(v)$ e o produto tensorial de dois covetores.

Solução. O operador tem matriz

$$A^i{}_j = v^i \alpha_j = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para todo w, $Aw = \alpha(w)v$, e sua imagem é a reta gerada por v. A contração é $A^i{}_i = 3 - 2 = 1 = \alpha(v)$. Ao contrário, se $\beta = (1, 2)$ é um covetor com esses números, $\alpha \otimes \beta$ é uma forma bilinear, de matriz $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ela recebe dois vetores e devolve um número. Não é o mesmo operador, e seu "traço" não é definido pelo pareamento canônico sem uma métrica. A troca da posição dos índices expressa uma troca do tipo do objeto. ◁

Um tensor geral é uma **soma finita** de produtos de elementos dos espaços envolvidos. Um único produto é chamado tensor simples ou decomponível. Por exemplo, uma matriz de posto dois não representa $v \otimes \alpha$, que tem posto no máximo um. As expansões em uma base tensorial garantem representação por soma; não garantem representação por um único produto.

10.3.8. Transposição e adjunto: qual operação é intrínseca?

Uma forma bilinear H pode ter seus argumentos permutados: a forma $H^T(u, v) = H(v, u)$ tem matriz transposta em qualquer base. Para um operador $A : V \to V$, a operação intrínseca associada à transposição é inicialmente o operador dual $A^* : V^* \to V^*$, definido por $A^*(\alpha) = \alpha \circ A$. Ele atua em outro espaço.

Com uma métrica, podemos definir o adjunto $A^\dagger : V \to V$ por $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^\dagger v\rangle$. Em componentes,

$$A^\dagger = g^{-1} A^T g.$$

De fato, $u^T A^T g v = u^T g A^\dagger v$ para todos u, v, logo $A^T g = g A^\dagger$. Só em uma base ortonormal euclidiana o adjunto é a transposta comum. Para $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e a métrica oblíqua do exemplo anterior, o cálculo dá $(A')^\dagger = A'$, embora $(A')^T \neq A'$.

10.3.9. Uma contração completa que mede um tensor

Para uma forma bilinear H, a métrica positiva definida induz

$$\|H\|^2 = g^{ik} g^{jl} H_{ij} H_{kl}.$$

Na base ortonormal, ela é a soma dos quadrados das componentes. A expressão com as duas métricas inversas permite o mesmo cálculo em qualquer base. Para $H = \mathrm{diag}(2, 3)$, a norma ao quadrado é 13; na base oblíqua, usar $H' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $g^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dá novamente 13. Somar os quadrados das entradas de H' daria 37, um número que não mede o mesmo objeto. A fórmula pressupõe uma métrica positiva definida; com uma métrica indefinida, a contração não é necessariamente uma norma.

10.3.10. Por que a contração independe da base

A invariância pode ser conferida diretamente, sem memorizar uma regra adicional. Para um operador, escreva

$$(A')^i{}_j = (B^{-1})^i{}_a A^a{}_b B^b{}_j.$$

Contraindo os índices de saída e entrada,

$$(A')^i{}_i = (B^{-1})^i{}_a A^a{}_b B^b{}_i = \delta^b{}_a A^a{}_b = A^a{}_a.$$

Os fatores B e B^{-1} se cancelam no par contraído; os demais índices, quando existem, conservam seus próprios fatores de mudança. Esse argumento prova a lei de transformação do tensor que resta depois de qualquer contração entre um índice superior e um inferior. Na norma de uma forma bilinear, as duas cópias de g^{-1} realizam primeiro os pareamentos necessários, explicando por que a expressão $g^{ik} g^{jl} H_{ij} H_{kl}$ é um escalar em qualquer base.

Exercícios

Exercício N161 **Consolidação; médio**

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $v = (1, -1)$ e $\alpha = (2, 1)$, calcule Av, $v \otimes \alpha$ e $\alpha(v)$, indicando os tipos.

Exercício N162 **Consolidação; médio**

Determine o traço e o posto de $v \otimes \alpha$ para $v = (1, 2)$ e $\alpha = (3, -1)$.

Exercício N163 **Consolidação; médio**

Se $T^{ij}{}_{kl}$ é um tensor de tipo $(2, 2)$, escreva uma contração de tipo $(1, 1)$ e uma contração completa; identifique cada índice somado.

Exercício N164 **Justificação; médio**

Para uma métrica positiva definida g, escreva em índices a norma ao quadrado de um tensor covariante de ordem 2 usando duas cópias de g^{-1}.

Exercícios de ampliação

Exercício A013 **Justificação; médio**

Na métrica $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule o adjunto do operador $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Compare com a transposta comum e confira $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^{\dagger} v \rangle$.

Exercício A014 **Consolidação; médio**

Para $g = \operatorname{diag}(1, 4)$ e a forma bilinear $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule a norma tensorial usando g^{-1}. Compare com a soma dos quadrados das entradas da matriz.

10.4. Delta de Kronecker e símbolo de Levi-Civita

O delta de Kronecker realiza o pareamento da identidade, e o símbolo alternante organiza permutações e determinantes. Em uma base geral, a forma volume incorpora o fator da métrica; os valores $0, \pm 1$ do símbolo não devem ser tratados automaticamente como componentes invariantes de um tensor.

Esses dois objetos aparecem continuamente no cálculo tensorial, mas é importante distingui-los. As componentes $\delta^{i}{}_{j}$ do delta de Kronecker representam o opera-

dor identidade e, portanto, definem um tensor intrínseco. Já o símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ é, antes de tudo, um símbolo de permutação; suas componentes representam a forma volume depois de fixadas uma orientação e uma estrutura métrica.

10.4.1. Kronecker δ

O delta de Kronecker é definido por

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{10.17}$$

Ele representa a identidade $I : V \to V$, pois

$$\delta^i{}_j v^j = v^i.$$

Assim, $\delta^i{}_j$ tem as mesmas componentes numéricas em qualquer base. Em uma base euclidiana ortonormal, subir ou descer índices com a métrica identidade permite escrever também

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i{}_j,$$

mas essa identificação não vale em uma base geral.

10.4.2. Permutação ϵ

O símbolo de Levi-Civita em dimensão n é totalmente antissimétrico: trocar dois índices muda seu sinal, e qualquer componente com índices repetidos é nula. Em uma base ortonormal positivamente orientada, ele fornece as componentes da forma volume. Sob uma mudança ortogonal que inverte a orientação, essas componentes mudam de sinal; por isso, na linguagem clássica do cálculo tensorial, ϵ é frequentemente descrito como um pseudotensor.

Daqui até o final desta seção, quando índices de δ ou ϵ forem levantados ou abaixados sem exibir a métrica, estaremos trabalhando em uma base cartesiana ortonormal.

Definição de ϵ de ordem 2 (ϵ_{ij}):

$$\epsilon_{12} = 1, \qquad \epsilon_{21} = -1 \qquad \& \qquad \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0 \tag{10.18}$$

Definição de ϵ de ordem 3 (ϵ_{ijk}):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k \text{ é uma permutação par de 1,2,3}) \\ -1 & (i,j,k \text{ é uma permutação ímpar de 1,2,3}) \\ 0 & (\text{índice repetido}) \end{cases} \tag{10.19}$$

A definição de ϵ de ordem n ($\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$) é semelhante à definição de ϵ de ordem 3, considerando a repetição de índices e as permutações pares ou ímpares de seus índices $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ correspondentes a $(1, 2, \cdots, n)$, isto é,

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1 & [(i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, \ldots, n)] \\ -1 & [(i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, \ldots, n)] \\ 0 & [\text{índice repetido}] \end{cases} \tag{10.20}$$

Em uma base cartesiana ortonormal, a métrica euclidiana é a identidade; por isso, numericamente, as componentes de ϵ com índices levantados ou abaixados coincidem. Essa igualdade de componentes não deve ser confundida com uma lei tensorial válida em coordenadas gerais.

10.4.3. Identidades úteis envolvendo δ e/ou ϵ

Nesta subseção adotaremos, excepcionalmente, a convenção euclidiana tradicional: em uma base cartesiana ortonormal, índices repetidos podem ser somados mesmo quando aparecem ambos em posição inferior. Isso equivale a levantar um deles com a métrica δ^{ij} e evita sobrecarregar as identidades clássicas com deltas adicionais.

Identidades envolvendo δ

Quando um índice do delta de Kronecker participa de uma operação de contração pela repetição de um índice em outro tensor no mesmo termo, o efeito é substituir o índice compartilhado no outro tensor pelo outro índice do delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{ij} \mathsf{A}_j = \mathsf{A}_i \tag{10.21}$$

Nesses casos, o delta de Kronecker é descrito como operador de substituição ou de troca de índices. Assim,

$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik} \tag{10.22}$$

Analogamente,

$$\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} = \delta_{ik} \delta_{ki} = \delta_{ii} = n \tag{10.23}$$

onde n é a dimensão do espaço.

Como as coordenadas são independentes umas das outras:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \partial_j x_i = x_{i,j} = \delta_{ij} \tag{10.24}$$

Consequentemente, em um espaço de dimensão n, temos

$$\partial_i x_i = \delta_{ii} = n \tag{10.25}$$

Para sistemas cartesianos ortonormais:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_{ij} = \delta^{ij} \tag{10.26}$$

Para um conjunto de vetores de base ortonormais em sistemas cartesianos ortonormais:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{10.27}$$

O produto interno duplo de dois díades formados por vetores de base ortonormais de um sistema cartesiano ortonormal é dado por:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j : \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = \delta_{ik}\delta_{jl} \tag{10.28}$$

Identidades envolvendo ϵ

Para ϵ de ordem 3:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} \qquad \text{(sentido da ordem cíclica)} \tag{10.29}$$

Essas equações demonstram que ϵ de ordem 3 é totalmente antissimétrico em todos os seus índices, pois a troca de quaisquer dois índices inverte o sinal. Isso também reflete o fato de que o sistema tensorial acima possui apenas uma componente independente.

Para ϵ de ordem 2, com $i, j \in \{1, 2\}$:

$$\epsilon_{ij} = j - i. \tag{10.30}$$

Para ϵ de ordem 3, com $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(j - i)(k - i)(k - j). \tag{10.31}$$

Para ϵ de ordem 4:

$$\epsilon_{ijkl} = \frac{1}{12}(j - i)(k - i)(l - i)(k - j)(l - j)(l - k) \tag{10.32}$$

Para ϵ de ordem n:

$$\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1}{i!}\prod_{j=i+1}^{n}\left(a_j - a_i\right)\right] = \frac{1}{S(n-1)}\prod_{1\le i<j\le n}\left(a_j - a_i\right) \tag{10.33}$$

onde $S(n-1)$ é a função super fatorial de $(n-1)$, definida por

$$S(k) = \prod_{i=1}^{k} i! = 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot k! \tag{10.34}$$

Uma fórmula mais simples para ϵ de ordem n pode ser obtida da anterior ignorando o módulo dos fatores de multiplicação e considerando apenas seus sinais, isto é,

$$\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n} = \prod_{1 \le i < j \le n} \sigma\left(a_j - a_i\right) = \sigma\left(\prod_{1 \le i < j \le n} \left(a_j - a_i\right)\right) \tag{10.35}$$

onde

$$\sigma(k) = \begin{cases} +1 & (k > 0) \\ -1 & (k < 0) \\ \ \ 0 & (k = 0) \end{cases} \tag{10.36}$$

Para ϵ de ordem n:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}\, \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = n! \tag{10.37}$$

pois essa é a soma dos quadrados de $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ em todas as permutações de n índices distintos, que é igual a $n!$. O valor de ϵ em cada uma dessas permutações é $+1$ ou -1; portanto, em ambos os casos seu quadrado é 1.

Para um tensor simétrico A_{jk}:

$$\epsilon_{ijk} \mathrm{A}_{jk} = 0 \tag{10.38}$$

pois a troca dos dois índices de A_{jk} não altera seu valor, devido à simetria, enquanto uma troca semelhante desses índices em ϵ_{ijk} inverte o sinal; assim, cada termo da soma tem seu oposto e a soma total se anula.

$$\epsilon_{ijk} \mathrm{A}_i \mathrm{A}_j = \epsilon_{ijk} \mathrm{A}_i \mathrm{A}_k = \epsilon_{ijk} \mathrm{A}_j \mathrm{A}_k = 0 \tag{10.39}$$

pois, devido à comutatividade da multiplicação, uma troca dos índices nos A's não altera o valor, mas uma troca correspondente nos índices de ϵ_{ijk} provoca uma mudança de sinal; assim, cada termo da soma tem seu oposto e a soma total é zero.

Para um conjunto de vetores de base ortonormais em um espaço tridimensional com um sistema cartesiano ortonormal orientado à direita:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \tag{10.40}$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \left(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k\right) = \epsilon_{ijk} \tag{10.41}$$

Identidades envolvendo δ e ϵ

$$\epsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} = \epsilon_{123} = 1 \tag{10.42}$$

Para ϵ de ordem 2:

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \tag{10.43}$$

$$\epsilon_{il}\epsilon_{kl} = \delta_{ik} \tag{10.44}$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = 2 \tag{10.45}$$

Para ϵ de ordem 3:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \tag{10.46}$$

Expandindo o determinante:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = {} & \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} \\ & - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned} \tag{10.47}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{10.48}$$

A última identidade é muito útil para manipular e simplificar expressões tensoriais e demonstrar identidades vetoriais e tensoriais.

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{10.49}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 \tag{10.50}$$

pois a ordem e a dimensão de ϵ são iguais, ambas valendo 3 neste caso.

Para ϵ de ordem n:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}\,\epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \cdots & \delta_{i_1 j_n} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \cdots & \delta_{i_2 j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \delta_{i_n j_2} & \cdots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix} \tag{10.51}$$

De acordo com as Eqs. 10.19 e 10.21:

$$\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = \epsilon_{ijk}\delta_{ik} = \epsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0 \tag{10.52}$$

10.4.4. ⋆ Delta de Kronecker generalizado

Para $1 \leq p \leq n$, o delta de Kronecker generalizado é definido por

$$\delta^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} = \det \begin{bmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_p}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_p}_{j_p} \end{bmatrix}. \tag{10.53}$$

Ele é totalmente antissimétrico nos índices superiores e também nos inferiores. Em particular, vale $+1$ ou -1 quando as duas listas de índices contêm os mesmos p índices distintos, com o sinal da permutação que relaciona uma lista à outra; vale zero nos demais casos. Essa caracterização é equivalente à definição pelo determinante.

Consequentemente, a relação entre o ϵ de ordem n e o delta de Kronecker generalizado em um espaço n-dimensional é dada por:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{1\,2 \ldots n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \qquad \& \qquad \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{1\,2 \ldots n} \tag{10.54}$$

Assim, o tensor de permutação ϵ pode ser considerado um caso particular do delta de Kronecker generalizado. Consequentemente, o símbolo de permutação pode ser escrito como um determinante $n \times n$ formado por deltas de Kronecker usuais.

Para $p = 2$,

$$\delta^{ij}_{lm} = \delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l. \tag{10.55}$$

Em dimensão três, a contração do delta generalizado de ordem três satisfaz

$$\delta^{ijk}_{lmk} = \delta^{ij}_{lm},$$

com soma sobre k. Em dimensão n arbitrária, o fator correto é $\delta^{ijk}_{lmk} = (n-2)\delta^{ij}_{lm}$. Assim, a identidade 10.48 é precisamente a forma tridimensional dessa relação. Outras identidades envolvendo δ e ϵ também podem ser formuladas em termos do delta de Kronecker generalizado.

Comparando a Eq. 10.51 com a Eq. 10.53, concluímos que

$$\delta^{i_1 \ldots i_n}_{j_1 \ldots j_n} = \epsilon^{i_1 \ldots i_n} \epsilon_{j_1 \ldots j_n} \tag{10.56}$$

10.4.5. Do símbolo alternante à forma volume

Fixe uma orientação e uma métrica positiva definida. Em uma base positivamente orientada, a forma volume tem componentes

$$\mathrm{vol}_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{\det(g_{ij})}\, \epsilon_{i_1 \ldots i_n}.$$

Para entender o fator, escreva a base como colunas de B em uma base ortonormal positiva. A avaliação da forma volume nos vetores da base é $\det B$, e $g = B^T B$ implica $\det g = (\det B)^2$. O sinal da orientação é fixado separadamente; uma base de orientação oposta exige o sinal oposto nas componentes da mesma forma volume.

Exemplo 10.18 — O volume de uma célula oblíqua

Use $E = ((1,0,0),(1,2,0),(0,0,3))$. Calcule a métrica e a componente vol_{123}; depois compare com o símbolo ϵ_{123}.

Solução. A matriz de Gram é

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \det g = 36.$$

A base é positiva e seu volume é $\det B = 6$. Logo $\mathrm{vol}_{123} = 6$, enquanto $\epsilon_{123} = 1$. O segundo número codifica uma permutação; o primeiro mede o volume orientado dos três vetores concretos. Essa diferença explica por que as identidades numéricas de Levi–Civita devem vir acompanhadas da convenção de base e métrica. ◁

Exercícios

Exercício N165 Consolidação; básico

Em dimensão 3, calcule $\delta^i{}_i$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$ e $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}$ em uma base cartesiana ortonormal.

Exercício N166 Justificação; médio

Use $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ para provar $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$.

Exercício N167 Justificação; médio

Em uma base oblíqua positivamente orientada com matriz B, mostre que a forma volume assume valor $\det B$ nos vetores dessa base. Explique o fator $\sqrt{\det g}$.

Exercícios de ampliação

Exercício A019 **Consolidação; médio**

Use a base plana de matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule a métrica, a avaliação da forma área nos vetores da base e o fator $\sqrt{\det g}$. Compare a mudança de uma forma orientada com a de uma medida positiva de área.

10.5. Tipos de campos tensoriais

Simetria de argumentos e invariância sob rotações são propriedades distintas. Um tensor pode ser simétrico e anisotrópico. Em modelos materiais, essa distinção separa a reciprocidade das componentes da existência de direções preferenciais.

Nas subseções seguintes, introduzimos vários tipos e categorias de tensores e destacamos suas principais características e diferenças. Esses tipos e categorias não são mutuamente exclusivos e, portanto, em geral se sobrepõem; além disso, podem não ser exaustivos em suas classes, pois alguns tensores podem não pertencer a nenhum dos tipos de um conjunto complementar, como ser simétrico ou antissimétrico.

10.5.1. Tensores isotrópicos e anisotrópicos

Chamaremos de **isotrópico** um tensor cujas componentes permanecem inalteradas sob toda mudança ortogonal de base. Com essa convenção, um escalar é isotrópico, assim como o vetor nulo e o tensor identidade $\delta^i{}_j$. O símbolo de Levi-Civita exige uma ressalva: ele é preservado pelas rotações próprias, mas muda de sinal quando a orientação é invertida.

Em aplicações, a palavra “isotrópico” também é usada para descrever leis constitutivas ou campos que não distinguem direções espaciais. O significado preciso deve sempre ser entendido a partir da ação do grupo de transformações considerado.

Teorema 10.4

Se um tensor covariante de segunda ordem T_{ij} é invariante sob todas as transformações ortogonais, então existe um escalar λ tal que

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij}.$$

Demonstração. Fixe uma base ortonormal. Para $i \neq j$, considere a reflexão que troca o sinal do i-ésimo vetor da base e mantém os demais. A invariância de T faz a componente T_{ij} permanecer a mesma, enquanto a lei de transformação troca seu sinal. Logo $T_{ij} = 0$, e T é diagonal.

Agora considere uma transformação ortogonal que permuta os vetores $\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{e}_j$. A invariância implica $T_{ii} = T_{jj}$. Todas as entradas diagonais são, portanto, iguais a um mesmo escalar λ, e $T_{ij} = \lambda\delta_{ij}$. ∎

10.5.2. Tensores simétricos e antissimétricos

Esses tipos de tensor aplicam-se somente a ordens altas (ordem ≥ 2). Além disso, eles não são exaustivos, mesmo para tensores de ordem ≥ 2, pois existem tensores de ordem alta que não são nem simétricos nem antissimétricos.

Um tensor de ordem 2 A_{ij} é simétrico *se, e somente se,* para todo i e j,

$$\mathsf{A}_{ji} = \mathsf{A}_{ij} \tag{10.57}$$

e antissimétrico, *se, e somente se,*

$$\mathsf{A}_{ji} = -\mathsf{A}_{ij} \tag{10.58}$$

Condições semelhantes aplicam-se aos tensores contravariantes (veja também o que segue).

Um tensor de ordem n $\mathsf{A}_{i_1\ldots i_n}$ é simétrico em seus dois índices i_j e i_l *se, e somente se,*

$$\mathsf{A}_{i_1\ldots i_l\ldots i_j\ldots i_n} = \mathsf{A}_{i_1\ldots i_j\ldots i_l\ldots i_n} \tag{10.59}$$

e antissimétrico, em seus dois índices i_j e i_l *se, e somente se,*

$$\mathsf{A}_{i_1\ldots i_l\ldots i_j\ldots i_n} = -\mathsf{A}_{i_1\ldots i_j\ldots i_l\ldots i_n} \tag{10.60}$$

Qualquer tensor de ordem 2 A_{ij} pode ser construído a partir de (ou decomposto em) uma parte simétrica $\mathsf{A}_{(ij)}$ (marcada por parênteses envolvendo os índices) e uma parte antissimétrica $\mathsf{A}_{[ij]}$ (marcada por colchetes), onde

$$\mathsf{A}_{ij} = \mathsf{A}_{(ij)} + \mathsf{A}_{[ij]}, \qquad \mathsf{A}_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(\mathsf{A}_{ij} + \mathsf{A}_{ji}\right) \qquad \& \qquad \mathsf{A}_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\mathsf{A}_{ij} - \mathsf{A}_{ji}\right) \tag{10.61}$$

A decomposição em duas partes é completa para ordem dois ou para uma simetrização em um par fixo de índices: a troca nesse par tem quadrado igual à identidade. Para ordem três ou maior, a parte totalmente simétrica e a parte totalmente alternada não somam, em geral, o tensor original; pode restar uma parte de simetria mista. O exercício A018 mostra explicitamente essa diferença.

Um tensor de ordem 3 A_{ijk} pode ser simetrizado por

$$A_{(ijk)} = \frac{1}{3!}\left(A_{ijk} + A_{kij} + A_{jki} + A_{ikj} + A_{jik} + A_{kji}\right) \tag{10.62}$$

e antissimetrizado por

$$A_{[ijk]} = \frac{1}{3!}\left(A_{ijk} + A_{kij} + A_{jki} - A_{ikj} - A_{jik} - A_{kji}\right) \tag{10.63}$$

Um tensor de ordem n $A_{i_1\ldots i_n}$ pode ser simetrizado por

$$A_{(i_1\ldots i_n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} A_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(n)}} \tag{10.64}$$

e antissimetrizado por

$$A_{[i_1\ldots i_n]} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(n)}} \tag{10.65}$$

Para um tensor simétrico A_{ij} e um tensor antissimétrico B^{ij} (ou vice-versa), temos

$$A_{ij}B^{ij} = 0 \tag{10.66}$$

Os índices cuja troca define as relações de simetria e antissimetria devem ser do mesmo tipo de variância, isto é, ambos superiores ou ambos inferiores.

As características de simetria e antissimetria de um tensor são invariantes sob transformações de coordenadas.

Um tensor de ordem alta (> 2) pode ser simetrizado ou antissimetrizado com respeito a apenas alguns de seus índices, em vez de todos, por exemplo:

$$A_{(ij)k} = \frac{1}{2}\left(A_{ijk} + A_{jik}\right) \qquad \& \qquad A_{[ij]k} = \frac{1}{2}\left(A_{ijk} - A_{jik}\right) \tag{10.67}$$

Um tensor é totalmente simétrico *se, e somente se,*

$$A_{i_1\ldots i_n} = A_{(i_1\ldots i_n)} \tag{10.68}$$

e totalmente antissimétrico *se, e somente se,*

$$A_{i_1\ldots i_n} = A_{[i_1\ldots i_n]} \tag{10.69}$$

Para um tensor totalmente antissimétrico (isto é, antissimétrico em todos os seus índices), componentes não nulas só podem ocorrer quando todos os índices são diferentes.

10.5.3. Campos tensoriais: a base também pode variar

Até aqui, uma mudança de base em um ponto foi suficiente para explicar as operações algébricas. Em um campo tensorial, o objeto varia com a posição. Em coordenadas curvilíneas, a própria base varia. Para derivar um campo, é preciso incluir as duas variações.

Considere coordenadas u^i regulares de classe C^2 no espaço euclidiano, com vetores coordenados $E_i = \partial r/\partial u^i$. Esses vetores não são, em geral, unitários. Para $X = X^i E_i$, a regra do produto fornece

$$\partial_j X = (\partial_j X^i) E_i + X^i \partial_j E_i.$$

Como E_i é uma base, existem coeficientes definidos por

$$\partial_j E_k = \Gamma^i{}_{jk} E_i.$$

Eles registram a variação da base. No espaço euclidiano com base coordenada, são os coeficientes da conexão euclidiana, ou símbolos de Christoffel. Não são componentes de um tensor sob mudanças gerais de coordenadas. As componentes da derivada covariante são

$$\nabla_j X^i = \partial_j X^i + \Gamma^i{}_{jk} X^k.$$

A soma corrige a variação da base e produz o objeto geométrico adequado.

Para um covetor, o sinal é oposto:

$$\nabla_j \alpha_i = \partial_j \alpha_i - \Gamma^k{}_{ji} \alpha_k.$$

De fato, a regra do produto para o escalar $\alpha_i X^i$ exige

$$\partial_j(\alpha_i X^i) = (\nabla_j \alpha_i) X^i + \alpha_i (\partial_j X^i + \Gamma^i{}_{jk} X^k).$$

Comparando os coeficientes de X^i, que pode ser escolhido arbitrariamente, resulta a regra do sinal negativo. Os termos de conexão se cancelam no escalar. Para um tensor misto, cada índice superior recebe um termo positivo e cada inferior, um termo negativo. Por exemplo,

$$\nabla_k A^i{}_j = \partial_k A^i{}_j + \Gamma^i{}_{k\ell} A^\ell{}_j - \Gamma^\ell{}_{kj} A^i{}_\ell.$$

Essa subseção é um aprofundamento da relação entre os operadores de coordenadas curvilíneas e o formalismo tensorial; não pressupõe uma teoria geral de curvatura.

Exemplo 10.19 — Um vetor constante com componentes variáveis

Em coordenadas polares $r > 0$, mostre que o campo cartesiano constante $X = i$ tem derivada covariante zero, embora suas componentes polares variem.

Solução. Para $r(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, a base coordenada é $E_r = e_r$ e $E_\theta = re_\theta$. Derivando-a,

$$\partial_\theta E_r = E_\theta/r, \quad \partial_r E_\theta = E_\theta/r, \quad \partial_\theta E_\theta = -rE_r.$$

Logo os coeficientes não nulos são $\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r$ e $\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = 1/r$. Como $i = \cos\theta\, e_r - \operatorname{sen}\theta\, e_\theta$, suas componentes *coordenadas* são $X^r = \cos\theta$ e $X^\theta = -\operatorname{sen}\theta/r$. Por exemplo,

$$\nabla_\theta X^r = -\operatorname{sen}\theta + (-r)(-\operatorname{sen}\theta/r) = 0,$$

$$\nabla_r X^\theta = \operatorname{sen}\theta/r^2 + (1/r)(-\operatorname{sen}\theta/r) = 0,$$

$$\nabla_\theta X^\theta = -\cos\theta/r + (1/r)\cos\theta = 0, \qquad \nabla_r X^r = 0.$$

Todas as componentes da derivada são zero, como deve ocorrer para um vetor constante. As componentes físicas na base unitária seriam $(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$; não devem ser inseridas na fórmula de conexão da base coordenada sem a conversão por $h_\theta = r$. ◁

10.5.4. Recuperar divergência e gradiente em polares

A métrica coordenada polar é $g = \operatorname{diag}(1, r^2)$. Para uma função f, o gradiente tem componentes coordenadas $(f_r, f_\theta/r^2)$ e componentes físicas $(f_r, f_\theta/r)$. Isso recupera a fórmula do capítulo de coordenadas curvilíneas. Para um campo com componentes coordenadas X^r, X^θ,

$$\nabla_i X^i = \partial_r X^r + \partial_\theta X^\theta + \frac{X^r}{r}.$$

Escrevendo as componentes físicas como $A_r = X^r$ e $A_\theta = rX^\theta$, resulta

$$\nabla \cdot X = \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta A_\theta.$$

O termo X^r/r não é um artifício algébrico: ele registra a expansão das células coordenadas com o raio. Essa ponte ajuda a interpretar as fórmulas dos dois capítulos como descrições do mesmo cálculo.

Exercícios

Exercício N168 Consolidação; básico

Classifique $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$ como simétrico ou antissimétrico e isotrópico ou anisotrópico. Justifique as duas classificações separadamente.

Exercício N169 Justificação; médio

Mostre que uma matriz simétrica isotrópica em uma base ortonormal é múltipla da identidade.

Exercício N170 Justificação; médio

Para T_{ijk}, simetrize apenas os índices i, j e depois antissimetrize o mesmo par. Determine o resultado e explique por que os dois operadores são projeções complementares nesse par.

Exercícios de ampliação

Exercício A015 Aplicação; médio

Em uma carta polar, calcule todas as componentes de $\nabla_j X^i$ para o campo $X = re_r$, usando a base coordenada. Obtenha sua divergência e confira o resultado para o campo cartesiano $X = (x, y)$.

Exercício A016 Justificação; difícil

Escreva o covetor cartesiano constante $\alpha = dx$ em coordenadas polares e confira $\nabla_j \alpha_i = 0$ para todos os pares de índices, usando os coeficientes de conexão deduzidos no texto.

Exercício A017 Justificação; difícil

Os coeficientes de conexão são zero em coordenadas cartesianas euclidianas, mas não em polares. Use esse fato para explicar por que eles não são componentes de um tensor e por que a derivada covariante de um campo continua sendo um objeto tensorial.

Exercício A018 Aprofundamento; difícil

Em dimensão três, tome o tensor covariante T com única componente não nula $T_{123} = 1$. Calcule $T_{(123)}$ e $T_{[123]}$ e determine se T é a soma de sua parte totalmente simétrica com sua parte totalmente alternada. Compare com a decomposição em um único par de índices.

CAPÍTULO

11

Aplicações de tensores

11.1. O tensor de inércia

O tensor de inércia reúne, em um único objeto, a resposta de um corpo a rotações em diferentes direções. A conexão com os capítulos anteriores é concreta: a relação entre velocidade angular e momento angular é linear, mas não precisa preservar a direção. Começaremos pela soma de partículas, passaremos à distribuição contínua e usaremos a simetria para reduzir os cálculos.

Nesta seção e nas seguintes, trabalharemos em coordenadas cartesianas ortonormais no espaço euclidiano tridimensional. Identificamos componentes de vetores e covetores por meio da métrica euclidiana e, como é usual nesse contexto, somamos índices repetidos mesmo quando aparecem ambos em posição inferior.

Considere massas m_α nas posições $\mathbf{r}_\alpha$, todas girando com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno de $\mathbf{0}$. Assim, as velocidades são $\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$. O momento angular total é

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \big(|\mathbf{r}_\alpha|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_\alpha \big). \end{aligned}$$

Pela identidade do produto vetorial triplo, em componentes temos

$$L_i = I_{ij} \omega_j,$$

onde

Definição 11.1 — Tensor de inércia

O **tensor de inércia** é definido por

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_\alpha [|\mathbf{r}_\alpha|^2 \delta_{ij} - (\mathbf{r}_\alpha)_i (\mathbf{r}_\alpha)_j].$$

Para um corpo rígido que ocupa o volume V e tem densidade de massa $\rho(\mathbf{r})$, substituímos a soma por uma integral e obtemos

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r})(x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j)\ \mathrm{d}V.$$

Por inspeção, I é um tensor simétrico.

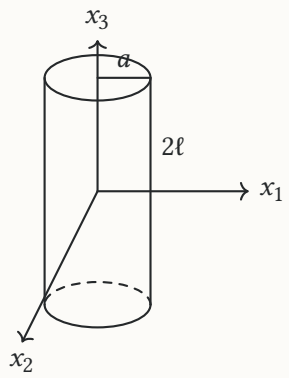
A simetria de I tem também uma interpretação energética. Se $\rho \geq 0$,

$$\omega_i I_{ij} \omega_j = \int_V \rho \left(|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \right)\ \mathrm{d}V = \int_V \rho |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2\ \mathrm{d}V \geq 0.$$

Logo, I é semidefinido positivo e a energia cinética de rotação é $K = \frac{1}{2}\omega_i I_{ij} \omega_j$. Para um corpo com massa distribuída em um volume de interior não vazio e densidade positiva, essa expressão é positiva para toda $\boldsymbol{\omega} \neq 0$. Os autovetores de I são os eixos principais: nessas direções, $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são paralelos.

Exemplo 11.1 — Cilindro homogêneo: simetria e escolha da ordem de integração

Um cilindro de raio a e altura 2ℓ tem densidade constante $\rho_0 > 0$, centro na origem e eixo ao longo de x_3. Determine seu tensor de inércia em torno do centro e identifique quando ele é um múltiplo da identidade.



Solução. A massa é $M = 2\ell\pi a^2\rho_0$. Usamos $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $x_3 = z$, com $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $-\ell \le z \le \ell$. A ordem escrita abaixo é $\mathrm{d}z\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r$; o fator r é o jacobiano:

$$
\begin{aligned}
I_{33} &= \rho_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} r^3 \ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r = \rho_0 \pi \ell a^4 = \frac{1}{2} M a^2, \\
I_{11} &= \rho_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} (r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + z^2) r \ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}r \\
&= \rho_0 \int_0^a \left(2\ell\pi r^3 + \frac{4\pi\ell^3}{3} r \right) \mathrm{d}r = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{\ell^2}{3} \right).
\end{aligned}
$$

A simetria de rotação fornece $I_{22} = I_{11}$. Para $i \neq j$, a integral de $-\rho_0 x_i x_j$ é nula: refletir uma das coordenadas envolvidas preserva o cilindro e troca o sinal do integrando. Portanto,

$$
I = \mathrm{diag}\left(M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{\ell^2}{3}\right), M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{\ell^2}{3}\right), \frac{1}{2} M a^2 \right).
$$

O tensor é escalar exatamente quando $\ell = a\sqrt{3}/2$. Nesse caso, $\mathbf{L} = \frac{1}{2} M a^2 \boldsymbol{\omega}$ para qualquer eixo que passe pelo centro. Nos demais casos, essa proporcionalidade vale nos eixos principais, mas pode falhar para uma direção oblíqua. ◁

Exemplo 11.2 — Tensor de inércia de um cubo em torno do centro de massa

O alto grau de simetria significa que precisamos calcular apenas duas das nove integrais possíveis. Se a densidade uniforme é ρ, então $M = \rho b^3$.

$$I_{xx} = \int dV \rho(y^2 + z^2) \tag{11.1}$$

$$= \rho \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} dz(y^2 + z^2) \tag{11.2}$$

$$= \rho b \int_{-b/2}^{b/2} dy \, (zy^2 + \frac{1}{3}z^3)\Big|_{-b/2}^{b/2} \tag{11.3}$$

$$= \rho b \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(by^2 + \frac{1}{3}\frac{b^3}{4} \right) \tag{11.4}$$

$$= \rho b \left(\frac{1}{3}by^3 + \frac{1}{12}b^3 y \right)\Big|_{-b/2}^{b/2} \tag{11.5}$$

$$= \rho b \left(\frac{1}{12}b^4 + \frac{1}{12}b^4 \right) \tag{11.6}$$

$$= \frac{1}{6}\rho b^5 = \frac{1}{6}Mb^2. \tag{11.7}$$

Por outro lado, todos os momentos fora da diagonal são nulos; por exemplo, $I_{xy} = \int dV \rho(-xy)$.
Essa é uma função ímpar de x e y, e nossa integração é simétrica em relação à origem em todas as direções; portanto, ela se anula identicamente. Assim, o tensor de inércia do cubo em torno de seu centro é

$$\overline{I} = \frac{1}{6}Mb^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.1.1. Teorema dos eixos paralelos

O teorema dos eixos paralelos relaciona o tensor de inércia calculado em torno do centro de massa ao tensor calculado em torno de uma origem transladada, sem rotação dos eixos.

Para isso, consideramos dois sistemas de coordenadas: o primeiro, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, com origem no centro de massa de um objeto qualquer, e o segundo, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, cuja origem está deslocada, sem rotação dos eixos. O vetor constante $\mathbf{a}$ aponta da nova origem para o centro de massa.

Em forma vetorial, as coordenadas estão relacionadas por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{a} + \mathbf{r}.$$

Teorema 11.1

Se I_{ij} é o tensor de inércia calculado em torno do centro de massa e J_{ij} é o tensor calculado em torno da origem transladada, então

$$J_{ij} = I_{ij} + M(a^2\delta_{ij} - a_i a_j).$$

Aqui M é a massa total do corpo e $a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$.

Demonstração. Pela definição do tensor de inércia e pela relação $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \int_V \rho\left(|\mathbf{r}+\mathbf{a}|^2\delta_{ij} - (r_i + a_i)(r_j + a_j)\right)\,\mathrm{d}V \\ &= I_{ij} + \int_V \rho\left[2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\delta_{ij} + a^2\delta_{ij} - r_i a_j - a_i r_j - a_i a_j\right]\,\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

Como a origem inicial está no centro de massa, $\int_V \rho\mathbf{r}\,\mathrm{d}V = \mathbf{0}$. Os termos lineares em $\mathbf{r}$ desaparecem, e $\int_V \rho\,\mathrm{d}V = M$. Resta $J_{ij} = I_{ij} + M(a^2\delta_{ij} - a_i a_j)$. ∎

Exemplo 11.3 — Tensor de inércia de um cubo em torno de um vértice

O tensor de inércia no centro de massa era

$$\bar{I} = Mb^2\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Se, em vez disso, queremos o tensor em torno de um vértice do cubo, o vetor de deslocamento é

$$\mathbf{a} = (b/2, b/2, b/2),$$

logo $a^2 = (3/4)b^2$. Podemos construir a diferença como uma matriz: as componentes diagonais são

$$M\left[\frac{3}{4}b^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}b\right)\right] = \frac{1}{2}Mb^2$$

e as componentes fora da diagonal são

$$M\left[-\left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}b\right)\right] = -\frac{1}{4}Mb^2$$

portanto, o tensor de inércia deslocado é

$$\overline{J} = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} + Mb^2 \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

$$= Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} \tag{11.9}$$

Exercícios

Exercício N171 **Aplicação; médio**

Calcule o tensor de inércia de duas massas m nas posições $(a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$. Determine os eixos em que a energia de rotação é nula e interprete o resultado.

