

CONCEITOS, ESTRUTURAS E APLICAÇÕES

Bases Matemáticas

Uma introdução ao raciocínio matemático



Armando Caputi e Daniel Miranda

© 2023 Armando Caputi e Daniel Miranda.

Versão 15 — Fevereiro 2023.

Licenciado sob Creative Commons Attribution 4.0. Você não pode usar este arquivo exceto em conformidade com a Licença. Uma cópia pode ser obtida em <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>.



Lista de tarefas pendentes

■ conexão entre conjuntos e lógica	23
■ exemplo de demonstração envolvendo complementar	33
■ exemplo de demonstração com produto cartesiano	36
■ seção de números naturais	39
■ definir radiciação e apresentar suas propriedades	55
■ inserir exercícios de radiciação e potenciação	56
■ representação dos reais	58
■ inserir desenhos de intervalos reais	63
■ plano cartesiano	64
■ imagem inversa de funções	96
■ gráfico de funções	111

Sumário

Introdução	ix
Símbolos e notações gerais	xiii
Agradecimentos	xv
1 Elementos de Lógica e Linguagem Matemática	1
1.1 Proposições	1
1.1.1 Proposições Quantificadas	2
1.1.2 Proposições Compostas: e, ou, não	5
1.1.3 Implicação	9
1.1.4 Múltiplos Quantificadores	12
1.2 Demonstrações	14
1.2.1 Por que Demonstrar?	14
1.2.2 Métodos de Demonstração	15
2 Generalidades sobre Conjuntos	23
2.1 Conceitos básicos	23
2.2 Relações elementares	26
2.3 Operações	29
3 Conjuntos Numéricos	39
3.1 Números naturais, inteiros e racionais	39
3.1.1 Soma e multiplicação	39
3.1.2 Potenciação	40
3.2 Princípio de Indução Finita	41
3.3 Números reais	47
3.3.1 Apresentação axiomática dos números reais	48
3.3.2 Potenciação de números reais	55
3.3.3 Representações dos números reais	56
3.3.4 Valor absoluto de um número real	60
3.3.5 Introdução à Topologia da reta	62
3.3.6 O Plano Cartesiano	64
4 * Complementos sobre Conjuntos	67
4.1 Famílias de Conjuntos	67
4.1.1 Sobre índices	67
4.1.2 Operações com famílias de conjuntos	68

5	Combinatória	71
5.1	Princípios de contagem	71
5.1.1	O princípio aditivo	71
5.1.2	O princípio multiplicativo	72
5.1.3	Subconjuntos e palavras binárias	74
5.2	Contagens em que a ordem importa	75
5.2.1	Arranjos sem repetição	75
5.2.2	Permutações	76
5.3	Permutações com repetições	78
5.4	Combinações	80
5.5	Coefficientes binomiais	82
5.5.1	Simetria	83
5.5.2	A identidade de Pascal	83
5.5.3	O binômio de Newton	83
5.6	Aprofundamento: o método de barras e estrelas	85
6	Generalidades sobre Funções	89
6.1	Conceitos básicos	89
6.2	Propriedades	93
7	Funções Reais a Variáveis Reais	99
7.1	Transformações do gráfico de uma função	102
7.1.1	Translações	102
7.1.2	Homotetias	104
7.1.3	Reflexões	105
7.2	Gráfico da função inversa	107
7.3	Simetrias do gráfico de uma função	107
7.3.1	Simetria translacional: funções periódicas	110
7.4	Funções monótonas	112
7.5	Operações com funções	112
8	Funções algébricas	117
8.1	Funções afins	117
8.1.1	Equações de retas	119
8.2	Função módulo e definições por partes	121
8.3	Funções quadráticas	122
8.4	Funções potência e raiz	126
8.5	Funções polinomiais	129
8.6	Funções racionais	131
9	Funções exponenciais e logarítmicas	139
9.1	Da potência à função exponencial	139
9.1.1	Transformações do gráfico exponencial	141
9.2	Variação multiplicativa e modelos exponenciais	143
9.3	Função logarítmica	144
9.4	Propriedades dos logaritmos	146
9.5	Escala logarítmica e aplicações	149

10 Funções trigonométricas	153
10.1 Seno e cosseno na circunferência unitária	153
10.1.1 Valores notáveis e sinais	156
10.2 Gráficos de seno e cosseno	157
10.3 Identidades trigonométricas fundamentais	159
10.4 Amplitude, período e transformações dos gráficos	162
10.5 Tangente e funções associadas	165
10.5.1 Tangente e secante	165
10.5.2 Cotangente e cossecante	167
10.6 Simplificação de expressões trigonométricas	169
10.7 Modelos periódicos	172
10.8 Funções trigonométricas inversas	174
10.9 Modelos geométricos	177
11 Sequências	179
11.1 Conceitos Básicos	179
11.1.1 Sequências Crescentes e Decrescentes	184
11.1.2 Sequências Limitadas	186
11.2 Convergência e Limite de Sequências	189
11.2.1 Intuições sobre Convergência	189
11.2.2 Consequências da definição	194
11.2.3 Propriedades do Limite de Sequências	196
11.2.4 Teorema do confronto	198
11.3 Limites infinitos	200
11.4 * Séries	201
11.4.1 Série geométrica	202
11.4.2 Série telescópica	203
12 Limites e continuidade de funções	205
12.1 Aproximação e reta tangente	205
12.1.1 A reta tangente	205
12.2 A noção de limite	207
12.3 Definição de limite	213
12.4 Limites Laterais	217
12.5 Propriedades do Limite de Funções	222
12.6 Continuidade	231
12.7 Propriedades das Funções Contínuas	238
12.7.1 Teorema do Valor Intermediário	239
12.7.2 Valores Extremos	243
12.8 * Demonstração das propriedades básicas de limite	245
12.9 * Continuidade uniforme	247
13 Limites Infinitos e no Infinito	253
13.1 Limites no Infinito	253
13.2 Limites Infinitos	256
13.2.1 Propriedades dos Limites Infinitos e no Infinito	260

13.3	O número e e as funções exponencial e logarítmica	266
13.3.1	Juro Composto	271
13.3.2	Crescimento Demográfico	272
A	Equações e Inequações	275
A.1	Equações	275
A.1.1	Equações Polinomiais	276
A.1.2	Equações Envolvendo Expressões Racionais	279
A.1.3	Equações Envolvendo Raízes	281
A.1.4	Equações Envolvendo Módulos	283
A.2	Inequações	284
A.2.1	Inequações Envolvendo Polinômios	286
A.2.2	Inequações Envolvendo Expressões Racionais	290
A.2.3	Inequações Envolvendo Raízes	291
A.2.4	Inequações Envolvendo Módulos	293
A.3	Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas	294
A.3.1	Equações Exponenciais e Logarítmicas	295
A.3.2	Inequações Exponenciais e Logarítmicas	297
A.4	Equações e Inequações Trigonométricas	298
A.4.1	Equações Trigonométricas	298
A.4.2	Inequações Trigonométricas	301
B	Fórmulas da Álgebra, da Geometria e da Trigonometria	303
	Respostas de Alguns Problemas e Exercícios	366
	Índice Remissivo	367

Introdução

O ensino de Matemática na transição para o ensino superior envolve uma dificuldade que não se reduz à introdução de novos conteúdos. A essa dificuldade soma-se uma realidade que não pode ser ignorada: os estudantes chegam com formações muito diferentes entre si e, não raro, com lacunas em conteúdos elementares que serão pressupostos desde o início. O estudante chega, em geral, trazendo uma formação marcada pelo domínio de técnicas e procedimentos. Encontra, porém, um modo de fazer Matemática no qual saber aplicar uma regra já não basta. Muitos dos objetos com que se depara, números, equações, funções, gráficos e expressões algébricas, já lhe são familiares. Essa familiaridade, contudo, pode esconder uma mudança profunda: ter aprendido a resolver uma equação, simplificar uma expressão ou aplicar uma fórmula não significa, necessariamente, compreender as condições que tornam esses procedimentos válidos, nem ser capaz de justificar os resultados obtidos.

O conhecimento escolar anterior oferece, sem dúvida, um primeiro contato com esses objetos. Mas esse contato não garante que o estudante consiga analisá-los, formular com precisão as hipóteses de uma afirmação ou sustentar um argumento que ultrapasse a execução de um procedimento conhecido. Reconhecer um conteúdo, portanto, não é o mesmo que estar preparado para tratá-lo segundo as exigências da Matemática universitária. A ruptura não está apenas naquilo que se estuda, mas no modo como se passa a olhar para aquilo que já se conhecia.

No ensino superior, exige-se maior precisão na linguagem, atenção às hipóteses e responsabilidade na construção dos argumentos. O estudante é chamado a participar mais ativamente do trabalho matemático: não apenas a encontrar respostas, mas a explicar por que são válidas; não apenas a utilizar resultados, mas a compreender em que condições podem ser utilizados; não apenas a acompanhar uma demonstração, mas a reconhecer a necessidade de sua estrutura. A transição, assim, não consiste simplesmente em aprender conteúdos novos. Trata-se de deslocar-se de uma relação predominantemente técnica com a Matemática para uma prática em que compreender, justificar e demonstrar constituem partes inseparáveis do fazer matemático.

É nesse contexto que se insere este livro.

Bases Matemáticas teve sua origem na disciplina de mesmo nome da Universidade Federal do ABC, concebida para acompanhar os estudantes nos primeiros momentos de sua formação universitária. Desde o início, a proposta esteve associada a duas preocupações complementares. De um lado, retomar conhecimentos elementares e organizá-los segundo um grau maior de precisão e coerência. De outro, criar condições para que o estudante desenvolvesse progressivamente uma postura mais autônoma diante da Matemática.

Essa autonomia não deve ser confundida com a simples capacidade de resolver exercícios sem auxílio. Ela envolve, antes de tudo, aprender a reconhecer o que se sabe e o que ainda precisa ser compreendido, identificar quais propriedades estão sendo utilizadas em um argumento, retornar a uma definição

quando necessário e perceber quando um procedimento aparentemente correto carece de justificativa. Em Matemática, a autonomia se constrói também pela capacidade de formular boas perguntas.

Por essa razão, o livro não pretende ser apenas uma revisão da Matemática escolar. Tampouco se propõe a reunir, em forma condensada, todos os assuntos que possam vir a ser úteis nos cursos posteriores. A escolha e a organização dos conteúdos obedecem a um percurso. Em diversos momentos, retomaremos objetos familiares; o propósito, entretanto, será observá-los de uma perspectiva diferente e utilizá-los para introduzir formas de raciocínio que se tornarão cada vez mais importantes ao longo da formação universitária.

Esse percurso começa pela linguagem. Afirmções, conectivos, quantificadores e implicações aparecem não como um formalismo separado da prática matemática, mas como instrumentos necessários para dizer com clareza o que se pretende afirmar. Saber distinguir uma afirmação de sua recíproca, negar corretamente uma proposição quantificada ou compreender o papel de uma hipótese são habilidades que reaparecem continuamente ao longo do texto.

É nesse mesmo espírito que surgem os primeiros métodos de demonstração. Uma demonstração não é uma sequência de palavras acrescentada ao final de um resultado já conhecido, nem uma formalidade exigida apenas em cursos mais abstratos. Ela é o meio pelo qual se explicita por que uma afirmação deve ser verdadeira a partir das hipóteses estabelecidas. A diferença entre verificar muitos casos e demonstrar uma propriedade geral é uma das primeiras distinções importantes que o estudante encontra ao mudar sua relação com a Matemática.

A linguagem dos conjuntos e o estudo dos conjuntos numéricos ampliam esse movimento. Conceitos familiares passam a ser tratados por suas propriedades e pelas relações que estabelecem entre si. Pertinência, inclusão, ordem, intervalos, desigualdades e valor absoluto deixam de ser apenas ferramentas operacionais e tornam-se parte de uma linguagem mais geral, capaz de organizar objetos e argumentos. A combinatória acrescenta outro aspecto dessa formação: em muitos problemas, a dificuldade principal não está na conta final, mas em compreender a estrutura da situação, separar casos, reconhecer escolhas independentes e justificar por que determinada contagem está correta.

O estudo das funções ocupa uma posição central nesse processo. A noção de função permite abandonar o tratamento isolado de números e expressões e passar ao estudo de relações entre grandezas. Uma função não se reduz à fórmula utilizada para representá-la: possui domínio, contradomínio e imagem, pode ser composta com outras funções, pode ou não admitir uma inversa e pode apresentar propriedades que se tornam visíveis tanto algebricamente quanto geometricamente.

Essa mudança de perspectiva é particularmente importante. No estudo escolar, é comum que um gráfico apareça como uma representação posterior à fórmula, quase como uma ilustração. Aqui, procuraremos explorar de maneira mais sistemática a relação entre diferentes formas de representar uma mesma função. Uma expressão algébrica pode revelar propriedades de um gráfico; inversamente, a observação geométrica pode sugerir propriedades que depois serão justificadas algebricamente.

As funções algébricas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas fornecem o repertório concreto para esse trabalho. Algumas técnicas serão retomadas e exercitadas, mas o interesse não está em formar um catálogo de fórmulas. O objetivo é compreender como essas famílias se comportam, como se relacionam entre si e como mudanças na expressão de uma função se refletem em seu gráfico e em suas propriedades.

Ao longo desse percurso, uma ideia passa a ocupar espaço crescente: a Matemática permite estudar

não apenas objetos, mas também comportamentos. Uma função pode crescer ou decrescer, oscilar, repetir um padrão ou aproximar-se de determinado valor. O interesse desloca-se, pouco a pouco, dos valores isolados para aquilo que acontece quando uma variável percorre muitos valores ou quando um processo continua indefinidamente.

É nesse ponto que entram as sequências.

Uma sequência pode ser vista, inicialmente, como uma lista ordenada de números. Essa descrição simples, porém, permite formular questões novas. O que ocorre com seus termos quando avançamos cada vez mais na sequência? Eles crescem indefinidamente? Permanecem limitados? Oscilam? Aproximam-se de algum valor?

Essas perguntas conduzem naturalmente à noção de limite. Em exemplos simples, muitas vezes é fácil perceber intuitivamente que uma sequência se aproxima de determinado número. O desafio matemático está em tornar precisa essa percepção. Dizer que os termos “ficam cada vez mais próximos” não é ainda uma definição: é preciso estabelecer o que significa essa proximidade e de que maneira ela depende da posição ocupada pelo termo na sequência.

Chega-se, assim, a uma afirmação da forma

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

A primeira leitura dessa expressão pode causar alguma estranheza. No entanto, seus elementos terão sido encontrados anteriormente: os quantificadores e a implicação, os números naturais e reais, as desigualdades, o valor absoluto e a própria ideia de demonstração. A definição de limite reúne essas diferentes partes numa única afirmação e lhes dá uma finalidade nova.

O estudo do limite de sequências, portanto, não aparece como um assunto isolado acrescentado ao final do livro. Ele exige que o estudante mobilize simultaneamente boa parte da linguagem e dos hábitos de raciocínio desenvolvidos nos capítulos anteriores. Por isso, constitui uma conclusão natural para este primeiro contato com a Matemática universitária.

Naturalmente, nenhum texto pode substituir o trabalho individual necessário para que essa mudança ocorra. A leitura deve ser acompanhada de cálculos, tentativas de demonstração, construção de exemplos e resolução de problemas. Em alguns momentos será necessário retornar a uma definição apresentada páginas antes; em outros, um exemplo aparentemente simples exigirá mais reflexão do que um cálculo extenso. Isso faz parte do processo.

Os exercícios foram pensados nesse espírito. Alguns têm a finalidade de consolidar técnicas indispensáveis. Outros procuram chamar a atenção para aspectos conceituais, explorar casos particulares, produzir contraexemplos ou exigir pequenos argumentos. Não se espera que todos sejam resolvidos da mesma maneira ou com a mesma facilidade. Muitas vezes é justamente ao enfrentar uma dificuldade que uma definição ou um resultado deixa de ser apenas algo lido e passa a ser efetivamente compreendido.

Os assuntos tratados nas páginas seguintes são, em grande parte, elementares. A escolha é deliberada. Para aprender a raciocinar matematicamente não é necessário começar por objetos sofisticados. Ao contrário, trabalhar com objetos conhecidos permite concentrar a atenção naquilo que está efetivamente mudando: a precisão da linguagem, a organização das ideias, a natureza dos argumentos

e a necessidade de justificar as afirmações feitas.

Ao final do percurso, esperamos que o estudante não apenas disponha de um repertório mais amplo de resultados e técnicas, mas que tenha adquirido uma maneira diferente de se relacionar com eles. Diante de uma afirmação matemática, a pergunta “como se faz?” continuará sendo importante. Mas esperamos que outras perguntas tenham se tornado igualmente naturais: o que exatamente está sendo afirmado? Quais são as hipóteses? Por que o argumento funciona? Em que situações ele deixaria de funcionar? Como se pode demonstrar o resultado?

A passagem para essas perguntas é, em boa medida, a passagem que este livro pretende acompanhar.

Símbolos e notações gerais

Ao longo do curso serão adotados os seguintes símbolos e notações (sem prejuízo de outros símbolos e notações que irão sendo introduzidos ao longo destas notas):

$\exists$	:	<i>existe</i>
$\forall$	:	<i>qualquer que seja</i> ou <i>para todo(s)</i>
$\Rightarrow$	:	<i>implica</i>
$\Leftrightarrow$	:	<i>se, e somente se</i>
$\therefore$	:	<i>portanto</i>
$\because$	:	<i>pois</i>
$ $	:	<i>tal que</i>
$:=$	:	<i>definição</i> (o termo à esquerda de $:=$ é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	:	<i>id est</i> (em português, <i>isto é</i>)
$\square$	:	<i>indica o final de uma demonstração</i>

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos professores Jerônimo Cordoni Pellegrini, Cristina Coletti, Eduardo Gueron à professora Ana Carolina Boero e à aluna Vanessa Carneiro Morita pelas sugestões de melhorias e pelas inúmeras correções.

Também gostaríamos de agradecer ao prof. Jerônimo Cordoni Pellegrini por ter colaborado na elaboração de vários dos exercícios que apresentamos ao longo do texto.

1

Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

“Quando eu uso uma palavra, disse Humpty Dumpty, em tom bastante desdenhoso, ela significa exatamente o que eu quiser que ela signifique - nem mais nem menos.”
Através do Espelho - Lewis Carroll

A matemática utiliza uma linguagem específica, na qual os termos possuem significados precisos e muitas vezes distintos do usual. Assim é necessário que conheçamos o sentido de alguns termos e expressões matemáticas. Esse é um dos objetivos desse capítulo, ao apresentar de modo sucinto e intuitivo os aspectos fundamentais da linguagem matemática, enfatizando principalmente aqueles termos que são usados em contextos e com significados diversos daqueles em que costumamos empregá-los normalmente.

Mas não é somente o vocabulário e a linguagem que são distintos na matemática. Também a concepção de *argumento*, de *justificativa*, e mesmo de *explicação*. Um argumento matemático, também conhecido como demonstração ou prova, para ser correto, deve seguir princípios estritos de lógica, princípios que garantam a confiabilidade do conhecimento matemático. Alguns desses princípios são apresentados na seção 1.2.

1.1 Proposições

Começaremos definindo as frases mais simples de nossa linguagem: as proposições.

Definição 1.1

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é *verdadeira* ou *falsa*, mas não simultaneamente ambas.

Exemplo 1.1 — Exemplos

As seguintes frases são exemplos de proposições.

- “ $2 + 5 = 7$ ”;
- “A função $f(x) = -x$ é uma função crescente”. Nesse caso, temos um exemplo de uma proposição *falsa*.
- “ $2^{25^{9876}} + 3^{4576}$ é primo”; É uma proposição pois apesar de não ser fácil decidir se a proposição é *verdadeira* ou *falsa*, claramente só uma dessas opções pode ocorrer.

Exemplo 1.2 — Exemplos

Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor *verdadeiro* ou *falso*.

- “Vamos dançar!”
- “Como você está?”.
- “Esta sentença é falsa”. Essa frase não pode ser verdadeira pois isto implicaria que ela é falsa. E não pode ser falsa pois implicaria que é verdadeira.
- “Está quente hoje”. Essa frase pode ser vista como uma proposição desde que especifiquemos precisamente o que significa quente, como por exemplo se definirmos que está quente se a temperatura é maior que 26°C , pois somente assim podemos atribuir um valor de verdade a frase. Note, porém, que esse não é o uso cotidiano da frase. O uso cotidiano expressa uma impressão, uma sensação e nesse sentido não é uma proposição.

Como ilustrado pelo exemplo anterior, o fato de uma sentença poder ser vista como uma proposição depende do contexto em que essa sentença é enunciada e dentro desse contexto uma proposição deve ser suficientemente clara e objetiva para que possamos atribuir um e somente um valor verdade, i.e, *verdadeiro* ou *falso*.

Finalmente, a definição de proposição implica que todas as afirmações matemáticas serão necessariamente verdadeiras ou falsas, não havendo outra possibilidade (esse último fato é conhecido como *Princípio do Terceiro Excluído*).

Notação: No que se segue denotaremos uma proposição qualquer por p, q, r , etc.

1.1.1 Proposições Quantificadas

Em diversas situações precisamos que o “sujeito” das proposições seja uma variável que possa ser substituída por um elemento qualquer dentre uma coleção de objetos $\mathbb{U}$ em consideração. O conjunto $\mathbb{U}$ neste caso será denominado **universo do discurso**, ou ainda, **domínio de discurso**. Assim, por exemplo, na sentença “ $x \in \mathbb{R}, x < 3$ ”, x é a variável e $\mathbb{R}$ é o universo do discurso.

Proposições que dependam de uma ou mais variáveis são denominadas **proposições abertas**. Elas são indicadas por uma letra seguida da variável ou das variáveis entre parênteses, i.e,

$$p(x), q(x), p(x, y), \dots$$

O valor verdade de uma proposição aberta depende do valor atribuído às variáveis. Por exemplo, considere a função proposicional $p(x) = "x < 3"$, neste caso se $x = 2$ então $p(2) = "2 < 3"$ tem valor verdade *verdadeiro*, por outro lado se considerarmos $x = 4$ temos que $p(4) = "4 < 3"$ tem valor verdade *falso*.

Definição 1.2

O conjunto dos valores de x para os quais a proposição aberta $p(x)$ *verdadeira* é denominado **conjunto verdade** de $p(x)$.

Exemplo 1.3 – Exemplos

- O conjunto verdade de $p(x) = "x \text{ é primo e } 3 < x < 14"$ é $\{5, 7, 11, 13\}$
- O conjunto verdade de $p(x) = "x \text{ é real e } x^2 + 1 = 5"$ é $\{-2, 2\}$

Através de proposições abertas podemos fazer afirmações sobre todos os elementos de um conjunto usando o **quantificador universal** $\forall$ que é lido como “para todo” ou “qualquer que seja”.

Assim a proposição “para todo número natural n temos que $2n + 1$ é ímpar” pode ser escrita como

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2n + 1 \text{ é ímpar}$$

ou ainda como

$$\forall n \in \mathbb{N} p(n),$$

sendo que $p(n)$ denota a proposição aberta “ $2n + 1$ é ímpar”.

Também é possível fazer afirmações sobre a existência de um elemento de um conjunto usando o **quantificador existencial** $\exists$, que é lido como “existe”. Desta forma a proposição “a equação linear $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, admite solução real” pode ser escrita como :

$$\text{Se } a \neq 0, \exists x \in \mathbb{R} \mid ax + b = 0.$$

Ou ainda, se denotarmos como $q(x) = "ax + b = 0"$ podemos reescrever a afirmação anterior como:

$$\text{Se } a \neq 0, \exists x \in \mathbb{R} \mid q(x).$$

Ou de modo mais resumido, deixando subentendido o domínio do discurso e o símbolo de tal que, $\mid$:

$$\text{Se } a \neq 0, \exists x q(x)$$

Ressaltamos que $\exists x \mid p(x)$ significa que existe **pelo menos um** elemento no domínio de discurso tal que para esse elemento vale $p(x)$. Em diversas situações esse elemento é único, denotaremos

esse fato por $\exists!x \mid p(x)$, que se lê “existe e é único x tal que $p(x)$ ”. Assim por exemplo, nos reais, $\exists!x \in \mathbb{R} \mid (x - 1) = 0$.

É importante distinguirmos as variáveis que estão quantificadas das que não estão. Uma variável é dita **livre** quando não está quantificada e é dita **aparente** quando está quantificada. Assim, na proposição “ n é par”, n é uma variável livre. Já em “para todo número natural n , $2n + 1$ é ímpar” n é uma variável aparente.

Em português	símbolo	nome
Para todo, para cada	$\forall$	quantificador universal
Existe, há, para algum	$\exists$	quantificador existencial
Existe único	$\exists!$	

Tabela 1.1. Quantificadores

Os quantificadores permitem distinguir duas formas fundamentais de afirmação matemática. Uma afirmação **universal** diz que uma propriedade vale para todos os elementos do domínio; uma afirmação **existencial** diz que há pelo menos um elemento para o qual a propriedade vale.

Exemplo 1.4 — Exemplos

No universo dos números naturais:

1. “Todo número natural é maior ou igual a 0” é uma afirmação universal:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 0.$$

2. “Existe um número natural cujo quadrado é igual a ele mesmo” é uma afirmação existencial:

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid n^2 = n.$$

3. “Todo número natural é ímpar” é uma afirmação universal falsa.
4. “Existe um número natural par” é uma afirmação existencial verdadeira.

O tipo de quantificador não determina o valor verdade da afirmação. Há afirmações universais verdadeiras e falsas, assim como afirmações existenciais verdadeiras e falsas.

Exemplos e Contra-exemplos

Quando uma afirmação é universal, um **contraexemplo** é um elemento do domínio para o qual a propriedade afirmada falha. Um único contraexemplo basta para mostrar que a afirmação universal é falsa.

Exemplo 1.5 — Exemplos

1. Na afirmação “todo número natural é ímpar”, o número 5 satisfaz a propriedade, mas isso não demonstra a afirmação. Já o número 2 é um contraexemplo e, sozinho, mostra que ela é falsa.
2. Na afirmação “existe um inteiro x tal que $x^2 = 9$ ”, o número 3 é um exemplo que comprova a existência pedida.

Essas duas formas de afirmação exigem cuidados diferentes:

- para provar uma afirmação existencial, basta exibir um elemento que satisfaça a propriedade;
- para refutar uma afirmação universal, basta exibir um contraexemplo;
- verificar muitos exemplos não demonstra uma afirmação universal;
- para provar uma afirmação universal, é necessário um argumento que se aplique a um elemento arbitrário do domínio.

Exercícios

1.1 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica: ??Existe um número real n tal que $n^2 = 2$. ??Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$. ??Existe x tal que x^2 é par e divisível por 3. ??Não existe número inteiro x tal que x^2 é primo ou x^2 é negativo. ??Existe um número inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar. ??Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$. ??Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B .

1.2 — Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine o valor verdade para cada uma das seguintes proposições: ?? $\exists x \in A \mid x + 4 = 9$. ?? $\exists x \in A \mid x < 7$. ?? $\forall x \in A, x + 3 < 7$. ?? $\forall x \in A, x + 3 < 9$.

1.3 — Para todas as afirmações a seguir n denota um número natural. Determine o conjunto verdade das seguintes proposições abertas: ?? $n^2 < 12$?? $3n + 1 < 25$?? $3n + 1 < 25$ e $n + 1 > 4$?? $n < 5$ ou $n > 3$?? n é primo e não é verdade que $n > 17$?? $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) = 0$

1.4 — Dê exemplos ou contraexemplos, se existirem, para as seguintes afirmações: ??Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > 2$. ??Todas as letras da palavra “banana” são vogais. ??Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$. ??Para todo $y \in \mathbb{N}$, $y^3 > 1$

1.1.2 Proposições Compostas: e, ou, não

Podemos expandir nossa linguagem construindo novas proposições através da combinação de proposições mais simples de modo a obter proposições mais elaboradas. Faremos a combinação de proposições através de conectivos, dentre os quais “e”, “ou” e “*implica*” e do modificador “*não*”.

Definição 1.3

Dadas duas proposições p, q :

- a proposição composta $p \text{ ou } q$ é chamada **disjunção** de p e q . A disjunção $p \text{ ou } q$ é verdadeira quando pelo menos uma das proposições p ou q forem verdadeiras. Caso contrário o valor verdade de $p \text{ ou } q$ é falso.
- a proposição composta $p \text{ e } q$ é chamada **conjunção** das proposições p e q . A conjunção $p \text{ e } q$ é verdadeira somente quando as proposições p e q forem ambas verdadeiras. Caso contrário o valor verdade de $p \text{ e } q$ é falso.

A proposição $p \text{ ou } q$, pela definição anterior, é falsa somente quando **ambas** as proposições p e q forem falsas. Desta forma o uso do conectivo *ou* em matemática não é o mesmo que o uso cotidiano do termo. Assim, por exemplo, o sentido usual da expressão “Pedro estava estudando ou Pedro estava numa festa” não inclui a possibilidade que ele estivesse estudando numa festa, enquanto que o conectivo *ou* em matemática inclui essa possibilidade. Ou seja, em matemática o conectivo *ou* é sempre usado de modo inclusivo.

Por outro lado o sentido da conjunção *e* se aproxima do sentido usual do “e” em português, assim a proposição $p \text{ e } q$ é verdadeira somente quando ambas as proposições p e q forem verdadeiras.

Definição 1.4

Dado uma proposição p , a negação de p é uma proposição com valor verdade invertido, chamada de **negação** de p , denotada $\text{não } p$ e que pode ser lida como “não p ” ou “não é verdade p ”.

Exemplo 1.6 — Exemplos

- A negação da proposição “ x é ímpar” é a afirmação “ x não é ímpar”, ou equivalentemente “ x é par”
- A negação da proposição “ $\sqrt{2}$ não é racional” é “ $\sqrt{2}$ é racional”

Observação

Adotaremos a seguinte convenção relativa a prioridade dos operadores lógicos: o modificador *não* abrange somente a proposição mais próxima, salvo o caso de parênteses. Assim, por exemplo $\text{não } p \text{ ou } q$, somente a proposição p é negada, isto é, a proposição anterior é uma forma abreviada da proposição $(\text{não } p) \text{ ou } q$.

O seguinte teorema nos diz como negar a conjunção e a disjunção de duas proposições.

Teorema 1.1**Negação da Disjunção e da Conjunção e Dupla Negação**

Sejam p, q proposições. Então são válidas as seguintes regras de negação

1. A negação da proposição $p \text{ e } q$ é $(\text{não } p) \text{ ou } (\text{não } q)$;
2. A negação da proposição $p \text{ ou } q$ é $(\text{não } p) \text{ e } (\text{não } q)$;
3. A negação da proposição $\text{não } p$ é p .

Exemplo 1.7 — Exemplos

- A negação da proposição “ x é divisível por 2 e 3” é “ x não é divisível por 2 ou x não é divisível por 3”.
- A negação da proposição “ x é divisível por 2 ou 3” é “ x não é divisível por 2 e x não é divisível por 3”.
- A negação da proposição “ b é soma de quadrados ou b é primo” é a afirmação que “ b não é soma de quadrados e b não é primo”.
- A negação da proposição “ x é maior que 2 ou x é menor igual que -1 ” é a proposição “ x é menor igual a 2 e x é maior que -1 ”.

Para proposições quantificadas temos ainda as seguintes regras de negação:

Teorema 1.2**Negação do Quantificador**

Seja $p(x)$ uma proposição aberta. Então são válidas as seguintes regras de negação:

- A negação da proposição “para todo x em D é verdade $p(x)$ ” é a proposição “existe pelo menos um x em D tal que não é verdade $p(x)$ ”.
- A negação da proposição “existe x em D tal que é verdade $p(x)$ ” é a proposição “para todo x em D não é verdade $p(x)$ ”.

Exemplo 1.8 — Exercício resolvido

Converta as seguintes afirmações para a forma simbólica e diga quais são as suas negações:

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.
- Existe inteiro n tal que $n + 3 = 4$.

Solução.

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.

Se denotarmos $m(x)$ = “ x pode ser decomposto como produto de números primos”, então a proposição acima pode ser reescrita na forma simbólica como:

$$\forall x \in \mathbb{N}, m(x)$$

ou mais resumidamente $(\forall x)m(x)$, deixando implícito que o domínio da variável é o conjunto dos números naturais.

A negação da proposição é “Existe um número natural que não pode ser decomposto em primos” ou simbolicamente

$$\exists x \in \mathbb{N} \mid \text{não } m(x)$$

- Existe inteiro n tal que $n + 3 = 4$.

Se denotarmos por $p(n)$ = “ $n + 3 = 4$ ” então a proposição pode ser reescrita em forma simbólica como

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid p(n)$$

Para essa proposição o domínio do discurso são os números naturais. Observe que essa afirmação é verdadeira pois 1 satisfaz $p(1)$. A negação de “Existe um número inteiro n tal que $n + 3 = 4$ ” é “para todo inteiro n temos que não é verdade que $n + 3 = 4$ ”, ou simplificando “para todo número inteiro n temos que $n + 3 \neq 4$ ”

◀

Exercícios

1.5 — Atribua um valor verdade à cada uma das seguintes proposições: “5 é um número primo e 4 é um número ímpar.” “5 é um número primo ou 4 é um número ímpar.” “Não é verdade que (5 é um número primo e 4 é um número ímpar.)” “(Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.”

1.6 — Negue as seguintes proposições: “ $3 > 4$ e 2 é um número par.” “ $4 > 2$ ou $3 > 5$.” “ $4 > 2$ ou $(\exists k)(k < 3 \text{ e } k > 5)$.” “(Não é verdade que 3 é um número par) ou que 5 é um número ímpar.” “2 é um número par e $3k + 1$ é um número ímpar.” “2 é número par e não é verdade que 3 é um número ímpar.” “Não é verdade que (5 é um número primo e 4 é um número ímpar.)” “(Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.”

1.7 — Nas seguintes proposições abertas o domínio do discurso é o conjunto dos números reais. Para essas proposições determine e esboce na reta real o seu conjunto verdade. “ $x > 2$ e $x < 4$.” “ $x > 2$ ou $x < 3$.” “ $x > 2$ ou $(x < 5 \text{ e } x > 3)$.” “não é verdade que $(x > 2 \text{ e } x < 4)$.”

1.8 — Para as seguintes proposições, escreva a negação, em português e simbólica, de cada uma delas. “Existe um número real x tal que $x^2 = 2$.” “Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.” “Existe um número natural n tal que n^2 é par e divisível por 3.” “Não existe número inteiro m tal que m^2 é um número primo ou m^2 é negativo.” “Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.” “Todo elemento de um conjunto A é elemento do conjunto B .”

1.1.3 Implicação

Um dos conectivos de maior importância na matemática é a **implicação** ou **condicional**.

Definição 1.5

Dadas duas proposições p e q então podemos construir a proposição “se p então q ” que também pode ser lida como “ p implica q ”, que denotaremos por

$$p \Rightarrow q.$$

A implicação $p \Rightarrow q$ é *falsa* somente no caso que a proposição p é *verdadeira* e a proposição q é *falsa*.

Numa implicação, $p \Rightarrow q$, a proposição p é denominada **hipótese** ou **premissa** e a proposição q é denominada **tese**, **conclusão** ou **consequente** da implicação.

A tabela a seguir apresenta o valor verdade de $p \Rightarrow q$ em função dos valores verdades de p e q .

p	q	$p \Rightarrow q$
<i>verdadeiro</i>	<i>verdadeiro</i>	<i>verdadeiro</i>
<i>verdadeiro</i>	<i>falso</i>	<i>falso</i>
<i>falso</i>	<i>verdadeiro</i>	<i>verdadeiro</i>
<i>falso</i>	<i>falso</i>	<i>verdadeiro</i>

Tabela 1.2. Valores verdade da implicação em função dos valores verdades de p e q .

É importante observar, que na matemática a implicação $p \Rightarrow q$ não estabelece nenhuma relação de causa-efeito entre a hipótese e a tese. A implicação matemática somente estabelece uma relação entre o valor lógico da implicação e os valores lógicos da premissa e da conclusão.

Assim a implicação “Se 4 é par, então um triângulo equilátero tem todos os ângulos iguais” é uma implicação verdadeira pois o antecedente (“4 é par”) é verdadeiro e o consequente (“um triângulo equilátero tem todos os ângulos iguais”) é também verdadeiro. Apesar disso, nenhuma relação causal parece existir entre esses dois fatos. Mais surpreendente, nesse aspecto é que a implicação “se 2 é ímpar então $2 + 5 = 3$ ” é verdadeira. Esse exemplo ilustra a última linha da nossa tabela. É fundamental observar que estamos afirmando apenas que a implicação é verdadeira, e não a conclusão da implicação é verdadeira.

Esse comportamento “não-usual” da implicação pode ser melhor entendido através de uma analogia. Imagine uma lei que diz que todos os motoristas de fusca devem usar gravatas vermelhas. Quando um motorista estará desobedecendo a lei? Se ele não estiver dirigindo fusca (ou seja premissa falsa) então não importa se ele está ou não usando gravata vermelha pois nesse caso a lei não se aplica a ele. O único modo de desobedecer a lei é estar dirigindo um fusca (premissa verdadeira) e não estiver usando gravata vermelha (conclusão falsa). Esse é o comportamento da implicação, ela só é falsa se a premissa for verdadeira e o consequente falso.

Exemplo 1.9 – Exemplos

- “Se 2 é par, então 3 é ímpar” é verdadeira: hipótese e conclusão são verdadeiras.
- “Se 2 é par, então 4 é ímpar” é falsa: a hipótese é verdadeira e a conclusão é falsa.
- “Se 2 é ímpar, então 3 é par” é verdadeira: a hipótese é falsa.
- “Se a mãe de Pedro é um trator então Pedro é uma moto-serra.” é uma implicação verdadeira, pois a premissa é falsa (implicitamente estamos assumindo que Pedro é humano, e que humanos não são tratores).

Teorema 1.3**Negação da implicação**

A negação da implicação $p \text{ implica } q$ é a proposição $p \text{ e não } q$

Exemplo 1.10 – Exemplos

- A negação de “Se a é par, então a^2 é par” é “ a é par e a^2 é ímpar”.
- A negação de “Se n é divisível por 4, então n é par” é “ n é divisível por 4 e n não é par”.

Dada uma proposição $p \Rightarrow q$ então:

- a proposição $q \Rightarrow p$ é chamada de **recíproca** da proposição;
- a proposição $\text{não } q \Rightarrow \text{não } p$ é chamado de **contrapositiva**;
- a proposição $\text{não } p \Rightarrow \text{não } q$ é chamado de **inversa** da proposição.

Destacamos que uma implicação e sua contrapositiva são equivalentes, ou seja, ou ambas são simultaneamente verdadeiras ou ambas são simultaneamente falsas. Como veremos posteriormente (na seção 1.2.2), essa equivalência nos fornece uma técnica de demonstração: no lugar de demonstrarmos uma implicação podemos demonstrar sua contrapositiva.

Também observamos que a contrapositiva da recíproca é a inversa (veja exercício 1.12), e assim pelas razões apresentadas no parágrafo anterior a recíproca e a inversa são equivalentes.

Ressaltamos que um erro lógico muito comum é confundir uma proposição com a sua recíproca. O próximo exemplo ilustra que uma implicação verdadeira pode ter a recíproca falsa.

Exemplo 1.11 — Exemplos

Considere a seguinte proposição “se x é um número racional então x^2 é um número racional”. Essa implicação é verdadeira, como veremos no exercício 1.21.c.

- a proposição “se x^2 é um número racional então x é um número racional” é a recíproca dessa proposição. Essa recíproca é falsa pois $\sqrt{2}$ não é um número racional, mas o seu quadrado, o número 2, é racional
- a proposição “se x^2 não é um número racional, então x não é um número racional” é a contrapositiva da proposição inicial, e assim verdadeira.
- a proposição “se x não é um número racional então x^2 não é um número racional” é a inversa dessa proposição. Sendo equivalente a recíproca, essa afirmação é falsa.

As seguintes denominações, derivadas da noção de implicação, são usuais:

Definição 1.6

Uma proposição p é dita **condição suficiente** para uma proposição q , se p implica q . Uma proposição p é uma **condição necessária** para uma proposição q , se q implica p .

Exemplo 1.12 — Exemplos

1. Para um número natural, ser par é condição necessária para ser divisível por 4, mas não suficiente.
2. Para um número real, ser maior que 2 é condição suficiente para ser maior que 1, mas não necessária.
3. Para um número real, ser distinto de 0 é condição necessária e suficiente para possuir inverso.

Finalmente, o conectivo $p \Leftrightarrow q$ é chamado de **bicondicional** ou **bi-implicação**. A expressão $p \Leftrightarrow q$ é lida como “ p se e somente se q ”. A expressão é equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Nesse caso dizemos ainda que p é uma condição necessária e suficiente para q .

Exercícios

1.9 — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes implicações: ?? $\neg p \Rightarrow q$. ?? $p \Rightarrow \neg q$. ?? Se chove, então eu não vou trabalhar. ?? Se x é par, então $2x + 1$ é ímpar. ?? Se $x^2 + y^2 = 0$, então $x = y = 0$.

1.10 — Atribua um valor verdade às seguintes proposições: ?? Se 2 é par, então 3 é ímpar. ?? Se 2 é par, então 4 é ímpar. ?? Se 3 não é par, então 3 não é ímpar.

1.11 — Para os pares de proposições p e q , diga se p é condição necessária, suficiente ou ambas

para q . $p = "n > 2"$, $q = "n > 3"$, com $n \in \mathbb{N}$. $p = "x > 2"$, $q = "x \geq 2"$, com $x \in \mathbb{R}$. $p = "0 < n < 2"$, $q = "n = 1"$, com $n \in \mathbb{N}$. $p = "\Delta \text{ é isósceles}"$, $q = "\Delta \text{ é equilátero}"$.

1.12 — Determine: A contrapositiva da contrapositiva de $p \text{ implica } q$. A contrapositiva da recíproca de $p \text{ implica } q$. A recíproca de $p \text{ implica } q$.

1.13 — Negue a proposição $p \Leftrightarrow q$.

1.1.4 Múltiplos Quantificadores

Diversas proposições matemáticas envolvem mais que um quantificador. Ao lidarmos com proposições com mais de um quantificador devemos tomar alguns cuidados extras, que exporemos nessa seção. Começamos com alguns exemplos de proposições matemáticas com múltiplos quantificadores.

Exemplo 1.13 — Exemplos

- Para todo número inteiro par n , existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Essa proposição pode ser escrita simbolicamente como:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ com } n \text{ par}, \exists k \in \mathbb{Z} \mid n = 2k$$

- Para todo número real x , e para todo número real y , $x + y = y + x$. Essa proposição pode ser escrita simbolicamente como:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$$

- Para todo número real $x \neq 0$, existe um número real x' tal que $x \cdot x' = 1$. Essa proposição pode ser escrita simbolicamente como:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ com } x \neq 0, \exists x' \in \mathbb{R} \mid x \cdot x' = 1$$

Um fato a ser observado, é que quando temos dois quantificadores diferentes (um universal e um existencial), a ordem dos quantificadores é importante. Assim por exemplo a proposição

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid y = x^2$$

que pode ser reescrita como “para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$ ” afirma que para todo número real existe o quadrado desse número, e assim essa é uma proposição verdadeira. Porém se trocarmos a ordem dos quantificadores temos a proposição:

$$\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$$

que pode ser reescrita como existe um número real y tal que para todo número real x , $y = x^2$, ou seja essa proposição afirma que existe um número real que é o quadrado de qualquer número real¹. E desta forma essa proposição é falsa.

¹i.e, o mesmo número real deveria ser o quadrado de todos os números reais

Para quantificadores do mesmo tipo (dois existenciais, dois universais, etc.) a ordem dos quantificadores não importa, ou seja, a proposição $\exists x \in S \mid \exists y \in T p(x, y)$ é equivalente a proposição $\exists y \in T \mid \exists x \in S p(x, y)$, e a proposição $\forall x \in S, \forall y \in T, p(x, y)$ é equivalente a proposição $\forall y \in T, \forall x \in S, p(x, y)$.

A negação de proposições com mais de um quantificador pode ser feita utilizando cuidadosamente as regras de negação para quantificadores. Assim por exemplo:

Exemplo 1.14

Usando a negação do quantificador universal, temos que a negação da proposição

$$\forall y \in T, \exists x \in S \mid p(x, y) \quad \text{é :}$$

$$\exists y \in T \mid \text{não}(\exists x \in S \mid p(x, y))$$

Usando a negação do quantificador existencial temos:

$$\exists y \in T \mid \forall x \in S, \text{não } p(x, y).$$

Uma forma útil de ler quantificadores sucessivos é respeitar sua ordem. Na afirmação

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0,$$

o valor de y pode depender do valor escolhido para x . Se $x = 2$, por exemplo, podemos escolher $y = -2$; em geral, para cada x , basta tomar $y = -x$.

A ordem não pode ser trocada livremente. A afirmação

$$\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$$

é falsa: ela exigiria um único número y que fosse simultaneamente igual a $-x$ para todo número real x .

Exercícios

1.14 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica: ??Para todo número inteiro ímpar n , existe um número inteiro k tal que $n = 2k + 1$. ??Para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. ??Para todo número real x existe y tal que $x + y = 0$. ??Para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_0$, $|a_n - L| \leq \epsilon$

1.15 — Seja a proposição $p(x, y) = "x + 4 > y"$ com $x, y \in D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para as seguintes proposições, reescreva-as em português e atribua um valor verdade ?? $\forall x \in D, \exists y \in D \mid p(x, y)$?? $\exists y \in D \mid \forall x \in D, p(x, y)$?? $\forall x \in D, \forall y \in D, p(x, y)$?? $\exists x \in D, \exists y \in D \mid p(x, y)$

1.16 — O que as seguintes afirmações significam? Identifique a ordem dos quantificadores, determine se são verdadeiras e dê exemplos ou contraexemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é o conjunto dos números naturais. ?? $\forall x, \exists y \mid (x < y)$?? $\exists y \mid \forall x, (x < y)$?? $\exists x \mid \forall y, (x < y)$?? $\forall y, \exists x \mid (x < y)$?? $\exists x \mid \exists y \mid (x < y)$?? $\forall x, \forall y, (x < y)$

1.17 — Reescreva as seguintes definições matemáticas simbolicamente: ??Comutatividade: A soma de x com y é igual a soma de y com x . ??Não-comutatividade: Existem x e y tal que a soma de x com

y é diferente da soma de y com x . ??Identidade: Existe um elemento e tal que a soma de x com e é x . ??Transitividade: Se x é menor igual que y e y é menor igual que z então x é menor igual que z . ??Reflexividade: Para todo x , x é menor igual a x

1.18 — O que as seguintes afirmações significam? Elas são verdadeiras? Dê exemplos e contraexemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é os números naturais. ?? $\forall x, \exists y \mid (2x - y = 0)$?? $\exists y \mid \forall x, (2x - y = 0)$?? $\exists y \mid \exists z \mid (y + z = 100)$

1.19 — Para as seguintes proposições, escreva a negação, em português e simbólica, de cada uma delas. ??Para todo número real x , para todo número real y , $x + y = 0$. ??Para todo número real x , existe um número real y tal que $x + y = 0$. ??Para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_0$, $|a_n - L| \leq \epsilon$

1.20 — Exemplos e ou Contraexemplos ??Para todos números naturais pares m, n , temos que $n + m$ é par.

1.2 Demonstrações

1.2.1 Por que Demonstrar?

“A lógica é a higiene que o matemático pratica para manter as suas ideias saudáveis e fortes.”

Hermann Weyl

Nas seções anteriores aprendemos a reconhecer a estrutura de afirmações matemáticas. Agora surge uma diferença fundamental entre observar que uma afirmação parece verdadeira e *demonstrar* que ela é verdadeira.

Considere a afirmação

$$n^2 + n + 41 \text{ é primo para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Calculando os primeiros valores, encontramos números primos para $n = 0, 1, 2, \dots, 39$. Quarenta verificações consecutivas fornecem uma evidência impressionante. Mesmo assim, a afirmação é falsa: para $n = 40$,

$$40^2 + 40 + 41 = 41^2,$$

que não é primo.

Esse exemplo mostra uma das razões centrais para demonstrar. Uma afirmação universal fala de *todos* os elementos de um domínio, muitas vezes infinito. Verificar casos particulares, mesmo muitos deles, não percorre esse domínio inteiro. Os exemplos ajudam a descobrir padrões e a testar conjecturas; os contraexemplos podem destruí-las. Mas, para estabelecer uma afirmação universal, precisamos de um argumento que explique por que ela vale para um elemento arbitrário.

Uma demonstração é justamente esse tipo de argumento: uma sequência de passos em que cada conclusão decorre das hipóteses, das definições ou de fatos já estabelecidos. Ela não substitui a intuição nem a experimentação. Ao contrário, frequentemente nasce delas. Sua função é transformar

uma boa razão para acreditar em uma afirmação em uma justificativa matemática que não dependa da quantidade de casos observados.

Essa passagem — de exemplos para argumentos gerais — é uma das mudanças centrais da matemática escolar para a matemática universitária. Nos exemplos seguintes, veremos algumas formas básicas de construir tais argumentos.

1.2.2 Métodos de Demonstração

Rigor é para o matemático o que a moral é para os homens.
André Weil

Começaremos com demonstrações envolvendo propriedades elementares dos números inteiros e racionais. Para acompanhar os exemplos, precisaremos apenas recordar algumas definições simples:

- Dizemos que um inteiro não nulo a **divide** um inteiro b se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$.
- Um inteiro é **par** se pode ser escrito na forma $2k$, com $k \in \mathbb{Z}$; é **ímpar** se pode ser escrito na forma $2k + 1$.
- Um número real r é **racional** se existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que $r = \frac{p}{q}$.
- Um número real é **irracional** se não é racional.

Essas definições serão usadas imediatamente nos argumentos que seguem. A ideia não é memorizá-las isoladamente, mas observar como uma demonstração começa muitas vezes traduzindo uma hipótese para a linguagem precisa de sua definição.

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração que nós tratamos nesta seção, e é a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ suponha que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q .

Exemplo 1.15

Se n, m são números pares então $n + m$ também é um número par.

Um bom modo de iniciar uma demonstração é identificando as hipóteses e a tese e esclarecendo os seus significados, e o significado dos termos envolvidos:

Hipótese 1: n é par. Por definição de número par, temos que existe um inteiro k_1 tal que $n = 2k_1$.

Hipótese 2: m é par. De modo análogo, temos pela definição de número par que existe (possivelmente outro) inteiro k_2 tal que $m = 2k_2$.

Tese: Queremos provar que $n + m$ é par, ou seja, que existe um inteiro k_3 tal que $n + m = 2k_3$.

Feito isso vamos a demonstração:

Demonstração. Como n, m são pares existem inteiros k_1, k_2 tais que $n = 2k_1$ e $m = 2k_2$. Desta forma temos que $n + m = 2k_1 + 2k_2$, e colocando em evidência o 2 teremos:

$$n + m = 2(k_1 + k_2) = 2k_3$$

onde $k_3 = k_1 + k_2$ é um número inteiro. E assim $n + m$ é um número par. ■

Exemplo 1.16

Se a divide b e b divide c , então a divide c .

Novamente começaremos identificando as hipóteses e a tese e esclarecendo os seus significados:

Hipótese 1: a divide b . Isso significa que existe um número inteiro k_1 tal que $b = ak_1$.

Hipótese 2: b divide c . Isso significa que existe um número inteiro k_2 tal que $c = bk_2$.

Tese: Queremos provar que a divide c , ou seja, queremos mostrar que existe um número inteiro k_3 tal que $c = ak_3$

Demonstração. Pelas hipóteses temos que existem inteiros k_1, k_2 tais que $b = a.k_1$ e $c = b.k_2$.

Substituindo a primeira expressão na segunda teremos:

$$c = bk_2 = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2) = ak_3$$

onde $k_3 = k_1k_2$ é um número inteiro. O que prova que a divide c . ■

Exemplo 1.17

Se n é um número ímpar então n^2 é um número ímpar.

Hipótese: n é um número ímpar, i.e, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k_1 + 1$

Tese: n^2 é um número ímpar, i.e, $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $n^2 = 2k_2 + 1$

Demonstração. Como n é um número ímpar, existe um inteiro k_1 tal que $n = 2k_1 + 1$ e assim:

$$n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1$$

Como $2k_1^2 + 2k_1$ é um número inteiro, temos pela definição que n^2 é ímpar. ■

Exercícios

1.21 — Demonstre as seguintes afirmações: ??Se a divide b e a divide c então a divide $b + c$. ??Se p, q são números racionais, então $p + q$ é um número racional. ??Se p, q são números racionais, então $p \cdot q$ é um número racional. ??[difficulty=1] Se r_1 e r_2 são raízes distintas de $p(x) = x^2 + bx + c$, então $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo (também conhecida como demonstração por contradição ou ainda por *reductio ad absurdum*) é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se algum enunciado fosse verdadeiro, ocorreria uma contradição lógica, e portanto o enunciado deve ser falso.

Exemplo 1.18

Existem infinitos números primos.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existam apenas finitos números primos, que denotaremos por $p_1, p_2, \dots, p_n$. Considere

$$q = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Como $q > 1$, ele possui algum divisor primo, digamos r . Esse primo r não pode ser nenhum dos primos $p_1, \dots, p_n$: se p_i dividisse q , como também divide o produto $p_1 p_2 \cdots p_n$, então dividiria a diferença

$$q - p_1 p_2 \cdots p_n = 1,$$

o que é impossível. Portanto existe um primo r que não está na lista $p_1, \dots, p_n$, contradizendo a hipótese de que havíamos listado todos os primos. Logo existem infinitos números primos. ■

Exemplo 1.19

$\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Faremos a demonstração pelo método de redução ao absurdo. Ou seja, supomos que $\sqrt{2}$ é um número racional, i.e., que existem números inteiros positivos a e b tais que:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

ou, equivalentemente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Podemos supor que a e b não são ambos números pares, pois se fossem, poderíamos simplificar a fração até termos que pelo menos um dos termos da fração seja ímpar.

Agora, escrevemos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$$

Então:

$$a^2 = 2b^2 \quad (1.1)$$

Concluimos então que a^2 é um número par, pois é dobro de b^2 . Logo a também deve ser par, pois se a fosse ímpar o seu quadrado também seria ímpar.

Temos então que a é um número par e, portanto, é o dobro de algum número inteiro, digamos k :

$$a = 2k \quad (1.2)$$

Substituindo 1.2 em 1.1 temos:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \quad (1.3)$$

De modo análogo, temos que b deve ser um número par. O que é absurdo pois a e b não são ambos números pares. Portanto, $\sqrt{2}$ tem que ser um número irracional. Como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 1.20

Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 1$.

Demonstração. Vamos realizar a demonstração por redução ao absurdo. Desta forma, vamos supor que existe uma solução (a, b) com a e b inteiros positivos, satisfazendo $a^2 - b^2 = 1$. Então fatorando temos:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1.$$

Como $a + b$ e $a - b$ são inteiros cujo produto é 1, temos que ou $a + b = a - b = 1$ ou $a + b = a - b = -1$. No primeiro caso, podemos adicionar as duas equações para obter $a = 1$ e $b = 0$, contradizendo o nosso pressuposto inicial de que a e b são positivos. No segundo caso de modo semelhante, obtemos que $a = -1$ e $b = 0$, novamente contrariando a nossa hipótese. Logo por redução ao absurdo, temos que não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 1$. ■

Exercícios

1.22 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada um das seguintes proposições. ?? $\sqrt{2}$ é irracional. ??Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$.

??Não existem soluções racionais para a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$.

??Dados a, b, c números inteiros. Mostre que se a não divide bc , então a não divide b .

Demonstração por Contraposição

O método de demonstração por contraposição baseia-se no fato que uma implicação p implica q é equivalente a sua contrapositiva $\text{não } q$ implica $\text{não } p$. Assim, no método de demonstração por contraposição ao invés de se demonstrar a implicação p implica q , demonstra-se que $\text{não } q$ implica $\text{não } p$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.21

Se n e m são números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Vamos provar essa proposição usando o método de demonstração por contraposição. Observe que a versão contrapositiva deste teorema é: "Se n e m são dois números inteiros com paridades opostas, então sua soma $n + m$ deve ser ímpar".

Para a versão contrapositiva temos:

- **Hipótese:** " n e m são dois números inteiros com paridades opostas",
- **Tese** "soma $n + m$ deve ser ímpar"

Demonstração. Faremos a demonstração por contraposição. Desta forma supomos que n e m tem paridades opostas, ou seja, um deles é par e o outro ímpar, e assim não há perda de generalidade em supor que n é par e m é ímpar. Logo, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $n = 2k_1$ e $m = 2k_2 + 1$. Calculando a soma

$$n + m = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 1$$

e observando que $k_1 + k_2$ é um número inteiro, temos que $n + m$ é um inteiro ímpar, por definição. ■

Qual a diferença entre uma demonstração por contraposição de uma demonstração por redução ao absurdo?

Vamos analisar como os dois métodos de trabalho ao tentar provar "Se p , então q ".

- Método de redução ao absurdo: assuma p e *não* q e então devemos provar que estas duas hipóteses levam a algum tipo de contradição lógica.
- Método de contraposição: assuma *não* q e então devemos provar *não* p .

O método de contraposição tem a vantagem de que seu objetivo é claro, temos que demonstrar *não* p . Por outro lado, no método da contradição, o objetivo é demonstrar uma contradição lógica, porém nem sempre é claro qual é a contradição que vamos encontrar.

Exemplo 1.22

Se n^2 é ímpar, então n é ímpar

Demonstração. Nesse caso a contrapositiva é: "se n é par então n^2 é par"

Assim por contraposição. Suponha então que n é par, logo existe um número inteiro k tal que $n = 2k$, e assim:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Como $2k^2$ é um inteiro, n^2 é par. ■

Exercícios

1.23 — Prove cada uma das seguintes proposições pelo método de contraposição. ??Se x e y são dois números inteiros cujo produto é par, então pelo menos um dos dois deve ser par. ??Se x e y são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser ímpares. ??Se a e b são números reais tais que o produto ab é um número irracional, então ou a ou b deve ser um número irracional.

1.24 — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.

1.25 — Mostre que se a e b são números racionais, então $a + b$ é um número racional.

1.26 — Mostre que um número inteiro de 4 dígitos é divisível por 3 se a soma dos seus dígitos for divisível por 3.

Demonstrações de “se e somente se”

Muitos teoremas na matemática são apresentados sob a forma “ p se, e somente se, q ”. Essa afirmação é equivalente a “se p , então q e se q , então p ”. Logo, para demonstrar uma afirmação da forma “ p se, e somente se, q ”, devemos demonstrar duas implicações separadamente.

Exemplo 1.23

Dois inteiros a e b , possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é um número ímpar

Demonstração. Temos que provar duas implicações:

- Se a e b possuem paridades diferentes então $a + b$ é um ímpar;
- Se $a + b$ é ímpar então a e b possuem paridades diferentes.

Vamos provar a implicação: se a e b possuem paridades diferentes então $a + b$ é ímpar.

Sem perda de generalidade como por hipótese a e b possuem paridades diferentes, podemos assumir que a é par e que b é ímpar. Desta forma existem inteiros k_1, k_2 tais que $a = 2k_1$ e $b = 2k_2 + 1$, e assim:

$$a + b = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 1$$

e assim $a + b$ é ímpar.

Agora, demonstraremos a implicação: se $a + b$ é ímpar então a e b possuem paridades diferentes. Na verdade provaremos a contrapositiva dessa afirmação: se a e b possuem paridades iguais então $a + b$ é par.

Temos dois casos a considerar ambos a e b pares e ambos a e b ímpares.

Se a e b são ambos pares então existem k_1, k_2 tal que $a = 2k_1$ e $b = 2k_2$ e desta forma

$$a + b = 2(k_1 + k_2)$$

e assim $a + b$ é par.

Se a e b são ambos ímpares então existem k_1, k_2 tal que $a = 2k_1 + 1$ e $b = 2k_2 + 1$ e desta forma

$$a + b = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 1)$$

e assim $a + b$ é par.



Exercícios

1.27 — Dado dois inteiros a e b , o produto ab é um número par, se e somente se, pelo menos um dos números inteiros, a ou b , for par.

1.28 — Dados a, b, c inteiros com $c \neq 0$. Mostre que a divide b se e somente se ac divide bc .

2

Generalidades sobre Conjuntos

Um conjunto é um Muitos que se deixa pensar como Um.

Georg Cantor

Aumentar a conexão entre o capítulo de conjuntos e os operadores lógicos do capítulo anterior

2.1 Conceitos básicos

Definição ingênua de conjunto

Um **conjunto** é uma qualquer coleção de objetos, concretos ou abstratos. Dado um conjunto, isto é, uma coleção de objetos, diz-se que cada um destes objetos **pertence** ao conjunto dado ou, equivalentemente, que é um **elemento** desse conjunto.

Exemplo 2.1 — Exemplos

- a) o conjunto das disciplinas de um curso;
- b) o conjunto das letras desta frase;
- c) o conjunto dos jogadores de um time de futebol;
- d) o conjunto dos times de futebol de um estado;
- e) o conjunto dos conjuntos dos times de futebol de um estado;
- f) o conjunto das ideias que Leonardo da Vinci nunca teve;
- g) o conjunto dos números naturais.

Notações. Para denotar um conjunto genérico, usam-se normalmente letras maiúsculas $A, B, C, \dots Z$, enquanto para seus elementos usam-se letras minúsculas $a, b, c, \dots z$ (atenção: essa é somente uma notação *comum*, não uma *regra*, até mesmo porque um conjunto pode ser, por sua vez, um elemento

de outro conjunto, caso em que a notação não poderia ser respeitada). A relação de pertinência é denotada pelo símbolo $\in$. Já o símbolo $\notin$ é usado para denotar a não-pertinência (quando isso fizer sentido).

Exemplo 2.2 — Exemplos

- a) $a \in A$ denota o fato de que o objeto a pertence ao conjunto A ;
- b) $x \notin C$ denota o fato de que x não é um elemento do conjunto C .

Formas de descrever um conjunto

O modo matemático de descrever um conjunto lança mão das chaves $\{ \}$, sendo usadas no formato genérico

$\{ \text{descrição dos elementos ou de suas propriedades} \}$.

Há uma sutil mas importante diferença entre descrever os elementos de um conjunto (o que será chamado de *descrição enumerativa*) ou descrever as propriedades desses elementos (o que será chamado de *descrição predicativa*). Na descrição enumerativa, mais simples (mas nem sempre possível), os elementos são apresentados explicita ou implicitamente, como nos exemplos abaixo:

Exemplo 2.3 — Exemplos

- a) $\{1, 2, 3\}$
- b) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
- c) $\{\text{andré, bernardo, caetano}\}$
- d) $\{\text{palavras da língua portuguesa}\}$
- e) $\{\text{alunos desta turma}\}$
- f) $\{0, 1, 2, \dots\}$

Note que, no último exemplo, lança-se mão das reticências para indicar que o elenco dos elementos do conjunto continua indefinidamente, segundo uma regra que fica implicitamente clara observando-se os primeiros elementos apresentados.

Já na descrição predicativa, há a concorrência de duas condições: i) há um "conjunto de referência", ao qual pertencem os elementos do conjunto que se quer descrever (podemos pensá-lo com o domínio do discurso); ii) há uma propriedade que é satisfeita por todos os elementos do conjunto que se quer descrever, e somente por eles. O formato geral (em notação matemática) da descrição predicativa é

$$\{x \in \mathbb{U} \mid x \text{ satisfaz } P\}$$

onde U denota o conjunto de referência e P a propriedade que caracteriza os elementos do conjunto que está sendo descrito. A barra vertical “|” é lida como “tal que” (ou “tais que”, dependendo da concordância de número) e, em seu lugar, é também comum empregar o símbolo “:”. Abaixo, alguns exemplos desse modo predicativo (para esses exemplos, $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais):

Exemplo 2.4 — Exemplos

- a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 \text{ é um múltiplo de } 10\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 1 > 0\}$
- c) $\{\text{alunos desta turma que usam o trem como meio de transporte}\}$
- d) $\{\text{números ímpares que também são primos}\}$

Alguns cuidados com essa noção ingênua dos conjuntos

Ao tratarmos os conjuntos como meras coleções de objetos, estamos livres de tomar qualquer coleção imaginável. O limite para tal, se existir, é a própria criatividade da mente humana. Mas desse modo podem aparecer problemas lógicos irremediáveis, como mostra o paradoxo abaixo.

Paradoxo de Russell. Há conjuntos que são elementos de si mesmos: o conjunto de todos os conjuntos imagináveis é um elemento de si mesmo, pois trata-se evidentemente de um conjunto imaginável (acabamos de imaginá-lo); o conjunto de todas as coisas que não são comestíveis não é comestível, logo é um elemento de si mesmo. Há também os conjuntos que *não* são elementos de si mesmos: o conjunto dos mamíferos não é um mamífero; o conjunto dos alunos desta turma não é um aluno desta turma. Para distinguir uma classe de conjuntos da outra, chamemos de *endológicos* os conjuntos que são elementos de si mesmos e de *exológicos* os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Evidentemente, todo conjunto é elemento de uma classe ou da outra, não podendo pertencer a ambas. Denote então por C o conjunto de todos os conjuntos exológicos. A qual classe pertence o conjunto C ? É um conjunto endológico? É exológico?

Uma análise do paradoxo acima pode ser encontrada no Apêndice, mas adiantemos aqui sua conclusão: tal conjunto C não pode existir, a não ser às custas da consistência lógica do nosso sistema. E essa constatação ilustra a necessidade de se desenvolver um conceito de “conjunto” mais elaborado, de modo a evitar paradoxos e inconsistências. Tal elaboração foge totalmente ao escopo deste texto, mas sua necessidade não poderia ter sido omitida. Com esse cuidado em mente, nos será suficiente, para efeito dos nossos objetivos, lançar mão da definição ingênua de conjunto dada no início deste capítulo, uma vez que lidaremos somente com conjuntos “razoáveis”.

2.2 Relações elementares

Subconjuntos e superconjuntos

Seja dado um conjunto A . Dizemos que um conjunto B é um **subconjunto** do conjunto A (ou, equivalentemente, que B **está contido** em A) se todo elemento de B é também elemento de A . Denota-se tal situação por $B \subset A$. Em símbolos,

$$B \subset A$$

se, e somente se,

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

A mesma situação pode ser descrita dizendo que A é um **superconjunto** de B ou, mais comumente, que A **contém** B , denotando-se tal relação por $A \supset B$.

Exemplo 2.5 — Exemplos

Para os exemplos que se seguem, denote por P o conjunto dos números naturais pares (note que tal conjunto inclui o zero), por I o conjunto dos números naturais ímpares e seja $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 \in P\}$ o conjunto dos números naturais que são sucessores de algum número natural par. Denote ainda por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

1. $P \subset \mathbb{N}$, uma vez que todo número natural par é, obviamente, um número natural.
2. Todo número natural é um número inteiro, logo $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.
3. Todo número natural ímpar é o sucessor de algum número natural par, logo $I \subset S$.
4. Se um número natural é o sucessor de um número par, então tal número é necessariamente ímpar, ou seja, $I \supset S$.

Os dois últimos exemplos acima traduzem o simples fato de que os conjuntos S e I coincidem¹. Temos, de fato, a seguinte

Definição 2.1

Se dois conjuntos A e B satisfazem as relações $A \subset B$ e $B \subset A$ simultaneamente, então dizemos que tais conjuntos são **iguais**, isto é, $A = B$. Em símbolos,

$$A = B$$

se, e somente se,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Vale destacar, portanto, que uma igualdade entre conjuntos é a síntese de duas inclusões. Tal interpretação é útil, particularmente, em demonstrações envolvendo igualdade de conjuntos. Por exemplo, consideremos o conjunto A constituído pelos números naturais cuja metade também é um número

¹Note, em particular, que o símbolo $\subset$, ou mesmo $\supset$, não exclui a possibilidade da igualdade entre os conjuntos

natural e comparemos o conjunto A com o conjunto P dos exemplos acima, isto é, o conjunto dos números naturais pares. Poderíamos simplesmente dizer que, evidentemente, tais conjuntos são iguais. Entretanto, desconfiando das evidências (o que é um hábito saudável), vejamos como demonstrar a igualdade $A = P$.

Tendo em mente que tal igualdade traduz as duas afirmações $A \subset P$ e $A \supset P$, precisamos trabalhar com cada uma separadamente. Para provar a primeira, devemos mostrar que todo elemento de A é também elemento de P . Assim, tomemos um elemento $a \in A$. Tal elemento deve possuir, portanto, a propriedade de que $a/2$ é um número natural, isto é

$$\frac{a}{2} = n$$

para um certo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $a = 2n$, ou seja, a é divisível por 2. Concluimos que a é par, isto é, $a \in P$. Provamos, desse modo, que todo elemento de A é também elemento de P , ou seja, $A \subset P$.

Para provar a outra inclusão, devemos verificar que todo elemento de P é também elemento de A . Seja então $n \in P$ um elemento qualquer. Como n é par (condição para pertencer ao conjunto P), ele é divisível por 2. Assim, existe algum número natural m tal que

$$n = 2m$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por 2, obtemos

$$\frac{n}{2} = m$$

isto é, a metade de n é um número natural. Desse modo, $n \in A$, donde concluimos que $P \subset A$.

Tendo verificado que valem as inclusões $A \subset P$ e $A \supset P$, podemos concluir que vale a igualdade desejada, isto é, $A = P$.

Uma vez que a relação de inclusão do tipo $B \subset A$ inclui a possibilidade que os conjuntos A e B sejam iguais (em outras palavras, a relação $X \subset X$ é sempre válida, para qualquer conjunto X), precisamos de outra notação e nomenclatura para os casos em que queremos evitar tal possibilidade. Nesses casos, falamos em *inclusão própria* (ou *estrita*), denotando por $B \subsetneq A$. Em símbolos,

$$B \subsetneq A \Leftrightarrow B \subset A \text{ e } B \neq A.$$

Assim, quando dizemos que B está contido propriamente em A (ou que B é um *subconjunto próprio* de A), estamos afirmando *duas* coisas: i) todo elemento de B é elemento de A ; ii) existe ao menos um elemento de A que não pertence a B . Evidentemente, uma observação análoga cabe para a inclusão própria $A \supsetneq B$.

Sobre notações. É comum encontrar um uso diferente para o símbolo $\subset$ (ou $\supset$) na literatura. Em alguns textos ou artigos, de fato, o símbolo $\subset$ (ou $\supset$) é usado com o mesmo significado que demos ao símbolo $\subsetneq$ (respectivamente, $\supsetneq$). Nesse caso, para indicar a inclusão genérica (i.e. não própria), tais textos usam o símbolo $\subseteq$ (respectivamente $\supseteq$). Assim, ao se consultar outras referências bibliográficas, é salutar verificar qual o significado ali adotado para os símbolos de inclusão.

Conjunto vazio. Assumimos a existência de um conjunto que não possui nenhum elemento. Tal conjunto é chamado de **conjunto vazio** e denotado por $\emptyset$. Dado qualquer conjunto A , vale sempre a

relação de inclusão

$$\emptyset \subset A.$$

A afirmação acima equivale à proposição $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. Como vimos no capítulo anterior, uma implicação é falsa somente quando sua premissa é verdadeira e sua conclusão falsa. Em particular, vimos o *argumento de vacuidade*: uma implicação cuja premissa é falsa é sempre uma implicação verdadeira, independentemente do valor verdade de sua conclusão. É esse exatamente o caso acima: a premissa $x \in \emptyset$ é falsa, enquanto que a conclusão $x \in A$ tem valor de verdade indeterminado.

Outro modo de justificar a mesma implicação é através de sua contra-positiva: $x \notin A \Rightarrow x \notin \emptyset$. Nesse caso, a premissa pode ser verdadeira ou falsa, sendo impossível determinar o valor verdade *a priori* (afinal, sequer sabemos qual conjunto é A). Entretanto, a conclusão $x \notin \emptyset$ é evidentemente verdadeira. Assim, a implicação é verdadeira, qualquer que seja o valor verdade da premissa.

Exercícios

2.1 — Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas: $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ $\emptyset = \{\emptyset\}$

Conjunto potência. Seja dado um conjunto A . O conjunto de todos os subconjuntos de A é chamado de **conjunto potência** de A (ou também **conjunto das partes** de A) e é denotado por $\mathcal{P}(A)$. Note que, qualquer que seja o conjunto A , o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$ sempre contém, pelo menos, os elementos $\emptyset$ e A .

Exemplo 2.6 — Exemplos

. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Então:

- $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

É importante destacar um erro comum quando se fala em conjunto das partes. Tomemos o conjunto A do exemplo acima. É *falso* afirmar que $1 \in \mathcal{P}(A)$ (ou pior, que $1 \subset A$). O correto é $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ (o que equivale a dizer que $\{1\} \subset A$). Em suma, vale a relação

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A.$$

A melhor maneira de evitar erros como o ilustrado acima é ter sempre em mente o *significado* das relações de pertinência e de inclusão. A primeira é uma relação entre *elemento* e *conjunto*, enquanto a segunda é uma relação entre *conjunto* e *conjunto*. Assim, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são subconjuntos de A . Já os elementos de A , estes não são, em geral, elementos de $\mathcal{P}(A)$.

Exercícios

2.2 — Na última observação, dissemos que os elementos de um conjunto A não são, *em geral*, elementos de $\mathcal{P}(A)$. Dê um exemplo de conjunto A tal que $A \cap \mathcal{P}(A) \neq \emptyset$.

2.3 — Se A é um conjunto com n elementos, quantos elementos possui o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$? (Veremos, mais adiante, duas soluções para este exercício: uma no contexto do Princípio de Indução, outra no contexto de Combinatória).

2.3 Operações

União e intersecção

Definição 2.2

. Dados dois conjuntos A e B , o **conjunto união** $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B , isto é

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Definição 2.3

O **conjunto intersecção** $A \cap B$ é formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e B , isto é

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B.$$

Exemplo 2.7 — Exemplos

. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{4, 5, 6\}$, tem-se:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
- $B \cap C = \{5\}$

Quando dois conjuntos A e B não têm nenhum elemento em comum, i.e. quando $A \cap B = \emptyset$, dizemos que estes conjuntos são **disjuntos**. A união de dois conjuntos disjuntos é também chamada de **união disjunta** e pode ser denotada pelo símbolo $\dot{\cup}$ ².

²A rigor, pode-se falar em união disjunta de conjuntos quaisquer, mesmo não disjuntos. Nesse caso, os eventuais elementos da intersecção dos conjuntos passam a ser considerados distintos, o que se obtém indexando os elementos de cada conjunto.

Propriedade 2.1

Sejam dados dois conjuntos A e B . Das definições acima, seguem imediatamente as seguintes propriedades:

1. $A \cup A = A = A \cap A$
2. $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$
4. $A \cap B \subset B \subset A \cup B$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A título de exemplo, vamos provar a terceira e a quinta dessas propriedades. Iniciemos com a terceira:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

Na verdade, trata-se de duas inclusões de conjuntos:

$$A \cap B \subset A \quad \text{e} \quad A \subset A \cup B.$$

Vejamos uma de cada vez. Para provar a primeira, precisamos verificar a implicação: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. Se for $A \cap B = \emptyset$, então a implicação acima é verdadeira por vacuidade (não custa lembrar que isso equivale ao fato, já conhecido, de que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto). Suponhamos então que $A \cap B \neq \emptyset$. Nesse caso, se x pertence à intersecção de A e B , então x pertence tanto ao conjunto A quanto ao conjunto B . Em particular, o que nos interessa nesse caso é que x pertence ao conjunto A . Isso é exatamente o que afirma a implicação acima, logo é verdadeira a inclusão $A \cap B \subset A$.

Com relação à segunda inclusão, i.e. $A \subset A \cup B$, a ideia é similar. Precisamos provar a implicação: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$. Novamente, se $A = \emptyset$, a implicação é válida (por vacuidade). Já no caso $A \neq \emptyset$, tomemos $x \in A$. Para que x seja um elemento da união $A \cup B$, deve satisfazer a ao menos uma das condições: $x \in A$ ou $x \in B$. Mas a primeira condição é garantida pela hipótese acima. Logo, x também é elemento da união $\square$.

Provemos agora a quinta propriedade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nesse caso, temos uma igualdade de conjuntos. Convém, portanto, tratá-la como duas inclusões:

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

Iniciando pela primeira inclusão, devemos provar a implicação

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Se $A \cup (B \cap C) = \emptyset$, a implicação é verdadeira por vacuidade. Caso contrário, seja $x \in A \cup (B \cap C)$. Antes de prosseguir, tenhamos em mente que queremos provar que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, i.e.

$$x \in A \cup B \quad \text{e} \quad x \in A \cup C.$$

Pois bem, segundo a premissa, temos que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Há, portanto, dois casos a serem analisados. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$, assim como $x \in A \cup C$ (estamos usando, na verdade, a terceira propriedade, que acabamos de provar). Logo, no caso em que $x \in A$, podemos concluir que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Já no caso em que $x \in B \cap C$, temos que $x \in B$ e $x \in C$. Usando a quarta propriedade acima (cuja prova seria totalmente análoga à da terceira propriedade), vale as implicações:

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

e

$$x \in C \Rightarrow x \in A \cup C,$$

ou seja, podemos também nesse caso concluir que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Em suma, provamos a inclusão

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Queremos agora provar a segunda inclusão:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

O procedimento é semelhante ao anterior, portanto seremos mais diretos. Se $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \emptyset$, a inclusão vale por vacuidade. Caso contrário, seja $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Temos que $x \in A \cup B$, assim como $x \in A \cup C$. Da primeira, segue que $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup (B \cap C)$ (que é o que queremos provar). Se $x \in B$, usemos o fato de que $x \in A \cup C$. Deste, segue que $x \in A$ ou $x \in C$ (além de $x \in B$). Já consideramos o caso em que $x \in A$ (no qual verificamos a validade da inclusão). Se $x \in C$, temos que $x \in B \cap C$, logo $x \in A \cup (B \cap C)$, como queríamos. Desse modo, provamos a inclusão

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C),$$

concluindo a demonstração da quinta propriedade.

Diferença de conjuntos. Dados dois conjuntos A e B , define-se a **diferença** $A \setminus B$ (também denotada por $A - B$) como sendo o conjunto formado pelos elementos de A que *não* pertencem a B , isto é

$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

Exemplo 2.8 – Exemplos

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ e $D = \{2, 3\}$, tem-se:

- $A \setminus B = \{2\}$
- $B \setminus A = \{5\}$
- $A \setminus C = A$
- $C \setminus A = C$

- $A \setminus D = \{1\}$
- $D \setminus A = \emptyset$
- $B \setminus C = \{1, 3\}$
- $C \setminus B = \{4, 6\}$
- $B \setminus D = \{1, 5\}$
- $D \setminus B = \{2\}$
- $C \setminus D = C$
- $D \setminus C = D$

Propriedade 2.2

Sejam dados dois conjuntos A e B . Das definições acima, seguem imediatamente as seguintes propriedades:

1. $A \setminus A = \emptyset$
2. $A \setminus \emptyset = A$
3. $\emptyset \setminus A = \emptyset$

Complementar de um conjunto. Seja fixado um conjunto $\mathbb{U}$. Dado um subconjunto qualquer $A \subset \mathbb{U}$, define-se o **complementar** de A relativamente a $\mathbb{U}$, denotado por $C_{\mathbb{U}}A$, como sendo o conjunto $\mathbb{U} \setminus A$. Isto é,

$$C_{\mathbb{U}}A = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}.$$

Num certo sentido, a operação do *complementar* é idêntica à operação *diferença*. O que pode distinguir uma da outra é o papel desempenhado pelo conjunto $\mathbb{U}$, o qual atua como um conjunto de referência (um conjunto universo, em um sentido relativo, como já chamamos atenção anteriormente). Em outras palavras, a operação do complementar age sobre os subconjuntos de um conjunto referencial, enquanto a operação de diferença opera sobre dois conjuntos quaisquer.