Exercício N172 **Aplicação; médio**

Para o cilindro do exemplo, tome $\boldsymbol{\omega} = (1, 0, 1)$. Determine $\mathbf{L}$, a energia cinética e a condição para que $\mathbf{L}$ seja paralelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Exercício N173 **Aplicação; básico**

Use o teorema dos eixos paralelos para obter o momento de inércia de um cilindro em torno de uma reta paralela ao eixo central e a distância d dele.

Exercício N174 **Aplicação; médio**

Para o cubo em torno de um vértice, encontre os autovalores da matriz apresentada. Verifique que a diagonal espacial é um eixo principal e compare seu momento com o de uma direção perpendicular a ela.

11.2. Lei de Ohm

A inércia relaciona duas grandezas vetoriais por meio de um operador. A condução elétrica fornece outro exemplo: a geometria interna do material pode fazer com que uma entrada em uma direção produza uma resposta também em outras. É essa dependência direcional que exige uma condutividade tensorial.

A lei de Ohm, em um meio isotrópico, relaciona linearmente a densidade de corrente $\mathbf{j}$ ao campo elétrico $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{11.10}$$

A constante σ é a condutividade elétrica, inversa da resistividade. Nesse caso isotrópico, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{E}$ são paralelos.

Essa lei descreve alguns materiais, mas não todos. Em um material anisotrópico, por exemplo, camadas condutoras alternadas com camadas isolantes podem favorecer a corrente em direções paralelas às camadas e suprimir sua componente normal. Nesse caso, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{E}$ não precisam ser paralelos, e a condutividade escalar deve ser substituída por uma relação linear mais geral.

Isso é descrito por um operador de condutividade σ, que relaciona linearmente os campos; o mesmo símbolo σ passa, portanto, a denotar o operador tensorial, em vez da condutividade escalar:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}), \qquad j^i = \sigma^i{}_k E^k.$$

Assim, σ é um tensor misto de tipo $(1,1)$, como todo operador linear de vetores. Em coordenadas cartesianas ortonormais também se podem abaixar índices com a métrica euclidiana; a forma com dois índices inferiores é então apenas outra representação das mesmas componentes.

Exemplo 11.4 — Condução em um material anisotrópico (nível médio)
No plano, um material tem condutividades principais 4 e 1 em S/m. Os eixos principais fazem 45° com os eixos do laboratório. Determine a densidade de corrente produzida por $\mathbf{E} = (2,0)\,\mathrm{V/m}$ e a potência dissipada por unidade de volume.

Solução. As colunas de $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ são os eixos principais escritos na base do laboratório. Logo,

$$\sigma = R \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R^T = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{pmatrix} \mathrm{S/m}.$$

Assim, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = (5,3)\,\mathrm{A/m^2}$: a corrente possui uma componente transversal ao campo aplicado. A potência é $p = \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = 10\,\mathrm{W/m^3}$. Como as condutividades principais são positivas, $\mathbf{E}\cdot\sigma\mathbf{E} > 0$ para $\mathbf{E} \neq 0$, em qualquer base. ◁

Exercícios

Exercício N175 **Aplicação; básico**

Um material tem $\sigma = \mathrm{diag}(2, 5, 8)$ em uma base ortonormal. Calcule a corrente e a dissipação para $\mathbf{E} = (1, 2, -1)$.

Exercício N176 **Aplicação; médio**

Refaça o exemplo de rotação para um ângulo θ e condutividades principais σ_1, σ_2. Em que situações a componente transversal de corrente se anula para um campo paralelo ao primeiro eixo do laboratório?

Exercício N177 **Justificação; médio**

Se σ é simétrico positivo definido, mostre que a resistividade é o operador σ^{-1}. Determine seus eixos principais e compare seus autovalores com os de σ.

Exercícios de ampliação

Exercício A024 **Aplicação; médio**

Para o sensor térmico $T = 20 + x^2 y + e^z$ em $(1, 2, 0)$ e $K = \mathrm{diag}(2, 1, 3)$, obtenha o fluxo de calor $q = -K\nabla T$. Confira $dT(q) = -\nabla T \cdot K\nabla T$ e interprete o sinal como variação da temperatura na direção desse fluxo.

11.3. Equação do movimento de um fluido: equação de Navier–Stokes

Agora o tensor representa o transporte de momento e as forças de contato. A derivação será organizada em três passos: acompanhar uma partícula para definir a aceleração, escrever os balanços de massa e momento em volumes de controle e escolher uma lei constitutiva para a tensão viscosa. As hipóteses de incompressibilidade e viscosidade constante serão usadas apenas no momento de simplificar a equação.

11.3.1. Tensor de tensão

O estado de tensão em um ponto é descrito pelo tensor de Cauchy $\sigma = (\sigma_{ij})$. Em coordenadas cartesianas,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Na mecânica clássica de meios contínuos, sem tensões de casal nem momentos de corpo, o balanço local de momento angular implica $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Todo tensor de tensão pode ser decomposto, de modo puramente algébrico, em uma parte esférica e uma parte desviadora:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\sigma) I + S, \qquad \operatorname{tr} S = 0.$$

Em mecânica dos fluidos é mais conveniente separar a contribuição isotrópica associada à pressão e escrever

$$\sigma = -pI + T,$$

onde p é a pressão e T é o tensor de tensões viscosas. Em um fluido compressível, T não precisa ser de traço nulo: sua parte esférica pode conter a contribuição associada à viscosidade volumétrica.

11.3.2. Derivação das equações de Navier–Stokes

As equações de Navier–Stokes combinam as leis de conservação com uma lei constitutiva para a tensão. Começamos pela conservação de massa; em seguida, formulamos o balanço de momento e, por fim, especializamos a tensão ao caso de um fluido newtoniano.

A primeira hipótese é que o movimento de um fluido é descrito pela velocidade de escoamento do fluido:

Definição 11.2

A velocidade de escoamento $\mathbf{v}$ de um fluido é um campo vetorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

que fornece a velocidade de um elemento de fluido na posição $\mathbf{x}$ e no instante t.

Derivada material

Uma derivada parcial no tempo descreve a variação de um campo em uma posição fixa. A derivada material mede a variação observada ao acompanhar uma partícula do fluido: ela soma a variação temporal local e a variação por transporte dessa partícula pelo campo de velocidades.

Definição 11.3 — Derivada material

Para um campo escalar diferenciável $u(t, x, y, z)$,

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u.$$

Equação da continuidade

Para formular leis locais de conservação, descrevemos uma grandeza extensiva por sua densidade volumétrica $L(\mathbf{x}, t)$. O volume de controle será denotado por U e sua fronteira por ∂U. Para o momento, a lei escalar a seguir é aplicada a cada componente da densidade de momento.

Teorema do transporte de Reynolds Se $U(t)$ é um volume material transportado pelo campo de velocidades $\mathbf{v}$ e $L(\mathbf{x}, t)$ é um campo escalar suficientemente regular, então

$$\frac{d}{dt}\int_{U(t)} L \, \mathrm{d}V = \int_{U(t)} \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot (L\mathbf{v})\right) \mathrm{d}V.$$

Usando o teorema da divergência, a mesma identidade pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\int_{U(t)} L \, \mathrm{d}V = \int_{U(t)} \frac{\partial L}{\partial t} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial U(t)} L\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}A.$$

Para um *volume de controle fixo* U, uma lei local de balanço com densidade de fonte Q assume a forma integral

$$\frac{d}{dt}\int_{U} L \, \mathrm{d}V = -\int_{\partial U} L\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}A + \int_{U} Q \, \mathrm{d}V.$$

O primeiro termo à direita mede o fluxo líquido que sai pela fronteira e o segundo mede a produção de L no interior. Pelo teorema da divergência,

$$\int_{U} \left[\frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot (L\mathbf{v}) - Q\right] \mathrm{d}V = 0.$$

Como isso vale para todo volume de controle, obtemos a equação local de balanço

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \nabla \cdot (L\mathbf{v}) = Q.$$

Conservação da massa

Para a massa não há termo de produção: $Q = 0$. Tomando $L = \rho$, obtemos a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{11.11}$$

Usando a derivada material,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Para um fluido incompressível, $D\rho/Dt = 0$; portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Conservação do momento

A aceleração de uma parcela de fluido é sua derivada material:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Para a densidade de momento $\rho\mathbf{v}$, o fluxo convectivo através de uma superfície é descrito pelo tensor $\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$. Aplicando o balanço local a cada componente, obtemos

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \partial_j (\rho v_i v_j) = \partial_j \sigma_{ij} + f_i. \tag{11.12}$$

Para ver precisamente como entra a conservação da massa, expandimos:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j) &= \rho(\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i) + v_i\big[\partial_t \rho + \partial_j(\rho v_j)\big] \\ &= \rho \, \frac{Dv_i}{Dt}. \end{aligned}$$

O termo entre colchetes se anula pela equação da continuidade. Essa redução é válida também quando ρ varia no espaço e no tempo. O termo $\partial_j \sigma_{ij}$ é a força de contato por unidade de volume, e f_i é a força de corpo por unidade de volume.

Equações do movimento

As equações de conservação, com a força de contato e a força de corpo identificadas acima, dão a equação local de movimento. Adotamos a convenção em que a tração sobre uma face de normal $\mathbf{n}$ é $\sigma\mathbf{n}$. Como σ é simétrico, $(\nabla\cdot\sigma)_i = \partial_j\sigma_{ij}$, e a equação toma a forma vetorial

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla\cdot\sigma + \mathbf{f}. \tag{11.13}$$

Aqui σ é o tensor de tensão e $\mathbf{f}$ representa forças externas por unidade de volume, como a gravidade quando escrita nessa convenção.

Forma geral da equação de Navier–Stokes

Escrevemos o tensor de tensão como a soma da contribuição da pressão e da tensão viscosa:

$$\sigma = -pI + T. \tag{11.14}$$

Substituindo $\sigma = -pI + T$ na equação de movimento, obtemos

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot T + \mathbf{f}.$$

Para um fluido newtoniano isotrópico,

$$T = \mu\big(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\big) + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{v})I.$$

Aqui μ é a viscosidade dinâmica e λ é o segundo coeficiente de viscosidade; em geral, T pode ter traço diferente de zero. Em coordenadas cartesianas, com μ e λ constantes,

$$(\nabla\cdot T)_i = \mu\,\partial_{jj}v_i + (\mu+\lambda)\partial_i(\partial_j v_j).$$

No caso incompressível, $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$; com μ constante, isso reduz-se a $\nabla\cdot T = \mu\Delta\mathbf{v}$ e obtemos a forma usual das equações de Navier–Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}.$$

Exemplo 11.5 — Escoamento entre placas com pressão e arraste (nível difícil)

Um fluido incompressível de viscosidade constante $\mu > 0$ ocupa $0 < y < h$ entre placas paralelas. A placa inferior está parada, a superior move-se com velocidade $U\mathbf{e}_x$, e $\partial_x p = -G$, com $G > 0$. Suponha escoamento permanente $\mathbf{v} = u(y)\mathbf{e}_x$, sem força de corpo e sem deslizamento nas placas. Obtenha a

velocidade, a vazão por unidade de largura e a tensão de cisalhamento.

Solução. O campo tem divergência nula. Além disso, $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = u\partial_x(u\mathbf{e}_x) = 0$: a velocidade varia transversalmente, mas não ao longo das trajetórias. A componente x da equação de Navier–Stokes torna-se $0 = G + \mu u''(y)$. Integrando e usando $u(0)=0$, $u(h)=U$, obtemos

$$u(y) = \frac{U}{h}y + \frac{G}{2\mu}y(h-y).$$

O primeiro termo corresponde ao arraste da placa; o segundo, à diferença de pressão. A vazão por unidade de largura é

$$q = \int_0^h u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{Uh}{2} + \frac{Gh^3}{12\mu}.$$

Por fim, a componente viscosa da tração sobre uma face de normal $\mathbf{e}_y$ é

$$T_{xy} = \mu u'(y) = \frac{\mu U}{h} + G\left(\frac{h}{2} - y\right).$$

Para uma face de normal oposta, a tração troca de sinal. Essa distinção evita confundir a componente do tensor com a força em cada placa. ◁

Exercícios

Exercício N178 Aplicação; médio

Para $u(t,x,y) = t + x^2 + y$ e $\mathbf{v} = (y, -x)$, calcule $\partial_t u$ e Du/Dt. Explique a diferença entre as duas medidas de variação.

Exercício N179 Aplicação; médio

Verifique a continuidade para $\rho(t) = \rho_0 e^{-3at}$ e $\mathbf{v} = a(x,y,z)$, com a constante. O campo de velocidades é incompressível?

Exercício N180 Aplicação; difícil

No escoamento entre placas, determine o ponto de velocidade máxima quando ele está no interior do intervalo. Analise separadamente os casos em que o máximo ocorre na placa superior.

Exercício N181 Aplicação; médio

Para $\mathbf{v} = (ax, -ay, 0)$ e viscosidade constante, calcule o tensor viscoso e sua divergência. Explique por que tensão não nula não implica necessariamente força viscosa volumétrica não nula.

CAPÍTULO

12

Produto exterior

Neste capítulo introduzimos uma das construções mais úteis da álgebra linear: o produto exterior, denotado por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores de um espaço V. A ideia central é construir um produto *antissimétrico* e bilinear de vetores. Em outras palavras, desejamos que valham as propriedades $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \lambda \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$.

12.1. Motivação

Começamos por áreas e volumes orientados. A área geométrica é positiva, mas o sinal da orientação permite representar a mesma construção por uma aplicação bilinear e antissimétrica. Em seguida, na Seção 12.2, construiremos o espaço em que essa aplicação toma valores. A definição será algébrica; a interpretação geométrica ajudará a reconhecer o que seus coeficientes medem.

12.1.1. Área orientada bidimensional

Trabalhamos em um espaço euclidiano bidimensional, como o estudado na geometria elementar. Supomos conhecida a definição geométrica usual da área de um paralelogramo.

Considere a área $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de um paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Sabe-se, da geometria elementar, que $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$, onde α é o ângulo entre os dois vetores, sempre entre 0 e π (não levamos em conta a orientação desse

ângulo). Assim definida, a área Ar é sempre não negativa.

Vamos investigar $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ como função dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Se esticarmos o vetor $\mathbf{a}$, por exemplo, pelo fator 2, a área também aumentará pelo fator 2. Entretanto, se multiplicarmos $\mathbf{a}$ pelo número -2, a área será multiplicada por 2, e não por -2:

$$Ar(\mathbf{a}, 2\mathbf{b}) = Ar(\mathbf{a}, -2\mathbf{b}) = 2Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Da mesma forma, para alguns vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, como os mostrados na Fig. 12.2, temos $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + Ar(\mathbf{a}, \mathbf{c})$. Contudo, se considerarmos $\mathbf{b} = -\mathbf{c}$, obteremos

$$\begin{aligned} Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= Ar(\mathbf{a}, 0) = 0 \\ &\neq Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + Ar(\mathbf{a}, -\mathbf{b}) = 2Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Portanto, estritamente falando, a área $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *não* é uma função linear dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} Ar(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda|\, Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq \lambda\, Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) \neq Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + Ar(\mathbf{a}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

No entanto, como vimos, as propriedades de linearidade valem em *alguns* casos. Observando esses casos atentamente, vemos que a linearidade vale precisamente quando não alteramos a orientação dos vetores. Seria mais conveniente se as propriedades de linearidade valessem em todos os casos.

O truque consiste em substituir a função área Ar pela função de **área orientada** $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Definimos a função $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ por

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pm\, |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \operatorname{sen} \alpha,$$

onde o sinal é escolhido positivo quando o ângulo α é medido do vetor $\mathbf{a}$ para o vetor $\mathbf{b}$ no sentido anti-horário, e negativo caso contrário.

Enunciado: A área orientada $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de um paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em um espaço euclidiano bidimensional é uma função antissimétrica e bilinear dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= -A(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \\ A(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \lambda\, A(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c}). \qquad \text{(lei da soma)} \end{aligned}$$

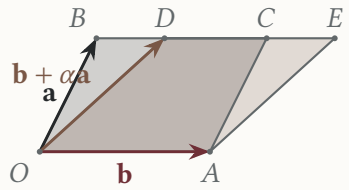


Figura 12.1.: A área do paralelogramo $0ACB$ gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é igual à área do paralelogramo $0ADE$ gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} + \alpha\mathbf{a}$, devido à igualdade das áreas ACD e $0BE$.

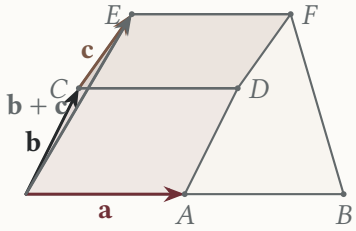


Figura 12.2.: A área do paralelogramo gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (igual à área de $CEFD$), somada à área do paralelogramo gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ (a área de $ACDB$), é igual à área do paralelogramo gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ (a área de $AEFB$), devido à igualdade das áreas de ACE e BDF.

Demonstração: A primeira propriedade é consequência direta da regra de sinais na definição de A.

Para provar a segunda propriedade, é preciso considerar separadamente os casos $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$. Se $\lambda > 0$, a orientação do par $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ permanece a mesma e a propriedade é clara: ao reescalarmos $\mathbf{a}$ por λ, o paralelogramo é esticado e sua área aumenta pelo fator λ. Se $\lambda < 0$, a orientação do paralelogramo é invertida e a área orientada muda de sinal.

Para provar a lei da soma, consideramos dois casos: ou $\mathbf{c}$ é paralelo a $\mathbf{a}$, ou não. Se $\mathbf{c}$ é paralelo digamos $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a}$, usamos a Fig. 12.1 para mostrar que $A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, o que produz a afirmação desejada, pois $A(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{a}) = 0$. Se $\mathbf{c}$ não é paralelo a $\mathbf{a}$, usamos a Fig. 12.2 para mostrar que $A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c})$. Construções geométricas análogas podem ser feitas para as diferentes orientações possíveis dos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. ■

É relativamente fácil calcular a área orientada devido às suas propriedades algébricas. Suponha que os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam dados por seus componentes em uma

base padrão $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, por exemplo,

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2.$$

Supomos, naturalmente, que os vetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sejam ortogonais entre si e tenham comprimento unitário, como é apropriado em um espaço euclidiano. Supomos também que o ângulo reto seja medido de $\mathbf{e}_1$ para $\mathbf{e}_2$ no sentido anti-horário, de modo que $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = +1$. Então usamos o enunciado e as propriedades $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$, $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$, $A(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$ para calcular

$$\begin{aligned} A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2, \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2) \\ &= \alpha_1\beta_2 A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \alpha_2\beta_1 A(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \\ &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

A área ordinária (não orientada) é então obtida como o valor absoluto da área orientada, $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |A(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$. Conclui-se que a área orientada, devido às suas propriedades de linearidade estrita, é uma construção muito mais conveniente e poderosa que a área não orientada.

12.1.2. Paralelogramos em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^n$

Agora trabalhemos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com a base padrão $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Podemos tentar caracterizar de modo semelhante a área de um paralelogramo definido por dois vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Entretanto, não é possível caracterizar a orientação da área simplesmente por um sinal. Também não podemos usar uma construção geométrica como a da Fig. 12.2; de fato, em três dimensões, não é verdade que a área definida por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ seja igual à soma de $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $Ar(\mathbf{a}, \mathbf{c})$. Ainda podemos definir algum tipo de "área orientada" que obedeça à lei da soma?

Consideremos a Fig. 12.2 como uma figura que mostra a *projeção* das áreas dos três paralelogramos sobre algum plano coordenado, por exemplo, o plano dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. É imediato ver que as projeções das áreas obedecem à lei da soma como áreas orientadas.

Enunciado: Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dois vetores em $\mathbb{R}^3$, e seja $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ o paralelogramo definido por esses vetores. Denote por $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ o paralelogramo contido no plano coordenado $\mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, obtido ao projetar $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nesse plano, e analogamente para os outros dois planos coordenados. Denote por $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ a área orientada de $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$. Então $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ é uma função bilinear e antissimétrica de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Demonstração: A projeção sobre o plano coordenado de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ é uma transformação linear. Portanto, o vetor $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ é projetado na soma das projeções de $\mathbf{a}$ e $\lambda\mathbf{b}$. Aplicamos então os argumentos da demonstração do Enunciado 12.1.1 às *projeções* dos vetores; em particular, as Figs. 12.1 e 12.2 são interpretadas como mostrando as projeções de todos os vetores sobre o plano coordenado $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Se $a_i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle$ e $b_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_i \rangle$, a projeção sobre esse plano tem área orientada $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Essa expressão é bilinear e muda de sinal quando trocamos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; o mesmo argumento vale para os outros planos coordenados. ■

É, portanto, conveniente considerar as áreas orientadas das três projeções — $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3}$, $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1}$, $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}$ — como as três componentes de uma área $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de valores vetoriais do paralelogramo definido por $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. De fato, pode-se mostrar que, nessa ordem, essas áreas projetadas são as componentes euclidianas do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. O produto vetorial é a forma tradicional de representar essas áreas na geometria: o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ representa simultaneamente a magnitude da área e a orientação do paralelogramo. Calcula-se a área não orientada de um paralelogramo como o comprimento do vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ que representa a área orientada,

$$Ar(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left[A(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} + A(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2_{\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3} + A(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2_{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Entretanto, o produto vetorial não pode ser generalizado para todos os espaços de dimensão superior. Felizmente, o produto vetorial não tem papel essencial na construção da área orientada.

Em vez de trabalhar com o produto vetorial, generalizaremos a ideia de projetar o paralelogramo sobre planos coordenados. Considere um paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ em um espaço euclidiano V de dimensão n, com a base padrão $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$. Enquanto no espaço tridimensional tínhamos apenas três projeções (sobre os planos coordenados xy, xz, yz), em um espaço de dimensão n temos $\frac{1}{2}n(n-1)$ planos coordenados, que podem ser denotados por $\text{Span}\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ (com $1 \leq i < j \leq n$). Podemos construir as $\frac{1}{2}n(n-1)$ projeções do paralelogramo nesses planos coordenados. Cada uma dessas projeções tem uma área orientada; essa área é uma função bilinear, antissimétrica e de valores numéricos dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. (A demonstração do enunciado acima não usa o fato de o espaço ser *tridimensional*!) Podemos então considerar esses $\frac{1}{2}n(n-1)$ números como as componentes de um vetor que representa a área orientada do paralelogramo. É claro que todas essas componentes são necessárias para descrever a *orientação* geométrica efetiva do paralelogramo no espaço de dimensão n.

Chegamos à ideia de que a área orientada do paralelogramo definido por $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ é uma função antissimétrica e bilinear $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, cujo valor é um vetor com $\frac{1}{2}n(n-1)$ componentes, isto é, um vetor *em um novo espaço* — o chamado "espaço das áreas

orientadas". Esse espaço tem dimensão $\frac{1}{2}n(n-1)$. Construiremos esse espaço explicitamente abaixo; ele é o espaço dos bivetores, denotado por $\bigwedge^2 V$.

Veremos que a área não orientada do paralelogramo é calculada como o *comprimento* do vetor $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, isto é, como a raiz quadrada da soma dos quadrados das áreas das projeções do paralelogramo sobre os planos coordenados. Essa é uma generalização do teorema de Pitágoras para áreas em espaços de dimensão superior.

A analogia entre vetores ordinários e áreas com valores vetoriais pode ser entendida visualmente da seguinte maneira. Um segmento de reta em um espaço de dimensão n é representado por um vetor cujas n componentes (em uma base ortonormal) são os comprimentos orientados das n projeções do segmento sobre os eixos coordenados. (As componentes são *orientadas*, isto é, recebem um sinal negativo quando a orientação do vetor é oposta à orientação do eixo.) O comprimento de um segmento de reta, ou seja, o comprimento do vetor $\mathbf{v}$, é então calculado como $\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. O produto escalar $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ é igual à soma dos quadrados dos comprimentos das projeções porque usamos uma base ortonormal. Um paralelogramo no espaço é representado por um vetor ψ cujas $\binom{n}{2}$ componentes são as áreas *orientadas* das $\binom{n}{2}$ projeções do paralelogramo sobre os planos coordenados. (O vetor ψ pertence ao espaço das áreas orientadas, e não ao espaço original de dimensão n.) O valor numérico da área do paralelogramo é então calculado como $\sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$. O produto escalar $\langle \psi, \psi \rangle$ no espaço das áreas orientadas é igual à soma dos quadrados das áreas das projeções, pois as $\binom{n}{2}$ áreas unitárias nos planos coordenados formam uma base ortonormal (de acordo com a definição do produto escalar no espaço das áreas orientadas).

A mesma ideia da soma dos quadrados das projeções se estende a volumes de dimensão superior. O produto exterior fornece a linguagem algébrica para representar essas projeções e suas orientações.

Exemplo 12.1 — Resposta de quatro sensores a dois parâmetros (nível difícil)

Um sistema mede quatro respostas adimensionais. Perto de um estado de referência, as variações de dois parâmetros independentes produzem os vetores $u = (1, 1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^4$. Determine as áreas orientadas das projeções da resposta nos planos coordenados e a área do paralelogramo de respostas.

Solução. Na base canônica, os coeficientes de $u \wedge v$ são os menores $u_i v_j - u_j v_i$. Na

ordem $(12, 13, 14, 23, 24, 34)$, eles são $(1, 1, 1, 1, 0, -1)$. Portanto,

$$u \wedge v = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 - e_3 \wedge e_4.$$

Cada coeficiente é a área assinada de uma projeção. O coeficiente 24 é zero porque as respostas desses dois sensores são proporcionais nos dois parâmetros; isso não torna a resposta total degenerada. Com a métrica euclidiana induzida, a área é $\sqrt{1+1+1+1+0+1} = \sqrt{5}$. A fórmula de Gram confirma: $\sqrt{|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Substituir v por $v + cu$ preserva o produto exterior e a área: essa mudança corresponde a um cisalhamento no domínio dos parâmetros. ◁

Exercícios

Exercício N200 **Consolidação; básico**

Para $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 3)$, calcule a área orientada, a área geométrica e o efeito de trocar a ordem dos vetores.

Exercício N201 **Consolidação; médio**

Em $\mathbb{R}^3$, tome $u = (1, 2, 0)$ e $v = (0, 1, 3)$. Determine as três áreas projetadas e confira a área total pela matriz de Gram.

Exercício N202 **Justificação; médio**

No exemplo dos quatro sensores, substitua v por $v + 2u$. Verifique que os seis menores se preservam e explique a interpretação no domínio dos parâmetros.

12.2. Produto exterior

Convém distinguir três objetos: os vetores de V, os produtos simples $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e as combinações lineares desses produtos. O novo espaço contém todos os bivetores, e um bivetor não precisa ser um único produto de dois vetores. Fixaremos também a normalização da antissimetrização para que as fórmulas de avaliação sejam consistentes.

Na seção anterior, motivamos a introdução do produto antissimétrico por sua conexão com áreas e volumes. Agora daremos a definição e desenvolveremos as propriedades do produto exterior de maneira puramente algébrica, sem usar intuição geométrica. Isso nos permitirá trabalhar com vetores em dimensões arbitrárias, obter muitos resultados úteis e, por fim, apreciar mais plenamente o significado geométrico do produto exterior.

Nas partes algébricas, V será um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero. Nos exemplos geométricos, trabalhamos sobre $\mathbb{R}$. Essa convenção permite identificar os tensores alternados com os autoespaços antissimétricos do operador de troca.

Como explicado na Seção 12.1.2, é possível representar a área orientada de um paralelogramo por um vetor em algum espaço auxiliar. A área orientada é muito mais conveniente para trabalhar porque é uma função *bilinear* dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (isso é explicado em detalhes na Seção 12.1). Um produto bilinear é, em particular, uma aplicação bilinear com valores em um espaço vetorial. Também vimos que a área orientada é uma função *antissimétrica* dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Em três dimensões, uma área orientada é representada pelo produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, que é de fato um produto antissimétrico e bilinear. Assim, esperamos que a área orientada em dimensões superiores possa ser representada por algum novo produto antissimétrico de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; denotemos esse produto (a ser definido abaixo) por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, pronunciado "a cunha b". O valor de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ será um vetor em um espaço vetorial *novo*. Também construiremos explicitamente esse novo espaço.

12.2.1. Definição do produto exterior

Assim como no produto tensorial, podemos começar pensando o espaço dos produtos exteriores como um espaço de *expressões formais* como $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $3\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}+2\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}$, etc., e *exigir* que valham as propriedades de um produto antissimétrico e bilinear.

Eis uma definição mais formal do espaço do produto exterior: construiremos um produto antissimétrico "à mão", usando o espaço produto tensorial.

Definição 1: Dado um espaço vetorial V, definimos um novo espaço vetorial $V \wedge V$, chamado **produto exterior** (ou produto tensorial antissimétrico, produto alternado ou **produto cunha**) de duas cópias de V. O espaço $V \wedge V$ é o subespaço de $V \otimes V$ gerado pelos tensores alternados da forma

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_{1,2} \in V,$$

e por todas as combinações lineares desses tensores. O produto exterior de dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ é a expressão mostrada acima; ele é evidentemente uma função antissimétrica e bilinear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Por exemplo, este é um elemento particular de $V \wedge V$, que escrevemos de duas maneiras diferentes usando os axiomas do produto tensorial:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \otimes (\mathbf{v}+\mathbf{w}) - (\mathbf{v}+\mathbf{w}) \otimes (\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\otimes\mathbf{v} - \mathbf{v}\otimes\mathbf{u} \\ &+\mathbf{u}\otimes\mathbf{w} - \mathbf{w}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{v}\otimes\mathbf{w} - \mathbf{w}\otimes\mathbf{v} \in V \wedge V. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Observação: Em geral, trocar os fatores altera o tensor. Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são independentes, então $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$: um covetor que vale 1 no primeiro e 0 no segundo distingue os dois tensores. Entretanto, vetores distintos e proporcionais podem produzir tensores iguais nessa troca. Por exemplo, $(2\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes (2\mathbf{v})$. A antissimetrização elimina exatamente a parte que permanece igual sob a troca.

Exercício 1: Prove que o "mapa de troca" $\hat{T}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) \equiv \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$ é uma aplicação linear, canonicamente definida, de $V \otimes V$ em si mesmo. Mostre que seus autovalores pertencem a $\{+1, -1\}$ e que ambos ocorrem quando $\dim V \geq 2$. Dê exemplos de autovetores. Mostre que o subespaço $V \wedge V \subset V \otimes V$ é o autoespaço associado ao autovalor -1.

Dica: $\hat{T}\hat{T} = \hat{1}_{V\otimes V}$. Considere tensores da forma $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \pm \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ como candidatos a autovetores de $\hat{T}$. ■

Solução: Pela propriedade universal do produto tensorial, a troca dos fatores define uma aplicação linear $\hat{T}$. Como $\hat{T}^2 = I$, se $\hat{T}z = \lambda z$ para $z \neq 0$, então $\lambda^2 = 1$ e $\lambda = \pm 1$. Para $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ tem autovalor $+1$; se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são independentes, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ é não nulo e tem autovalor -1. Os tensores de autovalor -1 são exatamente as combinações lineares desses últimos, isto é, formam $V \wedge V$.

É bastante trabalhoso fazer cálculos na notação do produto tensorial como fizemos na Eq. (12.1). Portanto, escrevamos o produto exterior como $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ em vez de $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$. É então imediato verificar que o símbolo "cunha" $\wedge$ funciona como uma multiplicação anticomutativa, como desejávamos. As regras de cálculo são resumidas no enunciado a seguir.

Enunciado 1: Podemos economizar tempo escrevendo $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \in V\wedge V$, e o resultado de qualquer cálculo será correto, desde que sigamos as regras:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \tag{12.2}$$

$$(\lambda\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}), \tag{12.3}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{x} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{x}. \tag{12.4}$$

Segue também que $\mathbf{u} \wedge (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ e que $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$. (Essas identidades valem para quaisquer vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e quaisquer escalares $\lambda \in \mathbb{K}$.)

Demonstração: Todas as identidades seguem da bilinearidade do produto tensorial e da definição $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$. Por exemplo, expandindo,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}.$$

Aqui removemos o termo $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$. ■

Elementos do espaço $V \wedge V$, como $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$, às vezes são chamados de **bivetores**.[1] Também desejaremos definir o produto exterior de mais de dois vetores. Para definir o produto exterior de *três* vetores, consideramos o subespaço de $V \otimes V \otimes V$ formado por tensores totalmente antissimétricos da forma

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c} - \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{c} + \mathbf{c}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} - \mathbf{c}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} \\ + \mathbf{b}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{b}\end{aligned} \tag{12.5}$$

e combinações lineares desses tensores. Esses tensores são chamados de **totalmente antissimétricos** porque podem ser vistos como funções (com valores tensoriais) dos vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ que mudam de sinal quando se trocam dois vetores quaisquer. A expressão na Eq. (12.5) será denotada, por brevidade, por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, de modo análogo ao produto exterior de dois vetores, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$, denotado simplesmente por $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Eis uma definição geral.

Definição 2: O **produto exterior de k cópias** de V (também chamado de k-**ésima potência exterior** de V) é denotado por $\bigwedge^k V$. Identificamo-lo com o subespaço de $V^{\otimes k}$ gerado pelos tensores alternados

$$\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k := \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\sigma(k)}, \qquad \mathbf{v}_j \in V.$$

Essas expressões obedecem às propriedades do produto cunha (linearidade e antissimetria) dadas pelo Enunciado 1. Por exemplo,

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k = (-1)^k \mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{u} \tag{12.6}$$

("arrastar um vetor através de k outros vetores muda o sinal k vezes"). ■

O espaço de bivetores definido anteriormente é, nesta notação, $V \wedge V \equiv \bigwedge^2 V$. Uma extensão natural dessa notação é $\bigwedge^0 V = \mathbb{K}$ e $\bigwedge^1 V = V$. Também usaremos a seguinte notação de "produto cunha",

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k \equiv \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_n.$$

Tensores do espaço $\bigwedge^n V$ também são chamados de n-**vetores** ou **tensores antissimétricos** de grau n.

[1] É importante observar que um bivetor não é necessariamente expressável como um produto de termo único de dois vetores; veja o exercício ao final da Seção 12.3.2.

Pergunta: Como calcular expressões que contêm produtos múltiplos, como $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$?

Resposta: Aplicam-se as regras mostradas no Enunciado 1. Por exemplo, podemos permutar vetores adjacentes e mudar o sinal,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a},$$

podemos expandir colchetes,

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{x} + 4\mathbf{y}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} + 4\mathbf{a} \wedge \mathbf{y} \wedge \mathbf{b},$$

e assim por diante. Se os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ são dados como combinações lineares de alguns vetores de base $\{\mathbf{e}_j\}$, podemos reduzir $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ a uma combinação linear de produtos exteriores de vetores da base, como $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$, etc.

Pergunta: A notação $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ sugere que o produto exterior é associativo,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}).$$

Como podemos dar sentido a isso?

Resposta: É preciso definir a multiplicação de modo que ela não dependa da representação escolhida para um bivetor. Para isso, denote por Alt_m a soma assinada das $m!$ permutações dos fatores de um tensor de ordem m. Para $\alpha \in \bigwedge^p V$ e $\beta \in \bigwedge^q V$, com $p, q \geq 1$, defina

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!\,q!}\,\mathrm{Alt}_{p+q}(\alpha \otimes \beta).$$

Essa é uma aplicação bilinear bem definida no espaço de tensores, independentemente da maneira de escrever α e β. Como cada permutação interna aos dois blocos já está incluída na antissimetrização dos fatores, temos

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_p) \wedge (\mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_q) = \mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_p \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_q.$$

Assim, o fator $1/(p!q!)$ evita contar repetidamente as permutações internas. Para três fatores de graus p, q, r, qualquer parentização dá

$$\frac{1}{p!\,q!\,r!}\,\mathrm{Alt}_{p+q+r}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma),$$

pois antissimetrizar novamente um bloco já alternado reproduz sua multiplicidade fatorial. Isso prova a associatividade. Nos graus zero, a multiplicação é a multiplicação usual por escalares.

Exemplo 1: Suponha que trabalhemos em $\mathbb{R}^3$ e tenhamos os vetores $\mathbf{a} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 0)$, $\mathbf{c} = (-2, 5, -3)$. Vamos calcular vários produtos exteriores. Os cálculos ficam mais fáceis se introduzirmos explicitamente a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{b} = 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \quad \mathbf{c} = -2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3.$$

Calculamos o 2-vetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ usando as propriedades do produto exterior, como $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$, e simplesmente expandindo os colchetes como na álgebra usual:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \wedge 2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\ &= (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \\ &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

A última expressão é o resultado; observe que agora não há mais nada a calcular ou simplificar. Expressões como $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ são as expressões básicas a partir das quais o espaço $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$ é construído. Mais adiante (Seção 12.3.2), mostraremos formalmente que o conjunto dessas expressões é uma base do espaço $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$.

Calculemos também o 3-vetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \\ &= (-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge (-2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Ao expandirmos os colchetes, termos como $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$ se anulam, pois

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = 0,$$

portanto, basta manter os termos que contêm vetores todos diferentes, e obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= 3\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &= (3 - 5 + 2)\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = 0.\end{aligned}$$

Observamos que todos os termos são proporcionais ao 3-vetor $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, portanto, só foi necessário o coeficiente diante de $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$; por coincidência, esse coeficiente acabou sendo zero. Assim, o resultado é o 3-vetor nulo. ■

Pergunta: Nosso objetivo original era introduzir um produto bilinear e antissimétrico de vetores para obter uma representação geométrica de áreas orientadas. Em vez disso, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ foi definido algebricamente, por meio de produtos tensoriais. É claro que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ é antissimétrico e bilinear, mas por que ele representa uma área orientada?

Resposta: A razão algébrica é a propriedade universal do produto exterior. Se $B : V \times V \to W$ é qualquer aplicação bilinear alternada, existe uma única aplicação linear $\widetilde{B} : \bigwedge^2 V \to W$ tal que

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \widetilde{B}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

Assim, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ contém exatamente a informação que pode ser extraída de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ por uma aplicação bilinear alternada. A área orientada é um caso particular dessa situação.

Portanto, o espaço das áreas orientadas (isto é, o espaço das combinações lineares de $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para vários $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$) é, em todo caso, mapeado em um subespaço de $V \wedge V$. Também vimos que áreas orientadas em N dimensões podem ser representadas por $\binom{N}{2}$ projeções, o que indica que são vetores em algum espaço de dimensão $\binom{N}{2}$. Veremos abaixo que o espaço $V \wedge V$ tem exatamente essa dimensão (Teorema 2 na Seção 12.3.2). Portanto, podemos esperar que o espaço das áreas orientadas coincida com $V \wedge V$. Ao dotar V de um produto escalar, também podemos associar às potências exteriores normas que medem as áreas e os volumes correspondentes.

Observação: origem do nome "exterior". A construção do produto exterior é uma formulação moderna de ideias que remontam a H. Grassmann (1844). Um 2-vetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ é interpretado geometricamente como a área orientada do paralelogramo definido pelos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Analogamente, um 3-vetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ representa o 3-volume orientado de um paralelepípedo definido por $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Devido à antissimetria do produto exterior, temos $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = 0$, $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{d}) = 0$, etc. Podemos interpretar isso geometricamente dizendo que o "produto" de dois volumes é zero se esses volumes têm um vetor em comum. Isso motivou Grassmann a chamar seu produto antissimétrico de "exterior". Em seu raciocínio, o produto de duas "quantidades extensas" (como linhas, áreas ou volumes) é não nulo somente quando cada uma das duas quantidades está geometricamente "no exterior" (fora) da outra.

Exercício 2: Mostre que, em um espaço V *bidimensional*, qualquer 3-vetor, como $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, pode ser simplificado ao 3-vetor nulo. Prove o mesmo para n-vetores em espaços de dimensão N quando $n > N$. ■

Solução: Em dimensão N, quaisquer $n > N$ vetores são linearmente dependentes. Um deles é combinação linear dos demais; ao substituí-lo no produto exterior, cada termo contém um vetor repetido e, portanto, se anula. Como os produtos de vetores geram $\bigwedge^n V$, segue que esse espaço consiste apenas no vetor nulo. O caso $N = 2$, $n = 3$, é particular desse argumento.

Também podemos considerar as potências exteriores do espaço *dual* V^*. Tensores de $\bigwedge^n V^*$ são geralmente chamados, por razões históricas, de n-**formas** (em vez de "n-covetores").

Pergunta: Onde está realmente o asterisco? O espaço $\bigwedge^n (V^*)$ é diferente de $\left(\bigwedge^n V\right)^*$?

Resposta: Esses espaços são canonicamente isomorfos. A identificação natural é dada pelo determinante:

$$(\mathbf{f}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_k^*)(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \det\big(\mathbf{f}_i^*(\mathbf{v}_j)\big)_{i,j=1}^k.$$

Com a convenção adotada neste capítulo, $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ é obtido por antissimetrização sem o fator $1/k!$. Por isso, se usássemos diretamente o emparelhamento herdado do produto tensorial, apareceria um fator $k!$. A fórmula determinantal acima fixa a normalização e fornece o isomorfismo canônico

$$\bigwedge^k (V^*) \cong \left(\bigwedge^k V\right)^*.$$

Definição 3: A ação de uma k-forma $\mathbf{f}_1^* \wedge \ldots \wedge \mathbf{f}_k^*$ sobre um k-vetor $\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k$ é definida por

$$\sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \mathbf{f}_1^*(\mathbf{v}_{\sigma(1)}) \ldots \mathbf{f}_k^*(\mathbf{v}_{\sigma(k)}),$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações σ do conjunto ordenado $(1, \ldots, k)$.

Exemplo 2: Para $k = 3$, temos

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{p}^* \wedge \mathbf{q}^* \wedge \mathbf{r}^*)(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \\
&= \mathbf{p}^*(\mathbf{a})\mathbf{q}^*(\mathbf{b})\mathbf{r}^*(\mathbf{c}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{a})\mathbf{q}^*(\mathbf{c})\mathbf{r}^*(\mathbf{b}) \\
&\quad - \mathbf{p}^*(\mathbf{b})\mathbf{q}^*(\mathbf{a})\mathbf{r}^*(\mathbf{c}) + \mathbf{p}^*(\mathbf{b})\mathbf{q}^*(\mathbf{c})\mathbf{r}^*(\mathbf{a}) \\
&\quad + \mathbf{p}^*(\mathbf{c})\mathbf{q}^*(\mathbf{a})\mathbf{r}^*(\mathbf{b}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{c})\mathbf{q}^*(\mathbf{b})\mathbf{r}^*(\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

Exercício 3: a) Mostre que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \omega = \omega \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, onde ω é qualquer elemento da álgebra exterior (por exemplo, $\omega = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$).

b) Se ω_1, ω_2 e ω_3 têm grau puro, mostre que

$$\omega_1 \wedge \mathbf{a} \wedge \omega_2 \wedge \mathbf{b} \wedge \omega_3 = -\omega_1 \wedge \mathbf{b} \wedge \omega_2 \wedge \mathbf{a} \wedge \omega_3,$$

onde ω_1, ω_2 e ω_3 são elementos de grau puro, e $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são vetores.

c) Devido à antissimetria, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0$ para qualquer vetor $\mathbf{a} \in V$. Também é verdade que $\omega \wedge \omega = 0$ para qualquer bivetor $\omega \in \bigwedge^2 V$? Em que dimensões isso vale para todo bivetor?

Resposta: a) Se ω tem grau puro k, a comutatividade graduada dá $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \omega = (-1)^{2k}\omega \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \omega \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Como todo elemento da álgebra exterior é soma de elementos de grau puro, a igualdade vale também para ω geral.

b) Se ω_2 tem grau k, mover $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ um pelo outro, atravessando os k fatores de ω_2, equivale a $2k+1$ trocas de vetores. Cada troca muda o sinal, de modo que o produto muda pelo fator $(-1)^{2k+1} = -1$. Pela linearidade, o resultado vale para quaisquer elementos de graus puros ω_1 e ω_3.

c) Não em geral. Em dimensão pelo menos quatro, tome vetores linearmente independentes $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ e $\omega = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$. Então $\omega \wedge \omega = 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \neq 0$. Se $\dim V \leq 3$, todo produto de quatro vetores é nulo e, portanto, $\omega \wedge \omega = 0$ para todo bivetor.

12.2.2. * Produto tensorial simétrico

Pergunta: Neste ponto, ainda não está claro por que a definição antissimétrica é útil. Talvez pudéssemos definir outra coisa, digamos o produto simétrico, em vez do produto exterior? Poderíamos tentar definir um produto, digamos $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$, com alguma outra propriedade, como

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = 2\mathbf{b} \odot \mathbf{a}.$$

Resposta: Sobre $\mathbb{R}$ (e, mais geralmente, em característica diferente de 3), isso não funciona porque teríamos

$$\mathbf{b} \odot \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = 4\mathbf{b} \odot \mathbf{a},$$

de modo que todos os produtos "$\odot$" teriam de se anular.

Podemos definir o produto tensorial *simétrico*, $\otimes_S$, com a propriedade

$$\mathbf{a} \otimes_S \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes_S \mathbf{a},$$

mas é impossível definir qualquer outra coisa de maneira semelhante.[2]

O produto tensorial antissimétrico é o autoespaço (dentro de $V \otimes V$) do operador de troca $\hat{T}$ com autovalor -1. Como $\hat{T}^2 = I$, seus autovalores pertencem a $\{+1, -1\}$; quando $\dim V \geq 2$, ambos ocorrem. O outro autoespaço, de autovalor $+1$, é gerado

[2] Este é um teorema devido a Grassmann (1862).

por tensores simétricos da forma $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$ e corresponde ao produto tensorial simétrico. Poderíamos escrever

$$\mathbf{a} \otimes_S \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

e desenvolver as propriedades desse produto. Entretanto, o produto tensorial simétrico é muito menos útil para os fins da álgebra linear que o subespaço antissimétrico. Este livro deriva a maior parte dos resultados de álgebra linear usando o produto antissimétrico como ferramenta principal!

Exercícios

Exercício N203 **Consolidação; médio**

Expanda $(e_1 + 2e_2) \wedge (e_2 - e_3)$ e $(e_1 + e_2) \wedge (e_2 + e_3) \wedge (e_3 + e_1)$.

Exercício N204 **Consolidação; médio**

Para covetores $f(x) = x_1 + x_2$ e $g(x) = x_2 - x_3$, avalie $f \wedge g$ em $(1, 0, 1) \wedge (0, 2, 1)$.

Exercício N205 **Justificação; difícil**

Confira a fórmula de antissimetrização do produto de um bivetor por um vetor, incluindo o fator $1/2$!.

Exercício N206 **Aprofundamento; difícil**

Em $\mathbb{R}^4$, calcule $\omega \wedge \omega$ para $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ e explique por que ω não é um produto simples de dois vetores.

12.3. Propriedades dos espaços $\bigwedge^k V$

A definição fornece as regras de cálculo; agora veremos o que elas permitem concluir. O percurso vai das aplicações induzidas à independência linear, às bases das potências exteriores e aos determinantes. Ao final, a álgebra exterior reunirá todos os graus em uma estrutura com uma única multiplicação.

Como vimos, tensores do espaço $V \otimes V$ podem ser representados por combinações lineares da forma $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \ldots$, mas não de maneira *única*, pois podemos transformar uma dessas combinações lineares em outra usando os axiomas do produto tensorial. Analogamente, n-vetores não são representados de maneira única por combinações lineares de produtos exteriores. Por exemplo,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

pois $\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = 0$. Em outras palavras, o 2-vetor $\omega \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ tem uma representação alternativa contendo apenas um produto exterior de termo único, $\omega = \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$, onde $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Exercício: Mostre que qualquer 2-vetor em um espaço *tridimensional* pode ser representado por um produto exterior de termo único, isto é, por um 2-vetor da forma $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Dica: Escolha uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e mostre que $\alpha\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \gamma\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ é igual a um produto de termo único. ■

Solução: Escreva o 2-vetor na forma indicada. Se $\alpha \neq 0$, então

$$\alpha e_1 \wedge e_2 + \beta e_1 \wedge e_3 + \gamma e_2 \wedge e_3 = \left(e_1 - \frac{\gamma}{\alpha} e_3\right) \wedge (\alpha e_2 + \beta e_3)\,.$$

Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, ele é $\left(e_1 + \frac{\gamma}{\beta} e_2\right) \wedge (\beta e_3)$. Se $\alpha = \beta = 0$, é $e_2 \wedge (\gamma e_3)$. Em todos os casos, o 2-vetor é decomponível.

E quanto aos espaços de dimensão superior? Mostraremos (veja o exercício ao final da Seção 12.3.2) que, em geral, n-vetores não podem ser reduzidos a um produto de termo único. Isso, porém, é sempre possível para $(N-1)$-vetores em um espaço de dimensão N. (Você mostrou isso para $N = 3$ no exercício acima.)

Enunciado: Qualquer $(N-1)$-vetor em um espaço de dimensão N pode ser escrito como um produto exterior de termo único da forma $\mathbf{a}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{a}_{N-1}$.

Demonstração: Provamos isso por indução em N. A base da indução é $N = 2$, caso em que nada há a demonstrar. Para o passo indutivo, suponha que o enunciado esteja provado para $(N-1)$-vetores em espaços de dimensão N; precisamos prová-lo para N-vetores em espaços de dimensão $(N+1)$. Escolha uma base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{N+1}\}$ no espaço. Qualquer N-vetor ω pode ser escrito como uma combinação linear de termos de produtos exteriores,

$$\begin{aligned}\omega = {} & \alpha_1 \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N+1} + ... \\ & + \alpha_N \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N-1} \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N,\end{aligned}$$

onde $\{\alpha_i\}$ são algumas constantes.

Observe que qualquer tensor $\omega \in \bigwedge^N V$ pode ser escrito dessa forma simplesmente expressando cada vetor na base e expandindo os produtos exteriores. O resultado será uma combinação linear da forma acima, contendo no máximo $N+1$ produtos exteriores de termo único, como $\mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N$, $\mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N+1}$ e assim por

diante. Ainda não sabemos se esses produtos exteriores de termo único constituem um conjunto linearmente independente; isso será estabelecido na Seção 12.3.2. Por ora, não precisaremos dessa propriedade.

Agora gostaríamos de transformar a expressão acima em um único termo. Movemos $\mathbf{e}_{N+1}$ para fora dos colchetes nos primeiros N termos:

$$\begin{aligned}\omega &= \big(\alpha_1 \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N + ... + \alpha_N \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{N-1}\big) \wedge \mathbf{e}_{N+1} \\ &\quad + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N \\ &\equiv \psi \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N,\end{aligned}$$

onde, na última linha, introduzimos um $(N-1)$-vetor auxiliar ψ. Se $\psi = 0$, não há mais nada a provar. Caso contrário, pelo menos um dos α_i deve ser não nulo. Reordenando $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N$ se necessário, podemos supor que $\alpha_N \neq 0$. Então

$$\omega = \psi \wedge \mathbf{e}_{N+1} + \alpha_{N+1} \mathbf{e}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_N = \psi \wedge \big(\mathbf{e}_{N+1} + \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_N} \mathbf{e}_N\big).$$

Agora observamos que ψ pertence ao espaço dos $(N-1)$-vetores sobre o subespaço de dimensão N gerado por $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$. Pela hipótese de indução, ψ pode ser escrito como um produto exterior de termo único, $\psi = \mathbf{a}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{a}_{N-1}$, de certos vetores $\{\mathbf{a}_i\}$. Definindo

$$\mathbf{a}_N \equiv \mathbf{e}_{N+1} + \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_N} \mathbf{e}_N,$$

obtemos

$$\omega = \mathbf{a}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{a}_{N-1} \wedge \mathbf{a}_N,$$

isto é, ω pode ser representado como um produto exterior de termo único. ■

12.3.1. Aplicações lineares entre espaços $\bigwedge^k V$

Como os espaços $\bigwedge^k V$ são espaços vetoriais, podemos considerar aplicações lineares entre eles.

Um exemplo simples é a aplicação

$$L_{\mathbf{a}} : \omega \mapsto \mathbf{a} \wedge \omega,$$

que mapeia $\bigwedge^k V \to \bigwedge^{k+1} V$; aqui o vetor $\mathbf{a}$ é *fixo*. É importante verificar que $L_{\mathbf{a}}$ é uma aplicação *linear* entre esses espaços. Como fazemos isso? Precisamos verificar que $L_{\mathbf{a}}$ leva uma combinação linear de tensores em combinações lineares; isso é fácil de ver,

$$\begin{aligned}L_{\mathbf{a}}(\omega + \lambda\omega') &= \mathbf{a} \wedge (\omega + \lambda\omega') \\ &= \mathbf{a} \wedge \omega + \lambda \mathbf{a} \wedge \omega' = L_{\mathbf{a}}\omega + \lambda L_{\mathbf{a}}\omega'.\end{aligned}$$

Fixemos agora um covetor $\mathbf{a}^* : V \to \mathbb{K}$. Para qualquer espaço W, a aplicação bilinear $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\mathbf{w}$ induz uma aplicação linear $V \otimes W \to W$ que leva $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ a $\mathbf{a}^*(\mathbf{v})\mathbf{w}$. Agora aplicaremos a construção análoga às potências exteriores e construiremos uma aplicação $V \wedge V \to V$. Denotemos essa aplicação por $\iota_{\mathbf{a}^*}$.

Seria incorreto definir a aplicação $\iota_{\mathbf{a}^*}$ pela fórmula $\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\,\mathbf{w}$ pois tal definição não respeita a antissimetria do produto cunha e, portanto, viola a condição de linearidade,

$$\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \stackrel{!}{=} \iota_{\mathbf{a}^*}((-1)\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = -\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \neq \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Assim, precisamos agir com $\mathbf{a}^*$ sobre *cada* vetor de um produto cunha e garantir que surja o sinal negativo correto. Uma fórmula aceitável para a aplicação $\iota_{\mathbf{a}^*} : \bigwedge^2 V \to V$ é

$$\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \equiv \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\,\mathbf{w} - \mathbf{a}^*(\mathbf{w})\,\mathbf{v}.$$

(Verifique que agora a condição de linearidade vale!) É assim que definiremos a aplicação $\iota_{\mathbf{a}^*}$ em $\bigwedge^2 V$.

Estendamos agora $\iota_{\mathbf{a}^*} : \bigwedge^2 V \to V$ a uma aplicação

$$\iota_{\mathbf{a}^*} : \bigwedge^{k} V \to \bigwedge^{k-1} V,$$

definida como segue:

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{a}^*}\mathbf{v} &\equiv \mathbf{a}^*(\mathbf{v}), \\ \iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v} \wedge \omega) &\equiv \mathbf{a}^*(\mathbf{v})\omega - \mathbf{v} \wedge (\iota_{\mathbf{a}^*}\omega). \end{aligned} \tag{12.7}$$

Essa definição é *indutiva*, isto é, mostra como definir $\iota_{\mathbf{a}^*}$ em $\bigwedge^k V$ se soubermos defini-la em $\bigwedge^{k-1} V$. A ação de $\iota_{\mathbf{a}^*}$ sobre uma soma de termos é definida exigindo linearidade,

$$\iota_{\mathbf{a}^*}(A + \lambda B) \equiv \iota_{\mathbf{a}^*}(A) + \lambda \iota_{\mathbf{a}^*}(B), \quad A, B \in \bigwedge^{k} V.$$

Podemos converter essa definição indutiva em uma fórmula mais explícita: se $\omega = \mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k \in \bigwedge^k V$, então

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k) \equiv{}& \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k - \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k \\ &+ \ldots + (-1)^{k-1}\,\mathbf{a}^*(\mathbf{v}_k)\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{k-1}. \end{aligned}$$

Essa aplicação é chamada de **produto interior** ou aplicação de **inserção**. É uma operação útil em álgebra linear. A aplicação de inserção $\iota_{\mathbf{a}^*}\psi$ "insere" o covetor $\mathbf{a}^*$ no tensor $\psi \in \bigwedge^k V$, fazendo-o atuar sobre cada vetor do produto exterior que compõe ψ.

Vamos verificar formalmente que a aplicação de inserção é linear.

Enunciado: A aplicação $\iota_{\mathbf{a}^*} : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{k-1} V$, para $1 \leq k \leq N$, é uma aplicação linear bem definida de acordo com a definição indutiva.

Demonstração: Primeiro, precisamos verificar que ela leva combinações lineares em combinações lineares; isso é fácil de ver por indução, usando o fato de que $\mathbf{a}^* : V \to \mathbb{K}$ é linear. Contudo, esse tipo de linearidade não é suficiente; também precisamos verificar que o *resultado* da aplicação, isto é, o tensor $\iota_{\mathbf{a}^*}(\omega)$, é definido *independentemente* da *representação* de ω por vetores como $\mathbf{v}_i$. O problema é que há muitas dessas representações; por exemplo, um tensor $\omega \in \bigwedge^3 V$ pode ser escrito usando vetores diferentes como

$$\omega = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \wedge (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2) \equiv \tilde{\mathbf{v}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{v}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{v}}_3.$$

Precisamos verificar que toda representação equivalente produz o mesmo tensor resultante $\iota_{\mathbf{a}^*}(\omega)$, apesar de a definição de $\iota_{\mathbf{a}^*}$ *parecer* depender da escolha dos vetores $\mathbf{v}_i$. Só então estará provado que $\iota_{\mathbf{a}^*}$ é uma aplicação linear $\bigwedge^k V \to \bigwedge^{k-1} V$.

Uma representação equivalente de um tensor ω só pode ser obtida usando as propriedades do produto exterior, a saber, linearidade e antissimetria. Portanto, precisamos verificar que $\iota_{\mathbf{a}^*}(\omega)$ não muda quando alteramos a representação de ω dessas duas maneiras: 1) expandindo uma combinação linear,

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \wedge \ldots \mapsto \mathbf{x} \wedge \ldots + \lambda\mathbf{y} \wedge \ldots; \tag{12.8}$$

2) trocando a ordem de dois vetores no produto exterior e mudando o sinal,

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} \wedge \ldots \mapsto -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \wedge \ldots \tag{12.9}$$

É claro que $\mathbf{a}^*(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{a}^*(\mathbf{y})$; segue por indução que $\iota_{\mathbf{a}^*}\omega$ não muda sob uma mudança de representação do tipo (12.8). Agora consideramos a mudança de representação do tipo (12.9). Pela definição de $\iota_{\mathbf{a}^*}$, temos

$$\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \chi) = \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 \wedge \chi - \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1 \wedge \chi + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \iota_{\mathbf{a}^*}(\chi),$$

onde denotamos por χ o restante do produto exterior. É claro, pela expressão acima, que

$$\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \chi) = -\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \chi) = \iota_{\mathbf{a}^*}(-\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \chi).$$

Isso prova que $\iota_{\mathbf{a}^*}(\omega)$ não muda sob uma mudança de representação de ω do tipo (12.9). Isso conclui a demonstração. ■

Observação: Fica evidente pela demonstração que o *sinal negativo* na definição indutiva (12.7) é crucial para a linearidade da aplicação $\iota_{\mathbf{a}^*}$. De fato, se tentarmos definir uma aplicação por uma fórmula como

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_2 + \mathbf{a}^*(\mathbf{v}_2)\mathbf{v}_1,$$

o resultado *não* será uma aplicação linear $\bigwedge^2 V \to V$, apesar da aparência de linearidade. A fórmula correta deve levar em conta o fato de que $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1$.

Exercício: Mostre por indução em k que

$$L_{\mathbf{x}}\iota_{\mathbf{a}^*}\omega + \iota_{\mathbf{a}^*}L_{\mathbf{x}}\omega = \mathbf{a}^*(\mathbf{x})\omega, \quad \forall\omega \in \bigwedge^k V.$$

Em outras palavras, o operador linear $L_{\mathbf{x}}\iota_{\mathbf{a}^*} + \iota_{\mathbf{a}^*}L_{\mathbf{x}} : \bigwedge^k V \to \bigwedge^k V$ é simplesmente a multiplicação pelo número $\mathbf{a}^*(\mathbf{x})$.

Resposta: Pela identidade de contração $\iota_{\mathbf{a}^*}(\mathbf{x} \wedge \omega) = \mathbf{a}^*(\mathbf{x})\omega - \mathbf{x} \wedge \iota_{\mathbf{a}^*}\omega$, válida para todo ω, temos

$$L_{\mathbf{x}}\iota_{\mathbf{a}^*}\omega + \iota_{\mathbf{a}^*}L_{\mathbf{x}}\omega = \mathbf{x} \wedge \iota_{\mathbf{a}^*}\omega + \mathbf{a}^*(\mathbf{x})\omega - \mathbf{x} \wedge \iota_{\mathbf{a}^*}\omega = \mathbf{a}^*(\mathbf{x})\omega.$$

Essa identidade vale em todos os graus e, em particular, prova o enunciado por indução.

12.3.2. Produto exterior e dependência linear

O produto exterior é útil de muitas maneiras. Uma propriedade poderosa é sua relação estreita com a independência linear de conjuntos de vetores. Por exemplo, se $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, então $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$. Mais geralmente:

Teorema 1: Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ de vetores de V é linearmente independente se, e somente se, $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k) \neq 0$, isto é, se esse é um tensor não nulo de $\bigwedge^k V$.

Demonstração: Se os vetores são dependentes, um deles é combinação dos demais. Substituir essa combinação no produto exterior produz termos com um fator repetido; todos são nulos. Isso inclui $k = 1$, caso em que o único vetor é zero.

Reciprocamente, estenda os vetores independentes $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ a uma base de V e tome os covetores duais $\mathbf{f}_1^*, \dots, \mathbf{f}_k^*$. Pela avaliação determinantal,

$$(\mathbf{f}_1^* \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_k^*)(\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \det(\delta_{ij}) = 1.$$

Um funcional linear vale zero no tensor nulo. Portanto, o produto exterior considerado é não nulo. Essa prova mostra como construir um teste explícito de independência, sem recorrer a uma representação geométrica. ■

Também é importante saber que qualquer tensor da maior potência exterior $\bigwedge^N V$ pode ser representado simplesmente como um produto exterior de termo único de N vetores. (Observe que a mesma propriedade para $\bigwedge^{N-1} V$ já foi estabelecida na Seção 12.3.)

Lema 1: Para qualquer tensor $\omega \in \bigwedge^N V$, existem vetores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ tais que $\omega = \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$.

Demonstração: Se $\omega = 0$, nada há a demonstrar; portanto, suponha $\omega \neq 0$. Por definição, o tensor ω tem uma representação como soma de *vários* produtos exteriores, digamos

$$\omega = \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N + \mathbf{v}'_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}'_N + ...$$

Vamos simplificar essa expressão até obter um único produto exterior. Primeiro, omitimos os termos nulos (por exemplo, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge ... = 0$). Pelo Teorema 1, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ é linearmente independente (caso contrário, o termo $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$ seria nulo). Portanto, $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ é uma base de V. Todos os outros vetores, como $\mathbf{v}'_i$, podem ser decompostos como combinações lineares dos vetores dessa base. Denotemos $\psi \equiv \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$. Ao expandir os colchetes em produtos exteriores como $\mathbf{v}'_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}'_N$, obteremos sempre o tensor ψ com coeficientes diferentes. Assim, o resultado final é $\omega = c\psi$ para algum escalar c. Como $\omega \neq 0$, temos $c \neq 0$, e podemos absorver esse coeficiente no primeiro fator:

$$\omega = (c\mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_N.$$

Isso prova o Lema 1. ■

Agora queremos construir uma base no espaço $\bigwedge^m V$. Para isso, precisamos determinar quais conjuntos de tensores de $\bigwedge^m V$ são linearmente independentes nesse espaço.

Lema 2: Se $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$ é uma base de V, então qualquer tensor $A \in \bigwedge^m V$ pode ser decomposto como uma combinação linear dos tensores $\mathbf{e}_{k_1} \wedge \mathbf{e}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k_m}$ com índices $1 \leq k_j \leq N$. Os termos com índices repetidos são nulos; os demais podem ser reordenados para que $k_1 < \cdots < k_m$.

Demonstração: O tensor A é uma combinação linear de expressões da forma $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_m$, e cada vetor $\mathbf{v}_i \in V$ pode ser decomposto na base $\{\mathbf{e}_j\}$. Expandindo os colchetes dos produtos cunha usando as regras (12.2)–(12.4), obtemos uma decomposição de um tensor arbitrário em termos dos produtos exteriores dos vetores da base. Por exemplo,

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) - 2\,(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) \\ = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

(verifique você mesmo!). ■

Pelo Teorema 1, todos os tensores $\mathbf{e}_{k_1} \wedge \mathbf{e}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k_m}$ construídos a partir de subconjuntos de vetores da base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$ são não nulos, e, pelo Lema 2, qualquer tensor pode ser decomposto em uma combinação linear desses tensores. Mas esses tensores formam uma base do espaço $\bigwedge^m V$? Sim:

Lema 3: Se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto de vetores linearmente independente (não necessariamente uma base de V, pois $n \leq N$), então:

(1) O conjunto dos $\binom{n}{2}$ tensores

$$\left\{\mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k,\ 1 \leq j < k \leq n\right\} \equiv \{\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3, ..., \mathbf{v}_{n-1} \wedge \mathbf{v}_n\}$$

é linearmente independente no espaço $\bigwedge^2 V$.

(2) O conjunto dos $\binom{n}{m}$ tensores

$$\left\{\mathbf{v}_{k_1} \wedge \mathbf{v}_{k_2} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{k_m},\ 1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq n\right\}$$

é linearmente independente no espaço $\bigwedge^m V$ para $2 \leq m \leq n$.

Demonstração: **(1)** Suponha que o conjunto $\{\mathbf{v}_j\}$ seja linearmente independente, mas que o conjunto $\{\mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k\}$ seja *dependente*, de modo que exista uma combinação linear

$$\sum_{1 \leq j < k \leq n} \lambda_{jk} \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k = 0$$

com algum $\lambda_{jk} \neq 0$. Sem perda de generalidade, $\lambda_{12} \neq 0$ (caso contrário, podemos renumerar os vetores $\mathbf{v}_j$). Existe um covetor $\mathbf{f}^* \in V^*$ tal que $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_1) = 1$ e $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$. Aplicando o produto interior com esse covetor ao tensor acima,

$$0 = \iota_{\mathbf{f}^*}\left[\sum_{1 \leq j < k \leq n} \lambda_{jk} \mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k\right] = \sum_{k=2}^{n} \lambda_{1k} \mathbf{v}_k,$$

portanto, pela independência linear de $\{\mathbf{v}_k\}$, todos os $\lambda_{1k} = 0$, contrariando a hipótese $\lambda_{12} \neq 0$.

(2) A demonstração da parte (1) generaliza-se por indução em m. O caso $m = 2$ já foi provado. Suponha que o resultado valha para $m-1$ e considere uma relação linear

$$\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_m\leq n} \lambda_{k_1\cdots k_m}\mathbf{v}_{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_{k_m} = 0.$$

Se algum coeficiente for não nulo, podemos renumerar os vetores e supor $\lambda_{12\cdots m} \neq 0$. Escolha $\mathbf{f}^* \in V^*$ tal que $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_1) = 1$ e $\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_i) = 0$ para $2 \leq i \leq n$. Aplicando $\iota_{\mathbf{f}^*}$ à relação anterior, restam apenas os termos que contêm $\mathbf{v}_1$:

$$\sum_{2\leq k_2<\cdots<k_m\leq n} \lambda_{1k_2\cdots k_m}\mathbf{v}_{k_2}\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_{k_m} = 0.$$

Pela hipótese de indução, todos esses coeficientes são nulos, em particular $\lambda_{12\cdots m} = 0$, uma contradição. Logo, o conjunto de m-vetores indicado no enunciado é linearmente independente. ■

Agora estamos prontos para calcular a dimensão de $\bigwedge^m V$.

Teorema 2: A dimensão do espaço $\bigwedge^m V$, para $0 \leq m \leq N$, é

$$\dim \bigwedge^m V = \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}.$$

onde $N \equiv \dim V$. Para $m > N$, temos $\dim \bigwedge^m V = 0$, isto é, os espaços $\bigwedge^m V$ para $m > N$ consistem somente no tensor nulo.

Demonstração: Construiremos explicitamente uma base do espaço $\bigwedge^m V$. Escolha primeiro uma base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N\}$ em V. Pelo Lema 3, o conjunto dos $\binom{N}{m}$ tensores

$$\left\{\mathbf{e}_{k_1}\wedge\mathbf{e}_{k_2}\wedge ...\wedge\mathbf{e}_{k_m},\ 1\leq k_1<k_2<...<k_m\leq N\right\}$$

é linearmente independente e, pelo Lema 2, qualquer tensor $A \in \bigwedge^m V$ é uma combinação linear desses tensores. Portanto, o conjunto $\left\{\mathbf{e}_{k_1}\wedge\mathbf{e}_{k_2}\wedge ...\wedge\mathbf{e}_{k_m}\right\}$ é uma base de $\bigwedge^m V$. Como todas as bases de um espaço vetorial finito-dimensional têm o mesmo número de elementos, segue que $\dim \bigwedge^m V = \binom{N}{m}$.

Para $m > N$, a existência de um tensor não nulo $\mathbf{v}_1\wedge...\wedge\mathbf{v}_m$ contradiz o Teorema 1: o conjunto $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$ não pode ser linearmente independente, pois possui mais vetores que a dimensão do espaço. Portanto, todos esses tensores são nulos (mais precisamente, são o *tensor nulo*), que é o único elemento de $\bigwedge^m V$ para todo $m > N$. ■

Exercício 1: É dado que o conjunto dos quatro vetores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ é linearmente independente. Mostre que o tensor $\omega \equiv \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \in \bigwedge^2 V$ *não pode* ser igual a um produto exterior de termo único da forma $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

Resposta: Escolha $\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{d}^* \in V^*$ que, restritos ao subespaço gerado por $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, formem a base dual. Pela fórmula da contração,

$$\iota_{\mathbf{a}^*}\omega = \mathbf{b}, \quad \iota_{\mathbf{b}^*}\omega = -\mathbf{a}, \quad \iota_{\mathbf{c}^*}\omega = \mathbf{d}, \quad \iota_{\mathbf{d}^*}\omega = -\mathbf{c}.$$

Se $\omega = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, toda contração de ω é combinação linear de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Assim, os quatro vetores independentes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ pertenceriam ao mesmo subespaço de dimensão no máximo dois, uma contradição. Equivalentemente, $\omega \wedge \omega = 2\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \neq 0$, enquanto $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$.

Observação: Enquanto $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ é interpretado geometricamente como a área orientada de um paralelogramo definido por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, uma combinação linear geral, como $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}$, não tem essa interpretação (a menos que possa ser reduzida a um produto de termo único $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$). Se não puder ser reduzida, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ pode ser interpretada apenas como uma combinação linear *formal* de duas áreas.

Exercício 2: Suponha que $1 \leq k \leq N$, $\psi \in \bigwedge^k V$ e $\mathbf{x} \in V$ satisfaçam $\mathbf{x} \wedge \psi = 0$ e $\mathbf{x} \neq 0$. Mostre que existe $\chi \in \bigwedge^{k-1} V$ tal que $\psi = \mathbf{x} \wedge \chi$. Dê um exemplo em que ψ e χ *não* possam ser representados por produtos exteriores de termo único.

Resposta: Escolha $\mathbf{f}^* \in V^*$ com $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}) = 1$. Aplicando a identidade de contração a $\mathbf{x} \wedge \psi = 0$, obtemos

$$0 = \iota_{\mathbf{f}^*}(\mathbf{x} \wedge \psi) = \psi - \mathbf{x} \wedge \iota_{\mathbf{f}^*}\psi.$$

Logo, $\psi = \mathbf{x} \wedge \chi$, onde $\chi = \iota_{\mathbf{f}^*}\psi$.

Para o exemplo, suponha $\dim V \geq 5$ e escolha cinco vetores independentes $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. Ponha $\chi = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ e $\psi = \mathbf{x} \wedge \chi$. O Exercício 1 mostra que χ não é decomponível. Escolha $\mathbf{f}^*$ que vale 1 em $\mathbf{x}$ e 0 em $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. Então $\iota_{\mathbf{f}^*}\psi = \chi$. Se ψ fosse decomponível, essa contração seria um bivetor contido no espaço gerado pelos três fatores de ψ; todo bivetor em um espaço de dimensão no máximo três é decomponível, contrariando a não decomponibilidade de χ.

12.3.3. Cálculo da base dual

O produto exterior permite calcular explicitamente a base dual de uma dada base.

Começamos com uma motivação. Suponha que $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_N\}$ seja uma base dada; queremos calcular sua base dual. Por exemplo, o covetor $\mathbf{v}_1^*$ da base dual é a função linear tal que $\mathbf{v}_1^*(\mathbf{x})$ é igual ao coeficiente de $\mathbf{v}_1$ na decomposição de $\mathbf{x}$ na base $\{\mathbf{v}_j\}$,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{v}_1^*(\mathbf{x}) = x_1.$$

Partimos da observação de que o tensor $\omega \equiv \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$ é não nulo, pois $\{\mathbf{v}_j\}$ é uma base. O produto exterior $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$ é igual a zero se $\mathbf{x}$ for uma combinação linear apenas de $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$, com coeficiente nulo x_1. Isso sugere que o produto exterior de $\mathbf{x}$ com o $(N-1)$-vetor $\mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$ é bastante semelhante ao covetor $\mathbf{v}_1^*$ que procuramos. De fato, calculemos

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N = x_1 \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N = x_1 \omega.$$

Portanto, a multiplicação exterior por $\mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N$ atua de modo bastante semelhante a $\mathbf{v}_1^*$. Para tornar a notação mais concisa, introduzamos uma operação especial de **complemento**[3] denotada por uma estrela:

$$*(\mathbf{v}_1) \equiv \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N.$$

Então podemos escrever $\mathbf{v}_1^*(\mathbf{x})\omega = \mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_1)$. Essa equação pode ser usada para calcular $\mathbf{v}_1^*$: para qualquer $\mathbf{x} \in V$, o número $\mathbf{v}_1^*(\mathbf{x})$ é igual à constante λ na equação $\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_1) = \lambda\omega$. Para tornar esse tipo de equação mais conveniente, escrevamos

$$\lambda \equiv \mathbf{v}_1^*(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N}{\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N} = \frac{\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_1)}{\omega},$$

onde a "divisão" de um tensor por outro deve ser entendida da seguinte maneira: primeiro calculamos o tensor $\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_1)$; esse tensor é proporcional a ω, pois ambos pertencem ao espaço unidimensional $\bigwedge^N V$. Assim, podemos determinar o número λ tal que $\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_1) = \lambda\omega$; o coeficiente de proporcionalidade λ é então o resultado da divisão de $\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_1)$ por ω.

Para $\mathbf{v}_2$, temos

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N = x_2 \omega = \mathbf{v}_2^*(\mathbf{x})\omega.$$

Se quisermos $x_2\omega = \mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_2)$, precisamos adicionar um sinal negativo extra e definir

$$*(\mathbf{v}_2) \equiv -\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_N.$$

[3] A operação de complemento foi introduzida por H. Grassmann (1844).

Então obtemos de fato $\mathbf{v}_2^*(\mathbf{x})\omega = \mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_2)$.

Fica claro então que podemos definir os tensores $*(\mathbf{v}_i)$, para $i = 1, ..., N$, dessa maneira. O tensor $*(\mathbf{v}_i)$ é obtido de ω removendo o vetor $\mathbf{v}_i$ e adicionando um sinal correspondente a deslocar o vetor $\mathbf{v}_i$ para a posição mais à esquerda no produto exterior. O mapa de "complemento", $* : V \to \bigwedge^{N-1} V$, satisfaz $\mathbf{v}_j \wedge *(\mathbf{v}_j) = \omega$ para cada vetor da *base* $\mathbf{v}_j$. (Depois de definido nos vetores da base, o mapa de complemento pode ser estendido a todos os vetores de V por linearidade. Contudo, por enquanto aplicaremos a operação de complemento apenas aos vetores da base.)

Com essas definições, podemos expressar a base dual como

$$\mathbf{v}_i^*(\mathbf{x})\omega = \mathbf{x} \wedge *(\mathbf{v}_i), \quad \mathbf{x} \in V,\ i = 1, ..., N.$$

Observação: A notação $*(\mathbf{v}_i)$ sugere que, por exemplo, $*(\mathbf{v}_1)$ seja uma operação aplicada a $\mathbf{v}_1$ e função apenas desse vetor, mas não é assim: o "complemento" de um vetor depende da base inteira, e não apenas do vetor isolado! Além disso, a propriedade $\mathbf{v}_1 \wedge *(\mathbf{v}_1) = \omega$ não é suficiente para definir o tensor $*\mathbf{v}_1$. A definição correta de $*(\mathbf{v}_i)$ é o tensor obtido de ω removendo $\mathbf{v}_i$, como explicado acima.

Exemplo: No espaço $\mathbb{R}^2$, calculemos a base dual da base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, onde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ os vetores da base padrão $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Primeiro calculamos o 2-vetor

$$\omega = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \wedge (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.$$

A operação de "complemento" para a base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dá $*(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ e $*(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_1$. Agora definimos os covetores $\mathbf{v}_{1,2}^*$ por sua ação sobre um vetor arbitrário $\mathbf{x} \equiv x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1^*(\mathbf{x})\omega = \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_2 &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \wedge (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\
&= (x_1 + x_2)\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \frac{x_1 + x_2}{3}\omega, \\
\mathbf{v}_2^*(\mathbf{x})\omega = -\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_1 &= -(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) \wedge (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\
&= (-x_1 + 2x_2)\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \frac{-x_1 + 2x_2}{3}\omega.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{v}_1^* = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1^* + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2^*$ e $\mathbf{v}_2^* = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1^* + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2^*$.