Observação. Durante o curso, toda vez que o conjunto de referência estiver implicitamente fixado, adotaremos uma notação simplificada para o complementar de um conjunto. Assim, nesses casos, ao invés da notação acima, denotaremos o complementar de um conjunto A simplesmente por A^c .

Exemplo 2.9 – Exemplos

. Fixemos o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e tomemos os subconjuntos A , B e C do exemplo anterior. Então:

- $A^c = \{4, 5, 6\}$
- $B^c = \{2, 4, 6\}$
- $C^c = \{1, 2, 3\}$

Propriedade 2.3

. Seja dado um conjunto $\mathbb{U}$ e seja $A \subset \mathbb{U}$. Da definição, seguem imediatamente as seguintes propriedades:

1. $\emptyset^c = \mathbb{U}$
2. $\mathbb{U}^c = \emptyset$
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = \mathbb{U}$
5. $A \cap A^c = \emptyset$

Inserir um exemplo de demonstração envolvendo complementar

Exercícios

2.4 — Define-se a **diferença simétrica** $A \Delta B$ como sendo a união das diferenças $A \setminus B$ e $B \setminus A$, isto é $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Verifique as seguintes propriedades: $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta \emptyset = A$, $A \Delta B = B \Delta A$.

2.5 — Determine as diferenças simétricas entre os conjuntos A, B, C, D do Exemplo 2.8.

Exemplo 2.10 — Exercício resolvido

Mostre que, dados quaisquer conjuntos A e B , tem-se que

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Solução. Em geral, para provarmos uma *igualdade de conjuntos* do tipo $X = Y$, é necessário provarmos *duas inclusões*: $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Assim, no caso desse exercício, devemos provar as inclusões:

$$A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{e} \quad (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B.$$

Começemos pela primeira inclusão. Se $A \Delta B = \emptyset$, a inclusão é trivialmente válida. Suponhamos então $A \Delta B \neq \emptyset$. Tomemos $x \in A \Delta B$ e provemos que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Temos:

$$x \in A \Delta B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in (A \setminus B) \text{ ou } x \in (B \setminus A)$$

Suponha, sem perda de generalidade, $x \in A \setminus B$ (o caso $x \in B \setminus A$ é análogo).

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$$

Como $x \in A$ e $A \subset A \cup B$, então $x \in A \cup B$. E como $A \cap B \subset B$ e $x \notin B$, então $x \notin A \cap B$. Dessas últimas duas, concluímos que $x \in A \cup B$, mas $x \notin A \cap B$, o que significa que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

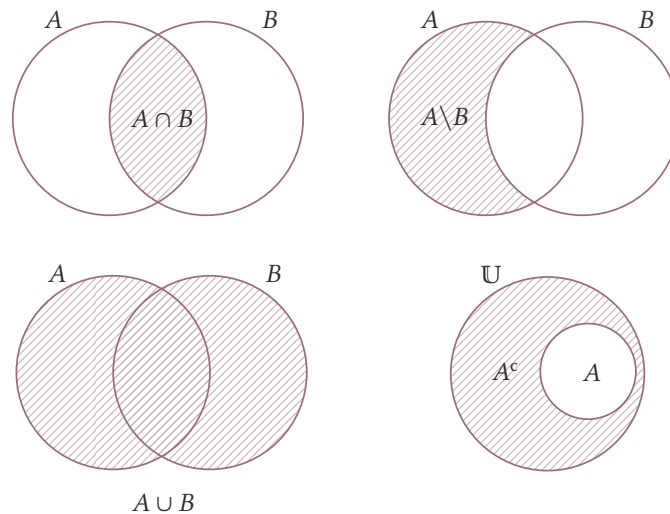
Passemos à segunda inclusão: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset A \Delta B$. Como feito anteriormente, se o conjunto à esquerda for vazio, a inclusão é válida. Se não for vazio, tomemos $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ e provemos que $x \in A \Delta B$. Temos:

$$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Rightarrow x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $x \in A$ (o caso $x \in B$ é análogo). Como $x \notin A \cap B$ e $x \in A$, resulta $x \notin B$. Assim, $x \in A \setminus B$, e como $A \setminus B \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, podemos concluir que $x \in A \Delta B$. $\triangleleft$

Diagramas de Venn-Euler. Uma forma gráfica para representar conjuntos é dada pelos *diagramas de Venn-Euler*, através dos quais cada conjunto é representado por uma região plana limitada e a relação entre tais conjuntos é representada pela posição relativa dessas regiões. A figura abaixo ilustra alguns exemplos:



Note que os diagramas acima são meras *representações* dos conjuntos, não devendo ser identificados com os mesmos, confusão comum que leva, no mais das vezes, a bizarras conclusões.

Produto cartesiano. Sejam dados dois conjuntos *não vazios* A e B . Define-se o **produto cartesiano** de A e B , denotado por $A \times B$ como sendo o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) , onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B , isto é

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Nunca é demais lembrar que um par ordenado (a, b) , como objeto matemático, é *diferente* do conjunto $\{a, b\}$. Este último caracteriza-se unicamente por conter os elementos a e b , enquanto que o par ordenado (a, b) impõe uma *ordem* entre os elementos. Em breve, tem-se que $\{a, b\} = \{b, a\}$, mas $(a, b) \neq (b, a)$ (exceção feita, evidentemente, ao caso em que $a = b$).

Exemplo 2.11 — Exemplos

Mais uma vez, tomemos os conjuntos A , B , C e D do Exemplo 2.8. Tem-se:

- $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$
- $B \times A = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2), (1, 3), (3, 3), (5, 3)\}$
- $A \times C = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$
- $C \times A = \{(4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$
- $A \times D = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
- $D \times A = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
- $B \times C = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$
- $C \times B = \{(4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (4, 5), (5, 5), (6, 5)\}$
- $B \times D = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (5, 2), (5, 3)\}$
- $D \times B = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (2, 5), (3, 5)\}$
- $C \times D = \{(4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (6, 2), (6, 3)\}$
- $D \times C = \{(2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), (2, 6), (3, 6)\}$

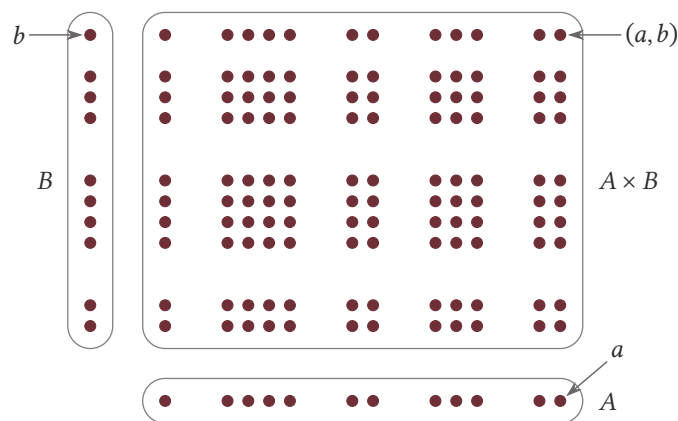


Figura 2.1. Produto Cartesiano de A e B

O conceito de produto cartesiano também se aplica a mais do que dois conjuntos³. Dados n conjuntos

³Na verdade, é possível definir produto cartesiano de uma família infinita de conjuntos. Tal conceito será visto mais adiante, como complemento ao capítulo sobre Funções.

não vazios ($n \geq 2$) $A_1, A_2, \dots, A_n$, define-se o produto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

como sendo o conjunto formado pelas n -uplas⁴ ordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde o primeiro elemento pertence a A_1 , o segundo a A_2 e assim por diante, até o último elemento, que deve pertencer a A_n . Em símbolos:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Propriedades das operações. Sejam dados conjuntos quaisquer A, B e C . Valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
6. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

Nas próximas três propriedades, suponha A, B, C não vazios.

7. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
8. Se $B \cap C \neq \emptyset$, então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
9. Se $B \setminus C \neq \emptyset$, então $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Além disso, seja $\mathbb{U}$ um superconjunto de A, B e C e considere a operação de complementar relativo a $\mathbb{U}$. Então:

10. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
11. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

inserir um exemplo de demonstração com produto cartesiano

Exercício

2.6 — Prove as propriedades acima.

Das propriedades 3, 4 e 5 acima, podemos considerar, sem incorrer em ambiguidade, as seguintes operações com uma terna de conjuntos A, B e C :

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B \cap C$
- $A \Delta B \Delta C$

⁴Lê-se *ênuplas*.

Exercícios

2.7 — Considere o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e sejam os seguintes subconjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{U} : (x-2)^2(x-3) = 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\}$$

Para esses subconjuntos determine: $A \cup B$

$$A \cap (B \cup C)$$

$$C \cup A^c$$

$$(A \cup C)^c$$

$$A^c \cap C^c$$

$$\mathcal{P}(B)$$

2.8 — Dados quaisquer conjuntos A, B e C , mostre que: $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
 $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A$ e $C \subset B$ $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$ $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$ $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \setminus A = B$

2.9 — Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A e B subconjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, mostre que: $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ $A^c \cap B = B \setminus A$ $A \cup B^c = (B \setminus A)^c$

2.10 — Sejam dados dois conjuntos quaisquer A e B . Mostre que: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
 $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

2.11 — Dê um exemplo de conjuntos A e B de modo que não valha a inclusão $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2.12 — Dados conjuntos A, B, C , mostre que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (cf. Exercício 2.4).

2.13 — Ao tentar provar a propriedade $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (veja exercício acima), um estudante, primeiramente, provou a inclusão

$$(A \Delta B) \Delta C \subset A \Delta (B \Delta C)$$

Em seguida, para provar a outra inclusão, procedeu do seguinte modo:

$$\begin{aligned} A \Delta (B \Delta C) &= (B \Delta C) \Delta A = \\ &= (C \Delta B) \Delta A \subset C \Delta (B \Delta A) = \\ &= (B \Delta A) \Delta C = (A \Delta B) \Delta C \end{aligned}$$

Está correto o argumento do estudante?

Exercícios suplementares

2.14 — Dados A, B, C conjuntos. Prove as seguintes afirmações

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap B \subset B$$

$$A \subset A \cup B$$

$$A \cap B \subset A \cup B$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

2.15 — Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A e B subconjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, mostre que: $A \subset B^c$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$ $A \cup B^c = (B \setminus A)^c$ $(A^c)^c = A$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2.16 — Dados A, B, C, D subconjuntos. Prove as seguintes afirmações:

Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

Se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ então $A = B$.

$A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.

$A \subset B$ se e somente se $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.

$A \setminus B \subset B$ se e somente se $A \setminus B = \emptyset$.

2.17 — Suponha A, B, C não vazios. Mostre que: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ Se $B \cap C \neq \emptyset$, então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ Se $B \setminus C \neq \emptyset$, então $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

3

Conjuntos Numéricos

Deus fez os números inteiros; todo o resto é obra do homem.

Leopold Kronecker

Nesta seção, tratamos dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. O enfoque não é construtivo, isto é, não serão *definidos* tais conjuntos. Apenas destacam-se suas principais *propriedades*, com particular atenção às propriedades dos números naturais e dos números reais.

3.1 Números naturais, inteiros e racionais

Supõem-se conhecidos os conjuntos $\mathbb{N}$ (naturais), $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{Q}$ (rationais), descritos abaixo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

É de uso comum a seguinte notação para alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\}$$

$$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$$

Com significado análogo, usa-se a notação $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$ e $\mathbb{Q}_-^*$.

decidir se vamos remover a seção sobre números naturais ou ainda se permanece. De modo geral tornar claro no texto o que assumimos como conhecido

3.1.1 Soma e multiplicação

Em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de *soma* e *multiplicação*. Algumas propriedades básicas dessas operações são apresentadas abaixo (onde a , b e c denotam números naturais, inteiros

ou racionais):

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a.b = b.a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a.b).c = a.(b.c)$ (associatividade da multiplicação)
5. $0 + a = a$ (elemento neutro da soma)
6. $1.a = a$ (elemento neutro da multiplicação)
7. $a.(b + c) = a.b + a.c$ (distributiva)

As propriedades acima são importantes para a manipulação algébrica de equações que envolvem números ou variáveis numéricas. Entretanto, há mais uma propriedade necessária para o cálculo algébrico que não tem o mesmo comportamento nos três conjuntos acima. Trata-se da existência de elementos inversos:

(+) Para cada número a , existe o *oposto* de a , isto é, um número que somado a a resulta no elemento neutro 0.

(·) Para cada número $a \neq 0$, existe o *inverso* de a , isto é, um número que multiplicado por a resulta no elemento neutro 1.

Evidentemente, as afirmações acima podem ser verdadeiras ou falsas, dependendo de qual conjunto numérico estamos falando. No caso do conjunto dos naturais, nenhuma das afirmações é verdadeira, uma vez que nenhum número natural possui oposto (a exceção do elemento neutro 0) nem inverso (a exceção do elemento neutro 1). Os inteiros tampouco possuem elementos inversos, mas em compensação, possuem elementos opostos:

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \exists -z \in \mathbb{Z} \mid z + (-z) = 0.$$

Por fim, no conjunto dos números racionais, ambas as afirmações são verdadeiras:

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{Q}, \exists -q \in \mathbb{Q} \mid q + (-q) &= 0 \\ \forall q \in \mathbb{Q}^*, \exists q^{-1} \in \mathbb{Q} \mid q.q^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

3.1.2 Potenciação

Se a e n são números naturais, fica bem definida a operação de *potência*

$$a^n = \begin{cases} a.a \cdots a & (n \text{ vezes}), \text{ se } n \neq 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Note que a "operação" 0^0 não é definida. O motivo disso será visto, possivelmente, na seção dedicada a limites de funções.

Nomenclatura. Na expressão a^n , o número a é chamado de **base**, enquanto n é chamado de **expoente**.

É imediato verificar as propriedades abaixo (onde $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $n, m \in \mathbb{N}$):

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Para estender a potenciação para expoentes inteiros, de modo a manter as propriedades acima, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}^* \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, tomando $a \in \mathbb{N}^*$ e $n, m \in \mathbb{Z}$, temos, além das anteriores, a seguinte propriedade:

$$4. a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

Por fim, observe que as mesmas definições acima fazem sentido para o caso da base ser um número racional. Além disso, as quatro propriedades já enunciadas continuam valendo para esse caso, juntamente com a seguinte propriedade (onde $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ e $n \in \mathbb{Z}$):

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Observação. Mais adiante, poderemos definir a operação de potência para expoentes racionais. Mas isso só será possível, de modo adequado, no contexto dos números reais.

3.2 Princípio de Indução Finita

Uma propriedade particularmente importante dos números naturais é expressa pelo *Princípio de Indução Finita* (PIF). Nesta seção, serão formulados dois enunciados diferentes (mas equivalentes) para o PIF. O objetivo de se ter duas versões diferentes para um mesmo princípio é poder escolher qual delas mais se presta a cada caso estudado. No que se segue, $P(n)$ denota uma propriedade genérica, atribuível ao número natural genérico n . Se n satisfaz a propriedade $P(n)$, dizemos que $P(n)$ é *verdadeira* (caso contrário, que é *falsa*).

Princípio de Indução Finita (1ª versão)

Seja $P(n)$ uma propriedade genérica que satisfaz as seguintes condições:

(PIF 1) $P(n_0)$ é verdadeira para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$;

(PIF 2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq n_0$, tem-se: se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k + 1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Pode ser cômodo, para compreender o PIF, ter em mente a seguinte *analogia do dominó*. Imagine que

possuímos um certo número de peças de dominó e que resolvemos dispô-las em pé (i.e. apoiadas em suas faces menores) e enfileiradas. Se empurrarmos a primeira peça da fila (na direção da peça que lhe segue) e se a distância entre cada peça e a seguinte for suficientemente pequena, então, inevitavelmente, todas as peças serão derrubadas.

A analogia com o PIF é clara: a primeira peça do dominó a ser empurrada corresponde ao número natural n_0 da primeira condição do PIF (em geral, n_0 é o primeiro número natural para o qual a propriedade P é verdadeira, i.e. é o "primeiro número da fila"); a condição de que a distância entre cada peça e a seguinte seja suficientemente pequena pode ser expressa na forma "se uma peça cai, a seguinte também cai", e isso corresponde à segunda condição do PIF (claro que, para que a analogia funcione bem, devemos imaginar uma coleção infinita de peças de dominó).

Segundo o PIF, para provarmos a validade de uma propriedade, devemos verificar as duas condições PIF 1 e PIF 2. A primeira delas, em geral, é a mais simples, pois trata-se somente de acharmos um número natural que satisfaz a propriedade. A segunda, normalmente, é o cerne da demonstração. Para verificar a validade da condição PIF 2, deve-se: (i) tomar um número natural genérico¹ k ; (ii) assumir que a propriedade P vale para esse número, i.e. que $P(k)$ é verdadeira (nos referimos a isso como sendo a *hipótese indutiva*); (iii) usando a hipótese indutiva (e eventualmente outras propriedades já conhecidas), provar que o número $k + 1$ (i.e. o sucessor de k) também satisfaz a propriedade P , ou seja, que $P(k + 1)$ também é verdadeira.

Exemplo 3.1 — Exercício resolvido

. Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n + 1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Solução. Começamos com verificar a condição PIF 1. Para isso, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1, enquanto o termo à direita é

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = 1$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$P(k) : 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Temos então

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2}$$

¹Não custa lembrar que ao dizer que o número é *genérico*, queremos dizer que ele deve representar qualquer número possível, não devendo assumir um valor específico.

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluimos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo. $\triangleleft$

Exemplo 3.2 — Exercício resolvido

Mostrar por indução a propriedade $P(n) : 2^n \geq 1 + n$.

Solução. Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, é satisfeita condição 1 do PIF. Para provar a condição 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$2^k \geq 1 + k$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ é válida, i.e. que $2^{k+1} \geq 1 + (k+1)$. Temos

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot (1 + k) \quad (\text{usamos a hipótese indutiva}) \\ &= 2 + 2k \geq 2 + k = 1 + (k+1) \end{aligned}$$

A condição PIF 2, portanto, também é válida. Logo, pelo PIF, a propriedade P vale para todo número natural. $\triangleleft$

Nunca é demais ressaltar que, ao usar o PIF para demonstrar a validade de uma propriedade, é necessário cumprir ambas as condições 1 e 2. A título de exemplo, considere as propriedades abaixo:

1. $P(n) : n = 1$ (isto é, todo número natural é igual ao número 1)
2. $Q(n) : n > n + 1$ (isto é, todo número natural é maior que seu sucessor)

Tais propriedades são evidentemente falsas. Se fôssemos tentar prová-las usando o PIF, observaríamos que a propriedade $P(n)$ satisfaz a condição PIF 1, pois $P(1)$ é verdadeira, mas não satisfaz a condição PIF 2, pois se $P(n)$ é verdadeira, então $n = 1$ e, conseqüentemente, $n + 1 = 2 \neq 1$, i.e. $P(n+1)$ é falsa. Além disso, observaríamos que a propriedade $Q(n)$ não satisfaz a condição PIF 1, mas satisfaz a condição PIF 2 (se $n > n+1$, então, somando 1 a cada membro, resulta $n+1 > n+2$).

Exercícios

3.1 — Considere a propriedade $P(n) : n^2 + n$ é ímpar. Mostre que a propriedade P verifica a condição PIF 2. Discuta a afirmação: $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2 — Lembrando a definição de *coeficiente binomial*:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

prove o *Teorema Binomial* : para cada $n \in \mathbb{N}^*$, vale a expressão

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Sugestão: será necessário usar a fórmula

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Muitas vezes, tentar mostrar uma implicação do tipo

$$P(k) \text{ é verdadeira} \Rightarrow P(k+1) \text{ é verdadeira}$$

não é tão simples, ou até mesmo impossível. Desse modo, é útil ter à disposição a seguinte versão do PIF:

Princípio de Indução Finita - 2ª versão

Seja $P(n)$ uma propriedade genérica que satisfaz as seguintes condições:

(PIF 1) $P(n_0)$ é verdadeira para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$;

(PIF 2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_0$, tem-se: se $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$, com $n_0 \leq k < n$, então $P(n)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

A diferença dessa versão para a primeira está na condição 2, mais especificamente, na hipótese indutiva. Na versão 1, a hipótese indutiva pode ser reformulada como "a propriedade é válida para o antecessor do número n ". Já na versão 2, a hipótese indutiva é "a propriedade é válida para todos os números que antecedem n ".

Exemplo 3.3 — Exercício resolvido

Considere a propriedade $P(n)$: n é primo ou é produto de números primos. Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n > 1$ (isto é, vamos provar que todo número natural maior que 1 é primo ou é produto de números primos). A condição PIF é trivialmente satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Adotando a segunda versão do PIF, vamos verificar a condição 2. Fixado $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Solução. Queremos mostrar que n é primo ou é produto de primos. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira. Se n não é primo, então deve existir um número primo p que divide n , isto é,

$$n = p.k$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$. Ora, como $k > 1$ (pois $p \neq n$) e $k < n$ (pois $p > 1$), podemos usar a hipótese indutiva para o número k : k é primo ou é produto de primos. Consequentemente, $n = p.k$ é um produto de primos, ou seja, $P(n)$ é verdadeira. Assim, pelo PIF (2ª versão), a propriedade P vale para todo natural maior que 1. ◀

Exercício

3.3 — Tente perceber a dificuldade em se provar a propriedade acima usando a primeira versão do PIF.

Observação

Até agora, falamos somente em propriedades dos números naturais. Mas pode-se usar o PIF para provar propriedades dos números inteiros ou até mesmo racionais, desde que devidamente formuladas em termos de números naturais. Na verdade, em qualquer contexto, mesmo quando os objetos considerados não são numéricos, se uma propriedade (verdadeira) puder ser formulada em termos de números naturais, então ela pode, ao menos em princípio, ser demonstrada através do PIF. A seguir, um exemplo interessante que pode ser resolvido com o PIF.

Exercícios

3.4 — Calcule : a soma dos n primeiros números pares. a soma dos n primeiros números ímpares.

3.5 — Prove que para todo inteiro positivo n vale:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

3.6 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2. \quad 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}. \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}. \quad 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1. \quad n < 2^n. \quad 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.7 — Dados a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A sequência $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \dots, a_n = r^{n-1}a, \dots$ é denominada **progressão geométrica de razão r** . Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

3.8 — Prove que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n > 3$.

3.9 — Seja x um inteiro positivo. Demonstre que:

$$(1+x)^n > 1+nx, \text{ para todo } n \geq 2.$$

3.10 — Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3.11 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

3.12 — Prove que um caixa eletrônico pode entregar ao usuário qualquer valor maior ou igual a R\$4 usando apenas notas de dois e de cinco reais.

* 3.13 — Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados ($n \geq 3$) é $(n-2)\pi$.

3.14 — Use indução para mostrar que um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

* **3.15** — Sejam $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ conjuntos com relação a um conjunto universo U fixado. Prove por indução que

$$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \dots \cup (X \cap X_n).$$

Prove por indução que

$$(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)^C = (X_1^C) \cap (X_2^C) \cap \dots \cap (X_n^C).$$

* **3.16** — Prove que para todo $n \geq 9$,

$$n! \geq (2n)^2$$

.

* **3.17** — Prove para todo $n \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Prob. 3.18 — Problema do Circuito

Em um circuito fechado (por exemplo, uma pista de corrida), são distribuídos, aleatoriamente, um certo número de galões de gasolina. Não se conhece a quantidade de gasolina em cada galão (pode até haver galões vazios), mas sabe-se que a quantidade total de gasolina é suficiente para efetuar *exatamente* uma volta nesse circuito (e cada galão tem capacidade para conter toda essa quantidade de gasolina, se for o caso). O piloto escolhe, como ponto de partida, qualquer ponto do circuito onde se encontra um galão. O carro é colocado nesse ponto, com o tanque vazio. Em seguida, coloca-se no tanque o conteúdo desse galão. Se, com essa quantidade de gasolina, o carro não chegar ao próximo galão, ele para em pane seca. Mas se conseguir chegar ao próximo galão, acrescenta ao tanque o conteúdo desse novo galão e prossegue na pista em direção ao próximo galão. Seguindo esse procedimento, há duas possibilidades: o carro completa a volta ou para em pane seca em algum lugar da pista antes de completar a volta. A questão é: será sempre possível escolher um oportuno galão inicial de modo a completar a volta da pista? (Atenção: o problema consiste em decidir se é *possível* fazer tal escolha, e não em *como* fazer tal escolha) [Solução no Apêndice].

3.3 Números reais

Como dissemos anteriormente, está fora de nossos propósitos fazer uma *construção* do conjunto dos números reais. Interessa-nos, isso sim, aprofundarmos o conhecimento das suas *propriedades*. Em outras palavras, nosso enfoque será voltado à *estrutura* do conjunto dos números reais.

Entretanto, pode ser cômodo ter em mente algum modelo ou representação dos números reais, de modo a facilitar a apreciação de sua estrutura, foco de nossa discussão. Nesse sentido, as representações mais comuns são a representação decimal e a reta real, qualquer uma delas pode servir

ao escopo². Destaque-se, porém, mais uma vez, que essas ou quaisquer outras representações servem somente como *suporte* à compreensão da estrutura dos reais. Tudo o que se segue é independente de tais representações e estas não serão novamente mencionadas no desenrolar desta seção.

3.3.1 Apresentação axiomática dos números reais

O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é um conjunto que satisfaz os assim chamados *axiomas de corpo, de ordem e de completude*. A seguir, trataremos cada grupo de axiomas separadamente.

Axiomas de Corpo

O conjunto $\mathbb{R}$ é dotado de duas operações, *soma* e *multiplicação*, denotadas respectivamente pelos símbolos “+” e “.”, satisfazendo as seguintes propriedades³:

A1. Propriedade associativa da soma

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

A2. Propriedade comutativa da soma

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

A3. Existência do elemento neutro da soma

$$\text{Existe } 0 \in \mathbb{R} \mid a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

A4. Existência de oposto

$$\text{Para todo } a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} \mid a + (-a) = 0$$

A5. Propriedade associativa da multiplicação

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

A6. Propriedade comutativa da multiplicação

$$ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

A7. Existência do elemento neutro da multiplicação

$$\text{Existe } 1 \in \mathbb{R} \mid a.1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

²Voltaremos a falar dessas representações mais adiante. Por ora, supomos que sejam conhecidas. Aliás, se não o forem, não terão nenhuma valia nesta seção, uma vez que é justamente a intimidade com tais representações o fator que pode ajudar a compreender a descrição da estrutura que aqui será feita.

³Como já é costume, a multiplicação $a.b$ será, em geral, simplesmente denotada por ab .

A8. Existência de inverso

Para todo $a \in \mathbb{R}^*$, $\exists a^{-1} \in \mathbb{R} \mid a.a^{-1} = 1$

A9. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Observação. Há outros conjuntos numéricos que também possuem operações de soma e multiplicação, satisfazendo as propriedades acima. É o caso, por exemplo, do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números complexos. Nesse sentido, o conjunto de axiomas acima é insuficiente para caracterizar univocamente o conjunto dos números reais.

Exercícios. A partir dos axiomas A1, ..., A9 acima, prove as seguintes propriedades:

1. O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.
2. O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.
3. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a.0 = 0$
4. O oposto de um número real é único.
5. O inverso de um número real (não nulo) é único.
6. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, resulta $a(-b) = -ab$.
7. Para quaisquer números reais a e b , tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

A título de exemplo, provemos a quarta e a última dessas propriedades. Começemos pela quarta propriedade. Dado um número real a , sejam $a', a'' \in \mathbb{R}$ números tais que $a + a' = 0$ e $a + a'' = 0$. Então, usando oportunamente os axiomas acima, temos

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$$

Em outras palavras, provamos que só há um único número real que cumpre o papel de oposto de a .

Provemos agora a última das propriedades acima. Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer. Devemos mostrar que, se $ab = 0$, então ao menos um dos números a e b deve ser igual a 0. Se $a = 0$, não temos nada a provar. Suponhamos então que $a \neq 0$. Então, pela propriedade A8, existe a^{-1} tal que $a.a^{-1} = 1$. Assim, de $ab = 0$, multiplicando ambos os membros por a^{-1} , obtemos

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}.0$$

O lado direito, pela propriedade 3 do exercício acima (que supomos já ter sido provada), é igual a 0. Quanto ao lado direito, usando A5, A8 e A7, temos:

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1.b = b$$

Logo, voltando a juntar os lados direito e esquerdo, temos que $b = 0$. $\square$

Axiomas de Ordem

Em $\mathbb{R}$ está definida uma *relação de ordem total*, denotada por $\leq$ (que se lê "menor ou igual"), satisfazendo as seguintes propriedades:

A10. Dados quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se

1. $a \leq a$ (reflexiva)
2. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica)
3. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva)
4. Necessariamente, é $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ordem total)

A11. Compatibilidade com a soma

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

A12. Compatibilidade com a multiplicação

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ e } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$$

Observação. O conjunto $\mathbb{Q}$ ainda satisfaz os axiomas A10, A11 e A12⁴. Assim, os axiomas A1, ..., A12 continuam sendo insuficientes para caracterizar de modo unívoco o conjunto dos números reais.

Notação. Para facilitar a leitura, é comum adotar o símbolo $\geq$ ("maior ou igual") no sentido oposto ao de $\leq$, i.e.

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$

Além disso, também utiliza-se o símbolo $<$ (resp. $>$) para denotar a desigualdade estrita:

$$a < b \text{ (resp. } a > b) \Leftrightarrow a \leq b \text{ (resp. } a \geq b) \text{ e } a \neq b.$$

Exercícios. Com base nos axiomas A1, ..., A12, prove as seguintes propriedades relativas às desigualdades:

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

2. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$$

3. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então

$$a \leq c \text{ e } b \leq d \Rightarrow a + b \leq c + d$$

4. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$a \leq b \text{ e } c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$$

⁴O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos também pode ser dotado de uma relação de ordem total. Entretanto, não é possível definir tal ordem de modo a satisfazer as condições de compatibilidade com a soma e a multiplicação.

Provemos a última dessas propriedades. Suponhamos dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ como no enunciado, i.e. satisfazendo as hipóteses

$$a \leq b \quad \text{e} \quad c \leq 0.$$

Pelo item 1 deste exercício (que supomos já ter sido demonstrado), temos que $0 \leq -c$. Usando o axioma A12, obtemos

$$a(-c) \leq b(-c)$$

ou seja (usando um dos itens do exercício anterior)

$$-ac \leq -bc$$

Pelo axioma A11, podemos somar a ambos os membros o número $ac + bc$, mantendo a desigualdade, i.e.

$$-ac + (ac + bc) \leq -bc + (ac + bc)$$

donde, usando oportunamente os axiomas, obtemos $bc \leq ac$, i.e. $ac \geq bc$. $\square$

Discussão prévia a respeito da necessidade do Axioma de Completude. O conteúdo desta seção é objeto de vasta literatura. Evidentemente, está fora de nossos propósitos tratar este tema com o mesmo grau de profundidade, longe disso. Entretanto, parece válido delinear algumas questões motivadoras do próximo (e último) axioma que introduziremos para poder finalmente caracterizar univocamente os números reais.

Até agora, como observamos acima, os doze axiomas introduzidos não dão conta de diferenciar o conjunto dos números racionais daquele dos números reais. Mais do que isso, porém, há o fato de que um corpo ordenado⁵ não constitui um instrumento adequado às necessidades do cálculo diferencial e integral (ou, de modo mais apropriado, à Análise). O que falta, dito de modo ainda impreciso, é a propriedade da *continuidade*.

Para apreciar ao menos em parte o significado disso, comecemos por ver a ausência dessa propriedade em $\mathbb{Q}$. Provemos, como exemplo, a seguinte proposição:

Proposição 3.1

Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.

Demonstração. Para demonstrar isso, seguiremos a "redução ao absurdo": negando a tese, chegamos a uma contradição, o que nos permite concluir que a tese deve ser de fato verdadeira. Tomemos então um número racional q tal que $q^2 = 2$ (note que estamos negando a tese de que tal número não existe). Como q é um número racional, devem existir número inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$, primos entre si⁶, tais que

$$q = \frac{n}{m}$$

⁵Denomina-se assim um conjunto que satisfaça os axiomas A1, ..., A12. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de corpos ordenados.

⁶Dois inteiros são primos entre si quando não possuem nenhum divisor comum, à exceção do número 1. Um número racional sempre pode ser expresso como razão de dois inteiros primos entre si.

Como $q^2 = 2$, tem-se que $n^2 = 2m^2$. Como o membro à direita é par, assim deve ser n^2 . Logo, n é par ($\because$ um número inteiro e seu quadrado têm a mesma paridade). Podemos então escrever $n = 2k$ para um certo inteiro k , obtendo

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Mas isso significa que $m^2 = 2k^2$ é par, e portanto m também é par. Logo, o número 2 é um divisor comum de n e m , contradizendo o fato de que tais números são primos entre si. Resumindo: a hipótese de existência de um número racional q cujo quadrado é igual a 2 leva a uma contradição. Disso, concluímos que tal racional não existe, provando assim a proposição. ■

A proposição acima é um exemplo de como os axiomas A1, ..., A12 não dão conta sequer de permitir uma operação algébrica tão simples quanto a extração de raiz quadrada. O Axioma de Completude virá fornecer a resposta adequada a essa questão da continuidade, fazendo com que o conjunto dos números reais "preencha as lacunas deixadas pelos racionais".

Axioma de Completude

Apesar de ser possível enunciar o Axioma de Completude com o que já temos à disposição, nos parece mais efetivo, sob o ponto de vista didático, apresentar alguns conceitos preliminares intimamente ligados a tal axioma.

No que se segue, seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto *não vazio*. Dizemos que A é **limitado superiormente**, se existe um número real x tal que

$$a \leq x \quad \forall a \in A$$

Caso exista tal número x , este é chamado de **majorante** do conjunto A . Note que no caso em que A possua algum majorante, possuirá infinitos majorantes.

De modo similar, dizemos que A é **limitado inferiormente** se existir algum número real y tal que

$$y \leq a \quad \forall a \in A$$

Tal número y , caso exista, é chamado de **minorante**. Caso A possua algum minorante, possuirá infinitos minorantes.

Exemplo 3.4 — Exemplos

. Tome os conjuntos $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$.

- O conjunto A possui minorantes (qualquer número não positivo é um minorante de A), mas não possui majorantes, i.e. A é um conjunto limitado inferiormente, mas não superiormente.
- O conjunto B não possui nem minorantes nem majorantes (não é limitado).
- Já o conjunto C é limitado inferiormente e superiormente (qualquer número menor ou igual a 1 é um minorante, qualquer número maior ou igual a 3 é um majorante)

Definição 3.1

Um número $s \in \mathbb{R}$ é chamado de **supremo** de A se valem as seguintes condições:

- S1. $a \leq s \quad \forall a \in A$
- S2. Se x é um majorante de A , então $s \leq x$

Em outras palavras, um modo simples de colocar a definição acima é: o supremo de um conjunto A é o menor dos majorantes de A .

De modo totalmente similar, definimos o conceito de ínfimo.

Definição 3.2

Um número $r \in \mathbb{R}$ é chamado de **ínfimo** de A se valem as seguintes condições:

- I1. $r \leq a \quad \forall a \in A$
- I2. Se y é um minorante de A , então $y \leq r$

Em outras palavras, o ínfimo de um conjunto A é o maior dos minorantes de A .

É possível provar (faça-o como exercício) que tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto, casos existam, são únicos. Isso justifica adotar uma notação para cada um deles: $\sup A$ para o supremo de A e $\inf A$ para o ínfimo de A .

Nos exemplos acima, temos: $\inf A = 0$, $\inf C = 1$ e $\sup C = 3$ (note que A não possui supremo e B não possui nem ínfimo nem supremo). Assim, há casos em que o supremo (ou o ínfimo) pode não existir. O Axioma de Completude diz que isso só poderá ocorrer com conjuntos ilimitados.

Axioma de Completude:

A13. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, possui supremo.

Apesar de não fazer menção ao ínfimo, o Axioma de Completude é equivalente à seguinte propriedade:

A13'. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado inferiormente, possui ínfimo.

Exercício. Prove a propriedade A13'. [Sugestão: dado um conjunto A limitado inferiormente, considere o conjunto $B = \{-a \mid a \in A\}$ e mostre que: i) B é limitado superiormente; ii) $\inf A = -\sup B$]

Pela apresentação que demos ao Axioma de Completude, ficou claro que tal axioma não seria satisfeito pelo conjunto $\mathbb{Q}$. Mostremos que de fato isso ocorre. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{q \in \mathbb{Q}_+ \mid q^2 < 2\}$$

Note que $A \neq \emptyset$ (por exemplo, $0 \in A$) e é um conjunto limitado superiormente (por exemplo, 3 é um

majorante de A). Se o axioma A13 fosse válido em $\mathbb{Q}$, deveria existir $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p = \sup A$. Se provarmos que para tal p , deve valer $p^2 = 2$, poderemos concluir que p não pode ser racional (em função da Proposição 3.1). Consequentemente, teremos concluído que não existe o supremo de A em $\mathbb{Q}$.

Mostraremos, na verdade, uma propriedade mais geral, da qual poderemos concluir a afirmação acima. Referimo-nos à *existência da raiz quadrada de um número real positivo*:

Proposição 3.2

Seja $b \in \mathbb{R}$ um número positivo. Então existe um único número real positivo a tal que $a^2 = b$. O número a é chamado de *raiz quadrada* de b e é denotado por $\sqrt{b}$.

Demonstração. Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}$$

O conjunto A é não vazio, uma vez que $0 \in A$. Além disso, tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 1$ e $y > b$, resulta $y^2 > y > b$, logo A possui majorantes. Pelo Axioma de Completude, existe $a = \sup A$. É evidente que $a > 0$. Queremos mostrar que $a^2 = b$. A ideia, para tanto, é mostrar que não pode ocorrer nem $a^2 < b$, nem $a^2 > b$, só restando a possibilidade que nos interessa. Para descartar cada uma dessas duas desigualdades, verificaremos que: (i) supor que $a^2 < b$ contradiz o fato de a ser um majorante (condição S1 do supremo); (ii) supor que $a^2 > b$ contradiz o fato de a ser o menor dos majorantes (condição S2 do supremo). Pois bem, se fosse $a^2 < b$, poderíamos tomar um número natural $n > 1$ tal que

$$n > \frac{2a+1}{b-a^2}$$

donde obtemos

$$\frac{2a+1}{n} < b - a^2$$

Assim, tomando o número $c = a + 1/n$, seguiria:

$$\begin{aligned} c^2 &= \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \\ &< a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} < a^2 + b - a^2 = b \end{aligned}$$

Isso significa que $c \in A$ e $a < c$, contrariando a condição S1 do supremo. Portanto, está descartada a possibilidade de ser $a^2 < b$. Suponhamos agora que valha $a^2 > b$. De modo semelhante ao que foi feito acima, poderíamos tomar $c = a - 1/n$, onde n é um inteiro tal que

$$n > \frac{2a}{a^2 - b}$$

Da desigualdade acima, segue que

$$\frac{2an-1}{n^2} < \frac{2an}{n^2} = \frac{2a}{n} < a^2 - b$$

donde obtemos

$$c^2 = \left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = a^2 + \frac{1-2an}{n^2} > a^2 + b - a^2 = b$$

Desse modo, c seria um majorante de A com $c < a$, contrariando a condição S2 do supremo. Descartamos, assim, também a possibilidade de ser $a^2 > b$, podendo concluir, portanto, que $a^2 = b$. Por fim, para provarmos a unicidade da raiz quadrada, basta observar que se um número positivo $m \in \mathbb{R}$ é tal que $m^2 = b$, então m tem que ser o supremo de A (prove por exercício). Pela unicidade do supremo, deve ser $m = a$. ■

Voltando à questão formulada antes da Proposição 3.2, é imediato agora verificar que se $p \in \mathbb{Q}$ é tal que $p = \sup A$, então $p^2 = 2$. Logo, pelo que já foi dito anteriormente, concluímos que o conjunto dos racionais não satisfaz o Axioma de Completude.

O fato de $\mathbb{R}$ satisfazer os axiomas A1, ..., A13 é expresso dizendo que $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo*. Acabamos de ver que $\mathbb{Q}$, apesar de ser um corpo ordenado, não é completo. Dessa forma, podemos agora dizer que os axiomas A1, ..., A13 caracterizam o conjunto dos números reais⁷.

3.3.2 Potenciação de números reais

Na Seção 3.1.2, tratamos da operação de potenciação com base racional positiva e expoente inteiro. Queremos agora estender tal operação para os casos em que a base é um número real positivo e o expoente é um número real. No que se segue, seja a um número real positivo fixado.

definir radiciação e apresentar suas propriedades. Colocar exemplos e exercícios.

Se $m \in \mathbb{Z}$, então a potência a^m é definida em termos da operação de multiplicação:

- Se $m > 0$, $a^m = a \cdot \dots \cdot a$ (m vezes)
- Se $m < 0$, $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$
- Por fim, $a^0 = 1$

Para definir a potência com expoente racional, definamos antes a operação $a^{\frac{1}{n}}$ quando $n \in \mathbb{N}^*$. Isto é feito dizendo que $a^{\frac{1}{n}}$ é o número real positivo cuja n -ésima potência é igual ao número a , i.e.

$$b = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b > 0 \text{ e } b^n = a$$

A definição acima parece boa, mas esconde uma questão: fixados a e n , será que existe tal número real b ? A resposta a essa questão é similar ao caso da existência da raiz quadrada de um número real positivo. De fato, tal número b existe e é definido por

$$b = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n \leq a\}$$

De modo análogo ao que foi feito no caso da raiz quadrada de um número real positivo, pode-se provar que tal número real satisfaz as condições desejadas (i.e. $b > 0$ e $b^n = a$).

Observação. A potência $a^{\frac{1}{n}}$ também é denotada por $\sqrt[n]{a}$ e chamada de *raiz n -ésima* de a .

⁷Na verdade, caberia aprofundar tal "caracterização", mas o que foi dito até aqui é suficiente para os propósitos deste curso.

Se $q \in \mathbb{Q}$, podemos escrever

$$q = \frac{m}{n}$$

com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos, então

$$a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$$

Note que cada uma das operações acima (primeiro a potência por $1/n$, seguida pela potência por m) já foram definidas anteriormente. O problema que poderia aparecer aqui tem a ver com a falta de unicidade da representação do número racional q como sendo uma razão de números inteiros. De fato, a fração m/n é somente uma das infinitas representações possíveis de q . Como garantir que, se tomarmos qualquer outra, o resultado da operação de potência não se altera? Felizmente, é possível provar que a potência a^q acima definida é, de fato, independente da particular razão m/n que tomarmos para representar o número racional q (tal prova será, porém, omitida).

Finalmente, seja $x \in \mathbb{R}$.

- Se $a \geq 1$, então

$$a^x := \sup\{a^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}$$

- Se $0 < a < 1$, então

$$a^x := \inf\{a^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}$$

Com as definições acima, estendemos a operação de potência ao conjunto dos números reais. Tal operação, além disso, continua satisfazendo as propriedades já vistas na Seção 3.1.2, que aqui reproduzimos. Dados quaisquer $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$, tem-se:

$$1. a^{x+y} = a^x a^y$$

$$2. (a^x)^y = a^{xy}$$

$$3. (ab)^x = a^x b^x$$

$$4. a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

A demonstração de tais propriedades foge aos escopos deste texto e será portanto omitida.

3.3.3 Representações dos números reais

Como dissemos anteriormente, a estrutura do conjunto dos números reais é independente da forma que usamos para representar tais números. Entretanto, ao lidar com eles, sempre lançamos mão de alguma representação. Nesta e na próxima seções, voltaremos nossa atenção para duas dessas representações, a representação decimal e a reta real.

Antes, porém, de tratar cada uma delas em sua especificidade, vale a pena gastar algumas palavras sobre o que queremos dizer quando falamos em "representação" dos números reais. Na seção anterior,

inserir exercícios de radiciação e potenciação

definimos $\mathbb{R}$ como um conjunto dotado de duas operações (“+” e “.”) e uma relação de ordem total (“ $\leq$ ”), satisfazendo os treze axiomas A1, ..., A13. Assim, uma representação de $\mathbb{R}$ deve conter todos esses elementos: um conjunto, uma operação +, uma operação “.” e uma relação de ordem total $\leq$, evidentemente de modo a satisfazer os axiomas.

Na discussão que se segue sobre a representação decimal e a reta real não descreveremos todos esses elementos em detalhes, pois optamos por dar destaque aos aspectos que nos parecem mais importantes no contexto deste curso. Mas, de um modo ou de outro, faremos menção a todos esses elementos da representação.

Representação decimal dos números reais

É comum dizer-se que os números reais são os números que podem ser escritos em forma decimal. Mas o que significa isso, realmente? Quando trabalhamos com números inteiros, usamos a notação posicional em base 10, o que significa que cada posição corresponde a uma dada potência de 10: a unidade é a potência 10^0 , a dezena é a potência 10^1 , a centena é 10^2 e assim por diante. Por exemplo,

$$14302 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Já para representar números não inteiros, precisamos lançar mão das “casas decimais”, i.e. de algarismos à direita da vírgula. Mas aqui também a notação posicional se relaciona com as potências de 10, com a única diferença de que as casas à direita da vírgula referem-se a potências *negativas* de 10. Por exemplo,

$$23,496 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

Enquanto lidamos com números que possuem um número finito de casas decimais (não nulas), a expressão acima não causa nenhuma estranheza. Entretanto, para interpretarmos uma representação decimal com um número infinito de casas decimais não nulas, nos deparamos com um soma infinita de (múltiplos) de potências de 10. Qual o significado de tal soma?

Para uma resposta adequada, precisaremos do conceito de *série numérica*, o que só será visto na seção dedicada às Sequências. Mas podemos desde já tentar dar uma interpretação aceitável por ora. Tomemos o número

$$r = 1,2385757204765736885692....$$

(na verdade, as reticências fazem com que não saibamos exatamente de que número se trata, mas isso não importa para nosso exemplo). Vamos interpretar a soma infinita representada pela representação decimal seguindo um método de aproximação. Começemos tomando $x = 1$. Então x é um número próximo de r e a diferença⁸ entre eles é

$$r - x = 0,2385757204765736885692...$$

⁸Quando falamos em representação decimal, as operações de soma e multiplicação (logo, de subtração e quociente) seguem os algoritmos clássicos para operar com números inteiros. Similarmente, a relação de ordem também deriva da ordem natural entre inteiros.

Em seguida, tomemos $x = 1, 2$. A diferença desse novo valor de x para r caiu para

$$0,0385757204765736885692\dots$$

Continuamos tomando agora $x = 1,23$, vendo a diferença novamente cair para

$$0,0085757204765736885692\dots$$

E assim por diante, vamos tomando para x valores "truncados" de r :

$$1,238 \quad 1,2385 \quad 1,23857 \quad 1,238575\dots$$

Nenhum desses valores de x coincide efetivamente com r (a menos que r possua um número finito de casas decimais não nulas). Mas se observarmos a diferença entre esses valores e o número original r , veremos que essa diferença vai se aproximando de zero. Em outras palavras, podemos aproximar o valor real de r com o erro que quisermos, i.e. um erro tão pequeno quanto desejarmos.

Nesse sentido, pode-se ler a representação decimal como um "processo de aproximação" de número real r . Como veremos no momento oportuno, essa interpretação não está longe daquela formalmente mais correta.

Outra dificuldade que se encontra quando lidamos com representação decimal de um número real está relacionada com a seguinte questão: os números

$$1 \quad \text{e} \quad 0,9999999999\dots$$

são diferentes?

Por um lado, não há dúvidas quanto ao fato de que as representações decimais acima são diferentes. Mas isso pode levar o leitor incauto a afirmar que os números que tais expressões representam também são diferentes. Será que são mesmo? Usando mais uma vez uma linguagem informal (deixando a resposta formal para quando tratarmos das séries numéricas), podemos comparar o número 1 com os números

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad 0,9999 \quad \dots$$

Esses últimos, no sentido que vimos acima, representam aproximações cada vez melhores do número $0,999\dots$. Assim, se observarmos as diferenças entre 1 e esses valores truncados de $0,999\dots$, podemos chegar à resposta correta da questão acima. Pois bem, tais diferenças são

$$0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001 \quad \dots$$

Conforme nos aproximamos do valor real de $0,999\dots$, a diferença com o número 1 vai se aproximando de zero. Assim, somos obrigados a concluir que tais representações decimais, apesar de diferentes, referem-se, na verdade, ao mesmo número real (i.e. o número 1)⁹.

Representação geométrica de $\mathbb{R}$: a reta real

⁹Uma outra maneira de perceber isso, um tanto ingênua mas funcional, é a seguinte: se tais números fossem diferentes, seria possível encontrarmos um outro número real que estivesse entre eles. Você consegue escrever na forma decimal tal número?

melhorar essa seção? Essa seção recebeu algumas críticas de alguns alunos

A representação geométrica de $\mathbb{R}$ consiste na identificação da reta geométrica com o conjunto dos números reais. Em uma reta r tomemos dois pontos distintos O e A (o segmento OA será usado como unidade de medida). Por simplicidade, diremos que um ponto P da reta r (distinto de O) está à *direita* de O , se P e A estão do mesmo lado relativamente ao ponto O . Caso contrário, diremos que P está à *esquerda* de O .

O ponto O é identificado ao número real 0. Um ponto P à direita de O é identificado com o número real *positivo* x tal que

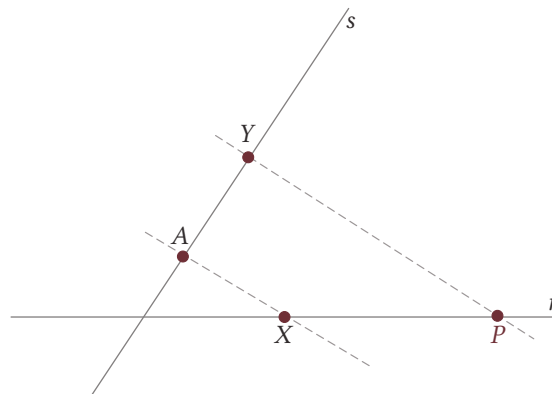
$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$$

Um ponto P à esquerda de O é identificado com o número real *negativo* x tal que

$$x = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$$

Desse modo, todo ponto da reta geométrica r está associado a um único número real e vice-versa (omitiremos aqui a demonstração dessa afirmação). Essa identificação, porém, não esgota a representação de $\mathbb{R}$. Como já observamos acima, é necessário definir operações de soma e multiplicação na reta geométrica r , assim como uma relação de ordem total, de modo a satisfazer os axiomas dos números reais. A relação de ordem é bastante natural (está, na verdade, embutida nas expressões "à direita de O " e "à esquerda de O "), assim como a operação de soma (que se traduz, essencialmente, em somar comprimentos de segmentos). Não nos parece necessário entrar em maiores detalhes nesses casos. Já a operação de multiplicação não é tão natural como os demais elementos da representação. Como efetuar a multiplicação na reta geométrica?

A operação de multiplicação é baseada no clássico Teorema de Tales. Sejam dados dois números reais x e y (podemos supor que sejam ambos positivos, é fácil adaptar a construção abaixo aos outros casos). Na reta r , marque o ponto X , correspondente ao número real x . Para auxiliar a construção, tome uma reta s que intercepte a reta r no ponto O . Nesta reta, marque o ponto A , correspondente à mesma "unidade de medida" usada para a reta r , e marque também o ponto Y , correspondente ao número real y . Trace pelo ponto Y a reta paralela ao segmento AX e obtenha o ponto P de intersecção dessa reta com a reta r . O Teorema de Tales garante que o ponto P corresponde ao número real xy . A figura abaixo ilustra essa construção.



3.3.4 Valor absoluto de um número real

É comum identificar o módulo de um número real como sendo um "número sem sinal". Essa caracterização, além de ser imprecisa, é também pouco útil em problemas que envolvem direta ou indiretamente o conceito de módulo. De modo mais apropriado, temos a seguinte definição:

Definição 3.3

O **valor absoluto** de um número real x , também chamado de *módulo* de x , é denotado por $|x|$ e dado por

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma primeira leitura da definição acima corrobora a interpretação ingênua do módulo como sendo um "número sem sinal". Afinal, tem-se, por exemplo: $|2| = 2$ e $|-2| = -(-2) = 2$. Enquanto lidamos com quantidades conhecidas, como no exemplo anterior, não há problema nenhum em adotar essa visão ingênua. Mas quando há quantidades incógnitas ou variáveis envolvidas, essa concepção é insuficiente e pode até levar a cometer deslizes do tipo "o módulo de x e $-x$ é sempre x ".

Uma leitura mais adequada da definição acima leva a ter em mente que ela abre, em geral, dois casos a serem analisados, dependendo do sinal da quantidade encerrada dentro do módulo. Vejamos como se dá essa leitura através de alguns exemplos.

Problema: Determine os números reais que satisfazem a igualdade abaixo

$$|x + 1| = 3$$

Solução. Note que não se pode determinar *a priori* se o número $x + 1$ é ou não negativo. Isso significa que devemos considerar ambas as possibilidades. Seguindo a definição acima, consideremos, separadamente, os casos: (i) $x + 1 \geq 0$; (ii) $x + 1 < 0$.

Caso (i): suponha $x + 1 \geq 0$. Então $|x + 1| = x + 1$. Logo, a equação que queremos estudar se torna

$$x + 1 = 3$$

Note, porém, que agora buscamos uma solução para essa equação somente dentre os números reais que satisfazem a condição $x + 1 \geq 0$. E encontramos a solução $x = 2$.

Caso (ii): suponha agora $x + 1 < 0$. Nesse caso, tem-se $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$. Assim, a equação original torna-se

$$-x - 1 = 3$$

A solução para essa equação (procurada no conjunto dos números reais que satisfazem a condição $x + 1 < 0$) é $x = -4$.

Dos dois casos analisados, obtemos o conjunto-solução $S = \{-4, 2\}$. ◀

Problema: Determine os números reais que satisfazem a desigualdade

$$|x + 2| \leq 2x + 3$$

Solução. Mais uma vez, seguindo a definição de valor absoluto, consideraremos dois casos, dependendo do sinal de $x + 2$.

Caso (i): suponha $x + 2 \geq 0$. Tem-se, então, $|x + 2| = x + 2$ e a desigualdade assume a forma

$$x + 2 \leq 2x + 3$$

As soluções que nos interessam, portanto, devem satisfazer tanto a condição $x + 2 \geq 0$ quanto a desigualdade $x + 2 \leq 2x + 3$. Encontramos o conjunto-solução $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Caso (ii): suponha agora $x + 2 < 0$. Então $|x + 2| = -x - 2$ e a desigualdade passa a ser

$$-x - 2 \leq 2x + 3$$

Para que um número x satisfaça essa última desigualdade, deveria valer $x \geq -5/3$. Entretanto, para tal x não valeria a condição $x + 2 < 0$. Logo, esse segundo caso não possui solução.

Com base nas duas análises acima, obtemos o conjunto-solução para o problema inicial: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$. ◀

Observação. É importante destacar um cuidado que tivemos ao resolver os problemas acima e que talvez passe despercebido. Pela natureza da definição de valor absoluto, tivemos que estudar a equação (no primeiro problema) e a desigualdade (no segundo) em dois casos separados. Ao fazer isso - e aqui está o cuidado ao qual nos referimos - devemos perceber que, em cada um dos casos analisados, estamos *restringindo o universo no qual se busca a solução* do problema. Esse cuidado se fez sentir, particularmente, no segundo problema, quando, ao analisar o caso em que $x + 2 < 0$ (segundo caso), fomos obrigados a descartar as soluções da desigualdade $-x - 2 \leq 2x + 3$, pois estas se encontravam *fora* do universo considerado naquele caso.

Propriedades

(No que se segue, x e y são números reais quaisquer)

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = \sqrt{x^2}$
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
4. $|-x| = |x|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$
6. $|xy| = |x||y|$

7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)

8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

9. Se $c > 0$, então:

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$$

10. Se $c > 0$, então:

$$|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c \text{ ou } x \geq c$$

Exercícios

3.19 — Demonstre as seguintes propriedades do módulo; $|-x| = |x|$ $|x - y| = |y - x|$ Se $c \geq 0$, então $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$ $|x \cdot y| = |x| |y|$ $|x^2| = x^2$ Se $c \geq 0$ então $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$ $-|x| \leq x \leq |x|$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

3.20 — Discuta se vale ou não a seguinte desigualdade (para um número real arbitrário x):

$$-x \leq |x| \leq x$$

3.3.5 Introdução à Topologia da reta

O objetivo desta seção é o de introduzir uma linguagem e uma notação que serão úteis, mais adiante, no estudo das funções reais de uma variável real. Em boa parte, trata-se de linguagem e notação conhecidas, como é o caso dos intervalos abertos e fechados. A expressão "topologia da reta", de certo modo, refere-se a propriedades dos números reais (ou das funções reais) que se expressam nessa linguagem¹⁰.

São dois os conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: *distância* e *intervalo* (na verdade, eles estão interrelacionados, mas explorar essa interrelação foge ao nosso escopo). Na representação geométrica dos números reais como a *reta real*, ambos os conceitos estão relacionados com aquele de *segmento*.

A **distância** entre dois números reais x e y é dada por

$$d(x, y) := |x - y|$$

Note que, vista na reta real, a noção de distância corresponde ao comprimento do segmento de reta cujos extremos são os pontos com abscissas x e y .

Dados dois números reais $a < b$, um **intervalo** de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

¹⁰A Topologia, na verdade, é uma área ampla da Matemática que se ocupa, dentre outras coisas, do estudo das funções contínuas. Tais funções, e consequentemente seu estudo, se dão em contextos bem mais gerais do que aquele das funções reais de uma variável real, que é o que nos interessa aqui. Por tal motivo, não aprofundaremos o significado da expressão "topologia da reta". Na verdade, poderíamos mesmo ter omitido tal referência à Topologia, mas por que fazê-lo se, de fato, é disso que esta seção trata?

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

A **medida** de um intervalo de extremos a e b é a distância entre esses extremos, i.e. $|a - b|$. Note que um intervalo de extremos a e b corresponde, na reta real, ao segmento cujos extremos têm abscissas a e b . A medida desse intervalo é a medida (comprimento) do segmento correspondente.

Sobre notação. Em alguns textos, a notação para intervalos abertos (ou semi-abertos) usa o colchete invertido. Por exemplo, $]a, b[$ denota o que, aqui, denotamos por (a, b) . Não adotaremos essa notação do colchete invertido, mas somente aquela do parênteses, explicitada acima.

inserir desenhos de intervalos reais

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $r > 0$, o **intervalo centrado em a com raio r** é o intervalo

$$(a - r, a + r)$$

Nesse caso, dizemos que a é o centro desse intervalo. Observe que vale a seguinte propriedade (prove-a por exercício):

$$x \in (a - r, a + r) \Leftrightarrow |x - a| < r$$

Isso significa, em particular, que os números desse intervalo são aqueles que distam de a menos do que r . Dito de outra forma, um intervalo do tipo $(a - r, a + r)$ pode ser interpretado como o conjunto dos números que "aproximam" o número a , com um "erro" menor do que r .

Uma notação semelhante àquela de intervalo é usada para denotar semi-retas, lançando mão também dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, tem-se

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Note que não faz sentido usar o colchete no extremo infinito, uma vez que nem $-\infty$ nem $+\infty$ são números reais. Por simplicidade, às vezes usaremos o termo "intervalo" também para semi-retas como as acima.

De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em *conjunto aberto* e *conjunto fechado*. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer de números reais. Dizemos que A é **aberto** se vale a seguinte propriedade: todo ponto $x \in A$ é centro de um intervalo contido em A . Dito de modo menos preciso (mas talvez mais significativo): para todo número pertencente ao conjunto A , variações suficientemente pequenas dele continuam dentro do conjunto A . Com linguagem formal, temos:

A é aberto $\Leftrightarrow$ para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subset A$

Por outro lado, um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é **fechado** se o seu complementar (relativamente ao conjunto $\mathbb{R}$) é aberto, i.e.

B é fechado $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus B$ é aberto

Exemplo 3.5 – Exemplos

- Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.
- Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x - a|$, resulta que $(x - r, x + r)$ está contido na semi-reta considerada.
- A união de conjuntos abertos é um conjunto aberto. [Prove por exercício]
- Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado. De fato, seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que é aberto (pois é união de dois conjuntos abertos).
- Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a]$ ou $[a, +\infty)$ é fechado, pois seus complementares são semi-retas abertas.
- O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
- Um intervalo do tipo $[a, b)$ não é nem aberto, nem fechado. De fato, nenhum intervalo centrado em a está contido em $[a, b)$ (descartando que este seja aberto) e nenhum intervalo centrado em b está contido no complementar de $[a, b)$ (descartando que $[a, b)$ seja fechado).
- De modo análogo, um intervalo do tipo $(a, b]$ não é nem aberto, nem fechado.

Os dois últimos exemplos mostram que os conceitos de "aberto" e "fechado" não são conceitos opostos. Isto é, se um dos atributos não vale para um dado conjunto, não se pode concluir que o outro atributo deve ser válido para esse conjunto.

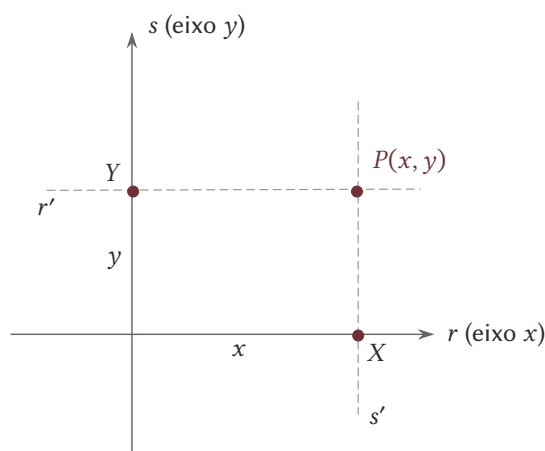
Observação. Sob o ponto de vista formal, convém atribuir ao conjunto vazio a propriedade de ser um conjunto aberto (na verdade, o conjunto vazio satisfaz a condição de ser aberto, acima definida, por vacuidade). Isso significa, também, que o seu complementar é fechado. Mas o complementar de $\emptyset$ é $\mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{R}$ é aberto e também fechado. E sendo $\mathbb{R}$ aberto, temos que seu complementar é fechado, i.e. o conjunto vazio $\emptyset$ também é aberto e fechado. Esses são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados.

3.3.6 O Plano Cartesiano

Um modelo que será muito útil no estudo de funções reais de uma variável real é o *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$, que nada mais é do que uma representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O plano

jogar para o final do capítulo e introduzir exemplos de regiões do plano "countour plot". Acho que seria bom falar sobre a distância entre dois pontos.

cartesiano é constituído por duas retas reais que se encontram perpendicularmente na origem (que é, portanto, comum a ambas as retas). Para identificar o plano geométrico com o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, procedemos como segue (acompanhe o procedimento na figura abaixo):



- Tome um ponto P qualquer do plano.
- Construa a reta r' paralela a r , passando por P .
- Construa a reta s' paralela a s , passando por P .
- Chame de X o ponto de intersecção de s' com r .
- Chame de Y o ponto de intersecção de r' com s .
- Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ os números reais associados, respectivamente, aos pontos X e Y .
- Identifique o ponto P com o par ordenado (x, y) .

Tendo em mente o procedimento acima, o número x é chamado de *abscissa* do ponto P e o número y é chamado de *ordenada* do ponto P . Ambos são chamados de *coordenadas* de P . A reta r é chamada de *eixo das abscissas* (ou mais popularmente "eixo x ") e a reta s de *eixo das ordenadas* (ou popularmente "eixo y "). Esses eixos são chamados também de *eixos coordenados*.

Os dois eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. A menos de pontos pertencentes aos eixos, temos:

- Primeiro quadrante: pontos com ambas as coordenadas positivas
- Segundo quadrante: pontos com abscissa negativa e ordenada positiva
- Terceiro quadrante: pontos com ambas as coordenadas negativas
- Quarto quadrante: pontos com abscissa positiva e ordenada negativa

Exercícios

3.21 — Considere os seguintes conjuntos. Diga quais são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente. E se existir encontre o supremo e o ínfimo desses conjuntos:

$$A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$$

$$B = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$$C = \{1 - n! : n \in \mathbb{N}\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$$

$$G = \left\{\frac{n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$H = \left\{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$I = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$J = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$$

3.22 — A partir dos axiomas A1, ..., A9 dos números reais prove as seguintes propriedades:

O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma. O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a \cdot 0 = 0$. Para quaisquer números reais a e b , tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

3.23 — Mostre, utilizando propriedades básicas, que: Se $ax = a$ para algum $a \neq 0$ então $x=1$. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a + c \leq b + d$. Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$.

3.24 — (Não existência de Infinitesimais) Mostre que se $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ então $x = a$.

Complementares

3.25 — Mostre que:

Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$. Se $a \leq b$ e $c \geq d$, então $a - c \leq b - d$. Se $a \leq b$ e $c \geq 0$, então $ac \leq bc$. Se $a > 1$ então $a^2 > a$. Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$. Se $0 \leq a < b$ e $0 \leq c < d$, então $ac < bd$. Se $0 \leq a < b$ então $a^2 < b^2$. Se $a, b > 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.

4

★ Complementos sobre Conjuntos

4.1 Famílias de Conjuntos

4.1.1 Sobre índices

O uso de índices é bastante comum em matemática, pois proporciona um modo eficaz e econômico de descrever uma determinada coleção de objetos, sem exigir uma grande variedade de símbolos. Por exemplo, poderíamos descrever um elenco de 20 objetos usando letras distintas

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t$$

mas seria muito melhor denotá-los com uma única letra (digamos a) e 20 índices

$$a_1, a_2, \dots, a_{20}.$$

A validade do uso de índices fica ainda mais evidente quando lidamos com conjuntos infinitos, como por exemplo uma sequência de números

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Nesse caso, seria impossível usar letras ou qualquer outro conjunto finito de símbolos para descrever tal sequência.

Os dois exemplos acima podem ser expressos de um modo mais sintético. Para isso, considere os conjuntos $J = \{1, 2, \dots, 20\}$ e $\mathbb{N}^*$. Então, podemos escrever:

$$\{a_i\}_{i \in J} = \{a_1, a_2, \dots, a_{20}\}$$

e

$$\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

Em outras palavras, se A é um conjunto cujos elementos queremos indexar com um certo conjunto de índices J , indicamos isso com a notação

$$A = \{a_i\}_{i \in J}.$$

Uma característica importante desse processo de indexação é a seguinte: o uso de índices pode ser descrito através da linguagem de funções. De fato, indexar os elementos de um conjunto A através de um conjunto de índices J significa, simplesmente, escolher uma função $f : J \rightarrow A$. Se quisermos indexar todos os elementos de A , a função f deve ser sobrejetora. Se quisermos que elementos distintos de A tenham índices distintos, então a função f deve ser injetora. Se quisermos ambas as propriedades, a função deve ser bijetora.

Observação. Note que, adotando o ponto de vista acima, fica claro que todo conjunto pode ser usado, potencialmente, como um conjunto de índices. Para vermos um exemplo pouco usual de uso de índices, considere a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{se } z \geq 0 \\ -2z - 1 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Desse modo, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros está sendo usado para indexar o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, i.e.

$$\mathbb{N} = \{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

onde $n_i = f(i)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Exercício. Usando a indexação acima de $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$, determine os elementos $n_0, n_1, n_{-1}, n_2, n_{-2}$.

4.1.2 Operações com famílias de conjuntos

Nesta seção, lidaremos com *famílias (ou classes) de conjuntos*, isto é, conjuntos cujos elementos são, por sua vez, também conjuntos. Queremos estender a essa situação algumas operações entre conjuntos, assim como descrever algumas propriedades.

Seja dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos, i.e.

$$\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in J}$$

onde J é um qualquer conjunto de índices e cada A_i é um conjunto. A **união** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *ao menos um* dos conjuntos de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{x \mid x \in A_j \text{ para algum } j \in J\}$$

A **intersecção** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *todos* os conjuntos de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\bigcap_{i \in J} A_i = \{x \mid x \in A_j \text{ para todo } j \in J\}$$

Dentre as propriedades mais importantes, destacamos as seguintes: dada uma família $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in J}$ de conjuntos e dado um conjunto qualquer B , tem-se:

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) = \bigcup_{i \in J} (B \cap A_i)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right) = \bigcap_{i \in J} (B \cup A_i)$$

Além disso, se $\mathbb{U}$ é um conjunto que contém todos os conjuntos A_i , então, tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right)^c &= \bigcap_{i \in J} A_i^c \\ \left(\bigcap_{i \in J} A_i \right)^c &= \bigcup_{i \in J} A_i^c \end{aligned}$$

Complemento.

A título de contemplar os mais curiosos, citamos aqui outra operação que pode ser estendida a qualquer família de conjuntos: o produto cartesiano. Tal operação vai muito além do que qualquer curso de cálculo exige, podendo ser sumariamente ignorada pelos mais "pragmáticos". Aos que não resistem à beleza do pensamento abstrato, boa leitura.

Como primeiro passo, vejamos como definir o produto cartesiano de uma quantidade qualquer (mas finita) de conjuntos. Dados n conjuntos não vazios $A_1, A_2, \dots, A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ é o conjunto dos elementos na forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde para cada $1 \leq i \leq n$ tem-se que $x_i \in A_i$. Em símbolos:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Os elementos na forma $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ são chamados de *n-upla ordenada* (que se lê "ênupla"ordenada).

Note-se que o produto cartesiano de n conjuntos é muito semelhante ao produto cartesiano de dois conjuntos, só diferindo, de fato, pelo número de conjuntos envolvidos.

Nosso propósito, agora, é contemplar famílias quaisquer de conjuntos, eventualmente infinitas. Para tanto, não é difícil perceber que a descrição acima não é adequada. Para chegar a um outro modo de tratar o produto cartesiano, pode ser útil revermos, sob outro olhar, o produto cartesiano que nos é já conhecido (vamos considerar o caso mais simples, com somente dois conjuntos). Dados dois conjuntos não vazios A_1 e A_2 (o uso de índices aqui é proposital), podemos identificar um par ordenado (x_1, x_2) do produto cartesiano $A_1 \times A_2$ com a função $f : \{1, 2\} \rightarrow (A_1 \cup A_2)$ dada por

$$f(1) = x_1 \quad \text{e} \quad f(2) = x_2$$

Pode parecer um modo exageradamente complicado para descrever um par ordenado e, se fosse esse o único objetivo dessa descrição, seria realmente algo despropositado. Mas essa linguagem apenas traduz a ideia de que um par ordenado nada mais é do que uma particular escolha, simultânea, de um elemento de um conjunto e um de outro. E cada função f como aquela acima descreve exatamente uma particular escolha desse tipo.

A vantagem dessa linguagem, porém, está no fato de permitir que se defina o produto cartesiano para uma família qualquer de conjuntos. De fato, seja dada uma família de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in J}$$

onde J é um qualquer conjunto de índices. O **produto cartesiano** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções

$$f : J \rightarrow \bigcup_{i \in J} A_i$$

tais que $f(j) \in A_j$ para todo $j \in J$. Em símbolos:

$$\prod_{i \in J} A_i = \{f : J \rightarrow \bigcup_{i \in J} A_i \mid f(j) \in A_j, \forall j \in J\}.$$

5

Combinatória

Habito a Possibilidade —

Emily Dickinson

Em problemas de contagem, raramente é necessário enumerar todas as possibilidades. A dificuldade principal consiste, em geral, em identificar corretamente quais objetos estão sendo contados e de que maneira podem ser organizados.

Em alguns problemas, as possibilidades são divididas em casos disjuntos; em outros, uma escolha é realizada em várias etapas. Há ainda situações em que a ordem dos elementos altera o resultado e outras em que ela é irrelevante. Essas distinções determinam os princípios e as fórmulas que serão utilizados.

A enumeração de casos simples pode servir para reconhecer a estrutura de uma contagem. As fórmulas gerais surgem quando esse raciocínio é expresso de forma independente do número particular de possibilidades.

5.1 Princípios de contagem

5.1.1 O princípio aditivo

Suponha que uma possibilidade possa pertencer a uma de duas classes que não têm elementos em comum. Se a primeira classe contém m possibilidades e a segunda contém n , então há $m + n$ possibilidades ao todo.

Princípio aditivo

Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Se os conjuntos não forem disjuntos, os elementos de $A \cap B$ serão contados duas vezes. Nesse caso,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

O princípio aditivo aplica-se quando a contagem é dividida em casos disjuntos. Conta-se cada caso separadamente e somam-se os resultados. Essa situação deve ser distinguida daquela em que uma mesma escolha é realizada em etapas sucessivas.

Exemplo 5.1 — Exercício resolvido

Uma livraria separou para uma promoção 18 livros de matemática e 12 livros de física. Nenhum livro pertence às duas categorias. Quantos livros participam da promoção?

Solução. Cada livro da promoção está em exatamente uma das duas categorias. Assim, podemos separar a contagem em dois casos: escolher um livro de matemática ou escolher um livro de física. Como os casos não se sobrepõem, somamos:

$$18 + 12 = 30.$$

Portanto, 30 livros participam da promoção. ◀

5.1.2 O princípio multiplicativo

Considere agora uma escolha feita em etapas. Para cada resultado da primeira etapa, uma segunda escolha ainda precisa ser feita. Se há n possibilidades na primeira etapa e, para cada uma delas, há m possibilidades na segunda, então cada uma das n escolhas iniciais se desdobra em m resultados.

Se as possibilidades da primeira etapa são

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

e as da segunda são

$$b_1, b_2, \dots, b_m,$$

então os resultados completos são pares

$$(a_i, b_j).$$

Para a_1 há m pares possíveis; para a_2 há outros m ; e assim por diante. Temos n grupos com m resultados em cada um. Por isso aparecem $n \cdot m$ possibilidades, e não $n + m$.

Princípio multiplicativo

Se uma escolha é realizada em duas etapas, com n possibilidades na primeira e exatamente m possibilidades na segunda para cada resultado da primeira, então há

$$n \cdot m$$

possibilidades ao todo.

Em termos de conjuntos, se $\#A = n$ e $\#B = m$, então

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B.$$

Exemplo 5.2 — Exercício resolvido

João decidiu passar as férias no Japão. Uma agência oferece 3 voos de ida e 2 cruzeiros para a volta. De quantas maneiras João pode escolher a viagem?

Solução. Para cada um dos 3 voos há 2 escolhas de cruzeiro. Logo,

$$3 \cdot 2 = 6.$$

<

O mesmo argumento vale para qualquer número finito de etapas. As opções podem variar de uma etapa para outra; basta que o número de possibilidades em cada etapa seja conhecido para qualquer escolha feita anteriormente.

Princípio multiplicativo generalizado

Se uma escolha é realizada em r etapas e, qualquer que seja o resultado das etapas anteriores, há respectivamente

$$n_1, n_2, \dots, n_r$$

possibilidades em cada etapa, então o número total de resultados é

$$n_1 n_2 \cdots n_r.$$

Exemplo 5.3 — Exercício resolvido

Em certo país, as placas de automóveis são formadas por três letras seguidas de dois algarismos. Admitindo repetição, quantas placas são possíveis?

Solução. Há 26 possibilidades para cada letra e 10 para cada algarismo. Logo,

$$26^3 \cdot 10^2 = 1\,757\,600.$$

<

Exemplo 5.4 — Exercício resolvido

Um sistema admite códigos de dois formatos:

$$\text{LLDDD} \quad \text{ou} \quad \text{LLLDD},$$

onde L representa uma letra e D um algarismo. Dentro de cada código, letras não podem se repetir e algarismos não podem se repetir. Quantos códigos são possíveis?

Solução. Aqui aparecem os dois princípios ao mesmo tempo. Primeiro separamos a contagem pelos dois formatos, que são casos alternativos.

No formato LLDDD, há

$$26 \cdot 25$$

maneiras de escolher as duas letras em ordem. Para os três algarismos há

$$10 \cdot 9 \cdot 8$$

possibilidades. Portanto esse formato produz

$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$$

códigos.

No formato LLLDD, o mesmo raciocínio fornece

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9$$

códigos. Como um código pertence a exatamente um dos dois formatos, somamos:

$$26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 + 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 = 1\,872\,000.$$

A multiplicação conta as escolhas sucessivas *dentro* de cada formato; a soma reúne os dois casos possíveis. ◀

5.1.3 Subconjuntos e palavras binárias

Exemplo 5.5 — Exercício resolvido

Seja $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Quantos subconjuntos possui A ?

Solução. A cada subconjunto $B \subseteq A$ associamos uma palavra binária de comprimento n : na posição i escrevemos 1 se $a_i \in B$ e 0 se $a_i \notin B$.

Por exemplo,

$$100 \dots 0, \quad 111 \dots 1, \quad 000 \dots 0$$

representam, respectivamente, $\{a_1\}$, o próprio conjunto A e o conjunto vazio.

A associação é reversível. Portanto, contar subconjuntos é o mesmo que contar palavras binárias de comprimento n . Como cada posição admite duas escolhas,

$$\#\mathcal{P}(A) = \underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n.$$

A contagem anterior baseia-se numa correspondência biunívoca entre subconjuntos de A e palavras binárias de comprimento n . Cada subconjunto determina uma única palavra e, reciprocamente, cada palavra determina um único subconjunto. Os dois conjuntos têm, portanto, a mesma cardinalidade. ◀

Exercícios

5.1 — Um restaurante oferece 4 massas, 6 carnes e 5 acompanhamentos. Quantos pratos podem ser formados escolhendo um item de cada categoria?

5.2 — Uma senha tem três letras seguidas de quatro algarismos. Quantas senhas existem se repetições são permitidas?

5.3 — Quantos inteiros de três algarismos têm apenas algarismos ímpares?

* 5.4 — Quantos inteiros de três algarismos têm pelo menos um algarismo igual a zero?

5.2 Contagens em que a ordem importa

Em determinados problemas, duas escolhas formadas pelos mesmos elementos podem ser distintas quando a ordem é alterada. Escolher Ana e Bruno para uma comissão é a mesma escolha que Bruno e Ana; escolher Ana para presidente e Bruno para vice é diferente de inverter essas funções. No segundo caso, o objeto contado é uma lista ordenada.