Pergunta: Podemos definir a operação de complemento para todo $\mathbf{x} \in V$ pela equação $\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{x}) = \omega$, onde $\omega \in \bigwedge^N V$ é um tensor fixo? O complemento realmente depende da base inteira? Ou talvez uma escolha de ω seja suficiente?

Resposta: Não, sim, não. Primeiro, $*(\mathbf{x})$ não é determinado unicamente por essa equação, pois $\mathbf{x} \wedge A = \omega$ define A apenas a menos de tensores da forma $\mathbf{x} \wedge ...$; segundo, a equação $\mathbf{x} \wedge *(\mathbf{x}) = \omega$ indica que $*(\lambda \mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} *(\mathbf{x})$, de modo que o mapa de complemento não seria linear se fosse definido assim. É importante ter em mente que o mapa de complemento requer uma base inteira para sua definição e depende não apenas da escolha de um tensor ω, mas também da escolha de todos os vetores da base. Por exemplo, em duas dimensões temos $*(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$; é claro que $*(\mathbf{e}_1)$ depende da escolha de $\mathbf{e}_2$!

Observação: A situação é diferente quando o espaço vetorial é equipado com um produto escalar. Nesse caso, normalmente escolhe-se uma base *ortonormal* para definir o mapa de complemento; então o mapa de complemento é chamado de **estrela de Hodge**. A estrela de Hodge é independente da escolha da base, desde que a base seja ortonormal em relação ao produto escalar dado e desde que a orientação da base não seja alterada (isto é, desde que o tensor ω não troque de sinal). Em outras palavras, a operação estrela de Hodge é invariante sob transformações ortogonais que preservam a orientação da base; essas transformações preservam o tensor ω. Portanto, a estrela de Hodge não depende exatamente da escolha detalhada da base, mas da escolha do produto escalar e da orientação da base (o sinal de ω). Entretanto, estamos trabalhando agora com um espaço geral sem produto escalar. Nesse caso, o mapa de complemento depende da base inteira.

12.3.4. Eliminação de Gauss

Pergunta: Qual esforço computacional é realmente necessário para calcular o produto exterior de n vetores? Ele parece fácil em duas ou três dimensões, mas em N dimensões o produto de n vetores $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$ produz expressões como

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i = (x_{11}\mathbf{e}_1 + ... + x_{1N}\mathbf{e}_N) \wedge ... \wedge (x_{n1}\mathbf{e}_1 + ... + x_{nN}\mathbf{e}_N),$$

que, ao expandirmos todos os parênteses, serão reduzidas a um número exponencialmente grande (da ordem de N^n) de produtos tensoriais elementares.

Resposta: Naturalmente, expandir todos os parênteses não é a melhor maneira de calcular produtos exteriores longos. Em vez disso, podemos usar um

procedimento semelhante à eliminação de Gauss para calcular determinantes. A observação fundamental é que

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \ldots = \mathbf{x}_1 \wedge (\mathbf{x}_2 - \lambda \mathbf{x}_1) \wedge \ldots$$

para qualquer número λ, e que é fácil calcular um produto exterior da forma

$$(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3) \wedge (\beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_3 = \alpha_1 \beta_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

É fácil calcular esse produto exterior porque o segundo vetor $(\beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3)$ não contém o vetor da base $\mathbf{e}_1$ e o terceiro vetor não contém $\mathbf{e}_1$ nem $\mathbf{e}_2$. Assim, podemos simplificar o cálculo de um produto exterior longo por operações elementares análogas às da eliminação de Gauss. Começamos com

$$\tilde{\mathbf{x}_1} = \mathbf{x}_1.$$

Depois, para $k = 2, \ldots, n$, subtraímos de $\mathbf{x}_k$ combinações lineares dos vetores já tratados:

$$\tilde{\mathbf{x}_k} = \mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{k-1} c_{kj} \tilde{\mathbf{x}_j}.$$

Como adicionar a um fator um múltiplo de outro fator não altera o produto exterior,

$$\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n = \tilde{\mathbf{x}_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\mathbf{x}_n}.$$

Escolhemos os coeficientes c_{kj} de modo a zerar sucessivamente as componentes nas direções-pivô. Se um pivô for nulo, permutamos os vetores ou passamos à próxima direção da base. Se, durante o processo, algum $\tilde{\mathbf{x}_k}$ se tornar nulo, os vetores originais são linearmente dependentes e o produto exterior é zero.

Ao final, podemos supor, após as permutações necessárias, que $\tilde{\mathbf{x}_i}$ é combinação de $\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_N$. Essa forma escalonada reduz drasticamente o número de termos que precisam ser expandidos.

Se $n = N$, o produto pode ser avaliado imediatamente, pois o último vetor, $\tilde{\mathbf{x}_N}$, é proporcional a $\mathbf{e}_N$; assim,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathbf{x}_n} &= (c_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots) \wedge \ldots \wedge (c_{nn}\mathbf{e}_N) \\ &= c_{11}c_{22}\ldots c_{nn}\mathbf{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_N. \end{aligned}$$

O cálculo é um pouco mais longo se $n < N$, de modo que

$$\tilde{\mathbf{x}_n} = c_{nn}\mathbf{e}_n + \ldots + c_{nN}\mathbf{e}_N.$$

Nesse caso, podemos eliminar, por exemplo, $\mathbf{e}_n$ de $\tilde{\mathbf{x}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{x}_{n-1}}$ subtraindo deles um múltiplo de $\tilde{\mathbf{x}_n}$, mas não podemos simplificar mais o produto; nesse ponto precisamos expandir o último parêntese (que contém $\tilde{\mathbf{x}_n}$) e escrever os termos.

Exemplo 1: Calcularemos o produto exterior

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\\&\equiv(7\mathbf{e}_1-8\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\wedge(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-15\mathbf{e}_3)\wedge(2\mathbf{e}_1-5\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Eliminaremos $\mathbf{e}_1$ de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$ (apenas para manter os coeficientes mais simples):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}&=(\mathbf{a}-7\mathbf{b})\wedge\mathbf{b}\wedge(\mathbf{c}-2\mathbf{b})\\&=(6\mathbf{e}_2+106\mathbf{e}_3)\wedge\mathbf{b}\wedge(-\mathbf{e}_2+29\mathbf{e}_3)\\&\equiv\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}_1.\end{aligned}$$

Agora eliminamos $\mathbf{e}_2$ de $\mathbf{a}_1$, e então o produto pode ser avaliado rapidamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}&=(\mathbf{a}_1+6\mathbf{c}_1)\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}_1\\&=(280\mathbf{e}_3)\wedge(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-15\mathbf{e}_3)\wedge(-\mathbf{e}_2+29\mathbf{e}_3)\\&=-280\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Exemplo 2: Considere

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\\\mathbf{b}&=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+3\mathbf{e}_4,\\\mathbf{c}&=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4.\end{aligned}$$

Subtraindo múltiplos de $\mathbf{a}$ dos outros fatores, obtemos

$$\mathbf{b}_1=\mathbf{b}-2\mathbf{a}=-3\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4,\qquad\mathbf{c}_1=\mathbf{c}+\mathbf{a}=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4.$$

Logo,

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}_1\wedge\mathbf{c}_1.$$

Para eliminar a componente em $\mathbf{e}_2$, definimos

$$\mathbf{c}_2=3\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1=-2\mathbf{e}_3+7\mathbf{e}_4.$$

Como $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}_1\wedge\mathbf{c}_2=3\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}_1\wedge\mathbf{c}_1$, temos

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\frac{1}{3}\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}_1\wedge\mathbf{c}_2.$$

Agora eliminamos a componente em $\mathbf{e}_3$ dos dois primeiros fatores:

$$\mathbf{a}_2=\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{c}_2=\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\frac{5}{2}\mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_2 = -3\mathbf{e}_2 + \frac{9}{2}\mathbf{e}_4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \frac{1}{3}\,\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{c}_2 \\ &= 2\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 7\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 \\ &\quad + 3\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.\end{aligned}$$

12.3.5. Posto de um conjunto de vetores

Definimos o posto de uma aplicação linear como a dimensão de sua imagem. Um conceito análogo pode ser introduzido para conjuntos de vetores.

Definição: Se $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto de vetores (onde n não é necessariamente menor que a dimensão N do espaço), o **posto** do conjunto S é a dimensão do subespaço gerado pelos vetores $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$. Em forma de fórmula,

$$\text{rank}\,(S) = \dim\ \text{Span}\,S.$$

O posto de um conjunto S é igual ao número máximo de vetores em qualquer subconjunto linearmente independente de S. Por exemplo, considere o conjunto $\{0, \mathbf{v}, 2\mathbf{v}, 3\mathbf{v}\}$, onde $\mathbf{v} \neq 0$. O posto desse conjunto é 1, pois esses quatro vetores geram um subespaço unidimensional,

$$\text{Span}\,\{0, \mathbf{v}, 2\mathbf{v}, 3\mathbf{v}\} = \text{Span}\,\{\mathbf{v}\}.$$

Qualquer subconjunto de S com dois ou mais vetores é linearmente dependente.

Mostraremos agora como usar o produto exterior para calcular o posto de um conjunto (finito) dado $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$.

Segundo o Teorema 1 da Seção 12.3.2, S é linearmente independente se, e somente se, $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_n \neq 0$. Portanto, primeiro calculamos o tensor $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_n$. Se esse tensor não for nulo, S será linearmente independente e o posto de S será n. Por outro lado, se $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_n = 0$, o posto será menor que n. Podemos determinar o posto de S pelo procedimento a seguir. Primeiro, supomos que todos os $\mathbf{v}_j \neq 0$ (vetores nulos podem ser omitidos sem alterar o posto de S). Calculamos então $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$; se o resultado for zero, podemos omitir $\mathbf{v}_2$, pois ele é proporcional a $\mathbf{v}_1$, e tentar $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3$. Se $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \neq 0$, tentamos $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$, e assim por diante. O procedimento pode ser formulado por indução de maneira evidente. Finalmente, chegaremos a um subconjunto $\{\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_k}\} \subset S$ tal que $\mathbf{v}_{i_1} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{i_k} \neq 0$, mas $\mathbf{v}_{i_1} \wedge ... \wedge \mathbf{v}_{i_k} \wedge \mathbf{v}_j = 0$ para qualquer outro $\mathbf{v}_j$. Assim, não há subconjuntos linearmente independentes de S com $k + 1$ ou mais vetores. Logo, o posto de S é k.

O subconjunto $\{\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_k}\}$ é construído por um procedimento que depende da ordem em que os vetores $\mathbf{v}_j$ são selecionados. Contudo, a próxima afirmação diz que o subespaço gerado por $\{\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_k}\}$ é o mesmo, independentemente da ordem dos vetores $\mathbf{v}_j$. Assim, o subconjunto $\{\mathbf{v}_{i_1}, ..., \mathbf{v}_{i_k}\}$ é uma base de Span S.

Afirmação: Suponha que um conjunto S de vetores tenha posto k e contenha *dois* subconjuntos linearmente independentes diferentes, digamos $S_1 = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ e $S_2 = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$, ambos com k vetores (mas sem subconjuntos linearmente independentes com $k+1$ ou mais vetores). Então os tensores $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$ e $\mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k$ são proporcionais entre si (como tensores de $\bigwedge^k V$).

Demonstração: Os tensores $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$ e $\mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k$ são ambos não nulos pelo Teorema 1 da Seção 12.3.2. Mostraremos agora que é possível substituir $\mathbf{v}_1$ por um dos vetores do conjunto S_2, digamos $\mathbf{u}_l$, de modo que o novo tensor $\mathbf{u}_l \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$ seja não nulo e proporcional ao tensor original $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$. Segue que esse procedimento pode ser repetido para cada outro vetor $\mathbf{v}_i$, até substituirmos todos os $\mathbf{v}_i$ por alguns $\mathbf{u}_i$ e provarmos que os dois tensores são proporcionais.

Resta provar que o vetor $\mathbf{v}_1$ pode ser substituído. Precisamos encontrar um vetor adequado $\mathbf{u}_l$. Seja $\mathbf{u}_l$ um dos vetores de S_2 e verifiquemos se $\mathbf{v}_1$ pode ser substituído por $\mathbf{u}_l$. Primeiro observamos que $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{u}_l = 0$, pois não há subconjuntos linearmente independentes de S com $k+1$ vetores. Logo, $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_l\}$ é linearmente *dependente*. Como o conjunto $\{\mathbf{v}_i \,|\, i = 1, ..., k\}$ era linearmente independente antes da adição de $\mathbf{u}_l$, segue que $\mathbf{u}_l$ pode ser escrito como combinação linear dos $\mathbf{v}_i$, com coeficientes α_i:

$$\mathbf{u}_l = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Se $\alpha_1 \neq 0$, teremos

$$\mathbf{u}_l \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k.$$

O novo tensor é não nulo e proporcional ao tensor antigo; portanto, podemos substituir $\mathbf{v}_1$ por $\mathbf{u}_l$.

Contudo, também pode ocorrer que $\alpha_1 = 0$. Nesse caso, precisamos escolher outro vetor $\mathbf{u}_{l'} \in S_2$ tal que o coeficiente correspondente α_1 seja não nulo. Resta provar que tal escolha é possível. Se isso fosse impossível, todos os $\mathbf{u}_i$ poderiam ser expressos como combinações lineares dos $\mathbf{v}_i$ com coeficiente nulo para o vetor $\mathbf{v}_1$. Nesse caso, o produto exterior $\mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k$ seria uma combinação linear de produtos exteriores dos vetores $\mathbf{v}_i$ com $i = 2, ..., k$. Esses produtos exteriores contêm k vetores, dos quais apenas $k-1$ são diferentes, e portanto são todos nulos. Isso contradiz a hipótese $\mathbf{u}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{u}_k \neq 0$. Logo, existe pelo menos um vetor $\mathbf{u}_l$ tal que $\alpha_1 \neq 0$, e a substituição desejada é sempre possível. ■

Observação: Segue da afirmação anterior que o subespaço gerado por S pode ser caracterizado unicamente por um tensor não nulo como $\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$, cujos constituintes — os vetores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ — formam uma base do subespaço $\operatorname{Span} S$. Não importa qual subconjunto linearmente independente escolhemos para esse fim. Também temos um procedimento computacional para determinar o subespaço $\operatorname{Span} S$ e sua dimensão. Assim, um subespaço de dimensão k é adequadamente especificado pela escolha de um tensor não nulo $\omega \in \bigwedge^k V$ da forma $\omega = \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k$. Para um subespaço dado, esse tensor ω é único a menos de um fator constante não nulo. Naturalmente, a decomposição de ω como produto exterior dos vetores $\{\mathbf{v}_i \,|\, i = 1, ..., k\}$ não é única, mas qualquer decomposição desse tipo produz um conjunto que gera o mesmo subespaço.

Exercício 1: Seja $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independente, $\omega \equiv \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_n \neq 0$, e seja $\mathbf{x}$ um vetor dado tal que $\omega \wedge \mathbf{x} = 0$. Mostre que $\mathbf{x}$ pertence ao subespaço $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$.

Resposta: Se $\mathbf{x}$ não pertencesse a esse subespaço, os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{x}$ seriam linearmente independentes. Pelo Teorema 1, seu produto exterior seria não nulo, isto é, $\omega \wedge \mathbf{x} \neq 0$, contradizendo a hipótese. Portanto, $\mathbf{x} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Exercício 2: Dados um covetor não nulo $\mathbf{f}^*$ e um vetor $\mathbf{n}$ tais que $\mathbf{f}^*(\mathbf{n}) \neq 0$, mostre que o operador $\hat{P}$ definido por

$$\hat{P}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{n}\frac{\mathbf{f}^*(\mathbf{x})}{\mathbf{f}^*(\mathbf{n})}$$

é um projetor sobre o subespaço $\mathbf{f}^{*\perp}$, isto é, $\mathbf{f}^*(\hat{P}\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in V$. Mostre que

$$(\hat{P}\mathbf{x}) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Resposta: Pela definição, $\mathbf{f}^*(\hat{P}\mathbf{x}) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^*(\mathbf{n})\mathbf{f}^*(\mathbf{x})/\mathbf{f}^*(\mathbf{n}) = 0$, de modo que $\operatorname{Im}\hat{P} \subseteq \ker \mathbf{f}^*$. Se $\mathbf{y} \in \ker \mathbf{f}^*$, então $\hat{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}$; logo, $\operatorname{Im}\hat{P} = \ker \mathbf{f}^*$ e $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Além disso,

$$(\hat{P}\mathbf{x}) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{n} - \frac{\mathbf{f}^*(\mathbf{x})}{\mathbf{f}^*(\mathbf{n})}\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{n},$$

pois $\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = 0$.

12.3.6. Produto exterior na notação indicial

Aqui mostramos como realizar cálculos com o produto exterior usando a notação indicial, embora ela não seja usada mais adiante, pois a notação sem índices é mais adequada aos objetivos deste livro.

Escolhamos uma base $\{\mathbf{e}_j\}$ em V; então a base dual $\{\mathbf{e}_j^*\}$ em V^* e a base $\{\mathbf{e}_{k_1} \wedge ... \wedge \mathbf{e}_{k_m}\}$ em $\bigwedge^m V$ ficam fixadas. Por definição, o produto exterior de dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é

$$A \equiv \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u},$$

portanto, na notação indicial, escreve-se $A^{ij} = u^i v^j - u^j v^i$. Note que a matriz A^{ij} é antissimétrica: $A^{ij} = -A^{ji}$.

Outro exemplo: o 3-vetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ pode ser expandido na base como

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{N} B^{ijk} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k.$$

Qual é a relação entre as componentes u^i, v^i, w^i dos vetores e as componentes B^{ijk}? Um cálculo direto fornece

$$B^{ijk} = u^i v^j w^k - u^i v^k w^j - u^j v^i w^k + u^j v^k w^i + u^k v^i w^j - u^k v^j w^i. \tag{12.10}$$

Em outras palavras, cada permutação do conjunto de índices (i, j, k) entra com o sinal correspondente à paridade dessa permutação.

Observação: Leitores familiarizados com a definição padrão do determinante de uma matriz reconhecerão a mesma soma alternada. Essa semelhança antecipa a expressão dos determinantes por produtos exteriores.

Observação: O "arranjo tridimensional" B^{ijk} é antissimétrico com respeito a *qualquer* par de índices:

$$B^{ijk} = -B^{jik} = -B^{ikj} = ...$$

Esses arranjos são chamados de **totalmente antissimétricos**. ■

A fórmula (12.10) para as componentes B^{ijk} de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ não é particularmente conveniente e não pode ser generalizada facilmente. Vamos agora reescrever a Eq. (12.10) em uma forma diferente, mais adequada para expressar produtos exteriores de tensores arbitrários.

Consideremos primeiro o produto exterior de três vetores como um mapa $\hat{E} : V \otimes V \otimes V \to \bigwedge^3 V$. Esse mapa é linear e pode ser representado, na notação indicial,

da seguinte maneira:

$$u^i v^j w^k \mapsto (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w})^{ijk} = \sum_{l,m,n} E^{ijk}_{lmn} u^l v^m w^n,$$

onde o arranjo E^{ijk}_{lmn} é a representação por componentes do mapa E. Comparando com a fórmula (12.10), vemos que E^{ijk}_{lmn} pode ser expresso por meio do símbolo de Kronecker δ como

$$E^{ijk}_{lmn} = \delta^i_l \delta^j_m \delta^k_n - \delta^i_l \delta^k_m \delta^j_n + \delta^k_l \delta^i_m \delta^j_n - \delta^k_l \delta^j_m \delta^i_n + \delta^j_l \delta^k_m \delta^i_n - \delta^j_l \delta^i_m \delta^k_n.$$

Fica claro agora que o produto exterior de dois vetores também pode ser escrito como

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^{ij} = \sum_{l,m} E^{ij}_{lm} u^l v^m,$$

onde

$$E^{ij}_{lm} = \delta^i_l \delta^j_m - \delta^j_l \delta^i_m.$$

Por analogia, o mapa $\hat{E} : V \otimes ... \otimes V \to \bigwedge^n V$ (para $2 \leq n \leq N$) pode ser representado na notação indicial pelo arranjo de componentes $E^{i_1 ... i_n}_{j_1 ... j_n}$. Esse arranjo é totalmente antissimétrico em relação a todos os índices $\{i_s\}$ e, separadamente, em relação a todos os $\{j_s\}$. Usando esse arranjo, o produto exterior de dois tensores antissimétricos gerais, digamos $\phi \in \bigwedge^m V$ e $\psi \in \bigwedge^n V$, com $m + n \leq N$, pode ser representado na notação indicial por

$$(\phi \wedge \psi)^{i_1 ... i_{m+n}} = \frac{1}{m!n!} \sum_{(j_s,k_s)} E^{i_1 ... i_{m+n}}_{j_1 ... j_m k_1 ... k_n} \phi^{j_1 ... j_m} \psi^{k_1 ... k_n}.$$

O fator combinatório $m!n!$ é necessário para compensar os $m!$ termos iguais que surgem da soma sobre $(j_1, ..., j_m)$, pois $\phi^{j_1 ... j_m}$ é totalmente antissimétrico, e, analogamente, os $n!$ termos iguais que surgem da soma sobre $(k_1, ..., k_n)$.

É útil ter uma fórmula geral para o arranjo $E^{i_1 ... i_n}_{j_1 ... j_n}$. Ele é o determinante da matriz de deltas de Kronecker:

$$E^{i_1 ... i_n}_{j_1 ... j_n} = \det\left(\delta^{i_b}_{j_a}\right)^n_{a,b=1} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta^{i_{\sigma(1)}}_{j_1} \cdots \delta^{i_{\sigma(n)}}_{j_n}.$$

Essa fórmula deixa explícito que E é totalmente antissimétrico nos índices superiores e, separadamente, nos índices inferiores; em particular, ele se anula se houver índices repetidos em qualquer um desses conjuntos. Mostraremos agora como expressar $E^{i_1 ... i_n}_{j_1 ... j_n}$ por meio do símbolo de Levi-Civita ε.

O **símbolo de Levi-Civita** é definido como um arranjo totalmente antissimétrico com N índices, cujos valores são 0 ou ± 1, de acordo com a fórmula

$$\varepsilon^{i_1\ldots i_N} = \begin{cases} (-1)^{|\sigma|} & \text{se } (i_1,\ldots,i_N) \text{ é uma permutação } \sigma \text{ de } (1,\ldots,N); \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Comparando isso com a definição de $E^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$, notamos que

$$\varepsilon^{i_1\ldots i_N} = E^{i_1\ldots i_N}_{1\ldots N}.$$

Conforme a conveniência, podemos escrever ε com índices superiores ou inferiores, pois, neste cálculo, ε é apenas um arranjo de números.

Para expressar $E^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$ por meio de $\varepsilon^{i_1\ldots i_N}$, obviamente precisamos usar pelo menos duas cópias de ε — uma com índices superiores e outra com índices inferiores. Consideremos, portanto, a expressão

$$\tilde{E}^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} \equiv \sum_{k_1,\ldots,k_{N-n}} \varepsilon^{i_1\ldots i_n k_1\ldots k_{N-n}} \varepsilon_{j_1\ldots j_n k_1\ldots k_{N-n}}, \tag{12.11}$$

onde a soma é realizada *somente* sobre os $N-n$ índices $\{k_s\}$. Essa expressão tem $2n$ índices livres, $i_1,\ldots,i_n$ e $j_1,\ldots,j_n$, e é totalmente antissimétrica nesses índices livres (pois ε é totalmente antissimétrico em todos os índices).

Afirmação: O operador de produto exterior $E^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$ é expresso por meio do símbolo de Levi-Civita como

$$E^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} = \frac{1}{(N-n)!}\tilde{E}^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}, \tag{12.12}$$

onde $\tilde{E}$ é definido pela Eq. (12.11).

Demonstração: Comparemos os valores de $E^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$ e $\tilde{E}^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$, onde os índices $\{i_s\}$ e $\{j_s\}$ têm valores fixos. Há dois casos: ou o conjunto $(i_1,\ldots,i_n)$ é uma permutação do conjunto $(j_1,\ldots,j_n)$; nesse caso podemos denotar essa permutação por σ; ou $(i_1,\ldots,i_n)$ não é uma permutação de $(j_1,\ldots,j_n)$.

Considerando o caso em que uma permutação σ leva $(j_1,\ldots,j_n)$ a $(i_1,\ldots,i_n)$, vemos que os símbolos ε na Eq. (12.11) serão não nulos somente se os índices $(k_1,\ldots,k_{N-n})$ forem uma permutação do complemento do conjunto $(i_1,\ldots,i_n)$. Há $(N-n)!$ dessas permutações, cada uma contribuindo com o mesmo valor para a soma na Eq. (12.11). Portanto, podemos escrever[4] a soma como

$$\tilde{E}^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n} = (N-n)!\,\varepsilon^{i_1\ldots i_n k_1\ldots k_{N-n}}\varepsilon_{j_1\ldots j_n k_1\ldots k_{N-n}} \text{ (sem somas!)},$$

[4]Na equação abaixo, incluí o aviso "sem somas" para maior clareza: na notação indicial, costuma-se assumir *implicitamente* uma soma sobre todos os índices repetidos.

onde os índices $\{k_s\}$ são escolhidos de modo que os valores de ε sejam não nulos. Como

$$\sigma\,(j_1,...,j_n) = (i_1,...,i_n)\,,$$

podemos permutar os primeiros n índices em $\varepsilon_{j_1...j_n k_1...k_{N-n}}$

$$\begin{aligned}\tilde{E}^{i_1...i_n}_{j_1...j_n} &= (N-n)!(-1)^{|\sigma|}\varepsilon^{i_1...i_n k_1...k_{N-n}}\varepsilon_{i_1...i_n k_1...k_{N-n}} \text{ (sem somas!)}\\ &= (N-n)!(-1)^{|\sigma|}.\end{aligned}$$

(Na última linha, substituímos o quadrado de ε por 1.) Assim, a fórmula desejada para $\tilde{E}$ é válida no primeiro caso.

No caso em que σ não existe, observamos que

$$\tilde{E}^{i_1...i_n}_{j_1...j_n} = 0,$$

pois, nesse caso, um dos ε na Eq. (12.11) terá necessariamente alguns índices iguais e, portanto, será nulo. Logo, $\tilde{E}$ e E são nulos para os mesmos conjuntos de índices. ■

Note que a fórmula para a potência exterior máxima ($n = N$) é simples e não envolve somas nem fatores combinatórios:

$$E^{i_1...i_N}_{j_1...j_N} = \varepsilon^{i_1...i_N}\varepsilon_{j_1...j_N}.$$

Exercício: O operador $\hat{E} : V\otimes V\otimes V \to \bigwedge^3 V$ pode ser considerado no subespaço $\bigwedge^3 V \subset V\otimes V\otimes V$, o que produz um operador $\hat{E} : \bigwedge^3 V \to \bigwedge^3 V$. Mostre que, nesse subespaço,

$$\hat{E} = 3!\,\hat{1}_{\bigwedge^3 V}.$$

Generalize para $\bigwedge^n V$ de maneira natural.

Dica: aplique $\hat{E}$ a $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$.

Resposta: Os elementos $\mathbf{v}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_n$ geram $\bigwedge^n V$. Aplicando $\hat{E}$ a tal elemento, escrito como alternador no tensor produto, obtemos a soma sobre $n!$ permutações. Cada termo, após aplicar novamente o produto exterior, é igual a $\mathbf{v}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_n$: o sinal da permutação do alternador cancela o sinal produzido ao reordenar os fatores. Portanto, $\hat{E}$ atua como $n!$ vezes a identidade nos geradores e, por linearidade, em todo $\bigwedge^n V$.

Observação: Como regra, uma soma do símbolo de Levi-Civita ε com qualquer tensor antissimétrico (por exemplo, outro ε) produz um fator combinatório $n!$ quando a soma percorre n índices.

12.3.7. * Álgebra exterior (álgebra de Grassmann)

O formalismo da álgebra exterior é usado, por exemplo, em teorias físicas de campos fermiônicos quânticos e supersimetria.

Definição: Uma **álgebra** é um espaço vetorial com uma multiplicação distributiva. Em outras palavras, A é uma álgebra se é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e, para quaisquer $a, b \in A$, seu produto $ab \in A$ está definido de modo que $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$ e $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ para $\lambda \in \mathbb{K}$. Uma álgebra é chamada **comutativa** se $ab = ba$ para todos a, b.

As propriedades da multiplicação em uma álgebra podem ser resumidas dizendo que, para todo elemento fixo $a \in A$, as transformações $x \mapsto ax$ e $x \mapsto xa$ são mapas lineares da álgebra nela mesma.

Exemplos de álgebras:

1. Todas as matrizes $N \times N$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ formam uma álgebra de dimensão N^2. A multiplicação é definida pela fórmula usual de multiplicação de matrizes. Essa álgebra não é comutativa, pois nem todas as matrizes comutam.

2. O corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra unidimensional sobre si mesmo. (Não é um exemplo muito empolgante.) Essa álgebra é comutativa.

Afirmação: Se $\omega \in \bigwedge^m V$, podemos definir o mapa $L_\omega : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{k+m} V$ pela fórmula

$$L_\omega(\mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k) \equiv \omega \wedge \mathbf{v}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{v}_k.$$

Para elementos de $\bigwedge^0 V \equiv \mathbb{K}$, definimos $L_\lambda \omega \equiv \lambda\omega$ e também $L_\omega \lambda \equiv \lambda\omega$ para todo $\omega \in \bigwedge^k V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Então o mapa L_ω é linear para todo $\omega \in \bigwedge^m V$, $0 \leq m \leq N$.

Demonstração: Os produtos $\mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$ geram $\bigwedge^k V$. Como o produto exterior é multilinear, para ω fixo a aplicação que leva η em $\omega \wedge \eta$ preserva somas e multiplicação por escalares nos geradores. Ela se estende, portanto, a uma aplicação linear em todo $\bigwedge^k V$. ■

Definição: A **álgebra exterior** (também chamada de **álgebra de Grassmann**) baseada no espaço vetorial V é o espaço $\wedge V$ definido como a soma direta

$$\wedge V \equiv \mathbb{K} \oplus V \oplus \bigwedge^2 V \oplus ... \oplus \bigwedge^N V,$$

com a multiplicação definida pelo mapa L, estendido a todo $\wedge V$ por linearidade.

Por exemplo, se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, então $1 + \mathbf{u} \in \wedge V$,

$$A \equiv 3 - \mathbf{v} + \mathbf{u} - 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \in \wedge V,$$

e

$$L_{1+\mathbf{u}} A = (1 + \mathbf{u}) \wedge (3 - \mathbf{v} + \mathbf{u} - 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = 3 - \mathbf{v} + 4\mathbf{u} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}.$$

Note que ainda escrevemos o símbolo $\wedge$ para denotar a multiplicação em $\wedge V$, embora agora ela não seja necessariamente anticomutativa; por exemplo, $1 \wedge x = x \wedge 1 = x$ para qualquer x nessa álgebra.

Observação: As somas em expressões como $1 + \mathbf{u}$ acima são *formais*, no sentido usual: $1 + \mathbf{u}$ não é um novo vetor nem um novo tensor, mas um elemento de um *novo espaço*. A álgebra exterior é, portanto, o espaço de combinações lineares formais de números, vetores, 2-vetores etc., até os N-vetores. ■

Como $\wedge V$ é uma soma direta de $\bigwedge^0 V$, $\bigwedge^1 V$, etc., os elementos de $\wedge V$ são somas de escalares, vetores, bivetores etc., isto é, de objetos que possuem um "grau" definido — escalares de "grau" 0, vetores de grau 1 e, em geral, k-vetores de grau k. É fácil ver que k-vetores e l-vetores comutam ou anticomutam, por exemplo,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \\
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge 1 &= 1 \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}), \\
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{d} &= -\mathbf{d} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}).
\end{aligned}$$

A lei geral de comutação e anticomutação pode ser escrita como

$$\omega_k \wedge \omega_l = (-1)^{kl}\, \omega_l \wedge \omega_k,$$

onde $\omega_k \in \bigwedge^k V$ e $\omega_l \in \bigwedge^l V$. Entretanto, é importante notar que somas de elementos com graus diferentes, como $1 + \mathbf{a}$, são elementos de $\wedge V$ que *não* possuem grau definido, pois não pertencem a um único subespaço $\bigwedge^k V \subset \wedge V$. Elementos sem grau definido ainda podem, naturalmente, ser multiplicados em $\wedge V$, mas *não* comutam *nem* anticomutam, por exemplo:

$$\begin{aligned}
(1 + \mathbf{a}) \wedge (1 + \mathbf{b}) &= 1 + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \\
(1 + \mathbf{b}) \wedge (1 + \mathbf{a}) &= 1 + \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Assim, para $\dim V \geq 2$, $\wedge V$ é, em geral, uma álgebra *não comutativa*, embora seja associativa. Mais precisamente, ela é graduadamente comutativa, como expressa a regra acima. Ainda assim, o fato de que elementos de $\wedge V$ com grau puro comutam ou anticomutam é importante; por isso, esse tipo de álgebra é chamado de **álgebra graduada**.

Exercício 1: Calcule a dimensão da álgebra $\wedge V$ como espaço vetorial, se $\dim V = N$.

Resposta: $\dim(\wedge V) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = 2^N$.

Exercício 2: Suponha que um elemento $x \in \wedge V$ seja uma soma de elementos de grau *par puro*, por exemplo, $x = 1 + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Mostre que x comuta com qualquer outro elemento de $\wedge V$.

Resposta: Se x tem grau puro par $2j$ e y tem grau puro k, então $x \wedge y = (-1)^{2jk} y \wedge x = y \wedge x$. Um elemento de grau par é soma de componentes de graus pares; aplicando o mesmo argumento a cada componente de x e de y, segue que qualquer elemento de grau par comuta com todo elemento da álgebra exterior.

Exercício 3: Calcule $\exp(\mathbf{a})$ e $\exp(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d})$ escrevendo a série de Taylor usando a multiplicação na álgebra $\wedge V$.

Dica: simplifique a expressão $\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x \wedge x + \ldots$ para o x particular dado.

Resposta: $\exp(\mathbf{a}) = 1 + \mathbf{a}$;

$$\exp(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = 1 + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}.$$

Exemplo 12.2 — Deformação linear e áreas de uma peça (nível médio)
Uma deformação homogênea é descrita por $A = \mathrm{diag}(2, 3, 4)$ em uma base ortonormal. Determine a ação de $\bigwedge^2 A$ nas áreas coordenadas e a ação de $\bigwedge^3 A$ nos volumes orientados. Calcule a área deformada do paralelogramo gerado por $u = e_1 + e_3$ e $v = e_2$.

Solução. A aplicação induzida satisfaz $(\bigwedge^2 A)(u \wedge v) = Au \wedge Av$. Nas bases $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$, sua matriz é $\mathrm{diag}(6, 8, 12)$. Em grau três, $Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge Ae_3 = 24\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, de modo que todos os volumes orientados são multiplicados por $\det A = 24$. Como $u \wedge v = e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_3$,

$$Au \wedge Av = 6e_1 \wedge e_2 - 12 e_2 \wedge e_3.$$

Sua área é $\sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$. A área inicial era $\sqrt{2}$: em uma deformação anisotrópica, o fator de área depende do plano da peça, embora o fator de volume seja o mesmo para todas as regiões. ◁

Exercícios

Exercício N207 Consolidação; médio

Determine a dimensão e uma base de $\bigwedge^3 \mathbb{R}^5$. Identifique os coeficientes de $u \wedge v \wedge w$ como menores de uma matriz.

Exercício N208 Consolidação; médio

Use o produto exterior para decidir a independência de $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,0)$. Resolva $a(1,0,1)+b(0,1,1)+c(1,1,0)=(2,3,1)$ por razões de volumes orientados.

Exercício N209 Consolidação; médio

Calcule a base dual de $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$ e confira cada avaliação nos três vetores.

Exercício N210 Consolidação; médio

Para $A=\operatorname{diag}(a,b,c)$, escreva as matrizes de $\bigwedge^2 A$ e $\bigwedge^3 A$. Analise os postos quando exatamente um dos três números é zero.

Exercício N211 Justificação; médio

Se A é invertível, mostre que $\bigwedge^k (A^{-1})$ é o inverso de $\bigwedge^k A$.

Exercício N212 Aprofundamento; difícil

Na álgebra exterior de $\mathbb{R}^4$, calcule $\exp(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$ e explique por que a série termina.

Exercício N213 Justificação; médio

Para ω de grau dois e η de grau três, explique o sinal de $\omega \wedge \eta$ ao inverter a ordem. Compare com o produto de dois elementos de grau três.

Exercício N214 Aprofundamento; difícil

Em $\mathbb{R}^4$, mostre que a condição de um bivetor simples $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ satisfaz $a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$. Verifique a condição no exemplo dos sensores.

CAPÍTULO

13

Integração de Formas

13.1. Formas diferenciais

Graus das formas e operações já conhecidas

No espaço euclidiano tridimensional, com orientação positiva, escreva vol $= dx \wedge dy \wedge dz$. A métrica permite associar um campo vetorial a uma 1-forma, e a orientação permite representá-lo também por uma forma de fluxo. Assim, as correspondências abaixo usam estruturas que devem permanecer explícitas.

Grau	Objeto e integral	Derivada exterior
0	Função f; em pontos orientados, soma com sinais.	df representa o gradiente pela métrica.
1	$\alpha = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$; trabalho em curvas.	$d\alpha$ é a forma de fluxo de $\nabla \times F$.
2	Forma de fluxo β de F; integral em superfícies.	$d\beta = (\nabla \cdot F)\,\mathrm{vol}$.
3	f vol; integral orientada em volumes.	$d(f\,\mathrm{vol}) = 0$ em dimensão três.

A forma de fluxo mencionada no quadro é

$$\beta = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy.$$

Por exemplo, a temperatura $T = 20 + x^2 y + e^z$ fornece $\int_\gamma dT = T(B) - T(A)$ para um sensor que se move de A a B. Já um campo de corrente j fornece uma 2-forma de fluxo; sua derivada exterior mede $\nabla \cdot j$. No regime estacionário sem acúmulo de

carga, essa forma é fechada. A mesma linguagem acompanha medição, trabalho e conservação, preservando o grau adequado a cada situação.

As integrais de linha e de fluxo podem ser escritas na linguagem das formas diferenciais. Uma k-forma recebe k direções tangentes e produz um escalar, alternando o sinal quando duas direções são trocadas. O grau determina a dimensão do objeto de integração; a antissimetria registra sua orientação.

Definição 13.1

Um **campo de formas diferenciais de grau k em $\mathbb{R}^n$** é uma expressão da forma

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} a_{j_1 \cdots j_k}(x)\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_k},$$

em que os coeficientes $a_{j_1 \cdots j_k}$ são funções diferenciáveis. A restrição $j_1 < \cdots < j_k$ evita repetições, pois qualquer termo com dois diferenciais iguais se anula pela antissimetria do produto exterior.

Uma forma diferencial de grau 0 em $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma função diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 13.1

$$g(x, y, z, w) = x + y^2 + z^3 + w^4$$

é uma forma de grau 0 em $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 13.2

Um exemplo de campo de formas de grau 1 em $\mathbb{R}^3$ é

$$\omega = x\, \mathrm{d}x + y^2\, \mathrm{d}y + xyz^3\, \mathrm{d}z.$$

Exemplo 13.3

Um exemplo de campo de formas de grau 2 em $\mathbb{R}^3$ é

$$\omega = x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

Exemplo 13.4

Um exemplo de campo de formas de grau 3 em $\mathbb{R}^3$ é

$$\omega = (x + y + z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Mostraremos agora como multiplicar formas diferenciais.

Exemplo 13.5

O produto dos campos de formas de grau 1 em $\mathbb{R}^3$

$$\omega_1 = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$$

$$\omega_2 = -2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y,$$

é

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (2x^2 + 2y^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Definição 13.2

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma 0-forma, sua **derivada exterior** é

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

Mais geralmente, se

$$\omega = \sum_{|I|=k} a_I(x)\;\mathrm{d}x_I,$$

onde $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ e $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$, definimos

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{|I|=k} \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x_I.$$

A operação d é linear e aumenta o grau em uma unidade.

Exemplo 13.6

Se em $\mathbb{R}^2$, $\omega = x^3y^4$, então

$$\mathrm{d}(x^3y^4) = 3x^2y^4\,\mathrm{d}x + 4x^3y^3\,\mathrm{d}y.$$

Exemplo 13.7

Se em $\mathbb{R}^2$, $\omega = x^2y\,\mathrm{d}x + x^3y^4\,\mathrm{d}y$, então

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(x^2y\,\mathrm{d}x + x^3y^4\,\mathrm{d}y)\\ &= (2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}x + (3x^2y^4\,\mathrm{d}x + 4x^3y^3\,\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}y\\ &= x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + 3x^2y^4\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= (3x^2y^4 - x^2)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Exemplo 13.8

Considere a mudança de variáveis $x = u + v$, $y = uv$. Então

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v,$$

portanto

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = (u - v)\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

Exemplo 13.9

Considere a transformação das coordenadas xyz para as coordenadas uvw dada por

$$u = x + y + z,\ v = \frac{z}{y+z},\ w = \frac{y+z}{x+y+z}.$$

Então

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}v = -\frac{z}{(y+z)^2}\,\mathrm{d}y + \frac{y}{(y+z)^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}w = -\frac{y+z}{(x+y+z)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{(x+y+z)^2}\,\mathrm{d}y + \frac{x}{(x+y+z)^2}\,\mathrm{d}z.$$

A transformação está definida onde $(y+z)(x+y+z)\neq 0$. Seu determinante jacobiano é

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = -\frac{1}{(y+z)(x+y+z)}.$$

Portanto,

$$\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w = -\frac{1}{(y+z)(x+y+z)}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

Exercícios

Exercício N182 **Consolidação; médio**

Calcule $\mathrm{d}\omega$ para $\omega = xy\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + zx\,\mathrm{d}z$, reordenando os diferenciais na ordem crescente dos índices.

Exercício N183 **Consolidação; médio**

Calcule $\mathrm{d}(xy)\wedge\mathrm{d}(x^2+y^2)$ e verifique que sua derivada exterior é zero.

Exercício N184 **Justificação; médio**

Para $x = u+v$, $y = uv$, encontre onde a transformação é regular e explique a mudança de orientação em $u=v$.

Exercícios de ampliação

Exercício A022 **Aplicação; médio**

Identifique os graus de T, dT, da forma de fluxo β_j de uma corrente j e de $\rho\,dx\wedge dy\wedge dz$. Escreva a conservação da carga como uma igualdade de formas de grau três e confira sua equivalência com $\partial_t\rho + \nabla\cdot j = 0$.

13.2. Integração de Formas Diferenciais

A regra de integração consiste em transportar a forma para o domínio dos parâmetros. Nesse transporte, chamado pullback, substituímos tanto os coeficientes quanto os diferenciais. Os determinantes que aparecem a seguir preservam o sinal da orientação.

Seja ω uma k-forma em $\mathbb{R}^n$ e seja $\varphi : D\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ uma parametrização regular, injetiva no interior do domínio e compatível com a orientação de uma variedade M,

cobrindo-a salvo conjuntos de medida nula. Quando uma única parametrização não cobre M, usamos cartas locais e uma partição da unidade para somar contribuições sem repetir sobreposições. A integral de ω sobre M é definida por

$$\int_M \omega := \int_D \varphi^*\omega,$$

onde $\varphi^*\omega$ é o **pullback** de ω pela parametrização.

Escrevendo

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(x)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

temos explicitamente

$$\int_M \omega = \int_D \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(\varphi(u)) \frac{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_k})}{\partial(u^1,\dots,u^k)}\, \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^k.$$

A orientação é essencial: inverter a orientação de M troca o sinal da integral.

Exemplo 13.10 — Pullback e verificação por uma primitiva (nível médio)

Calcule $\int_\gamma (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ para $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \le t \le 1$, e explique o sinal no percurso inverso.

Solução. Substituímos tanto as coordenadas quanto seus diferenciais:

$$\gamma^*(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = t^2\,\mathrm{d}t + t(2t\,\mathrm{d}t) = 3t^2\,\mathrm{d}t.$$

A integral é $\int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t = 1$. Como a forma é $\mathrm{d}(xy)$, o resultado também é $(xy)(1,1) - (xy)(0,0) = 1$. No percurso inverso, os extremos se trocam e a integral vale -1. ◁

Exercícios

Exercício N185 **Consolidação; médio**

Calcule o pullback de $z\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y + y\ \mathrm{d}z$ por $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ e integre de 0 a 1.

Exercício N186 **Consolidação; médio**

Para $r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, calcule $r^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$ e $r^*(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x)$. Compare com as componentes de $r_u \times r_v$.

Exercício N187 **Justificação; básico**

Integre $-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y$ usando $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 4\pi$. Explique por que essa parametrização conta duas voltas.

13.3. Variedades de dimensão zero

O caso de dimensão zero esclarece os sinais sem exigir integrais usuais. Cada ponto contribui com o valor da função, multiplicado por seu sinal. Esse mecanismo transforma a integral de uma derivada ao longo de um intervalo na diferença entre os extremos.

Definição 13.3

Uma **variedade orientada de dimensão** 0 **em** $\mathbb{R}^n$ é simplesmente um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, com a escolha do sinal + ou −. Uma 0-variedade orientada geral é um conjunto discreto de pontos, cada qual com um sinal. No caso compacto, há um número finito de pontos e a integral é uma soma finita.

Definição 13.4

Seja $M = +\{\mathbf{b}\} \cup -\{\mathbf{a}\}$ uma 0-variedade orientada, e seja ω uma forma de grau 0. Então

$$\int_M \omega = \omega(\mathbf{b}) - \omega(\mathbf{a}).$$

Observação 13.1

$-\mathbf{x}$ tem orientação oposta à de $+\mathbf{x}$, e

$$\int_{-\mathbf{x}} \omega = -\int_{+\mathbf{x}} \omega.$$

Exemplo 13.11

Seja $M = -\{(1,0,0)\} \cup +\{(1,2,3)\} \cup -\{(0,-2,0)\}$[a] uma 0-variedade orientada, e seja $\omega = x + 2y + z^2$. Então

$$\int_M \omega = -\omega(1,0,0) + \omega(1,2,3) - \omega(0,-2,0) = -1 + 14 - (-4) = 17.$$

[a] Não confunda, por exemplo, $-\{(1,0,0)\}$ com $-(1,0,0) = (-1,0,0)$. A primeira expressão significa que o ponto $(1,0,0)$ recebeu orientação negativa; a segunda significa que $(-1,0,0)$ é o inverso aditivo de $(1,0,0)$.

Exercícios

Exercício N188 **Consolidação; básico**

Integre $f(x,y) = x^2 - y$ sobre $+\{(1,2)\} \cup -\{(2,1)\} \cup +\{(0,-1)\}$.

Exercício N189 **Justificação; básico**

Determine os bordos orientados de $[a,b]$ e $[b,c]$ e mostre o cancelamento do ponto b.

Exercício N190 **Consolidação; básico**

Verifique $\int_{\partial\Gamma} f = f(B) - f(A)$ para um segmento de A a B e $f(x,y,z) = xy + z$.

13.4. Variedades de dimensão um

Para uma curva, a forma de grau um avalia a velocidade tangente e produz um integrando em uma variável. A orientação determina o sentido do percurso. Compare esse procedimento com a integral escalar em relação ao comprimento de arco, que usa o módulo da velocidade.

Definição 13.5

Uma **variedade orientada de dimensão** 1 **em** $\mathbb{R}^n$ é simplesmente uma curva suave orientada $\Gamma \in \mathbb{R}^n$, com orientação $+$ se a curva é percorrida no sentido de t crescente, ou com o sinal $-$ se é percorrida no sentido de t decrescente. Uma 1-variedade orientada geral é uma união de curvas orientadas.

Observação 13.2

A curva $-\Gamma$ tem orientação oposta à de Γ, e

$$\int_{-\Gamma} \omega = -\int_{\Gamma} \omega.$$

Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$, a forma clássica de escrever isso é

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Voltamo-nos agora para o problema de integrar formas de grau 1.

Exemplo 13.12

Calcule

$$\int_{\Gamma} xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$$

onde Γ é a parábola $y = x^2,\ x \in [-1, 2]$, orientada no sentido positivo.

Solução. Parametrizamos a curva por $x = t$, $y = t^2$. Então

$$xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = t^3\,\mathrm{d}t + (t+t^2)\,\mathrm{d}t^2 = (3t^3 + 2t^2)\,\mathrm{d}t,$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \int_{-1}^{2} (3t^3 + 2t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{69}{4}. \end{aligned}$$

O valor não depende da parametrização, desde que a orientação seja preservada. Por exemplo, também podemos usar

$$x = 3t - 1, \qquad y = (3t-1)^2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Como $\mathrm{d}x = 3\ \mathrm{d}t$,

$$xy\ \mathrm{d}x + (x+y)\ \mathrm{d}y = \left(9(3t-1)^3 + 6(3t-1)^2\right)\ \mathrm{d}t.$$

Portanto,

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 \left(9(3t-1)^3 + 6(3t-1)^2\right)\ \mathrm{d}t = \frac{69}{4},$$

como antes.

◁

Observação 13.3

Pode-se mostrar que, se duas parametrizações diferentes da mesma curva têm a mesma orientação, então suas integrais são iguais. Logo, basta encontrar uma parametrização adequada.

Exemplo 13.13

Calcule a integral de linha

$$\int_\Gamma y \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x + x \cos y\, \mathrm{d}y,$$

onde Γ é o segmento de reta de $(0,0)$ a $(1,1)$ no sentido positivo.

Solução. Essa reta tem equação $y = x$, portanto escolhemos a parametrização $x = y = t$. A integral é, assim,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x + x \cos y\, \mathrm{d}y &= \int_0^1 (t \operatorname{sen} t + t \cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= [t(\operatorname{sen} t - \cos t)]_0^1 - \int_0^1 (\operatorname{sen} t - \cos t)\, \mathrm{d}t \\ &= 2 \operatorname{sen} 1 - 1,\end{aligned}$$

após integração por partes.

◁

Exemplo 13.14

Calcule a integral de caminho

$$\int_\Gamma \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

ao redor do quadrado fechado $\Gamma = ABCD$, com $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ e $D = (1,-1)$, no sentido $ABCDA$.

Solução. Em AB, $y = 1$ e $\mathrm{d}y = 0$; em BC, $x = -1$ e $\mathrm{d}x = 0$; em CD, $y = -1$ e $\mathrm{d}y = 0$; e em DA, $x = 1$ e $\mathrm{d}x = 0$. Portanto, a integral é

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CD} \omega + \int_{DA} \omega \\
&= \int_1^{-1} \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^{-1} \frac{y-1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{y+1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\
&= 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\,\mathrm{arctg}\,x\big|_{-1}^{1} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

◁

Observação 13.4

Quando a integral percorre um caminho fechado, como no exemplo anterior, é usual usar o símbolo $\oint_\Gamma$ em vez de $\int_\Gamma$. O sentido positivo de integração é aquele em que, ao percorrer o caminho, a área delimitada pela curva fica à esquerda.

Exemplo 13.15

Calcule a integral de caminho

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}y + y^2\,\mathrm{d}x,$$

onde Γ é a elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ percorrida uma vez no sentido positivo.

Solução. Parametrizamos a elipse por $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $t \in [0, 2\pi]$. Observe que, ao percorrer essa curva fechada, a área da elipse fica à esquerda do caminho; portanto, essa parametrização percorre a curva no sentido positivo. Temos

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \omega &= \int_0^{2\pi} ((4\cos^2 t)(3\cos t) + (9\operatorname{sen}^2 t)(-2\operatorname{sen} t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (12\cos^3 t - 18\operatorname{sen}^3 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

◁

Definição 13.6

Seja Γ uma curva suave. A integral

$$\int_\Gamma f(\mathbf{x})\|\mathrm{d}\mathbf{x}\|$$

é chamada de **integral de caminho de f ao longo de Γ.**

Exemplo 13.16

Calcule $\displaystyle\int_\Gamma x\|\mathrm{d}\mathbf{x}\|$, onde Γ é o triângulo que começa em $A : (-1, -1)$, passa por $B : (2, -2)$ e termina em $C : (1, 2)$.

Solução. As retas que passam pelos pontos dados têm equações $L_{AB} : y = \dfrac{-x-4}{3}$ e $L_{BC} : y = -4x + 6$. Em L_{AB},

$$x\|\mathrm{d}\mathbf{x}\| = x\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = x\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{10}\,\mathrm{d}x}{3},$$

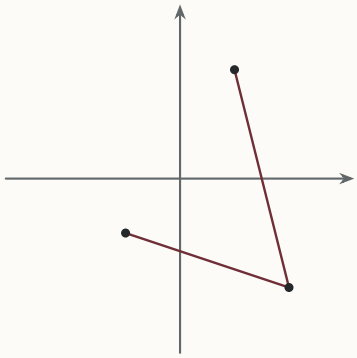
e em L_{BC}

$$x\|\mathrm{d}\mathbf{x}\| = x\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = x(\sqrt{1 + (-4)^2})\,\mathrm{d}x = x\sqrt{17}\,\mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x\|\mathrm{d}\mathbf{x}\| &= \int_{L_{AB}} x\|\mathrm{d}\mathbf{x}\| + \int_{L_{BC}} x\|\mathrm{d}\mathbf{x}\| \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{x\sqrt{10}\,\mathrm{d}x}{3} + \int_2^1 x\sqrt{17}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{3\sqrt{17}}{2}.\end{aligned}$$

◁



Exemplo 13.16.

Exercícios

Problema: [A2] Considere $\int_C x\,dx + y\,dy$ e $\int_C xy\|d\mathbf{x}\|$.

1. Calcule $\int_C x\,dx + y\,dy$, onde C é o caminho retilíneo que começa em $(-1,0)$, passa por $(0,1)$ e termina em $(1,0)$, parametrizando esse caminho. Calcule também $\int_C xy\|d\mathbf{x}\|$ usando essa parametrização.

2. Calcule $\int_C x\,dx + y\,dy$, onde C é o semicírculo que começa em $(-1,0)$, passa por $(0,1)$ e termina em $(1,0)$, parametrizando esse caminho. Calcule também $\int_C xy\|d\mathbf{x}\|$ usando essa parametrização.

Problema: [C1] Calcule $\int_\Gamma x\,dx + y\,dy$, onde Γ é o caminho definido pelo seguinte percurso, que começa em $O(0,0)$, segue em linha reta até $A\left(4\cos\frac{\pi}{6}, 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e continua em um arco de círculo até $B\left(4\cos\frac{\pi}{5}, 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)$.

Problema: [A1] Calcule $\oint_\Gamma z\,dx + x\,dy + y\,dz$, onde Γ é a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ com o plano $x+y=1$, percorrida no sentido positivo.

13.5. Formas fechadas e exatas

Uma forma exata possui uma primitiva; uma forma fechada satisfaz uma condição diferencial local. A identidade $d^2 = 0$ relaciona as duas noções, mas a passagem de fechada a exata também depende da geometria global do domínio.

Lema 13.5 — $d^2 = 0$

Se ω é uma forma diferencial de classe C^2, então

$$d(d\omega) = 0.$$

Demonstração. Por linearidade, basta considerar

$$\omega = a_I(x)\, \mathrm{d}x_I.$$

Então

$$\mathrm{d}\omega = \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I,$$

e

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_I.$$

Os termos com $i = j$ são nulos e os termos com $i \neq j$ cancelam aos pares, pois as derivadas mistas coincidem e $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$. ∎

Definição 13.7

Uma forma ω é **fechada** se $\mathrm{d}\omega = 0$. Uma k-forma ω, com $k \geq 1$, é **exata** se existe uma $(k-1)$-forma η tal que

$$\omega = \mathrm{d}\eta.$$

Pelo lema anterior, toda forma exata é fechada. A recíproca depende do domínio:

Teorema 13.6 — Lema de Poincaré

Em um domínio estrela-convexo, toda forma diferencial fechada de grau positivo é exata.

Demonstração construtiva para formas de grau um. Transladando o centro, suponha U estrela-convexo em relação à origem. Se $\alpha = \sum_i A_i(x)\, \mathrm{d}x_i$ é de classe C^1 e fechada, então $\partial_j A_i = \partial_i A_j$. Defina

$$F(x) = \int_0^1 \sum_i A_i(tx) x_i \, \mathrm{d}t.$$

O segmento tx permanece em U. Diferenciando sob a integral,

$$\begin{aligned}\partial_j F(x) &= \int_0^1 \left(A_j(tx) + t \sum_i x_i \partial_j A_i(tx) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(A_j(tx) + t \sum_i x_i \partial_i A_j(tx) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[t A_j(tx) \big] \, \mathrm{d}t = A_j(x).\end{aligned}$$

O termo em $t = 0$ é zero pela continuidade. Logo, $\mathrm{d}F = \alpha$. Isso demonstra o caso utilizado nas integrais de caminho. ∎

Para graus maiores, a construção análoga integra a forma contra a direção radial e define o operador de homotopia. A hipótese estrela-convexa garante novamente que os segmentos pertencem ao domínio.

Exemplo 13.17

A forma diferencial

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$$

é exata, pois

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right).$$

Exemplo 13.18

A forma diferencial

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

é exata, pois

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\,(xy)\,.$$

Exemplo 13.19

A forma diferencial

$$\frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$$

é exata, pois

$$\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\log_e(x^2+y^2)\right).$$

Observação 13.7

Se $\omega = \mathrm{d}F$, então $\mathrm{d}\omega = 0$. Em domínios estrela-convexos, o Lema de Poincaré garante a recíproca: toda forma fechada de grau positivo é exata.

Exemplo 13.20

Determine se a forma diferencial

$$\omega = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y$$

é exata.

Solução. Suponha que exista uma função F tal que

$$\mathrm{d}F = \omega.$$

Pela regra da cadeia,

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Isso exige que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}.$$

Aqui podemos integrar a primeira ou a segunda expressão. Como integrar a segunda expressão (em relação a y) é mais simples, obtemos

$$F(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} + \phi(x),$$

onde $\phi(x)$ é uma função que depende apenas de x. Para determiná-la, derivamos a expressão obtida para F em relação a x e encontramos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} + \phi'(x).$$

Comparando com nossa primeira expressão para $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, obtemos

$$\phi'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

isto é,

$$\phi(x) = -\frac{1}{1+x^2} + c,$$

onde c é uma constante. Logo, tomamos

$$F(x,y) = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + c.$$

◁

Exemplo 13.21

Existe uma função continuamente diferenciável tal que

$$\mathrm{d}F = \omega = y^2z^3\,\mathrm{d}x + 2xyz^3\,\mathrm{d}y + 3xy^2z^2\,\mathrm{d}z \ ?$$

Solução. Temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= (2yz^3\,\mathrm{d}y + 3y^2z^2\,\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}x \\ &\quad +(2yz^3\,\mathrm{d}x + 2xz^3\,\mathrm{d}y + 6xyz^2\,\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y \\ &\quad +(3y^2z^2\,\mathrm{d}x + 6xyz^2\,\mathrm{d}y + 6xy^2z\,\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como os coeficientes são polinomiais e $\mathbb{R}^3$ é estrela-convexo, o Lema de Poincaré mostra que essa forma é exata em $\mathbb{R}^3$. Assim, escreva

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z = y^2z^3\,\mathrm{d}x + 2xyz^3\,\mathrm{d}y + 3xy^2z^2\,\mathrm{d}z.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2z^3 \Longrightarrow F = xy^2z^3 + a(y,z), \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2xyz^3 \Longrightarrow F = xy^2z^3 + b(x,z), \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 3xy^2z^2 \Longrightarrow F = xy^2z^3 + c(x,y), \end{aligned}$$

Comparando essas três expressões para F, obtemos $F(x,y,z) = xy^2z^3$. ◁

Temos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 13.8

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Suponha que $\omega = \mathrm{d}F$ seja uma forma exata e que Γ seja um caminho em U, com ponto inicial A e ponto final B. Então

$$\int_\Gamma \omega = \int_A^B \mathrm{d}F = F(B) - F(A).$$

Em particular, se Γ é um caminho fechado, então

$$\oint_\Gamma \omega = 0.$$

Demonstração do Teorema Fundamental para formas exatas. Se $\gamma : [a,b] \to U$ parametriza o caminho, a regra da cadeia fornece $\gamma^*(\mathrm{d}F) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)\,\mathrm{d}t$. Integrar dá $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Para um caminho suave por partes, aplicamos a identidade a cada trecho; os valores nos pontos de junção cancelam. Se o caminho é fechado, os extremos coincidem. ∎

Exemplo 13.22

Calcule a integral

$$\oint_\Gamma \frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

onde Γ é o polígono fechado com vértices $A = (1,0)$, $B = (5,0)$, $C = (7,2)$, $D = (3,2)$ e $E = (1,1)$, percorrido na ordem $ABCDEA$.

Solução. Observe que

$$\mathrm{d}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0,$$

e, de fato,

$$\omega = \mathrm{d}\log(x^2+y^2)$$

no domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Como o polígono está contido em $x > 0$, a forma é exata em uma vizinhança do caminho e, pelo Teorema 13.8, a integral é 0. ◁

Exemplo 13.23

Calcule a integral de caminho

$$\oint_{\Gamma} (x^2 - y)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x)\,\mathrm{d}y,$$

onde Γ é uma curva fechada dada por $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, percorrida uma vez no sentido positivo.

Solução. Como

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x).$$

Logo, a forma é fechada em $\mathbb{R}^2$ e, pelo Lema de Poincaré, é exata. Consequentemente, a integral ao longo da componente fechada indicada por Γ é 0. ◁

Exercícios

Exercício N191 **Consolidação; médio**

Determine uma primitiva de $(2xy+z)\ \mathrm{d}x+x^2\ \mathrm{d}y+x\ \mathrm{d}z$ e sua integral de $(0,0,0)$ até $(1,2,3)$.

Exercício N192 **Justificação; médio**

No plano sem a origem, mostre que $(-y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y)/(x^2+y^2)$ é fechada. Integre no círculo unitário e conclua que não é exata nesse domínio.

Exercício N193 **Consolidação; médio**

Aplique a construção radial à forma $(2x+y)\ \mathrm{d}x+(x+4y)\ \mathrm{d}y$ e confira a primitiva por diferenciação.

13.6. Variedades de dimensão dois

No plano, uma forma de grau dois combina um coeficiente com uma área orientada. Na orientação padrão, o cálculo coincide com a integral dupla usual; inverter a orientação altera o sinal da integral da forma.

Definição 13.8

Uma região $D \subseteq \mathbb{R}^2$ recebe a **orientação padrão** quando escolhemos a forma de área $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ como positiva. A orientação oposta corresponde a $-\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Se D possui fronteira, a orientação padrão induz na fronteira o sentido anti-horário.

Observação 13.9

A região $-D$ tem orientação oposta à de D, e

$$\int_{-D} \omega = -\int_{D} \omega.$$

Frequentemente escreveremos $\int_D f(x,y)\ \mathrm{d}A$, em que $\mathrm{d}A$ é a medida positiva de área. Ela coincide com a integral da forma $f\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ na orientação padrão. A medida $\mathrm{d}A$ não troca de sinal quando a orientação é invertida.

Observação 13.10

Nesta seção, salvo indicação em contrário, escolheremos a orientação positiva para as regiões consideradas. Isso corresponde ao uso da forma de área $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$, a integral

$$\int_D f\ \mathrm{d}A$$

é a integral dupla usual de f sobre D. Em particular,

$$\int_D \mathrm{d}A$$

é a área de D.

Exercícios

Exercício N194 **Justificação; médio**

Integre $(x+y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ no triângulo $x, y \geq 0$, $x+y \leq 2$, com as duas orientações. Compare com a integral da densidade positiva $(x+y)\,\mathrm{d}A$.

Exercício N195 **Justificação; básico**

Faça $x = v$, $y = u$ no quadrado unitário. Explique o sinal do pullback de $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ e o valor da área geométrica.

Exercício N196 **Aplicação; básico**

Calcule a massa da lâmina no quadrado unitário com densidade $1 + x$. Explique por que inverter sua orientação não muda a massa.

13.7. Variedades de dimensão três

Em três dimensões, a forma de grau máximo registra um volume orientado. O determinante jacobiano aparece com seu sinal no pullback. Para calcular massa ou volume geométrico, usamos a medida positiva de volume.

Definição 13.9

Uma região $V \subseteq \mathbb{R}^3$ recebe a **orientação padrão** quando $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ é positiva. A orientação oposta troca o sinal dessa forma. Se V possui fronteira, a orientação padrão de V induz em ∂V a normal exterior.

Observação 13.11

A região $-M$ tem orientação oposta à de M, e

$$\int_{-M}\omega = -\int_{M}\omega.$$

Frequentemente escreveremos $\int_M f\,\mathrm{d}V$, em que $\mathrm{d}V$ é a medida positiva de volume. Ela coincide com a integral da forma $f\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ na orientação padrão; na oposta, apenas a integral da forma troca de sinal.

Observação 13.12

Nesta seção, salvo indicação em contrário, escolheremos a orientação positiva para as regiões consideradas. Isso corresponde ao uso da forma de volume $dx \wedge dy \wedge dz$.

Seja $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Dada uma função $f : V \to \mathbb{R}$, a integral

$$\int_V f \, dV$$

é a integral tripla usual de f sobre V. Em particular, $\int_V dV$ é o volume geométrico de V; já $\int_V dx \wedge dy \wedge dz$ é seu volume orientado.

Exemplo 13.24

Calcule

$$\int_{[0,1]^3} x^2 y e^{xyz} \, dV.$$

Solução. A integral é

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y e^{xyz} \, dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 x(e^{xy} - 1) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (e^x - x - 1) \, dx \\ &= e - \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

◁

Exercícios

Exercício N197 **Consolidação; básico**

Integre $(x+y+z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ no cubo unitário nas orientações padrão e oposta.

Exercício N198 **Justificação; básico**

Para $(x,y,z)=(u,w,v)$, compare o pullback da forma de volume com o fator de mudança de variáveis em uma integral de massa.

Exercício N199 **Aplicação; médio**

Calcule a massa do tetraedro $x,y,z\geq 0$, $x+y+z\leq 1$, com densidade $1+x$. Compare com a integral da forma de massa na orientação oposta.

13.8. Integrais de superfície

Uma superfície em $\mathbb{R}^3$ admite duas escolhas de normal quando é orientável. A integral de uma 2-forma depende dessa escolha, enquanto a integral escalar em relação à área usa uma medida positiva.

Definição 13.10

Uma superfície suave $\Sigma\subseteq\mathbb{R}^3$ é **orientada** quando se escolhe continuamente um dos dois vetores normais unitários em cada ponto. Para superfícies fechadas, é comum escolher a normal exterior; para superfícies abertas, a orientação deve ser especificada explicitamente.

Observação 13.13

A superfície $-\Sigma$ tem orientação oposta à de Σ, e

$$\int_{-\Sigma}\omega=-\int_{\Sigma}\omega.$$

Observação 13.14

A ordem cíclica $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$ é compatível com a orientação padrão do espaço. Ela não escolhe a normal de uma superfície: essa orientação deve ser especificada. Para $\beta = F_1\ dy \wedge dz + F_2\ dz \wedge dx + F_3\ dx \wedge dy$,

$$r^*\beta = \mathbf{F}(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v)\ du \wedge dv.$$

Assim, $\int_\Sigma \beta$ é o fluxo na direção de $r_u \times r_v$.

Definição 13.11

Seja $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$ uma parametrização regular de uma superfície e seja $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ contínua. A integral escalar de superfície é

$$\int_\Sigma f\ dS = \int_D f(\mathbf{r}(u,v)) \|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|\ du\ dv.$$

Essa integral não depende da orientação; a orientação passa a importar quando integramos uma 2-forma ou um fluxo vetorial. Quando não houver risco de confusão, escreveremos

$$\|d^2\mathbf{x}\| := \|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}\|\ du\ dv = dS.$$

Exemplo 13.25

Calcule $\int_\Sigma z\|d^2\mathbf{x}\|$, onde Σ é a superfície externa da seção do paraboloide $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$.

Solução. Parametrizamos o paraboloide da seguinte forma. Sejam $x = u, y = v, z = u^2 + v^2$. Observe que o domínio D de Σ é o disco unitário $u^2 + v^2 \leq 1$. Temos

$$dx \wedge dy = du \wedge dv,$$

$$dy \wedge dz = -2u\, du \wedge dv,$$

$$dz \wedge dx = -2v\, du \wedge dv,$$

e, portanto,

$$\|d^2\mathbf{x}\| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\, du \wedge dv.$$

Agora,

$$\int_\Sigma z\|\mathrm{d}^2\mathbf{x}\| = \int_D (u^2+v^2)\sqrt{1+4u^2+4v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Para calcular essa última integral, usamos coordenadas polares; assim,

$$\begin{aligned}\int_D (u^2+v^2)\sqrt{1+4u^2+4v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}+\frac{1}{5}).\end{aligned}$$

◁

Exemplo 13.26

Calcule a área da parte do cilindro $x^2+y^2=2y$ contida na esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Solução. Temos

$$x^2+y^2=2y \iff x^2+(y-1)^2=1.$$

Parametrizamos o cilindro tomando $x=\cos u$, $y-1=\operatorname{sen} u$, e $z=v$. Portanto,

$$\mathrm{d}x=-\operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}y=\cos u\,\mathrm{d}u,\ \mathrm{d}z=\mathrm{d}v,$$

portanto

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0, \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\cos u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v,$$

e assim

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}^2\mathbf{x}\| &= \sqrt{(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 u+\operatorname{sen}^2 u}\ \mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v \\ &= \mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

O cilindro e a esfera se intersectam quando $x^2+y^2=2y$ e $x^2+y^2+z^2=4$, isto é, quando $z^2=4-2y$, ou seja, $v^2=4-2(1+\operatorname{sen} u)=2-2\operatorname{sen} u$. Como o parâmetro u percorre toda a circunferência, $0\le u\le 2\pi$. Portanto,

$$\operatorname{area}(\Sigma)=\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2-2\operatorname{sen} u}\ \mathrm{d}u.$$

Usando $1-\operatorname{sen} u=(\operatorname{sen}(u/2)-\cos(u/2))^2$, obtemos

$$\operatorname{area}(\Sigma)=16.$$

◁

Exemplo 13.27

Calcule

$$\int_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z^2 - zx)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

em que Σ é o lado superior do triângulo com vértices em $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,4)$.

Solução. Observe que o plano que passa pelos três pontos dados tem equação $2x + 2y + z = 4$. Projetando esse plano sobre os planos coordenados, obtemos

$$\int_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^4 \int_0^{2-z/2} (2 - y - z/2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3},$$

$$\int_\Sigma (z^2 - zx)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (z^2 - zx)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 8,$$

$$-\int_\Sigma xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^2 \int_0^{2-y} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{3},$$

e, portanto,

$$\int_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z^2 - zx)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 10.$$

◁

Exercícios

Problema: [A1] Calcule $\displaystyle\int_\Sigma y\|\mathrm{d}^2\mathbf{x}\|$, onde Σ é a superfície $z = x + y^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

Problema: [A1] Considere o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule a área da parte do cone situada entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

Problema: [A1] Calcule $\int_\Sigma x^2 \|\mathrm{d}^2\mathbf{x}\|$, onde Σ é a superfície da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema: [A1] Calcule $\int_S z\|\mathrm{d}^2\mathbf{x}\|$ sobre a superfície cônica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ entre $z = 0$ e $z = 1$.

Problema: [J2] Você passa um ovo perfeitamente esférico por um fatiador, obtendo n fatias de alturas iguais, mas se esquece de descascá-lo antes! Mostre que a quantidade de casca de ovo em cada fatia é a mesma. Seu argumento deve usar integrais de superfície.

Problema: [A1] Calcule

$$\int_\Sigma xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

em que Σ é o lado superior da região triangular do plano $2x + 2y + z = 6$ limitado pelo primeiro octante.

Exemplo 13.28 — Fluxo por uma tampa triangular (nível difícil)

A tampa $z = 1 - x - y$, $x, y \geq 0$, $x + y \leq 1$, é orientada para cima. Para $\mathbf{F} = (x, y, z)$, calcule o fluxo por meio de $\beta = x\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ e confira fechando a superfície.

Solução. Use $r(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ no triângulo D. Temos $r_u \times r_v = (1, 1, 1)$, portanto a orientação é a desejada. Como $\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}u - \mathrm{d}v$,

$$r^*\beta = (u + v + 1 - u - v)\ \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

O fluxo vale a área de D, isto é, $1/2$. Por outro lado, $\mathrm{d}\beta = 3\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. O tetraedro limitado pela tampa e pelos planos coordenados tem volume $1/6$, e seu fluxo exterior total é $3/6 = 1/2$. Nas três faces coordenadas, a componente normal de $\mathbf{F}$ é zero. Todo o fluxo passa pela tampa, confirmando o cálculo por pullback. ◁

Exercícios de ampliação

Exercício A023 **Aplicação; médio**

Um meio tem condutividade térmica $K = \operatorname{diag}(2, 1, 3)$ e temperatura normalizada $T = T_0 - x^2 - y^2 - z^2$. Calcule $q = -K\nabla T$, sua forma de fluxo e sua derivada exterior. Determine o fluxo exterior pela esfera unitária e a fonte estacionária s no balanço $\nabla \cdot q = s$.

13.9. Teoremas de Green, Stokes e Gauss

13.9.1. Uma partição da unidade em um intervalo

Antes de usar várias cartas na demonstração global de Stokes, veremos como dividir uma integral em contribuições locais sem contar as sobreposições duas vezes.

Exemplo 13.29 — Duas funções que somam uma

Construa uma partição suave da unidade no intervalo $[0, 1]$, subordinada aos abertos $U_1 = (-\infty, 1)$ e $U_2 = (0, +\infty)$. Explique como ela divide uma integral e por que suas derivadas se cancelam.

Solução. Use a função suave

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Todas as suas derivadas à direita de zero tendem a zero: elas têm a forma de um polinômio em $1/t$ multiplicado por $e^{-1/t}$. Assim a extensão por zero é suave. Defina

$$a(x) = \eta(2/3 - x), \quad b(x) = \eta(x - 1/3), \quad \chi_1 = \frac{a}{a+b}, \quad \chi_2 = \frac{b}{a+b}.$$

O denominador é positivo em toda a reta: para $x \le 1/3$, $a > 0$; para $x \ge 2/3$, $b > 0$; entre esses valores, ambos são positivos. As funções são suaves, não negativas, e $\chi_1 + \chi_2 = 1$. O suporte de χ_1 está em $(-\infty, 2/3] \subset U_1$, e o de χ_2 em $[1/3, +\infty) \subset U_2$.

Para uma forma $\omega = f(x)dx$ no intervalo,

$$\int_0^1 \omega = \int_0^1 \chi_1 \omega + \int_0^1 \chi_2 \omega.$$

Na sobreposição, os pesos dividem a contribuição original; não a duplicam. Além disso, $d\chi_1 + d\chi_2 = 0$. Para uma forma de qualquer grau, a regra de Leibniz dá

$$d(\chi_1\omega) + d(\chi_2\omega) = d\omega.$$

Essa é a identidade usada para somar provas locais de Stokes. A construção geral usa mais cartas e funções com o mesmo papel; este exemplo explica o mecanismo, sem substituir o teorema de existência de partições da unidade em variedades suaves.◁

Os teoremas de Green, Stokes e Gauss expressam a mesma relação entre uma região e seu bordo. O grau da forma determina qual versão clássica obtemos. A orientação do bordo é induzida pela orientação da região; escolher os dois sinais independentemente pode produzir uma resposta incorreta.

Estamos agora em condições de enunciar o teorema geral de Stokes.

Teorema 13.15 — Teorema geral de Stokes

Seja M uma variedade orientada compacta de dimensão k, com bordo ∂M orientado pela convenção induzida, e seja ω uma $(k-1)$-forma suave definida em uma vizinhança de M. Então

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega.$$

Demonstração. Comecemos em uma carta orientada de dimensão k, escrevendo

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} a_i(u)\ \mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}u_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_k.$$

O chapéu indica o fator omitido. Então

$$\mathrm{d}\omega = \sum_i (-1)^{i-1} \partial_i a_i\ \mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_k.$$

Para uma forma com suporte compacto em uma carta interior, a integral de cada derivada é zero, pelo Teorema Fundamental e por Fubini. Em uma carta de bordo, usamos o modelo $u_k \geq 0$. Os termos com $i < k$ continuam com integral zero, e

$$\int_0^{\infty} (-1)^{k-1} \partial_k a_k\ \mathrm{d}u_k = (-1)^k a_k(u_1, \ldots, u_{k-1}, 0).$$

A normal exterior é $-\mathbf{e}_k$. Pela convenção de colocar essa normal primeiro, a orientação induzida tem sinal $(-1)^k$ relativamente a $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1})$. A expressão obtida é, portanto, o integrando da integral no bordo.