5.2.1 Arranjos sem repetição

Definição 5.1

Um **arranjo de r elementos** de um conjunto A com n elementos, com $r \leq n$, é uma lista ordenada de comprimento r formada por elementos distintos de A .

Considere inicialmente cinco estudantes disputando três funções diferentes: presidente, vice-presidente e secretário. Para presidente há 5 escolhas. Feita essa escolha, a mesma pessoa não pode ocupar a vice-presidência, de modo que restam 4 escolhas. Escolhidos presidente e vice, restam 3 possibilidades para secretário. Pelo princípio multiplicativo,

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Nesse problema, não se escolhem apenas três pessoas; preenchem-se três posições distintas. Assim, Ana como presidente e Bruno como vice constitui um resultado diferente daquele em que as duas funções são trocadas.

O mesmo raciocínio vale com n elementos e r posições. Para formar um arranjo, preenchemos as posições uma de cada vez. Há n escolhas para a primeira posição. Depois de usada uma delas, restam $n - 1$ para a segunda; depois $n - 2$ para a terceira. Ao chegar à posição r , já usamos $r - 1$ elementos, portanto restam

$$n - (r - 1) = n - r + 1$$

escolhas. Multiplicando o número de escolhas feitas em cada etapa, obtemos

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1).$$

A escrita com fatoriais apenas compacta esse produto. Como

$$n! = n(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r)!,$$

dividir ambos os lados por $(n-r)!$ fornece

$$n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Teorema 5.1

O número de arranjos de r elementos escolhidos entre n elementos é

$$A(n, r) = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Exemplo 5.6 — Exercício resolvido

São sorteados, sem reposição, 5 números dentre $1, 2, \dots, 50$. Quantos resultados são possíveis se a ordem de saída importa?

Solução. Temos

$$A(50, 5) = \frac{50!}{45!} = 254\,251\,200.$$

<

Exemplo 5.7 — Exercício resolvido

Quantos inteiros entre 100 e 999 possuem todos os algarismos distintos?

Solução. A resposta não é simplesmente $A(10, 3)$, pois o primeiro algarismo não pode ser zero. Há 9 escolhas para o primeiro algarismo, 9 para o segundo e 8 para o terceiro. Logo,

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

<

5.2.2 Permutações

Quando todos os elementos são utilizados, obtém-se o caso particular das permutações.

Definição 5.2

Uma **permutação** de um conjunto com n elementos é uma lista ordenada que contém cada elemento exatamente uma vez.

A contagem pode ser feita diretamente. Considere n objetos distintos e n posições. Para a primeira posição há n escolhas. Depois de ocupado um lugar, restam $n - 1$ objetos para a segunda posição; depois $n - 2$ para a terceira, e assim sucessivamente, até restar uma única escolha para a última posição. Portanto,

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Assim o fatorial não aparece como uma convenção arbitrária: ele registra exatamente o número de escolhas sucessivas necessárias para ordenar todos os elementos. Naturalmente, isso também é o caso $r = n$ da fórmula dos arranjos:

$$A(n, n) = n!.$$

Exemplo 5.8 — Exercício resolvido

Cinco livros distintos serão colocados lado a lado em uma estante. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução. Cada ordenação é uma permutação. Portanto, há

$$5! = 120$$

ordenações. ◀

Exemplo 5.9 — Exercício resolvido

Oito pessoas distintas vão se sentar lado a lado. De quantas maneiras isso pode ser feito se Ana e Bruno devem permanecer juntos?

Solução. A restrição impede que simplesmente contemos as $8!$ permutações. Em vez disso, tratamos Ana e Bruno provisoriamente como um único bloco. Temos então esse bloco e as outras seis pessoas, isto é, 7 objetos a ordenar:

$$7!$$

possibilidades.

Mas, dentro do bloco, Ana e Bruno podem aparecer nas ordens AB ou BA. Para cada uma das $7!$ ordenações dos blocos há, portanto, duas ordens internas. Logo o total é

$$2 \cdot 7! = 10\,080.$$

O artifício do bloco é útil sempre que certos elementos precisam permanecer consecutivos: primeiro contamos o bloco como um único objeto e depois contamos as ordens possíveis dentro dele. ◀

Exercícios

5.5 — Quantas palavras de quatro letras distintas podem ser formadas com as letras $\{A, B, C, D, E, F\}$?

5.6 — Quantas placas formadas por três letras distintas seguidas de quatro algarismos distintos são possíveis?

5.7 — Quantos números de quatro algarismos têm todos os algarismos distintos?

* 5.8 — Quantos números pares de quatro algarismos têm todos os algarismos distintos?

5.9 — Treze livros distintos serão colocados em uma estante. Se 6 são de cálculo, 3 de geometria analítica e 4 de física, de quantas maneiras podemos ordená-los de modo que livros do mesmo assunto fiquem juntos?

5.3 Permutações com repetições

Se cada posição de uma lista admite livremente qualquer um de n símbolos, uma lista de comprimento r pode ser formada de n^r maneiras. Há, porém, uma situação distinta, na qual as multiplicidades de cada símbolo estão previamente fixadas.

Nesse caso, permutar entre si cópias iguais não produz uma nova ordenação. A contagem deve, portanto, corrigir as repetições introduzidas quando essas cópias são tratadas provisoriamente como distintas.

Exemplo 5.10 — Exercício resolvido

Quantas palavras podem ser formadas com três letras a e duas letras b ?

Solução. Se distinguíssemos artificialmente as letras como

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2,$$

teríamos $5!$ ordenações. Mas trocar entre si as três ocorrências de a não altera a palavra, assim como trocar as duas ocorrências de b . Cada palavra foi contada $3!2!$ vezes. Logo,

$$\frac{5!}{3!2!} = 10.$$

◀

Teorema 5.2

Suponha que uma palavra de comprimento n seja formada por r símbolos distintos, com multiplicidades $n_1, \dots, n_r$, de modo que

$$n_1 + \dots + n_r = n.$$

O número de palavras distintas é

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}.$$

Demonstração. Distinga provisoriamente todas as cópias de um mesmo símbolo. Se o primeiro símbolo aparece n_1 vezes, escreva suas cópias como

$$a_1, a_2, \dots, a_{n_1},$$

e faça o mesmo com os demais símbolos. Passamos então a ter n objetos distintos, que podem ser ordenados de $n!$ maneiras.

Agora apagamos os índices. Uma palavra sem índices não muda quando permutamos entre si as n_1 cópias do primeiro símbolo: há $n_1!$ maneiras de fazer isso. Independentemente, podemos permutar as n_2 cópias do segundo símbolo de $n_2!$ maneiras, e assim por diante. Portanto, cada palavra realmente distinta apareceu exatamente

$$n_1! n_2! \cdots n_r!$$

vezes na contagem artificial de $n!$ ordenações.

Dividindo pelo número de vezes que cada palavra foi repetida, obtemos

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}.$$

■

A divisão corrige a contagem realizada com cópias artificialmente distintas. O denominador é precisamente o número de ordenações que produzem o mesmo resultado depois que os índices são retirados.

Exemplo 5.11 — Exercício resolvido

Quantas palavras diferentes podem ser escritas usando todas as letras da palavra BANANA?

Solução. A palavra tem 6 letras: A aparece 3 vezes, N aparece 2 vezes e B aparece uma vez. Portanto,

$$\frac{6!}{3!2!} = 60.$$

<

Exemplo 5.12 — Exercício resolvido

Um estudante precisa deslocar-se 6 quadras para leste e 4 quadras para o norte. De quantas maneiras pode fazer o percurso andando exatamente 10 quadras?

Solução. Represente um passo para leste por L e um passo para norte por N . Um caminho mínimo é então completamente determinado pela ordem em que aparecem seis letras L e quatro letras N . Por exemplo,

$$LLNLLNLLN$$

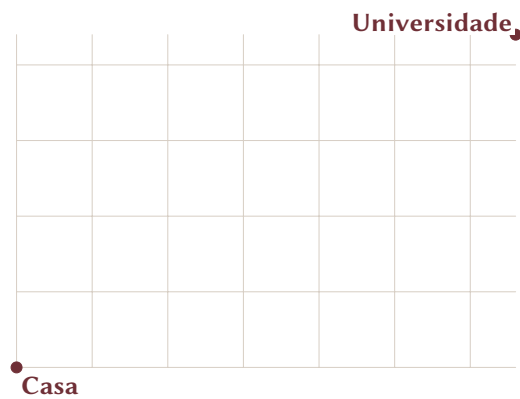


Figura 5.1. Um caminho mínimo é determinado pela ordem de 6 passos para leste e 4 para norte.

descreve um caminho específico, e qualquer palavra com seis L e quatro N descreve exatamente um caminho mínimo.

Assim, o problema geométrico foi transformado em um problema de ordenar dez símbolos com repetições prescritas. Portanto,

$$\frac{10!}{6!4!} = 210.$$

◁

Exercícios

5.10 — Quantas palavras diferentes podem ser escritas usando todas as letras de MATEMATICA?

5.11 — De quantas maneiras podemos ordenar 8 bolas em uma fila se 3 são vermelhas, 3 são azuis e 2 são verdes, considerando indistinguíveis as bolas de mesma cor?

* **5.12** — Quantos caminhos mínimos existem entre $(0, 0)$ e $(7, 5)$ se só podemos caminhar para a direita ou para cima?

5.4 Combinações

Considere a escolha de r elementos de um conjunto com n elementos, sem levar em conta a ordem. Uma maneira de obter a fórmula correspondente consiste em contar primeiro as listas ordenadas e, em seguida, determinar quantas delas representam a mesma escolha.

Definição 5.3

Uma **combinação de r elementos** de um conjunto A é um subconjunto de A com exatamente r elementos.

Considere, inicialmente,

$$A = \{a, b, c, d\}$$

e suponha que queremos escolher dois elementos. Se mantivermos a ordem, obtemos listas como

$$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), \dots$$

e o princípio multiplicativo dá $4 \cdot 3 = 12$ listas ordenadas.

Mas, se estamos apenas escolhendo uma dupla, as listas (a, b) e (b, a) representam a mesma escolha $\{a, b\}$. O mesmo acontece com toda dupla: cada subconjunto de dois elementos foi contado exatamente

$$2! = 2$$

vezes. Por isso o número de duplas é

$$\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6.$$

O mesmo argumento vale no caso geral. Há $A(n, r)$ maneiras de escolher e ordenar r elementos. Fixe um subconjunto com r elementos. Ele pode ser ordenado de

$$r!$$

maneiras, e todas essas ordenações representam a mesma combinação quando a ordem é esquecida. Assim, na contagem por arranjos, cada combinação aparece exatamente $r!$ vezes. Dividindo por esse fator,

$$\binom{n}{r} = \frac{A(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

A diferença entre arranjos e combinações está, portanto, na informação preservada: o arranjo registra os elementos escolhidos e sua ordem; a combinação registra apenas o subconjunto escolhido.

Exemplo 5.13 — Exercício resolvido

Quantos subconjuntos de três elementos possui o conjunto

$$\{a, b, c, d, e, f\}?$$

Solução. A ordem não importa, portanto

$$\binom{6}{3} = 20.$$

◀

Exemplo 5.14 — Exercício resolvido

Entre 20 estudantes, dos quais 11 são mulheres e 9 são homens, queremos formar um comitê com duas mulheres e dois homens. Quantos comitês são possíveis?

Solução. Escolhemos duas mulheres e dois homens:

$$\binom{11}{2} \binom{9}{2} = 55 \cdot 36 = 1980.$$

◀

Exemplo 5.15 — Exercício resolvido

Uma comissão de 4 pessoas será formada a partir de 6 matemáticos e 5 físicos. Quantas comissões contêm pelo menos dois matemáticos?

Solução. A condição “pelo menos dois” não descreve um único caso. A comissão pode ter exatamente 2, 3 ou 4 matemáticos. Esses casos são disjuntos, então contamos cada um deles e somamos.

Com exatamente dois matemáticos, escolhemos também dois físicos:

$$\binom{6}{2}\binom{5}{2}.$$

Com exatamente três matemáticos, escolhemos um físico:

$$\binom{6}{3}\binom{5}{1}.$$

Com quatro matemáticos, não escolhemos físicos:

$$\binom{6}{4}.$$

Assim,

$$\binom{6}{2}\binom{5}{2} + \binom{6}{3}\binom{5}{1} + \binom{6}{4} = 15 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + 15 = 265.$$

A condição “pelo menos” foi tratada pela decomposição em casos exaustivos e disjuntos. ◀

Exercícios

5.13 — Quantos subconjuntos de três elementos possui um conjunto com 8 elementos?

5.14 — Dados 20 pontos no plano, sem três colineares, quantas retas determinadas por pares desses pontos existem? Quantos triângulos têm vértices entre os 20 pontos?

5.15 — Uma equipe de 5 pessoas será escolhida dentre 12. De quantas maneiras isso pode ser feito?

* **5.16** — Uma equipe de 5 pessoas será escolhida dentre 7 matemáticos e 6 físicos. Quantas equipes contêm exatamente 3 matemáticos?

5.5 Coeficientes binomiais

Os coeficientes binomiais contam subconjuntos de cardinalidade fixada. Essa interpretação combinatória permite obter diversas identidades sem recorrer diretamente à expressão em fatoriais.

5.5.1 Simetria

Escolher r elementos entre n equivale a decidir quais $n - r$ ficarão de fora. De fato, a cada subconjunto B com r elementos corresponde exatamente o seu complementar, que possui $n - r$ elementos, e essa correspondência pode ser invertida. Portanto as duas coleções têm a mesma quantidade de elementos:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

A identidade expressa, portanto, a correspondência entre escolher os elementos de um subconjunto e escolher os elementos de seu complementar.

5.5.2 A identidade de Pascal

Teorema 5.3 — Identidade de Pascal

Para $1 \leq r \leq n - 1$,

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Demonstração. Fixe um elemento a de um conjunto A com n elementos e conte os subconjuntos de A com r elementos.

Há dois casos disjuntos. Se o subconjunto não contém a , escolhemos os r elementos entre os outros $n - 1$, obtendo $\binom{n-1}{r}$ possibilidades. Se contém a , escolhemos os outros $r - 1$ elementos entre os $n - 1$ restantes, obtendo $\binom{n-1}{r-1}$ possibilidades.

Pelo princípio aditivo, somamos os dois casos. ■

A demonstração consiste em particionar os subconjuntos em dois casos disjuntos, conforme contemham ou não o elemento fixado. A identidade de Pascal é, assim, uma aplicação direta do princípio aditivo.

A identidade de Pascal gera o triângulo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

no qual cada entrada interna é a soma das duas entradas imediatamente acima.

5.5.3 O binômio de Newton

Considere inicialmente o caso

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b).$$

Para obter um termo ab^2 , precisamos escolher b em exatamente dois dos três fatores e a no fator restante. Há três maneiras de escolher quais dois fatores fornecerão o b , por isso o termo ab^2 aparece com coeficiente 3. Da mesma forma, o coeficiente de a^2b também é 3.

No caso geral, cada termo da expansão é produzido escolhendo, em cada fator, a ou b . Se o termo final contém exatamente k fatores b , basta escolher *quais* k dos n fatores forneceram esses b . Existem $\binom{n}{k}$ escolhas.

Teorema 5.4 — Binômio de Newton

Para todo inteiro $n \geq 0$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demonstração. Na expansão de

$$(a + b)^n = (a + b) \cdots (a + b),$$

um termo $a^{n-k}b^k$ aparece sempre que escolhemos o termo b em exatamente k dos n fatores. Há $\binom{n}{k}$ maneiras de fazer essa escolha. Portanto, esse é o coeficiente de $a^{n-k}b^k$. ■

Exemplo 5.16 — Exercício resolvido

Expanda $(x + 2)^4$.

Solução. Em cada termo da expansão de $(x+2)^4$, escolhemos em quantos dos quatro fatores aparecerá o termo 2. Assim,

$$\begin{aligned} (x + 2)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(2) + \binom{4}{2}x^2(2^2) + \binom{4}{3}x(2^3) + \binom{4}{4}2^4 \\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16. \end{aligned}$$

Os coeficientes 1, 4, 6, 4, 1 são justamente a quarta linha dos coeficientes binomiais. ◀

Exercícios

5.17 — Use a identidade de Pascal para calcular $\binom{8}{3}$ a partir da linha anterior.

5.18 — Mostre combinatoriamente que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

5.19 — Expanda $(x + y)^5$ usando o binômio de Newton.

5.20 — Determine o coeficiente de x^4 na expansão de $(1 + x)^9$.

* 5.21 — Mostre que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1).$$

5.6 Aprofundamento: o método de barras e estrelas

Certas equações em números inteiros podem ser interpretadas como problemas de distribuição de objetos idênticos entre caixas distintas. Nessa representação, as soluções correspondem a escolhas de posições para separadores.

Considere as soluções inteiras positivas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n, \quad n \geq r.$$

Disponha n objetos idênticos em uma fila. Uma divisão em r grupos não vazios é determinada pela escolha de $r - 1$ das $n - 1$ lacunas entre objetos consecutivos, nas quais são colocados separadores.

Por exemplo, a solução $(3, 2, 1)$ de $x + y + z = 6$ pode ser representada por

$$\bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet | \bullet.$$

Teorema 5.5

O número de soluções inteiras positivas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

é

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

Demonstração. Há $n - 1$ lacunas entre os n objetos. Escolher $r - 1$ delas determina univocamente os r blocos. Logo há $\binom{n-1}{r-1}$ soluções. ■

Exemplo 5.17 — Exercício resolvido

De quantas maneiras 10 ambulâncias idênticas podem ser distribuídas entre 5 instituições, se cada instituição deve receber pelo menos uma?

Solução. Queremos as soluções positivas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10.$$

Logo,

$$\binom{9}{4} = 126.$$



O caso das soluções não negativas pode ser reduzido ao anterior. Como algumas variáveis podem assumir o valor zero, adicionamos uma unidade a cada uma delas. Defina

$$y_i = x_i + 1.$$

Então $x_i \geq 0$ se, e somente se, $y_i \geq 1$, e

$$x_1 + \cdots + x_r = n$$

se transforma em

$$y_1 + \cdots + y_r = n + r.$$

Essa transformação é reversível: de uma solução positiva em $y_1, \dots, y_r$ recuperamos uma única solução não negativa tomando $x_i = y_i - 1$. Portanto os dois conjuntos de soluções têm o mesmo tamanho. Aplicando o resultado anterior à soma $n + r$, obtemos

$$\binom{(n+r)-1}{r-1}.$$

Proposição 5.6

O número de soluções inteiras não negativas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

é

$$\binom{n+r-1}{r-1}.$$

Exemplo 5.18 — Exercício resolvido

De quantas maneiras podemos distribuir 18 livros idênticos entre quatro salas, se a primeira sala deve receber pelo menos 5 livros e cada uma das outras três deve receber pelo menos 2?

Solução. Se x_i é o número de livros enviados à sala i , queremos contar as soluções de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

sujeitas às restrições

$$x_1 \geq 5, \quad x_2, x_3, x_4 \geq 2.$$

Retiramos primeiro as quantidades obrigatórias. Escreva

$$y_1 = x_1 - 5, \quad y_2 = x_2 - 2, \quad y_3 = x_3 - 2, \quad y_4 = x_4 - 2.$$

Então $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ e

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 18 - (5 + 2 + 2 + 2) = 7.$$

Agora temos um problema padrão de soluções não negativas. Portanto,

$$\binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120.$$

A mesma substituição trata limites inferiores distintos: retiram-se primeiro as quantidades obrigatórias e aplica-se, ao restante, a fórmula para soluções não negativas. $\triangleleft$

Exercícios

5.22 — Quantas soluções inteiras positivas possui $x + y + z + w = 23$?

5.23 — Quantas soluções inteiras não negativas possui $x + y + z + w = 23$?

5.24 — Um apostador possui 18 fichas idênticas e deseja distribuí-las entre 4 apostas, colocando pelo menos uma ficha em cada uma. De quantas maneiras pode fazer isso?

* 5.25 — Quantas soluções inteiras satisfazem

$$x + y + z = 20, \quad x \geq 2, \quad y \geq 3, \quad z \geq 1?$$

6

Generalidades sobre Funções

Uma dependência pode existir e permanecer desconhecida.

Nikolai Lobachevsky

6.1 Conceitos básicos

O termo *função* é usualmente associado à seguinte ideia: se duas quantidades (variáveis) x e y estão relacionadas de modo que, a cada valor atribuído a x , corresponde, por alguma lei ou regra (implícita ou explícita), um valor a y , dizemos que y é função de x . Esse enfoque é, em geral, suficiente para qualquer curso inicial de cálculo diferencial e integral em uma variável. Entretanto, tal ideia não compreende toda a abrangência que o conceito de função passou a ter a partir do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos. Com esse arcabouço teórico à disposição, uma função, mais do que ser vista como uma relação entre variáveis, passou a ser vista como uma relação entre conjuntos.

Sob o ponto de vista matemático, mas ainda de modo informal, uma *relação* entre conjuntos é uma escolha do tipo: certos elementos de um dos conjuntos está relacionado com alguns elementos do outro. De modo mais preciso: uma **relação entre dois conjuntos** A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplo 6.1

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$. Então

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

Tome $R = \{(1, x), (2, x), (2, y)\}$. O subconjunto R estabelece uma relação entre A e B , na qual:

- 1 está relacionado a x , pois $(1, x) \in R$
- 2 está relacionado a x , pois $(2, x) \in R$

- 2 está relacionado a y , pois $(2, y) \in R$
- Não há mais nenhuma outra relação entre elementos de A e B

Note que cada escolha de um subconjunto de $A \times B$ determina uma relação diferente entre esses conjuntos.

Não é nosso interesse aprofundar o conceito de relação. Se o introduzimos aqui foi apenas para contextualizar adequadamente o conceito de função, já que esta é um caso particular de relação entre conjuntos. Temos, de fato, a seguinte definição:

Definição 6.1

Dados dois conjuntos A e B , uma **função de A em B** é um subconjunto f de $A \times B$ (portanto, uma relação entre A e B) satisfazendo a seguinte propriedade:

para todo $x \in A$, existe um único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Notação. Apesar de definir o conceito de função dentro do contexto mais geral de relação, a notação que adotaremos é aquela mais adequada às necessidades do cálculo diferencial e integral, além de ser mais familiar àqueles que se iniciam em tal estudo. Segundo a definição acima, uma função é caracterizada por uma terna de elementos (A, f, B) , onde A e B são conjuntos e f é uma relação entre eles (satisfazendo as condições para ser função). Denota-se isso por

$$f : A \rightarrow B,$$

que se lê *f é uma função de A em B* . Se f relaciona um elemento $x \in A$ com um elemento $y \in B$ (i.e. se $(x, y) \in f$), tal relação é denotada por $f(x) = y$.

Exemplo 6.2 – Exemplos

- a) $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b\}$, dada por $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$
- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$
- d) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$
- e) $\phi : \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} \rightarrow \mathbb{N}$, onde $\phi(n)$ denota o número de inteiros positivos menores que n que são co-primos com n .

Nos exemplos acima, temos alguns comportamentos diferentes que valem a pena serem observados. No primeiro exemplo, os valores da função são explicitados, um a um. Nos demais, isso não seria possível, uma vez que precisaríamos, para isso, de uma lista infinita de valores. Nos três exemplos intermediários, a função é descrita a partir de uma expressão algébrica, enquanto no último exemplo

isso não seria possível. Neste, a função é descrita através do procedimento, por assim dizer, para determinar o valor da função para cada variável assumida. Por fim, note ainda que o terceiro e quarto exemplos parecem tratar da mesma função, uma vez que usam a mesma expressão algébrica, mas em cada um dos casos os conjuntos envolvidos são diferentes.

Antes de voltarmos nossa atenção ao contexto que mais nos interessa, vejamos um pouco de nomenclatura para funções. Para isso, tomemos uma função qualquer $f : A \rightarrow B$. O conjunto A é chamado de **domínio** de f e é denotado por $\text{Dom } f$. Já o conjunto B é chamado de **contradomínio** (não há uma notação para o contradomínio). Dado um elemento x do domínio, então, pela própria definição de função, deve existir um elemento y do contradomínio tal que $y = f(x)$ (e esse elemento, lembre-se, é único). Dizemos, nesse caso, que y é *imagem* de x ¹. O conjunto de todas as imagens dos elementos do domínio, i.e. o conjunto dos elementos de B que estão relacionados a algum elemento de A , é chamado de **imagem** de f e denotado por $\text{Im } f$, isto é

$$\text{Im } f := \{y \in B \mid y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$$

que também pode ser descrito por

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Em outras palavras, para que um elemento y do contradomínio B pertença à imagem de f , ele deve ser imagem de algum elemento do domínio A , i.e. deve existir algum elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Outra situação de interesse ocorre quando se quer descrever a imagem de elementos de um *subconjunto* do domínio. Dado um subconjunto $X \subset A$, o conjunto de todas as imagens dos elementos de X é chamado de **imagem do conjunto X através da função f** e é denotado por $f(X)$. Assim:

$$f(X) := \{y \in B \mid y = f(a) \text{ para algum } a \in X\},$$

ou, alternativamente,

$$f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}.$$

Note, em particular, que faz sentido falar em $f(A)$, uma vez que $A \subset A$. Nesse caso, apenas reencontramos a imagem de f , i.e. $f(A) = \text{Im } f$.

Uma vez que a cada elemento do domínio A associamos a sua imagem em B , cabe a questão "recíproca": dado $y \in B$, qual o conjunto de elementos do domínio que têm y como imagem? Tal conjunto (que pode ser vazio) é chamado de *pré-imagem* de y . De modo mais geral, dado um subconjunto $Y \subset B$, definimos a **pré-imagem** de Y como sendo o conjunto que se obtém fazendo a união das pré-imagens dos elementos de Y . Tal conjunto é denotado por $f^{-1}(Y)$ e pode ser descrito por

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Com a notação acima, a pré-imagem de um elemento $y \in B$ pode ser expressa por

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

¹Note que, embora o elemento x só possa ter uma única imagem, a sua imagem y pode também ser imagem de outros elementos do domínio.

Observação. A notação usada acima, com o símbolo f^{-1} , é a mesma usada para o conceito de *função inversa* (que será visto mais adiante). Tal uso poderia gerar confusão entre esses diferentes conceitos, mas deve-se notar que o argumento entre parênteses, no caso em que a notação f^{-1} se refere a uma pré-imagem (caso acima), é um *conjunto*, enquanto que no caso dessa mesma notação ser usada para funções inversas, o argumento entre parênteses, como veremos, é um *elemento* do contradomínio.

Retomemos os exemplos acima. No que se refere ao domínio, contradomínio e imagem, temos:

Exemplo 6.3 – Exemplos

- a) $\text{Dom } f = \{1, 2, 3\}$, $\text{Im } f = \{a, b\}$ e o contradomínio é $\{a, b\}$.
- b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^+$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.
- c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.
- d) $\text{Dom } f = [0, 1]$, $\text{Im } f = [1, 2]$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.
- e) $\text{Dom } \phi = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\}$ e o contradomínio é $\mathbb{N}$. Sabe determinar $\text{Im } \phi$? Se souber, publique!

Ainda considerando os exemplos acima, vejamos algumas pré-imagens:

Exemplo 6.4 – Exemplos

- a) $f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{3\}$
- b) $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$, $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$
- c) $f^{-1}(\{3\}) = \{2\}$, $f^{-1}((-1, 5]) = (-2, 4]$, $f^{-1}([2, +\infty)) = [1, +\infty)$
- d) $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$, $f^{-1}((-1, 5]) = [0, 1]$, $f^{-1}([2, +\infty)) = \{1\}$
- e) $\phi^{-1}(\{1\}) = \{2\}$, $\phi^{-1}(\{2\}) = \{3, 4, 6\}$ (sabe provar essas afirmações?)

Exercício. Seja dada uma função $f : A \rightarrow B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B , então:

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
2. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$
3. $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$
4. $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$

Para finalizar esta seção, vamos introduzir uma nomenclatura que pode ser útil em alguns contextos. Em alguns casos, duas funções podem diferir somente pelos seus domínios, sendo um deles um subconjunto do outro. Nesse caso, falamos em *restrição* ou em *extensão* de uma função. Mais especificamente:

- Se $f : A \rightarrow B$ é uma função e $C \subset A$, a função $g : C \rightarrow B$ dada por $g(x) = f(x)$ é chamada de **restrição de f a C** . Usualmente, denotamos a função g pelo símbolo $f|_C$ (no qual a barra $|$ designa a "restrição").
- Se $g : A \rightarrow B$ é uma função e $C \supset A$, uma função $f : C \rightarrow B$ para a qual valha $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, é chamada de **extensão de g a C** .

Não há uma notação específica para uma extensão de uma função, até mesmo porque tal extensão não é em geral única. Entretanto, observe que vale a seguinte propriedade (onde supõe-se $X \subset Y$):

$$f : Y \rightarrow Z \text{ é uma extensão de } g : X \rightarrow Z \text{ se, e somente se, } g = f|_X.$$

6.2 Propriedades

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, sabemos que cada elemento do domínio possui uma única imagem, mas tal imagem pode ser comum a mais elementos do domínio. Além disso, nem todos os elementos do contradomínio são imagem de algum elemento do domínio. Essas duas características têm uma certa relevância no estudo das funções, tanto que foram introduzidos os conceitos de *injetividade* e *sobrejetividade*.

Definição 6.2

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **injetora** se para qualquer par de elementos distintos do domínio, suas imagens são também distintas. Em outras palavras, uma função é injetora quando cada elemento da imagem da função é imagem de um único elemento do domínio.

Apesar da definição acima ser suficientemente clara, não é, em geral, muito "operacional". Uma forma equivalente, mas mais operacional, de se caracterizar as funções injetoras é a seguinte:

Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se,
para todo par de elementos $u, v \in A$, vale:

$$f(u) = f(v) \Rightarrow u = v.$$

Veremos mais adiante, em alguns exemplos, como usar a caracterização acima para provar que uma função é injetora. Antes, vejamos outro conceito:

Definição 6.3

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **sobrejetora** se a conjunto imagem $\text{Im } f$ coincide com o contradomínio B , i.e., se todo elemento de B é imagem de algum elemento de A .

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$. Tal função é sobrejetora, pois para todo número real y , existe um número real x tal que $x^3 - x = y$. De fato, o polinômio $x^3 - x - y$ (na variável x)

sempre possui ao menos uma raiz real, uma vez que seu grau é ímpar. Por outro lado, f não é uma função injetora, já que $f(1) = f(0)$, i.e., dois elementos distintos do domínio possuem imagens iguais.

Exemplo. A função $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$, dada por $g(x) = x^2$, não é sobrejetora, pois não existe nenhum número real $x \in [0, 1]$ cujo quadrado seja igual a 2. Na verdade, é fácil verificar que $\text{Im } g = [0, 1]$, a qual está contida propriamente no contradomínio. Por outro lado, a função g é injetora. Para verificarmos isso, utilizaremos a última caracterização que demos das funções injetoras. A ideia é mostrar que se u e v são tais que $g(u) = g(v)$, então necessariamente deve ser $u = v$. Sejam então $u, v \in [0, 1]$ tais que $u^2 = v^2$. Dessa igualdade, segue que $u = \pm v$. Mas, tendo em mente que ambos são não negativos, deve necessariamente ser $u = v$.

Observação. Note, em ambos os exemplos, que a injetividade e a sobrejetividade de uma função não depende somente da relação algébrica explicitada. De fato, a função f poderia se tornar injetora se tomássemos como domínio, por exemplo, a semi-reta $[2, +\infty)^2$. Por outro lado, a função g também poderia se tornar sobrejetora se tomássemos como contradomínio o conjunto $[0, 1]$. Assim, qualquer discussão em torno da injetividade e/ou sobrejetividade de uma função deve levar em consideração também seu domínio e contradomínio, além, é claro, da relação entre eles.

Quando uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora e sobrejetora simultaneamente, faz sentido dizer que cada elemento da imagem da função está relacionado a um único elemento do domínio. De fato, tal relação existe, graças à sobrejetividade, e é única, graças à injetividade. Em outras palavras, podemos *inverter* os papéis dos conjuntos A e B nessa relação. Nesse caso, falamos em *bijecção*:

Definição 6.4

Uma função $f : A \rightarrow B$ é **bijetora** se é, simultaneamente, injetora e sobrejetora.

Na esteira do que foi dito no parágrafo acima, dada uma função bijetora $f : A \rightarrow B$, definimos a **função inversa** $f^{-1} : B \rightarrow A$, através da seguinte relação:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Assim, nesse caso, se um elemento x de A está associado a um elemento y de B através da função f (que, lembre, estamos supondo bijetora), então o elemento y está associado ao elemento x pela função inversa f^{-1} .

²Esse tipo de estudo é fácil de se fazer com as ferramentas do cálculo diferencial. Nesse caso, inclusive, poderíamos ter escolhido uma semi-reta ainda maior, $[\sqrt{3}/3, +\infty)$, de modo a ter f injetora. Mas tal ferramenta não será desenvolvida neste curso.

Exemplo 6.5

Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3]$ dada por $f(x) = 2x + 1$. Tal função é bijetora (verifique por exercício) e, portanto, possui inversa $f^{-1} : [1, 3] \rightarrow [0, 1]$. Para determinar a expressão de f^{-1} , usa-se a relação que a define, i.e.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Assim, a partir de $y = 2x + 1$, devemos obter a expressão de x em função de y (ou seja, $x = f^{-1}(y)$), o que se obtém facilmente isolando a variável x :

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}(y - 1)$$

Observação. Mais adiante, ao falarmos em composição de funções, veremos com o conceito de função inversa está relacionado, em algum modo, à operação inversa de uma certa operação sobre funções (justamente, a operação de composição). Isso permitirá uma compreensão ainda melhor da relação entre uma função e sua inversa (quando esta existir, claro).

Exercícios

6.1 — Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, diga qual das relações abaixo definem uma função $f : A \rightarrow B$.
 $??R = \{(e, 1), (o, 2)\}$ $??R = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 2), (u, 2)\}$ $??R = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$ $??R = \{(a, 1), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (u, 2), (u, 5)\}$ $??R = \{(a, 3), (e, 3), (i, 3), (o, 3), (u, 3)\}$
 $??R = \{(a, 1), (e, 3), (i, 3), (o, 2), (u, 2)\}$ $??R = \{(a, 2), (e, 1), (i, 4), (o, 5), (u, 3)\}$

6.2 — Para cada função que aparece no exercício acima, diga se é injetora, sobrejetora e/ou bijetora.

6.3 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (-1)^n n.$$

6.4 — Considerando a função f do exercício anterior, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n + 1)$.

6.5 — Seja A um conjunto (não vazio) com n elementos e seja B um conjunto qualquer. Mostre cada uma das seguintes afirmações: ??Se existe uma função injetora $f : A \rightarrow B$, então B possui *pelo menos* n elementos. ??Se existe uma função sobrejetora $f : A \rightarrow B$, então B possui *no máximo* n elementos. ??Conclua, das afirmações acima, a seguinte propriedade: dois conjuntos finitos³ possuem o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma função bijetora entre tais conjuntos.

6.6 — Para cada uma das seguintes funções, prove ou dê contra-exemplos que elas são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras. ??Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \rightarrow A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

³Dizem-se finitos os conjuntos que possuem um número finito de elementos. Voltaremos a discutir essa definição mais adiante, com mais propriedade.

Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $g : A \rightarrow A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \neq 7 \\ f(7) = 1 & \text{se } x = 7. \end{cases}$$

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + 1$. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n - |n|$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$. $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, x)$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, |x|)$. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - |y|$. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = (x, y^3)$.

6.7 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (-1)^n n.$$

6.8 — Considerando a função f do exercício anterior, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n + 1)$.

6.9 — Para cada uma das seguintes funções, calcule $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\})$. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + 1$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - |(x + 2)^2 - 1|$. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x - |y|$.

6.10 — Seja dada uma função $f : A \rightarrow B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B , mostre que:

$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$. $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$. $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$. Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$. Se $V \subset W$ então $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$. $X \subset f^{-1}(f(X))$. Se f é injetora então $X = f^{-1}(f(X))$.

Para refletir: Hotel de Hilbert

Na exata junção das fronteiras dos estados de SP, RJ e MG, há um hotel diferente de todos os outros já vistos (e ainda por ver) pelo mundo. Trata-se do Hotel Hilbert, um hotel com nada mais, nada menos, do que infinitos aposentos! Um para cada número natural $0, 1, 2, \dots$ (o quarto número 0 , na verdade, é ocupado pela gerência do hotel). No último feriado de carnaval, o hotel estava totalmente ocupado por uma legião de turistas paulistas. Não havia uma vaga sequer disponível.

Quando a noite do sábado de carnaval já se transformava em madrugada, um solitário turista carioca, desesperado para fugir dos ares da Sapucaí, procurou por uma vaga no Hotel Hilbert. Quando se dirigiu ao gerente do hotel, ao contrário do que poderíamos esperar, ouviu como resposta: "Aguarde alguns minutinhos, já já providenciamos um quarto para o senhor". Como o gerente solucionou o problema?

Na terça-feira de carnaval, um imenso grupo de turistas mineiros chegou ao Hotel Hilbert. Quando dizemos "imenso", assim é: infinitos mineiros chegaram pleiteando (silenciosa e educadamente, como é costume lá pelas gerais) por acomodações em quartos individuais para aquela última noite de delírio e festa. Ocorre que nenhum dos hóspedes paulistas - e tampouco o solitário hóspede carioca - haviam deixado o hotel. O gerente, mais uma vez e ainda mais satisfeito com a perspectiva de lucro

introduzir ao menos um exemplo de demonstração envolvendo imagem e imagem inversa de funções ou remover estes exercícios

carnavalesco, respondeu gentilmente aos seus novos clientes: "Por favor, aguardem somente um punhadinho de minutinhos e logo serão levados aos seus respectivos quartos". E agora, o que fez o gerente para acomodar tanta gente?

Ao cair da tarde da quarta-feira de cinzas, com o hotel novamente vazio (à exceção, claro, do quarto número 0 da gerência), o habilidoso gerente, feliz com seu pé-de-meia recheado, pensou, perplexo: "Mas afinal, em qual dia houve mais movimento de hóspedes? Qual grupo de turistas era maior? Será o grupo dos paulistas? Ou o grupo dos paulistas acrescido do solitário carioca? Provavelmente, deve ser o grupo de todos os turistas, paulistas, carioca e mineiros. Será?" A essa altura, porém, o cansaço por ter lidado tão brilhantemente com o infinito já tomava conta do pobre (no sentido figurado) gerente e este caiu no sono. Antes que ele acorde, alguém saberia desvendar seu dilema?

7

Funções Reais a Variáveis Reais

Após apresentarmos o conceito de função dentro do contexto mais geral das relações entre conjuntos, voltemos nossa atenção ao âmbito que nos interessa especificamente, qual seja, aquele das funções reais de uma variável real¹. Com tal expressão, entendemos funções do tipo $f : A \rightarrow B$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. De agora em diante, salvo menção em contrário, consideraremos somente funções desse tipo.

Recuperando a ideia de função como variação de uma quantidade em dependência de outra, é comum adotar os termos *variável independente* e *variável dependente*. O primeiro se refere aos elementos do domínio de uma função, enquanto o segundo se refere às suas imagens. Assim, se vale uma relação do tipo $y = f(x)$, para alguma função $f : A \rightarrow B$ entre subconjuntos A e B de números reais, dizemos que x é a variável independente e y é a variável dependente.

Em geral, trabalharemos com funções expressas através de relações algébricas, como $f(x) = x^2$, $f(x) = x + 1$ etc. Tais expressões são também chamadas de *expressão analítica* da função considerada. A rigor, constitui somente uma parte da função (afinal, o domínio e o contradomínio também compõem o objeto matemático chamado "função"). Entretanto, é comum identificar a função com sua expressão analítica. E assim aqui também o faremos, desde que lembremos, sempre que necessário, do real significado do conceito "função".

Ao identificar uma função com sua expressão analítica, parece que perdemos a visão de função como um subconjunto do produto cartesiano entre domínio e contradomínio. Mas tal ideia é recuperada, em sua essência, através da noção de *gráfico* de uma função:

Definição 7.1

Dados dois conjuntos A e B de números reais e dada uma função $f : A \rightarrow B$, o **gráfico** de f , aqui denotado por $\text{Graf}(f)$, é o conjunto

$$\text{Graf}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

¹A contextualização mais ampla que aqui foi feita não deve ser vista como mera nota cultural. Ao contrário, convém ter sempre em mente esse enfoque sobre as funções, pois permite uma compreensão geralmente mais satisfatória dos conceitos e questões pertinentes.

o qual também pode ser expresso por

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

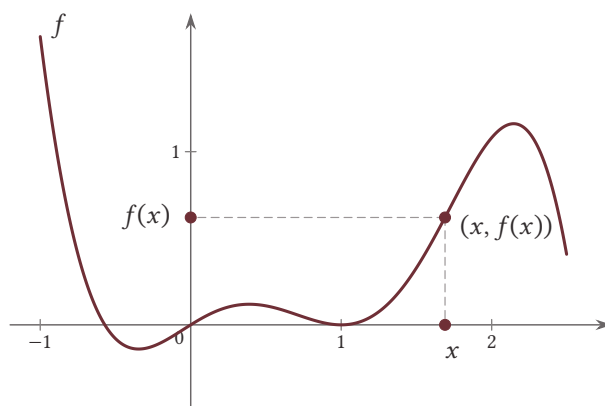
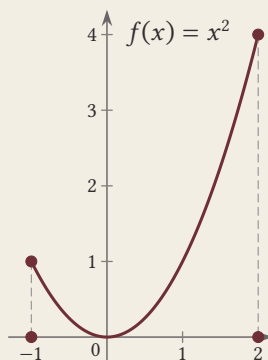


Figura 7.1. Gráfico de $f(x)$

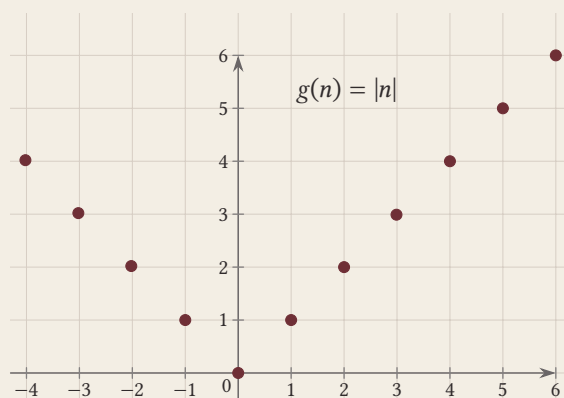
Note que o gráfico de uma função é um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Se observarmos que $\text{Graf}(f) \subset A \times B \subset \mathbb{R}^2$, percebemos como o gráfico de f representa a função f novamente como relação entre conjuntos.

Exemplo 7.1 — Exemplos

a) $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

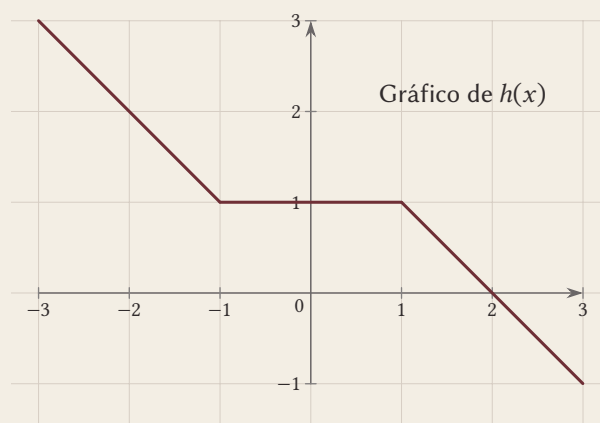


b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = |n|$

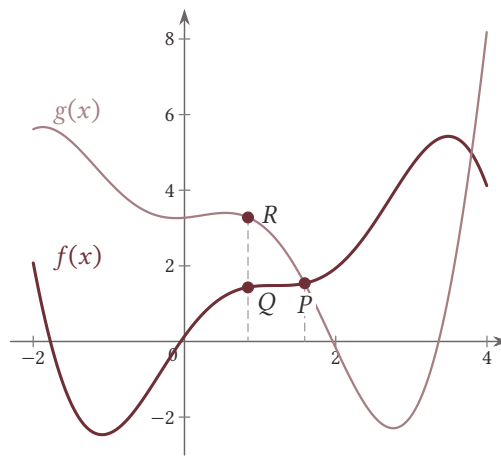


c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Uma aplicação simples, mas útil, de gráficos é para compararmos duas funções (em um domínio comum). Representando os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano, podemos identificar (ao menos graficamente) os pontos do domínio nos quais as funções são iguais ou uma função supera a outra. Na figura abaixo, o ponto P de abscissa a é comum aos dois gráficos. Assim, as suas coordenadas escrevem-se como $(a, f(a))$, uma vez que P pertence ao gráfico de f , mas também como $(a, g(a))$, pois P pertence ao gráfico de g . Daí conclui-se que tanto $f(a)$ quanto $g(a)$ representam a ordenada do ponto P , ou seja, $f(a) = g(a)$. Por outro lado, se compararmos os pontos Q e R , ambos com abscissa b , percebemos que a ordenada de R é maior que a ordenada de Q . Como Q é um ponto do gráfico de f e R é um ponto do gráfico de g , concluímos que $f(b) < g(b)$.



7.1 Transformações do gráfico de uma função

Gráficos são muito úteis para se analisar o comportamento e outras propriedades de uma função. Torna-se interessante, então, obter ferramentas que facilitem o esboço de um gráfico. É com esse intuito que trataremos agora de translações, homotetias, reflexões.

7.1.1 Translações

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dada uma constante $c \in \mathbb{R}$, definamos duas funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ relacionadas com a função f da seguinte maneira:

$$g(x) := f(x) + c \quad h(x) := f(x + c)$$

Qual a relação entre os gráficos das funções g e h com o da função f ? Note-se que para calcular o valor de $g(x)$, calcula-se o valor de $f(x)$ e, *após*, soma-se a constante c . Ao contrário, para se calcular o valor de $h(x)$, soma-se *antes* a constante c (à abscissa x) e só então calcula-se o valor da função f no ponto $x + c$. Assim, no primeiro caso, a constante c opera na ordenada do ponto do gráfico da função f , enquanto que no segundo caso, a constante c opera na abscissa do ponto do gráfico da f . Vejamos como essa diferença se reflete nos gráficos de g e h .

Os pontos do gráfico da função g têm coordenadas dadas por $(x, g(x))$, ou seja, $(x, f(x) + c)$. Assim, para obter um ponto do gráfico de g , basta tomar o ponto de mesma abscissa do gráfico de f e *transladar verticalmente* esse ponto por uma distância $|c|$ (para cima, se $c > 0$, para baixo, se $c < 0$). Conclui-se que o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f por uma **translação vertical** correspondente a uma distância $|c|$ (para cima, se $c > 0$, para baixo, se $c < 0$).

Já os pontos do gráfico da função h têm coordenadas $(x, h(x))$, i.e. $(x, f(x + c))$. Para obter o ponto do gráfico de h correspondente à abscissa x , basta tomar o ponto de abscissa $x + c$ do gráfico de f e *transladar horizontalmente* esse ponto por uma distância $|c|$ (para a esquerda, se $c > 0$, para a

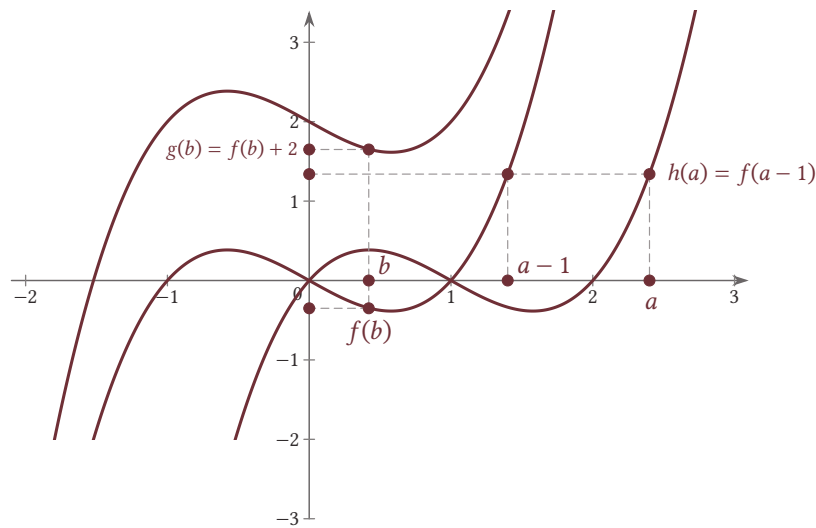
direita, se $c < 0$). Em outras palavras, o gráfico de h é obtido a partir do gráfico de f por uma **translação horizontal** correspondente a uma distância $|c|$ (para a esquerda, se $c > 0$, para a direita, se $c < 0$).

Exemplo 7.2

Seja dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$. Tomemos as funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = x^3 - x + 2 \quad h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = f(x - 1)$$

Os gráficos dessas funções estão representados abaixo:



Observação. Em um primeiro momento, pode parecer anti-intuitivo o deslocamento horizontal se dar para a esquerda, quando a constante é positiva, ou para a direita, quando é negativa. Entretanto, observando com um pouco mais de cuidado, pode-se entender o que está ocorrendo. Tomemos uma função $h(x) = f(x + c)$, com $c > 0$. Para marcar no gráfico de h o ponto de abscissa x , copia-se o ponto do gráfico de f com abscissa $x + c$, o qual está mais à direita de x . Assim, se o ponto do gráfico de f está mais à direita do seu correspondente no gráfico de h , este último estará mais à esquerda. Isso explica por que, nesse caso, o gráfico de h é um deslocamento à esquerda. Uma situação análoga ocorre quando $c < 0$, produzindo uma translação horizontal à direita.

Uma outra observação é importante, dessa vez a respeito dos domínios das funções. Se a partir de uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, obtemos uma translação vertical $g(x) = f(x) + c$, o domínio de g é o mesmo de f . Mas se obtemos uma translação horizontal $h(x) = f(x + c)$, então o domínio de h deve também ser "deslocado", i.e.

$$\text{Dom } h = \{x \in \mathbb{R} \mid x + c \in A\}$$

Exercício. Mostre que vale a relação abaixo:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4}$$

e conclua que toda parábola do tipo $y = x^2 + bx + c$ pode ser obtida a partir da parábola $y = x^2$ através de uma translação horizontal, seguida de uma translação vertical.

7.1.2 Homotetias

Deixemos provisoriamente de lado o plano cartesiano para nos concentrar na reta real. Nesta, denotemos por O a origem e por U o ponto correspondente à unidade. Tomemos um ponto genérico P de abscissa x . Se $c \in \mathbb{R}$ é uma constante *positiva* fixada, onde se encontra o ponto P' de abscissa cx ? Sem perda de generalidade, suponhamos que P esteja do lado direito de O , ou seja, suponhamos $x > 0$. Tendo em mente que, nesse caso, a abscissa de um ponto representa a distância ao ponto O , concluímos que o ponto P' encontra-se mais à direita de P , se $c > 1$, ou mais à esquerda, se $0 < c < 1$ (e também $P' = P$ se $c = 1$, mas esse caso não apresenta interesse). Além disso, se Q é um ponto de abscissa $y > 0$ e Q' tem abscissa cy , então vale a proporção

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = c$$

donde concluímos que: se $c > 1$, os segmentos da reta sofrem uma **dilatação**; se $0 < c < 1$, os segmentos da reta sofrem uma **contração**. Em ambos os casos, falamos em **homotetia por um fator c** . Pode-se interpretar uma homotetia como sendo uma mudança homogênea de escala na reta real.

Queremos usar as homotetias nos eixos do plano cartesiano e observar o efeito dessas transformações no gráfico de uma função. Sejam dadas então uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e uma constante positiva c . Definamos as funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) := cf(x) \quad h(x) := f(cx)$$

O valor da função g em x é o resultado de uma homotetia por um fator c sobre o valor da função f em x . Em termos dos gráficos dessas funções, a ordenada do ponto de abscissa x do gráfico de g é o resultado de uma homotetia por um fator c sobre a ordenada do ponto de abscissa x do gráfico de f . Dizemos, nesse caso, que o gráfico de g se obtém do gráfico de f por uma **homotetia vertical**.

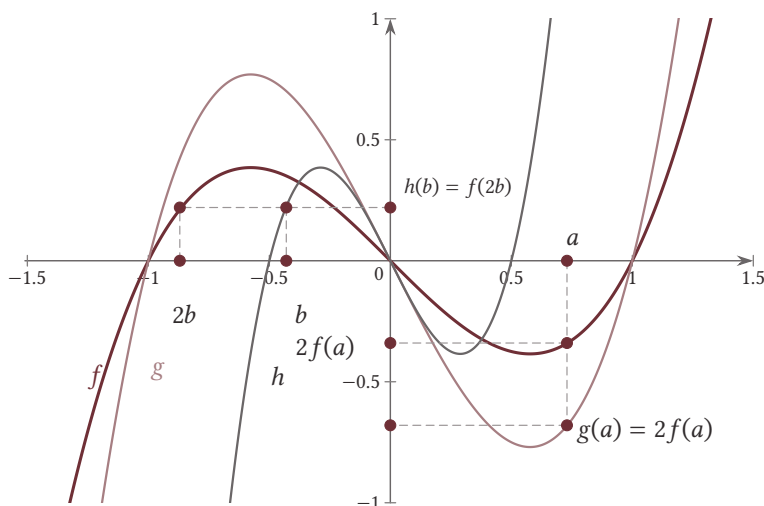
Já com relação à função h , a homotetia é aplicada antes do cálculo do valor de f . Em outras palavras, o valor da função h em x é obtido aplicando uma homotetia por um fator c à variável x para, em seguida, calcular o valor de f no ponto obtido. Em termos dos gráficos dessas funções, o ponto $(x, h(x))$ do gráfico de h é obtido copiando o valor da função f no ponto de abscissa cx , o qual é resultado de uma homotetia por um fator c aplicada a x . Dizemos, nesse caso, que o gráfico de h é obtido do gráfico de f por uma **homotetia horizontal**.

Exemplo 7.3

Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, defina as funções $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = 2f(x) = 2x^3 - 2x \quad h(x) = f(2x) = 8x^3 - 2x$$

Os gráficos dessas funções estão representados abaixo:



Observação. Em ambos os casos, é usual adotar os termos *dilatação* (horizontal ou vertical) ou *contração* (horizontal ou vertical). Entretanto, similarmente ao que ocorre com a translação, as homotetias horizontal e vertical se comportam de modos diferentes. No caso das homotetias verticais, é imediato verificar que o gráfico da função $cf(x)$ é uma dilatação (vertical) do gráfico de f , se $c > 1$, ou uma contração (vertical) se $0 < c < 1$. No caso das homotetias horizontais, ocorre o oposto: o gráfico de uma função $f(cx)$ é uma contração (horizontal) se $c > 1$, ou uma dilatação (horizontal), se $0 < c < 1$ (verifique por exercício).

Exercício. Dada uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e dada uma constante positiva c , defina as funções $g(x) = cf(x)$ e $h(x) = f(cx)$. Qual é o domínio das funções g e h , se comparados ao domínio A de f ?

7.1.3 Reflexões

As últimas transformações que queremos tratar são as reflexões relativas aos eixos coordenados. Dado um ponto P de coordenadas (x, y) , dizemos que:

- O ponto de coordenadas $(x, -y)$ é o ponto simétrico de P relativamente ao eixo x .
- O ponto de coordenadas $(-x, y)$ é o ponto simétrico de P relativamente ao eixo y .
- O ponto de coordenadas $(-x, -y)$ é o ponto simétrico de P relativamente à origem O .

A **reflexão relativa ao eixo x** é a transformação que leva cada ponto do plano em seu simétrico relativamente ao eixo x . Similarmente, a **reflexão relativa ao eixo y** é a transformação que leva

cada ponto do plano em seu simétrico relativamente ao eixo y . Se aplicarmos uma das reflexões acima, seguida da outra, obtemos uma **reflexão relativa à origem**, ou seja, uma transformação que leva cada ponto do plano em seu simétrico relativamente à origem.

Qual o efeito das reflexões no gráfico de uma função? Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tome um ponto $P = (x, f(x))$ do seu gráfico. Então, após uma reflexão relativa ao eixo x , o ponto P é levado ao ponto $(x, -f(x))$. Após uma reflexão relativa ao eixo y , o ponto P é levado ao ponto $(-x, f(x))$. Conclui-se que:

- Após uma reflexão relativa ao eixo x , o gráfico de f torna-se o gráfico da função $g(x) = -f(x)$.
- Após uma reflexão relativa ao eixo y , o gráfico de f torna-se o gráfico da função $h(x) = f(-x)$.

Exemplo 7.4

Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, defina

$$g(x) = -f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad h(x) = f(-x) = x^2 + 3x + 2$$

Os gráficos dessas funções estão representados abaixo:

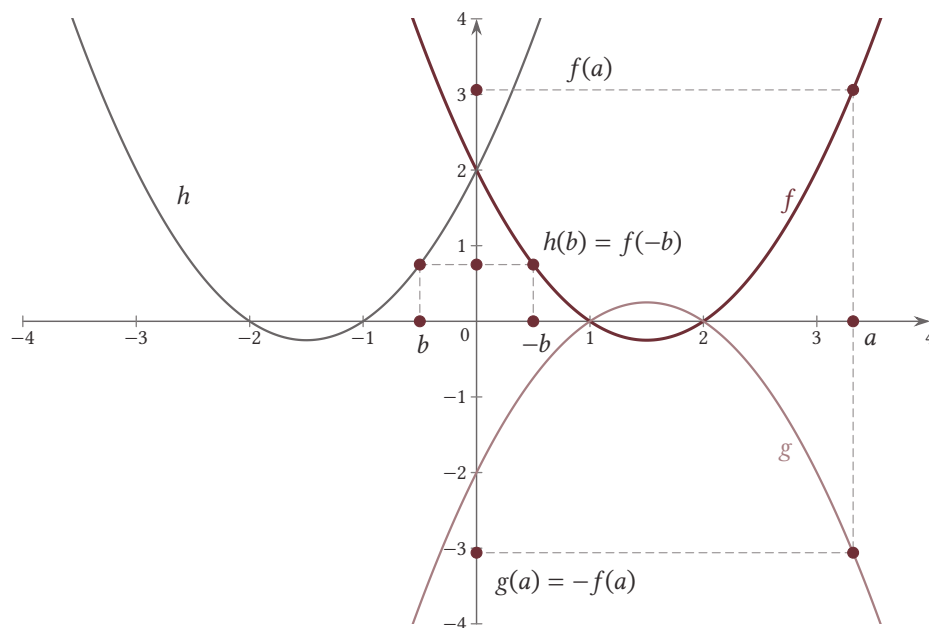


Figura 7.2. Gráficos das funções obtidas através de reflexões em relação aos eixos coordenados.

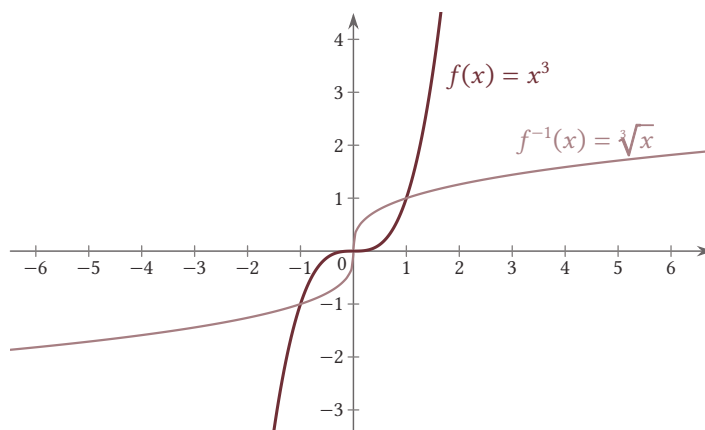
Exercício. Dada uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, defina as funções $g(x) = -f(x)$ e $h(x) = f(-x)$. Qual é o domínio das funções g e h , se comparados ao domínio A de f ?

7.2 Gráfico da função inversa

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função bijetora, i.e. uma função inversível. Qual a relação do gráfico de f^{-1} com o gráfico de f ? Se um ponto (x, y) do plano está no gráfico de f é porque $y = f(x)$. Isso equivale a dizer que $x = f^{-1}(y)$. Logo, o ponto (y, x) está no gráfico de f^{-1} . Como os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos relativamente à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, concluímos que os gráficos de f e f^{-1} também são simétricos relativamente à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes. Em outras palavras, o gráfico de uma delas é obtido a partir do gráfico da outra, através de uma reflexão em relação à reta $x = y$.

Exemplo 7.5

A função $f(x) = x^3$ é injetora e sobrejetora, logo, inversível. O gráfico de f e o de f^{-1} estão representados abaixo:



7.3 Simetrias do gráfico de uma função

Quando o gráfico de uma função apresenta algum tipo de simetria, seu esboço torna-se uma tarefa mais simples. Para o que nos interessa, estudaremos dois casos de simetria: aquela relativa ao eixo y e aquela relativa à origem.

Dizemos que uma figura F do plano é simétrica em relação ao eixo y se vale a seguinte condição: para cada ponto P da figura, o ponto P' simétrico de P relativamente ao eixo y também pertence à figura. Outro modo de dizer o mesmo é: uma figura F é simétrica em relação ao eixo y se, ao fazermos um reflexão do plano relativamente ao eixo y , a figura resta invariada (dizemos, nesse caso, que tal figura é *invariante por reflexão relativa ao eixo y*).

Dizemos que uma figura F do plano é simétrica em relação à origem se vale a seguinte condição: para

cada ponto P da figura, o ponto P' simétrico de P relativamente à origem também pertence à figura. Outro modo de dizer o mesmo é: uma figura F é simétrica em relação ao eixo y se, ao fazermos um reflexão do plano relativamente à origem, a figura resta invariada (dizemos, nesse caso, que tal figura é *invariante por reflexão relativa à origem*).

O gráfico de uma função f , sendo uma figura do plano, pode ser simétrico em relação ao eixo y , simétrico em relação à origem ou mesmo não possuir nenhum tipo de simetria. No primeiro caso, dizemos que a função f é **par**. No segundo, que f é **ímpar**.

Além dessa caracterização geométrica, há uma caracterização analítica das funções pares e ímpares. Tomemos inicialmente uma função f par. Como seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y , então para cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f , o ponto de coordenadas $(-x, f(x))$ tem que pertencer também ao gráfico (uma vez que $(-x, f(x))$ é o simétrico de $(x, f(x))$ relativamente ao eixo y). Mas o ponto do gráfico de f correspondente ao valor $-x$ da abscissa é, por definição de gráfico, o ponto de coordenadas $(-x, f(-x))$. Como os pares de coordenadas $(-x, f(x))$ e $(-x, f(-x))$ representam o mesmo ponto, suas coordenadas devem ser iguais. Logo, deve valer $f(-x) = f(x)$, para todo x no domínio da f . É imediato verificar, reciprocamente, que se $f(-x) = f(x)$, para todo x no domínio da f , então a função f é par (faça por exercício).

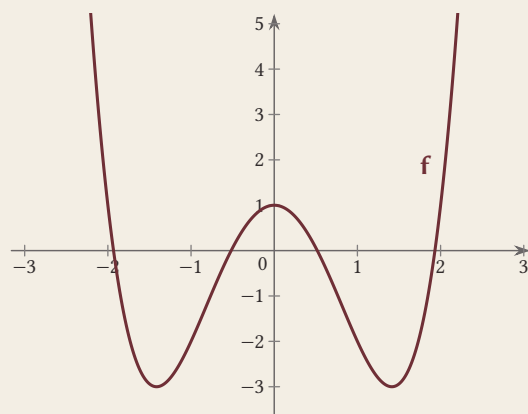
Seja agora dada uma função f ímpar. Sendo seu gráfico simétrico em relação à origem, então para cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f , o ponto de coordenadas $(-x, -f(x))$ tem que pertencer também ao gráfico (uma vez que $(-x, -f(x))$ é o simétrico de $(x, f(x))$ relativamente à origem). Mas o ponto do gráfico de f correspondente ao valor $-x$ da abscissa é, por definição de gráfico, o ponto de coordenadas $(-x, f(-x))$. Como os pares de coordenadas $(-x, -f(x))$ e $(-x, f(-x))$ representam o mesmo ponto, suas coordenadas devem ser iguais. Logo, deve valer $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio da f . É imediato verificar, reciprocamente, que se $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio da f , então a função f é ímpar (faça por exercício).

Em suma, temos a seguinte caracterização: dada uma função $f : A \rightarrow B$, então

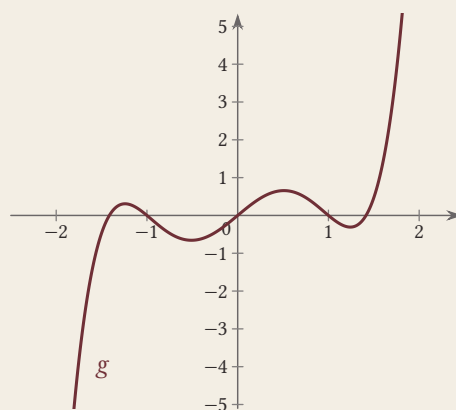
- f é *par* se, e somente se $f(-x) = f(x)$, para todo x em A ;
- f é *ímpar* se, e somente se $f(-x) = -f(x)$, para todo x em A .

Exemplo 7.6 – Exemplos

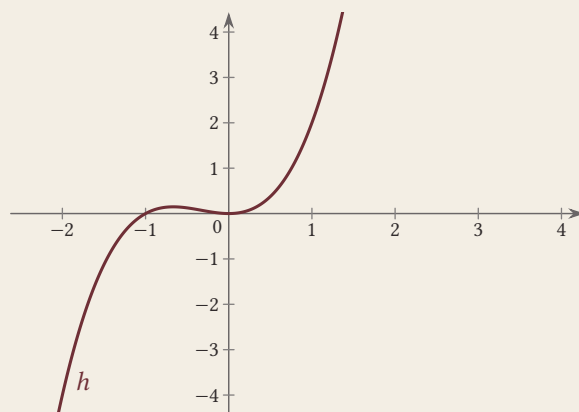
a) A função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ é par.



b) A função $g(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ é ímpar.



c) A função $h(x) = x^3 + x^2$ não é nem par, nem ímpar.



Exercícios

1. Seria possível considerar gráficos simétricos em relação ao eixo x ? Por que?
2. O que se pode dizer do domínio de uma função par ou ímpar?
3. Existe uma função que seja simultaneamente par e ímpar? Quantas funções desse tipo existem?

4. Dadas duas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defina as funções:

a) $a(x) := f(x) + g(x)$

b) $b(x) := f(x)g(x)$

Discuta a paridade (isto é, se são pares, ímpares ou não possuem esse tipo de simetria) das funções a e b em termos da paridade das funções f e g .

5. Seja f uma função par e seja g uma função ímpar. Fixada uma constante $k \in \mathbb{R}$, discuta a paridade das funções abaixo:

a) $r(x) := k f(x)$

b) $s(x) := k g(x)$

c) $t(x) := f(x) + k$

d) $u(x) := g(x) + k$

e) $v(x) := |f(x)|$

f) $w(x) := |g(x)|$

7.3.1 Simetria translacional: funções periódicas

Quando se fala em simetria, é usual associá-la à ideia de reflexão. Mas o conceito de simetria é muito mais abrangente do que isso. Não entraremos no mérito específico desse conceito aqui, mas queremos lançar mão de um tipo de simetria que também contribui a facilitar a tarefa de traçar o esboço de um gráfico. Trata-se da simetria *translacional*: uma figura possui simetria translacional quando é possível transladá-la em uma certa direção, de modo a fazer com que essa figura transladada coincida com a figura original.

No caso de gráficos de funções, o que nos interessa destacar são as translações horizontais, i.e. paralelas ao eixo x . Se, ao transladar horizontalmente o gráfico de uma função, por uma distância positiva T , obtivermos o mesmo gráfico, então a função é dita *periódica*. Analiticamente, tal situação é expressa pela seguinte definição:

Definição 7.2

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **periódica** se existe um número real positivo r tal que

$$f(x + r) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se f é uma função periódica, faz sentido considerar o conjunto dos números reais positivos r para os quais a condição da definição acima é satisfeita. Nesse caso, se f não é uma função constante, então tal conjunto possui um elemento mínimo, i.e. um número real positivo T tal que:

1. $f(x + T) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$

2. T é o menor dos números positivos que satisfazem a condição acima.

O número T é chamado de **período** da função f .

Os exemplos clássicos de funções periódicas são as funções trigonométricas. Deixaremos, porém, para tratá-las mais adiante, quando da seção dedicada a essas funções. Por ora, vejamos o seguinte exemplo: seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$$

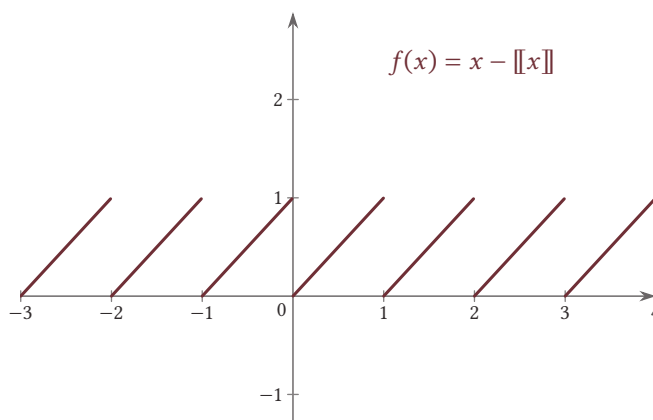
onde $\llbracket x \rrbracket$ denota a função *maior inteiro menor ou igual a x* , i.e.

$$\llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

A função f é periódica, pois para todo inteiro n , resulta

$$f(x+n) = (x+n) - \llbracket x+n \rrbracket = x+n - (\llbracket x \rrbracket + n) = x - \llbracket x \rrbracket = f(x)$$

Em particular, f tem período $T = 1$. O gráfico de f está representado abaixo:



Introduzir um exemplo de como fazer um gráfico complicado, i.e., $|2f(x)|+1$ a partir do gráfico de f

7.4 Funções monótonas

Antes de prosseguirmos, dediquemos nossa atenção ao comportamento de uma função no que concerne ao seu crescimento e/ou decrescimento, isto é, o estudo do (de)crescimento da variável dependente, conforme cresce a variável independente. Temos as seguintes definições:

Definição 7.3

Dada uma função f e dado um subconjunto $A \subset \text{Dom } f$, dizemos que:

- f é **crescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) < f(b)$.
- f é **não-decrescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) \leq f(b)$.
- f é **decrescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) > f(b)$.
- f é **não-crescente** em A se, para todo $a, b \in A$ com $a < b$, resulta $f(a) \geq f(b)$.

Em qualquer um dos casos acima, dizemos que a função é **monótona**². Em particular, quando a função é crescente ou decrescente, dizemos que é **estritamente monótona**.

Exemplo 7.7 — Exemplos

- a) A função identidade é crescente em $\mathbb{R}$.
- b) A função x^2 é decrescente em $\mathbb{R}_-$ e crescente em $\mathbb{R}_+$.
- c) A função $\llbracket x \rrbracket$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$. A mesma função é crescente em $\mathbb{Z}$.

Exercício. Determine os intervalos nos quais a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é monótona, dizendo o tipo de monotonia. É possível dizer que f é monótona em todo o seu domínio?

Exercício. Mostre que uma função estritamente monótona é injetora.

7.5 Operações com funções

O formalismo que apresentaremos a seguir tem muitos propósitos, mas para nosso escopo, um deles é preponderante: obter um modo de expressar uma dada função em termos de funções mais elementares (em algum sentido), de modo a estudar propriedades da função original a partir das mesmas propriedades nas funções elementares que a compõem.

²É também usual na literatura o termo *monotônica*.

Sejam dadas duas funções reais a uma variável real f e g . Definimos as funções:

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$
- $(f g)(x) := f(x) g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$

Os domínios das funções acima dependem, evidentemente, dos domínios das funções f e g , mas podem depender também da operação envolvida. De fato, a função f/g definida acima só faz sentido se o quociente $f(x)/g(x)$ também fizer sentido, o que só ocorre quando $g(x) \neq 0$. Temos, então:

- $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$
- $\text{Dom}(f - g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$
- $\text{Dom}(f g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$
- $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (\text{Dom } f \cap \text{Dom}^* g)$, onde $\text{Dom}^* g = \{x \in \text{Dom } g \mid g(x) \neq 0\}$

Exemplo. Toda função polinomial pode ser obtida a partir da função identidade $\iota(x) = x$ e das funções constantes $f(x) = c$, através de operações como aquelas acima. De fato, usando produto de funções com a função ι , obtemos todas as funções do tipo $f(x) = x^n$. Novamente usando o produto de funções entre as funções constantes e as funções do tipo x^n , obtemos todos os possíveis monômios. Por fim, usando a soma de funções com os monômios, obtemos toda e qualquer função polinomial. Assim, todas as propriedades que valem para as funções constantes e para a função identidade, e que são preservadas pelas operações acima descritas, valerão automaticamente para todas as funções polinomiais. Um exemplo típico, é a continuidade, conceito que veremos mais adiante e de fundamental importância para o cálculo.

Exercício. Determinar condições sobre os domínios de f e g de modo a poder definir a função $(f^g)(x) := f(x)^{g(x)}$

Função composta

Dentre as operações entre funções, uma das mais importantes é, sem dúvida, a *composição*. Dadas duas funções f e g , definimos as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ por

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \text{e} \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Em outras palavras, para calcular o valor da função $f \circ g$ em um ponto x do domínio, deve-se calcular o valor $g(x)$ e, após, calcular o valor de f correspondente ao valor $g(x)$ da variável. Procedimento semelhante deve ser feito para a composta $g \circ f$.

Exemplo. Seja $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \sin x$. Então

$$(f \circ g)(x) = 2^{\sin x}$$

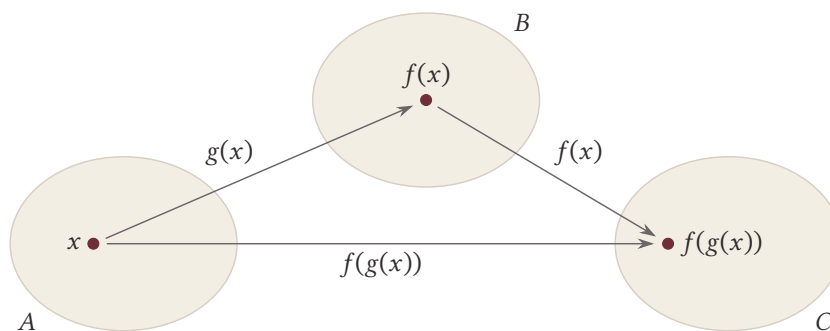


Figura 7.3. Função Composta

Note que, para calcular o valor de $f \circ g$ em $x = \pi$, devemos antes calcular $g(\pi)$, i.e. $\sin \pi$, o que retorna o valor 0. Em seguida, calculamos f em $x = g(\pi)$, i.e. em $x = 0$, obtendo $2^0 = 1$.

O domínio de uma função composta também depende do domínio das funções envolvidas. Para determinar o domínio de $f \circ g$, devemos ter em mente o procedimento acima descrito, ou seja, que o cálculo de $(f \circ g)(x)$ se faz em duas etapas: (i) cálculo de $g(x)$; (ii) cálculo de $f(g(x))$. Temos então que:

- Para efetuar a primeira etapa, deve valer $x \in \text{Dom } g$.
- Para a segunda etapa, deve valer $g(x) \in \text{Dom } f$.

Assim, obtemos que

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom } g \mid g(x) \in \text{Dom } f\}$$

Exemplo 7.8 – Exemplos

a) Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, então $\text{Dom } f = \mathbb{R}_+$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$ e:

- $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(f \circ g)(x) = |x|$
- $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}_+$ e $(g \circ f)(x) = x$

b) Se $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$, então $\text{Dom } f = \mathbb{R}^*$, $\text{Dom } g = (-\infty, 1]$ e:

- $\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 1)$ e $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ e $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

Exercícios

7.1 — Dadas as funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \pi \lfloor x \rfloor$, determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

7.2 — Denotando por ι a função identidade, mostre que para toda função f vale que: $\iota \circ f = f$ e $f \circ \iota = f$. Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \iota$ e $f^{-1} \circ f = \iota$.

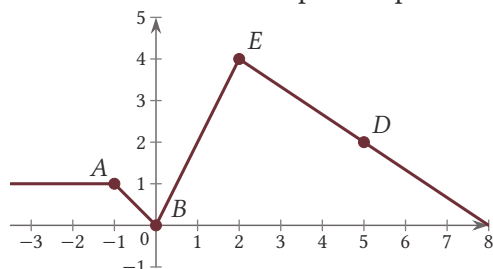
Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de

composição de funções.

7.3 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:
 $f(x) = 3x + 4$ $f(x) = x^2$ $f(x) = 5x^2 + 1$ $f(x) = x^2 - x$ $f(x) = x^3 + x^2$

7.4 — Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$? Esboce o gráfico de $|x|^3$. Esboce o gráfico de $-|x|^5$. Esboce o gráfico de $\sin(|x|)$ Esboce o gráfico de $\cos(|x|)$

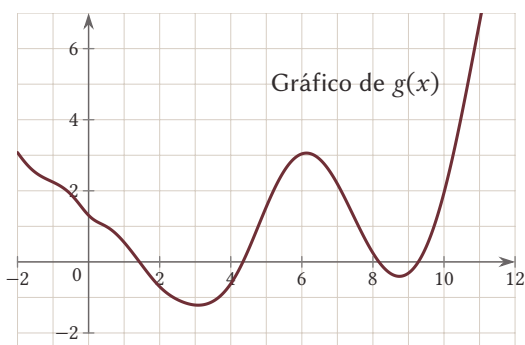
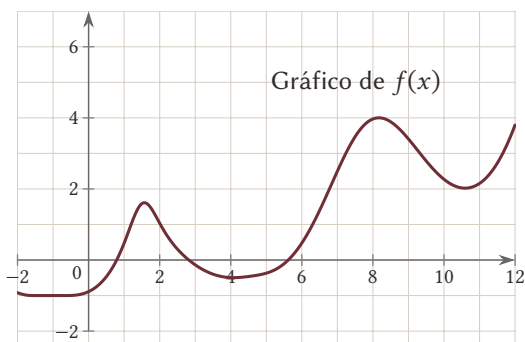
7.5 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



7.6 — Para cada par de funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x)$, $g(x)$, $(f+g)(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e finalmente as expressões para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

1. $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = |x|$ 2. $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = x^2$ 3. $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$ 4. $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ e $g : 2^{-x}$

7.7 — Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir



A partir desses gráficos, esboce o gráfico das seguintes funções:
 $2f(x)$ $2g(x)$ $-f(x)$ $-g(x)$
 $f(-x)$ $g(-x)$ $f(|x|)$ $g(|x|)$ $f(-|x|)$ $\frac{1}{2}g(x)+1$ $-\frac{1}{2}g(x)+1$ $-\frac{1}{2}|g(x)|+1$ $f(\frac{1}{2}x)$ $|f(x)|-1$
 $(f+g)(x)$ $(f-g)(x)$ $(f+g)(|x|)$

7.8 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem. $2x + 1$, $(x + 3)^4$, $(x + 3)^4 - 1$, $(x + 3)^4 - 1$, $(x + 3)^4 - 1 - 1$, $|x - 1| + 1$, $\cos|x - 1|$, $2x^2 - 1$, $|2x^2 - 1|$, $|2x^2 - 1| - 1$, $|2x^2 - 1| - 1 - 2$, $(x - 4)^6 - 2$, $\sin(2x) + 3$, $-2|\sin(2x) + 3| + 1$, $\sqrt{|x + 2|}$, $2 \cos(3x + \pi)$, $1 + \cos(|x - 1|)$, $2^{(x-\pi)}$, $2^{(x-\pi)} - 5$

$$5^{|x|}, 5^{|x+2|}, 3^x - 5, f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \cos(2x), & \text{se } x < 1 \\ 2 \cos(x - 1), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & \text{se } |x^2 - 1| + 1 < 0 \\ \cos(3x), & \text{se } |x^2 - 1| + 1 \geq 0 \end{cases}$$

7.9 — Para cada par de funções f, g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ e

$$g \circ g. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

$$g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$g: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2 - x}$$

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

7.10 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

$$\frac{1}{x+7}, \frac{1}{x^2+4x+4}, \frac{x+2}{x^2-1}, \sqrt{|t-1|-1}$$

$$\log_3(x-2), \log_2(|x|), \log_2(2x - |x-1|), \tan(x + \pi), \tan(-x) + 2, |\tan(x)|, \tan(|x|)$$

$$\tan(2x - |x-1|)$$

8

Funções algébricas

A matemática é a arte de dar o mesmo nome a coisas diferentes.

Henri Poincaré, *Ciência e Método*

Nos capítulos anteriores foram introduzidas as noções de domínio, imagem, composição, monotonicidade, inversa e transformação de gráficos. Neste capítulo, essas noções serão retomadas no estudo de algumas famílias elementares de funções.

Embora cada família possua propriedades próprias, algumas questões aparecem repetidamente: determinar o domínio e a imagem, localizar os zeros, estudar o sinal e a monotonicidade e relacionar a expressão algébrica com a forma do gráfico. A comparação entre essas diferentes descrições será utilizada ao longo de todo o capítulo.

8.1 Funções afins

Taxa de variação constante. Para uma função afim, a razão $\Delta y / \Delta x$ independe do intervalo considerado. Essa propriedade caracteriza a forma afim.

Definição 8.1

Uma **função afim** é uma função da forma

$$f(x) = ax + b,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$. Quando $b = 0$, a função $f(x) = ax$ é chamada de **função linear**. É comum empregar informalmente a expressão “função linear” para toda função afim; aqui manteremos a distinção entre os dois casos.

Uma propriedade característica das funções afins é a constância da taxa de variação. Com efeito, para quaisquer x e h ,

$$f(x + h) - f(x) = ah.$$

Se $h \neq 0$, segue que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a,$$

isto é, a razão entre a variação de f e a variação da variável é sempre a mesma.

A recíproca também é verdadeira. Suponha que exista um número real a tal que

$$f(x+h) - f(x) = ah$$

para todos os valores de x e h . Tomando $x = 0$, obtemos

$$f(h) = ah + f(0).$$

Portanto, com $b = f(0)$, temos necessariamente

$$f(h) = ah + b.$$

Assim, as funções afins são precisamente as funções cuja taxa de variação é constante.

O coeficiente $b = f(0)$ determina o ponto em que o gráfico intercepta o eixo vertical, enquanto a determina sua inclinação. Da própria fórmula segue que a função é crescente quando $a > 0$, decrescente quando $a < 0$ e constante quando $a = 0$. Se $a \neq 0$, sua imagem é $\mathbb{R}$ e a função é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

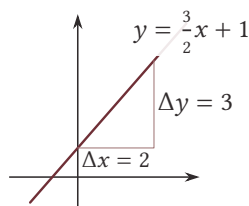


Figura 8.1. O coeficiente angular mede a razão $\Delta y/\Delta x$.

Dados dois pontos distintos do gráfico, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , a função afim fica determinada. Seu coeficiente angular é

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

e então $b = y_1 - ax_1$.

A fórmula também pode ser lida no sentido inverso: dois pontos distintos determinam uma única reta não vertical. Eles determinam primeiro sua inclinação e, em seguida, o termo constante. Temos aqui um exemplo simples de passagem entre duas descrições do mesmo objeto: a informação geométrica dos pontos e a expressão algébrica da função.

Exemplo 8.1

A temperatura em graus Fahrenheit depende da temperatura em graus Celsius pela relação

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32.$$

Interprete os coeficientes e obtenha a conversão inversa.

Solução. A fórmula contém duas informações que convém separar. Primeiro, fazendo $C = 0$, obtemos

$$F(0) = 32,$$

de modo que 0°C corresponde a 32°F . O termo constante determina, portanto, o ponto em que o gráfico encontra o eixo vertical.

Em seguida, comparemos duas temperaturas que diferem de uma unidade:

$$F(C + 1) - F(C) = \frac{9}{5}.$$

Assim, um aumento de 1°C corresponde sempre a um aumento de $9/5^\circ\text{F}$. É essa variação constante que aparece no coeficiente angular.

Como $9/5 \neq 0$, a função é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e podemos inverter a relação. Isolando C em

$$F = \frac{9}{5}C + 32,$$

obtemos

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Por exemplo, 100°C correspondem a 212°F , e a fórmula inversa recupera 100 a partir de 212. ◀

Em modelos aplicados, o domínio raramente é toda a reta. Se uma empresa cobra uma tarifa fixa de R\$ 4,80 e mais R\$ 2,70 por quilômetro percorrido, o custo é

$$C(x) = 4,80 + 2,70x, \quad x \geq 0.$$

Matematicamente, a expressão faz sentido para todo real; no modelo, porém, distâncias negativas não possuem significado. O termo constante representa o custo inicial, e o coeficiente de x representa o custo marginal por quilômetro.

8.1.1 Equações de retas

Uma função afim descreve o gráfico de toda reta não vertical. Se uma reta passa por $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m , então um ponto (x, y) pertence a ela precisamente quando

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Essa é a **forma ponto–inclinação** da equação da reta. Desenvolvendo a expressão, recuperamos a forma $y = mx + b$. Em particular, conhecer um ponto e a inclinação determina a reta.

Há, porém, retas que não são gráficos de funções de x . A reta vertical que passa por $(a, 0)$ tem equação

$$x = a.$$

Todos os seus pontos têm a mesma abscissa. Se tentássemos calcular sua inclinação usando dois pontos distintos, encontraríamos $\Delta x = 0$; a razão $\Delta y/\Delta x$ não estaria definida. Portanto, uma reta vertical **não possui coeficiente angular**. Isso não significa que sua inclinação seja zero: inclinação zero corresponde a uma reta horizontal.

Uma forma que inclui simultaneamente retas verticais e não verticais é

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Se $B \neq 0$, podemos isolar y e obter uma reta de coeficiente angular $-A/B$. Se $B = 0$, a equação representa uma reta vertical.

Duas retas não verticais distintas são **paralelas** quando têm o mesmo coeficiente angular. Duas retas verticais distintas também são paralelas. Já duas retas não verticais, de coeficientes angulares m_1 e m_2 , são **perpendiculares** quando

$$m_1 m_2 = -1.$$

Para justificar essa condição, translate o ponto de interseção para a origem e considere $A = (1, m_1)$ e $B = (1, m_2)$ sobre as duas retas. Pelo Teorema de Pitágoras e sua recíproca, o ângulo em $O = (0, 0)$ é reto se, e somente se,

$$OA^2 + OB^2 = AB^2.$$

Como

$$OA^2 = 1 + m_1^2, \quad OB^2 = 1 + m_2^2, \quad AB^2 = (m_1 - m_2)^2,$$

essa igualdade equivale a $m_1 m_2 = -1$. O caso que a fórmula não alcança deve ser registrado separadamente: toda reta vertical é perpendicular a toda reta horizontal.

Exercícios

8.1 — Compare as inclinações e determine se as duas retas são paralelas, perpendiculares ou nenhuma das duas coisas. ??A primeira passa por $(1, -2)$ e $(-3, -10)$; a segunda, por $(1, 5)$ e $(-1, 1)$. ??A primeira passa por $(4, 6)$ e $(4, -2)$; a segunda, por $(-1, 5)$ e $(-1, 8)$. ??A primeira passa por $(-2, 5)$ e $(4, 2)$; a segunda, por $(-1, -2)$ e $(3, 6)$. ??A primeira passa por $(-1, -2)$ e $(3, 4)$; a segunda, por $(9, -6)$ e $(3, -2)$.

8.2 — Determine os parâmetros pedidos. ??A reta que passa por $(-1, a)$ e $(3, -1)$ é paralela à reta que passa por $(3, 6)$ e $(-5, a + 2)$. Determine a . ??A reta que passa por $(-2, 4)$ e $(1, a)$ é perpendicular à reta que passa por $(a + 4, 8)$ e $(3, -4)$. Determine a . ??O ponto $(-5, k)$ pertence à reta que passa por $(1, 3)$ e é perpendicular a uma reta de coeficiente angular 3. Determine k . ??Mostre que o triângulo de vértices $A = (-2, -8)$, $B = (2, 2)$ e $C = (-3, 4)$ é retângulo e identifique o vértice do ângulo reto.

8.3 — Considere as retas

$$r_i : a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

com $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ para cada i . ??Mostre que elas têm a mesma direção se, e somente se, $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$. Explique como distinguir retas paralelas distintas de retas coincidentes. ??Mostre que a reta que passa por $(a, 0)$ e $(0, b)$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pode ser escrita na forma segmentária

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

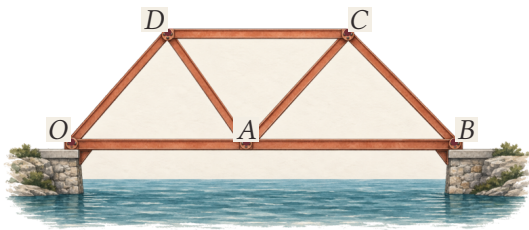
8.4 — Interprete o coeficiente angular em duas aplicações. ??Um avião voa em linha reta com inclinação 0,22. Se ele ganha 1000 pés de altitude, qual é a distância horizontal percorrida? ??Uma treliça de ponte tem nós

$$O = (0, 0), \quad D = (1, 75, 3),$$

$$A = (3, 5, 0), \quad C = (6, 3),$$

$$B = (9, 5, 0).$$

Determine as equações das retas que contêm as barras OD , AD , AC e BC . A ilustração é esquemática; use as coordenadas fornecidas.



8.2 Função módulo e definições por partes

Fronteiras em funções por partes. Nos pontos em que a fórmula muda, o ramo que contém a igualdade determina o valor da função e, no gráfico, qual ponto aparece preenchido.

O valor absoluto, introduzido como distância até a origem, também define uma função:

$$m(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

A função módulo é também o primeiro exemplo importante de uma função definida por partes. Essa notação não cria várias funções: ela apresenta uma única regra cuja expressão depende da região do domínio. Os intervalos devem cobrir todo o domínio pretendido, e as condições nas fronteiras precisam indicar sem ambiguidade qual expressão deve ser usada.

Seu domínio é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $[0, +\infty)$. A função decresce em $(-\infty, 0]$, cresce em $[0, +\infty)$ e não é injetora em $\mathbb{R}$, pois $m(x) = m(-x)$. O gráfico é obtido refletindo para cima a parte negativa da reta $y = x$.

As transformações estudadas anteriormente permitem ler a família

$$g(x) = a|x - h| + k, \quad a \neq 0.$$

O ponto (h, k) é o vértice do gráfico e a reta $x = h$ é seu eixo de simetria. Quando $a > 0$, a imagem é $[k, +\infty)$; quando $a < 0$, é $(-\infty, k]$. O valor $|a|$ controla a escala vertical.

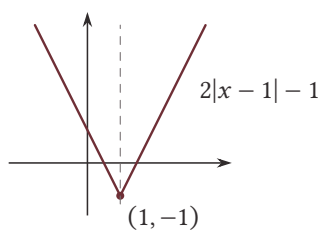


Figura 8.2. Translação e mudança de escala da função módulo.

Exemplo 8.2

Uma peça deve medir 12 mm, com tolerância de 0,05 mm. Expresse a condição de aceitação usando módulo e determine os comprimentos admissíveis.

Solução. Se x é o comprimento medido, seu erro absoluto em relação a 12 é $|x - 12|$. A peça é aceita quando

$$|x - 12| \leq 0,05.$$

Essa desigualdade afirma que a distância de x a 12 não ultrapassa 0,05. Portanto,

$$11,95 \leq x \leq 12,05.$$

O módulo e o intervalo são duas maneiras de registrar a mesma condição. ◀

O mesmo princípio transforma posição em distância. Se a posição de uma partícula numa reta é $s(t) = 2t - 6$, sua distância até a origem é

$$d(t) = |s(t)| = |2t - 6|, \quad t \geq 0.$$

A partícula aproxima-se da origem até $t = 3$ e afasta-se depois desse instante. A mudança de comportamento corresponde ao vértice do gráfico de d .

Exercícios

8.5 — A tarifa de um estacionamento é R\$ 6,00 definida por partes e faça um esboço compatível na entrada e R\$ 3,50 por hora iniciada, até o limite com a cobrança por hora iniciada. diário de R\$ 34,00. Modele o preço por uma função

8.3 Funções quadráticas

Forma canônica e vértice. Ao escrever $ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$, isolamos um quadrado, e $(x - h)^2 \geq 0$. Se $a > 0$, o menor valor ocorre em $x = h$; se $a < 0$, ocorre o maior. Em ambos os casos, o ponto extremo é (h, k) .

Definição 8.2

Uma **função quadrática** é uma função da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Seu gráfico é uma parábola. A forma canônica permite obter diretamente da expressão algébrica o vértice, o eixo de simetria e a imagem. Para obtê-la, completamos o quadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a(x - h)^2 + k, \end{aligned}$$

onde

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

A forma $a(x - h)^2 + k$ é chamada de **forma canônica**. Ela mostra que o vértice da parábola é (h, k) e que $x = h$ é seu eixo de simetria.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, k é seu valor mínimo e $\text{Im } f = [k, +\infty)$. Se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo, k é o valor máximo e $\text{Im } f = (-\infty, k]$. A simetria também mostra que a monotonicidade muda no vértice.

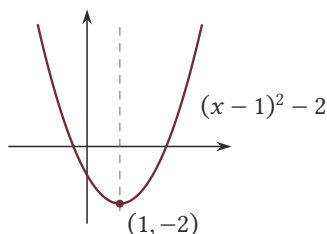


Figura 8.3. A forma canônica torna visíveis o vértice e o eixo de simetria.

As três formas mais úteis de uma função quadrática destacam informações diferentes:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{forma geral}}, \quad \underbrace{a(x - h)^2 + k}_{\text{forma canônica}}, \quad \underbrace{a(x - r_1)(x - r_2)}_{\text{forma fatorada, quando há raízes reais}}.$$

A forma geral exhibe $f(0) = c$; a canônica, o vértice; a fatorada, as interseções reais com o eixo horizontal. Estas são duas se $\Delta > 0$, uma se $\Delta = 0$ e nenhuma se $\Delta < 0$.

As três formas descrevem a mesma função, mas tornam visíveis informações diferentes. Por isso, em vez de eleger uma delas como forma preferencial, convém escolher a representação de acordo com a pergunta que queremos responder.

Quando há duas raízes reais r_1 e r_2 , o eixo de simetria passa pelo ponto médio entre elas. Portanto,

$$h = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

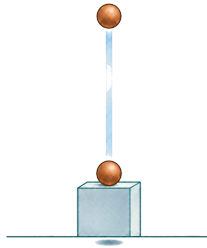
Assim, se as raízes já são conhecidas, encontramos a abscissa do vértice sem memorizar uma fórmula adicional. Quando as raízes não são conhecidas, completar o quadrado continua sendo o caminho mais direto para localizar o vértice.

Exemplo 8.3

A altura, em metros, de um objeto lançado verticalmente é modelada por

$$h(t) = 2 + 12t - 5t^2,$$

onde t é medido em segundos. Determine a altura máxima e discuta o domínio fisicamente relevante.



Solução. Completando o quadrado,

$$h(t) = -5(t - 1,2)^2 + 9,2.$$

Como o coeficiente do termo quadrático é negativo, o vértice fornece o valor máximo. O objeto atinge 9,2 m no instante $t = 1,2$ s.

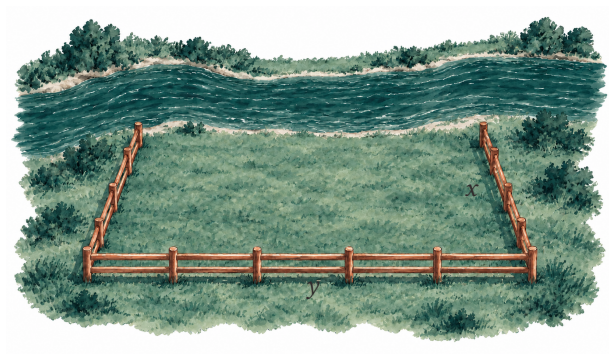
A fórmula algébrica está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, mas o modelo começa no lançamento, em $t = 0$, e termina quando o objeto alcança o solo. A raiz positiva de $h(t) = 0$ é

$$t = \frac{6 + \sqrt{46}}{5} \approx 2,56.$$

Assim, o domínio físico é aproximadamente $[0, 2,56]$. Valores anteriores ao lançamento ou posteriores ao impacto pertencem à parábola matemática, não ao fenômeno modelado. ◀

Exemplo 8.4 — Cercando uma área

A proprietária do Rancho Los Feliz dispõe de 3000 jardas de cerca para cercar um pasto retangular junto a um trecho retilíneo da margem de um rio. Não é necessário construir uma cerca ao longo do rio. Seja x a largura do retângulo, perpendicular à margem. Encontre uma função f da variável x que forneça a área do pasto, supondo que toda a cerca seja utilizada.



Solução. Se y é o comprimento do lado paralelo ao rio, a cerca é usada nos dois lados de largura x e no lado de comprimento y . Portanto,

$$2x + y = 3000, \quad \text{isto é,} \quad y = 3000 - 2x.$$

Como a área do retângulo é xy , obtemos

$$f(x) = x(3000 - 2x) = -2x^2 + 3000x, \quad 0 < x < 1500.$$

O intervalo indicado garante que as duas dimensões do pasto sejam positivas. ◀

Exercícios

8.6 — Retome as funções afins, modulares e quadráticas. ??Determine a função afim cujo gráfico passa por $(1, 3)$ e $(4, 9)$. ??A temperatura de um líquido é $T(t) = 20 + 3t$, com t em minutos e T em graus Celsius. Interprete o coeficiente angular. ??Duas funções têm vértice $(2, -1)$: uma é da forma $m(x) = a|x - 2| - 1$ e a outra, $q(x) = a(x - 2)^2 - 1$. Determine a em cada caso se o gráfico também passa por $(4, 7)$.

Exercícios

8.7 — Considere a função afim $f(x) = -3x + 7$. ??resolva $g(x) \leq 1$. ??Calcule $f(-2)$. ??Determine o zero de f . ??Resolva $f(x) = 16$. ??Determine a função inversa de f . ??Resolva a inequação $f(x) \geq 1$.

8.8 — Determine a função afim cujo gráfico passa pelos pontos $(-2, 5)$ e $(4, -7)$. Em seguida, determine sua interseção com cada eixo coordenado.

8.9 — Para $g(x) = 2|x + 1| - 3$: ??escreva g como função definida por partes; ??determine o vértice, o eixo de simetria e a imagem; ??encontre os zeros;

8.10 — Considere $q(x) = -2x^2 + 8x - 5$. ??Escreva q na forma canônica. ??Determine o vértice, o eixo de simetria e a imagem. ??Encontre os zeros de q . ??Resolva $q(x) \geq 0$.

8.11 — Duas empresas de transporte cobram, para uma viagem de x quilômetros,

$$A(x) = 18 + 1,40x,$$

$$B(x) = 6 + 1,90x, \quad x \geq 0,$$

com os valores em reais. ??Interprete os coeficien-

tes de cada função. ??Para qual distância os preços são iguais? ??Em quais distâncias cada empresa é mais econômica? ??Compare os preços para uma viagem de 40 km.

8.12 — Uma sala de espetáculos comporta 600 pessoas. Ao preço de p reais, estima-se uma pro-

cura de $600 - 20p$ ingressos, com $0 \leq p \leq 30$. Admita que todos os ingressos procurados sejam vendidos. ??Escreva a receita $R(p)$. ??Determine o preço que maximiza a receita e o número correspondente de ingressos vendidos. ??Interprete os zeros do modelo.

Exercícios

8.13 — A altura, em metros, de um drone que decola do telhado é modelada por $h(t) = 12 + 4t - t^2$ durante os quatro primeiros segundos. Determine

o domínio físico, a imagem nesse intervalo, o instante de maior altura e os instantes em que $h(t) = 15$.

8.4 Funções potência e raiz

Paridade e invertibilidade. Para n par, a potência deve ser restringida a $[0, \infty)$ antes de ser invertida. Para n ímpar, ela é bijetora em toda a reta. A paridade determina, portanto, o domínio natural da função raiz correspondente.

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, a função potência de expoente n é

$$p_n(x) = x^n.$$

A distinção entre expoentes pares e ímpares decorre diretamente da igualdade

$$p_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n.$$

Se n é par, então $p_n(-x) = p_n(x)$. A função é, portanto, par e seus valores são não negativos. Além disso, para $0 \leq x < y$,

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1}) > 0.$$

Logo, p_n cresce em $[0, +\infty)$ e, pela simetria, decresce em $(-\infty, 0]$. Recordemos ainda que todo número real não negativo possui uma raiz n -ésima não negativa. Portanto, todo valor de $[0, +\infty)$ é atingido por p_n , e

$$\text{Im } p_n = [0, +\infty).$$

Se n é ímpar, então $p_n(-x) = -p_n(x)$, de modo que p_n é ímpar. Para $x < y$ de mesmo sinal, a mesma fatoração mostra que $x^n < y^n$; se $x < 0 < y$, a desigualdade é imediata. Portanto, p_n é estritamente crescente em toda a reta. Se $y > 0$, a existência da raiz n -ésima fornece um único $x > 0$ tal que $x^n = y$. Para $y < 0$, aplicamos o mesmo fato a $-y$ e usamos a paridade ímpar para obter uma única solução negativa. O valor 0 é atingido em $x = 0$. Assim,

$$\text{Im } p_n = \mathbb{R},$$

e p_n é bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Essas mesmas propriedades determinam o aspecto global dos gráficos. Para expoentes pares, os dois extremos apontam para cima e o gráfico é simétrico em relação ao eixo vertical. Para expoentes ímpares, o extremo esquerdo aponta para baixo, o direito para cima, e o gráfico é simétrico em relação à origem.

As figuras comparam alguns representantes de cada caso.

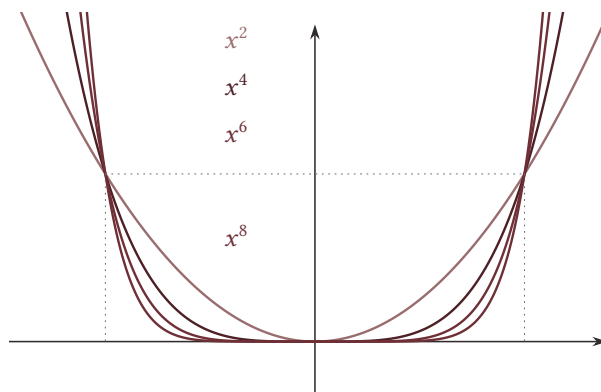


Figura 8.4. Comparação das potências x^n para expoentes pares.

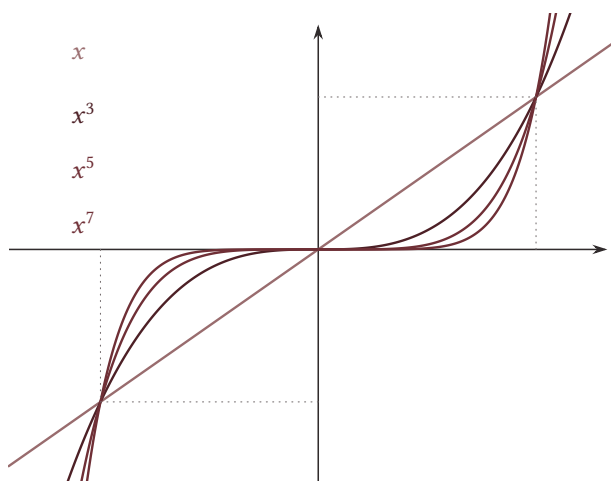


Figura 8.5. Comparação das potências x^n para expoentes ímpares.

As funções raiz aparecem como inversas dessas potências. Para entender a restrição necessária quando n é par, considere primeiro $x \mapsto x^2$ em $\mathbb{R}$. Uma saída positiva não determina uma entrada única: por exemplo, $2^2 = (-2)^2 = 4$. Portanto, essa função não é injetora e não pode ser invertida em toda a reta.

Ao restringirmos o domínio a $[0, +\infty)$, cada valor não negativo passa a ter uma única origem. A função $x \mapsto x^n$, para n par, torna-se então uma bijeção de $[0, +\infty)$ em $[0, +\infty)$, cuja inversa é

$$r_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \geq 0.$$

Para n ímpar, a potência já é estritamente crescente e bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, de modo que nenhuma restrição é necessária. Nesse caso, $r_n(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida para todo real. Em ambos os casos, os gráficos da potência restringida e da raiz correspondente são simétricos em relação à reta $y = x$.

No caso da raiz quadrada, essa simetria dá uma leitura direta do gráfico de $y = \sqrt{x}$: ele é o reflexo, em relação à reta $y = x$, do ramo da parábola $y = x^2$ correspondente a $x \geq 0$. Por isso o gráfico começa em $(0, 0)$, fica na região $x \geq 0, y \geq 0$, passa por pontos como $(1, 1)$, $(4, 2)$ e $(9, 3)$ e é crescente em todo o seu domínio. À medida que x aumenta, são necessários acréscimos cada vez maiores em x para produzir o mesmo acréscimo em $\sqrt{x}$; geometricamente, o gráfico vai se tornando mais horizontal.

A raiz desfaz a potência com o domínio correto

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

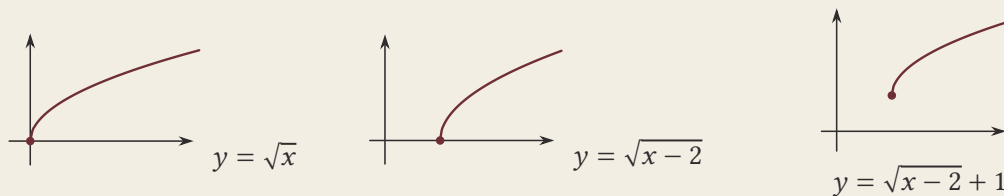
e não necessariamente x . Já $(\sqrt{x})^2 = x$ para $x \geq 0$. A diferença vem do fato de que a raiz quadrada representa sempre a raiz não negativa.

Exemplo 8.5

A função

$$g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

é construída em duas etapas a partir de $y = \sqrt{x}$:



Primeiro, a troca de x por $x - 2$ desloca o gráfico duas unidades para a direita e leva o ponto inicial de $(0, 0)$ a $(2, 0)$. Depois, a soma de 1 desloca o gráfico uma unidade para cima e leva esse ponto a $(2, 1)$. Assim, o domínio de g é $[2, +\infty)$ e sua imagem é $[1, +\infty)$.

Exercícios

8.14 — Retome as funções potência e raiz. Determine o domínio e a imagem de $p(x) = x^4$ e de $r(x) = \sqrt[3]{x}$. Para $h(x) = \sqrt{x+1} - 2$, determine o domínio, a imagem e o zero. Descreva as translações a partir de $y = \sqrt{x}$. Restrinja $p(x) = x^4$ ao domínio $[0, +\infty)$ e tome sua imagem como contradomínio. Determine a inversa e seu domínio.

8.15 — Em estudos de alometria, uma relação

aproximada entre a massa corporal M de um animal e sua taxa metabólica B é

$$B(M) = B_0 M^{3/4},$$

em que $B_0 > 0$ é uma constante. Compare $B(16M)$ com $B(M)$ e compare também as taxas metabólicas por unidade de massa, $B(16M)/(16M)$ e $B(M)/M$.

Exercícios

8.16 — Determine o domínio natural e a imagem. Justifique algebricamente sua resposta.
de

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}.$$

8.5 Funções polinomiais

Termo dominante. Se $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, a fatoração de $a_n x^n$ mostra que os demais termos aparecem acompanhados de potências negativas de x . Para $|x|$ grande, é o termo de maior grau que determina o comportamento das extremidades do gráfico.

As funções afins e quadráticas são os primeiros casos de uma família mais ampla. Polinômios são construídos por somas de potências inteiras não negativas e, por isso, estão definidos em toda a reta real.

As **funções polinomiais** são as funções da forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

em que $c_0, c_1, \dots, c_n$ são números reais chamados **coeficientes** do polinômio; $n \in \mathbb{N}$ é um número natural que, se $c_n \neq 0$, é chamado de grau do polinômio. As funções polinomiais possuem como domínio natural de definição a totalidade de $\mathbb{R}$ ainda que frequentemente nos interessará estudar uma função polinomial em um intervalo. A soma, o produto e a composição de funções polinomiais continuam sendo polinomiais. O quociente será estudado separadamente, pois os zeros do denominador introduzem restrições no domínio.

Antes de desenhar um gráfico polinomial, há duas informações que podem ser lidas diretamente na expressão. A primeira vem do termo de maior grau. Se

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

então, para valores de x muito afastados da origem, o termo $c_n x^n$ predomina sobre os demais. Assim, a paridade de n determina se os dois extremos do gráfico apontam no mesmo sentido ou em sentidos opostos, enquanto o sinal de c_n determina qual desses sentidos é para cima. Essa descrição permite antecipar a forma das extremidades do gráfico antes de conhecermos seus demais detalhes.

A segunda informação vem dos zeros. Um número real r é um **zero**, ou uma **raiz**, de P quando $P(r) = 0$. A relação entre raízes e fatores é expressa pelo resultado seguinte.

Proposição 8.1 — Teorema do fator

O número r é raiz de P se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - r$.

Demonstração. Dividindo $P(x)$ por $x - r$, obtemos

$$P(x) = (x - r)Q(x) + s,$$

onde o resto s é constante. Substituindo $x = r$, encontramos $P(r) = s$. Logo, o resto é zero exatamente quando r é raiz. ■

Se

$$P(x) = (x - r)^m Q(x), \quad Q(r) \neq 0,$$

dizemos que r é uma raiz de **multiplicidade** m . Uma raiz de multiplicidade ímpar faz o sinal do polinômio mudar quando atravessamos r ; geometricamente, o gráfico cruza o eixo horizontal. Em uma raiz de multiplicidade par, o sinal não muda e o gráfico apenas toca esse eixo.

A diferença entre os dois casos pode ser entendida olhando para o fator $(x - r)^m$: potências ímpares trocam de sinal ao atravessar r , enquanto potências pares não. O fator $Q(r) \neq 0$ não altera essa distinção local.

As funções polinomiais de grau 1 ou 2 têm gráficos conhecidos: retas, no primeiro caso, parábolas no segundo. Em graus maiores, o termo dominante, as raízes, suas multiplicidades e a interseção $(0, c_0)$ fornecem uma espécie de esqueleto do gráfico. Esse esqueleto não determina, por si só, todos os máximos, mínimos ou mudanças de concavidade, mas já restringe bastante as formas possíveis.

As três funções a seguir mostram como polinômios do mesmo grau podem ter comportamentos diferentes e como parte dessa diferença pode ser lida diretamente de suas fatorações.

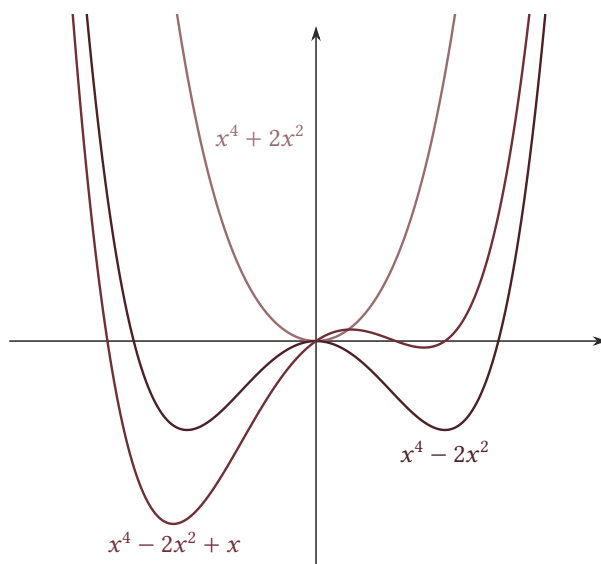


Figura 8.6. Comportamentos possíveis de funções polinomiais de quarto grau.

Nos três casos, o grau é par e o coeficiente dominante é positivo; por isso, os dois extremos dos gráficos apontam para cima. Vamos reconstruir o esboço de um deles usando as informações da expressão.

Exemplo 8.6

Descreva o esboço geral de $P(x) = x^4 - 2x^2$ usando fatoração, simetria e análise de sinal.

Solução. O domínio é $\mathbb{R}$. Fatorando,

$$P(x) = x^2(x^2 - 2) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

As raízes $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são simples; a raiz 0 tem multiplicidade 2 e fornece também a interseção com o eixo vertical. Fora de 0, o fator x^2 é positivo. Assim, $P(x) > 0$ quando $|x| > \sqrt{2}$ e $P(x) < 0$ quando $0 < |x| < \sqrt{2}$.

O gráfico, portanto, atravessa o eixo horizontal em $\pm\sqrt{2}$ e o toca em 0, permanecendo abaixo dele nos dois lados próximos da origem. Como $P(-x) = P(x)$, há simetria em relação ao eixo vertical. Por fim, o termo x^4 faz os dois extremos apontarem para cima. Essas informações explicam o esboço da figura; não localizam, por si sós, todos os seus máximos e mínimos. $\triangleleft$

O primeiro polinômio da figura,

$$x^4 + 2x^2 = x^2(x^2 + 2),$$

tem como única raiz real 0, com multiplicidade 2; já

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x - 1)(x^2 + x - 1)$$

possui quatro raízes reais simples; por isso, atravessa o eixo em cada uma delas. A fatoração explica boa parte da diferença entre os três desenhos.

Exercícios

8.17 — Use a fatoração para descrever o esboço geral. Para $P(x) = -(x + 1)^2(x - 2)$, determine o grau, as raízes e suas multiplicidades, $P(0)$ e o sentido dos dois extremos do gráfico. Em qual raiz o gráfico cruza o eixo horizontal? Fatore $Q(x) = x^3 - 4x$. Encontre os zeros, determine o sinal entre eles e descreva a simetria e os extremos do gráfico.

8.6 Funções racionais

Fatores do denominador. Um fator comum ao numerador e ao denominador pode ser cancelado na expressão, mas o ponto correspondente permanece excluído do domínio. Um fator do denominador que permanece após a simplificação pode produzir uma assíntota vertical.

Uma **função racional** é um quociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

em que p e q são polinômios e q não é identicamente nulo.¹ Seu domínio natural exclui precisamente os zeros reais do denominador. Se $Z(q) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$, então

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus Z(q).$$

São exemplos de funções racionais

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^4 + x^3 - 2x - 1}, \quad \frac{3}{x^2}, \quad \frac{5x^5 - 3x^3 + x}{x^4}.$$

A fatoração de p e q fornece as primeiras informações sobre o gráfico. Um zero do numerador que não anule o denominador é um zero da função. Um zero do denominador, por sua vez, não pertence ao domínio. Se o mesmo fator ocorre no numerador e no denominador, o cancelamento simplifica a expressão, mas não restitui o ponto excluído. Se um fator permanece no denominador após a simplificação, os valores da função podem crescer em módulo nas proximidades de sua raiz.

Zeros, pontos ausentes e assíntotas verticais podem, portanto, ser estudados a partir da fatoração do numerador e do denominador.

Pontos excluídos e comportamento lateral

A determinação do domínio deve preceder a construção do gráfico. Considere

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, temos $f(x) = x + 1$ sempre que $x \neq 1$. O cancelamento simplifica a expressão, mas não devolve ao domínio o ponto que foi excluído: em $x = 1$, a expressão original continua sem sentido. Assim, o gráfico é a reta $y = x + 1$ com um ponto ausente em $(1, 2)$.

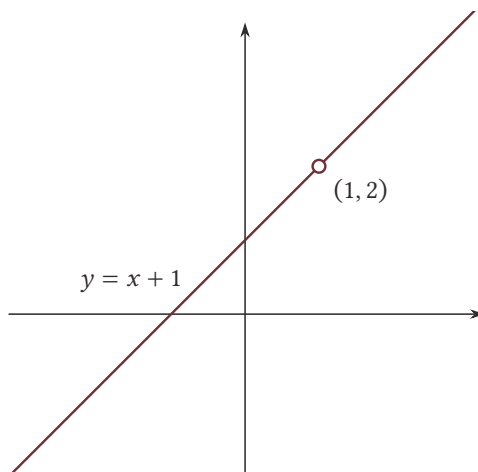


Figura 8.7. Um buraco removível: o valor ausente é indicado pelo círculo vazio.

Quando x assume valores cada vez mais próximos de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos de 2. Embora o valor $f(1)$ não esteja definido, o comportamento

¹Quando q é constante e não nulo, o quociente também é uma função polinomial.

do gráfico nas proximidades desse ponto sugere naturalmente o valor que o completaria. O buraco é chamado **removível** porque bastaria definir $f(1) = 2$ para completá-lo.

Nem todo ponto excluído produz um buraco removível. Os gráficos de funções racionais podem ter formas globais muito diferentes. Um comportamento recorrente já aparece na função $f(x) = 1/x$:

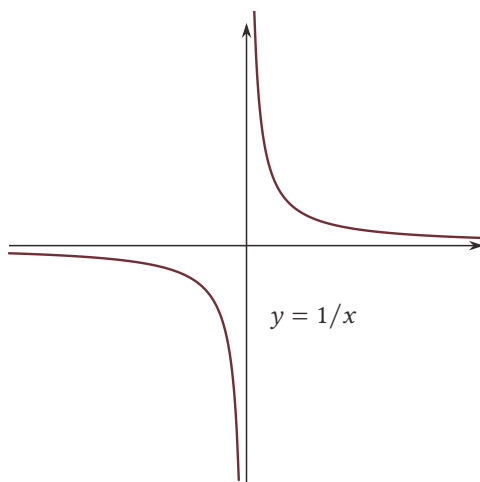


Figura 8.8. Comportamento típico de uma função racional.

O gráfico é uma hipérbole equilátera com centro na origem. Quando x se aproxima de 0 pela direita, $1/x$ cresce sem limite; pela esquerda, decresce sem limite. Os dois ramos ficam cada vez mais próximos da reta vertical $x = 0$. Já quando $|x|$ cresce, os valores de $1/x$ se aproximam de 0, e o gráfico se aproxima da reta horizontal $y = 0$.

Chamamos $x = 0$ de **assíntota vertical** e $y = 0$ de **assíntota horizontal**. Aqui usamos “aproximar-se” em seu sentido geométrico intuitivo: interessa observar como os valores se comportam quando tomamos pontos cada vez mais próximos ou cada vez mais afastados. Outras funções racionais podem possuir assíntotas oblíquas, isto é, retas que não são verticais nem horizontais.

O sinal também importa. Em $x = 1$, por exemplo, as funções

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{1}{x-1}$$

não apresentam o mesmo comportamento dos dois lados: de um lado os valores crescem sem limite e, do outro, decrescem sem limite. A troca de sinal inverte os dois comportamentos. Para f , o denominador é negativo à esquerda de 1 e positivo à direita: por exemplo, $f(0,9) = -10$ e $f(1,1) = 10$. Ao aproximarmos ainda mais x de 1, o módulo desses valores aumenta sem limite, mantendo o sinal correspondente a cada lado. Para g , os sinais são trocados.



Figura 8.9. Comportamentos laterais invertidos pela troca de sinal.

Já em $1/(x-1)^2$, os valores crescem sem limite dos dois lados de 1. Também aqui não há aproximação a um valor real finito, mas o comportamento é o mesmo dos dois lados. Esses exemplos mostram por que é necessário dizer *por qual lado* x se aproxima do ponto.

Esboço de gráficos racionais

Os gráficos de funções racionais podem apresentar formas bastante distintas. Ainda assim, algumas informações organizam seu esboço:

1. Quais pontos são excluídos do domínio por anularem o denominador?
2. Após cancelar os fatores comuns, quais pontos excluídos correspondem a buracos e quais correspondem a assíntotas verticais?
3. Onde estão as interseções com os eixos?
4. Em quais intervalos a função é positiva ou negativa?
5. O que acontece quando x assume valores positivos ou negativos de módulo muito grande?

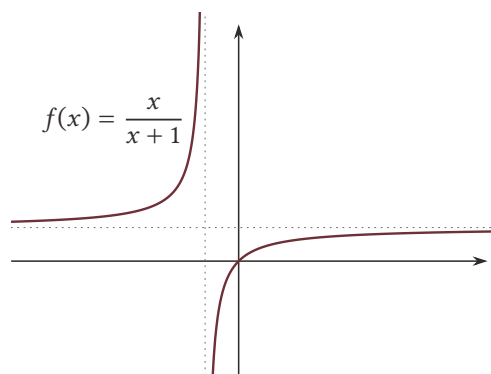
Exemplo 8.7

Use o roteiro para esboçar o gráfico de $f(x) = x/(x+1)$.

Solução. O denominador se anula apenas em -1 , de modo que o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Não há fator comum para cancelar e não há buraco removível. Reescrevemos a função como

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

A segunda forma mostra como obter seu gráfico a partir de $y = 1/x$: uma translação de uma unidade para a esquerda, seguida de uma reflexão no eixo x e de uma translação de uma unidade para cima.

**Figura 8.10.** Gráfico de $f(x) = x/(x+1)$ e suas assíntotas.

O gráfico passa pela origem, sua única interseção com os eixos, e as retas $x = -1$ e $y = 1$ são suas assíntotas. Comparando os sinais de x e $x+1$, obtemos $f(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(0, +\infty)$, enquanto $f(x) < 0$ em $(-1, 0)$.

Pela forma $1 - 1/(x + 1)$, quando x se aproxima de -1 pela esquerda, $f(x)$ cresce sem limite; pela direita, decresce sem limite. Quando x se afasta muito da origem, $1/(x + 1)$ fica próximo de zero. Assim, $f(x)$ se aproxima de 1 , por valores maiores que 1 à esquerda e menores que 1 à direita. O esboço reúne essas informações. $\triangleleft$

O comportamento distante também pode ser lido algebricamente. Se o grau do numerador é menor que o do denominador, o quociente se aproxima de 0 para valores de $|x|$ muito grandes. Se os graus são iguais, ele se aproxima da razão entre os coeficientes dominantes. Quando o grau do numerador é uma unidade maior, a divisão polinomial revela uma assíntota oblíqua. Mais geralmente, essa divisão separa uma parte polinomial de uma fração que se torna pequena quando $|x|$ cresce.

Por exemplo,

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}.$$

O domínio exclui -1 e 1 , que produzem assíntotas verticais. Para valores de $|x|$ muito grandes, a segunda parcela fica próxima de 0 ; por isso, o gráfico se aproxima de $y = 1$. A determinação completa do gráfico não é necessária para essa análise. Domínio, fatoração e divisão algébrica já fornecem uma parte considerável de sua forma global.

Exemplo 8.8 – Duas assíntotas verticais e comportamento no infinito

Estude os elementos principais do gráfico de

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4}.$$

Determine o domínio, as interseções com os eixos, as assíntotas e o sinal da função.

Solução. Começamos pelo denominador:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Não há fatores comuns com o numerador. Portanto,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\},$$

e os dois pontos excluídos produzem candidatos a assíntotas verticais. Como o numerador vale -3 em $x = -2$ e 5 em $x = 2$, não ocorre cancelamento; assim,

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = 2$$

são assíntotas verticais.

A interseção com o eixo horizontal é obtida anulando o numerador:

$$2x + 1 = 0,$$

de modo que o gráfico cruza o eixo x em $(-1/2, 0)$. Para $x = 0$,

$$f(0) = -\frac{1}{4},$$

e portanto $(0, -1/4)$ é a interseção com o eixo vertical.

Para estudar o sinal, usamos os três pontos em que numerador ou denominador mudam de sinal:

$$-2, \quad -\frac{1}{2}, \quad 2.$$

Da comparação dos fatores $2x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$, obtemos

$$f(x) < 0 \quad \text{em} \quad (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

e

$$f(x) > 0 \quad \text{em} \quad \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

Esse quadro de sinais também esclarece o comportamento junto às assíntotas. Perto de $x = -2$, os valores decrescem sem limite pela esquerda e crescem sem limite pela direita. Perto de $x = 2$, decrescem sem limite pela esquerda e crescem sem limite pela direita.

Resta observar o que acontece longe da origem. O denominador tem grau 2, enquanto o numerador tem grau 1. Dividindo numerador e denominador por x^2 , obtemos

$$f(x) = \frac{2/x + 1/x^2}{1 - 4/x^2}.$$

Para valores de $|x|$ muito grandes, as frações $1/x$ e $1/x^2$ tornam-se pequenas. Assim, $f(x)$ aproxima-se de 0, e

$$y = 0$$

é uma assíntota horizontal.

O esboço pode agora ser construído sem uma tabela extensa de valores: domínio, interseções, sinais e assíntotas já determinam sua forma essencial. ◀

Exemplo 8.9 – Uma assíntota oblíqua

Determine as assíntotas e descreva o comportamento global de

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Solução. O domínio é

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Como o numerador vale 2 em $x = 1$, não há cancelamento. Logo,

$$x = 1$$

é uma assíntota vertical.

Neste caso o grau do numerador é uma unidade maior que o grau do denominador. A divisão polinomial fornece

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Essa escrita separa duas partes com papéis distintos. A reta

$$y = x + 1$$

descreve o comportamento dominante, enquanto o termo

$$\frac{2}{x-1}$$

torna-se pequeno quando $|x|$ cresce. Portanto, à medida que nos afastamos da origem, o gráfico de g se aproxima cada vez mais da reta $y = x + 1$. Essa reta é uma **assíntota oblíqua**.

A mesma decomposição permite ler de que lado da reta o gráfico se encontra. Se $x > 1$, então $2/(x-1) > 0$, e portanto

$$g(x) > x + 1.$$

Se $x < 1$, então $2/(x-1) < 0$, e

$$g(x) < x + 1.$$

Assim, o ramo à direita de $x = 1$ permanece acima da assíntota oblíqua, e o ramo à esquerda permanece abaixo dela.

Perto da assíntota vertical, o sinal do termo $2/(x-1)$ domina: quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $g(x)$ decresce sem limite; quando se aproxima pela direita, $g(x)$ cresce sem limite.

Finalmente, $x^2 + 1$ nunca se anula para $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a função não possui zeros reais. Sua interseção com o eixo vertical é

$$g(0) = -1.$$

Mais uma vez, a divisão algébrica fornece informação geométrica: ela não serve apenas para efetuar um cálculo, mas revela diretamente a reta que governa o gráfico longe da origem. $\triangleleft$

Exemplo 8.10 – Um buraco e uma assíntota na mesma função

Determine o domínio, a imagem e as assíntotas de

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}.$$

Descreva o gráfico a partir de uma expressão mais simples.

Solução. Fatorando antes de cancelar, encontramos

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}, \quad x \neq 3, -2.$$

No domínio original,

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

O gráfico é o de $y = 1/x$ deslocado duas unidades para a esquerda e uma para cima, com um ponto retirado. A reta $x = -2$ permanece como assíntota vertical; em $x = 3$, porém, a expressão simplificada teria o valor $1 + 1/5 = 6/5$. Há, portanto, um buraco em $(3, 6/5)$, não uma segunda assíntota vertical. A assíntota horizontal é $y = 1$.

Para determinar a imagem, resolvemos

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

O valor $y = 1$ é impossível. Para $y \neq 1$, há uma única entrada candidata,

$$x = \frac{1}{y-1} - 2.$$

Ela nunca é -2 , mas é igual a 3 precisamente quando $y = 6/5$. Assim, retirar $x = 3$ também retira esse valor da imagem:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}, \quad \text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{1, 6/5\}.$$

A fatoração distingue os dois pontos excluídos, e a equação em y permite verificar que não há outros valores ausentes na imagem. ◀

Exercícios

8.18 — Descreva os pontos excluídos e o comportamento dos gráficos. ??Simplifique $g(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, mantendo o domínio original. Qual é o ponto ausente? De que valor $g(x)$ se aproxima quando x se aproxima de 2 por cada lado? ??Para $h(x) = (x + 1)/(x - 2)$, encontre o domínio, as interseções com os eixos e as assíntotas. Descreva os sinais e o comportamento dos dois lados de 2 e esboce o gráfico. ??Compare o comportamento de $j(x) = -1/(x - 2)^2$ dos dois lados de 2. O que acontece quando x assume valores positivos ou negativos de módulo muito grande?

Exercícios

8.19 — A pressão P , em kPa, de um gás mantido a temperatura constante e seu volume V , em litros, satisfazem $PV = 720$. Determine a pressão quando o volume passa de 12 L para 8 L e calcule a variação percentual de P .

Exercícios

8.20 — Sejam $f(x) = 1/(x - 2)$ e $g(x) = x^2 + 1$. ??Determine $f \circ g$ e $g \circ f$, com seus domínios. ??Determine a imagem de $g \circ f$. ??Explique por que o valor 1 não é atingido por $g \circ f$, embora g atinja esse valor.

9

Funções exponenciais e logarítmicas

Embora mudada, ressurjo a mesma.

Jakob Bernoulli

As funções estudadas até aqui foram construídas principalmente a partir de somas, produtos, potências inteiras e raízes. Nas funções exponenciais, a base é mantida fixa e a variável ocupa o expoente. Essa diferença, embora simples na escrita, produz um comportamento distinto daquele observado nas funções potência. Compare, por exemplo,

$$x^2 \quad \text{e} \quad 2^x.$$

A função exponencial descreve uma variação de natureza multiplicativa. Sua inversão conduz à função logarítmica: determinar x a partir de uma igualdade da forma $a^x = y$ significa determinar o logaritmo de y na base a . As propriedades das duas funções decorrem, em grande parte, das mesmas leis das potências.

9.1 Da potência à função exponencial

Base fixa e expoente variável. Em x^a , a variável está na base; em a^x , está no expoente. A posição ocupada pela variável determina comportamentos distintos.

Anteriormente foram construídas as potências de expoentes inteiros e racionais e admitida, para bases positivas, sua extensão aos expoentes reais. Essa extensão será agora tomada como ponto de partida para o estudo da função $x \mapsto a^x$. Continuam válidas as propriedades

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a > 0.$$

Definição 9.1 – Função exponencial

Fixe $a > 0$, com $a \neq 1$. A **função exponencial de base a** é

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty), \quad f(x) = a^x.$$

Algumas propriedades podem ser lidas diretamente das leis das potências:

1. $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $a^0 = 1$, portanto o gráfico passa por $(0, 1)$;
3. se $a > 1$, a função é estritamente crescente;
4. se $0 < a < 1$, a função é estritamente decrescente.

O valor da base determina o sentido da variação. Para $a > 1$, a função é crescente; para $0 < a < 1$, é decrescente. Em ambos os casos, seus valores são positivos e o gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$.

Se $y > x$, então $a^y/a^x = a^{y-x}$; esse quociente é maior que 1 quando $a > 1$ e está entre 0 e 1 quando $0 < a < 1$, o que explica, respectivamente, o crescimento e o decrescimento.

Usaremos também um fato sobre essa extensão das potências, admitido aqui sem demonstração: todo número positivo é atingido por $x \mapsto a^x$. Portanto,

$$\text{Im}(x \mapsto a^x) = (0, +\infty).$$

A monotonicidade garante que cada valor é atingido *no máximo uma vez*; a afirmação sobre a imagem garante que todo valor positivo é atingido. Juntas, essas duas propriedades permitem inverter a função exponencial.

Geometricamente, o segundo caso é uma reflexão do primeiro. Se $0 < a < 1$, então $1/a > 1$ e

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Assim, uma exponencial de base menor que 1 é obtida refletindo horizontalmente uma exponencial de base maior que 1.



Figura 9.1. Para $a > 1$, a^x cresce; para $0 < a < 1$, decresce. Em ambos os casos, o gráfico permanece acima do eixo horizontal e passa por $(0, 1)$.

O eixo x funciona como assíntota horizontal. Quando $a > 1$, os valores de a^x tornam-se muito pequenos para x negativo e muito grandes para x positivo. Para $0 < a < 1$, os papéis se invertem. Essa diferença pode ser percebida numericamente e aparece de imediato na forma dos dois gráficos.

Exemplo 9.1 – Comparando a^x e a^{-x}

Fixe $a > 0$, $a \neq 1$. Compare os gráficos de a^x e a^{-x} .

Solução. Substituir x por $-x$ reflete um gráfico em relação ao eixo y . Portanto, os gráficos de

$$f(x) = a^x \quad \text{e} \quad g(x) = a^{-x} = f(-x)$$

são simétricos em relação a esse eixo e se encontram em $(0, 1)$. Se $a > 1$, f é crescente e g é decrescente; se $0 < a < 1$, ocorre o contrário. ◀

9.1.1 Transformações do gráfico exponencial

Para

$$F(x) = A a^{B(x-h)} + k, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0,$$

o parâmetro h produz uma translação horizontal, k uma translação vertical, A controla a escala vertical e seu sinal pode refletir o gráfico, enquanto B altera a escala horizontal.

Há uma diferença importante em relação aos polinômios: como $a^{B(x-h)} > 0$, a função nunca cruza a reta $y = k$. Essa reta é a assíntota horizontal do gráfico transformado.

Exemplo 9.2

Determine domínio, imagem e assíntota horizontal de

$$f(x) = 2^{x-1} + 3.$$

Descreva seu gráfico a partir de $y = 2^x$.

Solução. Começemos pela expressão 2^{x-1} . O termo $x - 1$ indica uma translação de uma unidade para a direita do gráfico de 2^x . Como uma potência de base positiva é sempre positiva, temos

$$2^{x-1} > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ao somar 3, todo o gráfico é deslocado três unidades para cima. Assim,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}, \quad \text{Im } f = (3, +\infty).$$

O valor 3 não é atingido: ele funciona como uma fronteira horizontal para os valores da função. Geometricamente, a assíntota $y = 0$ de 2^x é transportada para a reta $y = 3$. ◀

Exemplo 9.3 — Reflexões, escalas e deslocamentos

Considere

$$f(x) = 4 - 3 \cdot 2^{-2(x-1)}.$$

Descreva seu gráfico a partir de $y = 2^x$ e determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota horizontal.

Solução. A expressão é construída em etapas: de x passamos a $-2(x-1)$, aplicamos a exponencial, multiplicamos por -3 e somamos 4. Para acompanhar o gráfico sem confundir os deslocamentos, tome um ponto $(t, 2^t)$ da curva original. Como $t = -2(x-1)$ equivale a $x = 1 - t/2$, o ponto correspondente no novo gráfico é

$$\left(1 - \frac{t}{2}, 4 - 3 \cdot 2^t\right).$$

Na horizontal há uma reflexão, uma redução das distâncias por fator $1/2$ e um deslocamento de uma unidade para a direita. Na vertical há uma reflexão, uma ampliação por fator 3 e um deslocamento de quatro unidades para cima. Por exemplo,

$$(0, 1) \mapsto (1, 1), \quad (2, 4) \mapsto (0, -8), \quad (-2, 1/4) \mapsto (2, 13/4).$$

O domínio é $\mathbb{R}$. A potência assume todos os valores positivos; multiplicar por -3 e somar 4 produz exatamente os valores menores que 4. Assim, $\text{Im } f = (-\infty, 4)$.

Quando x aumenta, $-2(x-1)$ diminui e a potência de 2 também diminui. A multiplicação por -3 inverte novamente a desigualdade: f é estritamente crescente. Para valores positivos cada vez maiores de x , a potência se aproxima de zero, e $f(x)$ se aproxima de 4 por baixo. A assíntota horizontal é, portanto, $y = 4$. ◀

Exercícios

9.1 — Para cada função, determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota horizontal.

$$f(x) = 3^x, \quad g(x) = (1/4)^x, \quad h(x) = 2^{x+2} - 1.$$

9.2 — Mostre que $a^{-x} = 1/a^x$ e use isso para explicar a simetria entre os gráficos de a^x e a^{-x} .

Exercícios

9.3 — Para $f(x) = (3/2)^x$, calcule $f(-2)$, $f(0)$ e $f(3)$ e use os valores para confirmar a monotonicidade da função.

9.5 — Resolva sem usar logaritmos:

$$2^x = \frac{1}{8}.$$

9.6 — Determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota horizontal de

9.4 — Compare 2^x e 4^x nos casos $x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$.

$$g(x) = -2^x.$$

9.7 — Descreva as transformações que levam $y = 2^x$ ao gráfico de $h(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 4$ e determine sua imagem.

$$h(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 4$$

9.2 Variação multiplicativa e modelos exponenciais

Uma função afim acrescenta sempre a mesma quantidade quando a variável cresce uma unidade. Uma função exponencial se caracteriza por outra regularidade: ela multiplica sempre pelo mesmo fator:

$$a^{x+1} = a \cdot a^x.$$

Assim, o que permanece constante não é uma diferença, mas uma razão.

Se uma grandeza Q é multiplicada por um fator $r > 0$ a cada unidade de tempo, escrevemos

$$Q(t) = Q_0 r^t.$$

De fato, $Q(t+1)/Q(t) = r$. Quando $r > 1$, os valores crescem; quando $0 < r < 1$, diminuem. Essa distinção entre variação aditiva e multiplicativa é uma das diferenças essenciais entre funções afins e exponenciais.

Exemplo 9.4 — Crescimento por duplicação

Uma cultura contém inicialmente 250 bactérias e dobra a cada 3 horas. Construa um modelo exponencial e determine a população após 12 horas.

Solução. Em t horas ocorrem $t/3$ períodos de duplicação. Assim,

$$N(t) = 250 \cdot 2^{t/3}, \quad t \geq 0.$$

Logo,

$$N(12) = 250 \cdot 2^4 = 4000.$$

O modelo supõe recursos e espaço suficientes; não deve ser extrapolado indefinidamente. ◀

Exercícios

9.8 — Uma população inicial de 1200 indivíduos cresce 8% ao ano. Escreva o modelo e calcule a população prevista após cinco anos.

9.10 — Duas populações são modeladas por

$$A(t) = 1000(1,05)^t, \quad B(t) = 1500(1,02)^t.$$

9.9 — Uma substância perde 12% de sua massa a cada hora. Se a massa inicial é 50 g, determine a massa prevista após seis horas.

Explique por que descobrir quando $A(t) = B(t)$ é um problema inverso da exponenciação.

Exercícios

9.11 — Uma grandeza exponencial satisfaz $Q(0) = 80$ e $Q(3) = 640$. Sabendo que o fator multiplicativo é constante a cada unidade de tempo, determine $Q(t)$.

9.12 — Qual dos modelos abaixo representa variação exponencial? Explique.

$$A(t) = 100 + 20t, \quad B(t) = 100(1,2)^t.$$

9.3 Função logarítmica

Inversa da exponencial. A igualdade $\log_a y = x$ é equivalente a $a^x = y$. O logaritmo fornece, portanto, o expoente correspondente a um valor positivo.

Considere a equação

$$2^x = 10.$$

Não há uma potência inteira de 2 igual a 10, mas a função 2^x é estritamente crescente e sua imagem é $(0, +\infty)$. Existe, portanto, um único número real x que resolve a equação.

Esse número é, por definição, $\log_2 10$.

De modo geral, em uma igualdade $a^x = y$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$, o logaritmo fornece o expoente x . Trata-se, portanto, da operação inversa da exponenciação.

Definição 9.2 — Função logarítmica

Fixe $a > 0$, com $a \neq 1$. A **função logarítmica de base a** é a inversa da função exponencial de base a :

$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Por definição,

$$\boxed{\log_a y = x \iff a^x = y}, \quad y > 0.$$

A definição já contém duas informações fundamentais. Primeiro, o argumento do logaritmo precisa ser positivo, pois a exponencial de base positiva nunca assume valores nulos ou negativos. Segundo, o valor de um logaritmo é um expoente. Por exemplo,

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_{10}(0,01) = -2, \quad \log_3 1 = 0,$$

porque

$$2^3 = 8, \quad 10^{-2} = 0,01, \quad 3^0 = 1.$$

Como exponencial e logaritmo são inversas,

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$$

e

$$\log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

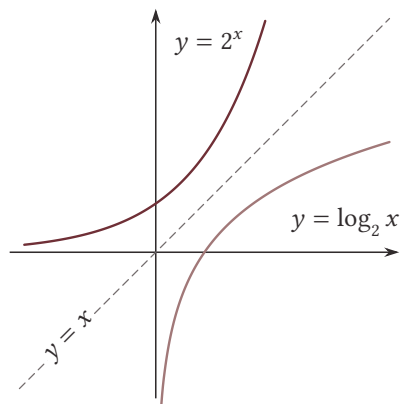


Figura 9.2. Os gráficos de $y = a^x$ e $y = \log_a x$ são reflexos um do outro em relação à reta $y = x$.

A inversão troca domínio e imagem:

$$\text{Dom}(\log_a) = (0, +\infty), \quad \text{Im}(\log_a) = \mathbb{R}.$$

Também troca o comportamento horizontal e vertical: a assíntota horizontal $y = 0$ da exponencial corresponde à assíntota vertical $x = 0$ do logaritmo. Quando $a > 1$, as duas funções são crescentes; quando $0 < a < 1$, ambas são decrescentes.

Exemplo 9.5

Calcule

$$\log_2 32, \quad \log_{10}(0,001), \quad \log_3 \left(\frac{1}{27} \right).$$

Solução. Perguntamos a que expoente devemos elevar a base:

$$2^5 = 32, \quad 10^{-3} = 0,001, \quad 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Logo,

$$\log_2 32 = 5, \quad \log_{10}(0,001) = -3, \quad \log_3(1/27) = -3.$$

◀

Exercícios

9.13 — Reescreva cada afirmação na forma exponencial. $??\log_2 16 = 4$. $??\log_5(1/25) = -2$. $??\log_{10} 1000 = 3$.

9.14 — Reescreva cada afirmação na forma logarítmica. $??3^4 = 81$. $??10^{-5} = 0,00001$. $??7^0 = 1$.

9.15 — Determine domínio, imagem, monotonicidade e assíntota vertical de $f(x) = \log_{1/3} x$.

9.16 — Explique por que $\log_a(-2)$ não é um número real para nenhuma base real admissível a .

Exercícios

9.17 — Calcule diretamente pela definição. **9.19** — Escreva a solução de $5^x = 17$ usando logaritmos.

9.18 — Determine domínio, imagem e assíntota vertical de

$$f(x) = \log_2(x - 3) + 1.$$

9.4 Propriedades dos logaritmos

As propriedades algébricas dos logaritmos decorrem diretamente das leis das potências e da relação de inversão entre logaritmo e exponencial. Suponha $x, y > 0$ e escreva

$$u = \log_a x, \quad v = \log_a y.$$

Então $x = a^u$ e $y = a^v$. Multiplicando,

$$xy = a^{u+v},$$

e, pela definição de logaritmo,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Do mesmo modo,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Para potências,

$$x^r = (a^u)^r = a^{ru},$$

de onde

$$\log_a(x^r) = r \log_a x,$$

sempre que as expressões reais envolvidas estejam definidas.

Logaritmo não distribui sobre soma. Não existe regra $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$. As propriedades vêm de produtos, quocientes e potências, não de somas.

A mudança de base decorre da mesma ideia. Se $u = \log_a x$, então $a^u = x$. Aplicando $\log_b$,

$$u \log_b a = \log_b x,$$

e portanto

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Essa identidade permite calcular logaritmos em qualquer base usando, por exemplo, $\log_{10}$.

Entre as bases possíveis, uma ocupa um lugar especial: a constante $e \approx 2,71828$. A função $x \mapsto e^x$ é chamada **exponencial natural**; sua inversa é o **logaritmo natural**, denotado por $\ln x = \log_e x$. As propriedades já obtidas valem também para essa base. Em particular,

$$\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

As condições são diferentes porque o domínio do logaritmo é $(0, \infty)$, enquanto o da exponencial é $\mathbb{R}$.

Exemplo 9.6 – Simplificação de expressões logarítmicas

Determine o domínio de cada expressão e reescreva-a usando as propriedades dos logaritmos:

1. $\log_2 \left(\frac{x^2 + 1}{2^x} \right);$
2. $\ln \left(\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{e^x} \right).$

Solução. (a) Como $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o argumento do logaritmo é sempre positivo. Portanto, o domínio é $\mathbb{R}$. Pela propriedade do quociente e pela relação entre logaritmo e exponencial,

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + 1}{2^x} \right) = \log_2(x^2 + 1) - \log_2(2^x) = \log_2(x^2 + 1) - x.$$

O termo $\log_2(x^2 + 1)$ permanece assim: a propriedade do produto não se aplica a uma soma.

(b) A raiz exige $x^2 - 1 \geq 0$. Nos extremos $x = \pm 1$, porém, o argumento do logaritmo é zero. Como $e^x > 0$, a expressão está definida exatamente quando $x^2 - 1 > 0$, isto é,

$$D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Nesse domínio, x^2 e $x^2 - 1$ são positivos. Aplicando as propriedades do produto, do quociente e da potência, obtemos

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{e^x} \right) &= \ln(x^2) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - \ln(e^x) \\ &= 2 \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - x. \end{aligned}$$

Usamos $\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2 \ln |x|$, pois o domínio também contém valores negativos de x . Escrever $2 \ln x$ excluiria esses valores. ◀

Exemplo 9.7 – Uma composição exponencial-logarítmica

Considere

$$G(x) = \log_2(4 - 2^x).$$

Determine o domínio, a imagem, a monotonicidade e as assíntotas de G . Em seguida, encontre sua inversa.

Solução. O primeiro cuidado é com a ordem da composição. Para que o logaritmo exista, seu argumento deve ser positivo:

$$4 - 2^x > 0 \iff 2^x < 4 = 2^2.$$

Como 2^x é crescente,

$$\text{Dom } G = (-\infty, 2).$$

Nesse domínio, 2^x percorre $(0, 4)$; portanto, $4 - 2^x$ percorre também $(0, 4)$, mas no sentido contrário. Como $\log_2$ transforma $(0, 4)$ em $(-\infty, 2)$,

$$\text{Im } G = (-\infty, 2).$$

A função $x \mapsto 4 - 2^x$ é estritamente decrescente, enquanto $\log_2$ é estritamente crescente. Logo, G é estritamente decrescente.

Quando x se aproxima de 2 pela esquerda, o argumento $4 - 2^x$ permanece positivo e se aproxima de zero; os valores de $G(x)$ decrescem sem limite. Assim, $x = 2$ é uma assíntota vertical. Para valores negativos de x com módulo cada vez maior, 2^x se aproxima de zero e $G(x)$ se aproxima de $\log_2 4 = 2$ por valores menores. Portanto, $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Para inverter a função, escrevemos

$$y = \log_2(4 - 2^x).$$

Então

$$2^y = 4 - 2^x \iff 2^x = 4 - 2^y,$$

e portanto

$$x = \log_2(4 - 2^y).$$

Como y percorre $(-\infty, 2)$,

$$G^{-1}(y) = \log_2(4 - 2^y), \quad y < 2.$$

Curiosamente, a inversa tem a mesma regra de G : neste domínio, G é sua própria inversa. Isso também significa que seu gráfico é simétrico em relação à reta $y = x$. ◁

Exercícios

9.20 — Simplifique, indicando antes o domínio. para $x, y > 0$. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$.
 $\log_2(8x)$. $\ln(x^2)$. $\ln(\sqrt{x}/e^{2x})$. $\log_a(x^2) = 2 \log_a |x|$ para $x \neq 0$.

9.21 — Decida quais afirmações são verdadeiras e corrija as falsas. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ **9.22** — Use mudança de base para escrever $\log_7 20$ em termos de logaritmo natural.

Exercícios

9.23 — Para $x, y > 0$, expanda

$$\log_2 \left(\frac{8x^3}{y} \right).$$

9.24 — Para $x > 0$, escreva como um único logaritmo:

$$2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(x + 1).$$

9.25 — Considere

$$E(x) = \log_2(x - 1) + \log_2(x + 2) - \log_2(x + 1).$$

??Determine o domínio da expressão original. ??Nesse domínio, escreva $E(x)$ como um único logaritmo. ??Determine o domínio natural da expressão obtida e explique por que a simplificação não autoriza ampliar o domínio de E .

9.26 — Use apenas a definição de logaritmo para mostrar que

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_a a = 1.$$

Exercícios

9.27 — Sejam $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^{x-1}$. Determine as duas composições com seus domínios. Explique por que as expressões simplificadas não tornam esses domínios iguais.

9.28 — Considere $L(x) = \ln(1 + \sqrt{4 - x^2})$. ??Descreva as etapas que compõem L e determine seu domínio. ??Determine a imagem de L e os pontos em que seus valores extremos são atingidos.

9.29 — *Aprofundamento.* Seja

$$F(x) = \log_{1/2}(3 - 2^x) + 1.$$

??Determine o domínio e justifique a monotonicidade pela ordem das operações. ??Determine a imagem e as assíntotas vertical e horizontal. ??Encontre a inversa de F sobre sua imagem, indicando o domínio da inversa.

9.5 Escalas logarítmicas e aplicações

O logaritmo transforma razões multiplicativas em diferenças. Essa propriedade é particularmente adequada à construção de escalas que comparam grandezas distribuídas por muitas ordens de magnitude.

Exemplo 9.8 — Decibéis

O nível de intensidade sonora, medido em decibéis, pode ser modelado por

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2,$$

em que I é a intensidade do som e I_0 é uma intensidade de referência. Se a intensidade é multiplicada por 100, qual é a variação do nível?

Solução. Se o nível inicial é L , o novo nível é

$$10 \log_{10} \left(\frac{100I}{I_0} \right) = 10 \left(2 + \log_{10} \frac{I}{I_0} \right) = L + 20.$$

Portanto, multiplicar a intensidade por 100 acrescenta 20 decibéis. A escala é logarítmica; isso não significa que a percepção de volume aumente na mesma proporção que a intensidade física. ◀

Exemplo 9.9 – pH

Uma solução tem concentração de íons hidrogênio

$$[H^+] = 2,5 \times 10^{-6} \text{ mol/L}.$$

Usando

$$\text{pH} = -\log_{10}[H^+],$$

calcule o pH.

Solução.

$$\text{pH} = -\log_{10}(2,5 \times 10^{-6}) = 6 - \log_{10}(2,5) \approx 5,60.$$

Uma diferença de uma unidade de pH corresponde a um fator 10 na concentração de H^+ . ◀

Exercícios

9.30 — Retome as funções exponenciais e logarítmicas. Explique a relação de inversão entre $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$, indicando domínio e imagem de cada uma. Uma quantidade é modelada por $N(t) = 800(1/2)^{t/4}$, com $t \geq 0$. Calcule $N(12)$ e interprete o resultado.

9.31 — Após uma fonte sonora ser desligada, a

intensidade do som em uma sala é modelada por

$$I(t) = I_0 e^{-kt}, \quad k > 0.$$

O tempo de reverberação T_{60} é o instante em que a intensidade se reduz a 10^{-6} de seu valor inicial.

Mostre que

$$T_{60} = \frac{6 \ln 10}{k}.$$

Exercícios

9.32 — Calcule ou resolva, indicando as restrições necessárias. $3^{x-1} = 27$. $\ln(e^{2x-1}) = 5$. $\log_3(x-1) = 2$. $\log_2 32$. $\log_{10}(0,001)$. $2^{x+1} = 5$.

Exercícios

9.33 — O valor de um equipamento é modelado por $V(t) = 48\,000(0,82)^t$, em reais, t anos após a compra. Determine o valor após cinco anos e o primeiro ano inteiro em que ele fica abaixo de 15 000 reais.

9.34 — Uma solução tem concentração de íons hidrogênio $[H^+] = 2,5 \times 10^{-6}$ mol/L. Usando $\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$, calcule o pH e compare-o com o de uma solução de pH 5,1. Qual solução é mais ácida? Por qual fator suas concentrações de H^+ diferem?

9.35 — Reescreva

$$\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-3)^3}\right)$$

como combinação de logaritmos. Determine antes o domínio da expressão original.

9.36 — A intensidade de dois ruídos é, respectivamente, $I_1 = 10^{-6}$ W/m² e $I_2 = 4 \cdot 10^{-5}$ W/m². Usando $\beta = 10 \log_{10}(I/10^{-12})$, compare seus níveis em decibéis e explique por que a diferença entre eles não é proporcional à diferença das intensidades.

Relação entre exponencial e logaritmo

A função logarítmica é a inversa da função exponencial. Consequentemente, o domínio de uma corresponde à imagem da outra, e seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$. Em termos algébricos, essa relação aparece nas propriedades dos logaritmos: produtos correspondem a somas, quocientes a diferenças e potências a produtos.

10

Funções trigonométricas

Está escrito em linguagem matemática, e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas.

Galileu Galilei, *Il Saggiatore*

Na geometria elementar, seno e cosseno aparecem inicialmente como relações entre ângulos e lados de triângulos. Para estudá-los como funções de variável real, é necessário estender essa definição a ângulos arbitrários.

A circunferência unitária fornece essa extensão. A cada número real associa-se um percurso orientado sobre a circunferência; as coordenadas do ponto final definem o cosseno e o seno desse número. Periodicidade, sinais, paridade e diversas identidades decorrem das simetrias dessa construção.

10.1 Seno e cosseno na circunferência unitária

Medida em radianos. A medida em radianos de um ângulo é a razão entre o comprimento do arco correspondente e o raio. Na circunferência unitária, essa medida coincide numericamente com o comprimento do arco.

Uma volta completa mede 360° quando se utiliza a medida em graus. A medida em radianos é definida geometricamente. Se um arco de comprimento s pertence a uma circunferência de raio r , a medida do ângulo central correspondente é

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Portanto,

$$s = r\theta.$$

Como a circunferência completa tem comprimento $2\pi r$,

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianos}.$$

Em particular,

$$180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

Quando $r = 1$, acontece o ponto decisivo:

$$\theta = s.$$

No círculo unitário, medir o ângulo em radianos e medir o arco percorrido são a mesma coisa. Assim, em vez de pensar primeiro em um ângulo desenhado e só depois calcular suas razões trigonométricas, podemos começar com qualquer número real x , percorrer um arco de comprimento x e observar onde chegamos. Essa é a ponte entre a geometria do círculo e as funções reais.

Exemplo 10.1

Converta 150° para radianos e $7\pi/6$ radianos para graus.

Solução. As duas conversões usam a mesma proporção

$$180^\circ = \pi.$$

Para passar de graus a radianos, multiplicamos por $\pi/180$:

$$150^\circ = 150 \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

Para voltar, usamos o fator inverso $180^\circ/\pi$:

$$\frac{7\pi}{6} \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ.$$

Não se trata de duas regras diferentes, mas apenas de mudar a unidade em que o mesmo ângulo é medido. ◀

Exercícios

10.1 — Faça as conversões. 120° para radianos. ângulo de $2\pi/3$ radianos.

225° para radianos. $3\pi/4$ para graus. $7\pi/4$ para graus.

10.3 — Uma roda gira com velocidade angular constante de $\pi/3$ rad/s. Quantos radianos e quantas voltas ela percorre em 12 segundos?

10.2 — Uma circunferência tem raio 5 cm. Calcule o comprimento do arco interceptado por um

Com os radianos, a circunferência unitária transforma diretamente números reais em pontos do plano: o próprio número mede o comprimento orientado do arco percorrido.

De ângulo a função. Para cada número real x , a circunferência unitária determina um único ponto P_x . Suas coordenadas são, por definição, $(\cos x, \sin x)$.

Considere a circunferência de centro na origem e raio 1. Fixe

$$U = (1, 0).$$

Para $x > 0$, partimos de U e percorremos a circunferência no sentido anti-horário por um arco de comprimento x . Para $x < 0$, percorremos $|x|$ no sentido horário. Denotaremos por P_x o ponto final desse percurso.

Definição 10.1 — Seno e cosseno

Se

$$P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x),$$

as coordenadas de P_x definem as funções

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad \operatorname{sen} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

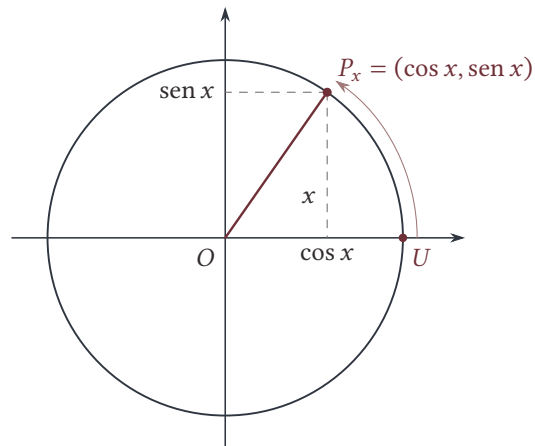


Figura 10.1. No círculo unitário, o cosseno é a coordenada horizontal de P_x e o seno é sua coordenada vertical.

A construção vale para qualquer número real. Uma volta completa tem comprimento 2π , portanto

$$P_{x+2\pi} = P_x.$$

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x}, \quad \boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}.$$

Seno e cosseno são funções periódicas de período 2π . O **período fundamental**, quando existe, é o menor período positivo. Para seno e cosseno ele é 2π : os valores 4π , 6π e os demais múltiplos inteiros positivos também são períodos, mas não são fundamentais.

Se trocamos x por $-x$, percorremos a mesma distância no sentido oposto. Os pontos P_x e P_{-x} são simétricos em relação ao eixo horizontal. Assim,

$$\boxed{\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x}, \quad \boxed{\cos(-x) = \cos x}.$$

O seno é ímpar e o cosseno é par.

Como P_x está na circunferência unitária,

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1.$$

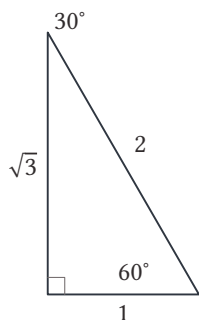
Portanto,

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}.$$

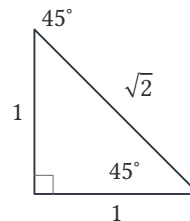
Essa identidade é simplesmente a equação $X^2 + Y^2 = 1$ aplicada ao ponto P_x .