Para passar ao caso geral, escolha uma partição suave da unidade $\{\chi_\alpha\}$ subordinada a cartas orientadas e aplique a identidade local a $\chi_\alpha\omega$. Somando, $\sum_\alpha \chi_\alpha = 1$ e $\sum_\alpha \mathrm{d}\chi_\alpha = 0$ dão $\sum_\alpha \mathrm{d}(\chi_\alpha\omega) = \mathrm{d}\omega$. As integrais de bordo também somam $\int_{\partial M}\omega$. A compacidade permite uma cobertura finita, e o pullback comuta com a derivada exterior. Isso prova a identidade. ∎

Em $\mathbb{R}^2$, se ω é uma 1-forma, esse resultado recebe o nome de **Teorema de Green.**

Exemplo 13.30

Calcule $\oint_C (x - y^3)\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 1$, percorrido no sentido anti-horário.

Solução. Usaremos primeiro o Teorema de Green e depois calcularemos a integral diretamente. Temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(x - y^3) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}(x^3) \wedge \mathrm{d}y \\ &= (\mathrm{d}x - 3y^2\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (3x^2\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}y \\ &= (3y^2 + 3x^2)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

A região M é a área limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 1$. Logo, pelo Teorema de Green e usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned}\oint_C (x - y^3)\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y &= \int_M (3y^2 + 3x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 3\rho^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Alternativamente: Podemos calcular essa integral diretamente, recorrendo novamente às coordenadas polares.

$$\begin{aligned}\oint_C (x - y^3)\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \operatorname{sen}^3\theta)(-\operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta + (\cos^3\theta)(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Para calcular a última integral, observe que $1 = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^2 = \operatorname{sen}^4\theta +$

$2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta$, portanto a integral é igual a

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\quad = \int_0^{2\pi} (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

◁

Em geral, seja

$$\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y$$

uma 1-forma em $\mathbb{R}^2$. Então, escrevendo $f_y = \partial f/\partial y$ e $g_x = \partial g/\partial x$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y \\ &= f_y\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + g_x\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (g_x - f_y)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Os termos com diferenciais repetidos se anularam. Na orientação padrão de M, isso fornece Green na forma clássica:

$$\int_{\partial M} f\ \mathrm{d}x + g\ \mathrm{d}y = \iint_M (g_x - f_y)\ \mathrm{d}A.$$

Em $\mathbb{R}^3$, se ω é uma 2-forma, o teorema acima recebe o nome de **Gauss**, ou **Teorema da Divergência**.

Exemplo 13.31

Calcule $\displaystyle\int_S (x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde S é a superfície da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

e a direção positiva é a normal exterior.

Solução. A região M é o interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= (\mathrm{d}x - \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

A integral se torna

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \frac{4\pi}{3}(27)\\ &= 36\pi.\end{aligned}$$

Esse valor também pode ser obtido por uma parametrização direta da esfera. ◁

Em geral, seja

$$\omega = f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + g(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + h(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

uma 2-forma em $\mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f(x,y,z)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}g(x,y,z)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}h(x,y,z)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}g(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}g(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z}g(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}h(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}h(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial}{\partial z}h(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}g(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}h(x,y,z)\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

o que fornece Gauss na forma clássica:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial M} f\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + g\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + h\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &\qquad = \iiint_M (f_x + g_y + h_z)\ \mathrm{d}V.\end{aligned}$$

Usando a notação clássica, se

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} f(x,y,z)\\ g(x,y,z)\\ h(x,y,z)\end{pmatrix}, \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix},$$

então

$$\int_M (\nabla\cdot\mathbf{a})\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M}\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

O Teorema de Stokes clássico ocorre quando ω é uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 13.32

Calcule $\oint_C y\,dx + (2x - z)\,dy + (z - x)\,dz$, onde C é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $z = 1$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} d\omega &= (dy) \wedge dx + (2\,dx - dz) \wedge dy + (dz - dx) \wedge dz \\ &= -dx \wedge dy + 2\,dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx \\ &= dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Como em C temos $z = 1$, a superfície Σ sobre a qual integramos é o interior do círculo $x^2 + y^2 + 1 = 4$, isto é, $x^2 + y^2 = 3$. Além disso, $z = 1$ implica $dz = 0$ e, portanto,

$$\int_\Sigma d\omega = \int_\Sigma dx\,dy.$$

Como essa é simplesmente a área da região circular $x^2 + y^2 \leq 3$, a integral vale

$$\int_\Sigma dx\,dy = 3\pi.$$

◁

Em geral, seja

$$\omega = f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy + h(x, y, z)\,dz$$

uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$. Então

$$\begin{aligned} d\omega &= df(x, y, z) \wedge dx + dg(x, y, z) \wedge dy + dh(x, y, z) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)\,dy + \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)\,dz\right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y, z)\,dy + \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z)\,dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z)\,dx + \frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z)\,dy + \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z)\,dz\right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} h(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z)\right) dy \wedge dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} h(x, y, z)\right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z)\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

o que fornece Stokes na forma clássica:

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z &= \int_M \mathrm{d}\omega,\\ \mathrm{d}\omega &= (h_y - g_z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ &\quad + (f_z - h_x)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\ &\quad + (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Aqui M é a superfície orientada e seu bordo recebe a orientação induzida.

Usando a notação clássica, se

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} f(x,y,z)\\ g(x,y,z)\\ h(x,y,z)\end{pmatrix},\quad \mathrm{d}\mathbf{r} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix},\quad \mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{pmatrix},$$

então

$$\int_M (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\partial M}\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Exercícios

Problema: [C1] Calcule $\oint_C x^3 y\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$, onde C é a fronteira do quadrado com vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$, percorrida no sentido anti-horário.

Problema: [A2] Considere o triângulo $\triangle$ com vértices $A : (0,0)$, $B : (1,1)$, $C : (-2,2)$.

1. Se L_{PQ} denota a equação da reta que liga P a Q, determine L_{AB}, L_{AC} e L_{BC}.
2. Calcule
$$\oint_{\triangle} y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$$
3. Calcule
$$\int_D (1-2y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
, onde D é o interior de $\triangle$.

Problema: [J2] Os problemas 1 a 4 referem-se à forma diferencial

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + 2z\,dx \wedge dy,$$

e ao sólido M cujos bordos são o paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 1$ e ao disco $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. A superfície ∂M do sólido é orientada positivamente considerando as normais exteriores.

1 Prove que $d\omega = 4\,dx \wedge dy \wedge dz$.

2 Prove que, em coordenadas cartesianas,

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{1-x^2-y^2} 4\ dz\ dy\ dx.$$

3 Prove que, em coordenadas cilíndricas, $\int_M d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} 4r\,dz\,dr\,d\theta$.

4 Prove que $\int_{\partial M} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + 2z\,dx\,dy = 2\pi$.

Problema: [J2] Os problemas 1 a 4 referem-se à caixa

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2\},$$

a face superior da caixa

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ z = 2\},$$

ao bordo da caixa sem a face superior $S = \partial M \setminus U$, e à forma diferencial

$$\omega = (\operatorname{arctg} y - x^2)\,dy \wedge dz + (\cos x \operatorname{sen} z - y^3)\,dz \wedge dx + (2zx + 6zy^2)\,dx \wedge dy.$$

1 Prove que $d\omega = 3y^2\,dx \wedge dy \wedge dz$.

2 Prove que $\int_{\partial M} (\operatorname{arctg} y - x^2)\,dy\,dz + (\cos x \operatorname{sen} z - y^3)\,dz\,dx + (2zx + 6zy^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^1 \int_0^1 3y^2\,dx\,dy\,dz = 2$. Aqui o bordo da caixa é orientado positivamente considerando as normais exteriores.

3 Prove que a integral na face superior da caixa é $\int_U (\operatorname{arctg} y - x^2)\,dy\,dz + (\cos x \operatorname{sen} z - y^3)\,dz\,dx + (2zx + 6zy^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 4x + 12y^2\,dx\,dy = 6$.

4 Prove que a integral na caixa sem a face superior é $\int_{\partial M \setminus U} (\operatorname{arctg} y - x^2)\,dy\,dz + (\cos x \operatorname{sen} z - y^3)\,dz\,dx + (2zx + 6zy^2)\,dx\,dy = -4$.

Problema: [J2] Os problemas 1 a 3 referem-se a uma superfície triangular T em $\mathbb{R}^3$ e a uma forma diferencial ω. Os vértices de T são $A(6,0,0)$, $B(0,12,0)$, e $C(0,0,3)$. O bordo do triângulo ∂T é orientado positivamente começando em A, seguindo até B, depois até C e terminando novamente em A. A superfície T é orientada positivamente considerando o topo do triângulo visto de um ponto muito acima dele. A forma diferencial é

$$\omega = (2xz + \operatorname{arctg} e^x)\,\mathrm{d}x + (xz + (y+1)^y)\,\mathrm{d}y + \left(xy + \frac{y^2}{2} + \log(1+z^2)\right)\mathrm{d}z.$$

1 Prove que a equação do plano que contém o triângulo T é $2x + y + 4z = 12$.

2 Prove que $\mathrm{d}\omega = y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (2x - y)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

3 Prove que a circulação da forma

$$\alpha = (2xz + \operatorname{arctg} e^x)\ \mathrm{d}x + (xz + (y+1)^y)\ \mathrm{d}y + \left(xy + \frac{y^2}{2} + \log(1+z^2)\right)\mathrm{d}z$$

é dada por

$$\int_{\partial T} \alpha = \int_0^3 \int_0^{12-4z} y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z + \int_0^6 \int_0^{3-x/2} 2x\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x = 108.$$

Problema: [J2] Use o Teorema de Green para provar que

$$\int_\Gamma (x^2 + 2y^3)\,\mathrm{d}y = 16\pi,$$

em que Γ é o círculo $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Prove também o resultado diretamente usando uma integral de caminho.

Problema: [J2] Seja Γ a curva de interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 = 0$, orientada no sentido horário quando vista da origem. Use o Teorema de Stokes para provar que

$$\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = -2\pi\sqrt{2}.$$

Prove isso diretamente parametrizando o bordo da superfície e calculando a integral de caminho.

Problema: [A2] Use o Teorema de Green para calcular

$$\oint_C (x^3 - y^3)\,\mathrm{d}x + (x^3 + y^3)\,\mathrm{d}y,$$

em que C é o bordo, orientado positivamente, da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 2$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Exercícios de ampliação

Exercício A020 Justificação; médio

Na partição da unidade construída no texto, prove $\chi_1(1 - x) = \chi_2(x)$ e use essa simetria para determinar $\int_0^1 \chi_1(x)dx$ e $\int_0^1 \chi_2(x)dx$.

Exercício A021 Justificação; médio

Para a mesma partição, vista como funções de x em $\mathbb{R}^2$, tome $\omega = x\,dy$. Calcule $d(\chi_i\omega)$ e confira explicitamente que a soma é $d\omega$, inclusive na região de sobreposição.

Referências Bibliográficas

[1] McLoughlin, Peter F. *When Does a Cross Product on Rn Exist?* 2012. arXiv:1212.3515.

[2] Hoel, Paul G.; Port, Sidney C.; Stone, Charles J. *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Mifflin, 1971.

Histórico

Estas notas tiveram origem em um curso de Cálculo Vetorial e foram construídas a partir do código-fonte LaTeX de *Multivariable and Vector Calculus*, de David Santos. Ao longo de seu desenvolvimento, o texto incorporou também exemplos e figuras de *Vector Calculus*, de Michael Corral, além de material sobre tensores inspirado em *Linear Algebra via Exterior Products*, de Sergei Winitzki, e em *Introduction to Tensor Calculus*, de Taha Sochi. A disponibilidade dessas obras sob os termos da Licença GNU de Documentação Livre tornou possível essa construção e suas sucessivas transformações.

A primeira versão das notas, publicada em fevereiro de 2017 como versão 0.5, estabeleceu a estrutura inicial do texto. Em maio do mesmo ano, a versão 0.6 representou uma revisão mais ampla, com o objetivo de tornar a exposição mais coesa. A versão 0.7, publicada em abril de 2018, acrescentou os capítulos de Integrais Múltiplas e Integração de Formas, além de numerosas correções, novos exemplos e novas figuras. Em maio de 2018, a versão 0.8 ampliou o conjunto de exercícios e soluções e incorporou novas revisões em diferentes capítulos.

A edição de 2026 retoma o projeto em escala mais ampla, sob o título *Cálculo Vetorial e Análise Tensorial*. O texto foi traduzido, reorganizado e revisto matematicamente, com uniformização da notação, modernização editorial, revisão de figuras e manutenção do código LaTeX. O trabalho foi realizado por Daniel Miranda, com colaboração editorial de Soleira — ChatGPT (OpenAI), GPT-5.6 Sol.

Em setembro de 2026, foi realizada uma revisão dos treze capítulos ativos, com transições entre tópicos, explicitação de hipóteses, aperfeiçoamento de demonstrações e soluções e inclusão de listas de exercícios nas seções que não as possuíam. Os capítulos de limites, diferenciação e integrais múltiplas receberam exemplos resolvidos adicionais, com modelos aplicados e problemas de dificuldade média e alta. Também foram corrigidos sinais, índices, fórmulas e referências internas.

Uma segunda etapa da revisão de setembro de 2026 acrescentou um gabarito comentado dos 214 exercícios novos, com enunciados e soluções nos ambientes Exercise e Answer, e mais 24 exercícios de ampliação resolvidos. A exposição de tensores em coordenadas foi desenvolvida com comparação de mudanças de base, métrica, contrações e derivada covariante euclidiana. Foram incluídos roteiros de leitura, quadros de notação, comparações de parametrizações e métodos de integração, e um exemplo de partição da unidade. O produto exterior foi colocado antes da integração de formas. Os capítulos, demonstrações, exemplos e exercícios anteriores foram preservados, com correções pontuais e classificação didática dos exercícios.

Gabarito comentado

Este gabarito reúne as soluções dos 214 exercícios N001–N214 e dos 24 exercícios de ampliação A001–A024, na ordem dos capítulos do livro. Os códigos permitem localizar o enunciado sem depender da paginação. Cada código no título da resposta é um link para o exercício. As hipóteses, a escolha do método e as conferências fazem parte da solução.

Capítulo 1: Vetores em Dimensões Superiores

Seção 1.1: Espaços Vetoriais

Solução comentada — N001

Ponha $v = (3, -1, 2)$ e $d = (1, 2, 2)$. Então $\|v\| = \sqrt{14}$, e seu versor é $v/\sqrt{14}$. Como $v \cdot d = 5$ e $\|d\|^2 = 9$, a projeção vetorial é

$$\operatorname{proj}_d v = \frac{v \cdot d}{d \cdot d} d = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right).$$

A componente escalar na direção do versor $d/3$ é $5/3$. Não confunda essa componente com o vetor projetado. A diferença $v - \operatorname{proj}_d v$ tem produto interno zero com d.

Solução comentada — N002

A normal é $n = (2, -1, 2)$, com $\|n\| = 3$. Procuramos $Q = P - tn$ no plano. Como $n \cdot P = 6$, a condição $n \cdot Q = 3$ dá $6 - 9t = 3$, logo $t = 1/3$. Portanto,

$$Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right), \qquad d(P, \text{plano}) = \|P - Q\| = 1.$$

Para qualquer outro ponto R do plano, $Q - R$ é ortogonal a $P - Q$. Pelo teorema de Pitágoras, $\|P - R\|^2 = 1 + \|Q - R\|^2$, o que prova a minimalidade e a unicidade de Q.

Solução comentada — N003

O trabalho é $F \cdot s = 8 - 3 = 5$ J. Como $s \cdot s = 9$, obtemos

$$F_{\parallel} = \frac{5}{9}(2, -1, 2) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{10}{9}\right), \qquad F_{\perp} = \left(\frac{26}{9}, \frac{32}{9}, -\frac{10}{9}\right).$$

As componentes são medidas em newtons. Conferimos $F_{\perp} \cdot s = 0$: apenas a componente longitudinal contribui para o trabalho nesse deslocamento.

Solução comentada — N004

Da desigualdade triangular aplicada a $x = (x - y) + y$, segue $\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$. Trocando x e y, obtemos a desigualdade oposta, portanto

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|.$$

Em Cauchy–Schwarz, para $y \neq 0$, a igualdade equivale a $\|x - ((x \cdot y)/\|y\|^2)y\|^2 = 0$, isto é, x ser múltiplo de y. Se algum vetor é zero, também há igualdade. Assim, o critério completo é a dependência linear do par.

Seção 1.2: Bases e Mudança de Base

Solução comentada — N005

As matrizes das bases são $B_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. A mudança pedida é

$$P_{F \leftarrow E} = B_F^{-1} B_E = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Logo $[v]_F = P_{F \leftarrow E}(2, -3)^T = (-7/2, 5/2)^T$. Na base canônica, tanto $2(1,1) - 3(1,-1)$ quanto $(-7/2)(1,0) + (5/2)(1,2)$ resultam em $(-1, 5)$. Essa conferência fixa o sentido da mudança de base.

Solução comentada — N006

Colocando os vetores nas colunas, o determinante é

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = 1 + a^3.$$

Para $a \in \mathbb{R}$, a família é uma base exatamente quando $a \neq -1$. No valor excluído, a soma dos três vetores é zero, exibindo uma relação de dependência.

Solução comentada — N007

Se $v = \sum_j c_j e_j$ e a base é ortonormal, então $v \cdot e_i = \sum_j c_j \delta_{ji} = c_i$. Em uma base geral, definindo $G_{ij} = e_i \cdot e_j$ e $b_i = e_i \cdot v$, temos $Gc = b$. Portanto $c = G^{-1}b$. A matriz de Gram é invertível porque a família é uma base. Produtos internos isolados não extraem as coordenadas de uma base oblíqua.

Seção 1.3: Transformações Lineares e Matrizes

Solução comentada — N008

A matriz é $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. As imagens dos vetores dos eixos são $Ae_1 = (2, 1)$ e $Ae_2 = (1, 2)$; portanto os eixos se tornam as retas geradas por esses vetores. Como $\det A = 3$, a área da imagem de uma região é três vezes a área original. A orientação é preservada. Os fatores de alongamento nas direções principais $(1, 1)$ e $(1, -1)$ são 3 e 1.

Solução comentada — N009

A matriz é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. O núcleo satisfaz $x = y = z$, logo é $\operatorname{span}\{(1, 1, 1)\}$. A imagem é todo $\mathbb{R}^2$: para (u, v), escolha $(x, y, z) = (u + v, v, 0)$. Assim, o posto é 2, compatível com a identidade $\dim \ker L + \operatorname{posto} L = 3$.

Solução comentada — N010

Se $[v]_F = P[v]_E$, então $[Lv]_F = PA_E[v]_E = PA_EP^{-1}[v]_F$. Como isso vale para todo v, $A_F = PA_EP^{-1}$. No exemplo, $B_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $P = B_F^{-1}$. Portanto

$$A_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Essa é uma mudança por similaridade de um operador. Uma forma bilinear transforma sua matriz por outra regra; essa distinção será retomada na parte tensorial.

Seção 1.5: ⋆ Produto Vetorial em Dimensão n

Solução comentada — N011

Pela convenção do livro, a linha dos vetores da base ocupa a última linha do determinante. Assim,

$$\bigtimes(e_1, e_2, e_3) = e_4, \qquad \bigtimes(e_2, e_1, e_3) = -e_4.$$

Trocar dois vetores de entrada muda o sinal do determinante. A família ordenada formada pelas três entradas e pelo produto tem orientação positiva no primeiro caso; no segundo, o sinal do produto compensa a troca das entradas.

Solução comentada — N012

Os cofatores da última linha dão $n = (-1, -1, -1, 1)$. Verificamos $n \cdot (1, 0, 0, 1) = n \cdot (0, 1, 0, 1) = n \cdot (0, 0, 1, 1) = 0$. Seu módulo é 2. Além da perpendicularidade, a normalização importa: um múltiplo arbitrário de n também seria normal, mas somente o vetor calculado pelo determinante é o produto generalizado na convenção adotada.

Solução comentada — N013

A matriz de Gram das três entradas de N012 é

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são $4, 1, 1$, logo $\det G = 4$. O volume tridimensional gerado pelas entradas é $\sqrt{\det G} = 2$, igual ao módulo do produto generalizado. O cálculo confere a normalização de N012.

Capítulo 2: Limites e Continuidade

Seção 2.3: Continuidade

Solução comentada — N014

Fora da origem, o denominador é positivo e a função é contínua. Além disso,

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0.$$

A estimativa independe do caminho. Portanto a continuidade na origem exige, e é assegurada por, $c = 0$.

Solução comentada — N015

No caminho $y = 0$, temos $H = 0$. No caminho $y = x \neq 0$, temos $H = 1/2$. Ambos chegam à origem dentro do domínio da expressão. Como os limites são diferentes, o limite conjunto não existe e nenhuma escolha do valor na origem pode produzir continuidade. Ajustar um único valor não corrige a dependência do caminho.

Solução comentada — N016

Com $r = \sqrt{x^2+y^2}$, a estimativa $|f_\alpha| \leq r^\alpha$ mostra que a extensão por zero é contínua para todo $\alpha > 0$. Para garantir $|f_\alpha| < \varepsilon$, basta escolher $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}$ e exigir $0 < r < \delta$. A função é contínua também fora da origem. A oscilação do seno não impede a convergência porque sua amplitude tende a zero.

Solução comentada — N017

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ de modo que $0 < \|x - a\| < \delta$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$. Pela continuidade de γ em zero e por $\gamma(0) = a$, existe $\eta > 0$ tal que $0 \leq t < \eta$ implique $\|\gamma(t) - a\| < \delta$. A hipótese $\gamma(t) \neq a$ para $t > 0$ permite usar a estimativa perfurada. Logo, para $0 < t < \eta$, $|f(\gamma(t)) - l| < \varepsilon$. O limite é unilateral, pois o parâmetro pertence a $[0, 1]$.

Seção 2.4: ⋆ Compacidade

Solução comentada — N018

O disco fechado é fechado e limitado, portanto compacto por Heine–Borel. O disco aberto é limitado, mas não fechado: uma sequência interior pode convergir para a circunferência. O conjunto $xy = 1$ é fechado, por ser um conjunto de nível de uma função contínua, mas é ilimitado: contém $(n, 1/n)$. Assim, não é compacto.

Solução comentada — N019

Os vértices opostos de K_n distam $2\sqrt{2}/n$, seu diâmetro. Um ponto na interseção deve satisfazer $|x|, |y| \leq 1/n$ para todo n, logo a interseção é $\{(0,0)\}$. Já $[n, +\infty)$ são fechados, não vazios e encaixados, mas nenhum número real pertence a todos. A hipótese de controle por compacidade, ou no teorema usado aqui o diâmetro tendendo a zero, não pode ser descartada.

Solução comentada — N020

Para cada $a \in K$, a continuidade fornece uma vizinhança relativa U_a em que $|f(x) - f(a)| < 1$. Esses abertos relativos cobrem K. Extraia uma subcobertura finita $U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}$. Em cada ponto $x \in K$, alguma dessas vizinhanças contém x, portanto

$$|f(x)| < 1 + \max_{1 \leq j \leq m} |f(a_j)|.$$

Isso prova a limitação sem pressupor a existência prévia de um máximo. Se K é vazio, a afirmação é imediata.

Capítulo 3: Diferenciação de Funções Vetoriais

Seção 3.2: Lei de Kepler

Solução comentada — N021

Derivando, $\dot{r} = (-a\,\mathrm{sen}\,t, b\cos t, 0)$; assim $r \times \dot{r} = (0, 0, ab)$. A velocidade areolar é $|ab|/2$; admitindo $a, b > 0$, vale $ab/2$. Porém $\ddot{r} = -r$, cuja intensidade é proporcional à distância à origem. A gravitação requer $\ddot{r} = -\mu r/\|r\|^3$. As duas expressões só podem coincidir ao longo de toda a curva se $\|r\|$ for constante, como no caso circular $a = b$ com a escala temporal adequada. Velocidade areolar constante é necessária para o movimento kepleriano, mas não caracteriza sua lei de força.

Solução comentada — N022

Para $r(t) = R(\cos \omega t, \mathrm{sen}\,\omega t, 0)$, temos $\ddot{r} = -\omega^2 r$. Como $\|r\| = R$, a equação impõe $\omega^2 = \mu/R^3$. O módulo da velocidade angular e o período são

$$|\omega| = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}, \qquad \mathscr{T} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mu}}.$$

O sinal de ω escolhe o sentido da órbita. A relação $\mathscr{T}^2 \propto R^3$ é a forma circular da terceira lei de Kepler.

Solução comentada — N023

A regra do produto fornece

$$\frac{d}{dt}(r \times \dot{r}) = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = 0.$$

Logo $h = r \times \dot{r}$ é constante. Se $h \neq 0$, a relação $r \cdot h = 0$ fixa um plano de movimento e a velocidade areolar é $\|h\|/2$. Se $h = 0$, a velocidade é paralela à posição onde $r \neq 0$: o movimento pode ser radial, e o vetor nulo não determina um plano orbital único.

Seção 3.4: Derivadas Parciais e Direcionais

Solução comentada — N024

As derivadas parciais são $T_x = 2xy$, $T_y = x^2$ e $T_z = e^z$. Em $(1, 2, 0)$, o gradiente é $(4, 1, 1)$. A direção pedida é $u = (2, -1, 2)/3$, de modo que

$$D_u T = \nabla T \cdot u = \frac{8 - 1 + 2}{3} = 3.$$

A divisão por 3 é essencial: o enunciado pede a direção unitária, não uma velocidade com módulo 3.

Solução comentada — N025

Em $(1, 1)$, $\nabla f = (2x + y, x) = (3, 1)$. Portanto $D_{(1,2)} f = 5$ e $D_{(1,2)/\sqrt{5}} f = \sqrt{5}$. A primeira derivada mede a variação ao longo do parâmetro da trajetória com velocidade $(1, 2)$; a segunda mede a variação por unidade de distância. A linearidade do diferencial explica o fator $\sqrt{5}$.

Solução comentada — N026

Para $v = (a, b) \neq 0$ e $t \neq 0$,

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{t}{|t|} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Se $ab \neq 0$, os limites à direita e à esquerda têm sinais opostos, logo a derivada direcional bilateral não existe. Se $ab = 0$, ela existe e vale zero. As derivadas parciais na origem são zero. Se houvesse diferenciabilidade, seu diferencial seria zero; mas em (t, t), $|f(t,t)|/\|(t,t)\| = 1/2$. O resto não é de ordem menor que a distância. Logo a função não é diferenciável, embora seja contínua, pois $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|/2$.

Seção 3.6: Propriedades das Transformações Diferenciáveis

Solução comentada — N027

A regra da cadeia dá

$$\frac{d}{dt}T(r(t)) = (2te^t, t^2)\cdot(1, e^t) = e^t(2t + t^2).$$

Por substituição, $T(r(t)) = t^2e^t$, cuja derivada é a mesma expressão. O produto entre o gradiente e a velocidade calcula a variação da temperatura observada pela partícula.

Solução comentada — N028

Em $(0,0)$, $F = (1,0)$, e

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_G(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim $J_{G\circ F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. São matrizes 2×2. A ordem é $J_G(F(0,0))J_F(0,0)$: primeiro se transforma o deslocamento na entrada de F, depois o deslocamento na entrada de G. Avaliar J_G na origem daria um resultado incorreto.

Solução comentada — N029

Do diferencial de $V = \pi r^2 h$, com $r, h > 0$,

$$\frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}.$$

O módulo do erro relativo de primeira ordem é limitado por $2(1\%) + 2\% = 4\%$. É uma estimativa linear, não um limite exato para erros finitos. Por exemplo, os aumentos simultâneos máximos dão $(1{,}01)^2(1{,}02) - 1 = 4{,}0502\%$, mostrando a pequena contribuição dos termos de ordem superior.

Seção 3.8: O Significado Geométrico da Divergência e do Rotacional

Solução comentada — N030

A divergência é $a + b + c$. Em um pequeno volume transportado pelo campo, ela mede a taxa relativa instantânea de variação do volume: sinal positivo indica expansão, negativo contração e zero ausência de variação volumétrica de primeira ordem. Um valor zero não obriga cada direção a permanecer inalterada; expansões e contrações podem compensar-se.

Solução comentada — N031

O rotacional é $(0, 0, 2\omega)$. Seu módulo é $2|\omega|$, o dobro da velocidade angular da rotação rígida. A vorticidade registra a rotação local do campo, mas não deve ser identificada numericamente com a velocidade angular: esta é metade da vorticidade nesse movimento.

Solução comentada — N032

A condição de incompressibilidade é

$$\nabla \cdot v = 2x - 2x + w_z = w_z = 0.$$

Logo w deve ser independente de z em cada intervalo coordenado do domínio. Um exemplo é $w = x + y$. A incompressibilidade não significa velocidade nula: as componentes horizontais já produzem um escoamento com compensação das taxas de deformação.

Seção 3.9: Equações de Maxwell

Solução comentada — N033

Aplique a divergência a $\nabla \times B - \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E = \mu_0 j$. Como a divergência de um rotacional é zero e as derivadas comutam,

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t (\nabla \cdot E) = \mu_0 \nabla \cdot j.$$

Substituindo $\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon_0$ e cancelando μ_0, obtemos $\partial_t \rho + \nabla \cdot j = 0$. Essa é a conservação local da carga; sua forma integral resulta de integrar em um volume fixo e aplicar Gauss.

Solução comentada — N034

No vácuo sem fontes, $\nabla \cdot E = 0$, $\nabla \times E = -\partial_t B$ e $\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E$. Aplique o rotacional à segunda relação:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 E.$$

Usando $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$, segue a equação pedida. A regularidade deve permitir as derivadas de segunda ordem e sua comutação. A velocidade de propagação do modelo é $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Solução comentada — N035

O produto vetorial é $(v, 0, 0) \times (0, 0, B) = (0, -vB, 0)$. Assim $F = (0, q(E - vB), 0)$. Para uma carga não nula, a força se anula se $E = vB$. Se $B \neq 0$, isso equivale a $v = E/B$; se $B = 0$, é preciso $E = 0$. Para $q = 0$, a força é sempre zero. O sinal do termo magnético depende da ordem do produto vetorial.

Seção 3.10: Funções Inversas

Solução comentada — N036

Escrevendo $(u, v) = (x + y, x - y)$, obtemos $F^{-1}(u, v) = ((u + v)/2, (u - v)/2)$. As derivadas são matrizes constantes:

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_{F^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = J_F^{-1}.$$

O produto das duas matrizes é a identidade, como exige a regra da cadeia aplicada à composição com a inversa.

Solução comentada — N037

Temos $J_F = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ e $\det J_F = 4(x^2 + y^2)$. Portanto há inversa local diferenciável em cada ponto diferente da origem. Na origem, uma inversa diferenciável local é impossível pela regra da cadeia, que exigiria uma derivada invertível. Além disso, $F(x, y) = F(-x, -y)$, logo a aplicação não é globalmente injetiva no plano perfurado. Invertibilidade local não implica invertibilidade global.

Solução comentada — N038

Escolha $y \in (\alpha, \beta)$ com $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Na imagem desse setor, defina o ramo angular $\operatorname{Arg}_{(\alpha,\beta)}(u+iv)$. A inversa é

$$x = \log\sqrt{u^2+v^2}, \qquad y = \operatorname{Arg}_{(\alpha,\beta)}(u+iv).$$

O raio é sempre positivo, e o determinante jacobiano é $e^{2x} > 0$. A restrição angular elimina a identificação $y \sim y + 2\pi$. O ramo deve corresponder ao setor escolhido; não se pode usar a função arctangente simples em todos os quadrantes.

Seção 3.11: Funções Implícitas

Solução comentada — N039

Para $F = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, temos $F_z(1,2,2) = 4 \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, z é uma função local de x, y, e

$$z_x = -x/z = -1/2, \qquad z_y = -y/z = -1.$$

O plano tangente é $(x-1) + 2(y-2) + 2(z-2) = 0$, ou $x + 2y + 2z = 9$. A representação local usa o ramo positivo de z.

Solução comentada — N040

Defina $F(T,p,q) = T^4 + pT - q$. Como $F_T = 4T^3 + p > 0$ para $T > 0$ e $p > 0$, existe uma função local diferenciável $T(p,q)$. As derivadas são

$$T_p = -\frac{T}{4T^3+p} < 0, \qquad T_q = \frac{1}{4T^3+p} > 0.$$

Mantendo q fixo, aumentar p reduz a temperatura de equilíbrio do modelo; mantendo p fixo, aumentar q eleva-a. Essas interpretações dizem respeito à equação proposta, sem atribuir unidades não especificadas aos parâmetros.

Solução comentada — N041

Para as duas restrições, o Jacobiano em relação a (y,z), no ponto indicado, é $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, cujo determinante é -4. Portanto existem funções locais $y(x), z(x)$. Derivando as equações,

$$1 + y' + z' = 0, \qquad 2x + 2yy' + 2zz' = 0.$$

Em $x = 0$, obtemos $y' + z' = -1$ e $y' - z' = 0$. Assim $y'(0) = z'(0) = -1/2$.

Capítulo 4: Curvas e superfícies

Seção 4.1: Curvas paramétricas

Solução comentada — N042

Uma parametrização é $r(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2\cos t + 2\operatorname{sen} t)$, $0 \le t < 2\pi$. O ponto indicado corresponde a $t = 0$, e $r'(0) = (0, 2, 2)$. Qualquer múltiplo não nulo desse vetor fornece a mesma direção tangente. A parametrização satisfaz as duas equações para todo t.

Solução comentada — N043

As duas imagens são a circunferência unitária. Ambas têm orientação anti-horária e são regulares, mas γ realiza uma volta, enquanto η realiza duas. Assim, não são descrições do mesmo percurso com a mesma multiplicidade. Uma integral de linha orientada em η é o dobro da correspondente em γ, para o mesmo campo.

Solução comentada — N044

Temos $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$, logo $\gamma'(0) = 0$ e a parametrização não é regular na origem. As secantes têm inclinação $t^3/t^2 = t \to 0$, e a direção normalizada do vetor posição tende a $(1, 0)$. Existe a reta tangente horizontal, embora o parâmetro tenha velocidade nula. A imagem tem uma cúspide na origem; a existência de uma reta tangente não basta para concluir que há uma curva regular nesse ponto.

Seção 4.2: Superfícies

Solução comentada — N045

Os vetores tangentes são $r_u = (1, 0, 2u)$ e $r_v = (0, 1, 2v)$. Seu produto é $(-2u, -2v, 1)$, nunca nulo. A superfície é regular em todo o domínio. Em $(u, v) = (1, 1)$, a normal é $(-2, -2, 1)$; portanto

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1), \quad \text{ou} \quad z = 2x + 2y - 2.$$

Solução comentada — N046

O gradiente é $(2x, 2y, -2z)$, que só se anula na origem. Portanto o cone de nível zero é uma superfície regular em todos os seus pontos não nulos. Na origem, as duas folhas se encontram. Qualquer plano tangente a uma superfície regular nessa origem deveria conter as direções de todas as retas geradoras do cone; essas direções geram $\mathbb{R}^3$, o que é impossível para um plano bidimensional. A falha do gradiente coincide aqui com uma singularidade real do conjunto.

Solução comentada — N047

Use $r(\theta, z) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$. Então $r_\theta = (-a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta, 0)$ e $r_z = (0, 0, 1)$, com produto $(a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0) \neq 0$. Na descrição implícita, $F = x^2 + y^2$ tem gradiente $(2x, 2y, 0)$ não nulo no nível a^2. Os dois critérios confirmam a regularidade. Para uma carta injetiva, restrinja o ângulo a um intervalo aberto apropriado; o parâmetro periódico global repete pontos.

Solução comentada — A001

A parametrização angular é regular para $0 < \phi < \pi$, em faixas azimutais que evitem repetições. Para $s = u^2 + v^2$, o produto fundamental de q tem módulo $4/(1 + s)^2$, nunca zero. Ela cobre a esfera exceto o polo norte $(0, 0, 1)$, que só é atingido no limite $s \to \infty$. Em $(u, v) = (0, 0)$, atinge regularmente o polo sul. A parametrização angular falha nos polos, mas cobre o equador; a estereográfica resolve um dos polos e exige outra carta no polo omitido. O vetor $q_u \times q_v$ aponta para dentro com essa ordem dos parâmetros; inverter a ordem fornece orientação exterior.

Solução comentada — A002

A mudança $\theta = s^3$ é bijetiva e descreve a mesma região geométrica perto de zero. Porém seu Jacobiano é $3s^2$, zero em $s = 0$, e sua inversa não é diferenciável ali. O produto fundamental de r tem módulo 1; o de q tem módulo $3s^2$. Assim r é regular, enquanto q falha em toda a linha $s = 0$. A singularidade é da escolha de parâmetros, não do cilindro.

Solução comentada — A003

A mudança é $u = s + t$, $v = s - t$, com determinante -2. Substituir no paraboloide dá exatamente q. Pela regra da cadeia, $q_s \times q_t = -2(p_u \times p_v)$ no ponto correspondente. Ambas são regulares. A orientação é invertida, mas o elemento positivo de área recebe o módulo do fator, 2. Assim, ajustar o domínio e usar o valor absoluto preserva a área geométrica.

Seção 4.4: ⋆ Variedades

Solução comentada — N048

As normais das restrições são $(2,0,0)$ e $(0,0,1)$ em $(1,0,0)$ e são independentes. Logo $\dim M = 3-2 = 1$. O espaço tangente é

$$T_pM = \{v : v_x = 0,\ v_z = 0\} = \operatorname{span}\{(0,1,0)\}.$$

O espaço normal é $\operatorname{span}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$. Há duas direções normais independentes: uma curva espacial não possui um único vetor normal determinado apenas pelas restrições.

Solução comentada — N049

As duas restrições lineares são independentes, logo o conjunto é um plano de dimensão 2 em $\mathbb{R}^4$. Seu espaço tangente, em qualquer ponto, é o próprio subespaço

$$\{(a,-a,b,b) : a,b \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}.$$

A constância do espaço tangente decorre de o conjunto ser linear.

Solução comentada — N050

O conjunto é a união dos dois eixos. Fora da origem, uma vizinhança suficientemente pequena encontra apenas um eixo e é uma curva regular. Na origem, um pequeno trecho perfurado tem quatro ramos conexos. Já uma vizinhança de um ponto de uma variedade unidimensional sem bordo, ao retirar o ponto, tem dois ramos. Essa estrutura local impede uma carta de dimensão 1 na origem. Também há duas direções tangentes incompatíveis com uma única reta tangente.

Seção 4.5: Otimização com restrições

Solução comentada — N051

A elipse é compacta, logo há extremos. Pelo método de Lagrange, $y = 2\lambda x$, $x = 8\lambda y$. Os candidatos são $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e seu oposto, com $xy = 1$, e $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e seu oposto, com $xy = -1$. São, respectivamente, máximos e mínimos globais. Outra conferência usa $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$: $xy = \operatorname{sen} 2t$.