10.1.1 Valores notáveis e sinais

Os valores de seno e cosseno em $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ podem ser deduzidos de dois triângulos retângulos.



Metade de um triângulo equilátero de lado 2.



Triângulo retângulo isósceles.

Figura 10.2. Os dois triângulos que produzem os valores notáveis.

No primeiro triângulo, partimos de um equilátero de lado 2 e traçamos uma altura. Ela divide a base ao meio e, pelo teorema de Pitágoras, tem comprimento $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Portanto,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

O ângulo complementar fornece

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

No triângulo retângulo isósceles de catetos 1, a hipotenusa vale $\sqrt{2}$. Assim,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Reunindo os três casos, no primeiro quadrante temos

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{sen} x$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos x$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

Os demais valores surgem por simetria na circunferência. Os sinais são determinados diretamente pelas coordenadas do ponto $P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x)$:

quadrante	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
$\operatorname{sen} x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+

Exemplo 10.2

Calcule $\sin(5\pi/6)$ e $\cos(5\pi/6)$ a partir da circunferência unitária.

Solução. O ângulo $5\pi/6$ está no segundo quadrante e tem ângulo de referência $\pi/6$. Nesse quadrante, a coordenada horizontal é negativa e a vertical é positiva. Portanto,

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

<

Exercícios

10.4 — Use a circunferência unitária para calcular. $\sin(2\pi/3)$ e $\cos(2\pi/3)$. $\sin(5\pi/4)$ e $\cos(5\pi/4)$. $\sin(11\pi/6)$ e $\cos(11\pi/6)$.

10.5 — Sem usar calculadora, determine o sinal de cada expressão. $\sin(7\pi/6)$. $\cos(4\pi/3)$. $\sin(-\pi/4)$. $\cos(-2\pi/3)$.

10.6 — Use periodicidade para reduzir cada argumento a $[0, 2\pi)$. $\sin(13\pi/6)$. $\cos(9\pi/4)$. $\sin(-7\pi/6)$.

10.7 — Explique geometricamente por que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios

10.8 — Determine as coordenadas de P_x = quais $(\cos x, \sin x)$ para

$$P_x = (0, -1).$$

$$x = \frac{2\pi}{3}, \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

10.10 — Sabendo que $P_x = (3/5, 4/5)$, determine

$$P_{-x}$$

10.9 — Liste todos os números reais x para os e os valores de $\sin(-x)$ e $\cos(-x)$.

10.2 Gráficos de seno e cosseno

A definição na circunferência unitária permite construir diretamente os gráficos de seno e cosseno. À medida que x varia, o ponto P_x percorre a circunferência; sua coordenada vertical fornece os valores de $\sin x$ e sua coordenada horizontal fornece os valores de $\cos x$.

Em uma volta, a coordenada vertical de P_x passa por

$$0, 1, 0, -1, 0$$

nos pontos

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

O cosseno acompanha a coordenada horizontal e passa, nos mesmos instantes, por

$$1, 0, -1, 0, 1.$$



Figura 10.3. Um período de seno e cosseno.

Da construção,

$$\text{Dom}(\text{sen}) = \text{Dom}(\text{cos}) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(\text{sen}) = \text{Im}(\text{cos}) = [-1, 1].$$

Os zeros do seno são os múltiplos inteiros de π ; os zeros do cosseno são os pontos $\pi/2 + k\pi$.

Exercícios

10.11 — Determine domínio, imagem, período fundamental e zeros de $\text{sen } x$ e de $\text{cos } x$.

10.13 — Verifique no círculo unitário e nos gráficos que

$$\cos x = \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

10.12 — Esboce um período de $y = \text{sen } x$ e de $y = \text{cos } x$ marcando primeiro os cinco pontos principais em $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

Interprete a identidade como uma translação horizontal.

Exercícios

10.14 — Em um período $[0, 2\pi]$, indique onde $\text{sen } x$ é positivo, negativo e nulo.

e mínimo de $\text{sen } x$.

10.15 — Em um período $[0, 2\pi]$, indique onde $\text{cos } x$ é positivo, negativo e nulo.

10.17 — Explique por que os gráficos de $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ ficam completamente determinados quando conhecemos apenas um intervalo de comprimento 2π .

10.16 — Determine todos os pontos de máximo

Exercícios

10.18 – Aprofundamento. Dadas $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \pi \llbracket x \rrbracket$, determine os domínios e as imagens de $f \circ g$ e $g \circ f$.

10.3 Identidades trigonométricas fundamentais

A identidade pitagórica decorre diretamente da equação da circunferência unitária. As fórmulas de adição também podem ser obtidas geometricamente.

Proposição 10.1 – Fórmulas de adição

Para todos $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

e

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Demonstração. Começemos com $0 < a, b < \pi/2$. No triângulo da Figura 10.4, a altura $CD = h$ divide o ângulo em C em duas partes, a e b . Os dois triângulos retângulos fornecem

$$CA = \frac{h}{\cos a}, \quad CB = \frac{h}{\cos b},$$

e, multiplicando essas hipotenusas pelos senos correspondentes,

$$AD = \frac{h \sin a}{\cos a}, \quad DB = \frac{h \sin b}{\cos b}.$$

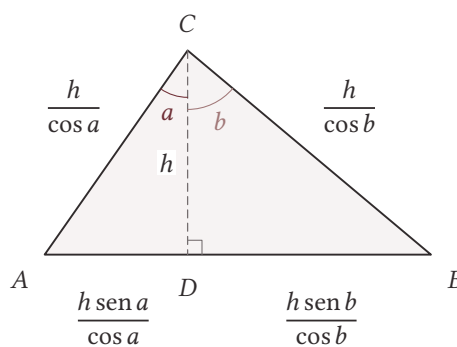


Figura 10.4. A altura divide o triângulo em duas partes. A mesma área também pode ser calculada a partir dos lados CA , CB e do ângulo $a + b$.

Usando a base $AB = AD + DB$, a área é

$$\frac{AB \cdot h}{2} = \frac{h^2}{2} \left(\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \right).$$

Se usamos CA como base, a altura correspondente mede $CB \sin(a + b)$. De fato, quando $a + b$ é agudo, essa relação vem de um triângulo retângulo; quando é obtuso, usamos o ângulo suplementar e $\sin(\pi - (a + b)) = \sin(a + b)$. Para $a + b = \pi/2$, a altura é o próprio lado CB . Assim, a mesma área também é

$$\frac{CA \cdot CB \sin(a + b)}{2} = \frac{h^2 \sin(a + b)}{2 \cos a \cos b}.$$

Igualando as duas expressões e multiplicando por $2 \cos a \cos b / h^2$, obtemos a fórmula do seno da soma para os ângulos agudos a e b .

Para chegar ao cosseno e às diferenças, usaremos apenas as simetrias da circunferência. A fórmula já provada, aplicada a a e $\pi/2 - b$, dá

$$\cos(a - b) = \sin\left(a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$$

Se $a > b$, aplicamos ainda a fórmula do seno a $(a - b) + b$ e isolamos $\sin(a - b)$:

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \frac{\sin a - \cos(a - b) \sin b}{\cos b} \\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b. \end{aligned}$$

Para $a = b$ a igualdade é imediata; para $a < b$, trocamos os dois ângulos e usamos a paridade do seno. A fórmula da diferença vale, portanto, para quaisquer $a, b \in (0, \pi/2)$. Aplicando-a a $\pi/2 - a$ e b ,

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Resta explicar por que não há restrição a ângulos agudos nas fórmulas. Se um ou ambos os ângulos são negativos, escrevemos seus opostos, reduzindo o cálculo a uma soma ou diferença de ângulos não negativos. Usamos então as fórmulas anteriores e $\sin(-t) = -\sin t$, $\cos(-t) = \cos t$. Os casos em que algum ângulo é 0 ou $\pm\pi/2$ seguem diretamente das simetrias de um quarto de volta. Por fim, qualquer ângulo real pode ser escrito como $t + k\pi$, com $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $k \in \mathbb{Z}$. Uma meia-volta muda simultaneamente os sinais do seno e do cosseno:

$$\sin(t + \pi) = -\sin t, \quad \cos(t + \pi) = -\cos t.$$

Acrescentar π a qualquer um dos argumentos muda o sinal dos dois lados de cada fórmula. Logo, as identidades valem para todos os ângulos reais. ■

As fórmulas de diferença foram obtidas no mesmo argumento. Fazendo $a = b = x$ nas fórmulas de adição, obtemos

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

e

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Isolando os quadrados,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

As fórmulas de adição também permitem transformar diferenças de senos e cossenos em produtos. Duas identidades importantes são:

$$\begin{aligned}\sin u - \sin v &= 2 \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right), \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin \left(\frac{u+v}{2} \right) \sin \left(\frac{u-v}{2} \right).\end{aligned}$$

Para deduzir essas identidades, escreva

$$p = \frac{u+v}{2}, \quad q = \frac{u-v}{2}.$$

Então $u = p + q$ e $v = p - q$. Pelas fórmulas de adição e de diferença,

$$\begin{aligned}\sin u - \sin v &= (\sin p \cos q + \cos p \sin q) \\ &\quad - (\sin p \cos q - \cos p \sin q) \\ &= 2 \cos p \sin q.\end{aligned}$$

Substituir p e q dá a primeira identidade. Para o cosseno, a mesma subtração fornece

$$\cos(p+q) - \cos(p-q) = -2 \sin p \sin q,$$

o que dá a segunda.

Em particular,

$$1 - \cos u = 2 \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right).$$

Exemplo 10.3

Mostre que

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Solução. Escrevemos $3x = 2x + x$:

$$\sin(3x) = \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x.$$

Substituindo as fórmulas de ângulo duplo,

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x.\end{aligned}$$

◀

Exemplo 10.4 – Um valor exato pela fórmula de adição

Calcule exatamente $\sin(7\pi/12)$.

Solução. Como $7\pi/12 = \pi/3 + \pi/4$,

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

◀

Exemplo 10.5 – Usando as fórmulas para simplificar

Simplifique

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)}{2 \cos x}, \quad \cos x \neq 0.$$

Solução. Expandindo os dois senos,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) &= (\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y) \\ &\quad - (\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y) \\ &= 2 \cos x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Portanto, no domínio indicado, a expressão simplifica para $\operatorname{sen} y$. ◀**Exercícios**

10.19 — Calcule exatamente. $\operatorname{sen}(5\pi/12)$, $\operatorname{sen}(\pi/12)$, $\cos(\pi/12)$, $\operatorname{sen}(\pi/12)$. **10.20** — Verifique que $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)$ e obtenha dessa igualdade as duas expressões para $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$.

10.21 — Use as fórmulas de soma-produto. **10.22** — Mostre que $\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen} x$ e determine seus zeros em $[0, \pi]$. Reescreva $\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen} x$ como produto e determine seus zeros em $[0, \pi]$.

$$\cos u + \cos v = 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Exercícios**10.23** — Derive as fórmulas de diferença

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

e

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

10.24 — Mostre que

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2 \cos u \cos v.$$

10.25 — Mostre que

$$1 - \cos(2x) = 2 \operatorname{sen}^2 x.$$

10.26 — Use as fórmulas de adição para mostrar as identidades de cofunção

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x.$$

10.4 Amplitude, período e transformações dos gráficos

Os gráficos básicos de seno e cosseno oscilam entre -1 e 1 e repetem-se a cada 2π . Multiplicar valores ou modificar o argumento altera exatamente essas duas características: a escala vertical e a escala horizontal.

Considere, inicialmente,

$$f(x) = A \operatorname{sen}(Bx) \quad \text{ou} \quad f(x) = A \cos(Bx), \quad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

O fator A multiplica todos os valores da função. Por isso, a imagem é $[-|A|, |A|]$ e a **amplitude**, definida como metade da distância entre o valor máximo e o mínimo, é

$$\text{amplitude} = |A|.$$

Quando $A < 0$, ocorre também uma reflexão em relação ao eixo horizontal.

Já o fator B altera a escala horizontal. Uma oscilação completa ocorre quando o argumento varia 2π . O menor deslocamento positivo necessário para isso é

$$T = \frac{2\pi}{|B|}.$$

Esse é o período fundamental tanto de $A \operatorname{sen}(Bx)$ quanto de $A \cos(Bx)$. O valor absoluto é necessário porque o sinal de B apenas muda a orientação com que o ciclo é percorrido. Para o cosseno isso também decorre de sua paridade; para o seno, o sinal pode ser incorporado ao fator A .

Por exemplo, em $g(x) = 2 \operatorname{sen}(3x)$, a amplitude é 2 e o período é $2\pi/3$. Um período pode ser construído marcando seus quartos:

x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$g(x)$	0	2	0	-2	0.

Entre esses pontos, o gráfico conserva a forma suave do seno.

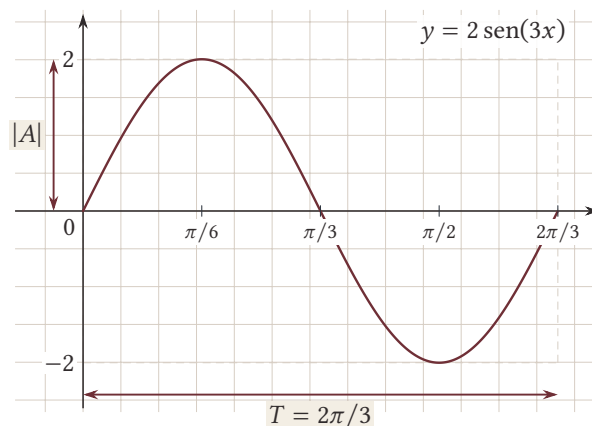


Figura 10.5. O fator A controla a amplitude; o fator B , o período.

Para $B > 0$, os cinco pontos principais de um período podem ser organizados sem novos cálculos:

x	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
$A \operatorname{sen}(Bx)$	0	A	0	$-A$	0
$A \cos(Bx)$	A	0	$-A$	0	A

Se houver translações, usamos as regras já estudadas para gráficos. Na forma

$$F(x) = A \operatorname{sen}(B(x - h)) + k \quad \text{ou} \quad F(x) = A \cos(B(x - h)) + k,$$

a amplitude continua sendo $|A|$, o período continua sendo $2\pi/|B|$, a linha média passa a ser $y = k$ e o gráfico é deslocado horizontalmente por h . Uma expressão $Bx + C$ pode ser escrita como $B(x - h)$ tomando $h = -C/B$.

Exemplo 10.6

Analise a função

$$f(x) = 3 \cos(2(x - \pi/4)) - 1.$$

Determine amplitude, período, deslocamento horizontal, linha média e imagem.

Solução. É útil ler a fórmula de dentro para fora. O termo $x - \pi/4$ desloca o gráfico para a direita em $\pi/4$. O fator 2 dentro do cosseno comprime o ciclo horizontalmente, de modo que

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Fora do cosseno, o fator 3 transforma a oscilação entre -1 e 1 em uma oscilação entre -3 e 3 . Finalmente, subtrair 1 desloca tudo uma unidade para baixo. Assim, a linha média é $y = -1$, a amplitude é 3 e

$$\text{Im } f = [-4, 2].$$

Cada parâmetro atua, portanto, sobre um aspecto diferente do gráfico. ◀

Exemplo 10.7 — Reconstruindo um modelo periódico

Uma oscilação tem valor máximo 7, valor mínimo -1 e período fundamental 6. No instante $t = 0$, seu valor é 5 e está aumentando. Determine A , B , D e φ no modelo

$$f(t) = D + A \sin(Bt + \varphi), \quad A, B > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Solução. O máximo e o mínimo determinam primeiro a linha média e a amplitude:

$$D = \frac{7 + (-1)}{2} = 3, \quad A = \frac{7 - (-1)}{2} = 4.$$

Como o período é 6,

$$\frac{2\pi}{B} = 6 \implies B = \frac{\pi}{3}.$$

Resta determinar a fase. A condição $f(0) = 5$ fornece

$$3 + 4 \sin \varphi = 5,$$

logo

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

No intervalo $[0, 2\pi)$ há duas possibilidades:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

O valor inicial, sozinho, não distingue essas duas fases. A informação de que a oscilação está aumentando resolve a ambiguidade: perto de $\pi/6$ o seno cresce, enquanto perto de $5\pi/6$ ele decresce. Portanto,

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

e um modelo é

$$f(t) = 3 + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Um modelo escrito com cosseno seria igualmente possível; seno e cosseno diferem apenas por uma mudança de fase. O que os dados determinam é a oscilação, não uma forma única de escrevê-la. $\triangleleft$

Exercícios

10.27 — Determine a amplitude e o período e um quarto de período. $y = -2 \cos(3x)$. $y = -3 \operatorname{sen}(-4x)$. $y = 3 \cos(2x)$. $y = 2 \operatorname{sen}(2x + \pi/2)$. $y = \cos^2 x - \sin^2 x$. $y = -3 \operatorname{sen}(\pi x + \pi)$. Esboce um período de cada função. Antes de desenhar, marque os cinco pontos separados por

Exercícios

10.28 — Determine amplitude, período, linha média e deslocamento horizontal de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(3(x - \pi/6)) + 4.$$

10.29 — Determine amplitude, período e imagem de

$$g(x) = -4 \cos(\pi x) + 2.$$

10.30 — Reescreva

$$h(x) = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi) + 1$$

na forma $A \operatorname{sen}(B(x - h_0)) + k$ e identifique os parâmetros.

10.31 — Uma função cossenoidal tem amplitude 5, período 4π e linha média $y = -2$. Dê um exemplo de fórmula com essas características.

10.32 — Considere as duas fórmulas

$$f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1, \quad g(x) = 3 \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) + 1.$$

Mostre que f e g definem a mesma função. Determine amplitude, período, linha média e imagem dessa função. Explique por que os deslocamentos aparentes nas duas fórmulas são diferentes, embora o gráfico seja o mesmo.

10.5 Tangente e funções associadas

Domínio das funções associadas. Tangente e secante envolvem divisão por $\cos x$; cotangente e cosecante, por $\sin x$. Os zeros desses denominadores devem ser excluídos do domínio.

Seno e cosseno estão definidos para todo número real. As demais funções trigonométricas serão obtidas a partir deles por quocientes e recíprocos. Consequentemente, seus domínios dependem dos zeros dos denominadores envolvidos.

A tangente admite ainda uma interpretação geométrica: ela fornece a inclinação do raio que liga a origem ao ponto correspondente da circunferência.

10.5.1 Tangente e secante

Definição 10.2

Nos pontos em que $\cos x \neq 0$, definimos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Assim,

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) = \operatorname{Dom}(\sec) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A definição também possui uma interpretação geométrica direta. Se

$$P_x = (\cos x, \operatorname{sen} x)$$

e $\cos x \neq 0$, então o coeficiente angular da reta que passa por $O = (0, 0)$ e P_x é

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Assim, a tangente pode ser lida como a inclinação do raio OP_x sempre que esse raio não é vertical.

Há uma construção que reúne tangente e secante e explica seus nomes. Para $0 < x < \pi/2$, prolongue o raio OP_x até encontrar a reta vertical $X = 1$, que é tangente à circunferência no ponto $(1, 0)$. Se chamarmos o ponto de interseção de T , então

$$T = (1, \operatorname{tg} x).$$

O triângulo com vértices O , $(1, 0)$ e T é retângulo. Sua base mede 1, sua altura mede $\operatorname{tg} x$ e, pelo teorema de Pitágoras,

$$OT = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sec x.$$

No primeiro quadrante, portanto, a tangente aparece como a altura do ponto T e a secante como o comprimento do segmento OT .

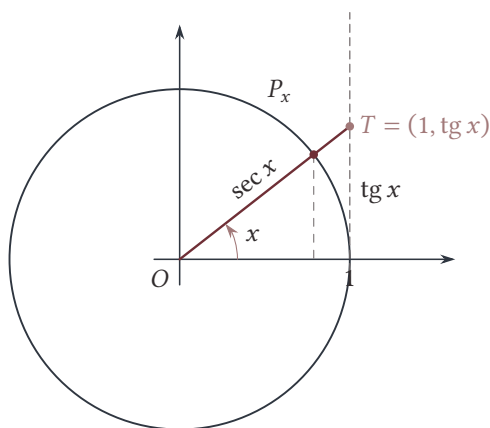


Figura 10.6. A reta tangente $X = 1$ transforma o raio de ângulo x no ponto $T = (1, \operatorname{tg} x)$. No primeiro quadrante, $OT = \sec x$.

Quando $\cos x = 0$, o raio é vertical e não encontra a reta $X = 1$ em um ponto finito. Esse é exatamente o motivo geométrico para tangente e secante não estarem definidas nesses valores.

A tangente tem período π , pois

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Em cada intervalo entre dois zeros consecutivos do cosseno, seu gráfico forma um ramo. As retas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

são assíntotas verticais.

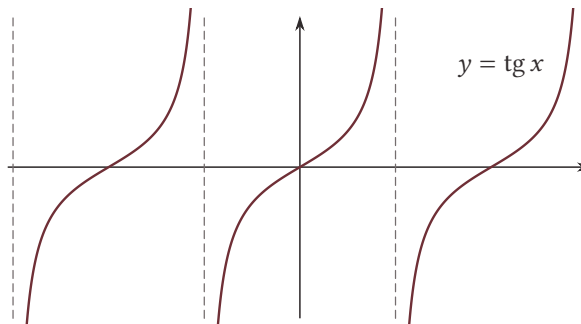


Figura 10.7. A tangente tem período π e assíntotas verticais nos zeros do cosseno.

A secante é o recíproco da coordenada horizontal de P_x . Portanto, quando P_x se aproxima dos pontos superior ou inferior da circunferência, essa coordenada se aproxima de zero e o módulo da secante cresce. Como $|\cos x| \leq 1$, onde a secante está definida temos

$$|\sec x| \geq 1.$$

Portanto,

$$\operatorname{Im}(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Exemplo 10.8

Determine o domínio de

$$g(x) = \sec(2x)$$

e explique geometricamente por que esses pontos precisam ser excluídos.

Solução. A secante exige $\cos(2x) \neq 0$. Os zeros do cosseno ocorrem quando

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

isto é,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nesses pontos o denominador da secante se anula; no gráfico, eles correspondem às retas verticais que separam seus ramos. ◀

10.5.2 Cotangente e cossecante

Definição 10.3

Nos pontos em que $\sin x \neq 0$, definimos

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Assim,

$$\operatorname{Dom}(\cotg) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cosec}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

A cotangente troca os papéis das coordenadas:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tg x},$$

nos pontos em que ambas as expressões estão definidas.

A construção anterior também tem uma versão horizontal. Para $0 < x < \pi/2$, prolongue o raio OP_x até a reta $Y = 1$, tangente à circunferência em $(0, 1)$. O ponto de interseção é

$$C = (\cotg x, 1),$$

e o comprimento OC vale $\operatorname{cosec} x$. Assim, tangente/secante e cotangente/cossecante são construções simétricas: numa usamos a reta tangente vertical $X = 1$; na outra, a reta tangente horizontal $Y = 1$.

No primeiro quadrante, esses comprimentos coincidem com os próprios valores de $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$. Fora dele, as fórmulas algébricas preservam os sinais corretos, enquanto comprimentos geométricos correspondem a valores absolutos.

A cotangente tem período π . Seus zeros ocorrem quando $\cos x = 0$, isto é,

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e as retas $x = k\pi$ são assíntotas verticais, pois nesses pontos o seno se anula.

A cossecante, como recíproco do seno, tem o mesmo sinal do seno e satisfaz

$$|\operatorname{cosec} x| \geq 1$$

onde está definida. As retas $x = k\pi$ são suas assíntotas verticais. De modo análogo, a secante tem o mesmo sinal do cosseno e suas assíntotas são $x = \pi/2 + k\pi$.

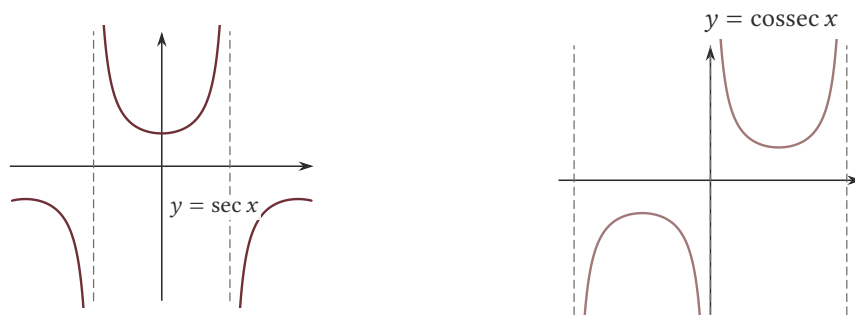


Figura 10.8. Secante e cossecante são recíprocos de cosseno e seno. Os zeros do denominador se tornam assíntotas verticais, e os gráficos permanecem fora da faixa $-1 < y < 1$.

Exercícios

10.33 — Determine o domínio natural. $\operatorname{tg} x$. **10.34** — Calcule exatamente. $\operatorname{tg}(\pi/4)$. $\sec(3x - \pi/4)$. $\cotg(x - \pi/3)$. $\operatorname{cosec}(3x)$. $\operatorname{tg}(5\pi/6)$. $\sec(2\pi/3)$. $\operatorname{cosec}(7\pi/6)$.

10.35 — Mostre que tg é ímpar e que $\sec$ é par.

Exercícios

10.36 — Verifique as identidades e indique exatamente onde valem. $\cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$. $1 +$

Quadro de consulta

Na tabela, o domínio é $\mathbb{R}$ sem os pontos indicados na segunda coluna, e k percorre $\mathbb{Z}$. Para tangente, cotangente, secante e cossecante, cada ponto excluído c corresponde à assíntota vertical $x = c$. Seno e cosseno não possuem assíntotas. A coluna T_0 registra o período fundamental.

Função	Pontos excluídos do domínio	Imagem	T_0	Paridade
$\operatorname{sen} x$	nenhum	$[-1, 1]$	2π	ímpar
$\operatorname{cos} x$	nenhum	$[-1, 1]$	2π	par
$\operatorname{tg} x$	$\pi/2 + k\pi$	$\mathbb{R}$	π	ímpar
$\cotg x$	$k\pi$	$\mathbb{R}$	π	ímpar
$\sec x$	$\pi/2 + k\pi$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	2π	par
$\operatorname{cosec} x$	$k\pi$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	2π	ímpar

10.6 Simplificação de expressões trigonométricas

Uma identidade trigonométrica permite substituir uma expressão por outra equivalente, mas a manipulação algébrica não deve apagar a informação de domínio. Esse cuidado é especialmente importante quando aparecem quocientes: um fator pode cancelar algebricamente sem que os pontos em que ele era zero voltem a pertencer à expressão original.

Por exemplo, se $\operatorname{sen} x \neq 0$,

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x.$$

A expressão simplificada está definida para todo x , mas a original não está definida nos múltiplos inteiros de π ; a igualdade vale apenas fora desses pontos. Do mesmo modo, se $\operatorname{cos} x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sec x} = \frac{\operatorname{sen} x / \operatorname{cos} x}{1 / \operatorname{cos} x} = \operatorname{sen} x.$$

Novamente, a simplificação não acrescenta ao domínio os pontos excluídos no início.

Exemplo 10.9

Simplifique

$$E = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}.$$

Solução. Antes de simplificar, registramos o domínio. Os denominadores exigem $1 + \cos x \neq 0$ e $1 - \cos x \neq 0$, isto é, $\cos x \neq \pm 1$.

Agora podemos reunir as duas frações:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x) + \operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 \operatorname{cosec} x. \end{aligned}$$

A expressão final é mais curta, mas deve ser entendida no domínio da expressão inicial. Os pontos em que $\operatorname{sen} x = 0$ permanecem excluídos. ◀

Exemplo 10.10

Simplifique

$$E = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\sec x \operatorname{cosec} x}.$$

Solução. Quando $\operatorname{sen} x \cos x \neq 0$,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x},$$

enquanto

$$\sec x \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

Logo, $E = 1$ em todo o domínio da expressão original. ◀

Exemplo 10.11

Simplifique

$$E = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}.$$

Solução. No domínio original, $\operatorname{sen} x \neq \pm 1$. Assim,

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x \sec x. \end{aligned}$$

◀

Exemplo 10.12

Simplifique

$$E = \frac{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}{2 \operatorname{sen} x}, \quad \operatorname{sen} x \neq 0.$$

Solução. Pelas fórmulas de adição,

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y.$$

Portanto, $E = \cos y$ no domínio indicado. ◀**Exercícios****10.37** — Considere

$$F(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

??Determine o domínio da expressão original e simplifique-a. ??Compare esse domínio com o da expressão simplificada. ??Resolva $F(x) = 0$ e explique o que aconteceria se as restrições originais fossem esquecidas.

10.38 — Verifique cada identidade no domínio

$$\begin{aligned} \text{em que os dois lados estão definidos. } & \operatorname{sect} - \cos t = \operatorname{tg} t \operatorname{sen} t. \quad ?? \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{cosec} y} + \frac{\cos y}{\sec y} = 1. \\ & \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}. \quad ?? \operatorname{cosec} t - \operatorname{sen} t = \cos t \cotg t. \quad ?? \operatorname{sen}(3t) = 3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t. \\ & ?? \operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

Exercícios

10.39 — Determine a imagem de $\sec x$ e de $\operatorname{cosec} x$ a partir das desigualdades $|\cos x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.

10.40 — Mostre que a cotangente tem período π .

10.41 — Determine o sinal de $\operatorname{tg} x$ em cada quadrante.

Escolha da forma algébrica

Uma identidade trigonométrica pode ser empregada para colocar uma expressão em uma forma mais adequada ao problema considerado. Dependendo da expressão, pode ser conveniente preservar um fator, reduzir potências ou transformar produtos em somas.

Exemplo 10.13 — Três maneiras de reconhecer a estrutura

Reescreva as expressões abaixo de uma forma que destaque uma estrutura simples:

$$A = \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x, \quad B = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x, \quad C = \operatorname{sen}(3x) \cos x.$$

Solução. Em A , a potência do seno é ímpar. Convém separar um fator $\sin x$ e converter o restante usando $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\begin{aligned} A &= \sin x \sin^2 x \cos^2 x \\ &= \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \\ &= \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x). \end{aligned}$$

A expressão ficou escrita como um fator $\sin x$ multiplicando um polinômio em $\cos x$.

Em B , as duas potências são pares. A identidade de ângulo duplo é mais natural:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4x)).$$

Em C , os argumentos são diferentes. Das fórmulas de adição,

$$\sin(u + v) + \sin(u - v) = 2 \sin u \cos v.$$

Tomando $u = 3x$ e $v = x$,

$$\sin(3x) \cos x = \frac{1}{2} (\sin(4x) + \sin(2x)).$$

Os três cálculos usam identidades conhecidas, mas com objetivos diferentes: preservar um fator, reduzir potências ou transformar um produto em soma. ◀

Exercícios

10.42 — Reorganize

$$\sin^5 x \cos^4 x$$

de modo a deixar um único fator $\sin x$ e escrever todo o restante apenas em termos de $\cos x$.

10.43 — Reorganize

$$\tan^3 x \sec^5 x$$

de modo a deixar em evidência um fator $\sec x \tan x$ e escrever o fator restante apenas em termos de $\sec x$.

10.44 — Use identidades de produto e soma para reescrever. ?? $\sin(5x) \cos(2x)$ como soma de senos. ?? $\cos(3x) \cos x$ como soma de cossenos. ?? $\sin^2 x \cos^2 x$ usando apenas uma constante e $\cos(4x)$.

10.7 Modelos periódicos

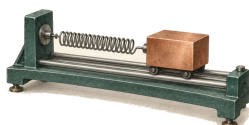
Fenômenos que repetem seus estados em intervalos regulares podem ser descritos por funções periódicas. Nos modelos baseados em seno ou cosseno, amplitude, período, linha média e fase devem ser determinados a partir das características do fenômeno considerado.

Exemplo 10.14 — Massa presa a uma mola

Em um modelo idealizado de massa presa a uma mola, a posição em relação ao equilíbrio é

$$s(t) = 0,08 \cos(4t),$$

com s em metros e $t \geq 0$ em segundos. Determine a amplitude, o período e os instantes em que a massa passa pela posição de equilíbrio.

Solução.

A amplitude é 0,08 metro, ou 8 centímetros. Como o argumento aumenta 2π quando o tempo aumenta T , temos $4T = 2\pi$ e, portanto, $T = \pi/2$ segundo. A massa está no equilíbrio quando $s(t) = 0$, isto é,

$$\cos(4t) = 0 \iff 4t = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Logo,

$$t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4},$$

para os inteiros k que tornam $t \geq 0$. Neste caso, $k = 0, 1, 2, \dots$

◀

Exercícios

10.45 — Uma roda-gigante tem raio 18 m, seu centro está a 20 m do solo e completa uma volta a cada 40 s. Um passageiro inicia no ponto mais baixo. Dê uma função que modele sua altura.

10.46 — A temperatura de uma câmara varia periodicamente entre 16°C e 24°C , com período de 8 horas. Determine a amplitude e a linha média e dê um modelo cossenoidal que comece no valor máximo.

10.47 — Uma maré é modelada por

$$h(t) = 2,5 + 1,2 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

com h em metros e t em horas. Determine altura média, amplitude e período.

10.48 — Um sinal sonoro puro é modelado por

$$s(t) = A \cos(2\pi ft), \quad f > 0.$$

Mostre que seu período é $1/f$.

10.49 — Uma oscilação senoidal tem máximo 9, mínimo 1 e período fundamental 10. No instante $t = 0$, seu valor é 3 e está diminuindo. ??Determine A , B , D e φ no modelo $f(t) = D + A \sin(Bt + \varphi)$, com $A, B > 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$. ??Explique por que informar apenas $f(0) = 3$ não determinaria a fase.

??Determine o primeiro instante $t \geq 0$ em que ocorre um mínimo.

10.50 — A tensão de uma rede elétrica idealizada é modelada por

$$V(t) = 170 \operatorname{sen}(120\pi t),$$

com t em segundos. Determine a amplitude, o período e a frequência da oscilação.

10.51 — O número médio de horas de luz por dia em certa localidade é modelado, de forma simplificada, por

$$D(t) = 12 + 2,5 \cos\left(\frac{2\pi}{365}(t - 172)\right),$$

em que t é o número de dias após o início do ano.

Determine a linha média, a amplitude, o período e o instante em que o modelo prevê o máximo.

10.8 Funções trigonométricas inversas

Seno, cosseno e tangente repetem seus valores. Por exemplo, há infinitos ângulos com seno igual a $1/2$. Assim, a pergunta “qual é o ângulo cujo seno é $1/2$?” não possui resposta única enquanto considerarmos toda a reta.

Para construir uma inversa, precisamos escolher um trecho do gráfico em que cada valor apareça uma única vez. Fazemos aqui o mesmo tipo de restrição que apareceu nas potências pares: restringimos o domínio a um intervalo em que a função seja bijetora e então invertemos essa restrição.

As escolhas usuais são as seguintes:

Função	domínio escolhido	imagem	inversa
seno	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	$\arcsen$
cosseno	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$\arccos$
tangente	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\mathbb{R}$	arctg

A imagem de cada restrição é o domínio da inversa; o intervalo escolhido é a imagem da inversa. Outros intervalos poderiam ser usados, mas dariam outras escolhas de ângulo.

Por exemplo, $\arcsen(1/2)$ é o único ângulo de $[-\pi/2, \pi/2]$ cujo seno vale $1/2$: portanto, $\arcsen(1/2) = \pi/6$. A função **arco-seno** inverte o seno nesse intervalo, onde ele é estritamente crescente. Assim,

$$\operatorname{sen}(\arcsen x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\arcsen(\operatorname{sen} x) = x \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2).$$

Exemplo 10.15

Calcule

$$\arcsen\left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$$

e explique por que o resultado não é $3\pi/4$.

Solução. Primeiro calculamos o seno:

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Agora vem o ponto essencial: $\arcsen$ não procura todos os ângulos com esse seno. Ele devolve o único ângulo do intervalo escolhido $[-\pi/2, \pi/2]$. Nesse intervalo, o ângulo correspondente é $\pi/4$. Portanto,

$$\arcsen\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

O valor $3\pi/4$ não é recuperado porque ele está fora do ramo usado para definir a inversa. Assim, $\arcsen(\sin x) = x$ somente quando x pertence a esse intervalo. $\triangleleft$

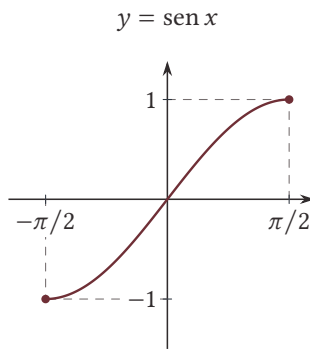


Figura 10.9. A função seno em $[-\pi/2, \pi/2]$

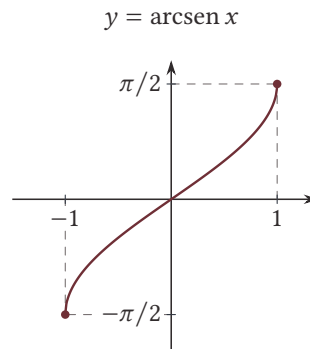


Figura 10.10. A função arco-seno

A mesma construção vale para cosseno e tangente. A função **arco-cosseno** inverte o cosseno em $[0, \pi]$, onde ele é estritamente decrescente e assume todos os valores de $[-1, 1]$:

$$\cos(\arccos x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad \arccos(\cos x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

A função **arco-tangente** inverte a tangente em $(-\pi/2, \pi/2)$, intervalo em que ela é estritamente crescente e assume todos os valores reais:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2).$$

Em ambos os casos, como no par seno/arco-seno mostrado acima, o gráfico da função inversa é o reflexo do gráfico da função restringida em relação à reta $y = x$.

Exemplo 10.16 – O intervalo principal do arco-cosseno

Descreva $F(x) = \arccos(\cos x)$ para $-\pi \leq x \leq 2\pi$ e calcule $F(7\pi/6)$.

Solução. O arco-cosseno deve devolver um ângulo de $[0, \pi]$. Se $-\pi \leq x \leq 0$, a paridade fornece $\cos x = \cos(-x)$, e $-x$ pertence ao intervalo principal. Se $0 \leq x \leq \pi$, o próprio x já está nesse intervalo. Finalmente, para $\pi \leq x \leq 2\pi$, vale $\cos x = \cos(2\pi - x)$, com $2\pi - x \in [0, \pi]$. Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 2\pi - x, & \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Em particular, $F(7\pi/6) = 5\pi/6$. O cosseno preserva o valor procurado, mas a inversa escolhe seu representante no intervalo principal. $\triangleleft$

Exemplo 10.17 — Arco-tangente e composição algébrica

Calcule $\arctg(\operatorname{tg}(5\pi/3))$ e reescreva $G(x) = \operatorname{sen}(\arctg(2x - 1))$ usando apenas operações algébricas.

Solução. A tangente tem período π , e $5\pi/3 - 2\pi = -\pi/3$ pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim,

$$\arctg\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Para a segunda parte, ponha $\theta = \arctg(2x - 1)$. Então $\operatorname{tg} \theta = 2x - 1$ e $-\pi/2 < \theta < \pi/2$; em particular, $\cos \theta > 0$. Da identidade $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2x - 1)^2}}.$$

Como $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{tg} \theta \cos \theta$, concluímos que

$$G(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{1 + (2x - 1)^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

O sinal positivo da raiz foi determinado pelo intervalo de θ . O numerador preserva o sinal do seno: $G(x)$ é negativo para $x < 1/2$, nulo em $1/2$ e positivo para $x > 1/2$. $\triangleleft$

As restrições impedem que a inversa devolva um ângulo fora do intervalo escolhido. Por exemplo, $5\pi/6$ tem seno $1/2$, mas

$$\arcsen(\operatorname{sen}(5\pi/6)) = \arcsen(1/2) = \pi/6.$$

É o mesmo cuidado com o domínio que apareceu em $\sqrt{x^2} = |x|$. Inverter uma função também não significa tomar seu recíproco: $\arcsen x$ não é $1/\operatorname{sen} x$.

Exercícios

10.52 — Indique domínio e imagem de $\arcsen$, **10.53** — Explique por que $\arcsen x$ não significa $\arccos$ e $\arctg$. $1/\operatorname{sen} x$ e dê o nome da função $1/\operatorname{sen} x$.

Exercícios

10.54 — Calcule

$$\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \arctg(-1).$$

10.56 — Calcule

$$\arctg\left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right).$$

10.55 — Calcule

$$\operatorname{sen}\left(\arccos \frac{3}{5}\right).$$

10.57 — Determine o domínio da função

$$f(x) = \arcsen(2x - 1).$$

Exercícios

10.58 — Determine as expressões nos intervalos indicados e justifique as escolhas de sinal e de ramo. $\arccos(\cos x)$ para $\pi \leq x \leq 3\pi$. $\arctg(\operatorname{tg} x)$ para $-3\pi/2 < x < -\pi/2$. $\operatorname{sen}(\arccos x)$ e $\cos(\arcsen x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.

10.59 — *Aprofundamento.* Considere

$$H(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Mostre que o argumento do arco-cosseno pertence a $(-1, 1]$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e determine o domínio de H . Tome $\theta = \arctg|x|$. Determine o intervalo de 2θ e use a fórmula do cosseno do ângulo duplo para calcular $\cos(2\theta)$. Conclua que $H(x) = 2 \arctg|x|$ e determine a imagem de H .

10.9 Modelos geométricos

As funções trigonométricas aparecem também em problemas nos quais uma grandeza depende de uma direção. Nesses casos, é necessário identificar o triângulo, a projeção ou a distância que representa corretamente a situação. Feita essa escolha, seno, cosseno e tangente expressam as relações geométricas entre as grandezas envolvidas.

Exemplo 10.18 — Altura de um prédio

De um ponto situado a 35 m de um prédio, o ângulo de elevação até o topo é 58° . A câmera está a 1,6 m do chão. Estime a altura do prédio.

Solução. O triângulo retângulo relevante não começa no chão, mas na altura da câmera. O cateto horizontal mede 35 m e o cateto vertical mede $H - 1,6$, onde H é a altura total do prédio. Portanto,

$$\operatorname{tg} 58^\circ = \frac{H - 1,6}{35}.$$

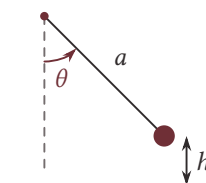
Isolando H ,

$$H = 1,6 + 35 \operatorname{tg} 58^\circ \approx 57,6 \text{ m}.$$

O termo 1,6 aparece porque a tangente fornece a diferença de altura entre a câmera e o topo. Só depois acrescentamos a altura da câmera em relação ao solo. ◀

Exercícios

10.60 — Para $a > 0$, um pêndulo de comprimento a é afastado de um ângulo θ da vertical, como na figura.



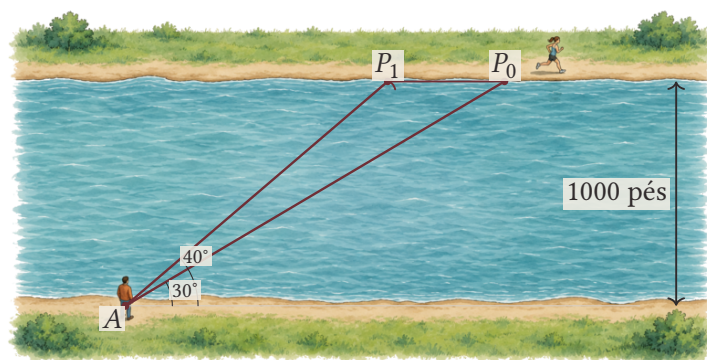
Obtenha a elevação vertical da massa em relação à posição mais baixa e indique um domínio adequado para θ em uma oscilação sem voltas completas.

10.61 — Um observador está a 40 m da base de uma torre. O ângulo de elevação até o topo é 37° , e seus olhos estão a 1,7 m do chão. Estime a al-

tura da torre, explicitando o modelo geométrico empregado.

10.62 — Após a decolagem, um avião sobe em linha reta, formando um ângulo de 20° com a horizontal, com velocidade de 200 pés por segundo. Quanto tempo ele leva para atingir uma altitude de 10 000 pés?

10.63 — Um observador está no ponto A , em uma das margens retas de um rio de 1000 pés de largura. Quando vê pela primeira vez uma corredora na margem oposta, a linha de visão forma um ângulo de 30° com a margem. Um minuto depois, esse ângulo é de 40° . Supondo que ela corra em linha reta, com velocidade constante e na direção indicada, determine sua velocidade.



Exercícios

10.64 — Uma escada de 6 m está apoiada numa parede vertical e forma um ângulo de 65° com o chão. A que altura a escada toca a parede?

10.65 — Uma rampa sobe 1,2 m ao longo de um deslocamento horizontal de 8 m. Determine o ân-

gulo que a rampa forma com a horizontal.

10.66 — Uma árvore projeta uma sombra de 14 m quando o ângulo de elevação do Sol é 38° . Estime a altura da árvore em terreno horizontal.

Síntese

A construção desenvolvida neste capítulo parte da circunferência unitária. Seno e cosseno são definidos pelas coordenadas de seus pontos; tangente, secante, cotangente e cossecante são obtidas por quocientes e recíprocos; para definir as funções inversas, restringem-se os domínios a intervalos de injetividade. A descrição completa dessas funções envolve, assim, sua origem geométrica, seus domínios, suas propriedades algébricas e seus gráficos.

11

Sequências

Segure o infinito na palma da mão e a eternidade em uma hora.

William Blake, *Augúrios da Inocência*

11.1 Conceitos Básicos

Uma sequência pode ser apresentada como uma lista ordenada de números. Do ponto de vista que adotaremos, porém, convém considerá-la como uma função de domínio discreto. As duas descrições são equivalentes, mas cada uma destaca aspectos diferentes do mesmo objeto.

Os primeiros termos de uma sequência podem sugerir um padrão. Para estudar seu comportamento, entretanto, interessa sobretudo aquilo que permanece verdadeiro quando o índice se torna suficientemente grande. Chamaremos informalmente de **cauda** da sequência o que resta depois de desprezarmos um número finito de termos iniciais.

No gráfico, isso corresponde a considerar o comportamento dos pontos para índices cada vez maiores.

Uma **sequência real** é uma função

$$a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Para cada natural positivo n , escrevemos $a_n := a(n)$. Assim, a_1 é o primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo e, em geral, a_n é o seu n -ésimo termo. Denotaremos a sequência por (a_n) ou, quando quisermos explicitar o índice inicial, por $(a_n)_{n=1}^\infty$.

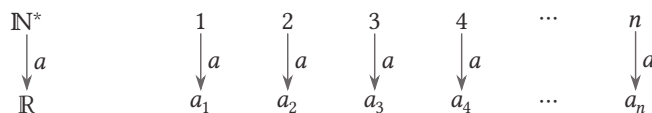


Figura 11.1. A sequência (a_n) associa a cada natural n um real a_n .

Às vezes será conveniente começar a indexação em outro inteiro k . Também chamaremos de sequência uma função definida em $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ e usaremos a notação $(a_n)_{n=k}^\infty$ para deixar claro o índice a partir do qual ela está definida.

Como qualquer função, uma sequência pode ser especificada por uma regra que determine seu n -ésimo termo. Mas a notação $a_1, a_2, a_3, \dots$ também preserva algo que a escrita funcional tende a esconder: existe uma ordem entre os valores, dada pelos índices. Essa ordem permitirá falar em termos consecutivos, crescimento e comportamento da cauda.

Exemplo 11.1 – Exemplos

1. Os primeiros termos da sequência $(a_n) = (1/n)_{n=1}^{\infty}$ são:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1/2 \quad a_3 = 1/3 \quad a_4 = 1/4 \quad a_5 = 1/5$$

Essa sequência também pode ser representada como:

$$(1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots)$$

2. Os quatro primeiros termos da sequência $(b_n) = \left(\frac{n^3}{3^n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ são:

$$b_1 = \frac{1^3}{3^1+1} = \frac{1}{4} \quad b_2 = \frac{2^3}{3^2+1} = \frac{8}{10} \quad b_3 = \frac{3^3}{3^3+1} = \frac{27}{28} \quad b_4 = \frac{64}{82}$$

3. Os primeiros termos da sequência de termo geral $c_n = \frac{n!}{n^n}$ são:

$$c_1 = \frac{1!}{1^1} = 1 \quad c_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2} \quad c_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

4. Seja (d_n) a sequência especificada pela regra $d_n = (-1)^n$. Os primeiros termos dessa sequência são:

$$d_1 = (-1)^1 = -1 \quad d_2 = (-1)^2 = 1 \quad d_3 = (-1)^3 = -1$$

e de modo geral $d_{2n} = 1$ e $d_{2n+1} = -1$. E assim podemos representar essa sequência por:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$$

5. Seja (e_n) a sequência especificada pela regra $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Os primeiros termos dessa sequência são: $e_1 = (1 + 1)^1 = 2$ $e_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$ $e_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \approx 2.37$

$$e_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \approx 2.44 \quad e_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 \approx 2.49 \quad e_6 = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 \approx 2.52$$

Como uma sequência é uma função, também podemos representá-la graficamente. Seu gráfico é formado pelos pontos (n, a_n) , com $n \in \mathbb{N}^*$. A diferença em relação ao gráfico de uma função de variável real é importante: aqui a primeira coordenada assume apenas valores inteiros, de modo que o gráfico é um conjunto discreto de pontos.

n	$a_n = 1/n$
1	1.00
2	0.50
3	0.33
4	0.25
5	0.20

Exemplo 11.2

Gráfico da sequência

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Solução. Para construir o gráfico de

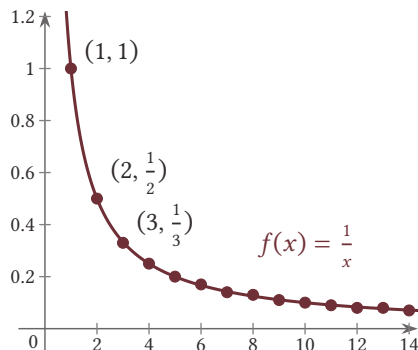
$$a_n = \frac{1}{n},$$

marcamos no plano os pontos $(n, 1/n)$. A tabela abaixo mostra os cinco primeiros termos. Ela já sugere uma tendência, mas ainda descreve apenas um número finito de valores.

Há outra maneira útil de enxergar esse gráfico. A sequência é a restrição aos naturais positivos da função

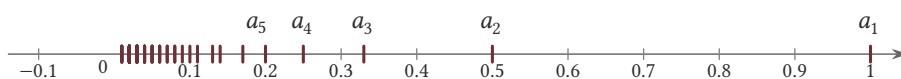
$$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Portanto, seus pontos são exatamente os pontos do gráfico de f cuja primeira coordenada é um número natural. À medida que n cresce, os pontos descem e se acumulam visualmente perto do eixo

**Figura 11.2.** Gráfico da sequência $1/n$

horizontal. A frase “os termos se aproximam de 0” parece descrever bem o desenho, mas ainda contém uma palavra imprecisa: quão próximos precisam estar? E a partir de qual índice? Essas perguntas conduzirão à definição de limite. ◀

Também podemos representar apenas os valores a_n sobre a reta real, identificando a qual índice corresponde cada ponto. Para a sequência $a_n = 1/n$, obtemos:



Exemplo 11.3

Gráfico da sequência $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Solução. A sequência

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

alterna de sinal. Para n par, seus pontos pertencem ao gráfico de $f(x) = 1/\sqrt{x}$; para n ímpar, pertencem ao gráfico de $g(x) = -1/\sqrt{x}$.

O desenho mostra duas informações diferentes ao mesmo tempo. Os termos não crescem nem decrescem de maneira monótona, pois saltam de um lado para outro do eixo. No entanto, a distância de cada ponto ao eixo horizontal diminui. Assim, os sinais oscilam, mas o módulo dos termos se contrai. ◀

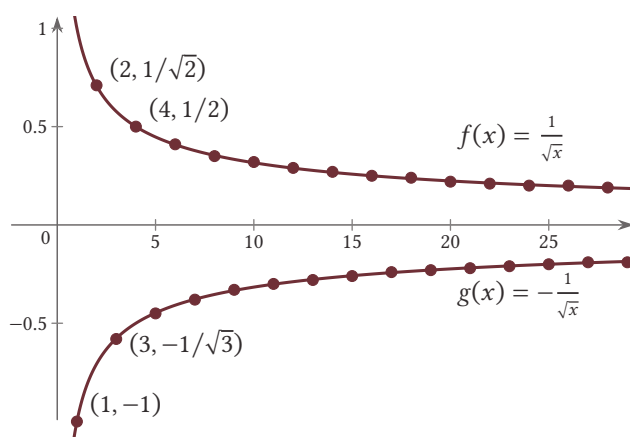


Figura 11.3. Gráfico da sequência $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Sequências Definidas Recursivamente

Outra possibilidade é definir uma sequência **recursivamente**: especificamos alguns termos iniciais e usamos os termos já conhecidos para construir os seguintes.

Considere, por exemplo,

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

A regra determina cada termo a partir do anterior:

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},$$

e, em geral,

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 \cdots \sqrt{2\sqrt{2}}}}_{n \text{ raízes}}.$$

n	a_n
1	1.41421
2	1.68179
3	1.83401
4	1.91521
5	1.95714

A estrutura lembra a indução matemática: há um caso inicial e uma regra que permite passar de uma etapa à seguinte.

A tabela abaixo contém o valor aproximado dos primeiros termos dessa sequência.

O gráfico construído a partir desses valores sugere três fatos distintos. Os pontos parecem subir da esquerda para a direita; parecem permanecer abaixo da reta horizontal $y = 2$; e parecem ficar cada vez mais próximos dessa reta.

Essas três observações não são a mesma coisa. A primeira diz respeito à *monotonicidade*; a segunda, à existência de uma *cota*; a terceira, ao comportamento da cauda. O exemplo é útil justamente porque antecipa, em uma única figura, as três ideias que iremos separar e estudar.

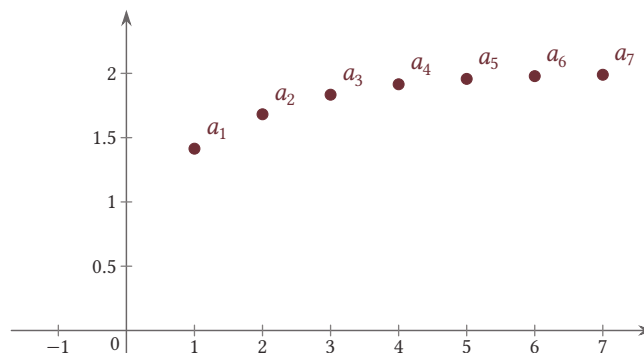


Figura 11.4. Gráfico da sequência definida recursivamente: $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

Um segundo exemplo é a sequência de Fibonacci, definida por

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Aplicando sucessivamente a regra, obtemos:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots)$$

Fibonacci (c. 1170–1250) apresentou essa sequência em um problema sobre o crescimento idealizado de uma população de coelhos:

“Um homem tem um casal de coelhos. Desejamos saber quantos casais de coelhos podem ser gerados deste par, se a cada mês um casal fértil gera um novo casal e cada casal novo se torna fértil quando completa dois meses de vida.”

Nesse modelo, f_n representa o número de casais após n meses.

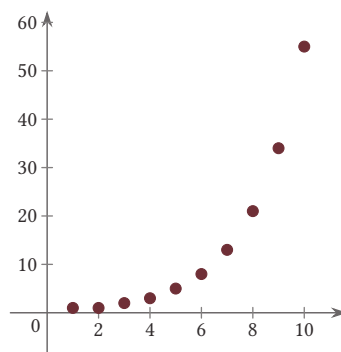


Figura 11.5. Gráfico da sequência de Fibonacci

Considere ainda a sequência (s_n) definida por

$$s_1 = 1, \quad s_n = s_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Seus primeiros termos são

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Desenrolando a recorrência,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Aqui aparece uma ideia que retomaremos no final do capítulo: cada s_n é uma soma finita, e a sequência dessas somas parciais permite estudar uma soma infinita.

Exercícios

11.1 — Faça os gráficos das seguintes sequências:

$a_n = n^{\frac{1}{n}}$?? $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$?? $a_n = \frac{n^4}{n!}$?? $a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$?? $a_n = \frac{n \sin(n)}{n^2+1}$?? $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$?? $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$?? A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$?? A sequência definida recursivamente por: $a_n = n^{a_{n-1}}$ e $a_1 = 1$?? A sequência definida recursivamente por: $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ e $a_1 = 1$

11.2 — Faça os gráficos das seguintes sequências utilizando-se do fato que elas provêm de restrições de funções reais: ?? $a_n = n^5$?? $a_n = (n+2)^5$?? $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$?? $a_n = |\sin(x) + 1| + 2$?? $a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$?? $a_n = \frac{3 \cos(3n)}{2}$?? $a_n = \frac{3 \cos(3n)}{n}$

11.1.1 Sequências Crescentes e Decrescentes

Um gráfico de sequência é formado por pontos isolados. Mesmo assim, podemos perguntar se, ao caminhar da esquerda para a direita, os pontos sobem, descem ou alternam de comportamento. Essa é a versão discreta da monotonicidade de funções.

Como sequências são funções, usamos a mesma linguagem. Dada uma sequência (a_n) , dizemos que:

- (a_n) é **crescente** se, para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, resulta $a_n < a_m$.
- (a_n) é **não-decrescente** se, para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, resulta $a_n \leq a_m$.
- (a_n) é **decrescente** se, para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, resulta $a_n > a_m$.
- (a_n) é **não-crescente** se, para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, resulta $a_n \geq a_m$.

Em qualquer um desses casos, dizemos que a sequência é **monótona**¹. Quando ela é crescente ou decrescente, dizemos que é **estritamente monótona**.

À primeira vista, as definições pedem a comparação de quaisquer dois índices $n < m$. Para sequências, porém, basta olhar para vizinhos. Se cada passo de a_n para a_{n+1} é para cima, então uma sucessão desses passos mostra que $a_n < a_m$ sempre que $n < m$. Assim, as condições acima são equivalentes às seguintes:

Definição 11.1

- (a_n) é **crescente** se, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $a_n < a_{n+1}$.
- (a_n) é **não-decrescente** se para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $a_n \leq a_{n+1}$.
- (a_n) é **decrescente** se para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $a_n > a_{n+1}$.
- (a_n) é **não-crescente** se para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $a_n \geq a_{n+1}$.

Exemplo 11.4 — Exercício resolvido

A sequência $a_n = \frac{1}{n+1}$ é decrescente.

Solução. Para comparar termos consecutivos, observamos que

$$a_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = a_{n+1},$$

pois $n+1 < n+2$ e ambos são positivos. Logo $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, portanto a sequência é decrescente. ◀

Exemplo 11.5 — Exercício resolvido

A sequência $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ é decrescente.

Solução. Queremos mostrar que $a_n > a_{n+1}$. Como os denominadores são positivos,

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

é equivalente a

$$(n+1)(n^2+1) < n((n+1)^2+1),$$

¹Também é usual o termo *monotônica*.

ou ainda a

$$1 < n^2 + n.$$

A última desigualdade vale para todo $n \geq 1$. Logo $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, e a sequência é decrescente. $\triangleleft$

Exemplo 11.6 — Exercício resolvido

A sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ é crescente.

Solução. Há duas maneiras naturais de enxergar o crescimento. Pela comparação direta de termos consecutivos,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Logo $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq 1$.

Também podemos escrever

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

À medida que n cresce, a parcela $1/(n+1)$ diminui; portanto subtraímos de 1 quantidades cada vez menores. Essa segunda forma torna visível por que os termos sobem e, ao mesmo tempo, por que permanecem abaixo de 1. $\triangleleft$

11.1.2 Sequências Limitadas

Monotonicidade descreve a ordem dos termos, mas não diz até onde eles podem ir. Uma sequência crescente pode permanecer presa abaixo de uma reta horizontal, como $n/(n+1)$, ou crescer sem qualquer barreira superior, como n . Surge então uma segunda pergunta: existe uma faixa horizontal que contém todos os pontos do gráfico?

Essa pergunta leva às noções de cota e de sequência limitada.

Definição 11.2

- Uma sequência (a_n) é **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

- Uma sequência (a_n) é **limitada inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n \geq m$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

- Uma sequência é **limitada** se é limitada superiormente e inferiormente. Equivalentemente, existe $C > 0$ tal que

$$|a_n| \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

- Uma sequência que não é limitada é dita **ilimitada**.

Exemplo 11.7 — Exercício resolvido

A sequência $a_n = \frac{1}{n+1}$ é limitada.

Solução. Como $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto todos os pontos do gráfico ficam entre as retas horizontais $y = 0$ e $y = 1/2$. Em linguagem numérica, todos os termos pertencem ao intervalo $[0, 1/2]$. Assim a sequência é limitada.

Observe que uma cota não precisa ser atingida. Por exemplo, 0 é uma cota inferior mesmo que nenhum termo da sequência seja igual a 0. ◀

Exemplo 11.8 — Exemplos

1. Para $a_n = -1/n^2$ temos

$$-1 \leq a_n < 0,$$

logo a sequência é limitada inferiormente por -1 e superiormente por 0.

2. A sequência $b_n = n$ é limitada inferiormente, por exemplo por 0, mas não é limitada superiormente. Esse exemplo nos levará à propriedade arquimediana.

O exemplo $a_n = n$ mostra um contraste importante: os números naturais não possuem cota superior em $\mathbb{R}$. Essa afirmação é a **propriedade arquimediana** dos números reais e será usada repetidamente no estudo de limites.

Propriedade Arquimediana dos Números Reais

Para todo número real r existe um número natural n tal que $n > r$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}^*$ fosse limitado superiormente e seja s o seu supremo. Como $s - 1 < s$, o número $s - 1$ não pode ser cota superior; portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_0 > s - 1$. Somando 1 aos dois lados, $n_0 + 1 > s$. Mas $n_0 + 1$ também é natural, contradizendo o fato de s ser cota superior de $\mathbb{N}^*$. ■

Uma consequência útil é a seguinte: dados $x, y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $nx > y$. Basta aplicar a propriedade arquimediana a y/x . Geometricamente, isso significa que um segmento de comprimento y pode ser ultrapassado colocando lado a lado um número finito de segmentos de comprimento x .

Exemplo 11.9 — Exercício resolvido

A sequência $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$ é limitada.

Solução. Para todo $n \geq 1$,

$$|c_n| = \frac{1}{n} \leq 1.$$

Logo todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[-1, 1]$, e portanto (c_n) é limitada. $\triangleleft$

Muitas vezes é mais simples obter uma cota comparando a sequência com outra cujo comportamento já conhecemos. A próxima observação formaliza essa ideia.

Teorema 11.1

Sejam $(a_n), (b_n)$ duas sequências satisfazendo $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$. Então:

- se a sequência a_n é limitada inferiormente, a sequência b_n também é limitada inferiormente.
- se a sequência b_n é limitada superiormente, a sequência a_n também é limitada superiormente.

Exemplo 11.10 — Exemplos

- Para $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n} \leq 1,$$

logo a sequência $a_n = 1/2^n$ é limitada.

- Do mesmo modo,

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \leq 1,$$

de modo que $b_n = 1/n!$ também é limitada.

- Finalmente,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n^3} \leq \frac{1}{n},$$

e portanto $c_n = (-1)^n/n^3$ é limitada.

Exercícios

11.3 — Liste os 6 primeiros termos das sequências: $a_n = 1 - \frac{1}{3+n}$, $a_n = (-1)^n - \frac{1}{3^n}$. A sequência definida recursivamente por: $a_n = n \cdot a_{n-1}$ e $a_1 = 1$. A sequência definida recursivamente por: $a_n = n^{a_{n-1}}$ e $a_1 = 1$. A sequência definida recursivamente por: $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ e $a_1 = 1$. $a_n = 2^{\sin(\frac{n\pi}{2})}$

11.4 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma

dessas duas. Prove suas afirmações: $a_n = n + 7$ $a_n = n^2 + n$ $a_n = n^2 - 7n$ $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$ $a_n = \frac{n!}{2^n}$
 $a_n = \frac{1}{n^2}$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ $a_n = 2^n$ $a_n = \frac{2n-6}{3n+4}$ $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3}$??A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

11.5 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações: $a_n = n^2 + n$ $a_n = n^2 - 7n$ $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$ $a_n = \frac{n!}{2^n}$ $a_n = \frac{1}{n^2}$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
 $a_n = 2^n$ $a_n = n/n!$??A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$.

11.6 — Prove que $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo $x \geq -1$. [Sugestão: Use a expansão Binomial]

11.7 — ??Usando a propriedade arquimediana, prove que se $|x-y| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então $x = y$. ??Usando o item anterior prove que se $|x-y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $x = y$.

11.8 — Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, prove que existe um racional p tal que $x < p < y$.

11.2 Convergência e Limite de Sequências

11.2.1 Intuições sobre Convergência

Até aqui descrevemos sequências por meio de fórmulas, gráficos, monotonicidade e cotas. Em diversos exemplos apareceu, além disso, um comportamento que ainda não foi formalizado: os termos parecem aproximar-se de um determinado número.

No caso de $1/n$, os pontos se aproximam do eixo horizontal; para $n/(n+1)$, aproximam-se da reta $y = 1$; em $(-1)^n/\sqrt{n}$, os termos alternam de sinal, mas sua distância até 0 torna-se progressivamente menor.

Convém agora precisar o significado dessa aproximação. Para isso, duas expressões precisam ser entendidas de forma rigorosa: “para n suficientemente grande” e “estar próximo”.

Dizemos que uma propriedade $p(n)$ vale **para n suficientemente grande** quando existe N tal que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq N$. Nada se exige dos termos anteriores a N ; trata-se, portanto, de uma propriedade da cauda da sequência.

Exemplo 11.11 — Exemplos

1. $5n - 100$ é positivo para n suficientemente grande. De fato, $5n - 100 > 0$ sempre que $n > 20$.
2. $n^2 > 7n$ para n suficientemente grande, pois a desigualdade vale para $n > 7$.
3. $\frac{1}{n} < 10^{-3}$ para todo $n > 10^3$.
4. $\frac{1}{n} < 10^{-5}$ para todo $n > 10^5$.

Falta precisar a palavra “próximo”. Na reta real, estar próximo de a pode ser expresso por uma distância. Dizemos que y está a menos de $\varepsilon > 0$ de a quando

$$|y - a| < \varepsilon.$$

Geometricamente, isso significa exatamente

$$y \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Assim, escolher um erro ε corresponde a desenhar uma pequena faixa em torno do nível a .

Os dois últimos exemplos mostram que, para a sequência $1/n$, podemos impor erros sucessivamente menores: para obter erro inferior a 10^{-3} , basta tomar $n > 10^3$; para erro inferior a 10^{-5} , basta tomar $n > 10^5$. O aspecto essencial é que o mesmo procedimento pode ser feito para qualquer erro positivo previamente fixado.

De fato,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dado, portanto, $\varepsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}^*$ com $N > 1/\varepsilon$. Para todo $n \geq N$, resulta

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

É precisamente essa propriedade que será tomada como definição de convergência.

Ideia de limite

Uma sequência (a_n) converge para L quando, dado qualquer erro $\varepsilon > 0$, todos os termos a_n ficam a uma distância menor que ε de L a partir de algum índice.

A formulação precisa dessa ideia exige atenção à ordem dos quantificadores. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, deve ser possível escolher um índice N . Esse índice pode depender de ε ; uma vez escolhido, entretanto, a desigualdade exigida deve valer para todo $n \geq N$.

Definição 11.3

Definição de Limite Dizemos que a sequência (a_n) converge para $L \in \mathbb{R}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n \geq N \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso escrevemos

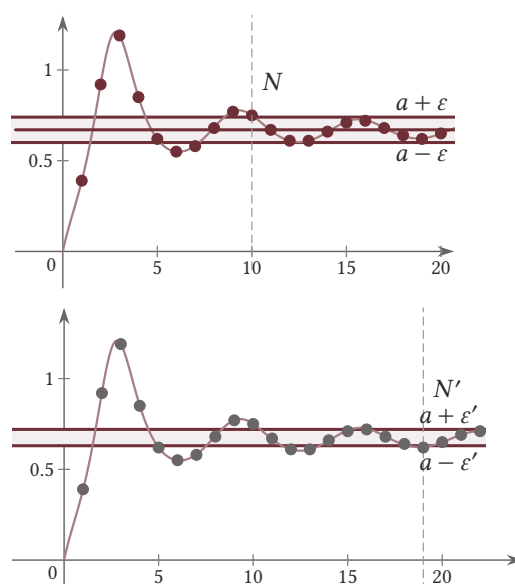
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L.$$

Observe que a definição não exige que algum termo da sequência seja igual a L . Ela afirma que, qualquer que seja a precisão fixada, existe uma cauda inteiramente contida no intervalo correspondente em torno de L .

A definição pode também ser lida geometricamente. Fixado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar um índice N a partir do qual

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Isto significa que todos os pontos correspondentes à cauda da sequência ficam na faixa horizontal delimitada por $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$. Se a faixa é estreitada, pode ser necessário escolher um índice maior, mas a condição deve continuar sendo satisfeita.

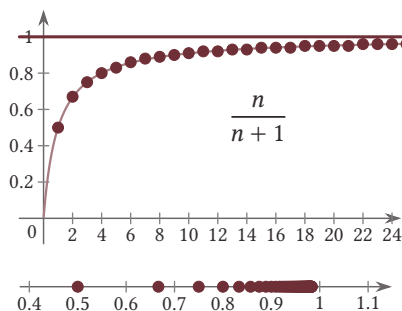


A sequência $\frac{n}{n+1}$

Vamos aplicar a definição à sequência

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Já sabemos que ela é crescente e que $0 < a_n < 1$. O gráfico e a tabela sugerem algo mais: os termos parecem aproximar-se de 1 à medida que n cresce.



Começemos com um erro concreto. Para obter erro menor que 10^{-1} , resolvemos

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < 10^{-1},$$

o que ocorre sempre que $n > 9$. Para erro 10^{-3} , basta tomar $n > 999$. Mais geralmente,

$$n > 10^k - 1 \implies \left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < 10^{-k}.$$

n	n/(n+1)
10	0,90909090
100	0,99009901
1000	0,99900100
10000	0,99990001
100000	0,99999900

A prova para um erro arbitrário segue o mesmo padrão. Dado $\varepsilon > 0$,

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Escolhendo um natural $N > 1/\varepsilon - 1$, todo $n \geq N$ satisfaz a desigualdade. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Aproximação de $1/7$

A representação decimal fornece outro exemplo natural de aproximação. Considere os truncamentos de

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857 \dots$$

com n casas decimais. Se chamarmos esse truncamento de b_n , então

$$b_1 = 0,1, \quad b_2 = 0,14, \quad b_3 = 0,142, \quad b_4 = 0,1428, \quad \dots$$

Nenhum desses valores é exatamente $1/7$, mas o erro diminui à medida que aumentamos o número de casas.

Depois de n casas corretas, a diferença satisfaz

$$0 < \frac{1}{7} - b_n < 10^{-n}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta escolher N tal que

$$N > -\log_{10} \varepsilon.$$

Para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{7} - b_n \right| < 10^{-n} \leq 10^{-N} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{7}.$$

Esse exemplo mostra de forma concreta como uma expansão decimal infinita pode ser entendida por meio de uma sequência de aproximações finitas.

Exercícios

11.9 — Sejam dadas as sequências

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{n-1}{n}$$

$$c_n = (-1)^n, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Em cada caso abaixo, determine para quais valores de n vale $a_n \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ $b_n \in (0.999, 1.111)$ $c_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ $d_n \in (-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$

11.10 — Considerando as mesmas sequências do exercício anterior, diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações: $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ para todo $n \geq m$. $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tal que $b_n \in (0.999, 1.111)$ para todo $n \geq m$. $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tal que $c_n \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ para todo $n \geq m$. $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tal que $d_n \in (-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000})$ para todo $n \geq m$.

11.11 — Em cada caso abaixo, determine $m \in \mathbb{N}^*$ de modo que $\frac{1}{n^2-n+1} < \frac{1}{2}$, para todo $n \geq m$. $\frac{1}{n} < 10^{-23}$, para todo $n \geq m$. $1 - \frac{1}{10^4} < \frac{n+2}{n-2} < 1 + \frac{1}{10^4}$, para todo $n \geq m$. $-\frac{1}{10^{10}} < e^{-n} < \frac{1}{10^{10}}$, para todo $n \geq m$. $-\frac{1}{10} < \frac{\sin n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10}$, para todo $n \geq m$.

11.12 — Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, determine, em cada caso, $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para todo $n \geq m$, onde: $a_n = \frac{1}{n}$ e $L = 0$ $a_n = \frac{n}{n-1}$ e $L = 1$ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ e $L = 0$ $a_n = \frac{1}{2+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$ e $L = 1/3$

$a_n = \frac{1}{2+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$ e $L = 1$ $a_n = \frac{n^2}{9-n^2}$ e $L = -1$

11.13 — Mostre que a sequência $(0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots)$ converge a 1.

11.14 — Mostre que a sequência $(0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots)$ converge a $1/3$.

11.2.2 Consequências da definição

A definição de limite não serve apenas para verificar exemplos. Ela também permite deduzir propriedades gerais das sequências convergentes. As próximas proposições são bons exemplos de como quantificadores, desigualdades e a ideia de cauda trabalham juntos numa demonstração.

Proposição 11.2

O limite de uma sequência, se existir, é único.

Demonstração. Suponha que $a_n \rightarrow L$ e $a_n \rightarrow K$. Se $L \neq K$, tome

$$\varepsilon = \frac{|L - K|}{3} > 0.$$

Existem N_1, N_2 tais que

$$n \geq N_1 \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

e

$$n \geq N_2 \implies |a_n - K| < \varepsilon.$$

Para $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, pela desigualdade triangular,

$$|L - K| \leq |L - a_n| + |a_n - K| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|L - K|,$$

uma contradição. Logo $L = K$. ■

Proposição 11.3

Se a sequência (a_n) converge, então (a_n) é limitada.

Demonstração. Suponha que $a_n \rightarrow a$. Aplicando a definição com $\varepsilon = 1$, existe N tal que, para $n \geq N$,

$$|a_n - a| < 1.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1.$$

Portanto a cauda da sequência é limitada. Restam apenas os termos $a_1, \dots, a_{N-1}$, em número finito. Se definirmos

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\},$$

teremos $|a_n| \leq C$ para todo n . Logo (a_n) é limitada. ■

Uma consequência imediata é que toda sequência não limitada diverge.

Exemplo 11.12 – Exemplos

1. A sequência $(n!)$ diverge, pois $n! \geq n$ para todo $n \geq 1$; portanto ela não é limitada superiormente.
2. A sequência (2^n) também diverge, pois $2^n > n$ para todo $n \geq 1$.
3. A sequência $\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$ diverge. De fato, para $n \geq 1$,

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2},$$

e o lado direito não é limitado superiormente.

Teorema 11.4

Toda sequência monótona e limitada converge.

Demonstração. Suponha primeiro que (a_n) seja crescente e limitada. O conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

é limitado e, pela completude de $\mathbb{R}$, possui supremo. Denote-o por L . Mostraremos que $a_n \rightarrow L$.

Como L é cota superior, $a_n \leq L$ para todo n . Seja agora $\varepsilon > 0$. O número $L - \varepsilon$ não pode ser cota superior de A , pois é menor que o supremo. Logo existe N tal que

$$a_N > L - \varepsilon.$$

Como a sequência é crescente, para todo $n \geq N$ temos

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L.$$



Figura 11.6. Uma sequência monótona crescente converge para o seu supremo.

Da desigualdade anterior segue que

$$-\varepsilon < a_n - L \leq 0,$$

e, portanto, $|a_n - L| < \varepsilon$. Assim $a_n \rightarrow L$.

Se (a_n) é decrescente e limitada, o argumento é análogo, usando o ínfimo de A no lugar do supremo; esse caso será deixado como exercício.

■

Exercícios

11.15 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

11.16 — Prove que as seguintes sequências divergem: $n - 10000$, $n^2 - 2$, $n!$, n^3 , $(-1)^n$, $a_1 = 1$
 $a_n = n!a_{n-1}$, $\sqrt{n}$ (Dica: eleve ao quadrado), $\sin(n)$ (Difícil), $\frac{1}{\sin(n)}$ (Difícil)

11.17 — Dado $k \in \mathbb{N}^*$. Seja $(a_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência real convergente e seja $b_n = a_{n+k}$ a sequência obtida “removendo os k primeiros termos de a_n ”. Prove que b_n converge e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Prove que se b_n converge então a_n converge e que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Ou seja, a convergência da sequência independe de um número finito de termos iniciais.

11.2.3 Propriedades do Limite de Sequências

As propriedades seguintes mostram que as operações algébricas usuais são compatíveis com a passagem ao limite. Elas permitem obter novos limites a partir de outros já conhecidos, sem que seja necessário retornar à definição em cada caso.

Proposição 11.5

Propriedades algébricas do limite. Se $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$ e $c \in \mathbb{R}$, então:

1. $a_n + b_n \rightarrow A + B$.
2. $a_n - b_n \rightarrow A - B$.
3. $a_n b_n \rightarrow AB$.
4. $ca_n \rightarrow cA$.
5. Se $B \neq 0$, então $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}$.
6. $|a_n| \rightarrow |A|$.

Demonstraremos a propriedade da soma e a do produto. A primeira decorre diretamente da desigualdade triangular. Na segunda, será usado o fato já provado de que toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow A$, existe N_1 tal que

$$n \geq N_1 \implies |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $b_n \rightarrow B$, existe N_2 tal que

$$n \geq N_2 \implies |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para $n \geq N$ temos

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon.$$

Logo $a_n + b_n \rightarrow A + B$. ■

Demonstração da propriedade do produto. Escrevemos

$$a_n b_n - AB = a_n(b_n - B) + B(a_n - A).$$

Como (a_n) converge, ela é limitada. Escolha $C \geq 1$ tal que $|a_n| \leq C$ para todo n . Dado $\varepsilon > 0$, existem N_1 e N_2 tais que

$$n \geq N_1 \implies |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2C},$$

e

$$n \geq N_2 \implies |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}.$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para $n \geq N$ obtemos

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &\leq |a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A| \\ &< C \frac{\varepsilon}{2C} + |B| \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo $a_n b_n \rightarrow AB$. ■

Exemplo 11.13 — Exercício resolvido

Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3}$.

Solução. Os termos dominantes do numerador e do denominador são ambos de grau 1. Para tornar essa comparação explícita, dividimos os dois por n :

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}.$$

Agora a parte que depende de n aparece apenas nas parcelas $1/n$ e $3/n$, que convergem a 0. Portanto, pelas propriedades algébricas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

A manipulação algébrica não é apenas um truque de cálculo: ela separa a parte que permanece daquela que desaparece na cauda da sequência. ◀

Exercícios

11.18 — Usando as propriedades algébricas, calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3}$.

11.19 — Prove diretamente a partir da definição que, se $a_n \rightarrow A$, então $ca_n \rightarrow cA$.

11.2.4 Teorema do confronto

O teorema do confronto formaliza uma observação geométrica simples. Se, a partir de certo índice, uma sequência permanece entre duas outras e ambas convergem para o mesmo número L , então a sequência intermediária também converge para L .

Teorema 11.6 — Teorema do confronto

Sejam (a_n) , (b_n) e (c_n) sequências reais tais que

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

para todo n suficientemente grande. Se $a_n \rightarrow L$ e $c_n \rightarrow L$, então $b_n \rightarrow L$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Existem N_1 e N_2 tais que, para $n \geq N_1$,

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

e, para $n \geq N_2$,

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Tomando N também grande o suficiente para que $a_n \leq b_n \leq c_n$, obtemos, para $n \geq N$,

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Portanto $|b_n - L| < \varepsilon$, e assim $b_n \rightarrow L$. ■

Exemplo 11.14 — Exercício resolvido

Se $|r| < 1$, então $r^n \rightarrow 0$.

Solução. Começemos pelo caso $0 < r < 1$. Escreva

$$\frac{1}{r} = 1 + \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Pela desigualdade de Bernoulli,

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Logo

$$0 < r^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} \leq \frac{1}{1 + n\alpha} < \frac{1}{n\alpha}.$$

Como $1/(n\alpha) \rightarrow 0$, o teorema do confronto implica $r^n \rightarrow 0$.

Se $-1 < r < 0$, então $0 < |r| < 1$ e

$$-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n.$$

Como os dois extremos convergem a 0, novamente pelo teorema do confronto, $r^n \rightarrow 0$. ◁

Exemplo 11.15 — Exercício resolvido

A sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge a 0.

Solução. Para todo $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como $-1/n \rightarrow 0$ e $1/n \rightarrow 0$, o teorema do confronto implica

$$\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0.$$

◁

Exemplo 11.16 — Exercício resolvido

A sequência $b_n = \frac{\sin n}{n}$ converge a 0.

Solução. Como $-1 \leq \sin n \leq 1$, temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Novamente, pelo teorema do confronto,

$$\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0.$$

◁

Exercícios

11.20 — Use o teorema do confronto para provar que: $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$. $\frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow 0$. Se $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ para todo n , então $a_n \rightarrow 0$.

11.3 Limites infinitos

Nem toda sequência se aproxima de um número real. Há sequências cujos pontos sobem continuamente no gráfico e acabam ultrapassando qualquer reta horizontal que desenhemos. A sequência $a_n = n$ é o exemplo mais simples: escolhido um nível M , basta avançar suficientemente para a direita para que todos os pontos seguintes fiquem acima dele. Escrevemos então

$$a_n \longrightarrow +\infty.$$

De modo análogo, $a_n \longrightarrow -\infty$ descreve uma cauda que acaba ficando abaixo de qualquer nível negativo previamente fixado. Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ registram esses comportamentos; não designam novos números reais.

Definição 11.4

Dizemos que uma sequência (a_n) **tende a** $+\infty$ se, para todo $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n \geq N \implies a_n > M.$$

Dizemos que (a_n) **tende a** $-\infty$ se, para todo $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$n \geq N \implies a_n < -M.$$

O símbolo ∞ não representa um número real. A notação $a_n \rightarrow +\infty$, portanto, não significa que a sequência esteja se aproximando de um ponto chamado “infinito”. Ela resume uma afirmação sobre ultrapassar todas as cotas reais.

Exemplo 11.17 – Exercício resolvido

A sequência $a_n = n$ satisfaz $a_n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração. Seja $M > 0$. Pela propriedade arquimediana, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N > M$. Logo, se $n \geq N$, então

$$n \geq N > M.$$

Portanto $n \longrightarrow +\infty$. ■

Exemplo 11.18 – Exercício resolvido

A sequência $a_n = 2n + 3$ satisfaz $a_n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração. Seja $M > 0$. Pela propriedade arquimediana, podemos escolher $N \in \mathbb{N}^*$ com $N > M$. Se $n \geq N$, então

$$2n + 3 > n \geq N > M.$$

Logo $2n + 3 \longrightarrow +\infty$. ■

Exemplo 11.19 – Exercício resolvido

A sequência $a_n = -n^2$ satisfaz $a_n \rightarrow -\infty$.

Demonstração. Seja $M > 0$. Escolha, pela propriedade arquimediana, $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N > M$. Se $n \geq N$, então $n^2 \geq n \geq N > M$, e portanto

$$-n^2 < -M.$$

Assim, $-n^2 \rightarrow -\infty$. ■

Os três exemplos têm a mesma estrutura das provas de limites finitos: fixamos uma exigência e procuramos um índice a partir do qual toda a cauda a satisfaz. A diferença está apenas na geometria da exigência. Para um limite finito, queremos entrar numa faixa estreita em torno de um nível; para $+\infty$, queremos ficar acima de uma reta horizontal arbitrária; para $-\infty$, abaixo dela.

Exercícios

11.21 — Prove diretamente a partir da definição que: $n + 5 \rightarrow +\infty$, $3n \rightarrow +\infty$, $4 - n \rightarrow -\infty$, $-2n - 1 \rightarrow -\infty$.

11.22 — Explique por que a sequência $(-1)^n n$ não tende nem a $+\infty$ nem a $-\infty$.

11.4 ★ Séries

Uma soma com infinitos termos não pode ser realizada “de uma vez”. O que podemos fazer é somar um número finito de parcelas, depois mais uma, depois mais outra, obtendo uma sequência de resultados. A pergunta sobre a soma infinita transforma-se, assim, numa pergunta sobre o limite dessa nova sequência.

Dada uma sequência (a_k) , definimos sua n -ésima **soma parcial** por

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

As somas parciais formam uma nova sequência

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

e é o comportamento dessa sequência que determina o significado da soma infinita.

Definição 11.5

Dizemos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge quando a sequência de somas parciais

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

converge. Se $s_n \rightarrow S$, escrevemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Assim, o símbolo de soma infinita é entendido por meio da sequência

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots$$

de somas parciais. Cada termo dessa sequência é uma soma perfeitamente finita. A palavra “infinita” refere-se ao processo de continuar formando somas parciais; a série converge quando esses resultados finitos se aproximam de um mesmo número.

11.4.1 Série geométrica

O exemplo mais importante é a série geométrica

$$p + pr + pr^2 + pr^3 + \dots$$

Sua n -ésima soma parcial, começando em $k = 0$, é

$$s_n = \sum_{k=0}^n pr^k.$$

Se $r \neq 1$, a fórmula da soma de uma progressão geométrica fornece

$$s_n = p \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Quando $|r| < 1$, temos $r^{n+1} \rightarrow 0$. Portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} pr^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{p}{1 - r}.$$

Em particular,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1. \quad (11.1)$$

Exemplo 11.20 – Exercício resolvido

Calcule

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \cdots.$$

Solução. A série é geométrica, com primeiro termo $p = 3$ e razão $r = -2/5$. Suas somas parciais são

$$s_n = 3 \frac{1 - (-2/5)^{n+1}}{1 + 2/5}.$$

Como $(-2/5)^{n+1} \rightarrow 0$, a parte que depende de n desaparece no limite. Assim,

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{15}{7}.$$

A fórmula da série geométrica é, portanto, a fórmula das somas finitas observada no limite. ◀

11.4.2 Série telescópica

Há também séries cuja soma se simplifica por cancelamentos sucessivos. Suponha que os termos possam ser escritos na forma

$$a_k = b_k - b_{k+1}.$$

Então

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) \\ &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1}. \end{aligned}$$

Se $b_n \rightarrow b$, segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b.$$

Exemplo 11.21 – Exercício resolvido

Calcule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Solução. Como

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a n -ésima soma parcial é

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Como $s_n \rightarrow 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$



Os dois exemplos mostram a mesma ideia por mecanismos diferentes. Na série geométrica, a fórmula das somas parciais contém um termo que desaparece; na telescópica, quase todas as parcelas se cancelam. Em ambos os casos, uma construção infinita é compreendida acompanhando uma sequência de objetos finitos.

Exercícios

11.23 — Calcule as séries geométricas: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{4}\right)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

11.24 — Escreva cada termo como uma diferença e calcule: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+2)}$.

12

Limites e continuidade de funções

Há muito tempo é um axioma meu que as pequenas coisas são infinitamente as mais importantes.

Sherlock Holmes, em *Um Caso de Identidade*, de Arthur Conan Doyle

Até aqui, funções, equações e inequações foram utilizadas para descrever valores e estabelecer relações entre eles. O conceito de limite introduz uma questão de natureza distinta: o comportamento de uma função quando a variável se aproxima de determinado ponto.

Começaremos pelo problema da reta tangente e por exemplos numéricos e gráficos. Em seguida, será apresentada a definição de limite e serão estabelecidas suas propriedades básicas. A noção de continuidade será formulada a partir dessa definição.

12.1 Aproximação e reta tangente

Secantes aproximam a tangente. Mantemos P fixo e fazemos Q se aproximar de P . Se as inclinações das secantes se estabilizam, o valor obtido é a inclinação da tangente.

12.1.1 A reta tangente

Seja f uma função e seja P um ponto de seu gráfico. O problema consiste em determinar, quando existir, a reta tangente ao gráfico de f em P , como na Figura 12.1.

Quando a tangente possui inclinação finita em $P = (a, f(a))$, sua inclinação pode ser obtida a partir das inclinações das retas secantes que passam por P e por um segundo ponto Q do gráfico. Ao fazer Q aproximar-se de P , estudamos o comportamento dessas inclinações. A definição de limite permitirá formular essa aproximação de maneira precisa.

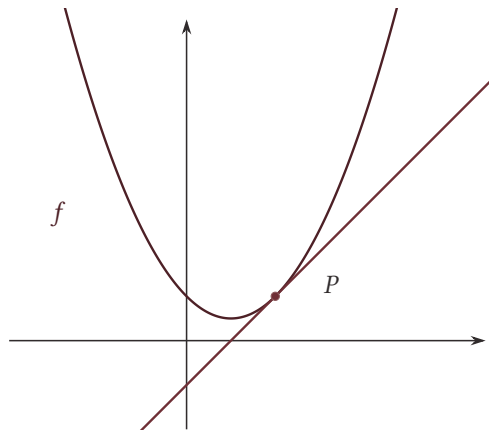


Figura 12.1. Reta tangente a f em P .

Quando a tangente não é vertical, sua determinação reduz-se ao cálculo de seu coeficiente angular. Para aproximá-lo, consideramos as retas secantes que passam por P e por um segundo ponto Q do gráfico.

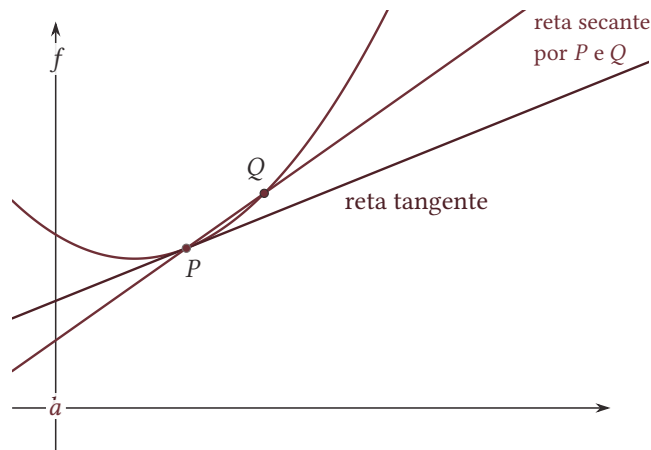


Figura 12.2. Retas secante e tangente ao gráfico de f .

Se considerarmos o ponto P com coordenadas $P : (x, f(x))$ e o ponto Q com coordenadas $Q : (x + h, f(x + h))$, então o coeficiente angular da reta secante é dado por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

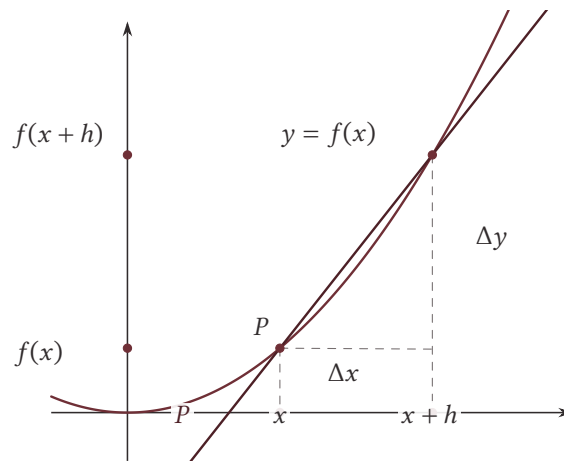


Figura 12.3. Quociente incremental entre os pontos P e Q .

Quando as inclinações das secantes por P e Q se aproximam de um único valor finito à medida que Q se aproxima de P , esse valor define a inclinação da reta tangente. Escrevemos então:

$$m_{\text{tg}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O limite anterior, se existir como número real, é denominado derivada da função f no ponto x .

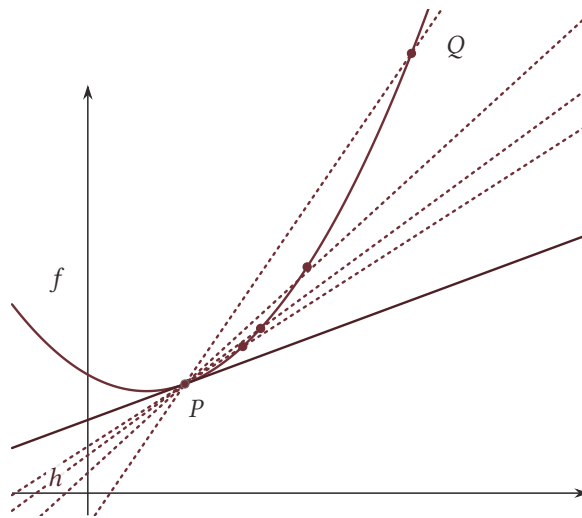


Figura 12.4. Conforme o ponto Q se aproxima de P as retas secantes se aproximam da reta tangente.

12.2 A noção de limite

Valor no ponto e limite. No limite $x \rightarrow a$, consideramos valores com $x \neq a$. Assim, $f(a)$ pode ser diferente do limite ou mesmo não estar definida, sem alterar o comportamento de $f(x)$ nas proximidades de a .

O problema da reta tangente conduz ao estudo de uma função nas proximidades de um ponto. A noção de limite formaliza esse tipo de comportamento: interessa determinar como se comportam os valores de $f(x)$ quando x se aproxima de a , sem exigir que $x = a$.

Descrição Informal de Limite

Dizemos que o **limite da função** $f(x)$ é L quando x tende a a se a função $f(x)$ torna-se arbitrariamente próxima de L quando x está suficientemente próximo de a , mas diferente de a . Denotaremos tal fato por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

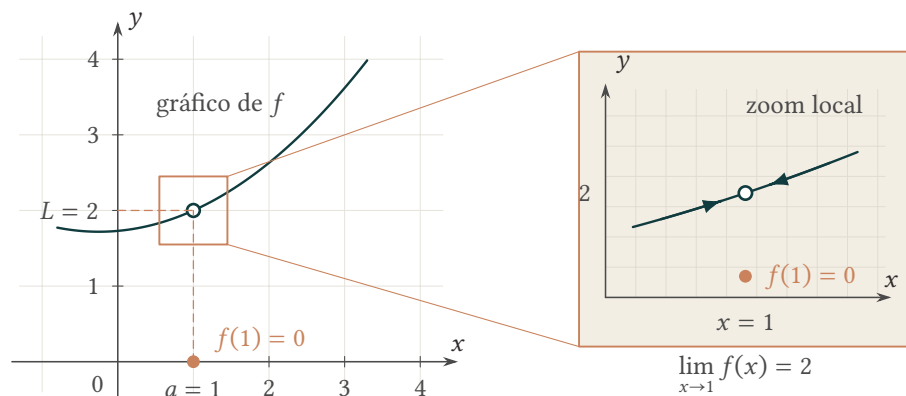


Figura 12.5. O limite descreve o comportamento local da função nas proximidades do ponto, independentemente do valor assumido nele. No exemplo, $f(1) = 0$, mas $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Para estudar o limite de f em a , é necessário que existam pontos do domínio, distintos de a , arbitrariamente próximos de a . O valor da função no próprio ponto, quando existe, não participa dessa análise. Os gráficos da Figura 12.6 mostram três exemplos de funções para as quais os limites existem e são L . No primeiro caso, a função f está definida em a e $f(a) = L$, na segunda, a função g não está definida em a e, na terceira, apesar da função estar definida em a temos que $h(a) \neq L$. Já os gráficos da Figura 12.7 ilustram duas situações nas quais o limite em a não existe.

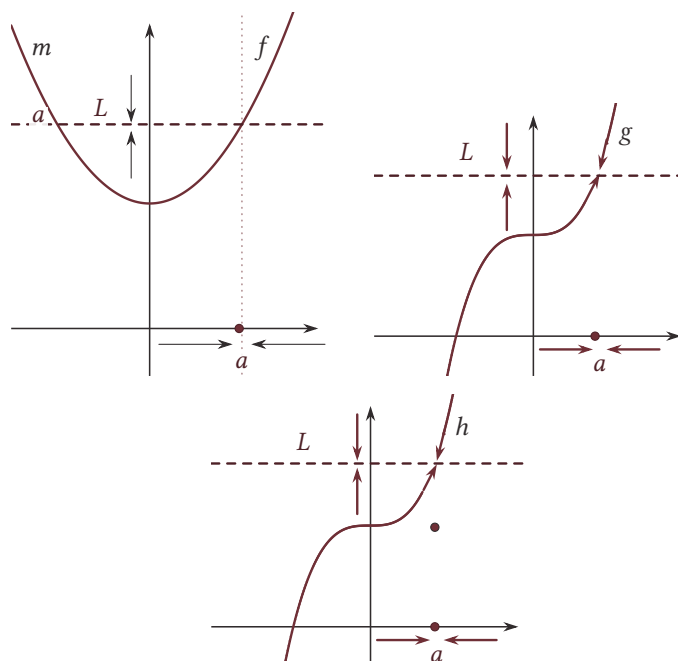


Figura 12.6. Exemplos de funções para as quais o limite quando x tende a a é L .

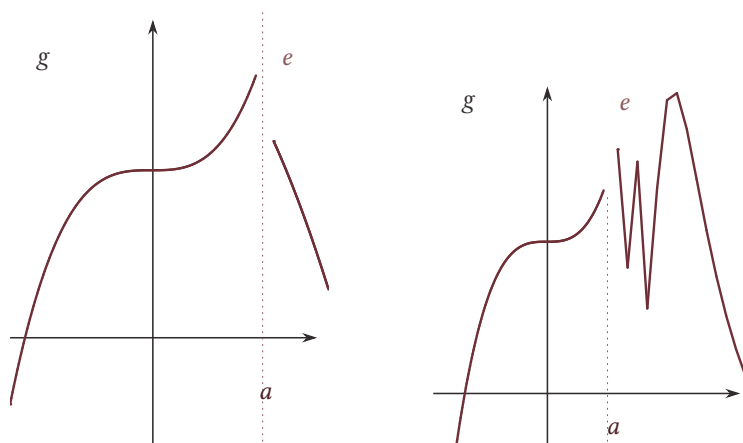


Figura 12.7. Exemplos de funções para as quais o limite não existe.

Consideremos inicialmente alguns exemplos em que o limite existe.

Exemplo 12.1

Conjecture o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)$.

Solução. Para valores de x próximos de 2, a tabela abaixo registra os valores correspondentes de $3x + 1$:

x	$3x + 1$	x	$3x + 1$
3	10	1	4
2,1	7,3	1,9	6,7
2,01	7,03	1,99	6,97
2,001	7,003	1,999	6,997
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2	7	2	7

A tabela sugere que os valores da função se aproximam de 7 quando x se aproxima de 2. Essa observação pode ser expressa quantitativamente. Por exemplo,

$$|3x + 1 - 7| < 10^{-3}$$

é equivalente a

$$|x - 2| < \frac{10^{-3}}{3}.$$

De modo geral, dado $\varepsilon > 0$,

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \implies |3x + 1 - 7| < \varepsilon.$$

A distância entre os valores da função e 7 pode, portanto, ser controlada pela distância entre x e 2. Essa relação será formalizada na definição de limite. $\triangleleft$

Exemplo 12.2

Conjecture o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

Solução. A função não está definida em $x = 1$. Isso não impede o estudo do limite, pois interessam os valores assumidos em pontos do domínio próximos de 1. A tabela abaixo registra alguns desses valores.

x	$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$	x	$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$
10	20	0,5	1
1,1	2,2	0,9	1,8
1,01	2,02	0,99	1,98
1,001	2,002	0,999	1,998
1,0001	2,0002	0,9999	1,9998
1,00001	2,00002	0,99999	1,99998
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

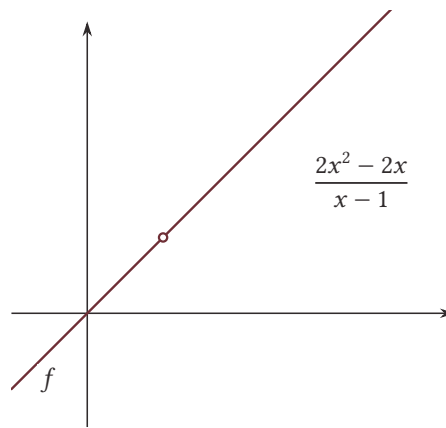


Figura 12.8. Gráfico de $\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

A tabela e a Figura 12.8 sugerem que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2.$$

Para $x \neq 1$,

$$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2x.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2 \right| = 2|x - 1|.$$

Consequentemente,

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \implies \left| \frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

O ponto $x = 1$ permanece fora do domínio, mas isso não interfere no comportamento da função em suas proximidades. ◁

Exemplo 12.3

Conjecture o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$.

Solução. A expressão $\frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$ não está definida em $x = 0$.

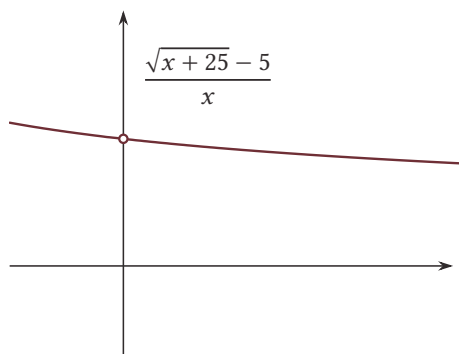


Figura 12.9. Gráfico de $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ nas proximidades de $x=0$, com o ponto removido.

Calculando valores dos dois lados de zero, obtemos:

$x < 0$	$\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$	$x > 0$	$\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$
-1	0,10102	1	0,09902
-0,1	0,10010	0,1	0,09990
-0,01	0,10001	0,01	0,09999
-0,001	0,10000	0,001	0,10000

Nesse caso, tanto o numerador quanto o denominador se anulam em $x=0$. Os valores dos dois lados sugerem a mesma aproximação, o que nos leva a conjecturar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = 0,1.$$

Calcularemos esse limite mais adiante no Exercício Resolvido 12.18.

◀

Exemplos em que o limite não existe

Exemplo 12.4 – Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita

Seja $g(x) = \frac{|x|}{x}$ então $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existe.

Solução. Para valores positivos de x temos que

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1, \quad x > 0$$

e para valores negativos de x

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1, \quad x < 0$$

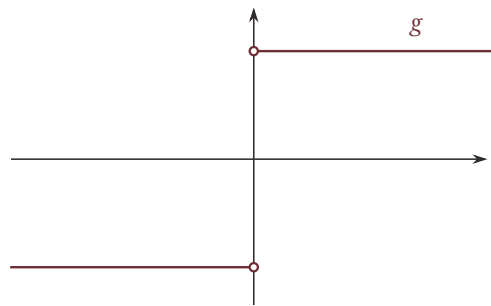


Figura 12.10. Não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

As igualdades anteriores mostram que mesmo para valores próximos a zero, teremos valores de x tais que $g(x) = 1$ e tais que $g(x) = -1$. Desse fato podemos intuir que o limite não existe, pois, independentemente do quão próximo x fique do zero, $g(x)$ não se aproxima de um único valor. Provaremos esse fato no Exercício Resolvido 12.9. $\triangleleft$

Exemplo 12.5 – Comportamento Ilimitado

Não existe limite finito para $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$.

Solução.

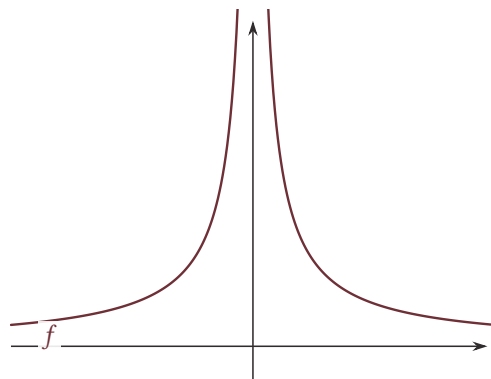


Figura 12.11. A função $1/|x|$ não tem limite finito quando x tende a zero.

Seja $h(x) = \frac{1}{|x|}$. Analisando a Figura 12.11 podemos perceber que quando x se aproxima de 0, tanto pela direita, isto é, por valores maiores que 0, como pela esquerda, isto é, por valores menores que 0, temos que $h(x)$ cresce de modo ilimitado. Ou seja, podemos fazer $h(x)$ maior que qualquer número real tomando x próximo de 0. Como $h(x)$ não se aproxima de nenhum número real, não existe limite finito. Esse comportamento será descrito adiante pela notação $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$. $\triangleleft$

12.3 Definição de limite

Ordem dos quantificadores. Dado $\varepsilon > 0$, procura-se $\delta > 0$ de modo que a proximidade de x a a implique a proximidade de $f(x)$ a L . O valor de δ pode depender de ε .

Os exemplos anteriores indicam que a distância entre $f(x)$ e L pode ser controlada impondo uma condição sobre a distância entre x e a . A definição de limite formaliza essa relação.

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ao estudar o limite em a , supomos apenas que existem pontos de $A \setminus \{a\}$ arbitrariamente próximos de a . Dizemos que um ponto y aproxima a com erro menor que δ quando $|y - a| < \delta$. De modo análogo, queremos tornar $|f(x) - L|$ menor que qualquer erro prescrito, tomando $x \in A \setminus \{a\}$ suficientemente próximo de a .

Os dois exemplos anteriores ilustram exatamente essa ideia. O Exercício Resolvido 12.2 mostra que $\frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$ aproxima 2 com erro menor que 10^{-5} sempre que $x \neq 1$ aproxima 1 com erro menor que $10^{-5}/2$. O Exercício Resolvido 12.1 mostra que $3x + 1$ aproxima 7 com erro menor que ε sempre que x aproxima 2 com erro menor que $\varepsilon/3$. Chegamos, assim, à definição formal.

Definição 12.1 – Limite

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A \setminus \{a\}$,

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

O valor de $f(a)$, quando definido, não participa da definição do limite.

Observação

A notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que o limite existe e é igual a L .

Pela definição anterior, para demonstrar que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , teremos que garantir que os valores de $f(x)$ estão a uma distância menor que ε acima ou abaixo do valor limite L , como mostrado nos gráficos de 12.12. Para fazer isso, devemos escolher os valores de x que estão suficientemente perto de a , digamos, a uma distância $\delta > 0$ para a esquerda ou direita de a , como mostrado no segundo gráfico. A terceira figura ilustra que a escolha de um $x \neq a$ dentro do intervalo azul $(a - \delta, a + \delta)$ determina um $f(x)$ dentro do intervalo vermelho $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

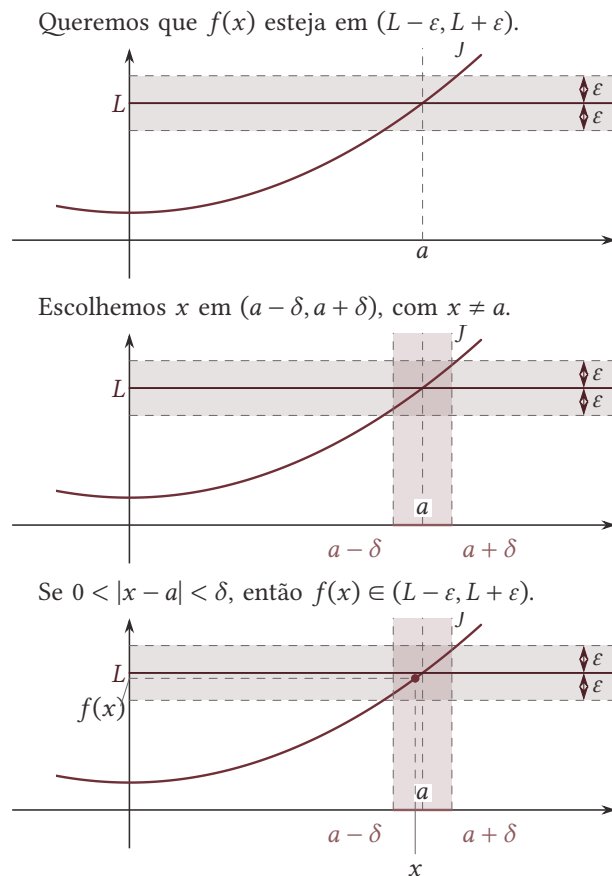


Figura 12.12. Definição de Limite

A definição de limite pode ser reescrita em linguagem simbólica como:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{a\}) \\ [|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

A afirmação anterior pode ser analisada separando-se suas diferentes condições:

- A afirmação de que $|f(x) - L| < \varepsilon$ nos diz que a função em x estará perto do número real L . Quão próximo? Menos de ε de distância.
- As condições $x \in A \setminus \{a\}$ e $|x - a| < \delta$ dizem que x é um ponto do domínio, diferente de a , a uma distância menor que δ de a .
- A implicação “se $x \in A \setminus \{a\}$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$ ” afirma que a condição de que x esteja δ próximo de a força a função $f(x)$ a estar ε próximo de L . Em outras palavras, ao controlar x permitindo uma variação inferior a δ , controlamos $f(x)$ com uma variação inferior a ε .
- Finalmente a afirmação inteira nos diz que para qualquer valor de ε , podemos encontrar um δ que satisfaz o item anterior.

Merece ser ressaltado que a definição de limite não nos fornece modos de determinar o valor do limite L . Em uma demonstração a partir da definição o valor do limite deve ser conjecturado. Mais adiante

forneceremos uma série de ferramentas que nos permitirão efetivamente calcular os limites. Assim, deve estar claro que uma etapa crucial na demonstração de um limite a partir da definição (por ε e δ) é encontrar o δ de modo que

$$x \in A \setminus \{a\}, \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Para realizar tal tarefa uma estratégia é partir da desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ para entender como esse termo pode ser controlado por $0 < |x - a| < \delta$, em particular encontrar uma fatoração de $|f(x) - L|$ na qual $|x - a|$ é fator. Essa estratégia nos permite encontrar o δ . A etapa seguinte é mostrar que esse δ funciona. Ilustraremos essa estratégia nos exemplos a seguir.

Exemplo 12.6

Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 10$

Solução. Começamos estimando $|f(x) - L| < \varepsilon$:

$$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3|x - 2| < \varepsilon$$

Ou seja, $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Agora podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Fazemos essa escolha pois, assim, se $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ então

$$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

e logo

$$|3x + 4 - 10| < \varepsilon.$$

◁

Exemplo 12.7

Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

Solução. Como dito anteriormente, para demonstrar um limite temos que estimar $|f(x) - L|$ numa vizinhança de a . Nesse caso temos que $|f(x) - L| = |c - c| = 0$, independentemente dos valores de x . Ou seja, para qualquer δ , se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

◁

Exemplo 12.8

Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, como:

$$|f(x) - L| = |x - a|$$

Podemos escolher o valor de δ , fazendo $\delta = \varepsilon$. Assim, temos que: se $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$ então

$$|f(x) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

Ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

◁

Exemplo 12.9 – Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita

Seja $g(x) = \frac{|x|}{x}$ então $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ não existe.

Solução. Como:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Suponha, por absurdo, que exista um limite real L . Aplicando a definição com $\varepsilon = 1$, existiria $\delta > 0$ tal que $|g(x) - L| < 1$ para todo $0 < |x| < \delta$.

Escolhendo $x = \delta/2 > 0$, teríamos $|1 - L| < 1$, isto é, $0 < L < 2$. Escolhendo $x = -\delta/2 < 0$, teríamos $|-1 - L| < 1$, isto é, $-2 < L < 0$. As duas condições são incompatíveis. Portanto, o limite bilateral não existe. $\triangleleft$

Exercícios

12.1 – Calcule a função nos pontos dados. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Use os resultados para conjecturar o va-

lor do limite: $f(x) = x^2 + 2x$ nos pontos 1,1 1,01 1,001; $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x)$ $g(x) =$

$\frac{x-4}{x^2-x-12}$ nos pontos 4,1 4,01 4,001;

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$ $h(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ nos pontos

1,1 1,01 1,001; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

12.2 – Mostre a partir da definição os seguintes

limites. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ Prove que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

12.3 – Calcule, se existir, o limite, ou demonstre que não existe: $\lim_{x \rightarrow 2} |x-2|$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x-2}$

12.4 – Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

12.4 Limites Laterais

Os dois lados devem concordar. Se o domínio permite aproximar a pela esquerda e pela direita, o limite em a só existe quando os dois limites laterais existem e têm o mesmo valor.

A definição de limite considera todos os pontos do domínio que se aproximam de a . Quando o domínio tem pontos dos dois lados e o comportamento da função muda ao atravessar esse ponto, é útil examinar separadamente o que acontece à esquerda e à direita. Essa distinção também permite estudar o comportamento nos extremos de um intervalo.

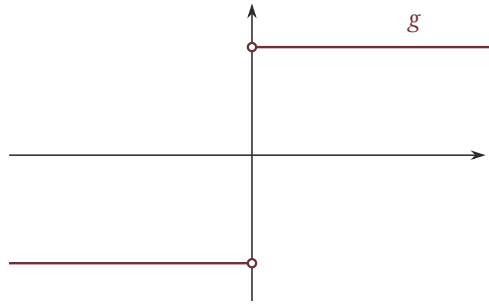


Figura 12.13. Gráfico de uma função com limites laterais distintos na origem.

No Exercício Resolvido 12.9, vimos que a função g definida como

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

possui dois comportamentos distintos na vizinhança da origem. Se considerarmos valores maiores que 0 teremos que $g(x) = 1$ e logo

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g(x) = 1,$$

enquanto que se consideramos valores menores que 0 teremos que $g(x) = -1$ e logo

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} g(x) = -1.$$

Indicaremos tais fatos por:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$$

Definição 12.2

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, L \in \mathbb{R}$, e suponha que existam pontos de A arbitrariamente próximos de a pela esquerda. Dizemos que o **limite lateral** de $f(x)$ quando x tende a a **pela esquerda** é L

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in A, \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)[a - \delta < x < a \implies |f(x) - L| < \varepsilon].$$

De modo análogo, temos:

Definição 12.3

Sejam $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $a, L \in \mathbb{R}$, e suponha que existam pontos de A arbitrariamente próximos de a pela direita. Dizemos que o **limite lateral** de $f(x)$ quando x tende a a **pela direita** é L

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in A, \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) [a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

A diferença essencial da definição de limites laterais em relação à definição de limites é que, nos limites laterais, estamos considerando apenas valores menores que a (ou seja, intervalos da forma $a - \delta < x < a$) nos limites pela esquerda e valores maiores que a (ou seja, intervalos da forma $a < x < a + \delta$) nos limites pela direita.

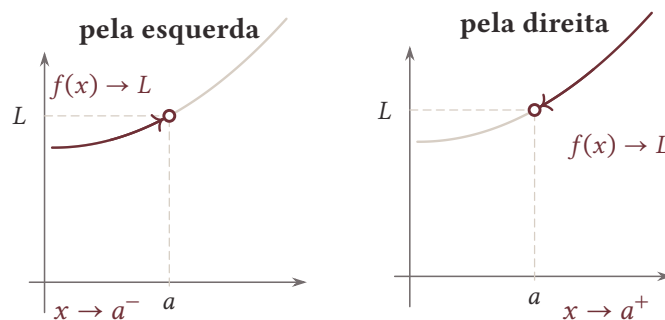


Figura 12.14. Interpretação geométrica dos limites laterais em $x = a$.

A próxima proposição relaciona a existência dos limites laterais e do limite para uma função f .

Teorema 12.1

Seja f definida em um intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente em a , e seja $L \in \mathbb{R}$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

O teorema anterior pode ser usado para demonstrar a existência ou não de alguns limites, como ilustrado nos exemplos seguintes:

Exemplo 12.10

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Solução. A existência do limite será verificada por meio dos limites laterais. Para isso, começaremos calculando o limite pela direita. Como $|x| = x$ se $x > 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

De maneira análoga, calculemos o limite pela esquerda. Como $|x| = -x$ se $x < 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0.$$

Como ambos os limites laterais existem e são iguais, temos pelo teorema 12.1 que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

<

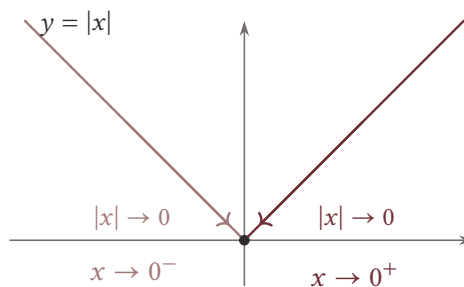


Figura 12.15. Limite $|x|$ quando x tende a 0.

Exemplo 12.11

Considere a função *maior inteiro menor ou igual a x* , i.e.,

$$\llbracket x \rrbracket = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, encontre

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket$$

Solução. Começaremos calculando o limite $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket$. Para isso, seja x tal que $x > n$. Como estamos interessados no comportamento numa vizinhança de n , podemos assumir sem perda de generalidade que $x < n+1$ e, assim, que $n < x < n+1$. Dessa forma, como para todo número real x , com $n \leq x < n+1$, tem-se que $\llbracket x \rrbracket = n$ e assim:

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket = n$$

Para o limite pela esquerda, se $n-1 < x < n$, então $\llbracket x \rrbracket = n-1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket = n-1.$$

Como os limites laterais são distintos, $\lim_{x \rightarrow n} \llbracket x \rrbracket$ não existe para nenhum $n \in \mathbb{Z}$.

<

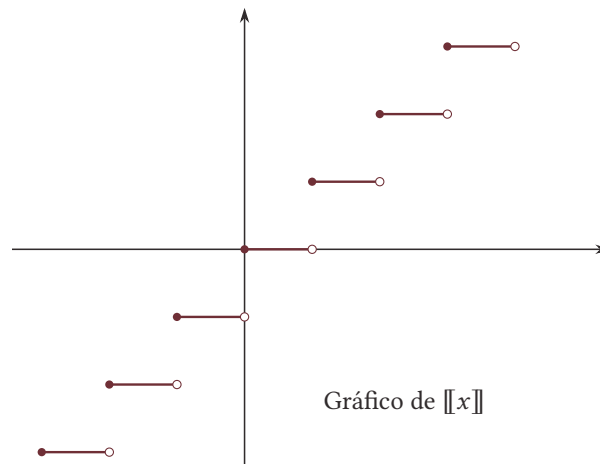


Figura 12.16. Comportamento lateral da função maior inteiro.

Exemplo 12.12 — Uma dose aplicada instantaneamente

Imediatamente após a primeira dose de um medicamento, sua concentração no sangue é de 4 mg/L. A contribuição dessa dose decai, em função do tempo t medido em horas, segundo $4e^{-0,1t}$. No instante $t = 2$, uma segunda dose aumenta instantaneamente a concentração em 6 mg/L; a contribuição adicional passa então a decair segundo $6e^{-0,1(t-2)}$. Construa uma função por partes para a concentração total $C(t)$, determine seus limites laterais em $t = 2$ e interprete a diferença entre eles.

Solução. Antes de $t = 2$, apenas a primeira dose contribui para a concentração. A partir desse instante, somam-se as contribuições das duas doses. Portanto,

$$C(t) = \begin{cases} 4e^{-0,1t}, & 0 \leq t < 2, \\ 4e^{-0,1t} + 6e^{-0,1(t-2)}, & t \geq 2. \end{cases}$$

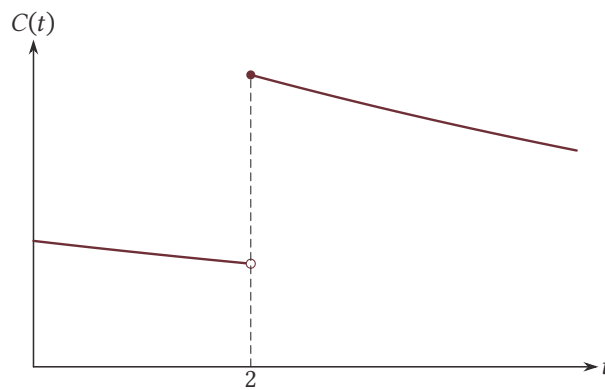
Antes da aplicação,

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} C(t) = 4e^{-0,2}.$$

Depois da aplicação,

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} C(t) = 4e^{-0,2} + 6.$$

Os limites laterais diferem em 6 mg/L; portanto, C é descontínua em $t = 2$. Nesse modelo idealizado, o salto representa uma dose que entra instantaneamente na corrente sanguínea.



<

Exercícios

12.5 — Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Calcule os limites laterais em 0 e decida se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe.

12.6 — Calcule os limites laterais de

$$g(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

quando $x \rightarrow 2$ e conclua sobre o limite bilateral.

12.7 — Determine C para que a função

$$h(x) = \begin{cases} 3x + C, & x < 1, \\ x^2 + 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

tenha limite quando $x \rightarrow 1$.

12.5 Propriedades do Limite de Funções

0/0 pede reorganização. Se a substituição produz 0/0, isso não é o valor do limite. Fatoração, racionalização pelo conjugado ou outra simplificação podem revelar o comportamento que a forma original encobre.

A definição permite justificar um limite controlando diretamente as distâncias envolvidas. Para calcular limites de expressões mais elaboradas, podemos aproveitar limites já conhecidos: as propriedades seguintes mostram como eles se combinam por meio das operações algébricas.

Proposição 12.2 — Propriedades do Limite

Seja c um número real e f e g duas funções reais tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Então:

$$\mathcal{L}1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B. \quad (\text{Limite da Soma})$$

$$\mathcal{L}2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B. \quad (\text{Limite da Diferença})$$

$$\mathcal{L}3. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = AB. \quad (\text{Limite do Produto})$$

$$\mathcal{L}4. \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA. \quad (\text{Limite do Produto por Escalar})$$

$$\mathcal{L}5. \text{ Se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0 \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}. \quad (\text{Limite do Quociente})$$

$$\mathcal{L}6. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|. \quad (\text{Limite do Módulo})$$

$$\mathcal{L}7. \lim_{x \rightarrow a} (f(x)^n) = A^n \text{ para todo inteiro } n \geq 1 \quad (\text{Limite de Potências})$$

$$\mathcal{L}8. \text{ Se } f(x) \geq 0 \text{ numa vizinhança perfurada de } a, \text{ então } A \geq 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A} \quad (\text{Limite da Raiz})$$

Usaremos as propriedades anteriores para calcular alguns limites:

Exemplo 12.13

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 2)$

Solução.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^3 + \lim_{x \rightarrow 2} (3x) + \lim_{x \rightarrow 2} 2 \quad \text{por } \mathcal{L}1 \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^3 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 \quad \text{por } \mathcal{L}4 \text{ e } \mathcal{L}7 \\ &= 8 + 6 + 2 = 16 \end{aligned}$$

◁

Exemplo 12.14

Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1}$

Solução. Se $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1) \neq 0$ então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^4 + 2)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)} \quad \text{por } \mathcal{L}5 \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^4 + \lim_{x \rightarrow a} 2}{\lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 1} \quad \text{por } \mathcal{L}1 \\ &= \frac{a^4 + 2}{a^2 + 1} \quad \text{por } \mathcal{L}7 \end{aligned}$$

◁

De modo geral, para um polinômio $p(x)$ podemos calcular o seu limite no ponto a calculando simplesmente $p(a)$, ou seja, por substituição direta de x por a .

Teorema 12.3

Dado um polinômio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ então

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre o grau do polinômio. Se $p(x)$ é um polinômio de grau zero, ou seja, constante, a igualdade é clara. Por hipótese indutiva, suponhamos que a igualdade anterior seja válida para os polinômios de grau menor ou igual a $n - 1$. Agora, usando a hipótese indutiva, **L1** e **L3** temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} p(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} c_n x^{n-1} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right) + \lim_{x \rightarrow a} (c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0) \\ &= c_n a^{n-1} a + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0 = p(a). \end{aligned}$$

■

Usando a propriedade **L5** temos que para funções racionais também vale substituição direta para o cálculo de limites:

Teorema 12.4

Sejam p e q polinômios, com $q(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Exemplo 12.15

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2}$.

Solução. Como $4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = 22 \neq 0$, o Teorema 12.4 permite calcular o limite por substituição direta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2} = \frac{8 + 24 + 2}{16 + 8 - 2} = \frac{34}{22} = \frac{17}{11}.$$

<

Ressaltamos que nem todos os limites podem ser calculados por substituição direta. Quando tivermos $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ dizemos que temos uma **indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$** . Nesses casos para o cálculo do limite temos que realizar uma simplificação antes da utilização das propriedades do limite. Duas estratégias de simplificação usuais são a fatoração e a multiplicação pelo conjugado, como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 12.16

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{se } x < 2 \\ 2x - C & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determine o valor de C de modo que o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista.

Solução. Começemos pelo cálculo dos limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 5) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - C) = 4 - C$$

Pelo Teorema 12.1, para que o limite exista devemos ter:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

E assim $1 = 4 - C$, e logo $C = 3$. ◀

Exemplo 12.17 – Indeterminação do tipo 0/0

Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6}$.

Cancelamento e limite. No limite $x \rightarrow 2$, interessa o comportamento da função em pontos $x \neq 2$ arbitrariamente próximos de 2. Após a fatoração, a simplificação de $(x - 2)$ é válida nesses pontos. A expressão simplificada pode diferir da original em $x = 2$ sem alterar o limite.

Solução. Nesse caso não podemos realizar substituição direta, tampouco usar a propriedade $\mathcal{L}5$ pois o limite do denominador é 0. Como o limite do numerador também é 0, temos que 2 é raiz de ambos os polinômios e assim:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)(x + 3)}.$$

No cálculo do limite interessam apenas os pontos com $x \neq 2$, nos quais o fator $(x - 2)$ pode ser simplificado. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{x + 3} = -\frac{2}{5}.$$
◀

Agora retornaremos ao Exercício Resolvido 12.3

Exemplo 12.18 – Indeterminação do tipo 0/0

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x}$.

Racionalização pelo conjugado. Multiplicar numerador e denominador pelo mesmo conjugado preserva a fração nos pontos em que o fator é não nulo. A identidade $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ transforma a diferença de radicais e, neste exemplo, revela o fator x , que pode ser simplificado para $x \neq 0$.

Solução. Novamente não podemos realizar substituição direta nem tampouco usar a propriedade $\mathcal{L}5$ pois o limite do denominador é 0. Nesse caso, multiplicaremos o numerador e o denominador pelo conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+25} - 5)(\sqrt{x+25} + 5)}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 25 - 25}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+25} + 5} \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x} = \frac{1}{10}$$

<

Teorema 12.5 – Teorema do Confronto

Sejam f , g e h definidas em um intervalo contendo a , exceto possivelmente no próprio ponto, e suponha que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Ao aplicar o teorema a estimativas com módulos, usaremos repetidamente a desigualdade triangular $|u + v| \leq |u| + |v|$, estabelecida no capítulo *Números*.

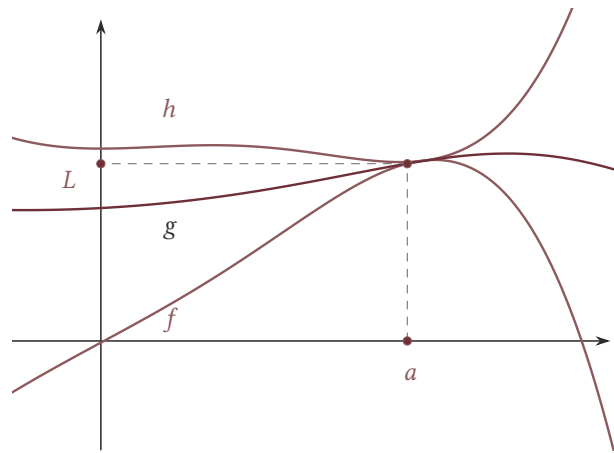


Figura 12.17. Teorema do Confronto

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, a hipótese $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fornece $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < |x - a| < \delta_1$. Analogamente, a hipótese $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ fornece $\delta_2 > 0$ para o qual $|h(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < |x - a| < \delta_2$.

Escolhemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, onde $(a - r, a + r)$ está contido no intervalo das hipóteses. Se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Subtraindo L , obtemos $-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$, ou seja, $|g(x) - L| < \varepsilon$. Isso prova, pela definição, que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. ■

Exemplo 12.19

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

Solução.

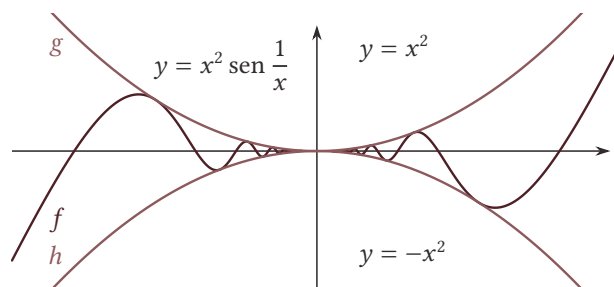


Figura 12.18. Confronto de $x^2 \sin(1/x)$ entre $-x^2$ e x^2 .

Como

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

temos que

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

◁

Teorema 12.6 – Primeiro Limite Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

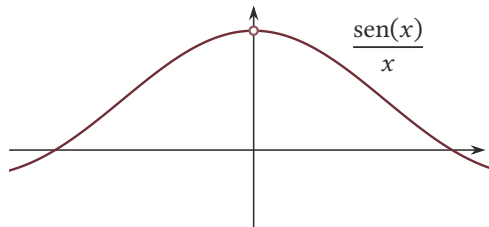


Figura 12.19. Gráfico de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Demonstração. Começaremos provando que, para $0 < |x| < \pi/2$, valem as desigualdades

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

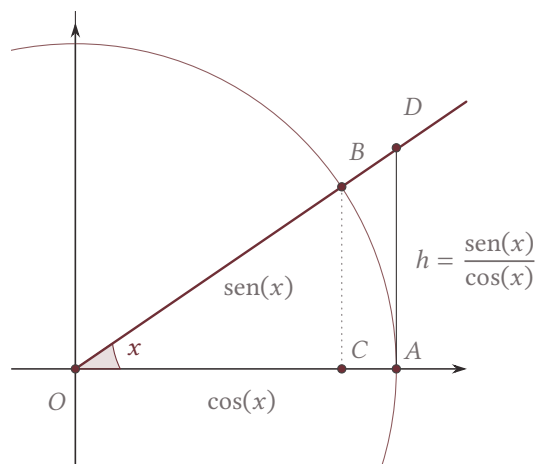


Figura 12.20. $\cos(x) < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$

Considere no círculo trigonométrico um ângulo x com $0 < x < \pi/2$, conforme apresentado na Figura 12.20. Como os triângulos $\triangle OCB$ e $\triangle OAD$ são semelhantes, se denotarmos por h o tamanho do segmento AD , por semelhança de triângulos temos que

$$\frac{h}{1} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

e logo $\text{Área}(\triangle OAD) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2 \cos(x)}$. Se denotarmos a área do setor circular delimitado pelos pontos O, A, B por $\text{Área}(OAB)$, pela Figura 12.20, vemos que valem as desigualdades para $x < \frac{\pi}{2}$:

$$\text{Área}(\triangle OBC) < \text{Área}(OAB) < \text{Área}(\triangle OAD).$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x}.$$

Dividindo por $\frac{\operatorname{sen}(x)}{2}$ temos:

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Finalmente, comparando os inversos dos três termos, obtemos:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

O caso $-\pi/2 < x < 0$ segue substituindo x por $-x$, pois tanto $\cos x$ quanto $(\operatorname{sen} x)/x$ são funções pares.

Falta ainda estabelecer que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Comparando o triângulo OAB com o setor circular, obtemos $0 < \operatorname{sen} x < x$ para $0 < x < \pi/2$. Pela paridade, $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ para $|x| < \pi/2$. Como $\cos x > 0$ nesse intervalo,

$$0 \leq 1 - \cos x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} \leq x^2.$$

O confronto mostra que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$; pela regra do quociente, $\lim_{x \rightarrow 0} 1/\cos x = 1$. Aplicando o Teorema do Confronto à desigualdade anterior, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

■

Exemplo 12.20

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Solução. Não podemos usar diretamente a regra do quociente, pois $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Para eliminar a

indeterminação, multiplicaremos o numerador e o denominador por $1 + \cos x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \frac{(1 + \cos(x))}{(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \frac{1}{(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

<

Teorema 12.7 – Mudança de Variáveis

Suponha que

- $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$,
- $g(x) \in \text{Dom } f$ para x numa vizinhança perfurada de a ,
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$,
- $g(x) \neq b$ numa vizinhança de a , com exceção, possivelmente, de a .

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$, existe $\eta > 0$ tal que

$$0 < |y - b| < \eta \implies |f(y) - L| < \varepsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ e $g(x) \neq b$ numa vizinhança perfurada de a , existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies 0 < |g(x) - b| < \eta.$$

Logo, $|f(g(x)) - L| < \varepsilon$, como desejado. ■

Exemplo 12.21

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$.

Solução. Podemos aplicar o Teorema 12.7 com $f(y) = \sin(y)/y$ para $y \neq 0$, $g(x) = x - 2$, $a = 2$ e $b = 0$. Para esse fim, observamos que $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de 2, excluindo o próprio 2. Dessa forma, como $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \sin(y)/y = 1$, pelo Teorema 12.7, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

<

Exercícios

12.8 — Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x^3 + x + 2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x + 2)(x^3 + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{8x^3 + 4x + 4} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$$

12.9 — Forneça exemplos de funções $f(x)$ e $g(x)$

tal que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ exista, mas que não existam $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

12.10 — Determine a de modo que o limite exista.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - ax^2 - 9x + 9a}{x^2 - 5x + 6}$$

12.11 — Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0$.

12.12 — Use o limite fundamental para calcular

os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x}$$

12.13 — Calcule os limites, indicando a transformação algébrica empregada.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{3x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x^2}$$

12.14 — Calcule, quando fizer sentido em relação ao domínio, os limites laterais e depois determine o limite da função no ponto indicado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x| + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

12.6 Continuidade

Continuidade exige três peças. Para f ser contínua em a , o valor $f(a)$ deve existir, o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ deve existir e os dois precisam ser iguais.

O limite descreve o comportamento de uma função nas proximidades de um ponto, sem levar em conta necessariamente o valor assumido nesse ponto. A continuidade exige a compatibilidade entre esses dois dados.

Intuitivamente, uma função $f : A \rightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, é **contínua** em a quando valores de x suficientemente próximos de a produzem valores de $f(x)$ próximos de $f(a)$. Antes da definição formal, consideremos dois exemplos de descontinuidade.

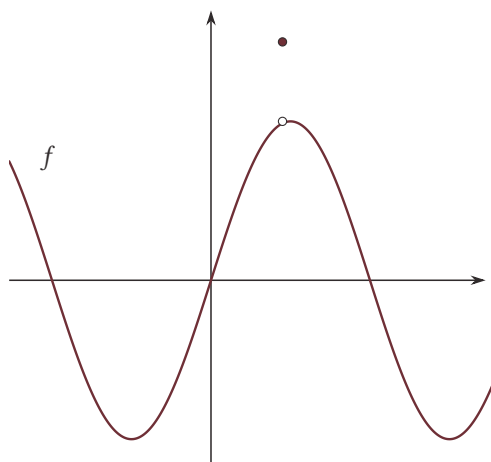


Figura 12.21. Função descontínua em $x = 1$.

Na Figura 12.21, quando tomamos valores de x diferentes de 1, porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2, porém o valor de $f(1)$ é 3 e, conseqüentemente, temos uma descontinuidade nesse ponto. Na Figura 12.22 temos um tipo distinto de descontinuidade. Quando nos aproximamos de 1 por valores maiores que 1, temos que $f(x)$ se aproxima de 2, enquanto que se aproximarmos de 1 por valores menores que 1, então $f(x)$ se aproxima de 1. Veja que isso se manifesta no “salto” da função no ponto $x = 1$.

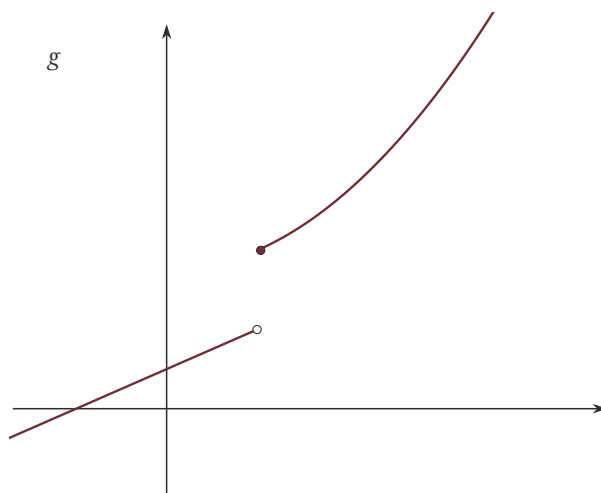


Figura 12.22. Função descontínua em $x = 1$

Considere agora a função $f(x) = x^2$ nas proximidades de $x = 1$.

x	x^2
2	4
1,5	2,25
1,3	1,69
1,2	1,44
1,1	1,21
1,01	1,0201
1,001	1,002001

Intuitivamente, quando tomamos valores de x diferentes de 1 porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(1) = 1$ e, logo, a função $f(x) = x^2$ é contínua nesse ponto.

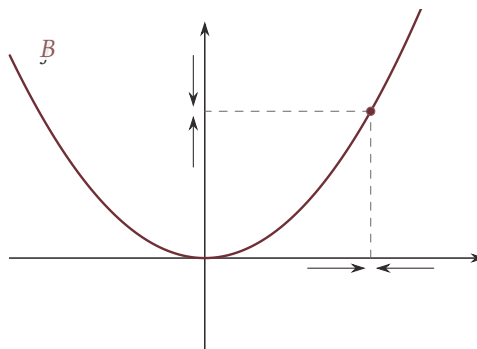


Figura 12.23. Continuidade de $f(x) = x^2$ em $x = 1$.

Definição 12.4

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $a \in A$. Dizemos que f é **contínua** em a quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A, \quad |x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Quando há pontos de $A \setminus \{a\}$ arbitrariamente próximos de a , essa condição equivale a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a).$$

Nos extremos de um intervalo, isso corresponde ao limite pelo lado pertencente ao domínio. Em pontos isolados, a condição é automaticamente satisfeita. Uma função contínua em todos os pontos de seu domínio é dita **contínua**.

Definição 12.5

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **contínua por partes** se existe uma partição finita $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ tal que f é contínua em cada intervalo (x_{i-1}, x_i) e possui limites laterais finitos em seus extremos, tomados pelo interior desse intervalo. Os valores de f nos pontos da partição

podem diferir desses limites. A exigência de limites finitos exclui, por exemplo, singularidades ilimitadas em pontos da partição.

Utilizaremos a definição de continuidade apresentada anteriormente para provarmos que algumas funções clássicas são contínuas:

Teorema 12.8

As seguintes funções são contínuas (em todo o seu domínio):

- (i). Funções Polinomiais.
- (ii). Funções Racionais.
- (iii). $\sin(x)$
- (iv). $\cos(x)$
- (v). c^x , com $c > 0$.

Demonstração. A demonstração da continuidade das funções polinomiais e racionais já foi feita implicitamente nos teoremas 12.3 e 12.4, nos quais provamos que dados polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com $q(a) \neq 0$ então:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Provaremos que $\sin(x)$ é contínua. Para isso começamos mostrando que $|\sin x| \leq |x|$ para $|x| < \pi/2$, com desigualdade estrita quando $x \neq 0$. Considere no círculo trigonométrico um ângulo x tal que $-\pi/2 < x < \pi/2$, conforme apresentado na Figura 12.24.

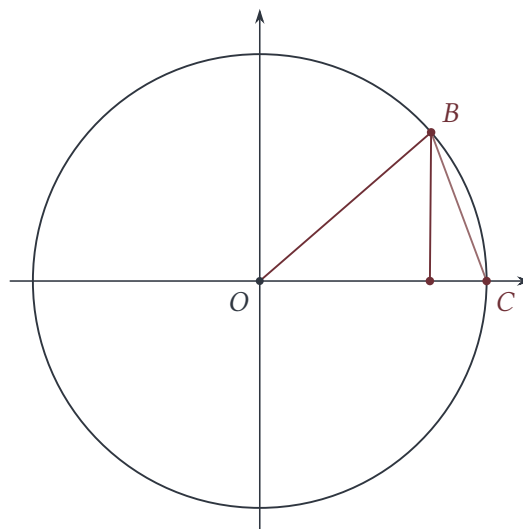


Figura 12.24. Comparação entre o triângulo e o setor circular para $0 < |x| < \pi/2$.

Geometricamente, considerando o círculo unitário, a área do triângulo OBC , que vale $|\sin(x)|/2$,

é menor que a área do setor circular OBC , cujo valor é $\frac{|x|}{2}$. Consequentemente, $|\sin x| \leq |x|$ para $|x| < \pi/2$, incluindo o caso $x = 0$, no qual ambos os membros se anulam. Fixado $a \in \mathbb{R}$, a identidade da diferença de senos fornece, para $|x - a| < \pi$,

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2 \left| \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \min\{\pi, \varepsilon\}$. Se $|x-a| < \delta$, então $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Isso prova a continuidade do seno em qualquer a .

Para o cosseno, a identidade da diferença dá, de modo semelhante,

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &= 2 \left| \sin \left(\frac{x+a}{2} \right) \right| \left| \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) \right| \\ &\leq |x-a| \quad (|x-a| < \pi). \end{aligned}$$

A mesma escolha de δ prova a continuidade do cosseno. A continuidade da função exponencial será demonstrada no Teorema 13.7. ■

Como consequência das propriedades do limite, temos as seguintes propriedades da continuidade de funções.

Teorema 12.9

Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a , então:

1. $f(x) + g(x)$ é contínua em a
2. $f(x)g(x)$ é contínua em a
3. Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

Demonstração. Como f e g são contínuas em a ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

As regras da soma e do produto fornecem

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = f(a)g(a) = (fg)(a).$$

Se $g(a) \neq 0$, a regra do quociente também se aplica:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Logo, as três funções são contínuas em a nas hipóteses indicadas. ■

Como corolário do teorema anterior, temos que a função $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, isto é, em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

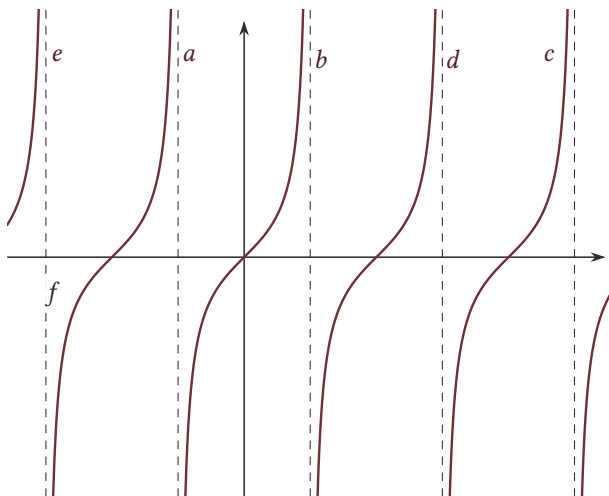


Figura 12.25. Gráfico da função tangente e suas assíntotas verticais.

Podemos calcular o limite de funções compostas $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x)$, desde que a função f seja contínua, calculando $f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$.

Teorema 12.10 – Limite da Composta

Sejam f e g funções tais que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Dom} f$. Se f é contínua em b e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, a continuidade de f em b fornece $\eta > 0$ tal que $y \in \operatorname{Dom} f$ e $|y - b| < \eta$ implicam $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|g(x) - b| < \eta$. Além disso, $g(x) \in \operatorname{Dom} f$ pela hipótese. Logo,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon.$$

Esse argumento inclui os pontos em que $g(x) = b$, pois neles a última diferença é zero. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$. ■

O Teorema do Limite da Composta permite calcular limites utilizando a mudança de variáveis, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 12.22

Mostre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = 2$.

Solução. Como já dissemos, as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas em todos os pontos. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4x + \pi) = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^5) = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4x + \pi)\right) + 2 = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^3 + x^5) = \cos\left(\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + x^5)\right) = 1.$$

Logo, por **L5** temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x^2 + 4x + \pi) + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^3 + x^5)} = 2$$

◀

Como consequência do Teorema do Limite da Composta (Teorema 12.10), a composição de funções contínuas é contínua:

Teorema 12.11

Sejam $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$, definidas em vizinhanças adequadas de a e $g(a)$. Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a .

Finalmente, uma função contínua e estritamente monótona em um intervalo tem inversa contínua em sua imagem.

Teorema 12.12

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e estritamente monótona. Então $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ é contínua em $f(I)$, com a continuidade entendida relativamente ao domínio.

Como consequência do Teorema 12.12, temos que as funções trigonométricas inversas $\arcsen(x)$, $\arccos(x)$, $\arctg(x)$, etc. e a função $\log$ são contínuas em todos os pontos de seus respectivos domínios de definição. Ainda como consequência do Teorema 12.11, temos que as funções elementares, isto é, as funções que são obtidas por soma, produto, quociente e composição de funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos os pontos nos quais estão definidas.

Exercícios

12.15 — Use o limite da composta para calcular os seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x^2 + x + \frac{1}{1+x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin(x^2)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \arcsen \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

12.16 — Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(3x^3 + \frac{1}{x} + 4\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3} |-5x^3 + x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2)(x^2 - 5x) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{4-t}{2-\sqrt{t}} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a+t)^3 - a^3}{t} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+t} - 2}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+t} - \sqrt{2}}{t} \quad \text{Prove que } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 2^{\cos(x)} = 0.$$

12.17 — Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a , então: $f(x) + g(x)$ é contínua em a $f(x) \cdot g(x)$ é contínua em a Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

12.18 — Seja $f(x)$ a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ ax + 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determine, se existir, o valor de a que torna f contínua em 0.

12.19 — Dado $g(x)$ a função definida como:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 1 & \text{se } x < b \\ ax^2 + 3 & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Determine, se existir, o valor de a que torna g contínua em b , separando o caso $b = 0$.

Dado $h(x)$ a função definida como:

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x) + 1 & \text{se } x < b \\ ax^2 + b & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Determine, se existir, o valor de a que torna h contínua em b , separando o caso $b = 0$.

12.21 — Uma tabela progressiva fictícia isenta os primeiros R\$ 2.000 de renda mensal, tributa em 10% apenas a parcela entre R\$ 2.000 e R\$ 4.000 e, acima disso, tributa em 20% somente a parcela excedente. O imposto total $T(x)$ sobre uma renda $x \geq 0$ é, portanto,

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2000, \\ 0,10(x - 2000), & 2000 < x \leq 4000, \\ 200 + 0,20(x - 4000), & x > 4000. \end{cases}$$

Calcule $T(3500)$ e $T(5000)$. Calcule os limites laterais de T em 2000 e 4000. A função é contínua nesses pontos? Para $x > 0$, defina a alíquota efetiva por $E(x) = T(x)/x$. Ela é contínua nos dois pontos de corte? Calcule $E(3500)$ e $E(5000)$. Explique por que a alíquota marginal muda nos pontos de corte sem que o imposto total dê um salto.

12.7 Propriedades das Funções Contínuas

Hipóteses no intervalo. O Teorema do Valor Intermediário usa continuidade em todo $[a, b]$. Para garantir máximo e mínimo globais, além da continuidade, o intervalo deve ser fechado e limitado.

A continuidade é definida ponto a ponto, mas, quando vale em todo um intervalo, impõe condições ao comportamento da função nesse conjunto. Os próximos resultados mostram como ela garante a existência de valores intermediários e, em intervalos fechados e limitados, de valores extremos.

12.7.1 Teorema do Valor Intermediário

Geometricamente, o Teorema do Valor Intermediário nos diz que o gráfico de uma função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, ou, dito de outra forma, dado d entre $f(a)$ e $f(b)$, o gráfico de $f(x)$ deve interceptar a reta horizontal $y = d$.

Teorema 12.13 — Teorema do Valor Intermediário

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então, para todo d estritamente entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

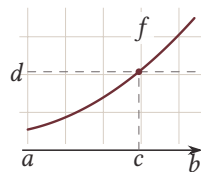


Figura 12.26. Interpretação geométrica do Teorema do Valor Intermediário.

A demonstração desse teorema será apresentada adiante, nesta seção. Antes, apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Valor Intermediário na demonstração de existência de soluções para equações. Para tanto, por sua utilidade, enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário em uma forma especial e mais restrita: o Teorema de Bolzano.

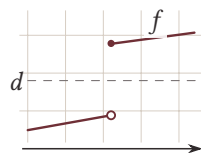


Figura 12.27. O Teorema do Valor Intermediário só é válido para funções contínuas.

Teorema 12.14 — Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos. Então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

O teorema anterior nos diz que o gráfico de uma função contínua que, em a está abaixo do eixo x e em b está acima dele (ou vice-versa), em algum ponto do intervalo $[a, b]$ deve cruzar o eixo x .

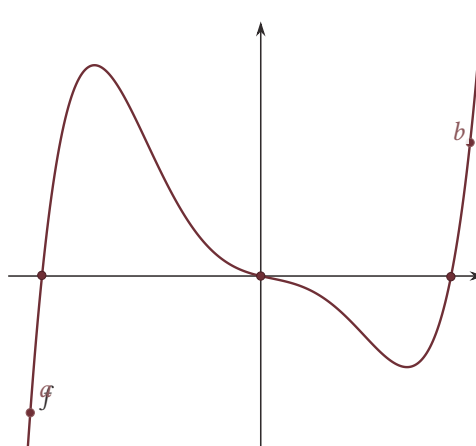


Figura 12.28. Interpretação geométrica do Teorema de Bolzano.

Exemplo 12.23

Mostre que a equação $\cos(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, \pi]$.

Solução. A equação é equivalente a

$$\cos x - x = 0.$$

Considere $g(x) = \cos x - x$, função contínua em $[0, \pi]$. Temos

$$g(0) = 1 > 0 \quad \text{e} \quad g(\pi) = -1 - \pi < 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $g(c) = 0$. Portanto, $\cos c = c$.

◁

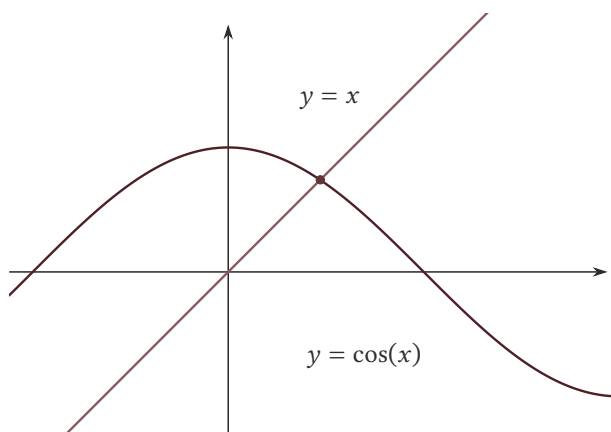


Figura 12.29. Intersecção dos gráficos de $y = x$ e $y = \cos(x)$

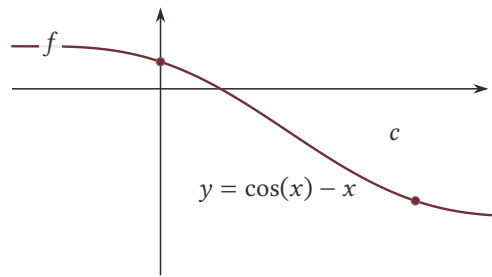


Figura 12.30. Gráfico de $y = \cos(x) - x$.

Exemplo 12.24

Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$.

Solução. A equação é equivalente a

$$3^x - x^2 - 4 = 0.$$

Considere $g(x) = 3^x - x^2 - 4$, que é contínua em $[1, 2]$. Como

$$g(1) = -2 < 0 \quad \text{e} \quad g(2) = 1 > 0,$$

o Teorema de Bolzano garante a existência de $c \in (1, 2)$ tal que $g(c) = 0$. Logo, $3^c = c^2 + 4$. ◀

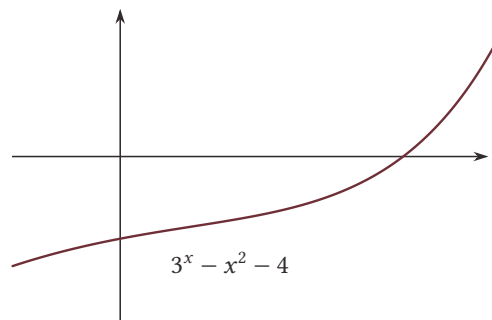


Figura 12.31. Gráfico de $y = 3^x - x^2 - 4$.

Demonstração do Teorema 12.13. Suponha primeiro que $f(a) < d < f(b)$ e considere

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < d\}.$$

Esse conjunto é não vazio, pois $a \in S$, e é limitado superiormente por b . Pela completude dos reais, existe $c = \sup S$.

A continuidade em a e a desigualdade $f(a) < d$ garantem que alguns pontos à direita de a ainda pertencem a S ; logo, $c > a$. Analogamente, a continuidade em b e $f(b) > d$ garantem um intervalo à esquerda de b que não contém pontos de S ; portanto, $c < b$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ de modo que $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$ e $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ para $|x - c| < \delta$. Pela propriedade do supremo, existe $x^* \in S$ com $c - \delta < x^* \leq c$. Assim,

$$f(c) < f(x^*) + \varepsilon < d + \varepsilon.$$

Por outro lado, qualquer $\hat{x} \in (c, c + \delta)$ não pertence a S , pois c é cota superior. Logo, $f(\hat{x}) \geq d$ e

$$f(c) > f(\hat{x}) - \varepsilon \geq d - \varepsilon.$$

Portanto, $|f(c) - d| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Pelo Exercício 3.24, concluímos que $f(c) = d$.

Se $f(b) < d < f(a)$, aplicamos o caso já provado à função contínua $-f$ e ao valor $-d$. Obtemos novamente um ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = d$. ■

Proposição 12.15

Uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de um intervalo fechado $I = [a, b]$ em $\mathbb{R}$ é injetiva se e somente se a função f é estritamente monotônica em $[a, b]$.

Demonstração. Se f é estritamente monótona e $x < y$, então $f(x) \neq f(y)$; logo, f é injetora.

Reciprocamente, suponha f contínua e injetora. Para quaisquer $x_1 < x_2 < x_3$ em $[a, b]$, afirmamos que $f(x_2)$ está estritamente entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Se isso não ocorresse, as três imagens seriam distintas, e uma das imagens dos extremos estaria entre as outras duas. Se $f(x_1)$ estivesse entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$, o Teorema do Valor Intermediário em $[x_2, x_3]$ daria um ponto x' com $f(x') = f(x_1)$, contradizendo a injetividade. Se $f(x_3)$ estivesse entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, aplicaríamos o mesmo argumento em $[x_1, x_2]$.

Se $a = b$, a conclusão é imediata. Caso contrário, suponha primeiro $f(a) < f(b)$. A propriedade que acabamos de provar mostra que $f(a) < f(x) < f(b)$ para $a < x < b$. Para $a < x < y < b$, aplicada ao trio a, x, y , ela fornece $f(a) < f(x) < f(y)$. Incluindo os extremos, concluímos que f é estritamente crescente em $[a, b]$. Se $f(a) > f(b)$, aplicamos esse raciocínio a $-f$ e concluímos que f é estritamente decrescente. ■

Exercícios

12.22 — Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$

12.23 — Mostre que a equação $4^{x^2} - 2(x+1)^2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$

12.24 — Mostre que a equação $x^5 - x^2 - 2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$

12.25 — Mostre que a equação $x^2 = \sqrt{x+2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$

12.26 — Mostre que a equação $\operatorname{tg}(x) = x$ tem pelo menos 3 soluções.

12.27 — Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número real b tal que $b^2 = 2$, conclua que existe raiz quadrada de 2.

Exercícios

12.28 — Construa uma tabela de valores à esquerda e à direita de 2 para $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Conjecture o limite e explique por que o valor de $f(2)$ não é necessário para calculá-lo.

12.29 — Calcule, se existir,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x + 1|}{x + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$$

No primeiro item, compare explicitamente os limites laterais.

12.30 — Determine a e b de modo que

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 2, \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

seja contínua em 2 e tenha limite 1 nesse ponto. Há mais de uma solução?

12.31 — A vazão de uma bomba é $Q(t) = 18 - 3t$ L/min para $0 \leq t < 4$. No instante $t = 4$ min, ela é desligada, e $Q(t) = 0$ para $t \geq 4$. Esboce Q em $[0, 6]$ e classifique sua continuidade em $t = 4$.

12.32 — Pela definição ε - δ , demonstre que

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5.$$

Escolha um δ em função de ε e verifique a implicação completa.

12.33 — Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que $x^3 + x - 5 = 0$ tem pelo menos uma raiz em $(1, 2)$. Em seguida, explique por que o teorema não afirma que a raiz seja única.

12.34 — Determine todos os pontos de descontinuidade de

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(x + 1)}.$$

Classifique cada um como removível ou infinita e proponha uma redefinição que elimine a removível.

12.35 — Um termostato mantém a temperatura entre $20,0^\circ\text{C}$ e $20,5^\circ\text{C}$, ligando o aquecedor ao atingir o limite inferior e desligando-o no superior. Discuta se a temperatura e o estado *ligado/desligado* são funções contínuas do tempo.

12.36 — Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(3x))/x^2$ usando uma identidade trigonométrica e o primeiro limite fundamental.

12.37 — Dê um contraexemplo para cada afirmação: “a soma de duas funções descontínuas é descontínua” e “se f^2 é contínua, então f é contínua”.

12.7.2 Valores Extremos

O Teorema do Valor Intermediário garante que a função não omite valores entre duas imagens. Outra questão é saber se ela atinge um maior e um menor valor. Em um intervalo fechado e limitado, a continuidade também fornece essa garantia.

Teorema 12.16

Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f é limitada nesse intervalo.

Demonstração. Suponha que f não seja limitada em $[a, b]$. Divida o intervalo ao meio e escolha uma metade na qual f continue ilimitada; se isso ocorrer nas duas, escolha a metade esquerda. Repetindo o processo, obtemos intervalos encaixados

$$[a_n, b_n], \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n},$$

em cada um dos quais f é ilimitada.