Solução comentada — N052

A área total é $A = 2(xy + xz + yz)$. Como $(xy)(xz)(yz) = V^2$, a desigualdade das médias dá

$$A \geq 6V^{2/3}.$$

A igualdade ocorre quando $xy = xz = yz$, isto é, $x = y = z = V^{1/3}$. Esse candidato admissível atinge a cota inferior, provando diretamente a existência do mínimo global. Para examinar a fronteira, use $yz = V/x$: $A \geq 2V/x + 4\sqrt{Vx}$. Assim $A \to \infty$ se $x \to 0$ ou $x \to \infty$; o mesmo vale para os demais lados. Nenhum escape do domínio positivo melhora o mínimo.

Solução comentada — N053

Na esfera, a distância ao quadrado até $P = (2, 0, 0)$ é $5 - 4x$. Como $-1 \leq x \leq 1$, o mínimo ocorre em $(1, 0, 0)$ e vale distância 1; o máximo ocorre em $(-1, 0, 0)$ e vale 3. Pelo método de Lagrange, os candidatos satisfazem $(2(x-2), 2y, 2z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$; a presença do termo -2 força $y = z = 0$. Geometricamente, os extremos estão no eixo que une o centro da esfera ao ponto externo.

Solução comentada — N054

A restrição define apenas $(0, 0)$. Assim, $f = x$ tem simultaneamente máximo e mínimo sobre esse conjunto. Porém $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ e $\nabla g(0, 0) = 0$; não existe λ com $\nabla f = \lambda \nabla g$. Falta a hipótese de regularidade da restrição: seu gradiente deve ser não nulo, ou os gradientes devem ser independentes no caso de várias equações.

Capítulo 5: Integrais Múltiplas

Seção 5.1: Integrais Duplas

Solução comentada — N055

A área da placa é 2 m^2, logo sua massa é $3 \times 2 = 6$ kg. Em uma soma de Riemann, cada parcela é $\rho\,\Delta A$: densidade superficial, em $\mathrm{kg/m}^2$, multiplicada pela área da célula, em m^2. Somar apenas valores de densidade produziria unidades e dependência da malha incorretas.

Solução comentada — N056

Nas células $[(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$, a função é crescente nas duas coordenadas. Os mínimos são $(i+j-2)/n$ e os máximos $(i+j)/n$. Multiplicando por $1/n^2$ e somando,

$$L_n = 1 - \frac{1}{n}, \qquad U_n = 1 + \frac{1}{n}, \qquad U_n - L_n = \frac{2}{n} \to 0.$$

Ambas convergem para a integral 1. A diferença quantifica o efeito da discretização.

Solução comentada — N057

Por simetria, $\iint_R x\,dA = 0$. Já

$$\iint_R |x|\,dA = 2\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2.$$

A primeira integral registra contribuições com sinal e cancelamento entre as duas metades. A segunda soma suas magnitudes. Uma integral com integrando que muda de sinal não pode ser interpretada automaticamente como massa positiva.

Capítulo 6: Integrais de Linha

Seção 6.1: Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Solução comentada — N058

Use $r(t) = (t, 2t)$, $0 \le t \le 1$. Então $F(r(t)) = (2t, t)$ e $r' = (1, 2)$, de modo que $W = \int_0^1 4t\,dt = 2$. Como conferência, $F = \nabla(xy)$, e a diferença do potencial é $2 - 0 = 2$.

Solução comentada — N059

No segmento $r(t) = (t, t)$, o produto $(-t, t) \cdot (1, 1)$ é zero, portanto $W = 0$. No primeiro trecho do caminho quebrado, $r = (t, 0)$, o trabalho também é zero. No segundo, $r = (1, t)$, o produto com $r' = (0, 1)$ vale 1, e o trabalho é 1. O resultado depende do caminho. A diferença entre os dois trabalhos também é a circulação na fronteira de um triângulo, com o sinal determinado pelo sentido de composição.

Solução comentada — N060

No segmento radial, escreva $r(s) = s\,u$, $\|u\| = 1$, com s variando de a a b. Então $F \cdot dr = -\mu s^{-2} ds$, e

$$W = \mu\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

O trabalho é negativo se a distância aumenta. O potencial matemático do campo é $\phi = \mu/\|r\|$; a energia potencial é seu negativo. O percurso não pode atravessar a origem, onde o campo é singular.

Seção 6.2: Invariância de Parametrização e Outras Propriedades das Integrais de Linha

Solução comentada — N061

Com γ, a integral é $\int_0^1 2t\,dt = 1$. Com η, é $\int_0^{1/2} (2s, 2s) \cdot (2, 2)\,ds = \int_0^{1/2} 8s\,ds = 1$. A redução do intervalo compensa o aumento da velocidade. Há uma reparametrização crescente que preserva orientação e multiplicidade.

Solução comentada — N062

Na parametrização anti-horária $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $F(r) = r'$ e $F \cdot r' = 1$. Uma volta dá 2π, duas dão 4π, e uma volta no sentido horário dá -2π. A imagem geométrica é a mesma, mas o percurso inclui orientação e número de voltas.

Solução comentada — N063

Se $\eta(s) = \gamma(\varphi(s))$ e φ é uma reparametrização diferenciável estritamente decrescente dos intervalos, a regra da cadeia dá $\eta' = \gamma'(\varphi)\varphi'$. A substituição $t = \varphi(s)$ transforma a integral em uma integral de b a a, portanto em $-\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$. A troca do sinal vem da orientação; não é uma alteração do campo.

Seção 6.3: Integral de Linha de Campos Escalares

Solução comentada — N064

A velocidade tem módulo $\sqrt{2}$, logo

$$M = \int_0^{2\pi} (1 + t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(2\pi + 2\pi^2).$$

A densidade deve ser multiplicada pelo elemento de comprimento, não apenas por dt. O parâmetro identifica cada ponto da hélice pelo seu terceiro componente, de modo que a densidade proposta é bem definida no fio.

Solução comentada — N065

No círculo, $x^2 + y^2 = a^2$ e seu comprimento é $2\pi a$. Portanto a integral vale $2\pi a^3$. Inverter a orientação substitui a velocidade por seu negativo, mas não altera seu módulo nem o elemento ds. Essa é a diferença em relação à integral orientada de um campo vetorial.

Solução comentada — N066

Temos $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$. Assim

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{5}).$$

A substituição $u = 2t$ reduz a integral à fórmula usual de $\sqrt{1 + u^2}$. A massa para densidade constante é $M = \lambda_0 L$, supondo $\lambda_0 \geq 0$.

Seção 6.4: O Primeiro Teorema Fundamental

Solução comentada — N067

Como o campo é um gradiente definido em todo o espaço, o trabalho depende apenas dos extremos: $\phi(2,3,1) - \phi(0,1,0) = 13$. Não é necessário parametrizar o caminho. A existência do potencial é o motivo que autoriza esse procedimento.

Solução comentada — N068

A força é $F = -\nabla V = (-kx, -ky, -mg)$. Para extremos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$,

$$W = V(A) - V(B) = mg(z_A - z_B) + \frac{k}{2}(x_A^2 + y_A^2 - x_B^2 - y_B^2).$$

O sinal é oposto à variação da energia potencial. A fórmula pressupõe um caminho admissível e suficientemente regular entre os extremos.

Solução comentada — N069

Para um caminho fechado, o ponto final coincide com o inicial. Aplicando o teorema fundamental a uma parametrização por partes, a integral de $\nabla\phi$ é $\phi(r(b)) - \phi(r(a)) = 0$. Autointerseções não alteram esse argumento: não é necessário que a curva seja simples para o teorema fundamental.

Seção 6.5: Teste para um Campo Gradiente

Solução comentada — N070

As derivadas cruzadas são $\partial_y(2xy) = 2x$ e $\partial_x(x^2 + 2y) = 2x$. No domínio simplesmente conexo $\mathbb{R}^2$, o campo é conservativo. Integrando a primeira componente, $\phi = x^2 y + g(y)$; a segunda exige $g' = 2y$. Logo $\phi = x^2 y + y^2 + C$. Derivar a expressão confere as duas componentes.

Solução comentada — N071

As derivadas cruzadas das componentes são ambas $(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$, logo o rotacional planar é zero fora da origem. No círculo anti-horário unitário, $F(r) = r'$ e a circulação é 2π. Assim não existe potencial global no plano perfurado. Localmente, um ramo do ângulo fornece um potencial; globalmente, a topologia do domínio impede escolhê-lo de modo unívoco.

Solução comentada — N072

A igualdade das derivadas cruzadas exige $a = b$ pela dupla (x, y), $a = 1$ pela dupla (x, z) e $b = 1$ pela dupla (y, z). Portanto $a = b = 1$. Nesse caso, um potencial é $xyz + C$, cuja derivada fornece exatamente o campo. A verificação em todo $\mathbb{R}^3$ também prova a suficiência.

Seção 6.6: O Segundo Teorema Fundamental

Solução comentada — N073

Defina $\phi(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} F \cdot dr$. Como $F = \nabla(x^2 + y^2)$, resulta $\phi = x^2 + y^2 - 1$. A constante -1 assegura $\phi(1, 0) = 0$. Escolher outro ponto de referência muda a constante, mas não muda o campo.

Solução comentada — N074

Se $\nabla\phi = \nabla\psi$, então $\nabla(\phi - \psi) = 0$. Em cada componente conexa de um domínio aberto, dois pontos podem ser unidos por um caminho poligonal interior. O teorema fundamental mostra que a diferença tem o mesmo valor nos dois pontos. Portanto ela é constante em cada componente; constantes distintas podem ocorrer em componentes diferentes.

Solução comentada — N075

Se as integrais independem do caminho, compare um caminho fechado com o caminho constante no seu ponto inicial: a integral é zero. Reciprocamente, dados dois caminhos C_1, C_2 de A a B, concatene C_1 com o percurso inverso de C_2. A integral fechada é $\int_{C_1} F \cdot dr - \int_{C_2} F \cdot dr$. Se toda integral fechada é zero, os dois valores coincidem. O argumento aplica-se aos caminhos por partes admissíveis no domínio.

Seção 6.7: Construção de Funções Potenciais

Solução comentada — N076

Integrando a primeira componente em x, escreva $\phi = x^2y + e^x + g(y,z)$. A segunda exige $g_y = 2yz$, de modo que $g = y^2z + h(z)$. A terceira exige $h' = 0$. Portanto

$$\phi = x^2y + e^x + y^2z + C.$$

A verificação de todas as derivadas impede que uma função de integração seja confundida com uma constante.

Solução comentada — N077

Use os trechos $(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$. Nos dois primeiros, a componente integrada é zero. No terceiro, $F_3 = xy$, e a integral é xyz. Portanto $\phi = xyz$, com valor zero na origem. Conferimos $\nabla\phi = (yz, xz, xy)$. O caminho por eixos é uma escolha de cálculo, não uma restrição necessária ao potencial.

Solução comentada — N078

Ao integrar em x, qualquer função de y, z tem derivada zero em x. Por isso, a forma geral é $\phi = x^2y + g(y,z)$. A segunda componente exige $g_y = z$, logo $g = yz + h(z)$. A terceira exige $y + h' = z + y$, isto é, $h = z^2/2 + C$. Assim $\phi = x^2y + yz + z^2/2 + C$. Escrever somente uma constante logo no primeiro passo perderia soluções necessárias.

Seção 6.8: Teorema de Green no Plano

Solução comentada — N079

Para $P = -y$ e $Q = x$, $Q_x - P_y = 2$. A elipse tem semieixos 2 e 1, portanto área 2π. Por Green, a circulação positiva é $2 \cdot 2\pi = 4\pi$. O campo é regular em toda a região, requisito necessário para essa aplicação.

Solução comentada — N080

A área da coroa é $\pi(4 - 1) = 3\pi$, e o rotacional planar é 2, logo a circulação é 6π. A borda exterior tem sentido anti-horário e contribui com 8π; a interior tem sentido horário e contribui com -2π. Os dois termos somam o resultado de Green.

Solução comentada — N081

O campo não está definido na origem, portanto não possui a regularidade exigida em uma vizinhança do disco fechado. Em uma coroa $a \leq r \leq b$ com $a > 0$, o rotacional é zero e Green dá circulação total zero. A borda exterior contribui com 2π e a interior, orientada no sentido horário, com -2π. Não há contradição com a circulação não nula de uma única curva que envolve a singularidade.

Solução comentada — A004

Para o primeiro campo, use o potencial $x^3 + y^2$: o trabalho é $8 + 1 = 9$. Um segmento $r(t) = (2t, t)$ confere diretamente $\int_0^1 (24t^2 + 2t)dt = 9$. Para o segundo, Green usa o rotacional planar 2 e a área 6π, fornecendo 12π. Diretamente, $r(t) = (3\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ dá $G \cdot r' = 6$, cuja integral é 12π. O potencial é eficiente no percurso aberto com campo gradiente; Green é eficiente na curva fechada com área conhecida.

Solução comentada — A005

O rotacional planar é $2x + 2y$, cuja integral no disco unitário é zero por simetria; a circulação é zero. Diretamente, o integrando é $\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t$, com integral nula em uma volta. O campo não é conservativo em $\mathbb{R}^2$, pois seu rotacional não é identicamente zero. Uma única circulação nula não demonstra independência de caminho.

Seção 6.9: Aplicação do Teorema de Green: Área

Solução comentada — N082

Na parametrização positiva da elipse, $x\,dy - y\,dx = ab(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)dt = ab\,dt$. Logo

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab.$$

O valor é positivo porque a orientação escolhida é anti-horária.

Solução comentada — N083

A soma dos determinantes consecutivos é $0 + 6 + 2 + 0 = 8$, logo a área é $8/2 = 4$. Por triangulação a partir da origem, os triângulos com vértices $(0,0), (3,0), (2,2)$ e $(0,0), (2,2), (0,1)$ têm áreas 3 e 1. A comparação confere o sentido positivo da ordem dos vértices.

Solução comentada — N084

No círculo exterior positivo, a integral de $(x\,dy - y\,dx)/2$ é πb^2. No círculo interior, orientado negativamente, é $-\pi a^2$. Portanto a área da coroa é $\pi(b^2 - a^2)$. A borda interna é percorrida no sentido horário para manter a região à esquerda do percurso.

Seção 6.10: Formas vetoriais do Teorema de Green

Solução comentada — N085

A divergência planar é 2, logo o fluxo é $2\pi a^2$. Diretamente, $r(t) = a(\cos t, \operatorname{sen} t)$, a normal exterior unitária é $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $ds = a\,dt$. Assim $F \cdot n = a$, e a integral é $\int_0^{2\pi} a^2 dt = 2\pi a^2$. A circulação desse campo no mesmo círculo é zero, pois ele é radial.

Solução comentada — N086

No círculo, o campo $(-y, x)$ é tangente, de modo que seu fluxo exterior é zero. Sua circulação positiva é $2\pi a^2$. A divergência planar é zero, enquanto o rotacional planar vale 2. Fluxo e circulação medem operações diferentes; trocar divergência por rotacional confunde as duas versões de Green.

Solução comentada — N087

Pela primeira identidade de Green,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dA = \int_{\partial\Omega} u\,\partial_n u\,ds - \int_\Omega u\Delta u\,dA = 0.$$

A continuidade de ∇u e a não negatividade do integrando dão $\nabla u = 0$. Pela conexidade, u é constante; o valor zero na fronteira força essa constante a ser zero. Supõem-se as condições de regularidade necessárias à identidade e continuidade até a fronteira.

Capítulo 7: Integrais de Superfície

Seção 7.1: O Produto Vetorial Fundamental

Solução comentada — N088

Temos $r_u = (1, 0, v)$ e $r_v = (0, 1, u)$. Logo $r_u \times r_v = (-v, -u, 1)$, que nunca é zero. A terceira componente fornece uma verificação imediata da regularidade em todo o plano dos parâmetros.

Solução comentada — N089

Use $r(\theta, z) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$. O produto $r_\theta \times r_z = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$ aponta para fora, e seu módulo é a. A normal exterior unitária é $(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$. Inverter a ordem dos parâmetros inverte a normal, mas preserva o elemento positivo de área $a\,d\theta\,dz$.

Solução comentada — N090

Na convenção $r(\theta, \phi) = a(\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\phi)$, o módulo do produto fundamental é $a^2\,\mathrm{sen}\,\phi$, para $0 \le \phi \le \pi$. Ele se anula nos polos $\phi = 0, \pi$, onde o ângulo azimutal deixa de distinguir pontos. A esfera permanece regular: o nível $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ tem gradiente não nulo em todos os seus pontos. A singularidade é da parametrização, não da superfície.

Seção 7.2: A Área de uma Superfície Parametrizada

Solução comentada — N091

Para $z = f(x, y) = x + y$, o elemento de área é $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy = \sqrt{3}\,dx\,dy$. O domínio tem área 1, portanto a superfície tem área $\sqrt{3}$. O fator corrige a inclinação em relação ao plano horizontal.

Solução comentada — N092

Para o paraboloide, $dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$. Em polares,

$$A = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

O fator r vem da mudança de variáveis no plano; o fator de raiz vem da inclinação da superfície. Eles têm origens distintas.

Solução comentada — N093

O círculo gerador tem comprimento $2\pi a$ e centroide a distância R do eixo de revolução. Como $R > a > 0$, a curva não encontra o eixo e gera um toro sem autointerseção. Pelo teorema de Pappus, a área é $(2\pi a)(2\pi R) = 4\pi^2 Ra$. Se o eixo atravessasse a curva, essa aplicação direta do teorema exigiria reexame.

Seção 7.3: Integrais de Superfície de Funções Escalares

Solução comentada — N094

A massa é $M = 4\pi a^2\sigma_0$. Para $\sigma_0 > 0$, a simetria sob reflexão de cada coordenada anula os três primeiros momentos, e o centro de massa é a origem. Se $\sigma_0 = 0$, a massa é zero e o centro de massa não é definido pela fórmula de momentos; a hipótese física usual é densidade positiva.

Solução comentada — N095

O elemento de área é $\sqrt{3}\,dx\,dy$. Assim

$$M = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^1 (1+x)\,dy\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Integrar apenas $1 + x$ no domínio daria a massa de uma placa horizontal, não a massa da superfície inclinada com a densidade superficial proposta.

Solução comentada — N096

Por simetria, as integrais de x^2, y^2, z^2 na esfera são iguais. Sua soma é a integral da constante a^2, isto é, $4\pi a^4$. Portanto $\int_S z^2 dS = 4\pi a^4/3$. Dividindo pela área, a temperatura média é $T_0 + \alpha a^2/3$.

Seção 7.4: Integrais de Superfície de Funções Vetoriais

Solução comentada — N097

Na esfera, a normal exterior é $n = (x, y, z)/a$, logo $F \cdot n = a$. O fluxo é $a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$. Gauss fornece a mesma conferência: a divergência é 3, e o volume da bola é $4\pi a^3/3$.

Solução comentada — N098

Para a orientação para cima, o elemento vetorial é $(-2x, -2y, 1)\,dx\,dy$. Seu produto com $F = (0, 0, 1)$ vale 1. Logo o fluxo é a área do disco unitário, π. O módulo do produto fundamental não deve substituir o elemento vetorial em uma integral de fluxo.

Solução comentada — N099

Escolha em ambos os hemisférios a normal radial exterior $n = r/a$. No hemisfério superior sua componente vertical é positiva; no inferior, negativa. As orientações de bordo induzidas no equador são opostas e cancelam ao unir as duas peças. Escolher normal para cima nas duas peças não produziria a orientação exterior da esfera fechada.

Seção 7.5: Teorema de Kelvin–Stokes

Solução comentada — N100

O rotacional de $F = (-y/2, x/2, z)$ é $(0, 0, 1)$. Pelo teorema de Stokes, a circulação anti-horária na borda é o fluxo dessa constante através do disco orientado para cima, portanto π. O termo z da terceira componente não contribui para o rotacional nesse exemplo.

Solução comentada — N101

O rotacional de $F = (z, x, y)$ é $(1, 1, 1)$. No disco $z = 1$, orientado para cima, o fluxo é π. No paraboloide $z = x^2 + y^2$, o elemento vetorial para cima é $(-2x, -2y, 1)dx\,dy$; o fluxo no disco unitário é $\int (1 - 2x - 2y)dA = \pi$. As partes ímpares se anulam por simetria. Ambas as superfícies induzem o mesmo sentido anti-horário no bordo, justificando a comparação por Stokes.

Solução comentada — N102

Se uma superfície fechada orienta o bordo de um volume e F é suficientemente regular em uma vizinhança do volume, Gauss dá $\int_S (\nabla\times F)\cdot n\, dS = \int_V \nabla\cdot(\nabla\times F) dV = 0$. Mais geralmente, Stokes na superfície fechada dá zero porque seu bordo é vazio. Para uma superfície com bordo, o fluxo é a circulação nesse bordo, que pode ser não nula; N100 fornece um exemplo.

Seção 7.6: Teorema de Gauss

Solução comentada — N103

A divergência é $3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$. Por Gauss e coordenadas esféricas,

$$\int_S F \cdot n\, dS = 3 \cdot 4\pi \int_0^a r^4 dr = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

A superfície deve ter normal exterior. O cálculo evita parametrizar individualmente suas componentes cúbicas.

Solução comentada — N104

Admitindo $0 \le z \le h$, a divergência é 4, logo o fluxo total é $4\pi a^2 h$. Na lateral, a normal radial dá $F \cdot n = a$, e o fluxo é $2\pi a^2 h$. Na tampa superior, $F \cdot n = 2h$, e o fluxo é $2\pi a^2 h$; na inferior, é zero. Se o cilindro for transladado verticalmente, as contribuições individuais das tampas mudam, mas sua soma e o total permanecem iguais.

Solução comentada — N105

Para $r \neq 0$, a divergência do campo é zero. Em uma esfera centrada na origem de raio a, $F \cdot n = 1/a^2$, logo o fluxo é 4π. Qualquer esfera cujo interior contenha a origem tem o mesmo fluxo: retire uma pequena bola centrada na origem e aplique Gauss à região entre as duas superfícies. Se o interior da esfera não contém a origem nem a superfície a encontra, Gauss aplica-se à bola inteira e dá zero. Uma esfera que passa pela origem não está coberta por essas hipóteses regulares.

Solução comentada — A006

A divergência é 1, logo o fluxo fechado da meia bola é $2\pi/3$. Na tampa, a normal é $-e_z$ e o campo tem componente vertical 2, dando fluxo -2π. Portanto o fluxo aberto pelo hemisfério é $2\pi/3 + 2\pi = 8\pi/3$. Diretamente, o integrando na esfera é $(z+2)z$; as integrais de z^2 e z no hemisfério são $2\pi/3$ e π, confirmando o total.

Solução comentada — A007

O volume entre o paraboloide e a tampa é $\int_{r\le 1}(1-r^2)dA = \pi/2$. A divergência de F é 1, de modo que o fluxo total é $\pi/2$. A tampa tem normal para cima e fluxo π. O paraboloide, com normal exterior da região, tem orientação para baixo, e seu fluxo é $-\pi/2$. Com orientação para cima, o fluxo seria $\pi/2$. A escolha da região fechada decide qual normal é exterior.

Seção 7.7: Aplicações de Integrais de Superfície

Solução comentada — N106

Em um volume fixo V, conservação de massa significa

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_{\partial V} \rho v \cdot n\, dS.$$

Passe a derivada sob a integral e aplique Gauss. Obtemos $\int_V [\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho v)]dV = 0$. Como vale para todo volume pequeno e o integrando é contínuo, ele é zero ponto a ponto. O campo integrado no fluxo é ρv, não apenas a velocidade.

Solução comentada — N107

Como ρ é espacialmente uniforme, $\nabla\cdot(\rho v) = \rho\nabla\cdot v = 3a\rho$. A continuidade dá $\rho' + 3a\rho = 0$, logo $\rho(t) = \rho_0 e^{-3at}$. Para $a > 0$, o escoamento expande volumes materiais e a densidade diminui. Para $a < 0$, ocorre compressão. A conclusão supõe a constante como no enunciado.

Solução comentada — N108

Com uma fonte volumétrica, o balanço torna-se

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\int_{\partial V} \rho v \cdot n\, dS + \int_V s\, dV.$$

Logo $\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho v) = s$. A fonte positiva acrescenta massa; uma fonte negativa representa remoção. As unidades de s são massa por volume por tempo.

Seção 7.8: Decomposição de Helmholtz

Solução comentada — N109

Escolha $\Phi = -(x^2 + y^2 + z^2)/2$ e $A = 0$. Então $-\nabla\Phi = (x, y, z) = F$. É uma decomposição local, e até uma identidade em todo o espaço. O campo cresce no infinito, portanto não satisfaz as hipóteses de decaimento da representação integral de Helmholtz apresentada no livro. A existência dessa decomposição elementar não autoriza usar integrais impróprias que divergem.

Solução comentada — N110

Para $A = (0, 0, a(x, y))$, $\nabla \times A = (a_y, -a_x, 0)$. Queremos $a_y = -y$ e $a_x = -x$, de modo que $a = -(x^2 + y^2)/2 + C$. Com $\Phi = 0$, obtemos a decomposição pedida. O campo também não decai no infinito, portanto a construção não é uma aplicação da fórmula integral global com decaimento.

Solução comentada — N111

Se χ tem derivadas segundas contínuas, $\nabla \times \nabla\chi = 0$, pois as derivadas mistas se cancelam. Logo $\nabla \times (A + \nabla\chi) = \nabla \times A$. O potencial vetorial não é único. Uma condição de calibre, como $\nabla \cdot A = 0$, acompanhada de condições de contorno ou no infinito, pode restringir essa liberdade; a condição de divergência, isoladamente, ainda permite gradientes de funções harmônicas.

Seção 7.9: Identidades de Green

Solução comentada — N112

A identidade aplicada a u dá $\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0$, pois $\Delta u = 0$ e $u = 0$ na fronteira. Portanto u é constante em cada componente, e as condições de fronteira dão $u = 0$. Para provar unicidade de um problema com dados de Dirichlet gerais, aplique o mesmo argumento à diferença de duas soluções, que é harmônica e tem dado de fronteira zero. Supõem-se as regularidades necessárias à identidade.

Solução comentada — N113

A segunda identidade é

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dV = \int_{\partial\Omega} (u\partial_n v - v\partial_n u)dS.$$

Para u, v harmônicas, o lado esquerdo é zero. Assim $\int_{\partial\Omega} u\partial_n v\, dS = \int_{\partial\Omega} v\partial_n u\, dS$. A igualdade expressa uma reciprocidade entre valores de fronteira e derivadas normais; não afirma que os integrandos sejam iguais ponto a ponto.

Solução comentada — N114

A primeira identidade fornece $\int_\Omega |\nabla u|^2 = 0$, porque $\Delta u = 0$ e $\partial_n u = 0$. Logo $\nabla u = 0$, e a conexidade dá uma única constante no domínio. A constante não é determinada pelo dado de Neumann homogêneo. Por isso, a unicidade de um problema de Neumann costuma exigir uma normalização adicional, como fixar a média de u.

Capítulo 8: Coordenadas Curvilíneas

Seção 8.1: Coordenadas Curvilíneas

Solução comentada — N115

Os vetores coordenados são $r_u = (v, -u, 0)$, $r_v = (u, v, 0)$ e $r_z = (0, 0, 1)$. Seus produtos internos cruzados são zero. Logo $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$ e $h_z = 1$. O determinante é $u^2 + v^2$, portanto a parametrização é singular exatamente quando $u = v = 0$. Fora desse eixo no domínio, ela é localmente regular; a ortogonalidade não garante injetividade global, pois (u, v) e $(-u, -v)$ têm a mesma imagem.

Solução comentada — N116

Os vetores unitários são

$$e_r = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j, \qquad e_\theta = -\operatorname{sen}\theta\, i + \cos\theta\, j, \qquad e_z = k.$$

Portanto $\partial_\theta e_r = e_\theta$, $\partial_\theta e_\theta = -e_r$ e $\partial_\theta e_z = 0$. Mesmo que componentes físicas sejam constantes, a derivada do vetor pode não ser zero porque a base varia com a posição.

Solução comentada — N117

A aplicação angular envia θ e $\theta + 2\pi$ ao mesmo ponto. Se ambos são parâmetros distintos no domínio, não há injetividade. Se as extremidades são identificadas, o domínio já não é uma faixa aberta usual de $\mathbb{R}$: ele tem a topologia do círculo. Uma carta deve usar um intervalo aberto sem essa identificação, e mais de uma carta é necessária para cobrir a direção angular completa.

Seção 8.2: Elementos de Linha e de Volume em Sistemas de Coordenadas Ortogonais

Solução comentada — N118

Adote θ azimutal e ϕ polar. Os fatores de escala são $1, r\,\mathrm{sen}\,\phi, r$ para a ordem (r,θ,ϕ). Assim

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\, d\theta^2,$$

$$dS\big|_{r=a} = a^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta, \qquad dV = r^2\,\mathrm{sen}\,\phi\, dr\, d\phi\, d\theta.$$

São elementos positivos, nos intervalos $r>0$, $0<\phi<\pi$. Para elementos orientados, a ordem dos diferenciais e o sinal do Jacobiano também devem ser considerados.

Solução comentada — N119

No elemento de linha cilíndrico $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$, a hélice tem $dr = 0$, $d\theta = dt$ e $dz = b\,dt$. Logo $ds = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$ e $L = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$. O resultado coincide com o módulo da derivada da parametrização cartesiana.

Solução comentada — N120

Integrando o elemento positivo de volume,

$$V = \int_a^b r^2 dr \int_0^\pi \mathrm{sen}\,\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3).$$

A fórmula pressupõe $0 \le a < b$; se $a = 0$, a singularidade de coordenadas no centro não altera a integral, pois esse ponto tem volume zero.

Seção 8.3: Gradiente em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Solução comentada — N121

Em coordenadas cilíndricas, $\nabla\Phi = e_r\Phi_r + e_\theta\Phi_\theta/r + e_z\Phi_z$. Portanto

$$\nabla\Phi = 2r\cos\theta\, e_r - r\,\mathrm{sen}\,\theta\, e_\theta + 2z\, e_z.$$

O fator $1/r$ da componente angular converte variação por ângulo em variação por comprimento. A expressão vale na carta regular $r>0$.

Solução comentada — N122

Como a função depende apenas do raio, $\nabla(1/r) = -e_r/r^2$. A direção é radial para dentro: o valor aumenta ao aproximar-se da origem. A fórmula vale apenas para $r > 0$, pois a função é singular no centro.

Solução comentada — N123

Em cartesianas, o gradiente é $(2x, 2y, 0)$. Em cilíndricas, $x^2 + y^2 = r^2$, logo o gradiente é $2r\,e_r$. Como $e_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, essa expressão é $(2r\cos\theta, 2r\operatorname{sen}\theta, 0) = (2x, 2y, 0)$. As componentes mudam, o vetor não.

Seção 8.4: Divergência em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Solução comentada — N124

A divergência cilíndrica é $r^{-1}\partial_r(rA_r) + r^{-1}\partial_\theta A_\theta + \partial_z A_z$. Para $A_r = cr$, ela vale $r^{-1}\partial_r(cr^2) = 2c$. Em cartesianas, o campo é $(cx, cy, 0)$, cuja divergência também é $2c$. O campo estende-se regularmente ao eixo, embora a base cilíndrica individual não esteja definida ali.

Solução comentada — N125

Para um campo radial esférico, $\nabla \cdot A = r^{-2}(r^2 f)'$. Divergência zero no intervalo implica $r^2 f = C$, logo $f = C/r^2$. A constante corresponde ao fluxo dividido por 4π. A região deve ter $r > 0$; a extensão ao centro pode introduzir uma singularidade.

Solução comentada — N126

Um campo cilíndrico radial independente de z e do ângulo tem divergência $r^{-1}(rv_r)'$. Para vazão volumétrica por unidade de altura constante q, o fluxo pelo cilindro de raio r e altura unitária é $2\pi r v_r = q$. Portanto $v_r = q/(2\pi r)$. O mesmo resultado segue da divergência nula. A fórmula vale fora do eixo e pressupõe o regime estacionário sem fontes na região considerada.

Seção 8.5: Rotacional em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Solução comentada — N127

A componente axial do rotacional é $r^{-1}\partial_r(rA_\theta) = r^{-1}\partial_r(\omega r^2) = 2\omega$; as demais são zero. Logo $\nabla \times A = 2\omega e_z$. É a mesma rotação rígida estudada em cartesianas no exercício N031.

Solução comentada — N128

Para $A_\theta = c/r$, $\partial_r(rA_\theta) = \partial_r c = 0$, e as demais componentes do rotacional também são zero. No círculo de raio a, a circulação positiva é $\int_0^{2\pi}(c/a)a\,d\theta = 2\pi c$. Não há contradição com Stokes: qualquer disco que preencha esse círculo encontra o eixo, onde o campo não está definido. Em uma coroa, as circulações das duas bordas se cancelam.

Solução comentada — N129

Para $\Phi = r^2 z$, $\nabla\Phi = 2rz\,e_r + r^2 e_z$. A componente angular do rotacional é $\partial_z(2rz) - \partial_r(r^2) = 2r - 2r = 0$; as outras são zero porque não há dependência angular nem componente angular. A identidade vale na carta regular e resulta também da comutação das derivadas mistas.

Seção 8.6: O Laplaciano em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Solução comentada — N130

O laplaciano radial esférico é $\Delta f = r^{-2}(r^2 f')'$. Para $f = r^p$,

$$\Delta r^p = p(p+1)r^{p-2}.$$

Portanto as funções são harmônicas para $p = 0$ ou $p = -1$, no domínio $r > 0$. A função $1/r$ não é regular na origem; a afirmação de harmonicidade não inclui esse ponto.

Solução comentada — N131

A equação cilíndrica radial é $(rT')' = 0$, logo $T = A\log r + B$. Para $0 < a < b$,

$$T(r) = T_a + (T_b - T_a)\frac{\log(r/a)}{\log(b/a)}.$$

Ela satisfaz os dois valores de fronteira. O perfil logarítmico distingue a condução radial cilíndrica da condução esférica, cujo perfil estacionário é da forma $A + B/r$.

Solução comentada — N132

Em cartesianas, cada quadrado contribui com 2, logo $\Delta(x^2+y^2+z^2)=6$. Em cilíndricas, a função é r^2+z^2: a contribuição radial é $r^{-1}(2r^2)'=4$, e a axial é 2. Em esféricas, escrevendo o raio como ρ, a função é ρ^2, e $\rho^{-2}(2\rho^3)'=6$. As três expressões representam o mesmo operador euclidiano.

Capítulo 9: Tensores

Seção 9.1: Funcional linear

Solução comentada — N133

$x+y$ e $2x-3y+z$ são funcionais lineares nos seus respectivos espaços. $x+y+1$ não é linear porque seu valor no vetor zero é 1. xy não é linear: em $(1,0)$ e $(0,1)$ vale zero, mas na soma $(1,1)$ vale 1. Basta um contraexemplo para refutar linearidade.

Solução comentada — N134

As componentes são $\alpha_i=(3,-1,2)$. Os deslocamentos que não mudam a leitura pertencem ao núcleo $3x-y+2z=0$, um plano pela origem. Uma base desse plano é $\{(1,3,0),(0,2,1)\}$. O covetor fornece uma leitura escalar, não um deslocamento vetorial.

Solução comentada — N135

A bilinearidade do produto interno dá $a\cdot(cu+dv)=c(a\cdot u)+d(a\cdot v)$, portanto f é linear. Foi usada a métrica euclidiana para associar o vetor a ao covetor $a^\flat$. Sem uma métrica escolhida, não existe essa identificação canônica entre V e V^*, embora o pareamento de um covetor com um vetor já esteja definido.

Seção 9.2: Espaços duais

Solução comentada — N136

Escrevendo $(x, y) = c_1(1, 0) + c_2(1, 2)$, obtemos $c_2 = y/2$ e $c_1 = x - y/2$. Assim $e^1(x, y) = x - y/2$ e $e^2(x, y) = y/2$. Os valores são $e^1(e_1) = 1$, $e^1(e_2) = 0$, $e^2(e_1) = 0$ e $e^2(e_2) = 1$, precisamente as relações de dualidade.

Solução comentada — N137

As componentes do covetor na base dual de E são suas avaliações: $\alpha(e_1) = -1$ e $\alpha(e_2) = 3$. Para $v = (2, 3)$, $[v]_E = (5/2, -1/2)$. Portanto $\alpha(v) = (-1)(5/2) + 3(-1/2) = -4$, igual a $2 - 2 \cdot 3$. A invariância da leitura confere a transformação contrária das componentes de vetor e covetor.

Solução comentada — N138

As coordenadas de v na base de colunas B são $B^{-1}v$. Cada linha de B^{-1} define o funcional que extrai uma dessas coordenadas. Como a linha i de B^{-1} aplicada à coluna j de B dá δ^i_j, essas linhas representam a base dual. A matriz deve ser invertível, pois suas colunas formam uma base.

Seção 9.3: Formas Bilineares

Solução comentada — N139

A matriz é $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, com a convenção $B(u, v) = u^T K v$. Para $v = (2, -1)$, $Kv = (3, -1)$, e para $u = (1, 2)$, $B(u, v) = 3 - 2 = 1$. Indicar a ordem dos argumentos torna a convenção matricial explícita.

Solução comentada — N140

Temos

$$B(u, u) = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + 3u_2^2 = 2(u_1 + u_2/2)^2 + \frac{5}{2}u_2^2.$$

Se a expressão é zero, ambos os quadrados são zero, logo $u = 0$. Portanto a forma é positiva definida. A soma de quadrados prova a positividade sem depender de uma interpretação como operador.

Solução comentada — N141

Com $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, as partes são

$$S = \frac{M + M^T}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{M - M^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conferimos $S^T = S$, $A^T = -A$ e $M = S + A$. São as partes simétrica e alternada da forma bilinear.

Seção 9.4: Tensores

Solução comentada — N142

O tensor é covariante de ordem 2, com componentes $T_{ij} = \alpha_i \beta_j$. Logo

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sua avaliação é $T(u, v) = \alpha(u)\beta(v) = 1 \cdot (-1) = -1$. Trocar os dois fatores tensorais produz outro tensor em geral; a multiplicação dos valores só é comutativa depois de fixados os argumentos correspondentes.

Solução comentada — N143

As únicas componentes não nulas são $T_{121} = 1$ e $T_{212} = -1$, pois $T_{ijk} = T(e_i, e_j, e_k)$. A expressão é linear em cada argumento separadamente, porque cada termo contém uma componente de cada vetor e as demais permanecem constantes quando um argumento varia. Assim $T \in V^* \otimes V^* \otimes V^*$, um tensor de tipo $(0, 3)$.

Solução comentada — N144

O tensor misto $A = v \otimes \alpha$ tem componentes $A^i{}_j = v^i \alpha_j$. Aplicado a w, produz $A^i{}_j w^j = v^i \alpha(w)$, portanto $A(w) = \alpha(w) v$. Contraindo, $A^i{}_i = v^i \alpha_i = \alpha(v)$. Essa contração é o traço do operador e independe da base.