Seja

$$A = \{a_n : n \geq 0\} \quad \text{e} \quad \alpha = \sup A.$$

Como os intervalos são encaixados, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para todo n . Pela continuidade de f em α , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - \alpha| < \delta \implies |f(x)| < 1 + |f(\alpha)|.$$

Escolha n com $(b - a)/2^n < \delta$. Então todo $x \in [a_n, b_n]$ satisfaz $|x - \alpha| < \delta$, e portanto f é limitada em $[a_n, b_n]$, contradizendo a escolha desse intervalo. ■

Definição 12.6

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo global (ou absoluto)** de f , se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **máximo global**.
- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo global** de f , se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo global**.
- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

Teorema 12.17 — Teorema de Weierstrass do Valor Extremo

Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então f atinge seus valores máximos e mínimos em $[a, b]$.

Demonstração. Como f é limitada em $[a, b]$, sua imagem possui supremo; denotemos esse número por M . Suponha que f não atinja M . Então $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$, e a função

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

é contínua no intervalo. Pelo Teorema 12.16, ela também é limitada: existe $K > 0$ tal que $g(x) \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Logo,

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq K \implies f(x) \leq M - \frac{1}{K}.$$

Isso produz uma cota superior para $f([a, b])$ menor que M , contrariando a definição de supremo. Portanto, f atinge seu máximo. Aplicando o mesmo argumento a $-f$, concluímos que f também atinge seu mínimo. ■

Exercícios

12.38 — Determine o máximo e o mínimo absolutos de $f(x) = 1/x$ em $[1, 4]$.

$f(x) = x^2 - 4x + 1$
em $[-1, 5]$.

12.39 — Determine os valores máximo e mínimo

12.40 — Explique por que o Teorema de Weierstrass não garante máximo e mínimo para $f(x) = x$ no intervalo aberto $(0, 1)$, e verifique diretamente o que ocorre.

12.8 ★ Demonstração das propriedades básicas de limite

As propriedades algébricas dos limites decorrem diretamente da definição. Mostraremos, em particular, as propriedades da soma e do produto.

Teorema 12.18

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Suponha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2.$$

A desigualdade triangular fornece

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|.$$

Basta, portanto, controlar cada parcela por $\varepsilon/2$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Se $0 < |x - a| < \delta$, então as duas desigualdades anteriores valem e, pela desigualdade triangular,

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2.$$

■

Teorema 12.19

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Demonstração. Escreva

$$F = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad G = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |G|)}$$

quando $0 < |x - a| < \delta_1$. Escolha também $\delta_2 > 0$ de modo que, quando $0 < |x - a| < \delta_2$,

$$|g(x) - G| < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(1 + |F|)} \right\}.$$

A segunda desigualdade implica

$$|g(x)| \leq |g(x) - G| + |G| < 1 + |G|.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - FG| &\leq |g(x)| |f(x) - F| + |F| |g(x) - G| \\ &< (1 + |G|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |G|)} + (1 + |F|) \frac{\varepsilon}{2(1 + |F|)} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = FG.$$

■

Teorema 12.20 – Limite do Quociente

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Demonstração. Escreva $M = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. Basta provar que $\lim_{x \rightarrow a} 1/g(x) = 1/M$, pois então $f/g = f \cdot (1/g)$ e a regra do produto fornece a conclusão.

Dado $\varepsilon > 0$, a definição de limite fornece $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon|M|^2}{2} \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta_1, \quad (12.1)$$

e

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2} \quad \text{se } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Pela desigualdade triangular reversa, a segunda condição implica

$$|g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > \frac{|M|}{2} > 0.$$

Em particular, $g(x)$ não se anula nessa vizinhança e

$$\left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{2}{|M|}. \quad (12.2)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $0 < |x - a| < \delta$ as estimativas (12.1) e (12.2) dão

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \frac{|g(x) - M|}{|M| |g(x)|} \\ &\leq \frac{2|g(x) - M|}{|M|^2} < \frac{2}{|M|^2} \frac{\varepsilon |M|^2}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova o limite do inverso e, portanto, o do quociente. ■

12.9 ★ Continuidade uniforme

Na continuidade em um ponto, o tamanho da vizinhança no domínio pode depender do ponto considerado. A continuidade uniforme exige um controle único para todo o conjunto: fixado o erro permitido nos valores da função, escolhemos uma mesma escala no domínio que funciona em todos os pontos.

Definição 12.7 – Continuidade uniforme

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **uniformemente contínua** em A se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in A$,

$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

A diferença para a continuidade usual está na ordem das escolhas. Na continuidade em um ponto x_0 , o número δ pode depender de x_0 e de ε . Na continuidade uniforme, escolhemos δ depois de fixar apenas ε ; em seguida, esse mesmo δ deve funcionar para todos os pares $x, y \in A$.

Teorema 12.21

Se f é uniformemente contínua em A , então f é contínua em cada ponto de A .

Demonstração. Fixe $x_0 \in A$ e $\varepsilon > 0$. Pela continuidade uniforme, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in A$ com $|x - y| < \delta$, vale $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tomando $y = x_0$, obtemos exatamente a condição de continuidade em x_0 . ■

Exemplo 12.25

Mostre que $f(x) = 3x + 7$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/3$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $|x - y| < \delta$, então

$$|f(x) - f(y)| = |3x - 3y| = 3|x - y| < 3\delta = \varepsilon.$$

A escolha de δ não depende de x nem de y . ◀

Exemplo 12.26

Mostre que $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $(0, 4)$.

Solução. Dados $x, y \in (0, 4)$,

$$|x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| < 8|x - y|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/8$. Se $|x - y| < \delta$, então

$$|x^2 - y^2| < 8\delta = \varepsilon.$$

Novamente, δ depende apenas de ε . ◀

Os dois exemplos anteriores possuem uma propriedade mais forte.

Definição 12.8 – Condição de Lipschitz

Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é **Lipschitz** em A se existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \text{para todos } x, y \in A.$$

Qualquer constante M com essa propriedade é chamada de **constante de Lipschitz**.

Teorema 12.22

Toda função Lipschitz em A é uniformemente contínua em A .

Demonstração. Se $M = 0$, a função é constante e qualquer $\delta > 0$ serve. Se $M > 0$, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/M$. Para $x, y \in A$ com $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

■

Teorema 12.23

Se f e g são uniformemente contínuas em $A \subset \mathbb{R}$, então $f + g$ é uniformemente contínua em A . Além disso, para toda constante $c \in \mathbb{R}$, a função cf é uniformemente contínua em A .

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta_f, \delta_g > 0$ correspondentes ao erro $\varepsilon/2$ para f e g , respectivamente. Com $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$, se $|x - y| < \delta$, então

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Para cf , o caso $c = 0$ é imediato. Se $c \neq 0$, basta usar para f o erro $\varepsilon/|c|$.

■

Exemplo 12.27

Mostre que $f(x) = x^2$ é contínua, mas não uniformemente contínua em $(0, \infty)$.

Solução. Fixe $x_0 > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tome

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2x_0 + 1}\right\}.$$

Se $|x - x_0| < \delta$, então $x < x_0 + 1$ e

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| < (2x_0 + 1)\delta \leq \varepsilon.$$

Logo, f é contínua em cada $x_0 > 0$.

Para mostrar que a continuidade não é uniforme, tome $\varepsilon = 1$. Seja $\delta > 0$ arbitrário e escolha

$$x_0 = \frac{1}{\delta}, \quad x = x_0 + \frac{\delta}{2}.$$

Então $x, x_0 > 0$ e $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$, mas

$$|x^2 - x_0^2| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Portanto, nenhum único δ funciona em todo $(0, \infty)$.

<

O resultado seguinte mostra por que intervalos fechados e limitados têm um papel especial.

Teorema 12.24 — Teorema de Heine–Cantor

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que f não seja uniformemente contínua. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ existem $x, y \in [a, b]$ tais que

$$|x - y| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Chamaremos de *ruim* um intervalo fechado $I \subset [a, b]$ no qual essa mesma propriedade vale, com o mesmo ε_0 .

O intervalo $[a, b]$ é ruim. Se $I = [u, v]$ é ruim e tem comprimento $\ell = v - u$, considere os dois intervalos sobrepostos

$$I_- = \left[u, u + \frac{2\ell}{3} \right], \quad I_+ = \left[u + \frac{\ell}{3}, v \right].$$

Ao menos um deles é ruim. De fato, se nenhum fosse, existiriam $\delta_-, \delta_+ > 0$ para os quais pares suficientemente próximos dentro de I_- ou de I_+ teriam variação de f menor que ε_0 . Tomando

$$\delta < \min \left\{ \delta_-, \delta_+, \frac{\ell}{3} \right\},$$

qualquer par $x, y \in I$ com $|x - y| < \delta$ estaria inteiramente contido em I_- ou inteiramente contido em I_+ , contradizendo o fato de I ser ruim.

Escolhendo a cada etapa um subintervalo ruim, obtemos intervalos encaixados

$$I_n = [a_n, b_n]$$

cujos comprimentos são $(2/3)^n(b - a)$. Seja

$$\alpha = \sup\{a_n : n \geq 0\}.$$

Como os intervalos são encaixados, $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para todo n . Pela continuidade de f em α , existe $\eta > 0$ tal que, para $z \in [a, b]$,

$$|z - \alpha| < \eta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Escolha n tão grande que $b_n - a_n < \eta$. Então todo $z \in I_n$ satisfaz $|z - \alpha| < \eta$ e, para quaisquer $x, y \in I_n$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\alpha)| + |f(y) - f(\alpha)| < \varepsilon_0.$$

Isso contradiz o fato de I_n ser ruim. Logo, f é uniformemente contínua. ■

Exercícios

12.41 — Mostre que toda função afim $f(x) = mx + b$ é Lipschitz em $\mathbb{R}$ e determine uma constante de Lipschitz.

12.42 — Mostre que $f(x) = x^2$ é uniformemente contínua em $[-R, R]$, com $R > 0$.

12.43 — Mostre que $f(x) = 1/x$ é uniformemente contínua em $[1, \infty)$.

O capítulo começou com aproximações locais: fazer x aproximar-se de um ponto e controlar o que ocorre com $f(x)$. O Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Weierstrass mostraram que, em intervalos fechados e limitados, a continuidade também produz conclusões globais. A continuidade uniforme fecha esse percurso: em todo o intervalo, uma mesma escala no domínio controla a variação da função. No próximo capítulo, usaremos limites para descrever o que acontece quando a variável ou os valores da função deixam de permanecer limitados.

13

Limites Infinitos e no Infinito

Segure o infinito na palma da mão e a eternidade em uma hora.

William Blake, *Augúrios da Inocência*

O estudo anterior tratou de aproximações a pontos e valores reais. Ampliaremos essa linguagem para descrever duas situações: a variável pode crescer em módulo sem limite, ou os valores da função podem fazê-lo quando a variável se aproxima de um ponto. Distinguir essas situações será essencial para interpretar o comportamento dos gráficos.

13.1 Limites no Infinito

No infinito não há ponto final. Em $x \rightarrow \infty$, não estamos aproximando x de um número. Perguntamos o que acontece com $f(x)$ quando x ultrapassa valores cada vez maiores.

Considere a função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, cujo gráfico é apresentado na Figura 13.1.

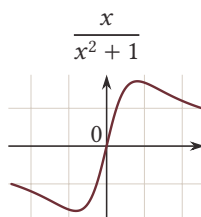


Figura 13.1. Gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Podemos observar que, à medida que os valores de x crescem, os valores da função se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Por outro lado, quando x assume valores negativos cada vez maiores em módulo, os valores da função também se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Podemos modificar a noção de limite anterior de modo a lidar com esses casos. A modificação essencial é formalizar a afirmação de que “se x é suficientemente grande” por meio de “existe $M > 0$ tal que, se $x > M$ ”.

Definição 13.1 – Limite quando $x \rightarrow +\infty$

Seja f definida para todo $x > c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e seja $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 13.2 – Limite quando $x \rightarrow -\infty$

Seja f definida para todo $x < c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e seja $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$x < -M \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Geometricamente, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico na extremidade correspondente. O limite deve ser analisado separadamente em $+\infty$ e $-\infty$, pois os resultados podem ser diferentes.

Exemplo 13.1

Mostre a partir da definição que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Solução. Queremos mostrar que existe M tal que, se $x > M$, $|f(x)| < \varepsilon$. Para tanto, começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e, assim, temos que a desigualdade $\frac{1}{x} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim, escolhemos $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Quando $x > M$, então $x > \frac{1}{\varepsilon}$ e, assim, $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$. Isso prova que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. ◁

Exemplo 13.2

Mostre a partir da definição que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Solução. Queremos mostrar que existe M tal que, se $x > M$, $|f(x)| < \varepsilon$. Para tanto, começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos

supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e, assim, temos que a desigualdade $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Assim, escolhemos $M = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Quando $x > M$, então $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ e, assim, $0 < \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. Isso prova que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. $\triangleleft$

Exemplo 13.3 — Quando uma enzima está praticamente saturada

Em um ensaio, observa-se que a velocidade de uma reação enzimática se aproxima de $80 \mu\text{mol}/\text{min}$ quando a concentração S do substrato aumenta. Para $S = 2$, a velocidade medida é $40 \mu\text{mol}/\text{min}$. Adote um modelo de saturação da forma

$$v(S) = \frac{aS}{b+S}, \quad S \geq 0, \quad a, b > 0.$$

Determine a e b . O laboratório considera a enzima praticamente saturada quando sua velocidade atinge pelo menos 95% da velocidade limite. Qual é a menor concentração que satisfaz esse critério? A velocidade limite é atingida para alguma concentração finita?

Termos dominantes no infinito. Dividir numerador e denominador pela mesma potência preserva a fração, para $S \neq 0$, e torna explícitos os termos que tendem a zero. O comportamento assintótico passa, assim, a ser determinado pelos termos de maior grau.

Solução. Dividindo numerador e denominador por S , vemos que $\lim_{S \rightarrow \infty} v(S) = a$. A primeira observação fornece, portanto, $a = 80$. Usando a medida realizada em $S = 2$,

$$40 = \frac{80 \cdot 2}{b+2},$$

de onde $b = 2$. Assim, o modelo calibrado é

$$v(S) = \frac{80S}{S+2}.$$

A condição de saturação prática é $v(S) \geq 0,95 \cdot 80 = 76$. Como $S+2 > 0$,

$$\frac{80S}{S+2} \geq 76 \iff 80S \geq 76S + 152 \iff S \geq 38.$$

Por outro lado,

$$80 - v(S) = \frac{160}{S+2} > 0$$

para todo S finito. A velocidade pode ficar tão próxima de $80 \mu\text{mol}/\text{min}$ quanto se queira, mas nunca atinge exatamente esse valor no modelo.

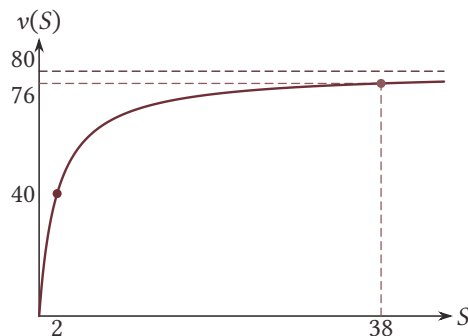


Figura 13.2. O modelo tende ao platô 80; o nível de 95% é atingido em $S = 38$.

◁

Exercícios

13.1 — Mostre, a partir da definição, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+2} = 0.$$

13.2 — Determine as assíntotas horizontais de

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

analisando separadamente $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

13.2 Limites Infinitos

∞ **não é um número.** Escrever $f(x) \rightarrow +\infty$ não atribui um valor real ao limite: significa que $f(x)$ pode superar qualquer número fixado. Por isso não fazemos aritmética comum com ∞ .

Nos limites no infinito, acompanhamos a função quando a variável se afasta indefinidamente da origem. Também pode ocorrer que os valores da função cresçam sem limite quando a variável se aproxima de um ponto finito. É o que acontece no Exercício Resolvido 12.5: o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ não existe como número real, mas seu comportamento pode ser descrito por um limite infinito.

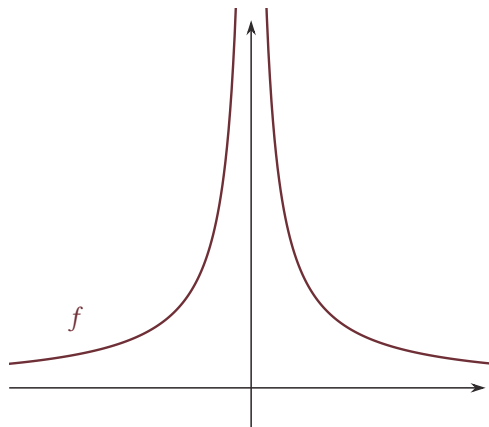


Figura 13.3. A função $1/|x|$ não tem limite finito quando x tende a zero.

Para $x \neq 0$ suficientemente próximo de zero, o valor de $1/|x|$ pode ultrapassar qualquer número real positivo. Esse comportamento é expresso pela notação de limite infinito.

Considere também os limites laterais de $7/(x-4)$ quando x se aproxima de 4.

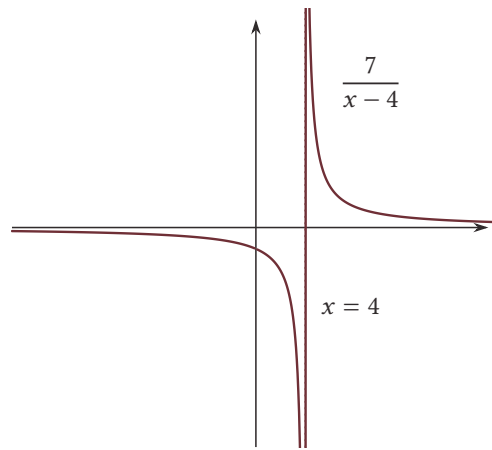


Figura 13.4. Limite infinito indicado pelo crescimento sem cota do gráfico.

A partir da Figura 13.4 podemos observar que, quando x tende a 4 pela direita, isto é, por valores maiores que 4, a função $\frac{7}{x-4}$ cresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes. Quando x tende a 4 pela esquerda, isto é, por valores menores que 4, a função $\frac{7}{x-4}$ decresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes e negativos. Representamos esses comportamentos por:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{7}{x-4} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{7}{x-4} = -\infty$$

Definição 13.3 – Limites infinitos

Seja f uma função definida em uma vizinhança de a , exceto possivelmente no próprio ponto a . Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Analogamente, dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < -M.$$

Para o limite pela direita, substituímos $0 < |x - a| < \delta$ por $0 < x - a < \delta$; para o limite pela esquerda, usamos $0 < a - x < \delta$. Em cada caso, basta que f esteja definida no intervalo lateral correspondente. A desigualdade sobre $f(x)$ permanece $f(x) > M$ para $+\infty$ e $f(x) < -M$ para $-\infty$.

Se pelo menos um dos limites laterais de $f(x)$ quando $x \rightarrow a$ é $+\infty$ ou $-\infty$, a reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico. O sinal e o lado de aproximação descrevem para qual direção cada ramo se afasta.

Para definir limites infinitos quando x tende ao infinito, usamos um limiar $A > 0$. Para todo $M > 0$,

deve existir $A > 0$ de modo que:

- $x > A \implies f(x) > M$, no caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- $x > A \implies f(x) < -M$, no caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
- $x < -A \implies f(x) > M$, no caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
- $x < -A \implies f(x) < -M$, no caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Supomos, em cada caso, que o domínio de f contém a semirreta considerada.

Exemplo 13.4

Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$.

Solução. Pela definição, dado $M > 0$, devemos encontrar $A > 0$ tal que $x > A$ implique $x > M$. Basta escolher $A = M$. ◀

Exemplo 13.5

Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$.

Solução. Dado $M > 0$, escolhemos $A = \sqrt{M}$. Se $x > A$, então $x^2 > M$, como desejado. ◀

Exemplo 13.6 – Até onde a paisagem permanece nítida?

Para uma configuração fixa de câmera, lente e abertura, seja H uma constante positiva. Se a câmera estiver focalizada a uma distância s , com $0 < s < H$, um modelo aproximado fornece as extremidades da região considerada aceitavelmente nítida:

$$d_{\text{perto}}(s) = \frac{Hs}{H+s}, \quad d_{\text{longe}}(s) = \frac{Hs}{H-s}.$$

Em uma fotografia de teste focalizada a 8 metros, o ponto mais distante considerado nítido estava a 24 metros. Determine H e investigue o que ocorre com as duas extremidades quando $s \rightarrow H^-$. Nessa configuração, uma pedra situada a 5 metros e o horizonte podem aparecer simultaneamente nítidos?



Figura 13.5. Esquema da região de profundidade de campo no modelo fotográfico.

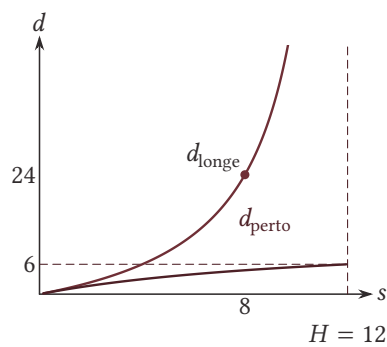
Solução. A fotografia de teste fornece

$$24 = \frac{8H}{H - 8}.$$

Logo, $24H - 192 = 8H$ e $H = 12$ metros. Consequentemente,

$$\lim_{s \rightarrow 12^-} \frac{12s}{12 + s} = 6, \quad \lim_{s \rightarrow 12^-} \frac{12s}{12 - s} = +\infty.$$

Ao focalizar progressivamente mais perto de H , o extremo distante da região nítida se afasta indefinidamente, enquanto o extremo próximo tende a 6 metros. A pedra situada a 5 metros fica fora dessa região; portanto, ela e o horizonte não podem aparecer simultaneamente nítidos nessa configuração segundo o modelo.



◀

Exercícios

13.3 — Mostre, a partir da definição, que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty.$$

13.4 — Calcule os limites laterais de $(x+1)/(x-2)$ em $x = 2$ e identifique a assíntota vertical.

13.2.1 Propriedades dos Limites Infinitos e no Infinito

As expressões $+\infty$ e $-\infty$ descrevem comportamentos; não são números reais acrescentados à reta. Por isso, as regras desta subseção serão organizadas conforme a ideia que as justifica, e não como uma tabela de “operações com infinito”.

Para evitar repetições, escreveremos $x \rightarrow \alpha$ para qualquer um dos casos $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. As desigualdades mencionadas devem valer para x suficientemente próximo de α , no domínio correspondente.

Comparação e recíproco. A comparação transfere para outra função um crescimento ou decrescimento já conhecido. O recíproco, por sua vez, troca grandezas próximas de zero por grandezas de módulo elevado, e vice-versa.

Proposição 13.1 — Comparação e recíproco

1. Se $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$. Se $f(x) \leq g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$.
2. Se $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos, então $1/f(x) \rightarrow +\infty$; se $f(x) \rightarrow 0$ por valores negativos, então $1/f(x) \rightarrow -\infty$.
3. Se $|f(x)| \rightarrow +\infty$, então $1/f(x) \rightarrow 0$.

Demonstração. No primeiro item, dado $M > 0$, a hipótese $g(x) \rightarrow +\infty$ garante $g(x) > M$ suficientemente perto de α ; como $f(x) \geq g(x)$, também $f(x) > M$. O caso de $-\infty$ é análogo.

No segundo item, suponha $f(x) \rightarrow 0$ por valores positivos. Dado $M > 0$, aplique a definição de limite com $\varepsilon = 1/M$: suficientemente perto de α , temos $0 < f(x) < 1/M$, logo $1/f(x) > M$. O caso de valores negativos é obtido do mesmo modo.

No terceiro item, dado $\varepsilon > 0$, escolha o limiar $1/\varepsilon$. Se $|f(x)| > 1/\varepsilon$, então

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon.$$

■

Observação — Consequências imediatas

As propriedades de comparação permitem obter os limites seguintes. Para as potências inteiras, comparamos com x ou $-x$ em semirretas adequadas; para a exponencial de base $c > 1$, usamos também a Proposição ??.

1. Dado $c > 1$, temos $\lim_{x \rightarrow \infty} c^x = \infty$. Para $c = 1$, o limite é 1; para $0 < c < 1$, é 0. De fato, se $c > 1$ e $x \geq n \in \mathbb{N}$, a monotonicidade e a desigualdade de Bernoulli dão $c^x \geq c^n \geq 1 + n(c - 1)$, que cresce sem limite com n . O caso $0 < c < 1$ segue escrevendo $c^x = 1/(1/c)^x$.
2. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ então $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \infty$.
3. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ ímpar então $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$.
4. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ par então $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \infty$.

Somas: qual termo domina? Uma parcela limitada não altera um crescimento sem cota. Duas parcelas que divergem no mesmo sentido reforçam-se. Já parcelas que divergem em sentidos opostos competem entre si, e seus limites isolados não bastam para decidir o resultado.

Proposição 13.2 — Somas com limites infinitos

Suponha que r seja limitada quando $x \rightarrow \alpha$. Então:

1. se $f, g \rightarrow +\infty$, então $f + g \rightarrow +\infty$; se $f, g \rightarrow -\infty$, então $f + g \rightarrow -\infty$;
2. se $f \rightarrow +\infty$, então $f + r \rightarrow +\infty$; se $f \rightarrow -\infty$, então $f + r \rightarrow -\infty$;
3. se $f \rightarrow +\infty$ e $h \rightarrow -\infty$, então $f - h \rightarrow +\infty$ e $h - f \rightarrow -\infty$.

Todos os limites são tomados quando $x \rightarrow \alpha$.

Demonstração. Para o primeiro item, dado $M > 0$, fazemos $f > M/2$ e $g > M/2$ suficientemente perto de α ; então $f + g > M$. Os casos negativos são análogos.

Para o segundo item, existe $K > 0$ tal que $|r(x)| \leq K$ perto de α . Se $f \rightarrow +\infty$, fazemos $f > M + K$; então $f + r > M$. O caso de $-\infty$ é análogo.

No terceiro item, $-h \rightarrow +\infty$, e a conclusão segue do primeiro caso aplicado a $f + (-h)$. A outra diferença é tratada da mesma forma. ■

Produtos: o sinal decide.**Proposição 13.3 — Produtos com limites infinitos**

Suponha que $f \rightarrow +\infty$ ou $f \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow \alpha$. Se $q(x) \rightarrow L \neq 0$, então q fica afastada de zero e conserva o sinal de L para x próximo de α . Assim, $L > 0$ preserva o sentido da divergência de f , enquanto $L < 0$ o inverte.

Se os dois fatores divergem, aplica-se a mesma regra de sinais:

	$g \rightarrow +\infty$	$g \rightarrow -\infty$
$f \rightarrow +\infty$	$fg \rightarrow +\infty$	$fg \rightarrow -\infty$
$f \rightarrow -\infty$	$fg \rightarrow -\infty$	$fg \rightarrow +\infty$

Todos os limites da tabela são tomados quando $x \rightarrow \alpha$.

Demonstração. Suponha primeiro $f \rightarrow +\infty$ e $q \rightarrow L > 0$. Como $q \rightarrow L$, temos $q(x) > L/2$ suficientemente perto de α . Dado $M > 0$, fazemos também $f(x) > 2M/L$. Então $f(x)q(x) > M$. Se $L < 0$, aplicamos o mesmo argumento a $-q$, o que inverte o sinal do produto. Os casos $f \rightarrow -\infty$ seguem aplicando o resultado a $-f$.

Se ambos os fatores divergem, dado $M > 0$ fazemos $|f(x)| > \sqrt{M}$ e $|g(x)| > \sqrt{M}$ perto de α . Assim, $|f(x)g(x)| > M$; o sinal é determinado pelos sinais eventuais dos fatores, como na tabela. ■

Em particular, multiplicar por uma constante positiva preserva o sentido da divergência, e multiplicar por uma constante negativa o inverte. A constante zero é um caso separado: $0 \cdot f$ é a função nula. Isso não autoriza concluir nada quando um fator apenas *tende* a zero.

Formas indeterminadas não são resultados

Os símbolos $\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$ não determinam, por si sós, um limite. Quando $x \rightarrow +\infty$, por exemplo,

$$x - x = 0, \quad (x + 1) - x = 1, \quad x^2 - x \rightarrow +\infty;$$

as três diferenças têm a forma aparente $\infty - \infty$. Do mesmo modo,

$$\frac{1}{x^2} x \rightarrow 0, \quad \frac{1}{x} x = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} x \rightarrow +\infty,$$

embora em todas apareça $0 \cdot \infty$. É preciso simplificar ou comparar as funções antes de aplicar propriedades de limites.

Limites finitos quando a variável tende ao infinito. Se o ponto de aproximação muda de um número real para $+\infty$ ou $-\infty$, mas os valores-limite continuam finitos, valem as mesmas propriedades algébricas estudadas no capítulo anterior.

Proposição 13.4 – Regras para limites finitos no infinito

Se $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$, $f(x) \rightarrow A$ e $g(x) \rightarrow B$ quando $x \rightarrow \alpha$, com $A, B \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f + g &\rightarrow A + B, & f - g &\rightarrow A - B, & fg &\rightarrow AB, \\ cf &\rightarrow cA, & \frac{f}{g} &\rightarrow \frac{A}{B} & (B \neq 0). \end{aligned}$$

Também podemos passar ao limite no módulo, em potências inteiras positivas e na raiz quadrada, desde que seu domínio seja respeitado. Em particular, se $f(x) \geq 0$ para x suficientemente próximo de α , então $A \geq 0$ e $\sqrt{f(x)} \rightarrow \sqrt{A}$.

Demonstração. As demonstrações são as mesmas das regras de limites finitos já provadas: dado $\varepsilon > 0$, controlamos cada parcela ou fator por uma condição válida para x suficientemente grande em módulo. A única mudança é substituir a vizinhança perfurada de um ponto por uma semirreta $x > M$ ou $x < -M$. ■

Teorema 13.5 — Teorema do Confronto no infinito

Se $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$ e, para x suficientemente próximo de α ,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

com

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = L \in \mathbb{R},$$

então $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = L$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, os limites de f e h fornecem um mesmo limiar, tomando o maior dos dois necessários, a partir do qual

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo, $|g(x) - L| < \varepsilon$, que é a definição do limite no infinito. ■

Como escolher a regra. Primeiro identifique separadamente o comportamento de cada parcela ou fator. Aplique uma propriedade apenas quando as hipóteses coincidirem com um dos casos anteriores. Se surgir uma forma indeterminada, a expressão precisa ser reorganizada antes: fatoração, divisão pelo termo dominante e multiplicação pelo conjugado são as estratégias mais frequentes.

Em particular, se numerador e denominador divergem em módulo, o quociente apresenta a **forma indeterminada** ∞/∞ . Essa forma não informa o valor do limite: ele dependerá da rapidez relativa de crescimento das duas funções. Os exemplos seguintes mostram como revelar essa comparação por meio de simplificações algébricas.

Exemplo 13.7

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Solução. Para $x \neq 0$, dividimos numerador e denominador por x^2 :

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1 + 1/x^2}{1 - 1/x^2}.$$

Como $1/x^2 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$, o numerador tende a 1 e o denominador também tende a $1 \neq 0$. Pela regra do quociente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1.$$

<

Exemplo 13.8

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2 + 1)$.

Solução. Colocando o termo de maior grau em evidência, obtemos, para $x \neq 0$,

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = x^3 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \right).$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, o fator entre parênteses tende a $2 > 0$, enquanto $x^3 \rightarrow +\infty$. Pela propriedade do produto de uma função com limite positivo e outra com limite $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty.$$

<

Exemplo 13.9

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{4x^2 - 2x + 1}$.

Solução. Para $x \neq 0$, a fatoração dos termos de maior grau fornece

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{4x^2 - 2x + 1} &= \frac{x^3(2 + 3/x + 1/x^3)}{x^2(4 - 2/x + 1/x^2)} \\ &= x \frac{2 + 3/x + 1/x^3}{4 - 2/x + 1/x^2}. \end{aligned}$$

O quociente que multiplica x tende a $2/4 = 1/2 > 0$. Como $x \rightarrow +\infty$, a propriedade multiplicativa dá

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{4x^2 - 2x + 1} = +\infty.$$

<

Exemplo 13.10

Mostre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{1}{3}$.

Solução. Como $x \rightarrow +\infty$, podemos supor $x > 0$; assim, $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1}/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9 + 1/x^2}}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(9 + \frac{1}{x^2} \right) = 9,$$

a continuidade da raiz quadrada fornece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} = 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}} = \frac{1}{3}.$$

<

Exemplo 13.11

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5}.$

Solução. Para $x \neq 0$, dividimos numerador e denominador por x^3 :

$$\frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5} = \frac{5 + 1/x - 3/x^3}{2 - 1/x^2 + 5/x^3}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, o numerador tende a 5 e o denominador tende a $2 \neq 0$. Pela regra do quociente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5} = \frac{5}{2}.$$

<

Exemplo 13.12

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 3}{4x^4 - x + 2}.$

Solução. Para $x \neq 0$, dividimos numerador e denominador por x^4 :

$$\frac{5x^2 + x - 3}{4x^4 - x + 2} = \frac{5/x^2 + 1/x^3 - 3/x^4}{4 - 1/x^3 + 2/x^4}.$$

O numerador tende a 0 e o denominador a $4 \neq 0$. Pela regra do quociente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 3}{4x^4 - x + 2} = 0.$$

<

Os limites no infinito também permitem comparar uma função com uma reta não horizontal. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0,$$

a reta $y = mx + b$ é uma **assíntota oblíqua** na extremidade correspondente quando $m \neq 0$. O caso $m = 0$ recupera uma assíntota horizontal.

Exercícios

13.5 — Calcule os limites e determine as assíntotas pedidas. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{5x^2 + 2}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 1}}$. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$. Determine, por limites, as assíntotas de $f(x) = (2x^2 - 3)/(x^2 - x - 6)$.

13.6 — Encontre as constantes m e b para as quais

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(mx + b - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right) = 0.$$

Explique o significado geométrico da reta $y = mx + b$.

13.7 — Considere, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a equação

$$ax^2 - bx + c = 0,$$

em que b e c permanecem fixos enquanto $a \rightarrow 0$. Mostre que uma das raízes tende a c/b . Mostre

que a outra raiz é ilimitada e determine seu comportamento dominante. Explique por que isso é compatível com a equação limite $-bx + c = 0$.

13.8 — Os modelos abaixo descrevem três respostas com saturação:

$$c(N) = \frac{12N}{5 + N}, \quad P(I) = \frac{18I}{120 + I}, \quad V(s) = \frac{3,6s}{2 + s}.$$

Aqui, c é o consumo de presas por um predador em função da densidade N ; P é uma taxa de fotossíntese em função da intensidade luminosa I ; e V é o consumo de oxigênio durante exercício em função da intensidade s . Determine o limite de cada função quando sua variável tende a $+\infty$ e interprete os três resultados. Em que valor da respectiva variável cada resposta atinge metade de seu valor-limite? Identifique a forma comum $Ax/(B + x)$ e explique os papéis de A e B .

13.3 O número e e as funções exponencial e logarítmica

1^∞ não é 1. Em $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, a base tende a 1 enquanto o expoente cresce sem limite. Nenhum desses comportamentos, isoladamente, determina o limite; o equilíbrio entre ambos conduz ao número e .

O número e pode ser obtido a partir de um limite no qual a base se aproxima de 1 enquanto o expoente cresce. Essa construção fornece a base da função exponencial natural e do logaritmo natural.

Teorema 13.6 — Segundo Limite Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

onde $e \approx 2,71828$ é o número de Euler, também chamado número de Neper.

Demonstração. Para cada inteiro $n \geq 1$, escreva

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pelo binômio de Newton,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right),$$

com produto vazio igual a 1. Quando n aumenta, cada fator dos termos já presentes não diminui, e aparece um novo termo positivo; portanto $a_{n+1} > a_n$.

Além disso,

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

Logo, pelo axioma da completude, existe

$$e = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

A estimativa $k! \geq 2 \cdot 3^{k-2}$, para $k \geq 2$, fornece ainda

$$a_n < \frac{11}{4}, \quad \text{portanto} \quad 2 < e \leq \frac{11}{4} < 3.$$

A definição de supremo dá diretamente a aproximação de e de que precisamos: dado $\eta > 0$, existe N_0 tal que

$$e - \eta < a_{N_0} \leq e.$$

Como os a_n crescem, a mesma desigualdade vale para todo $n \geq N_0$.

Agora fixe $\varepsilon > 0$ e tome $\eta = \varepsilon/2$. Aumentando N_0 , se necessário, podemos supor também que

$$\frac{3}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $x \geq N_0$, seja $n = \lfloor x \rfloor$. Então $n \leq x < n + 1$. Como todas as bases abaixo são maiores que 1, temos

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

e, por outro lado,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Os extremos podem ser escritos como

$$\frac{a_{n+1}}{1 + 1/(n+1)} \quad \text{e} \quad a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Como $e - \varepsilon/2 < a_n \leq e < 3$, temos

$$a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \frac{a_n}{n} < e + \frac{3}{n} < e + \varepsilon.$$

Por outro lado,

$$\frac{a_{n+1}}{1 + 1/(n+1)} = a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{n+2} > e - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3}{n+2} > e - \varepsilon.$$

Portanto,

$$e - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{1 + 1/(n+1)} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < e + \varepsilon.$$

Isso é exatamente a definição de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

■

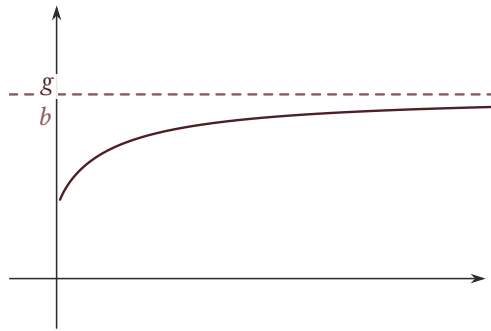


Figura 13.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Exemplo 13.13

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$.

Solução. Fazemos a mudança de variável $t = \frac{x}{5}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{5t} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^5 \\ &= e^5 \end{aligned}$$

◁

Exemplo 13.14

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

Solução. Dividindo o numerador e o denominador por x , temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

◁

Definição 13.4

O logaritmo de base e é denominado **função logaritmo natural** ou simplesmente **logaritmo**. Assim, pelos fatos apresentados na seção 9.3, a função logaritmo é a função $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela regra

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

O gráfico da função logaritmo natural está representado abaixo:

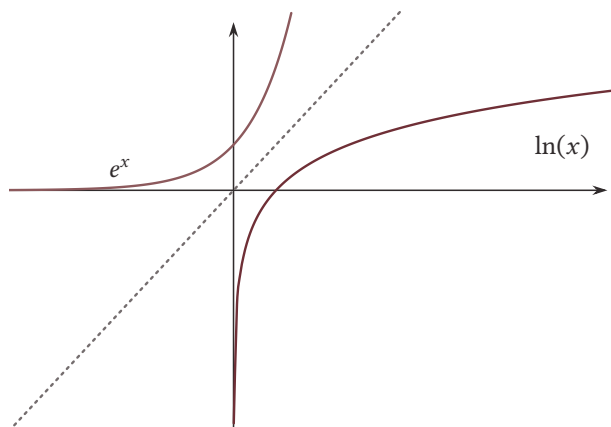


Figura 13.7. Gráfico da função logaritmo natural.

Teorema 13.7 – Continuidade das Funções Exponencial e Logaritmo

Para $c > 0$, a função $x \mapsto c^x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Para $c > 0$ e $c \neq 1$, a função $x \mapsto \log_c x$ é contínua em $(0, \infty)$.

Demonstração. Suponha primeiro $c > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha um inteiro n tão grande que

$$\frac{c-1}{n} < \varepsilon.$$

Escreva $u = c^{1/n} - 1 > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli,

$$c = (1+u)^n \geq 1 + nu,$$

de modo que

$$0 < u \leq \frac{c-1}{n} < \varepsilon.$$

Além disso,

$$0 < 1 - c^{-1/n} = \frac{u}{1+u} < u < \varepsilon.$$

Se $|h| < 1/n$, a monotonicidade da função exponencial dá

$$c^{-1/n} \leq c^h \leq c^{1/n},$$

e portanto $|c^h - 1| < \varepsilon$. Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} c^h = 1.$$

Como $c^{a+h} = c^a c^h$, segue que $c^{a+h} \rightarrow c^a$, provando a continuidade em qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Se $0 < c < 1$, escrevemos $c^x = 1/(1/c)^x$ e usamos o caso anterior e a regra do quociente. Para $c = 1$, a função é constante.

Quando $c \neq 1$, a exponencial é contínua e estritamente monótona de $\mathbb{R}$ sobre $(0, \infty)$. Pelo Teorema 12.12, sua inversa $\log_c$ é contínua em $(0, \infty)$. ■

Como a função e^x é contínua e crescente, pelo Teorema 12.12, sua função inversa $\ln(x) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo o seu domínio.

Teorema 13.8 — Terceiro Limite Fundamental

Para $a > 0$, temos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Demonstração. Começemos pela relação

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e.$$

Para $u \rightarrow 0^+$, isso é o segundo limite fundamental com $x = 1/u$. Para $u \rightarrow 0^-$, ponha $v = -u/(1+u) > 0$. Então $v \rightarrow 0^+$ e

$$(1 + u)^{1/u} = (1 + v)^{(1+v)/v} = (1 + v)^{1/v} (1 + v) \rightarrow e.$$

Pela continuidade do logaritmo,

$$\frac{\ln(1 + u)}{u} = \ln((1 + u)^{1/u}) \rightarrow \ln e = 1.$$

Se $a = 1$, o quociente do enunciado é zero e a conclusão é imediata. Para $a > 0$, $a \neq 1$, faça $u = a^x - 1$. A continuidade da exponencial garante $u \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, e $u \neq 0$ se $x \neq 0$. Além disso, $x = \ln(1 + u)/\ln a$, de modo que

$$\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \frac{u}{\ln(1 + u)} \rightarrow \ln a.$$

■

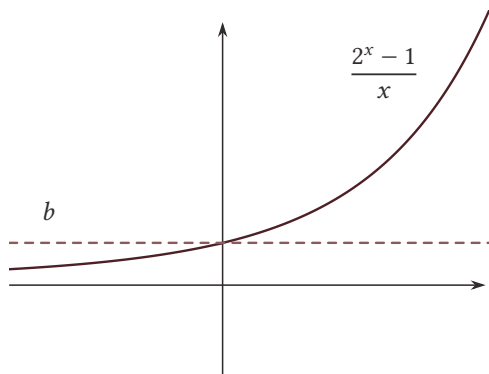


Figura 13.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$.

Exemplo 13.15

Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{\frac{x-2}{5}} - 1}{x - 2}$.

Solução. Fazendo $t = (x - 2)/5$, temos $x - 2 = 5t$ e $t \rightarrow 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{(x-2)/5} - 1}{x - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{5t} = \frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{t} = \frac{\ln 3}{5},$$

pelo Teorema 13.8 com $a = 3$. ◀

Exercícios

13.9 — Use os limites fundamentais associados a e e ao logaritmo. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{x}$. Um capital de R\$ 1.000,00 é aplicado por dois anos à taxa contínua de 4% ao ano. Determine o montante exato e uma aproximação em centavos.

13.3.1 Juro Composto

Considere um capital inicial $C > 0$, aplicado por k anos a uma taxa nominal anual $r \geq 0$, escrita em forma decimal. Nos juros simples, a taxa incide sempre sobre o capital inicial, e o montante é $C(1 + rk)$.

Nos juros compostos, cada parcela de juros é incorporada ao saldo antes do período seguinte. Se a capitalização ocorre n vezes por ano, a taxa de cada período é r/n . Depois de nk períodos, o montante é

$$M_n = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nk}.$$

Quando aumentamos a frequência de capitalização,

$$M_n = C \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \right]^k \longrightarrow Ce^{rk}.$$

O valor Ce^{rk} corresponde ao modelo idealizado de *capitalização contínua*. O limite não afirma que instituições financeiras capitalizem infinitas vezes por ano; ele descreve o valor para o qual convergem os regimes com períodos cada vez menores.

Exercícios

13.10 — Um capital de R\$ 10 000 é aplicado por 3 anos a uma taxa nominal anual de 6%. Determine o montante previsto pelo modelo de capitalização contínua.

13.11 — Para um capital C aplicado por um ano a uma taxa anual $r > 0$, compare as expressões correspondentes à capitalização anual, mensal e contínua.

13.3.2 Crescimento Demográfico

Denote por $P_0 > 0$ a população inicial e suponha que a taxa de crescimento por unidade de população seja uma constante $\lambda > 0$, medida em anos inversos. Essa hipótese já é uma idealização: populações reais sofrem variações de recursos, migração, mortalidade e natalidade.

Para estimar a população depois de t anos, divida o intervalo de tempo em n partes iguais. Em cada parte, o incremento relativo é aproximadamente $\lambda t/n$; por isso,

$$P_n(t) \approx P_0 \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n.$$

Para $t > 0$, escrevemos

$$\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{n/(\lambda t)}\right)^{n/(\lambda t)}\right]^{\lambda t}.$$

Quando as subdivisões se tornam cada vez mais finas, o Segundo Limite Fundamental mostra que a expressão entre colchetes se aproxima de e . Assim, o modelo contínuo é

$$P(t) = P_0 e^{\lambda t}.$$

Para $t = 0$, a mesma fórmula fornece $P(0) = P_0$. O mesmo padrão matemático aparece na capitalização contínua: em ambos os casos, a taxa de variação é proporcional ao valor presente da grandeza. Se a constante de proporcionalidade for negativa, o modelo descreve decaimento exponencial, como em uma primeira aproximação para a massa de uma substância radioativa.

Exercícios

13.12 — Determine as assíntotas horizontal, vertical e oblíqua, quando houver, de $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)/(x - 1)$. Faça um esboço que seja compatível com seus resultados.

13.13 — Demonstre, usando a definição de limite no infinito, que $\lim_{x \rightarrow \infty} 7/(x + 4) = 0$. Para um erro máximo ε , produza um limiar explícito $N(\varepsilon)$.

13.14 — A corrente de um circuito é $I(R) = 12/R$ A, onde $R > 0$ é a resistência em ohms. Interprete $\lim_{R \rightarrow 0^+} I(R)$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R)$, apontando a limitação física do primeiro modelo.

13.15 — Calcule os dois limites laterais de $e^{1/x}$

quando $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$, e explique por que não há limite bilateral finito em zero.

13.16 — A razão entre a massa de um medicamento no instante t e a massa inicial é $M(t)/M(0) = e^{-0,18t}$. Determine o limite quando $t \rightarrow \infty$ e o instante em que resta 10% da dose inicial.

13.17 — Encontre uma função simples assintótica a

$$\frac{3x^3 - 2x + 7}{x^2 + 4}$$

quando $x \rightarrow \pm\infty$, e mostre que a diferença entre as duas tende a zero.

Apêndice

A

Equações e Inequações

Eu usava cada verdade encontrada como uma regra para descobrir outras verdades.

René Descartes, *Discurso do Método*

Conhecidas as principais famílias de funções, passamos a comparar seus valores. Uma equação pergunta onde duas funções coincidem; uma inequação pergunta onde uma delas fica acima ou abaixo da outra. Assim, os problemas deste capítulo podem ser lidos tanto algebricamente quanto por meio de gráficos. Essa dupla leitura será útil ao longo de todo o livro.

A.1 Equações

Equivalência e soluções estranhas. Nem toda transformação preserva o conjunto-solução. Elevar uma equação ao quadrado, por exemplo, pode introduzir soluções que não satisfazem a equação original.

Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}$. Uma **equação** na incógnita x é uma igualdade da forma

$$f(x) = g(x).$$

O conjunto D é o **domínio da equação**. Resolver a equação significa determinar todos os valores $a \in D$ para os quais $f(a) = g(a)$. Esses valores são suas **soluções** ou **raízes**, e o conjunto de todas elas é o **conjunto-solução**:

$$\text{Sol}_{f(x)=g(x)} = \{a \in D \mid f(a) = g(a)\}.$$

Quando não houver risco de ambiguidade, escreveremos apenas *Sol*.

Há duas interpretações que convém manter em mente. No gráfico, as soluções são as abscissas dos pontos em que as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se intersectam. Equivalentemente, se $h = f - g$, resolver $f(x) = g(x)$ é determinar a imagem inversa de zero por h , isto é, encontrar os zeros de h .

O domínio faz parte do problema, e não é um detalhe acrescentado ao final. Por exemplo, $2x = 1$ tem a solução $1/2$ quando o domínio é $\mathbb{R}$, mas não tem solução quando o domínio é $\mathbb{N}$. Quando o enunciado não especificar o domínio, adotaremos o domínio real máximo das expressões envolvidas. Assim, em $1/x = 2$, o valor $x = 0$ deve ser excluído antes de qualquer manipulação.

Em geral, resolvemos uma equação transformando-a em outra mais simples. Duas equações são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto-solução. Operações reversíveis, como somar o mesmo número aos dois membros ou multiplicá-los por um número não nulo, preservam a equivalência. Outras operações podem produzir apenas uma consequência da equação original. Elevar os dois membros ao quadrado, por exemplo, pode criar candidatos que não satisfazem a igualdade inicial.

Um roteiro para resolver equações

1. Determine o domínio em que todas as expressões estão definidas.
2. Simplifique a equação, indicando se cada transformação é uma equivalência ou apenas uma implicação.
3. Encontre os candidatos a solução.
4. Verifique no problema original os candidatos obtidos quando alguma etapa não for reversível ou quando houver restrições de domínio.
5. Apresente o conjunto-solução.

Por exemplo, -2 satisfaz $4x + 8 = 0$, pois $4(-2) + 8 = 0$. Nesse caso, as operações usadas para isolar x são reversíveis e mostram também que não há outra solução.

A.1.1 Equações Polinomiais

Equação linear

Uma **equação linear** na variável x pode ser escrita como

$$ax + b = 0,$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Somar $-b$ aos dois membros e, em seguida, dividir por a produz apenas equações equivalentes:

$$ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}.$$

Logo, $Sol = \{-b/a\}$.

Exemplo A.1 — Uma equação linear

Resolva $3x - 7 = 8$.

Solução. Somando 7 aos dois membros e dividindo o resultado por 3, obtemos

$$3x - 7 = 8 \iff 3x = 15 \iff x = 5.$$

Portanto, $Sol = \{5\}$. A substituição $3 \cdot 5 - 7 = 8$ confirma o resultado. ◀

Antes de tratar das equações quadráticas, recordemos a propriedade do produto nulo: um produto de números reais é zero se, e somente se, ao menos um de seus fatores é zero. Quando um polinômio já está fatorado, essa propriedade costuma ser o caminho mais curto para encontrar suas raízes.

Exemplo A.2 – Um polinômio fatorado

Resolva $(x - 2)(x + 3) = 0$.

Solução. Pela propriedade do produto nulo,

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \iff x - 2 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0.$$

Assim, $x = 2$ ou $x = -3$, e $Sol = \{-3, 2\}$. ◀

Equação quadrática

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Uma **equação quadrática** é uma equação que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

A fórmula de resolução pode ser obtida completando um quadrado. Multiplicamos os dois membros por $4a \neq 0$ e reorganizamos os termos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \\ &\iff (2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\iff (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Denotamos por $\Delta = b^2 - 4ac$ o **discriminante**. Se $\Delta < 0$, o quadrado do membro esquerdo não pode ser igual a Δ , e a equação não tem soluções reais. Se $\Delta \geq 0$, então

$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta},$$

de onde obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto,

$$Sol_{ax^2+bx+c=0} = \begin{cases} \emptyset, & \Delta < 0, \\ \left\{ \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}, & \Delta \geq 0. \end{cases}$$

Exemplo A.3 – Aplicação da fórmula quadrática

Resolva $2x^2 + x - 3 = 0$.

Solução. Neste caso, $a = 2$, $b = 1$ e $c = -3$. Logo,

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$$

e

$$x = \frac{-1 \pm 5}{4}.$$

As duas soluções são $x = 1$ e $x = -3/2$. Portanto, $Sol = \{-3/2, 1\}$. ◀

Equações biquadráticas

Uma equação **biquadrática** na variável x é uma expressão da forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Para resolver uma equação biquadrática, fazemos a substituição $t = x^2$ e, portanto, $t^2 = x^4$. A equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$ transforma-se na quadrática $at^2 + bt + c = 0$. Há, contudo, uma restrição que deve acompanhar a substituição: como $t = x^2$, necessariamente $t \geq 0$. Descartamos, assim, as raízes negativas em t . Para cada raiz $t > 0$, obtemos $x = \pm\sqrt{t}$; se $t = 0$, obtemos apenas $x = 0$.

Exemplo A.4

Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solução. Fazendo a substituição $t = x^2$ obtemos $t^2 - 13t + 36 = 0$, cujas raízes são $t_1 = 4$ e $t_2 = 9$. Agora resolvemos na incógnita x . Lembrando que $t = x^2$ temos:

$$x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 9$$

e logo

$$\text{Sol} = \{-3, -2, 2, 3\}.$$

◁

Equações polinomiais de grau mais alto nem sempre admitem uma fórmula simples de resolução. A fatoração, as substituições adequadas e informações sobre as raízes tornam-se então especialmente importantes. Em um contexto mais amplo, temos o resultado seguinte.

Proposição A.1

Um polinômio real não nulo de grau n possui no máximo n raízes reais distintas. Contadas as multiplicidades, o número de raízes reais também não pode exceder n .

Demonstração. Pelo Teorema do Fator, cada raiz distinta r fornece um fator $x - r$. Se $r_1, \dots, r_k$ são raízes distintas, então

$$(x - r_1) \cdots (x - r_k)$$

divide o polinômio. Esse produto tem grau k , logo $k \leq n$. Se uma raiz tem multiplicidade m , seu fator aparece m vezes; o mesmo argumento mostra que a soma das multiplicidades reais é no máximo n . ■

Em $\mathbb{R}$, o limite superior dado pela proposição não precisa ser atingido. Por exemplo, $x^2 + 1$ não possui raízes reais. Para o que faremos neste livro, basta distinguir fatores lineares reais de fatores quadráticos sem raízes reais.

Exercícios

A.1 — Dada uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com raízes x_1, x_2 mostre que: ??A soma das raízes é igual a $-\frac{b}{a}$, isto é, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. ??O produto das raízes é igual a $\frac{c}{a}$, isto é, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

A.2 — Na equação $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ determine m de modo que: ??as raízes sejam opostas, isto é, $x_1 = -x_2$??as raízes sejam inversas, isto é, $x_1 = \frac{1}{x_2}$

Exercícios

A.3 — Resolva as seguintes equações polinômiais: ?? $2x - 3(x - 1) = 8(x + 3)$. ?? $x(x^2 - 4) = 0$. (Dica: na última equação, faça $y = x^2 - 3x + 2$.) ?? $(x^2 - 2)(x^2 - 9) = 0$. ?? $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$. ?? $6x^{-2} - 17x^{-1} + 12 = 0$. ?? $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$. ?? $(x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) = 0$.

Exercícios

A.4 — Sem efetuar a divisão, determine o resto da divisão de $q(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 7$ por $x - 2$ e por $x + 1$. Justifique pelo teorema do resto.

A.5 — Determine todos os valores reais de k para os quais $x + 2$ seja fator de $r(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 8$. Para cada valor encontrado, fatore completamente r .

A.1.2 Equações Envolvendo Expressões Racionais

Ao resolver uma equação com expressões racionais $p(x)/q(x)$, começamos excluindo os valores para os quais algum denominador se anula. Depois disso, podemos multiplicar os dois membros por um denominador comum: essa multiplicação é uma equivalência no domínio já estabelecido, pois o fator usado é diferente de zero em todos os pontos desse domínio. Ao final, os candidatos devem ser comparados com as exclusões iniciais.

Exemplo A.5 — Um primeiro exemplo

Resolva

$$\frac{1}{x-1} = 2.$$

Solução. O denominador impõe $x \neq 1$, de modo que $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Em D , podemos multiplicar os dois membros por $x - 1$:

$$\frac{1}{x-1} = 2 \iff 1 = 2(x-1) \iff x = \frac{3}{2}.$$

Como $3/2 \in D$, temos $Sol = \{3/2\}$. ◀

O exemplo seguinte mostra por que a restrição de domínio deve ser registrada antes de eliminar denominadores.

Exemplo A.6 — Um candidato excluído pelo domínio

Resolva

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Solução. O domínio é $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Multiplicando por $x-1$, operação válida somente nesse domínio, obtemos $x = 1$. Esse é o único candidato, mas ele não pertence a D . Portanto, a equação não possui solução: $Sol = \emptyset$. ◀

No próximo exemplo, o denominador comum elimina as frações, mas conduz a uma equação quadrática. Convém separar com clareza essas duas etapas.

Exemplo A.7

Resolva a equação:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 = 0$$

Solução. *Domínio.* Os denominadores se anulam em $x = 0$ e $x = 1$. Logo,

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Redução algébrica. Em D , colocamos as parcelas sobre o denominador comum $x(1-x)$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} + \frac{x-2}{x} - 1 &= \frac{x^2 + (x-2)(1-x) - x(1-x)}{x(1-x)} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2}{x(1-x)} = 0 \end{aligned}$$

Como o denominador não se anula em D , a última fração é zero exatamente quando seu numerador é zero. Assim,

$$x^2 + 2x - 2 = 0,$$

cujas raízes são $-1 - \sqrt{3}$ e $-1 + \sqrt{3}$.

Verificação. Nenhuma das duas raízes é 0 ou 1; ambas pertencem ao domínio. Portanto,

$$Sol = \{-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}.$$

◀

Exercícios

A.6 — Resolva as seguintes equações: $?? \frac{x}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 5$ $?? \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = 1$

A.1.3 Equações Envolvendo Raízes

Nas equações com radicais, o domínio e o sinal dos membros orientam cada passo. Para uma raiz de índice par, o radicando deve ser não negativo; raízes de índice ímpar estão definidas para todo radicando real. Além disso, de $u = v$ sempre podemos concluir $u^2 = v^2$, mas a recíproca não vale sem informações sobre os sinais. Por exemplo, $x^2 = 1$ tem as soluções -1 e 1 , enquanto $x = 1$ tem apenas a segunda.

Em particular, a igualdade $\sqrt{u(x)} = v(x)$ equivale ao sistema

$$u(x) = v(x)^2, \quad u(x) \geq 0, \quad v(x) \geq 0.$$

Também é possível elevar ao quadrado, obter candidatos e substituí-los na equação original. A formulação pelo sistema, porém, ajuda a localizar desde o início as condições que tornam a operação reversível.

Exemplo A.8 — Isolando uma raiz

Resolva $\sqrt{x+5} = 3$.

Solução. O domínio exige $x \geq -5$. Como ambos os membros da igualdade são não negativos, podemos elevá-los ao quadrado preservando a equivalência:

$$\sqrt{x+5} = 3 \iff x+5 = 9 \iff x = 4.$$

O valor 4 pertence ao domínio, e $Sol = \{4\}$.

Exemplo A.9 — Uma raiz e uma expressão variável

Resolva $\sqrt{x+1} = x-1$.

Solução. O radical exige $x \geq -1$. Como o membro esquerdo é não negativo, uma solução também precisa satisfazer $x-1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Sob essa condição, quadrar preserva a equivalência:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = x-1 &\iff x+1 = (x-1)^2 \\ &\iff x(x-3) = 0. \end{aligned}$$

A equação polinomial fornece os candidatos 0 e 3, mas somente 3 satisfaz $x \geq 1$. De fato, $\sqrt{3+1} = 3-1$. Portanto, $Sol = \{3\}$.

Quando há mais de um radical, a estratégia usual é isolar um deles antes de elevar ao quadrado. Esse procedimento pode precisar ser repetido; a cada repetição, as condições de domínio e de sinal devem continuar visíveis.

Exemplo A.10

Resolva a equação $\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4} = 2\sqrt{3x}$.

Solução. *Domínio.* Os três radicandos devem ser não negativos:

$$D = \left[-\frac{4}{9}, \infty\right) \cap \left[\frac{4}{3}, \infty\right) \cap [0, \infty) = \left[\frac{4}{3}, \infty\right).$$

Redução. Em D , os dois membros são não negativos. Podemos, portanto, elevar a igualdade ao quadrado sem perder a equivalência:

$$\begin{aligned} (\sqrt{9x+4} + \sqrt{3x-4})^2 &= (2\sqrt{3x})^2, \\ 12x + 2\sqrt{(9x+4)(3x-4)} &= 12x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{(9x+4)(3x-4)} = 0,$$

o que fornece $x = -4/9$ ou $x = 4/3$.

Seleção e verificação. O primeiro valor não pertence ao domínio, de modo que é descartado. Para $x = 4/3$, a igualdade original se torna $4 + 0 = 4$. Assim,

$$Sol = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

<

Uma outra técnica frequentemente usada na resolução de equações envolvendo raízes é multiplicar a equação por uma expressão diferente de zero, em especial pelo conjugado.

Exemplo A.11

Resolva a equação $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} - \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 1$.

Solução. Escrevamos

$$A = \sqrt{3x^2 - 2x + 15} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{3x^2 - 2x + 8}.$$

Os dois radicandos são positivos para todo $x \in \mathbb{R}$: seus discriminantes são negativos e os coeficientes de x^2 são positivos. Portanto, o domínio é $\mathbb{R}$, e o conjugado $A + B$ é sempre positivo.

A equação original é

$$A - B = 1. \tag{A.1}$$

Multiplicando seus dois membros por $A + B$, obtemos

$$(A - B)(A + B) = A + B.$$

Como $A^2 - B^2 = 7$, segue que

$$A + B = 7. \tag{A.2}$$

Somando (A.1) e (A.2), encontramos $2A = 8$ e, portanto, $A = 4$. Logo,

$$3x^2 - 2x + 15 = 16 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

As raízes dessa equação são $x = -1/3$ e $x = 1$. Em ambos os casos, $A = 4$ e $B = 3$, de modo que $A - B = 1$. Portanto,

$$\text{Sol} = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}.$$

<

Exercícios

A.7 — Resolva as equações com radicais: $\sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$. $\sqrt[3]{4x - 3} + \sqrt{5x - 1} = \sqrt{x + 1}$. $8 - \sqrt{3x - 1}$. $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{15x + 4}$. $\sqrt[3]{x + 34} - \sqrt[3]{x - 3} = 1$.

A.1.4 Equações Envolvendo Módulos

O módulo $|u|$ representa a distância entre u e 0 na reta real. Por isso, se $a > 0$, a equação $|u| = a$ descreve dois valores possíveis para u :

$$|u| = a \iff u = a \text{ ou } u = -a.$$

Se $a = 0$, temos apenas $u = 0$; se $a < 0$, não há solução. Quando aparecem vários módulos, os zeros das expressões internas dividem a reta em intervalos. Em cada intervalo, o sinal dessas expressões é conhecido e os módulos podem ser retirados de acordo com sua definição.

Exemplo A.12

Determine os números reais que satisfazem a igualdade

$$|x + 1| = 3.$$

Solução. Aqui podemos aplicar diretamente a equivalência fundamental:

$$|x + 1| = 3 \iff x + 1 = 3 \text{ ou } x + 1 = -3.$$

O primeiro caso fornece $x = 2$; o segundo, $x = -4$. Logo, $\text{Sol} = \{-4, 2\}$. Geometricamente, $x + 1$ deve estar a uma distância 3 da origem.

<

Exemplo A.13

Resolva a equação

$$|x - 1| - 2|x - 2| = -3.$$

Solução. As expressões internas se anulam em $x = 1$ e $x = 2$. Esses dois pontos dividem a reta em três intervalos, que analisamos separadamente.

Caso (i): $x < 1$. Temos $|x - 1| = 1 - x$ e $|x - 2| = 2 - x$. Logo,

$$1 - x - 2(2 - x) = -3 \iff x = 0.$$

Como $0 < 1$, o valor encontrado é válido neste caso.

Caso (ii): $1 \leq x < 2$. Agora, $|x - 1| = x - 1$ e $|x - 2| = 2 - x$. Assim,

$$x - 1 - 2(2 - x) = -3 \iff x = \frac{2}{3}.$$

Esse valor não pertence ao intervalo considerado e deve ser descartado.

Caso (iii): $x \geq 2$. Os dois termos internos são não negativos, e

$$x - 1 - 2(x - 2) = -3 \iff x = 6.$$

Como $6 \geq 2$, esse valor é válido. Reunindo os casos, obtemos

$$Sol = \{0, 6\}.$$

<

Exercícios

A.8 — Resolva as seguintes equações com módulos: $|x| = x^2$ $|x^2 - 3| = 2$ $|x| = x + 2$ $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$ $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$ $|-x + 2| = 2x + 1$ $|x + 1| + |x - 2| = 1$

Exercícios

A.9 — Resolva $|2x - 5| + |x + 1| = 11$ mediante uma divisão em intervalos e represente as soluções na reta real.

A.2 Inequações

Por que a análise é por intervalos?. Nos produtos e quocientes de polinômios estudados aqui, o sinal só pode mudar onde algum fator se anula ou onde o quociente deixa de existir. Entre dois pontos críticos consecutivos, o sinal permanece constante; a análise pode, portanto, ser feita intervalo a intervalo.

Nas equações, procuramos os valores em que duas expressões são iguais. Nas inequações, procuramos os valores em que uma delas é maior ou menor que a outra. Graficamente, resolver $f(x) > g(x)$ significa determinar as abscissas para as quais o gráfico de f está acima do gráfico de g .

Uma inequação em uma variável compara duas expressões por meio de um dos símbolos $<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$:

$$f(x) < g(x), \quad f(x) \leq g(x), \quad f(x) > g(x), \quad f(x) \geq g(x).$$

Seu domínio é $D = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$. Uma **solução** é um valor de D que torna verdadeira a desigualdade; o conjunto de todos esses valores é o **conjunto-solução**. Assim,

$$\text{Sol}_{f(x) < g(x)} = \{a \in D \mid f(a) < g(a)\},$$

$$\text{Sol}_{f(x) \leq g(x)} = \{a \in D \mid f(a) \leq g(a)\},$$

$$\text{Sol}_{f(x) > g(x)} = \{a \in D \mid f(a) > g(a)\},$$

$$\text{Sol}_{f(x) \geq g(x)} = \{a \in D \mid f(a) \geq g(a)\}.$$

Quando estiver claro a qual inequação nos referimos, usaremos simplesmente *Sol*.

Subtraindo $g(x)$ dos dois membros, toda inequação pode ser convertida em um estudo do sinal de $h(x) = f(x) - g(x)$. Por exemplo,

$$f(x) > g(x) \iff h(x) > 0.$$

Essa observação explica por que zeros, pontos excluídos do domínio e quadros de sinais aparecem repetidamente nesta seção.

Um roteiro para resolver inequações

1. Determine o domínio.
2. Leve todos os termos para um dos membros e, quando possível, fatore a expressão.
3. Identifique os pontos críticos: zeros do numerador, zeros do polinômio e valores excluídos por denominadores ou radicais.
4. Estude o sinal nos intervalos determinados por esses pontos.
5. Selecione os intervalos desejados e decida, ponto a ponto, quais extremos podem ser incluídos.

É especialmente perigoso multiplicar uma inequação por uma expressão cujo sinal é desconhecido: se ela for negativa, o sentido da desigualdade deve ser invertido; se for zero, a operação pode nem sequer ser reversível. O quadro de sinais evita esse problema.

Exemplo A.14

Resolva $|x - 1| < |x + 3|$ e interprete geometricamente a desigualdade.

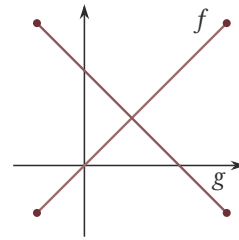
Solução. Como ambos os membros são não negativos, podemos elevar ao quadrado:

$$(x - 1)^2 < (x + 3)^2 \iff -2x + 1 < 6x + 9 \iff x > -1.$$

Geometricamente, comparamos as distâncias de x aos pontos 1 e -3 . O ponto médio é -1 ; à direita dele, x está mais perto de 1 do que de -3 , exatamente como indica o conjunto-solução $(-1, +\infty)$. $\triangleleft$

Exercícios

A.10 — No gráfico, estão representadas $f(x) = x$ e $g(x) = 2 - x$ no domínio $[-1, 3]$. Determine os conjuntos-solução de $f(x) = g(x)$, $f(x) > g(x)$ e $f(x) \leq g(x)$.



A.11 — Uma peça deve medir 25 mm, com tolerância estrita de 0,02 mm. Escreva uma inequação modular e determine os comprimentos aceitos.

A.2.1 Inequações Envolvendo Polinômios

Inequação linear

Uma inequação linear é uma inequação que pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax + b < 0 \quad ax + b \leq 0$$

$$ax + b > 0 \quad ax + b \geq 0$$

onde a, b são números reais e $a \neq 0$. Para resolvê-la, usamos as propriedades de ordem de $\mathbb{R}$.

Propriedades das desigualdades

1. Compatibilidade com a soma:

$$a \leq b \implies a + c \leq b + c.$$

2. Compatibilidade com a multiplicação por número não negativo:

$$a \leq b, c \geq 0 \implies ac \leq bc.$$

3. Compatibilidade com a multiplicação por número não positivo:

$$a \leq b, c \leq 0 \implies ac \geq bc.$$

As propriedades também valem com $\geq$, invertendo as desigualdades correspondentes. Para desigualdades estritas, a soma preserva o sinal; a multiplicação preserva o sinal se $c > 0$ e o inverte se $c < 0$. Se $c = 0$, os dois produtos são iguais.

Exemplo A.15 — Uma primeira inequação linear

Resolva $2x - 3 < 5$.

Solução. Somar 3 aos dois membros e dividir por $2 > 0$ preserva o sentido da desigualdade:

$$2x - 3 < 5 \iff 2x < 8 \iff x < 4.$$

Logo, $Sol = (-\infty, 4)$. ◀

Exemplo A.16

Resolva a inequação $\frac{1}{5}x + 125 \leq 335$.

Solução. Subtraímos 125 dos dois membros e multiplicamos por $5 > 0$. As duas operações preservam o sentido da desigualdade:

$$\frac{1}{5}x + 125 \leq 335 \iff \frac{1}{5}x \leq 210 \iff x \leq 1050.$$

Logo, $Sol = (-\infty, 1050]$. ◀

Exemplo A.17

Resolva a inequação $-3x + 12 > 15$.

Solução. Subtraindo 12 dos dois membros, obtemos $-3x > 3$. Em seguida, dividimos por -3 . Como esse número é negativo, o sentido da desigualdade se inverte:

$$-3x > 3 \iff x < -1.$$

Portanto, $Sol = (-\infty, -1)$. ◀

Para polinômios de grau maior, a fatoração transforma o problema em um estudo dos sinais dos fatores. Suponha, por exemplo, que

$$p(x) = a(x - r_1)^{m_1} \cdots (x - r_k)^{m_k}, \quad r_1 < \cdots < r_k.$$

Em cada intervalo determinado pelas raízes, o sinal de cada fator $x - r_i$ é fixo; por isso, o sinal do produto também é fixo. Ao atravessar uma raiz de multiplicidade ímpar, o sinal do fator correspondente muda; ao atravessar uma raiz de multiplicidade par, ele permanece o mesmo. Essa observação algébrica é suficiente para todos os quadros de sinais construídos a seguir.

Inequações quadráticas e polinomiais

Uma **inequação quadrática** é uma desigualdade que pode ser colocada em uma das formas:

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$. Se $\Delta \geq 0$, resolvemos $ax^2 + bx + c = 0$ e fatoramos o polinômio por meio de suas raízes. Os fatores obtidos determinam o sinal em cada intervalo. Se $\Delta < 0$, a identidade

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

mostra diretamente que a expressão tem sempre o sinal de a , pois o termo entre colchetes é positivo.

Nos casos $<$ e $>$, as raízes não são incluídas. Nos casos $\leq$ e $\geq$, elas são incluídas, pois tornam o polinômio igual a zero.

Exemplo A.18

Resolva a inequação $x^2 - 7x + 10 < 0$.

Solução. As raízes de $x^2 - 7x + 10 = 0$ são 2 e 5, de modo que

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

Ambas têm multiplicidade 1; portanto, o sinal do produto muda ao atravessar cada uma delas. À direita de 5, os dois fatores são positivos. Percorrendo a reta para a esquerda, obtemos os sinais indicados no quadro.



Figura A.1. Quadro de sinais de $(x - 2)(x - 5)$.

Queremos os pontos em que o produto é negativo. Isso ocorre exatamente entre as duas raízes. Como a desigualdade é estrita, 2 e 5 não pertencem ao conjunto-solução. Logo,

$$Sol = (2, 5).$$

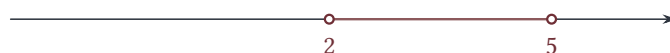


Figura A.2. Representação do conjunto-solução na reta real.

◀

Exemplo A.19 – Discussão geral da inequação quadrática

Suponha $a > 0$. Para que valores de x vale

$$ax^2 + bx + c < 0?$$

Solução. Escreva $\Delta = b^2 - 4ac$. Há três casos.

Caso (i): $\Delta > 0$. Sejam $x_1 < x_2$ as duas raízes reais. A fatoração

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

permite ler o sinal de cada fator. Como $a > 0$, o produto é positivo fora do intervalo entre as raízes e negativo dentro dele, conforme mostra o quadro.

$(x - x_1)$	-		+		+
		x_1		x_2	
$(x - x_2)$	-		-		+
		x_1		x_2	
$(x - x_1)(x - x_2)$	+		-		+
		x_1		x_2	

Figura A.3. Quadro de sinais de $(x - x_1)(x - x_2)$.

Portanto, neste caso, $Sol = (x_1, x_2)$.

Caso (ii): $\Delta = 0$. Há uma raiz dupla $r = -b/(2a)$, e

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2 \geq 0.$$

O polinômio nunca é estritamente negativo; logo, $Sol = \emptyset$.

Caso (iii): $\Delta < 0$. Pela forma de quadrado completado apresentada acima, $ax^2 + bx + c$ tem sempre o sinal de a . Como $a > 0$, ele é positivo para todo x , e novamente $Sol = \emptyset$. $\triangleleft$

Exercícios

A.12 — Dado $a > 0$, para que valores de x , $ax^2 + bx + c > 0$? **A.13** — Dado $a < 0$, para que valores de x , $ax^2 + bx + c < 0$?

Exemplo A.20

Determine as soluções de

$$(x - 1)(x - 5)^3(x - 9)(x^2 + 9) \geq 0.$$

Solução. O fator $x^2 + 9$ é estritamente positivo para todo número real. Dividir por esse fator não altera o sentido da desigualdade; portanto, o problema equivale a

$$(x - 1)(x - 5)^3(x - 9) \geq 0.$$

Os pontos críticos são 1, 5 e 9. Todos têm multiplicidade ímpar: as multiplicidades são, respectivamente, 1, 3 e 1. Assim, o sinal do produto muda ao atravessar cada um desses pontos.

À direita de 9, todos os fatores são positivos, e o produto é positivo. Ao percorrer a reta para a esquerda, os sinais nos quatro intervalos são, portanto,

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, 9)$	$(9, \infty)$
$(x-1)(x-5)^3(x-9)$	-	+	-	+

Escolhemos os intervalos de sinal positivo. Como a desigualdade é não estrita, incluímos também os três pontos em que o produto vale zero. Logo,

$$\text{Sol} = [1, 5] \cup [9, \infty).$$

<

Exercícios

A.14 — Resolva as seguintes desigualdades polinomiais: $6 + x - x^2 \geq 0$ $x^2 - 1 > 0$ $x^2 - 4 \leq 0$ $(3x - 1)^2 > 9$ $(x - \pi)^3(x + \pi)(x + \sqrt{\pi})^{16} > 0$ $(x - \frac{\pi}{2})(x + \pi)(x + \sqrt{3})^{15} > 0$ $5 < 2x + 7 \leq 13$ $2 - x - x^2 \geq 0$ $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ $(2x + 3)^2 \leq 4$ $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 \geq 0$

A.2.2 Inequações Envolvendo Expressões Racionais

Uma inequação racional combina dois cuidados. Primeiro, os zeros dos denominadores são excluídos do domínio. Depois de reunir os termos em uma única fração, estudamos separadamente o sinal do numerador e o do denominador. Os zeros do numerador podem pertencer à solução de uma desigualdade não estrita; os zeros do denominador nunca pertencem, pois a expressão não está definida neles.

Exemplo A.21 — Uma fração com dois pontos críticos

Resolva

$$\frac{x-1}{x+2} \leq 0.$$

Solução. O domínio é $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. O numerador se anula em $x = 1$ e o denominador, em $x = -2$. Esses pontos dividem a reta em três intervalos:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
$x - 1$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	-	+

Escolhemos o intervalo de sinal negativo e incluímos $x = 1$, que zera o numerador. O ponto $x = -2$ permanece excluído. Logo,

$$\text{Sol} = (-2, 1].$$

<

Exemplo A.22 — Três pontos críticos

Resolva

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x-3} > 0.$$

Solução. Os pontos críticos são -1 e 2 , que anulam o numerador, e 3 , que anula o denominador. À direita de 3 , todos os fatores são positivos. Como cada ponto crítico corresponde a um fator de multiplicidade ímpar, o sinal muda ao atravessar cada um deles. Assim, a fração é positiva em $(-1, 2)$ e em $(3, \infty)$. A desigualdade é estrita, portanto os zeros do numerador não são incluídos; o ponto 3 já estava fora do domínio. Concluimos que

$$Sol = (-1, 2) \cup (3, \infty).$$

<

Exercícios

A.15 — Resolva as seguintes desigualdades racionais: $\frac{3}{2-2x} + \frac{15}{2+4x} < 1$, $\frac{2}{2-x} > \frac{5}{2+x}$, $\frac{4x^2-6x+2}{4x^2+6x+2} \geq 1$, $\frac{x-5}{4x^2-4x-3} < 0$, $\frac{x+4}{2x} < 3$, $\frac{1}{x} < 3$, $-2 < \frac{1}{x} < 3$, $\frac{2x+3}{3x+1} < 1$, $\frac{4x-2}{x+4} \geq 2$, $\frac{4x-2}{x+4} < 3$, $\frac{1}{2-x} + \frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$, $\frac{2-x^2}{1-x} < x$, $\frac{x-\pi}{4x^2-3x-3} > 0$, $\frac{1-x}{2-x^2} \leq \frac{1}{x}$, $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} > 1$

Exercícios**A.16 —** Resolva a inequação

$$\frac{(x-3)(x+2)^2}{(x-1)(x+4)} \leq 0.$$

Apresente uma tabela de sinais e explique por que $x = -2$ pertence ao conjunto solução, ao passo que $x = 1$ não pertence.

A.2.3 Inequações Envolvendo Raízes

Para resolver inequações com raízes quadradas, precisamos controlar tanto o domínio quanto o efeito de elevar os dois membros ao quadrado. Em uma equação com um número finito de candidatos, podemos testar cada valor obtido. Nas inequações, em que as soluções costumam formar intervalos, é mais conveniente preservar a equivalência em cada etapa.

A função quadrado é estritamente crescente em $[0, \infty)$. Portanto, se $u, v \geq 0$, temos $u < v$ se, e somente se, $u^2 < v^2$; o mesmo vale com $\leq$, $>$ ou $\geq$. Assim, podemos elevar os dois membros ao quadrado depois de garantir que ambos são não negativos. Se um deles puder ser negativo, separamos os casos antes dessa operação. Vejamos como aplicar esse cuidado.