Solução comentada — N145

O pareamento $V^* \times V \to \mathbb{R}$ já faz parte da definição de covetor, permitindo somar um índice inferior com um superior. Para dois índices inferiores de T_{ij}, não há pareamento natural entre dois covetores. Uma métrica não degenerada fornece a inversa g^{ij}, e então $g^{ij} T_{ij}$ é uma contração escalar. A expressão $\sum_i T_{ii}$ sem essa estrutura só tem a interpretação usual em bases adequadas, como bases ortonormais euclidianas.

Solução comentada — A008

T é de tipo $(0,3)$. As componentes não nulas são $T_{111}=1$, $T_{122}=3$, $T_{211}=2$ e $T_{222}=6$. No ponto proposto, $\alpha(u)=3$ e $H(v,w)=2-6=-4$, logo $T(u,v,w)=-12$. O produto de um covetor com uma forma bilinear cria três entradas vetoriais separadas.

Solução comentada — A009

$A : V \to V$ tem tipo $(1,1)$. A forma $H : V \times V \to \mathbb{R}$ tem tipo $(0,2)$. O terceiro objeto tem entradas em $V^* \times V^* \times V$ e saída real, portanto tem tipo $(2,1)$: $T = u \otimes v \otimes \gamma$. Os índices superiores correspondem às entradas covetoriais; os inferiores, às entradas vetoriais, na descrição multilinear escalar.

Solução comentada — A010

A expressão é linear em cada argumento. Interpretando-a como uma aplicação $V \times V \to V$, seus coeficientes são ${T^1}_{11}=1$, ${T^2}_{21}=1$ e ${T^2}_{12}=1$, e os demais são zero. Assim ela determina um tensor de tipo $(1,2)$. A avaliação pedida é $(3, 6-1)=(3,5)$. Para obter uma descrição escalar com três argumentos, pode-se avaliar a saída por um covetor.

Seção 9.5: Mudança de coordenadas

Solução comentada — N146

Como $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, as coordenadas novas do vetor são $[v]_E=(-1,3)^T$. As componentes novas do covetor são $\alpha_E = B^T(1,-2)^T = (1,-1)^T$. Assim $\alpha_E^T[v]_E = -1-3=-4$, igual à leitura cartesiana $2-6$. O vetor transforma por B^{-1}; o covetor, por B^T quando representado como coluna de componentes.

Solução comentada — N147

A métrica na nova base é $G_E = B^TB = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Para o vetor cartesiano $(2,3)$, suas coordenadas são $c=(-1,3)$. Logo $c^TG_Ec = 1-6+18 = 13$, igual a 2^2+3^2. Somar apenas os quadrados das novas coordenadas daria 10, porque a base não é ortonormal.

Solução comentada — N148

Para uma forma bilinear, $B(u, v) = u^T G v$ e $u = Bc$, $v = Bd$ dão $G_E = B^T G B$. Para um operador, $Av = ABc$, e suas coordenadas de saída são $B^{-1}ABc$, logo $A_E = B^{-1}AB$. A primeira regra é congruência; a segunda é similaridade. Confundi-las altera o tipo geométrico do objeto representado pela matriz.

Seção 9.6: Propriedades de simetria dos tensores

Solução comentada — N149

Para $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Resultam das fórmulas $(M + M^T)/2$ e $(M - M^T)/2$. A soma recupera M, e as transposições conferem as simetrias.

Solução comentada — N150

Se $T = S_1 + A_1 = S_2 + A_2$, então $D = S_1 - S_2 = A_2 - A_1$ é simultaneamente simétrico e antissimétrico. Logo $D = D^T = -D$, e sobre $\mathbb{R}$ isso implica $D = 0$. Assim $S_1 = S_2$ e $A_1 = A_2$. A divisão por 2 pressupõe um corpo de característica diferente de 2.

Solução comentada — N151

Um tensor totalmente alternado anula-se quando dois índices coincidem. As componentes restantes são determinadas, com sinal, pelas triplas crescentes. Existem $\binom{4}{3} = 4$ dessas triplas: 123, 124, 134, 234. Um tensor covariante de ordem 3 sem simetrias tem $4^3 = 64$ componentes independentes. A alternância reduz drasticamente a quantidade de dados.

Seção 9.7: Formas

Solução comentada — N152

Pela bilinearidade,

$$(e_1 + 2e_2) \wedge (e_2 + e_3) = e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge e_3.$$

O termo $2e_2 \wedge e_2$ é zero. A expressão já está na base de bivetores com índices crescentes.

Solução comentada — N153

Os quadrados de $e_1 \wedge e_2$ e $e_3 \wedge e_4$ são zero. Como duas formas de grau 2 comutam no produto exterior, os termos cruzados somam:

$$\alpha \wedge \alpha = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0.$$

Se $\alpha = u \wedge v$, seu quadrado teria fatores repetidos e seria zero. Portanto esse α não é decomponível. A conclusão usa uma condição necessária, suficiente para refutar a decomposição nesse exemplo.

Solução comentada — N154

Na orientação $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ positiva,

$$\star(e^1 \wedge e^3) = -e^2, \qquad \star(e^2 + 2e^3) = e^3 \wedge e^1 + 2e^1 \wedge e^2.$$

O primeiro sinal garante $(e^1 \wedge e^3) \wedge (-e^2)$ igual à forma volume. A segunda igualdade usa a linearidade da estrela. A métrica e a orientação escolhidas fazem parte da definição dessa operação.

Capítulo 10: Tensores em coordenadas

Seção 10.1: Notação indicial para tensores

Solução comentada — N155

Em dimensão 2, $w^1 = A^1{}_1 v^1 + A^1{}_2 v^2$ e $w^2 = A^2{}_1 v^1 + A^2{}_2 v^2$. O índice i é livre e identifica a componente de saída; j é mudo e é somado. Escrever a expansão ajuda a conferir que a contração usa um índice inferior do operador e um superior do vetor.

Solução comentada — N156

$A^i{}_i v^i$ é inválida porque i aparece três vezes. Se a intenção é multiplicar o vetor pelo traço, escreva $A^j{}_j v^i$. Se a intenção é aplicar o operador, escreva $A^i{}_j v^j$. A expressão $v^i + w_j$ soma componentes de objetos de tipos distintos e tem índices livres incompatíveis; não há uma correção canônica sem definir a intenção. Com uma métrica, pode-se somar $v^i + g^{ij} w_j$. Já $A^i{}_j v^j$ é válida e representa a componente i de um vetor. Não se deve corrigir índices alterando silenciosamente a operação.

Solução comentada — N157

Uma renomeação válida é $A^i{}_p B^p{}_q v^q$. Os nomes p, q substituem j, k e percorrem os mesmos valores; i permanece livre. As somas explícitas $\sum_{j,k}$ e $\sum_{p,q}$ são idênticas após essa troca de nomes. Não se pode renomear um índice livre apenas de um lado de uma igualdade.

Seção 10.2: Tensores novamente: mudança de coordenadas

Solução comentada — N158

A matriz da base é $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para $A = \mathrm{diag}(2, 3)$,

$$A_E = B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A segunda coluna significa $A(1,1) = -(1,0) + 3(1,1) = (2,3)$. A matriz perde a aparência simétrica nessa base oblíqua, mas continua representando o mesmo operador euclidiano autoadjunto.

Solução comentada — N159

Para a forma bilinear de matriz $G = \mathrm{diag}(2, 3)$,

$$G_E = B^T G B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A matriz continua simétrica. Comparada com N158, a mudança de regra reflete a diferença de tipo: uma forma tem dois argumentos vetoriais e dois índices inferiores; um operador tem uma entrada vetorial e uma saída vetorial, com um índice de cada tipo.

Solução comentada — N160

Se $v' = B^{-1}v$ e $\alpha' = B^T\alpha$ nas representações em colunas, então

$$(\alpha')^T v' = \alpha^T B B^{-1} v = \alpha^T v.$$

Em índices, os fatores de mudança do covetor e do vetor se cancelam pela relação entre uma matriz e sua inversa. A leitura escalar é independente da base, embora cada conjunto de componentes mude.

Solução comentada — A011

As componentes de df são $(2r\cos\theta, -r^2\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Multiplicando pela métrica inversa, as componentes coordenadas do gradiente são $(2r\cos\theta, -\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Na base unitária, são $(2r\cos\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. A norma ao quadrado é $4r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$. O fator de escala angular explica a diferença entre os dois conjuntos de componentes.

Solução comentada — A012

As componentes do covetor transformam-se para $\alpha' = (2, 3)$. Logo $T'_{ijk} = \alpha'_i\alpha'_j\alpha'_k$: $T'_{111} = 8$, as três componentes com dois índices 1 valem 12, as três com dois índices 2 valem 18, e $T'_{222} = 27$. Para $[v]_E = (1, -1)$, a leitura é $\alpha'(v) = -1$, e $T(v, v, v) = -1$. Na base canônica, $v = (0, -1)$, confirmando o mesmo valor.

Seção 10.3: Operações tensoriais em coordenadas

Solução comentada — N161

$Av = (-1, -1)$ é um vetor de tipo $(1, 0)$. O produto tensorial misto é

$$v \otimes \alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

um operador de tipo $(1, 1)$. Por fim, $\alpha(v) = 2 - 1 = 1$ é um escalar de tipo $(0, 0)$. Os três cálculos usam os mesmos dados, mas têm diferentes tipos de saída e diferentes padrões de contração.

Solução comentada — N162

A matriz de $v \otimes \alpha$ é $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Seu traço é $1 = \alpha(v)$. Como v e α são não nulos, a imagem do operador é a reta gerada por v, logo seu posto é 1. O traço não determina o posto: um operador desse tipo pode ter traço zero e posto um.

Solução comentada — N163

Uma contração possível é $S^i{}_k = T^{ij}{}_{kj}$, somando j. Uma contração completa é $s = T^{ij}{}_{ij}$, somando i, j. A contração de um par reduz a ordem em duas unidades. Outra escolha, como $T^{ij}{}_{ji}$, pode dar um escalar diferente se não houver simetrias adicionais; deve-se indicar quais posições foram pareadas.

Solução comentada — N164

Para uma métrica positiva definida, a norma induzida é

$$\|T\|^2 = g^{ik} g^{jl} T_{ij} T_{kl}.$$

Todos os índices são somados uma vez em posição inferior e uma superior. Em uma base ortonormal, a fórmula reduz a $\sum_{i,j} T_{ij}^2$. Se a métrica é indefinida, a mesma contração define uma forma quadrática, mas não necessariamente uma norma positiva; essa hipótese não pode ser omitida.

Solução comentada — A013

A fórmula dá $A^\dagger = g^{-1} A^T g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, diferente de $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para todos u, v, $\langle Au, v\rangle = u^T A^T g v = u^T g A^\dagger v = \langle u, A^\dagger v\rangle$. A igualdade matricial $A^T g = g A^\dagger$ confere simultaneamente todas as avaliações.

Solução comentada — A014

A métrica inversa é $\mathrm{diag}(1, 1/4)$. Como apenas H_{12} e H_{21} são não nulos, a contração $g^{ik} g^{jl} H_{ij} H_{kl}$ é $1/4 + 1/4 = 1/2$. A soma direta dos quadrados das entradas é 2 e não é a norma tensorial nessa base. A norma propriamente dita é $1/\sqrt{2}$.

Seção 10.4: Delta de Kronecker e símbolo de Levi-Civita

Solução comentada — N165

$\delta^i{}_i = 3$. Há seis permutações de 123 com símbolo de Levi–Civita não nulo, e cada quadrado vale um, logo $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$. Finalmente,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}.$$

Para $i = l$, há dois pares não nulos; para $i \neq l$, não há par (j, k) que contribua aos dois fatores. Aqui a soma de índices inferiores é a abreviação euclidiana em base cartesiana ortonormal especificada no enunciado.

Solução comentada — N166

Escreva $(a \times b)_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$. Então

$$|a \times b|^2 = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) a_j b_k a_l b_m = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2.$$

O primeiro termo pareia componentes do mesmo vetor; o segundo pareia uma componente de a com uma de b. As fórmulas são usadas na base cartesiana ortonormal do problema.

Solução comentada — N167

A forma volume euclidiana padrão avaliada nas colunas de B dá $\det B$. Como $g = B^T B$, temos $\det g = (\det B)^2$. Na orientação positiva, $\det B > 0$, portanto $\det B = \sqrt{\det g}$. Logo as componentes da forma volume em uma base oblíqua são $\sqrt{\det g}\,\epsilon_{ijk}$ em dimensão três. O símbolo numérico ϵ_{ijk}, isoladamente, não incorpora o volume da nova célula de base.

Solução comentada — A019

$g = B^T B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ tem determinante 36. A forma área padrão avaliada nas duas colunas dá $\det B = 6 = \sqrt{\det g}$. Se a ordem das colunas for invertida, a forma orientada muda de sinal; a área geométrica continua sendo 6. No cálculo de uma medida positiva, usa-se o módulo do determinante.

Seção 10.5: Tipos de campos tensoriais

Solução comentada — N168

A matriz é simétrica porque coincide com sua transposta. É anisotrópica porque possui respostas principais distintas, $1, 2, 3$, e não é um múltiplo da identidade. Simetria significa reciprocidade entre índices; isotropia significa ausência de direção privilegiada. Uma propriedade não implica a outra.

Solução comentada — N169

Interprete isotropia como invariância sob todas as rotações: $Q^T AQ = A$ para toda matriz ortogonal de orientação positiva. Como A é real simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores. Rotações que trocam direções dos eixos impõem igualdade dos autovalores, de modo que $A = \lambda I$. Reciprocamente, um múltiplo da identidade é preservado por toda mudança ortogonal. A hipótese envolve todas as rotações, não apenas uma rotação particular.

Solução comentada — N170

Defina $S_{ijk} = (T_{ijk} + T_{jik})/2$ e $A_{ijk} = (T_{ijk} - T_{jik})/2$. Antissimetrizar S no mesmo par dá zero. Se P troca i, j, então $P^2 = I$, e os operadores são $S = (I + P)/2$, $A = (I - P)/2$. Assim $S^2 = S$, $A^2 = A$, $SA = AS = 0$ e $S + A = I$. O índice k não participa da simetrização e permanece livre.

Solução comentada — A015

As componentes coordenadas são $X^r = r$ e $X^\theta = 0$. Temos $\nabla_r X^r = 1$, $\nabla_\theta X^\theta = (1/r)X^r = 1$ e as duas componentes cruzadas são zero. Logo a divergência é 2. Em cartesianas, $X = (x, y)$ tem matriz derivada identidade e a mesma divergência. O termo angular não pode ser omitido só porque a componente angular do campo é zero.

Solução comentada — A016

$dx = \cos\theta\, dr - r \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, logo $\alpha_r = \cos\theta$ e $\alpha_\theta = -r \operatorname{sen}\theta$. A regra covariante dá $\nabla_r \alpha_r = 0$; $\nabla_r \alpha_\theta = -\operatorname{sen}\theta - (1/r)(-r \operatorname{sen}\theta) = 0$; $\nabla_\theta \alpha_r = -\operatorname{sen}\theta - (1/r)(-r \operatorname{sen}\theta) = 0$; e $\nabla_\theta \alpha_\theta = -r\cos\theta - (-r)\cos\theta = 0$. As variações das componentes cancelam com as da base dual.

Solução comentada — A017

Se os coeficientes de conexão fossem componentes de um tensor, a transformação linear homogênea da lista zero cartesiana produziria a lista zero em qualquer carta. Mas em polares há coeficientes $-r$ e $1/r$, não nulos. Eles incluem a variação da base e transformam-se com um termo adicional. Na derivada covariante, esse termo compensa a transformação não tensorial das derivadas parciais das componentes, deixando um objeto tensorial.

Solução comentada — A018

Na tripla 123, $T_{(123)} = 1/6$ e $T_{[123]} = 1/6$, porque apenas uma das seis componentes originais é não nula. Sua soma é $1/3$, diferente de $T_{123} = 1$. Portanto a decomposição em parte totalmente simétrica mais parte totalmente alternada não é geral para ordem três. Em um único par, os operadores $(I + P)/2$ e $(I - P)/2$ continuam complementares e somam a identidade; o problema está em generalizar essa complementaridade para todas as permutações ao mesmo tempo.

Capítulo 11: Aplicações de tensores

Seção 11.1: O tensor de inércia

Solução comentada — N171

Cada massa contribui com $m(a^2 I - r r^{T})$, logo o tensor total é

$$I = \operatorname{diag}(0, 2ma^2, 2ma^2).$$

Para $m, a > 0$, a energia é $K = ma^2(\omega_y^2 + \omega_z^2)$, e é nula exatamente quando a velocidade angular é paralela ao eixo x. As massas estão nesse eixo e não se deslocam sob rotação em torno dele. O modelo pontual possui uma degenerescência que não ocorre para um corpo com volume e densidade positiva.

Solução comentada — N172

Para o cilindro homogêneo de massa M, raio a e altura 2ℓ, centrado na origem com eixo longitudinal z, escreva $A = M(a^2/4 + \ell^2/3)$ e $C = Ma^2/2$. Então $I = \operatorname{diag}(A, A, C)$, e

$$L = (A, 0, C), \qquad K = \frac{1}{2}(A + C).$$

O vetor L é paralelo a $(1, 0, 1)$ se e somente se $A = C$, isto é, $\ell = \sqrt{3}a/2$ para $\ell > 0$. Fora dessa relação, uma direção oblíqua não é eixo principal, embora os eixos coordenados sejam.

Solução comentada — N173

O momento em torno do eixo central longitudinal é $I_c = Ma^2/2$. Pelo teorema dos eixos paralelos, o momento em torno de uma reta paralela a distância d é $I = Ma^2/2 + Md^2$. O deslocamento usado é perpendicular entre as retas; o teorema parte de um eixo que passa pelo centro de massa.

Solução comentada — N174

A matriz é $J = Mb^2[(11/12)I - (1/4)\mathbf{1}\mathbf{1}^T]$, com $\mathbf{1} = (1,1,1)^T$. Na diagonal espacial, $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ tem autovalor 3, logo o momento é $Mb^2/6$. No plano perpendicular a essa diagonal, seu autovalor é zero, e o momento é $11Mb^2/12$, com multiplicidade dois. O momento na direção perpendicular é $11/2$ vezes o momento na diagonal. O menor valor ocorre na diagonal porque o deslocamento do centro de massa foi feito ao longo dessa própria reta.

Seção 11.2: Lei de Ohm

Solução comentada — N175

A corrente é $j = \sigma E = (2, 10, -8)$. A potência dissipada por unidade de volume é $p = E \cdot j = 2 + 20 + 8 = 30$. Se as condutividades estão em S/m e o campo em V/m, as unidades são $\mathrm{A/m^2}$ para a corrente e $\mathrm{W/m^3}$ para a dissipação. Sem unidades especificadas, os valores são os do modelo normalizado.

Solução comentada — N176

Com $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, a matriz no laboratório é

$$\sigma = QDQ^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 c^2 + \sigma_2 s^2 & (\sigma_1 - \sigma_2)cs \\ (\sigma_1 - \sigma_2)cs & \sigma_1 s^2 + \sigma_2 c^2 \end{pmatrix},$$

onde $c = \cos\theta$, $s = \operatorname{sen}\theta$. Para $E = (E_0, 0)$, $j_y = (\sigma_1 - \sigma_2)csE_0$. Ela se anula se o campo é zero, se o meio é isotrópico ou se o primeiro eixo do laboratório coincide com uma direção principal, θ múltiplo de $\pi/2$.

Solução comentada — N177

A positividade definida implica autovalores positivos, portanto σ é invertível. De $j = \sigma E$ segue $E = \sigma^{-1} j$, a relação de resistividade. Na decomposição ortogonal $\sigma = Q\,\operatorname{diag}(\lambda_i)Q^T$, temos $\sigma^{-1} = Q\,\operatorname{diag}(1/\lambda_i)Q^T$. Os eixos principais são os mesmos, e os autovalores são recíprocos. Maior condutividade em uma direção corresponde a menor resistividade nela.

Solução comentada — A024

No ponto indicado, $\nabla T = (4, 1, 1)$. Portanto $q = (-8, -1, -3)$, e $dT(q) = 4(-8) - 1 - 3 = -36$. Também $-\nabla T \cdot K\nabla T = -(32 + 1 + 3) = -36$. A positividade de K assegura a variação negativa quando o gradiente é não nulo: o fluxo tem uma componente na direção de temperatura decrescente, embora a anisotropia possa impedir que seja paralelo ao gradiente.

Seção 11.3: Equação do movimento de um fluido: equação de Navier–Stokes

Solução comentada — N178

A derivada temporal em um ponto fixo é $\partial_t u = 1$. Já $\nabla u = (2x, 1)$, e a derivada material é

$$\frac{Du}{Dt} = \partial_t u + v \cdot \nabla u = 1 + 2xy - x.$$

Ela mede a variação vista por uma partícula que se move com o campo de velocidades. O termo adicional é o transporte através de uma distribuição espacial não uniforme.

Solução comentada — N179

$\partial_t \rho = -3a\rho$ e $\nabla \cdot (\rho v) = 3a\rho$, logo a continuidade é satisfeita. Porém $\nabla \cdot v = 3a$; o campo é incompressível apenas se $a = 0$. Conservação de massa não é sinônimo de incompressibilidade: a densidade pode mudar para compensar a expansão ou compressão do volume material.

Solução comentada — N180

O modelo usa placas em $y = 0$ e $y = h$, viscosidade $\mu > 0$, velocidade U da placa superior e gradiente de pressão $\partial_x p = -G$, com $G > 0$. Seu perfil, com $u(0) = 0$ e $u(h) = U$, é

$$u(y) = \frac{Uy}{h} + \frac{G}{2\mu} y(h - y), \qquad 0 \le y \le h.$$

A derivada do perfil é $u' = U/h + G(h - 2y)/(2\mu)$ e $u'' = -G/\mu < 0$. O candidato a máximo é

$$y_* = \frac{h}{2} + \frac{\mu U}{Gh}.$$

Ele está no interior se $-Gh^2/(2\mu) < U < Gh^2/(2\mu)$, e o valor é $u(y_*) = G y_*^2/(2\mu)$. Se $U \ge Gh^2/(2\mu)$, o máximo ocorre na placa superior e vale U. Se $U \le -Gh^2/(2\mu)$, ocorre na placa inferior e vale zero. Nas igualdades, o vértice coincide com a placa correspondente. Tratar ambos os sinais de U evita supor um arraste que o enunciado não restringiu.

Solução comentada — N181

O gradiente de velocidade é $\mathrm{diag}(a, -a, 0)$ e a divergência é zero. Para o modelo newtoniano, $T = \mu(\nabla v + \nabla v^T) = \mathrm{diag}(2\mu a, -2\mu a, 0)$. Como suas componentes são constantes, $\nabla \cdot T = 0$. As trações nas faces podem ser não nulas, mas as contribuições opostas se equilibram: a força por unidade de volume depende da variação espacial da tensão, não apenas de seu valor.

Capítulo 12: Produto exterior

Seção 12.1: Motivação

Solução comentada — N200

O determinante é $2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7$, portanto a área orientada é 7 e a geométrica é 7. Trocar a ordem dos vetores muda a área orientada para -7, mas mantém a área geométrica. A ordem dos vetores é parte da orientação do paralelogramo.

Solução comentada — N201

Na ordem $(12, 13, 23)$, as áreas orientadas projetadas são $(1, 3, 6)$. A matriz de Gram é $G = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, com determinante 46. A área total é $\sqrt{46}$, também igual a $\sqrt{1^2 + 3^2 + 6^2}$. As áreas projetadas são componentes de um bivetor, não parcelas que devem ser somadas diretamente para obter a área total.

Solução comentada — N202

Para $u = (1, 1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1, 1)$, o novo vetor é $v + 2u = (2, 3, 1, 3)$. Seus menores com u, na ordem $(12, 13, 14, 23, 24, 34)$, continuam $(1, 1, 1, 1, 0, -1)$, pois $u_i(v_j + 2u_j) - u_j(v_i + 2u_i) = u_i v_j - u_j v_i$. No domínio dos dois parâmetros, essa troca corresponde a um cisalhamento de determinante um. Ela preserva a área orientada e a área total $\sqrt{5}$.

Seção 12.2: Produto exterior

Solução comentada — N203

A primeira expansão é

$$e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3 - 2e_2 \wedge e_3.$$

Para o produto triplo, os coeficientes dos três vetores formam uma matriz com determinante 2, portanto o resultado é $2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Também se pode expandir diretamente: os termos com fatores repetidos se anulam e os dois termos restantes têm sinal positivo.

Solução comentada — N204

Com $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 2, 1)$, temos $f(u) = 1$, $g(u) = -1$, $f(v) = 2$ e $g(v) = 1$. Pela avaliação determinantal,

$$(f \wedge g)(u \wedge v) = f(u)g(v) - f(v)g(u) = 3.$$

A alternância exige a diferença dos produtos, não sua soma. Não é necessário identificar os covetores com vetores para essa avaliação.

Solução comentada — N205

Se $\alpha = a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a$, a fórmula não normalizada é

$$\alpha \wedge c = \frac{1}{2!} \sum_{\pi \in S_3} \operatorname{sgn}(\pi) P_\pi(\alpha \otimes c).$$

Expandindo α, cada um dos seis tensores alternados de a, b, c aparece duas vezes, com o mesmo sinal. O fator $1/2!$ elimina essa duplicação e deixa a antissimetrização usual de três vetores. Se Alt_3 inclui o fator $1/3!$, a mesma expressão é $3 \operatorname{Alt}_3(\alpha \otimes c)$. A resposta depende de declarar qual antissimetrização foi normalizada.

Solução comentada — N206

O resultado é $2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, como em N153. Cada quadrado de um produto simples é zero, enquanto os dois termos cruzados têm o mesmo sinal, pois os graus são pares. Se $\omega = u \wedge v$, então $\omega \wedge \omega = 0$ por repetição dos vetores. O valor não nulo refuta essa possibilidade.

Seção 12.3: Propriedades dos espaços $\bigwedge^k V$

Solução comentada — N207

A dimensão é $\binom{5}{3} = 10$. Uma base é formada por $e_i \wedge e_j \wedge e_k$ para $1 \le i < j < k \le 5$: 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345. Se as colunas de uma matriz 5×3 são u, v, w, o coeficiente correspondente a ijk é o determinante da submatriz nas linhas i, j, k. Se esses vetores forem colocados nas linhas, usam-se os menores das colunas correspondentes.

Solução comentada — N208

O produto exterior dos três vetores é $-2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, portanto eles são independentes. Para $p = (2, 3, 1)$, as razões de volumes orientados fornecem

$$a = \frac{\det(p, v, w)}{-2} = 0, \qquad b = \frac{\det(u, p, w)}{-2} = 1, \qquad c = \frac{\det(u, v, p)}{-2} = 2.$$

De fato, $(0, 1, 1) + 2(1, 1, 0) = (2, 3, 1)$. São as fórmulas de Cramer escritas como razões de produtos exteriores de grau máximo.

Solução comentada — N209

Resolvendo $(x, y, z) = c_1(1, 1, 0) + c_2(0, 1, 1) + c_3(1, 0, 1)$, obtemos

$$e^1 = \tfrac{1}{2}(x + y - z), \quad e^2 = \tfrac{1}{2}(-x + y + z), \quad e^3 = \tfrac{1}{2}(x - y + z).$$

Aplicar os três funcionais aos três vetores da base produz a matriz identidade. Por exemplo, $e^1(1, 1, 0) = 1$ e e^1 vale zero nos outros dois. Essas avaliações conferem todas as relações de dualidade.

Solução comentada — N210

Na base $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$, $\bigwedge^2 A = \operatorname{diag}(ab, ac, bc)$. No espaço de grau três, $\bigwedge^3 A$ é a matriz 1×1 com entrada abc. Se exatamente um dos números é zero e os outros dois não, $\operatorname{posto} A = 2$, $\operatorname{posto}(\bigwedge^2 A) = 1$ e $\operatorname{posto}(\bigwedge^3 A) = 0$. A transformação preserva uma única direção de área, mas anula todo volume tridimensional.

Solução comentada — N211

Em um produto simples,

$$\bigwedge^k (A^{-1})\big(Au_1 \wedge \cdots \wedge Au_k\big) = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k.$$

Como produtos simples geram $\bigwedge^k V$, a composição é a identidade em todo o espaço. A composição na ordem inversa também é identidade. Assim $\bigwedge^k (A^{-1}) = (\bigwedge^k A)^{-1}$.

Solução comentada — N212

Ponha $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Temos $\omega^2 = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ e $\omega^3 = 0$, pois seu grau seria seis em dimensão quatro. Logo

$$\exp \omega = 1 + \omega + \tfrac{1}{2}\omega^2 = 1 + e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

A soma mistura graus e pertence à álgebra exterior inteira, não a um único espaço homogêneo.

Solução comentada — N213

A comutatividade graduada dá $\omega \wedge \eta = (-1)^{2\cdot 3}\eta \wedge \omega = \eta \wedge \omega$. Dois elementos de grau três trocam de ordem com sinal $(-1)^9 = -1$. Em particular, sobre $\mathbb{R}$, o quadrado de um elemento homogêneo de grau ímpar é zero. Isso não vale em geral para grau par, como mostra N206.

Solução comentada — N214

Expandindo e reordenando os fatores,

$$\omega \wedge \omega = 2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Se $\omega = u \wedge v$, o lado esquerdo é zero por repetição dos vetores, portanto o coeficiente entre parênteses deve ser zero. No exemplo dos sensores, $u = (1, 1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1, 1)$; os valores dos menores são $(1, 1, 1, 1, 0, -1)$, e a combinação vale $1(-1) - 1(0) + 1(1) = 0$. A relação verifica a compatibilidade dos menores com um produto simples.

Capítulo 13: Integração de Formas

Seção 13.1: Formas diferenciais

Solução comentada — N182

Usando $d(f\,dx) = df \wedge dx$, obtemos

$$d\omega = -x\,dx \wedge dy + z\,dx \wedge dz - y\,dy \wedge dz.$$

Por exemplo, $d(xy) \wedge dx = (y\,dx + x\,dy) \wedge dx = -x\,dx \wedge dy$. A reordenação dos diferenciais produz os sinais; termos com fatores repetidos são zero.

Solução comentada — N183

Temos $d(xy) = y\,dx + x\,dy$ e $d(x^2 + y^2) = 2x\,dx + 2y\,dy$. Portanto o produto é $2(y^2 - x^2)dx \wedge dy$. Sua derivada exterior em $\mathbb{R}^2$ é zero: ao derivar o coeficiente, cada termo contém um diferencial já presente, e toda forma de grau 3 nesse espaço se anula. Também se pode usar $d^2 = 0$ e a regra de Leibniz.

Solução comentada — N184

O Jacobiano é $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$, com determinante $u - v$. A transformação é localmente regular onde $u \neq v$. Preserva orientação onde $u > v$ e a inverte onde $u < v$. Na diagonal, o determinante se anula. A simetria entre u, v também mostra que a aplicação não é globalmente injetiva sem escolher um dos lados da diagonal.

Solução comentada — A022

Os graus são $0, 1, 2, 3$, respectivamente. Com $\mathrm{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$ e $\beta_j = j_1 dy \wedge dz + j_2 dz \wedge dx + j_3 dx \wedge dy$, a conservação escreve-se

$$\partial_t(\rho\,\mathrm{vol}) + d\beta_j = 0.$$

Como $d\beta_j = (\nabla \cdot j)\,\mathrm{vol}$, a igualdade é exatamente a equação escalar indicada. Todos os termos têm grau três; o tempo é um parâmetro do campo nesta escrita espacial.

Seção 13.2: Integração de Formas Diferenciais

Solução comentada — N185

Substitua $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $dx = dt$, $dy = 2t\,dt$, $dz = 3t^2 dt$. O pullback é

$$(t^3 + 2t^2 + 3t^4)dt.$$

Integrando de zero a um, o valor é $1/4 + 2/3 + 3/5 = 91/60$. Substituir apenas os coeficientes sem transformar os diferenciais perderia dois fatores essenciais.

Solução comentada — N186

Como $dx = du$, $dy = dv$ e $dz = 2u\,du + 2v\,dv$,

$$r^*(dy \wedge dz) = -2u\,du \wedge dv, \qquad r^*(dz \wedge dx) = -2v\,du \wedge dv.$$

Junto com $r^*(dx \wedge dy) = du \wedge dv$, os coeficientes são exatamente $r_u \times r_v = (-2u, -2v, 1)$. O cálculo liga a forma de fluxo ao elemento vetorial de área.

Solução comentada — N187

Na parametrização, $-y\,dx + x\,dy = (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)dt = dt$. A integral é 4π. O intervalo tem comprimento angular 4π, logo percorre a circunferência duas vezes no sentido positivo. Integrar sobre essa parametrização conta a multiplicidade; não é o mesmo que uma volta simples na imagem.

Seção 13.3: Variedades de dimensão zero

Solução comentada — N188

A integral é a soma dos valores com seus sinais: $(1 - 2) - (4 - 1) + (0 + 1) = -3$. Uma integral em dimensão zero não requer comprimento nem área; a orientação é um sinal associado a cada ponto.

Solução comentada — N189

Para $a < b < c$ com orientação crescente, $\partial[a, b] = +\{b\} - \{a\}$ e $\partial[b, c] = +\{c\} - \{b\}$. Somando, as contribuições em b cancelam e resta $+\{c\} - \{a\}$, o bordo de $[a, c]$. O cancelamento explica por que subdividir um percurso não altera o teorema fundamental.

Solução comentada — N190

O bordo do segmento orientado de A a B é $+\{B\} - \{A\}$. Portanto a integral é $x_B y_B + z_B - x_A y_A - z_A$. Por outro lado, $df = y\,dx + x\,dy + dz$, e seu pullback no segmento é a derivada de $f(A + t(B - A))$. A integração de zero a um fornece a mesma diferença.

Seção 13.5: Formas fechadas e exatas

Solução comentada — N191

Uma primitiva é $F = x^2 y + xz$, pois suas derivadas são $2xy + z$, x^2 e x. Como a forma é exata em todo o espaço, a integral entre os pontos indicados é $F(1, 2, 3) - F(0, 0, 0) = 5$, independentemente do caminho. Uma constante adicional na primitiva cancela ao calcular a diferença.

Solução comentada — N192

As derivadas cruzadas dos coeficientes coincidem fora da origem, logo $d\omega = 0$ nesse domínio. No círculo unitário anti-horário, o pullback é dt, e a integral é 2π. Se a forma fosse exata, sua integral em todo caminho fechado seria zero. Portanto ela é fechada, mas não exata no plano perfurado. Trata-se do mesmo obstáculo global encontrado em N071.

Solução comentada — N193

A construção radial com referência na origem dá

$$F(x, y) = \int_0^1 [(2tx + ty)x + (tx + 4ty)y]dt = x^2 + xy + 2y^2.$$

Logo $dF = (2x + y)dx + (x + 4y)dy$, como pedido. O método integra a forma ao longo dos segmentos radiais e funciona aqui porque a forma é fechada em um domínio estrelado.

Seção 13.6: Variedades de dimensão dois

Solução comentada — N194

Na orientação padrão,

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} (x+y)\,dy\,dx = \frac{8}{3}.$$

Na orientação oposta, a integral da forma vale $-8/3$. A integral da densidade positiva $(x+y)\,dA$ continua valendo $8/3$, pois dA é uma medida sem orientação. Como conferência, o triângulo tem área 2 e centroide $(2/3, 2/3)$; a média da função afim é $4/3$.

Solução comentada — N195

Com $x = v$, $y = u$, $dx \wedge dy = dv \wedge du = -du \wedge dv$. Portanto a integral do pullback no quadrado com orientação padrão é -1, correspondente à orientação invertida da imagem. A área geométrica é 1, pois a mudança de variáveis para medidas positivas usa $|\det J| = 1$.

Solução comentada — N196

A massa é $\int_0^1 \int_0^1 (1+x)\,dy\,dx = 3/2$. Inverter a orientação não altera a densidade nem a medida positiva dA, portanto não altera a massa. Já a integral da forma $(1+x)\,dx \wedge dy$ na orientação oposta vale $-3/2$. Interpretar esse último número como massa física confundiria os dois objetos.

Seção 13.7: Variedades de dimensão três

Solução comentada — N197

Cada coordenada tem integral $1/2$ no cubo unitário; assim a integral na orientação padrão é $3/2$. Na orientação oposta, vale $-3/2$. O coeficiente é positivo no interior, mas a integral de uma forma ainda depende da orientação.

Solução comentada — N198

Temos $dx \wedge dy \wedge dz = du \wedge dw \wedge dv = -du \wedge dv \wedge dw$. O pullback da forma volume tem fator -1. Em uma integral de massa, usa-se a medida positiva e o fator $|\det J| = 1$, portanto não há mudança de sinal da massa. Uma permutação ímpar de coordenadas inverte a orientação.

Solução comentada — N199

O tetraedro tem volume $1/6$. Por simetria ou integração, $\int_V x\,dV = 1/24$. Logo a massa é $1/6 + 1/24 = 5/24$. A integral da forma $(1+x)dx \wedge dy \wedge dz$ na orientação oposta é $-5/24$, enquanto a massa permanece positiva. O primeiro momento $1/24$ também resulta do centroide com coordenada $x = 1/4$.

Seção 13.8: Integrais de superfície

Solução comentada — A023

O gradiente é $(-2x, -2y, -2z)$, logo $q = (4x, 2y, 6z)$. Sua forma de fluxo é $\beta_q = 4x\,dy \wedge dz + 2y\,dz \wedge dx + 6z\,dx \wedge dy$, e $d\beta_q = 12\,\mathrm{vol}$. O fluxo exterior da esfera unitária é $12(4\pi/3) = 16\pi$. No balanço estacionário proposto, $s = 12$. Embora as respostas nas direções sejam distintas, a divergência soma suas contribuições à geração volumétrica necessária para manter esse perfil.

Seção 13.9: Teoremas de Green, Stokes e Gauss

Solução comentada — A020

Pelas definições, $a(1-x) = b(x)$ e $b(1-x) = a(x)$, portanto $\chi_1(1-x) = \chi_2(x)$. Substituindo $t = 1 - x$ na integral, as duas integrais são iguais. Como a soma das funções é 1, a soma das integrais vale 1; cada uma vale $1/2$. A simetria permite determinar esses valores sem procurar primitivas das funções exponenciais usadas na construção.

Solução comentada — A021

Como as funções dependem apenas de x, $d(\chi_i x\,dy) = (\chi_i + x\chi_i')dx \wedge dy$. Somando, $\chi_1 + \chi_2 = 1$ e $\chi_1' + \chi_2' = 0$ dão $dx \wedge dy = d\omega$. Na sobreposição, os termos de derivada dos pesos aparecem individualmente, mas cancelam na soma. Esse cancelamento é essencial ao reunir argumentos locais.