Exemplo A.23 – Uma primeira inequação com raizResolva $\sqrt{x+1} \leq 2$.

Solução. O domínio exige $x \geq -1$. Nesse domínio, os dois membros são não negativos, de modo que podemos quadrar preservando a equivalência:

$$\sqrt{x+1} \leq 2 \iff x+1 \leq 4 \iff x \leq 3.$$

Intersectando essa condição com o domínio, obtemos $Sol = [-1, 3]$. ◀

Exemplo A.24Resolva a desigualdade $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} > 1$.

Solução. O domínio da inequação é $D = [-2, 3]$. Nesse domínio, a desigualdade equivale a

$$\sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{3-x}.$$

Os dois membros são não negativos. Elevando-os ao quadrado e simplificando, obtemos a desigualdade equivalente

$$2x - 2 > 2\sqrt{3-x}.$$

Temos dois casos a considerar.

Caso (i): Se $x \leq 1$, o membro esquerdo é não positivo e o direito é positivo. Logo, não há solução nesse caso.

Caso (ii): Se $x > 1$, os dois membros são não negativos. Elevando novamente ao quadrado, obtemos

$$4(x-1)^2 > 4(3-x) \iff 4x^2 - 4x - 8 > 0.$$

Essa inequação tem conjunto-solução $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Intersectando-o com a condição $x > 1$ e com o domínio $[-2, 3]$, encontramos

$$Sol = (2, 3].$$
◀

Exemplo A.25Resolva a desigualdade $\sqrt{9 - \sqrt{2-x}} - \sqrt{6-x} > 0$.

Solução. A inequação está definida quando as três condições seguintes são satisfeitas:

- $6 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 6$;
- $2 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 2$;
- $9 - \sqrt{2-x} \geq 0$, isto é, $\sqrt{2-x} \leq 9$, que, sob a condição anterior, equivale a $x \geq -79$.

Portanto, o domínio é $D = [-79, 2]$. Nesse domínio, os dois membros da desigualdade

$$\sqrt{9 - \sqrt{2 - x}} > \sqrt{6 - x}$$

são não negativos. Elevando-os ao quadrado, obtemos a condição equivalente

$$x + 3 > \sqrt{2 - x}. \quad (\text{A.3})$$

Como o membro direito é não negativo, precisamos ter $x > -3$. Para esses valores, podemos elevar novamente os dois membros ao quadrado, preservando a equivalência:

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 &> 2 - x, \\ x^2 + 7x + 7 &> 0. \end{aligned}$$

As raízes do polinômio são $(-7 - \sqrt{21})/2$ e $(-7 + \sqrt{21})/2$. Portanto, a última desigualdade equivale a

$$x \in \left(-\infty, \frac{-7 - \sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7 + \sqrt{21}}{2}, \infty\right).$$

Resta intersectar esse conjunto com o domínio $[-79, 2]$ e com a condição $x > -3$ obtida em (A.3). Como as duas raízes são aproximadamente $-5,7913$ e $-1,2087$, respectivamente, concluímos que

$$\text{Sol} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} < x \leq 2\right\} = \left(\frac{-7 + \sqrt{21}}{2}, 2\right].$$

◁

Exercícios

A.17 — Resolva as inequações com radicais: 0.

$$??\sqrt{1 - 3x} - \sqrt{5 + x} > 1. \quad ??\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} >$$

A.2.4 Inequações Envolvendo Módulos

A interpretação de $|u|$ como distância fornece equivalências úteis. Para $a > 0$,

$$\begin{aligned} |u| < a &\iff -a < u < a, \\ |u| \leq a &\iff -a \leq u \leq a, \\ |u| > a &\iff u < -a \text{ ou } u > a, \\ |u| \geq a &\iff u \leq -a \text{ ou } u \geq a. \end{aligned}$$

Quando há vários módulos ou expressões mais complexas dentro deles, retomamos a separação em casos. Em cada intervalo determinado pelos zeros das expressões internas, retiramos os módulos e resolvemos a inequação correspondente, respeitando a condição que define o intervalo.

Exemplo A.26 — Uma inequação modular simplesResolva $|2x - 1| < 5$.**Solução.** Pela primeira equivalência,

$$|2x - 1| < 5 \iff -5 < 2x - 1 < 5.$$

Somando 1 aos três membros e dividindo-os por $2 > 0$, obtemos

$$-2 < x < 3.$$

Logo, $Sol = (-2, 3)$. ◁**Exemplo A.27**Resolva a desigualdade $|x^2 - 1| - 2x \leq 0$ **Solução.** Temos dois casos a considerar.*Caso (i):* Se $x^2 - 1 \geq 0$, então $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. A inequação torna-se

$$x^2 - 2x - 1 \leq 0,$$

cujo conjunto-solução é $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$. Intersectando-o com a condição deste caso, obtemos $[1, 1 + \sqrt{2}]$.*Caso (ii):* Se $x^2 - 1 < 0$, então $x \in (-1, 1)$ e $|x^2 - 1| = 1 - x^2$. A inequação torna-se

$$1 - x^2 - 2x \leq 0 \iff x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

A última condição é satisfeita em $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, \infty)$. Intersectando esse conjunto com $(-1, 1)$, obtemos $[-1 + \sqrt{2}, 1)$.

Reunindo os dois casos, chegamos a

$$Sol = [-1 + \sqrt{2}, 1) \cup [1, 1 + \sqrt{2}] = [-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}].$$

Os dois extremos pertencem ao conjunto-solução: em ambos, $|x^2 - 1| - 2x = 0$, como exige a desigualdade não estrita do enunciado. ◁**Exercícios**

A.18 — Resolva as seguintes desigualdades com módulos: $|x + 2| < 1$, $|x^2 - 2| + 2x + 1 \geq 0$, $\frac{9}{|x - 5| - 3} > 2$, $|x - 2| - |x + 2| > 2$, $|x - 2| - |x - 2|$.

A.3 Equações e Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Por que a base muda o sentido?. Para $a > 1$, as funções exponencial e logarítmica são crescentes e preservam a ordem; para $0 < a < 1$, são decrescentes e a ordem se inverte. Nos logaritmos, os argumentos permanecem positivos.

As funções exponenciais e logarítmicas estudadas no capítulo de funções exponenciais e logarítmicas permitem resolver novos tipos de comparação. Em ambos os casos, a monotonicidade é o princípio central: ela garante a injetividade usada nas equações e determina se o sentido de uma desigualdade deve ser preservado ou invertido.

A.3.1 Equações Exponenciais e Logarítmicas

Fixe uma base $a > 0$, com $a \neq 1$. Como a função $x \mapsto a^x$ é injetiva,

$$a^{u(x)} = a^{v(x)} \iff u(x) = v(x).$$

O primeiro objetivo, portanto, é escrever os dois membros com a mesma base. Se isso não for possível diretamente, uma substituição pode converter a equação exponencial em uma equação polinomial.

Exemplo A.28 — Expoentes com a mesma base

Resolva $2^{x+1} = 16$.

Solução. Como $16 = 2^4$, a injetividade da função exponencial fornece

$$2^{x+1} = 2^4 \iff x + 1 = 4.$$

Logo, $Sol = \{3\}$. ◀

Exemplo A.29 — Uma substituição exponencial

Resolva

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Solução. Faça $t = 3^x$. Como $3^x > 0$, a nova incógnita deve satisfazer $t > 0$. Além disso, $3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$, e a equação se torna

$$t^2 - 10t + 9 = 0 \iff (t - 1)(t - 9) = 0.$$

As duas raízes, $t = 1$ e $t = 9$, são positivas. Retornando à variável original,

$$3^x = 1 = 3^0 \quad \text{ou} \quad 3^x = 9 = 3^2.$$

Portanto, $Sol = \{0, 2\}$. ◀

Nas equações logarítmicas, as condições de existência vêm antes do uso das propriedades algébricas. Para que $\log_a u(x)$ esteja definido, precisamos de $u(x) > 0$. Sob essa condição, a função logarítmica também é injetiva:

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \iff u(x) = v(x),$$

desde que $u(x) > 0$ e $v(x) > 0$.

Exemplo A.30 — Isolando o logaritmoResolva em $\mathbb{R}$ a equação

$$2 \ln(3x - 5) = 15.$$

Solução. O argumento do logaritmo deve ser positivo: $3x - 5 > 0$, ou seja, $x > 5/3$. Nesse domínio, isolamos o logaritmo e usamos sua relação com a exponencial:

$$\begin{aligned} 2 \ln(3x - 5) = 15 &\iff \ln(3x - 5) = \frac{15}{2} \\ &\iff 3x - 5 = e^{15/2} \\ &\iff x = \frac{e^{15/2} + 5}{3}. \end{aligned}$$

Como $e^{15/2} > 0$, o valor encontrado é maior que $5/3$ e satisfaz a restrição inicial. Portanto,

$$Sol = \left\{ \frac{e^{15/2} + 5}{3} \right\}, \quad x \approx 604,347.$$

<

Exemplo A.31 — Domínio de uma equação logarítmica

Resolva

$$\log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = 3.$$

Solução. *Domínio.* Precisamos de $x - 1 > 0$ e $x - 3 > 0$; portanto, $D = (3, \infty)$.

Redução. No domínio, podemos usar a propriedade do logaritmo do produto. Como $3 = \log_2 8$, temos

$$\begin{aligned} \log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) = 3 &\iff \log_2((x - 1)(x - 3)) = \log_2 8 \\ &\iff (x - 1)(x - 3) = 8. \end{aligned}$$

Assim, $x^2 - 4x - 5 = 0$, cujas raízes são -1 e 5 . Somente 5 pertence ao domínio. Logo, $Sol = \{5\}$. <

Exercícios

A.19 — Resolva em $\mathbb{R}$: $5^{2x-1} = 125$. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. $\log_3(x + 6) = 2$. $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$. não é uma equivalência válida em todo o domínio real da expressão à direita. Dê um valor de x que satisfaça o membro direito e não o esquerdo.

A.20 — Explique por que

$$\log_2(x - 1) + \log_2(x - 5) = \log_2((x - 1)(x - 5))$$

A.3.2 Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Quando $a > 1$, as funções a^x e $\log_a x$ são estritamente crescentes e preservam a ordem. Quando $0 < a < 1$, ambas são estritamente decrescentes e invertem a ordem. Em símbolos,

$$\begin{aligned} a > 1 : \quad a^u < a^v &\iff u < v, \quad \log_a u < \log_a v \iff u < v, \\ 0 < a < 1 : \quad a^u < a^v &\iff u > v, \quad \log_a u < \log_a v \iff u > v, \end{aligned}$$

com $u, v > 0$ nas comparações logarítmicas. As mesmas regras valem para os outros símbolos de desigualdade.

Exemplo A.32 — Base maior que 1

Resolva $3^{2x-1} \leq 9$.

Solução. Escrevendo $9 = 3^2$ e usando o fato de que $3 > 1$, obtemos

$$3^{2x-1} \leq 3^2 \iff 2x - 1 \leq 2 \iff x \leq \frac{3}{2}.$$

Portanto, $Sol = (-\infty, 3/2]$. ◀

Exemplo A.33 — Base entre 0 e 1

Resolva

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 4.$$

Solução. Como $4 = (1/2)^{-2}$ e a função de base $1/2$ é decrescente, a comparação dos expoentes inverte o sentido da desigualdade:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \iff x - 1 < -2.$$

Logo, $Sol = (-\infty, -1)$. ◀

Exemplo A.34 — Uma inequação logarítmica

Resolva

$$\log_{1/2}(x+1) \geq -1.$$

Solução. O domínio exige $x > -1$. Como $-1 = \log_{1/2} 2$ e a função logarítmica de base $1/2$ é decrescente,

$$\log_{1/2}(x+1) \geq \log_{1/2} 2 \iff x+1 \leq 2.$$

Intersectando $x \leq 1$ com o domínio, obtemos

$$Sol = (-1, 1].$$
◀

Exercícios

A.21 — Resolva as equações e inequações a seguir: $\ln(x - 1) = 0$, $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$, $5^{x-1} = 25$, $4^x = 8$, $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$, $2^{x+1} < 8$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \leq 9$, $\ln(x + 2) > 0$.

Exercícios

A.22 — Resolva em x a equação
 $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$.

Explique a substituição que a transforma em uma equação quadrática.

Exercícios

A.23 — Uma receita usa x gramas de concentrado e $3x + 18$ mL de água. A massa final deve estar entre 450 g e 630 g. Admitindo que 1 mL de água tenha massa de 1 g, modele a restrição por uma inequação e determine os valores admissíveis de x .

A.4 Equações e Inequações Trigonométricas

Do valor principal à solução geral. As funções trigonométricas inversas fornecem um ângulo principal. As demais soluções vêm das simetrias e da periodicidade da função trigonométrica original.

As funções trigonométricas apresentam uma diferença importante em relação às funções exponenciais e logarítmicas: elas são periódicas e, portanto, repetem seus valores. Assim, uma equação trigonométrica pode ter infinitas soluções, mesmo quando sua forma é muito simples. O procedimento natural é encontrar as soluções em um período e, em seguida, usar a periodicidade para descrever todas as demais.

As funções trigonométricas inversas fornecem um ângulo principal, mas não resolvem sozinhas o problema. Por exemplo, $\arcsen(1/2) = \pi/6$, embora o seno também valha $1/2$ em $5\pi/6$ e nos ângulos obtidos desses dois pela adição de voltas completas.

A.4.1 Equações Trigonométricas

Considere primeiro uma equação da forma $\sen x = a$. Se $|a| > 1$, não há solução real, pois a imagem do seno é $[-1, 1]$. Se $|a| \leq 1$ e $\alpha = \arcsen a$, então

$$\sen x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

As duas famílias correspondem aos pontos de mesma altura na circunferência unitária. De modo semelhante, se $|a| \leq 1$ e $\alpha = \arccos a$, então

$$\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por fim, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pois o período da tangente é π .

Exemplo A.35 — Uma equação elementar

Resolva em $\mathbb{R}$ a equação

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Solução. Em uma volta da circunferência unitária, o seno vale $1/2$ nos ângulos $\pi/6$ e $5\pi/6$. Como o seno tem período 2π , todas as soluções são

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se o problema restringisse x a um intervalo, bastaria selecionar dessas famílias os valores que pertencem a ele. ◀

Quando a incógnita aparece dentro do argumento da função, resolvemos primeiro a equação trigonométrica no argumento e somente depois voltamos à variável original.

Exemplo A.36 — Uma transformação no argumento

Resolva em $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solução. O cosseno vale $\sqrt{3}/2$ quando seu argumento é congruente a $\pi/6$ ou a $-\pi/6$, módulo 2π . Portanto,

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Resolvendo as duas equações lineares, obtemos

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

◀

Algumas equações podem ser tratadas como equações algébricas em $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$. A substituição auxilia a fatoração, mas as raízes encontradas ainda precisam pertencer à imagem da função trigonométrica.

Exemplo A.37 — Uma equação algébrica em $\cos x$ Resolva em $\mathbb{R}$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Solução. Pondo $u = \cos x$, obtemos

$$2u^2 + u - 1 = (2u - 1)(u + 1) = 0.$$

As duas raízes, $u = 1/2$ e $u = -1$, pertencem a $[-1, 1]$. Logo, precisamos resolver

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -1.$$

Consequentemente,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<

Exemplo A.38 — Ângulo duplo e soluções em um intervalo

Determine as soluções de

$$\cos(2x) - \cos x = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.**Solução.** A identidade de ângulo duplo $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ permite escrever a equação apenas em termos de $\cos x$:

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

Pela propriedade do produto nulo,

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = 1.$$

Na circunferência unitária, o cosseno é a coordenada horizontal. No intervalo dado, essa coordenada vale $-1/2$ nos ângulos $2\pi/3$ e $4\pi/3$, e vale 1 nos ângulos 0 e 2π . Assim,

$$\text{Sol} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$

Os dois extremos pertencem ao conjunto-solução: embora 0 e 2π correspondam ao mesmo ponto da circunferência, são valores distintos de x e ambos estão no intervalo pedido.

<

Exercícios

A.24 — Resolva em $\mathbb{R}$: $2 \sin x + 1 = 0$. **A.25** — Determine as soluções de $\cos(2x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$. $\sin x$ em $[0, 2\pi]$.

A.4.2 Inequações Trigonômétricas

Nas inequações, a ideia é a mesma: analisamos primeiro um período e depois repetimos o conjunto obtido. O gráfico ou a circunferência unitária permitem identificar não apenas os pontos de igualdade, mas também os arcos nos quais a função fica acima ou abaixo do valor de referência.

Exemplo A.39 — Uma inequação vista no gráfico

Resolva em $\mathbb{R}$

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

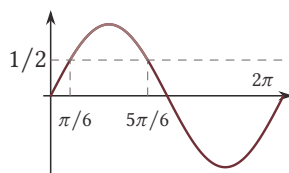


Figura A.4. Em um período, $\sin x > 1/2$ entre $\pi/6$ e $5\pi/6$.

Solução. No intervalo $[0, 2\pi]$, a igualdade $\sin x = 1/2$ ocorre em $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$. Entre esses pontos, o gráfico do seno fica acima da reta $y = 1/2$. Como a desigualdade é estrita, os extremos não são incluídos. Repetindo esse intervalo a cada 2π , obtemos

$$\text{Sol} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

◁

Quando aparece uma função que não está definida em todos os reais, seus pontos excluídos continuam fora do conjunto-solução. Em particular, nas inequações com tangente devemos respeitar os pontos $\pi/2 + k\pi$, nos quais $\cos x = 0$.

Exemplo A.40 — Uma inequação com tangente

Resolva $\operatorname{tg} x > 1$ em $\mathbb{R}$, indicando explicitamente os pontos excluídos do domínio.

Solução. A tangente não está definida em $x = \pi/2 + k\pi$. Em cada intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ela é estritamente crescente e vale 1 em $\pi/4 + k\pi$. Portanto,

$$\text{Sol} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

<

Exercícios

A.26 — Resolva as equações em $\mathbb{R}$:
 $\sin x = 1$. $\cos(x - \pi/3) = 1/2$. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.
 $\sqrt{3}/2$. $\cos x = -\sqrt{2}/2$. $\tan x = -1$. $\sin(2x) =$

Exercícios

A.27 — Resolva as equações no intervalo $[0, 2\pi)$,
 $\tan^2 x - \sec x - 1 = 0$. $\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.
usando as identidades trigonométricas antes de re- $\operatorname{cosec}^2 x - \cotg x - 1 = 0$.
correr às funções inversas. $\cos x + 2 \sec x = -3$.

Exercícios

A.28 — Resolva as inequações no intervalo $[0, 2\pi)$:
 $\tan x > 1$.
 $\cos x < 0$. $\sin x \leq -1/2$. $\cos(2x) \geq$

B

Fórmulas da Álgebra, da Geometria e da Trigonometria

Lei dos Expoentes

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

em particular:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Se $a \neq 0$ então

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^0 = 1$$

Fórmula de Baskhara

A equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

tem como soluções:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fatoração e Produtos Notáveis

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3y^2x - y^3$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

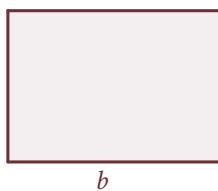
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Fórmula Binomial

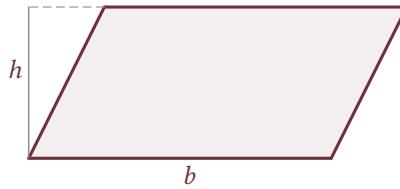
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

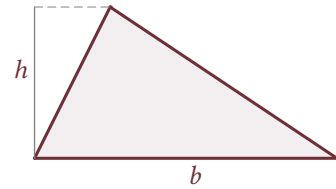
Áreas e Volumes



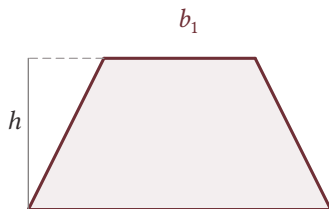
$$A = bh$$



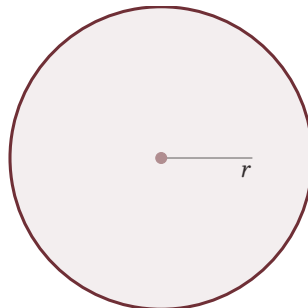
$$A = bh$$



$$A = \frac{1}{2}bh$$



$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$



$$A = \pi r^2$$

Fórmulas Trigonométricas

Fórmulas de Periodicidade

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

Fórmulas de Redução

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Fórmulas de Soma e Diferença

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Fórmulas de Arco Duplo

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Fórmulas de Redução de Potência

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

Respostas de Alguns Exercícios

Respostas de Alguns Exercícios

Respostas dos Exercícios

Capítulo 1

1.1 a.) $\exists n \in \mathbb{R} \mid n^2 = 2$ b.) não $\exists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2$ c.) $\exists x \mid (x^2 \text{ é par e } x^2 \text{ é divisível por } 3)$ d.) não $\exists x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 \text{ é primo ou } x^2 < 0)$ e.) $\exists x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 \text{ é par ou } x^2 \text{ é ímpar})$ f.) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0$ g.) $\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

1.2 a.) falso (o único candidato seria $x = 5 \notin A$). b.) verdadeiro c.) falso (para $x = 4, 4 + 3 = 7 \not< 7$). d.) verdadeiro (o maior valor de $x + 3$ é $7 < 9$).

1.3 a.) $\{0, 1, 2, 3\}$ b.) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ c.) $\{4, 5, 6, 7\}$ d.) $\mathbb{N}$ (todo natural é menor que 5 ou maior que 3). e.) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ f.) $\{2, 3, 4, 5\}$

1.4 a.) Exemplos: qualquer número real maior que 1. Contraexemplos: qualquer número real menor ou igual a 1. b.) Exemplo: a letra a. Contraexemplos: as letras b e n. Logo a afirmação é falsa. c.) Contraexemplos: $x = 1$ (pois $1 < 1$ é falso) ou $x = 2$. Exemplos: os reais x com $0 < x < 1$, como $x = 1/2$. d.) Contraexemplos: $y = 0$ e $y = 1$. Exemplos: qualquer natural $y \geq 2$.

1.5 a.) falso b.) verdadeiro c.) verdadeiro d.) falso

1.6 a.) $3 \leq 4$ ou 2 não é par (ou seja, 2 é ímpar). b.) $4 \leq 2$ e $3 \leq 5$. c.) $4 \leq 2$ e $\forall k, (k \geq 3 \text{ ou } k \leq 5)$. d.) 3 é par e 5 não é ímpar. e.) 2 não é par ou $3k + 1$ é par. f.) 2 não é par ou 3 é ímpar. g.) 5 é primo e 4 é ímpar. h.) 5 é primo e 4 não é ímpar.

1.7 a.) $(2, 4)$. b.) $\mathbb{R}$: todo real é maior que 2 ou menor que 3. c.) $(2, +\infty)$: a condição $x < 5$ e $x > 3$ define $(3, 5)$, que já está contido em $(2, +\infty)$. d.) $(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$.

1.8 a.) Para todo real $x, x^2 \neq 2$. Simbolicamente: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2$. b.) Existe um racional x tal que $x^2 = 2$. Simbolicamente: $\exists x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2$. c.) Para todo natural n, n^2 é ímpar ou não é divisível por 3. Simbolicamente: $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ é ímpar ou } n^2 \text{ não é divisível por } 3)$. d.) Existe um inteiro m tal que m^2 é primo ou m^2 é negativo. Simbolicamente: $\exists m \in \mathbb{Z} \mid (m^2 \text{ é primo ou } m^2 < 0)$. e.) Existe um real x tal que, para todo real $y, x + y \neq 0$. Simbolicamente: $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$. f.) Existe um elemento de A que não é elemento de B . Simbolicamente: $\exists x \in A \mid x \notin B$.

1.9 a.) Contrapositiva: $\text{não } q \Rightarrow p$. Recíproca: $q \Rightarrow \text{não } p$. Inversa: $p \Rightarrow \text{não } q$. b.) Contrapositiva: $q \Rightarrow \text{não } p$. Recíproca: $\text{não } q \Rightarrow p$. Inversa: $\text{não } p \Rightarrow q$. c.) Contrapositiva: “Se vou trabalhar, então não chove”. Recíproca: “Se não vou trabalhar, então chove”. Inversa: “Se não chove, então vou trabalhar”. d.) Contrapositiva: “Se $2x + 1$ é par, então x é ímpar”. Recíproca: “Se $2x + 1$ é ímpar, então x é par”. Inversa: “Se x é ímpar, então $2x + 1$ é par”. e.) Contrapositiva: “Se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, então $x^2 + y^2 \neq 0$ ”. Recíproca: “Se $x = y = 0$, então $x^2 + y^2 = 0$ ”. Inversa: “Se $x^2 + y^2 \neq 0$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ ”.

1.10 a.) verdadeiro b.) falso c.) falso

1.11 a.) Condição necessária, mas não suficiente. b.) Condição suficiente, mas não necessária. c.) Condição necessária e suficiente. d.) Condição necessária, mas não suficiente.

1.12 a.) p implica q . b.) $\neg p$ implica $\neg q$ (a inversa de p implica q). c.) $\neg q$ implica p .

1.13 $\neg(p \Leftrightarrow q)$ equivale a $(p \text{ e } \neg q) \text{ ou } (q \text{ e } \neg p)$, pois $p \Leftrightarrow q$ equivale a $(p \text{ implica } q) \text{ e } (q \text{ implica } p)$ e a negação de cada implicação é $p \text{ e } \neg q$, $q \text{ e } \neg p$. Equivale também a $p \Leftrightarrow \neg q$.

1.14 a.) $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \text{ é ímpar} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid n = 2k + 1)$ b.) $\forall y \in B, \exists x \in A \mid f(x) = y$ c.) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0$ d.) $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, (n > N_0 \Rightarrow |a_n - L| \leq \epsilon)$

1.15 a.) Para todo $x \in D$ existe $y \in D$ tal que $x + 4 > y$. verdadeiro: basta tomar $y = 1$. b.) Existe $y \in D$ tal que, para todo $x \in D, x + 4 > y$. verdadeiro: $y = 1$ serve, pois $x + 4 \geq 5 > 1$. c.) Para todos $x, y \in D, x + 4 > y$. falso: com $x = 1$ e $y = 6, 5 > 6$ é falso. d.) Existem $x, y \in D$ tais que $x + 4 > y$. verdadeiro: por exemplo $x = y = 1$.

1.16 a.) Para todo número natural x existe um natural y tal que $x < y$. A afirmação é verdadeira: por exemplo, para cada x podemos tomar $y = x + 1$. Um contraexemplo teria de ser um natural x para o qual não existisse natural maior. b.) Existe um natural y tal que todo natural x satisfaz $x < y$. A afirmação é falsa, pois, escolhido qualquer y , o número $y + 1$ não é menor que y . c.) Existe um natural x menor que todos os naturais y . Falsa: qualquer que seja x , tomando $y = x$ tem-se $x < x$, que é falso. d.) Para todo natural y existe um natural x menor que y . Falsa: para $y = 0$ não existe natural $x < 0$. (Para $y \geq 1$ basta $x = y - 1$.) e.) Existem naturais x e y com $x < y$. Verdadeira: $x = 1, y = 2$. f.) Todo natural é menor que todo natural. Falsa: com $x = y = 1, 1 < 1$ é falso.

1.17 a.) $\forall x, \forall y, x + y = y + x$. b.) $\exists x, \exists y \mid x + y \neq y + x$. c.) $\exists e \mid \forall x, x + e = x$. d.) $\forall x, \forall y, \forall z, (x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z)$. e.) $\forall x, x \leq x$.

1.18 a.) Para todo natural x existe um natural y com $2x = y$. Verdadeira: dado x , tome $y = 2x$. b.) Existe y tal que para todo $x, 2x - y = 0$. Falsa, pois se $x = 0$ então $y = 0$, e se $x = 1$ então $y = 2$. c.) A afirmação nos diz que existem dois números cuja soma é 100. Verdadeira pois $15 + 85 = 100$.

1.19 a.) Existem reais x e y tais que $x + y \neq 0$. Simbolicamente: $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y \neq 0$. b.) Existe um real x tal que, para todo real $y, x + y \neq 0$. Simbolicamente: $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$. c.) Existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $N_0 \in \mathbb{N}$, existe $n > N_0$ com $|a_n - L| > \epsilon$. Simbolicamente: $\exists \epsilon > 0 \mid \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n > N_0 \mid |a_n - L| > \epsilon$.

1.20 A afirmação é verdadeira, logo não há contraexemplos. Se $m = 2a$ e $n = 2b$ com a, b naturais, então $m + n = 2(a + b)$ é par. Exemplo: $2 + 4 = 6$.

1.21 a.) Se $b = ak$ e $c = al$ com k, l inteiros, então $b + c = a(k + l)$. b.) Sejam $p = a/b$ e $q = c/d$, com a, b, c, d inteiros e $b, d \neq 0$. Então $p + q = (ad + bc)/bd$, com $ad + bc$ e $bd \neq 0$ inteiros. c.) Com a mesma notação, $p \cdot q = ac/bd$, e $bd \neq 0$. d.) Como r_1, r_2 são raízes, $r_1^2 + br_1 + c = 0$ e $r_2^2 + br_2 + c = 0$. Subtraindo, $(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) + b(r_1 - r_2) = 0$; como $r_1 \neq r_2$, dividindo por $r_1 - r_2$ obtemos $r_1 + r_2 = -b$. Da primeira equação, $c = -r_1^2 - br_1 = -r_1^2 + (r_1 + r_2)r_1 = r_1r_2$.

1.22 Dica: use a mesma estratégia que foi usada para provar que $\sqrt{2}$ é irracional.

1.22 Dica: fatorar $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ e note que $x - y$ e $x + y$ têm a mesma paridade (a diferença entre eles é $2y$). Se ambos são ímpares, o produto é ímpar; se ambos são pares, o produto é múltiplo de 4. Em nenhum caso o produto pode ser 10.

1.22 Dica: Por redução ao absurdo, suponha que existe um racional p/q (podemos assumir que p e q são coprimos, ou seja, que a fração é irredutível, e $q > 0$) que satisfaz a equação. Multiplicando por q^5 obtemos $p^5 + p^4q + p^3q^2 + p^2q^3 + q^5 = 0$. Todos os termos, exceto q^5 , são divisíveis por p ; logo p divide q^5 e, sendo p e q coprimos, $p = \pm 1$. Analogamente, todos os termos exceto p^5 são divisíveis por q , logo q divide p^5 e $q = 1$. Assim $x = \pm 1$, mas nenhum dos dois é raiz da equação.

1.22 Suponha, por absurdo, que a não divide bc mas a divide b . Então $b = ak$ para algum inteiro k , e $bc = a(kc)$, ou seja, a divide bc : contradição.

1.23 a.) Contrapositiva: se x e y são ambos ímpares, então xy é ímpar. De fato, $x = 2m + 1$ e $y = 2n + 1$ dão $xy = 2(2mn + m + n) + 1$. b.) Contrapositiva: se x ou y é par, então xy é par. Se, por exemplo, $x = 2m$, então $xy = 2(my)$. c.) Contrapositiva: se a e b são ambos racionais, então ab é racional. Isso segue de $p/q \cdot r/s = pr/qs$, com $q, s \neq 0$.

1.24 Sejam $r \neq 0$ racional e x irracional, e suponha, por absurdo, que rx seja racional. Como $r \neq 0$, $1/r$ é racional e $x = 1/r \cdot rx$ seria produto de racionais, logo racional, contradição.

1.25 Se $a = p/q$ e $b = r/s$, com p, q, r, s inteiros e $q, s \neq 0$, então $a + b = (ps+qr)/qs$, com $ps + qr$ e $qs \neq 0$ inteiros.

1.26 Se $N = 1000a + 100b + 10c + d$, então $N = 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$. Se 3 divide $a + b + c + d$, então 3 divide os dois termos da soma e portanto divide N .

1.27 Se $a = 2k$, então $ab = 2(kb)$ é par (analogamente se b é par). Reciprocamente, pela contrapositiva: se $a = 2m + 1$ e $b = 2n + 1$, então $ab = 2(2mn + m + n) + 1$ é ímpar.

1.28 Se $b = ak$, então $bc = (ac)k$, logo ac divide bc . Reciprocamente, se $bc = (ac)k$, então $c(b - ak) = 0$ e, como $c \neq 0$, $b = ak$.

Capítulo 2

2.1 a.) Pelo argumento de vacuidade, a afirmação é verdadeira. b.) O conjunto à direita contém um único elemento, que é exatamente o conjunto vazio. Logo, $\emptyset$ é um elemento de $\{\emptyset\}$ e a afirmação é verdadeira. c.) Como visto no item anterior, o conjunto à direita contém um elemento, logo não pode ser vazio. A igualdade é falsa.

2.2 Por exemplo, $A = \{\emptyset\}$. Então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\emptyset$ pertence a A e a $\mathcal{P}(A)$, logo $A \cap \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

2.3 2^n elementos. Para formar um subconjunto de A , decidimos, para cada um dos n elementos, se ele pertence ou não ao subconjunto: são 2 escolhas para cada elemento, portanto $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ subconjuntos. Por exemplo, se $A = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ tem $4 = 2^2$ elementos.

2.4 a.) $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. **b.)** $A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$. **c.)** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$, pela comutatividade da união.

2.5 $A \Delta B = \{2, 5\}$, $A \Delta C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \Delta D = \{1\}$, $B \Delta C = \{1, 3, 4, 6\}$, $B \Delta D = \{1, 2, 5\}$, $C \Delta D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.6 Em todos os casos, prova-se a igualdade mostrando as duas inclusões, ou reescrevendo a condição de pertinência com os conectivos “e”, “ou” e “não”. (1) a (4): seguem da comutatividade e da associatividade de “ou” e de “e”; por exemplo, $x \in (A \cup B) \cup C$ se e somente se $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$, o que vale se e somente se $x \in A \cup (B \cup C)$. (5) $x \in C \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in C$ e $\text{não}(x \in A \text{ e } x \in B) \Leftrightarrow x \in C$ e $(x \notin A$ ou $x \notin B) \Leftrightarrow x \in C \setminus A$ ou $x \in C \setminus B$. (6) é análoga, usando $\text{não}(x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ e } x \notin B)$. (7) $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $(y \in B \text{ ou } y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. (8) e (9) são análogas: $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ equivale a $x \in A$, $y \in B$ e $y \in C$; e $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$ equivale a $x \in A$, $y \in B$ e $y \notin C$ (a hipótese sobre os conjuntos não vazios não é necessária para a igualdade). (10) e (11) são as leis de De Morgan: $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow \text{não}(x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow x \in A^c$ e $x \in B^c$; e $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$.

2.7 a.) $\{1, 2, 3, 4\}$ **b.)** $\{2, 3, 4\}$ **c.)** $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **d.)** $\{5, 7\}$ **e.)** $\{5, 7\}$ **f.)** $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

2.8 a.) $(\Rightarrow) B \subset A \cup B$ sempre; e se $x \in A \cup B$, então $x \in B$ (pois $x \in A$ implica $x \in B$). $(\Leftarrow)$ Se $x \in A$, então $x \in A \cup B = B$. **b.)** $(\Rightarrow) A \cap B \subset A$ sempre; e se $x \in A$, então $x \in B$, logo $x \in A \cap B$. $(\Leftarrow)$ Se $x \in A = A \cap B$, então $x \in B$. **c.)** Pela definição de interseção, $x \in A \cap B$ equivale a $x \in A$ e $x \in B$; assim, todo elemento de C está em $A \cap B$ se e somente se está em A e em B . **d.)** $x \in C \setminus (B \setminus A) \Leftrightarrow x \in C$ e $\text{não}(x \in B \text{ e } x \notin A) \Leftrightarrow x \in C$ e $(x \notin B \text{ ou } x \in A) \Leftrightarrow (x \in C \setminus B) \text{ ou } (x \in C \cap A)$. **e.)** $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A$ e $\text{não}(x \in A \text{ e } x \notin B) \Leftrightarrow x \in A$ e $(x \notin A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B$, pois $x \in A$ exclui $x \notin A$. **f.)** $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A$, $x \in B$ e $x \notin C$. Por outro lado, $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) \Leftrightarrow x \in A$, $x \in B$ e $\text{não}(x \in A \text{ e } x \in C)$, e como $x \in A$, isso equivale a $x \notin C$. **g.)** $A \setminus B = \emptyset$ significa que não existe x com $x \in A$ e $x \notin B$, isto é, que todo $x \in A$ pertence a B , ou seja, $A \subset B$. **h.)** $(\Rightarrow) B \setminus A \subset B$ sempre; se $x \in B$, então $x \notin A$ (senão $x \in A \cap B = \emptyset$), logo $x \in B \setminus A$. $(\Leftarrow)$ Se existisse $x \in A \cap B$, então $x \in B = B \setminus A$, logo $x \notin A$, contradição.

2.9 a.) É a contrapositiva de “ $x \in A \Rightarrow x \in B$ ”: $x \notin B \Rightarrow x \notin A$. **b.)** $A^c \cap B = \{x \in B : x \notin A\} = B \setminus A$, pela definição. **c.)** $x \in (B \setminus A)^c \Leftrightarrow \text{não}(x \in B \text{ e } x \notin A) \Leftrightarrow x \notin B \text{ ou } x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup B^c$.

2.10 a.) $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subset A \cap B \Leftrightarrow X \subset A \text{ e } X \subset B \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. **b.)** Se $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, então $X \subset A$ ou $X \subset B$; em ambos os casos $X \subset A \cup B$, logo $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

2.11 Tome $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$. Então $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mas $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

2.12 Um elemento x pertence a $A \Delta B$ se e somente se pertence a exatamente um dos conjuntos A e B . Daí, $x \in (A \Delta B) \Delta C$ se e somente se x pertence a um número ímpar dos conjuntos A, B, C : se $x \in A \Delta B$, então x está em um só de A, B e não pode estar em C (total 1); se $x \notin A \Delta B$, então x está em ambos ou em nenhum de A, B e deve estar em C (total 3 ou 1). Como essa condição é simétrica em A, B, C , o mesmo vale para $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A$.

2.13 Sim, o argumento está correto. A inclusão provada vale para *quaisquer* três conjuntos, em particular para C, B, A nos papéis de A, B, C ; isso dá $(C \Delta B) \Delta A \subset C \Delta (B \Delta A)$. As demais igualdades usam apenas a comutatividade de Δ (Exercício 2.4).

2.14 a.) Demonstração que $A \cap A \subset A$: se $x \in A \cap A$ então $x \in A$ e $x \in A$ logo $x \in A$.

Demonstração que $A \subset A \cap A$: se $x \in A$ então $x \in A$ e $x \in A$ logo $x \in A \cap A$. **b.)** Análogo ao item anterior: $x \in A \cup A$ se e somente se $x \in A$ ou $x \in A$, isto é, $x \in A$. **c.)** Se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$; em particular $x \in B$. **d.)** Se $x \in A$ então $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x \in A \cup B$. **e.)** Se $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e, pelo item (d), $x \in A \cup B$. **f.)** Se $x \in A \cup \emptyset$, então $x \in A$ ou $x \in \emptyset$; como a segunda opção é impossível, $x \in A$. A inclusão $A \subset A \cup \emptyset$ é o item (d). **g.)** Demonstração que $A \cap \emptyset \subset \emptyset$: se $x \in A \cap \emptyset$, então $x \in A$ e $x \in \emptyset$ logo $x \in \emptyset$.

Demonstração que $\emptyset \subset A \cap \emptyset$: se $x \in \emptyset$, então por vacuidade temos que $x \in A$ e $x \in \emptyset$. Logo $x \in A \cap \emptyset$.

h.) Demonstraremos apenas uma das contenções, que $A \cup (A \cap B) \subset A$: se $x \in A \cup (A \cap B)$ então $x \in A$ ou $x \in A \cap B$. Dois casos: ou $x \in A$ ou $x \in A \cap B$, no segundo caso temos então $x \in A$ e $x \in B$ e logo $x \in A$. Em ambos os casos $x \in A$. **i.)** $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ ou $(x \in B \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, pela distributividade de “ou” sobre “e”. **j.)** $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $(x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. **k.)** Demonstraremos apenas uma das contenções, que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$. Se $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ então $C \in \mathcal{P}(A)$ e $C \in \mathcal{P}(B)$ e pela definição de conjunto potência, $C \subset A$ e $C \subset B$, logo se $c \in C$ temos que $c \in A$ e $c \in B$, ou seja $c \in A \cap B$, ou seja $C \subset A \cap B$, e logo $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

2.15 a.) $A \subset B^c$ significa que todo $x \in A$ satisfaz $x \notin B$, ou seja, que não existe $x \in A \cap B$. **b.)** $x \in (B \setminus A)^c \Leftrightarrow \text{não}(x \in B \text{ e } x \notin A) \Leftrightarrow x \notin B \text{ ou } x \in A \Leftrightarrow x \in A \cup B^c$. **c.)** $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow \text{não}(x \notin A) \Leftrightarrow x \in A$. **d.)** $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow \text{não}(x \in A \text{ e } x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$.

2.16 a.) Se $x \in A$ então, como $A \subset B$, $x \in B$. Como por hipótese $B \subset C$, se $x \in B$ então $x \in C$. **b.)** Seja $x \in A \cup C$. Se $x \in A$, então $x \in B$; se $x \in C$, então $x \in D$. Em ambos os casos $x \in B \cup D$. **c.)** Como $A \subset A$, temos $A \in \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, logo $A \subset B$. Do mesmo modo, $B \in \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$ dá $B \subset A$. Portanto $A = B$. **d.)** Demonstraremos primeiramente que se $A \subset B$ então $A \cup B = B$. Nesse caso provaremos que se $A \subset B$ então $A \cup B \subset B$ e que se $A \subset B$ então $B \subset A \cup B$.

Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$. No caso em que $x \in A$, usando que por hipótese $A \subset B$ temos que $x \in B$. Se $x \in B$ então $x \in B$ ou $x \in A$, e assim $x \in A \cup B$.

Agora demonstraremos que se $A \cup B = B$ então $A \subset B$. Seja $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e como $A \cup B = B$ então $x \in B$. **e.)** ($\Rightarrow$) Se $X \in \mathcal{P}(A)$, então $X \subset A \subset B$, logo $X \in \mathcal{P}(B)$. ($\Leftarrow$) $A \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, logo $A \subset B$. **f.)** Seja $x \in B$. Se $x \in A$, então $x \in A \cap B = A \cap C$, logo $x \in C$. Se $x \notin A$, então $x \in A \cup B = A \cup C$ e, como $x \notin A$, $x \in C$. Assim $B \subset C$; a inclusão $C \subset B$ é simétrica. **g.)** ($\Rightarrow$) Se existisse $x \in A \setminus B$, teríamos $x \in B$ (pela hipótese) e $x \notin B$, absurdo; logo $A \setminus B = \emptyset$. ($\Leftarrow$) $\emptyset \subset B$.

2.17 a.) $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (y \in B \text{ ou } y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. **b.)** $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Leftrightarrow x \in A, y \in B \text{ e } y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B \cap C)$. (A hipótese $B \cap C \neq \emptyset$ não é necessária para a igualdade.) **c.)** $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) \Leftrightarrow x \in A, y \in B \text{ e } \text{não}(x \in A \text{ e } y \in C) \Leftrightarrow x \in A, y \in B \text{ e } y \notin C \Leftrightarrow (x, y) \in A \times (B \setminus C)$.

Capítulo 3

3.1 Se $k^2 + k$ é ímpar, então $(k + 1)^2 + (k + 1) = (k^2 + k) + 2(k + 1)$ é ímpar (soma de ímpar com par); logo vale PIF 2. No entanto, $P(n)$ é falsa para todo n , pois $n^2 + n = n(n + 1)$ é sempre par (um dos fatores é par). O que falha é PIF 1: não existe n_0 com $P(n_0)$ verdadeira. Assim, a condição PIF 2 sozinha não garante nada.

3.2 Para $n = 1$: $(a + b)^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} b$. Suponha a fórmula válida para n . Então

$$(a + b)^{n+1} = (a + b) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}.$$

Trocando $i + 1$ por i na segunda soma, ela vira $\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i$. Somando os termos de mesmo i e usando a fórmula sugerida para $1 \leq i \leq n$ (os termos $i = 0$ e $i = n + 1$ têm coeficiente $1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1}$), obtemos $\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i$. A fórmula sugerida: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n! (n-k+1)! + n! k}{k! (n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!}$.

3.3 Sabendo apenas que k é primo ou produto de primos, nada podemos dizer sobre $k+1$: se $k+1 = p \cdot m$, o fator m é em geral bem menor que k (por exemplo, $k + 1 = 30$ e $m = 15$ ou $m = 6$), e a hipótese de indução sobre k não diz nada sobre m . É preciso conhecer a propriedade para *todos* os naturais menores que $k + 1$, que é o que a 2^a versão do PIF fornece.

3.4 a.) $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$. De fato, $2 + 4 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ (ou, por indução: $n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$). **b.)** Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = "1 = 1^{2^n}"$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Reescrevendo $P(k + 1)$ e usando a hipótese indutiva temos :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) \\ = k^2 + 2k + 1 \\ = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k + 1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

3.5 Para $n = 1$: $1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Suponha $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Então

$$1^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+1)(k+2)}{6}$$

que é a fórmula para $n = k + 1$.

3.6 a.) Para $n = 1$: $1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$. Se vale para k , então $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$. **b.)** Para $n = 1$: $1 = 4 - \frac{3}{1}$. Se vale para k , somando $(k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k$: $4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{2(k+2) - (k+1)}{2^k} = 4 - \frac{k+3}{2^k}$, que é a fórmula para $k+1$. **c.)** Para $n = 1$: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Se o produto até k vale $\frac{1}{k+1}$, então o produto até $k+1$ vale $\frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$. **d.)** Para $n = 1$: $1 = 2^1 - 1$. Se $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, então $1 + 2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1$. **e.)** Para $n = 1$: $1 < 2$. Se $k < 2^k$, então $k+1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$, pois $1 \leq 2^k$. **f.)** Para $n = 1$: $1 = (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{2}$. Se vale para k , somando $(-1)^{k+2} (k+1)^2$: $(-1)^{k+2} (k+1) \left[(k+1) - \frac{k}{2}\right] = (-1)^{k+2} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3.7 Para $n = 1$: $S_1 = a = \frac{ra-a}{r-1}$. Se $S_k = \frac{r^k a - a}{r-1}$, então $S_{k+1} = S_k + r^k a = \frac{r^k a - a + r^{k+1} a - r^k a}{r-1} = \frac{r^{k+1} a - a}{r-1}$.

3.8 Para $n = 4$: $9 < 16$. Se $2k+1 < 2^k$ com $k \geq 4$, então $2(k+1)+1 = (2k+1)+2 < 2^k+2 < 2^k+2^k = 2^{k+1}$, pois $2 < 2^k$.

3.9 Para $n = 2$: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, pois $x > 0$. Suponha $(1+x)^k > 1 + kx$ para algum $k \geq 2$. Como $1+x > 0$,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k > (1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

3.10 Para $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. Suponha a igualdade válida para k . Então

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Alternativamente, use $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$: a soma telescópica vale $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

3.11 Para $n = 1$: $2^2 - 1 = 3$ é divisível por 3. Suponha $2^{2k} - 1 = 3m$ com m inteiro, isto é, $2^{2k} = 3m + 1$. Então $2^{2(k+1)} - 1 = 4 \cdot 2^{2k} - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$, que é divisível por 3.

3.12 Seja $P(n)$: “é possível pagar n reais com notas de 2 e de 5”. $P(4)$ vale, pois $4 = 2 + 2$. Suponha $P(k)$ com $k \geq 4$ e considere um pagamento de k reais. Se ele usa alguma nota de 5, troque-a por três notas de 2 (de 5 para 6 reais): obtemos $k+1$. Se não usa nenhuma nota de 5, então usa apenas notas de 2, e pelo menos duas delas (pois $k \geq 4$); troque duas notas de 2 (4 reais) por uma de 5: obtemos $k+1$.

3.13 Para $n = 3$ é a soma dos ângulos de um triângulo, π . Suponha o resultado válido para polígonos convexos de k lados e seja $A_1 A_2 \dots A_{k+1}$ convexo. A diagonal $A_1 A_3$ divide-o no triângulo $A_1 A_2 A_3$ (soma π) e no polígono convexo $A_1 A_3 \dots A_{k+1}$, de k lados (soma $(k-2)\pi$). Como a diagonal está no interior, os ângulos em A_1 e A_3 se somam, e a soma total é $(k-2)\pi + \pi = ((k+1)-2)\pi$.

3.14 Para $n = 0$: o conjunto vazio tem um único subconjunto, $2^0 = 1$. Suponha que todo conjunto com k elementos tenha 2^k subconjuntos, e seja A com $k+1$ elementos. Fixe $a \in A$. Os subconjuntos que não contêm a são os subconjuntos de $A \setminus \{a\}$, em número 2^k . Os que contêm a são exatamente os $X \cup \{a\}$, com X subconjunto de $A \setminus \{a\}$, também 2^k . No total, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$.

3.15 a.) Para $n = 1$ a igualdade é trivial. Suponha-a válida para k . Pela distributividade para dois conjuntos e pela hipótese,

$$X \cap (X_1 \cup \dots \cup X_k \cup X_{k+1}) = [X \cap (X_1 \cup \dots \cup X_k)] \cup (X \cap X_{k+1}) = (X \cap X_1) \cup \dots \cup (X \cap X_k) \cup (X \cap X_{k+1}).$$

b.) Para $n = 1$ é trivial. Suponha-a válida para k . Pela lei de De Morgan para dois conjuntos aplicada a $X_1 \cup \dots \cup X_k$ e X_{k+1} , e pela hipótese, $(X_1 \cup \dots \cup X_k \cup X_{k+1})^C = (X_1 \cup \dots \cup X_k)^C \cap X_{k+1}^C = X_1^C \cap \dots \cap X_k^C \cap X_{k+1}^C$.

3.16 Para $n = 9$: $9! = 362880 \geq 18^2 = 324$. Se $k! \geq (2k)^2$ com $k \geq 9$, então $(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1) \cdot 4k^2 \geq 4(k+1)^2 = (2(k+1))^2$, pois $k^2 \geq k+1$.

3.17 (Para $n = 1$ vale a igualdade $1 = 2 - 1$, por isso a desigualdade é para $n \geq 2$.) Para $n = 2$: $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$. Se $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k}$, então $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$, pois isso equivale a $\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$, isto é, $k(k+2) \leq (k+1)^2$, verdadeiro.

3.19 a.) Se $x \geq 0$, $-x \leq 0$ e $|-x| = x = |x|$ (se $x = 0$ ambos são 0); se $x < 0$, $-x > 0$ e $|-x| = -x = |x|$. **b.)** $|x - y| = |-(y - x)| = |y - x|$, pelo item anterior. **c.)** Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e $x = c$; se $x < 0$, $|x| = -x$ e $-x = c$, isto é, $x = -c$. Reciprocamente, se $x = \pm c$ com $c \geq 0$, então $|x| = |c| = c$. **d.)** Dividindo em casos pelo sinal de x e y : se $x, y \geq 0$, $xy \geq 0$ e $|xy| = xy = |x||y|$; se $x \geq 0 > y$, $xy \leq 0$ e $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$; os outros casos são análogos. **e.)** $x^2 \geq 0$ (produto de números de mesmo sinal), logo $|x^2| = x^2$. **f.)** Se $x \geq 0$: $|x| < c \Leftrightarrow x < c$, e neste caso $c > 0 > -c$ implica $-c < x$; logo $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$. Se $x < 0$: $|x| = -x < c \Leftrightarrow -c < x$, e nesse caso $x < 0 < c$ vale automaticamente ($c > -x > 0$). **g.)** Se $x \geq 0$: $-|x| \leq 0 \leq x = |x|$. Se $x < 0$: $|x| = -x$, logo $-|x| = x \leq 0 \leq |x|$. **h.)** Somando $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Como $|x + y|$ é $x + y$ ou $-(x + y)$, ele é menor ou igual a $|x| + |y|$. **i.)** Pela desigualdade triangular, $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, logo $|x| - |y| \leq |x - y|$. Trocando os papéis de x e y (e usando o item b), $|y| - |x| \leq |x - y|$. Como $||x| - |y||$ é um desses dois números, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

3.20 Não vale em geral. A desigualdade $-x \leq |x|$ vale sempre (equivale a $-|x| \leq x$), mas $|x| \leq x$ só vale para $x \geq 0$: por exemplo, para $x = -1$, $|x| = 1 \not\leq -1$. A desigualdade correta, válida para todo x , é $-|x| \leq x \leq |x|$. A cadeia do enunciado vale exatamente para $x \geq 0$.

3.21 a.) Limitado inferiormente, mas não superiormente: $\inf A = 1$ (é o menor elemento). Não tem supremo. **b.)** Limitado: $\sup B = 2$ (máximo, para $n = 1$) e $\inf B = 1$ (não é atingido, pois $1 + \frac{1}{n} > 1$, mas $1 + \frac{1}{n}$ chega tão perto de 1 quanto se queira). **c.)** Limitado superiormente, mas não inferiormente: $\sup C = 0$ (máximo, atingido para $n = 0$ e $n = 1$). Não tem ínfimo. **d.)** Limitado inferiormente, mas não superiormente: $\inf D = 1$ (mínimo). Não tem supremo. **e.)** Limitado: $\inf E = 1$ (mínimo) e $\sup E = 2$ (não pertence a E). **f.)** Limitado: $\inf F = -\sqrt{3}$ e $\sup F = \sqrt{3}$ (como subconjunto de $\mathbb{R}$; nenhum dos dois pertence a F , nem a $\mathbb{Q}$). **g.)** Limitado: $\inf G = 0$ (mínimo, para $n = 0$) e $\sup G = 1$ (não é atingido, pois $\frac{n}{1+n} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$). **h.)** Limitado: como $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, temos $\sup H = 2$ (máximo, para $n = 0$) e $\inf H = 1$ (não é atingido). **i.)** Limitado: $\sup I = 1$ (máximo, para $n = 0$) e $\inf I = 0$ (não é atingido). **j.)** Limitado inferiormente, mas não superiormente: $\inf J = 1$ (mínimo). Não tem supremo.

3.22 a.) Suponha que 0 e $0'$ sejam elementos neutros da soma. Então $0 = 0 + 0'$ (pois $0'$ é neutro) e $0 + 0' = 0'$ (pois 0 é neutro), logo $0 = 0'$. **b.)** Se 1 e $1'$ são neutros da multiplicação, então $1 = 1 \cdot 1' = 1'$, pelo mesmo argumento. **c.)** $a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ (A3, A9). Somando $-(a \cdot 0)$ aos dois lados (A4, A1), obtemos $0 = a \cdot 0$. **d.)** É a última propriedade provada no texto: se $a \neq 0$, multiplique $ab = 0$ por a^{-1} e use o item anterior para concluir $b = 0$.

3.23 a.) Por hipótese $ax = a$ e como $a \neq 0$ existe a^{-1}

Logo $a^{-1}(ax) = x$ por um lado

e por outro

$a^{-1}(ax) = a^{-1}(a) = 1$ por outro.

Logo $x = 1$ **b.)** Calculando $(x - y)(x + y)$ usando a distributiva temos:

$$(x - y)(x + y) = x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$$

c.) Se $x^2 = y^2$, então $x^2 - y^2 = 0$, isto é, $(x - y)(x + y) = 0$ pelo item b. Pela propriedade do produto nulo (Exercício anterior, item d), $x - y = 0$ ou $x + y = 0$, isto é, $x = y$ ou $x = -y$. **d.)** Pela distributiva, $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$. **e.)** Pela distributiva, $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$. **f.)** Como $a \leq b$ temos por A11 que $a + c \leq b + c$

Por outro lado como $c \leq d$ temos por A11 que $b + c \leq b + d$ logo por transitividade temos:

$$a + c \leq b + d$$

g.) Somando $-a - b$ a ambos os lados de $a \leq b$ (A11), obtemos $-b \leq -a$.

3.24 Suponha, por absurdo, que $x \neq a$. Então $\varepsilon := |x - a| > 0$ e, pela hipótese, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, ou seja, $|x - a| < \varepsilon = |x - a|$, o que é impossível. Logo $x = a$.

3.25 a.) Somando $-a - b$ a ambos os lados de $a \leq b$ (A11), obtemos $-b \leq -a$. **b.)** Como $c \geq d$, pelo item anterior $-c \leq -d$. Por A11, $a - c \leq b - c$ e $b - c \leq b - d$; por transitividade, $a - c \leq b - d$. **c.)** É exatamente o axioma A12. **d.)** Como $a > 1 > 0$, A12 aplicado a $1 \leq a$ e $a \geq 0$ dá $a \leq a^2$. Além disso $a^2 \neq a$: se $a^2 = a$, então $a(a - 1) = 0$ e, como $a \neq 0$, $a = 1$, absurdo. Logo $a < a^2$. **e.)** Como $0 < a \leq 1$, A12 aplicado a $a \leq 1$ e $a \geq 0$ dá $a^2 \leq a$. Além disso $a^2 \neq a$: se $a^2 = a$, então $a(a - 1) = 0$ e, como $a \neq 0$, $a = 1$, contradição com $a < 1$. Logo $a^2 < a$. **f.)** Como $b > a \geq 0$, temos $b > 0$. Por A12, $ac \leq bc$ (pois $a \leq b$ e $c \geq 0$). Por outro lado, $b(d - c) > 0$, pois é produto de dois números positivos (é ≥ 0 por A12 e não é 0 pela propriedade do produto nulo); logo $bc < bd$. Por transitividade, $ac < bd$. **g.)** É o item anterior com $c = a$ e $d = b$. **h.)** Por absurdo, se $a \geq b$, então, como $a, b > 0$, A12 dá $b^2 \leq ab$ e $ab \leq a^2$, logo $b^2 \leq a^2$, contradizendo $a^2 < b^2$. Logo $a < b$.

Capítulo 4 Capítulo 5

5.1 120.

5.2 $26^3 \cdot 10^4$.

5.3 125.

5.4 $900 - 9^3 = 171$.

5.5 $A(6, 4) = 360$.

5.6 $A(26, 3)A(10, 4) = 78\,624\,000$.

5.7 4536.

5.8 2296.

5.9 $3! 6! 3! 4!$.

5.10 $\frac{10!}{3!2!2!} = 151\,200$.

5.11 560.

5.12 $\binom{12}{5} = 792$.

5.13 56.

5.14 190 retas e 1140 triângulos.

5.15 792.

5.16 $\binom{7}{3}\binom{6}{2} = 525$.

5.17 $35 + 21 = 56$.

5.18 Conte os subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ de duas maneiras. Cada elemento pode ou não pertencer ao subconjunto, o que dá 2^n subconjuntos. Por outro lado, para cada $k = 0, 1, \dots, n$ há $\binom{n}{k}$ subconjuntos com k elementos; somando sobre k obtemos $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Logo as duas contagens coincidem.

5.19 $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$, pois os coeficientes $\binom{5}{k}$, $k = 0, \dots, 5$, são 1, 5, 10, 10, 5, 1.

5.20 126.

5.21 Dica: aplique o binômio de Newton a $(1 - 1)^n$. Como $(1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \cdot 1^{n-k}$ e $(1 - 1)^n = 0$ para $n \geq 1$, a soma é zero.

5.22 $\binom{22}{3} = 1540$.

5.23 $\binom{26}{3} = 2600$.

5.24 $\binom{17}{3} = 680$.

5.25 Faça $u = x - 1$, $v = y - 2$, $w = z$. Então $u, v, w \geq 1$ e $u + v + w = 17$, dando $\binom{16}{2} = 120$ soluções.

Capítulo 6

6.1 a.) Não: a, i e u não têm imagem. b.) Sim. c.) Sim. d.) Não: e tem duas imagens e a, o não têm imagem. e.) Sim (função constante). f.) Sim. g.) Sim.

6.2 b.) Não é injetora ($f(a) = f(e) = 1$) nem sobrejetora ($\text{Im } f = \{1, 2\}$). c.) Injetora e sobrejetora, logo bijetora (as cinco imagens são distintas, e $\#A = \#B = 5$). e.) Não é injetora nem sobrejetora (a imagem é $\{3\}$). f.) Não é injetora ($f(e) = f(i)$) nem sobrejetora ($\text{Im } f = \{1, 2, 3\}$). g.) Bijetora: as imagens 2, 1, 4, 5, 3 são todas distintas e esgotam B .

6.3 Para n par, $f(n) = n$; para n ímpar, $f(n) = -n < 0$. Logo $\text{Im } f = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \cup \{-1, -3, -5, \dots\}$, isto é, os inteiros pares não negativos e os inteiros ímpares negativos.

6.4 $g(n) = (-1)^n n + (-1)^{n+1}(n+1) = (-1)^{n+1}[(n+1) - n] = (-1)^{n+1}$. Assim $g(n) = -1$ se n é par e $g(n) = 1$ se n é ímpar, e $\text{Im } g = \{-1, 1\}$.

6.5 a.) Se f é injetora, elementos distintos de A têm imagens distintas, logo $f(A) \subset B$ tem exatamente n elementos. Portanto B tem pelo menos n elementos. b.) Se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e f é sobrejetora, então $B = f(A) = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$, que tem no máximo n elementos (menos que n se houver repetições). c.) Se existe bijeção $f: A \rightarrow B$, ela é injetora e sobrejetora, e os itens anteriores dão $\#B \geq n$ e $\#B \leq n$, isto é, $\#B = n$. Reciprocamente, se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, a função $f(a_i) = b_i$ é bijetora.

6.6 a.) Não é injetora ($f(1) = f(2) = 1$) nem sobrejetora ($\text{Im } f = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; 4 e 6 não são imagens). b.) Bijetora: g leva $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \dots \mapsto 7 \mapsto 1$, e as imagens 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1 são distintas e esgotam A . c.) Injetora ($3n+1 = 3m+1 \Rightarrow n = m$), mas não sobrejetora (0 e 2 não são da forma $3n+1$). d.) $f(n) = 0$ se $n \geq 0$ e $f(n) = 2n$ se $n < 0$. Não é injetora ($f(0) = f(1) = 0$) nem sobrejetora (1 não é imagem). e.) Bijetora. Injetora: $ax+b = ay+b \Rightarrow a(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$, pois $a \neq 0$. Sobrejetora: dado y , $x = \frac{y-b}{a}$ satisfaz $f(x) = y$. f.) Não é injetora ($f(1) = f(-1)$) nem sobrejetora (só assume valores ≥ 0 ; -1 não é imagem). g.) Injetora: $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$. Não sobrejetora: só assume valores positivos. h.) Não é injetora ($f(1) = f(-1)$) nem sobrejetora (só assume valores positivos). i.) Injetora: $\sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$ (elevando ao quadrado). Não é sobrejetora: não assume valores negativos. j.) Injetora: $(x, x) = (y, y) \Rightarrow x = y$. Não sobrejetora: (0, 1) não é da forma (x, x) . k.) Injetora: se $(x, |x|) = (y, |y|)$, então $x = y$. Não sobrejetora: (0, -1) não é imagem, pois a segunda coordenada é ≥ 0 . l.) Não é injetora ($f(0, 1) = f(0, -1) = -1$). É sobrejetora: dado z , $f(z, 0) = z$. m.) Bijetora. Injetora: se $(x, y^3) = (x', y'^3)$, então $x = x'$ e $y^3 = y'^3$, o que dá $y = y'$ (a função $y \mapsto y^3$ é injetora). Sobrejetora: dado (u, v) , tome $(u, \sqrt[3]{v})$.

6.7 Para n par, $f(n) = n$; para n ímpar, $f(n) = -n < 0$. Logo $\text{Im } f = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \cup \{-1, -3, -5, \dots\}$, isto é, os inteiros pares não negativos e os inteiros ímpares negativos.

6.8 $g(n) = (-1)^n n + (-1)^{n+1}(n+1) = (-1)^{n+1}[(n+1) - n] = (-1)^{n+1}$. Assim $g(n) = -1$ se n é par e $g(n) = 1$ se n é ímpar, e $\text{Im } g = \{-1, 1\}$.

6.9 a.) $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ e $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$ (pois $3n+1 = 0$ ou $3n+1 = 2$ não têm solução natural). b.) Os três conjuntos são vazios: $f(x) < 0$ para todo x . De fato, $(x+2)^2 - 1 = (x+1)(x+3)$. Se $(x+1)(x+3) \geq 0$, então $f(x) = -x^2 - 3x - 3 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$. Se $-3 < x < -1$, então $|(x+1)(x+3)| = -(x+1)(x+3)$ e $f(x) = x^2 + 5x + 3 = (x+1)(x+4) - 1 < -1$, pois $x+1 < 0 < x+4$. c.) Racionalizando, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \in (0, 1]$, com $f(x) = 1$ apenas para $x = 0$. Logo $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$ e $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$. d.) $f^{-1}(\{c\}) = \{(c + |y|, y) : y \in \mathbb{R}\}$; em particular, para $c = 0, 1, 2$ obtemos $\{(|y|, y)\}$, $\{(1 + |y|, y)\}$ e $\{(2 + |y|, y)\}$.

6.10 a.) $b \in f(X \cup Y) \Leftrightarrow$ existe $a \in X \cup Y$ com $f(a) = b \Leftrightarrow$ existe $a \in X$ ou existe $a \in Y$ com $f(a) = b \Leftrightarrow b \in f(X) \cup f(Y)$. **b.)** Se $b = f(a)$ com $a \in X \cap Y$, então $b \in f(X)$ e $b \in f(Y)$. A igualdade pode falhar: com $f(x) = x^2$, $X = \{1\}$, $Y = \{-1\}$, $f(X \cap Y) = \emptyset$ e $f(X) \cap f(Y) = \{1\}$. **c.)** $a \in f^{-1}(V \cup W) \Leftrightarrow f(a) \in V \cup W \Leftrightarrow f(a) \in V$ ou $f(a) \in W \Leftrightarrow a \in f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$. **d.)** $a \in f^{-1}(V \cap W) \Leftrightarrow f(a) \in V$ e $f(a) \in W \Leftrightarrow a \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. **e.)** Se $b \in f(X)$, então $b = f(a)$ com $a \in X \subset Y$, logo $b \in f(Y)$. **f.)** Pelo item b, basta provar $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Se $b = f(x) = f(y)$ com $x \in X$, $y \in Y$, então, como f é injetora, $x = y \in X \cap Y$, logo $b \in f(X \cap Y)$. **g.)** Se $a \in f^{-1}(V)$, então $f(a) \in V \subset W$, logo $a \in f^{-1}(W)$. **h.)** Se $a \in X$, então $f(a) \in f(X)$, isto é, $a \in f^{-1}(f(X))$. **i.)** Pelo item anterior, resta provar $f^{-1}(f(X)) \subset X$. Se $f(a) \in f(X)$, então $f(a) = f(x)$ para algum $x \in X$ e, como f é injetora, $a = x \in X$.

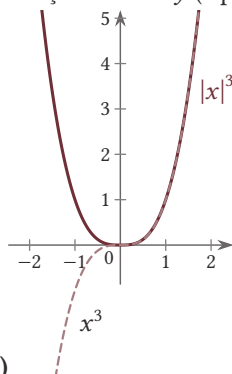
Capítulo 7

7.1 $(f \circ g)(x) = \sin(\pi \llbracket x \rrbracket) = 0$ para todo x , pois $\llbracket x \rrbracket$ é inteiro: domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\{0\}$. Já $(g \circ f)(x) = \pi \llbracket \sin x \rrbracket$ tem domínio $\mathbb{R}$; como $\llbracket \sin x \rrbracket$ vale -1 se $\sin x < 0$, 0 se $0 \leq \sin x < 1$ e 1 se $\sin x = 1$, a imagem é $\{-\pi, 0, \pi\}$.

7.2 a.) $(\iota \circ f)(x) = \iota(f(x)) = f(x)$ e $(f \circ \iota)(x) = f(\iota(x)) = f(x)$, para todo x no domínio de f . **b.)** Por definição, $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in \text{Dom } f$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in \text{Im } f = \text{Dom } f^{-1}$; isto é, $f^{-1} \circ f = \iota$ e $f \circ f^{-1} = \iota$ (nos respectivos domínios).

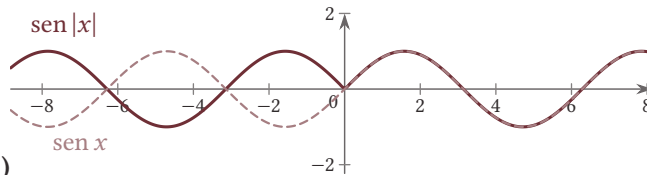
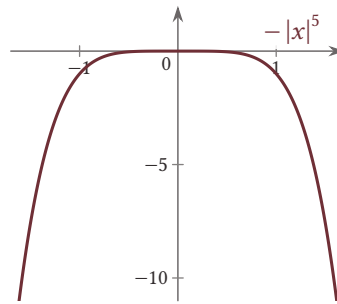
7.3 a.) $f(x) = x$, $f(x+2) = x+2$, $f(-x) = -x$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$. **b.)** $f(x) = 3x+4$, $f(x+2) = 3x+10$, $f(-x) = -3x+4$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$. **c.)** $f(x) = x^2$, $f(x+2) = (x+2)^2$, $f(-x) = x^2$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$. **d.)** $f(x) = 5x^2+1$, $f(x+2) = 5(x+2)^2+1$, $f(-x) = 5(-x)^2+1 = 5x^2+1$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{5(x+h)^2+1-5x^2-1}{h} = \frac{5xh+h^2}{h} = 5x+h$. **e.)** $f(x) = x^2-x$, $f(x+2) = x^2+3x+2$, $f(-x) = x^2+x$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2-h}{h} = 2x+h-1$. **f.)** $f(x) = x^3+x^2$, $f(x+2) = x^3+7x^2+16x+12$, $f(-x) = -x^3+x^2$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2+3xh+h^2+2x+h$.

7.4 a.) Para $x \geq 0$, $f(|x|) = f(x)$; para $x < 0$, $f(|x|) = f(-x)$. Logo o gráfico de $f(|x|)$ é o gráfico de f restrito a $x \geq 0$, junto com o seu reflexo em relação ao eixo y (a parte de $x < 0$ do gráfico de f é descartada). O gráfico é



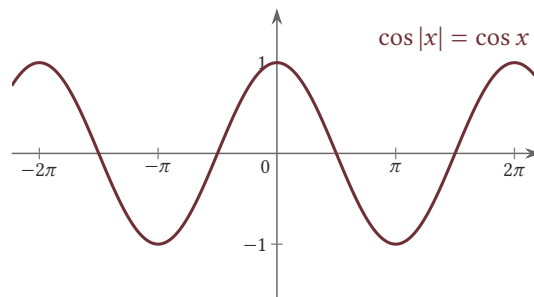
simétrico em relação ao eixo y . **b.)**

c.) É o reflexo, em relação ao eixo x , do gráfico de $|x|^5$, que é simétrico em relação ao eixo y , vale 0 na origem e cresce (muito planamente perto da origem) para $|x|$ crescente. Assim, o gráfico tem um máximo em $(0, 0)$ e decresce para $-\infty$ nos dois sentidos.



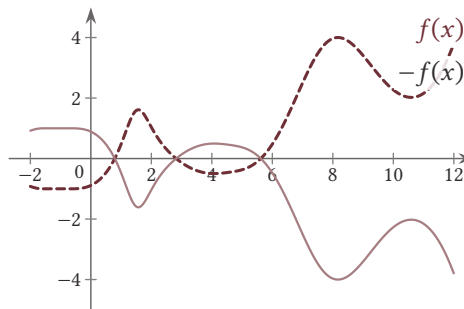
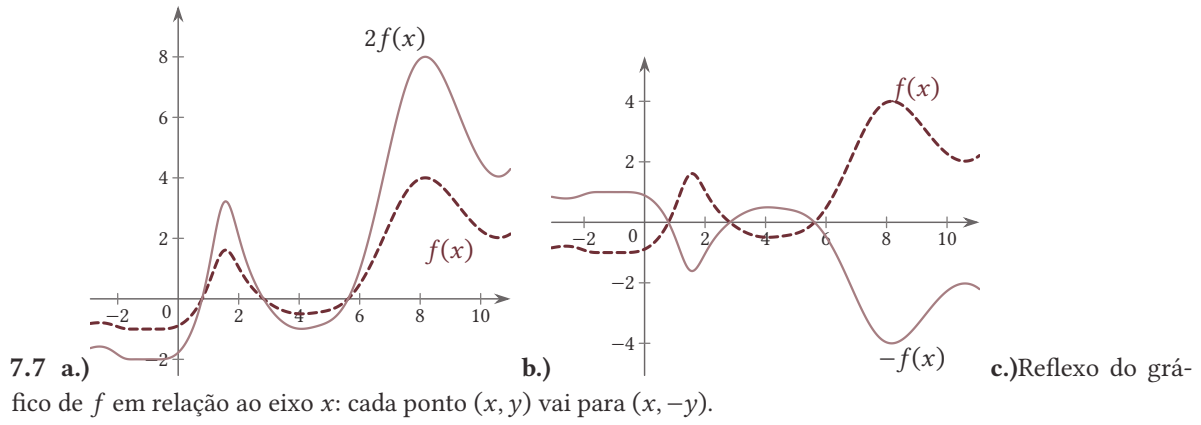
d.)
o do cosseno.

e.) Como $\cos$ é par, $\cos |x| = \cos x$: o gráfico é

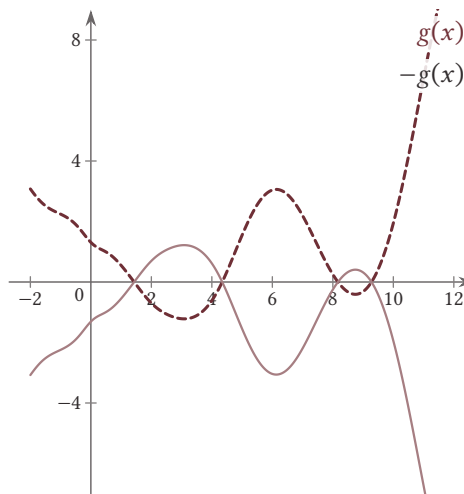


7.5 Lendo os trechos retos do gráfico: $f(x) = 1$ para $x < -1$; $f(x) = -x$ para $-1 \leq x < 0$; $f(x) = 2x$ para $0 \leq x < 2$; e $f(x) = \frac{16-2x}{3}$ para $x \geq 2$ (a reta que passa por $E = (2, 4)$ e $D = (5, 2)$).

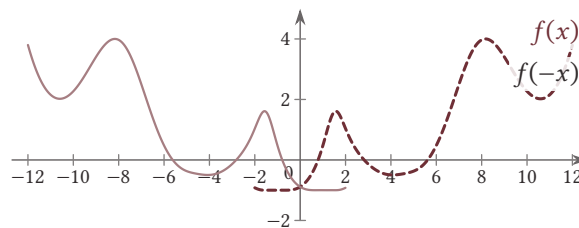
7.6 a.) $\text{Dom } f = [-2, \infty)$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$; $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(fg) = [-2, \infty)$; $\text{Dom}(f/g) = [-2, \infty) \setminus \{0\}$; $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{|x|+2}$; $\text{Dom}(g \circ f) = [-2, \infty)$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+2}$. b.) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$; $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2(x^2-2)}$; $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2(x-2)^2}$. c.) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $\text{Dom } g = [0, \infty)$; $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f/g) = (0, 2) \cup (2, \infty)$; $\text{Dom}(f \circ g) = (0, 4) \cup (4, \infty)$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$; $\text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-2)}}$. d.) $\text{Dom } f = \text{Dom } g = \mathbb{R}$, e todos os domínios pedidos são $\mathbb{R}$ (inclusive f/g , pois $g(x) = 2^{-x} > 0$); $(f \circ g)(x) = 2^{-3x/5}$ e $(g \circ f)(x) = 2^{-\sqrt[5]{x^3}}$.



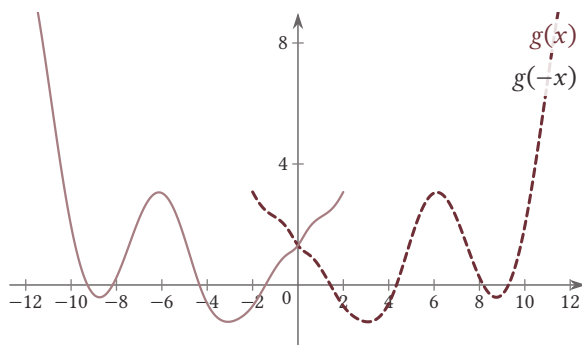
d.) Reflexo do gráfico de g em relação ao eixo x .



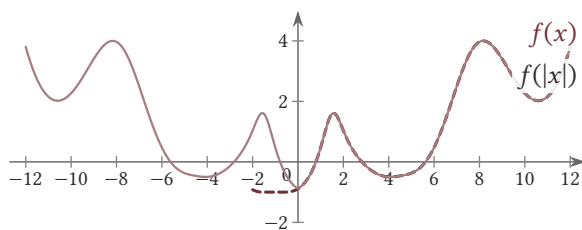
e.) Reflexo do gráfico de f em relação ao eixo y : $(x, y) \mapsto (-x, y)$.



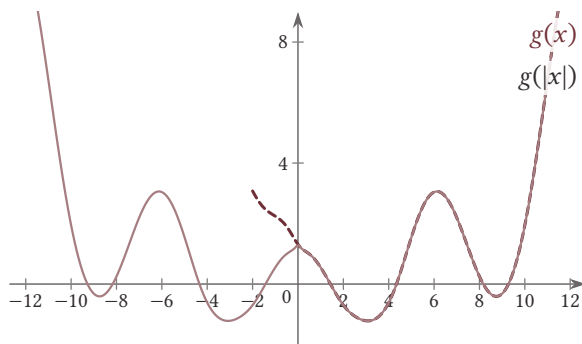
f.) Reflexo do gráfico de g em relação ao eixo y .



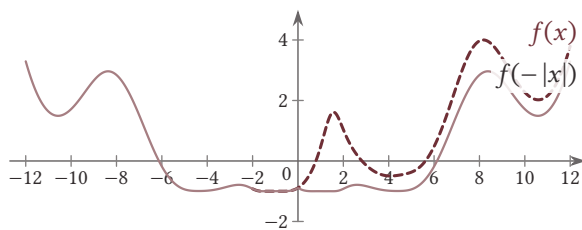
g.) Mantém-se a parte do gráfico de f com $x \geq 0$ e acrescenta-se seu reflexo em relação ao eixo y (a parte com $x < 0$ é descartada).

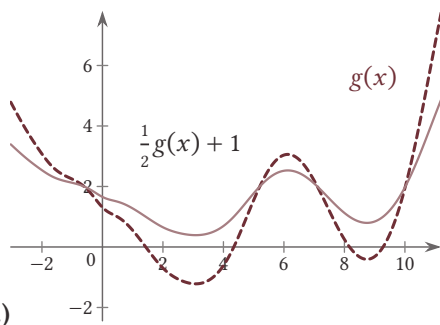


h.) Mantém-se a parte do gráfico de g com $x \geq 0$ e acrescenta-se seu reflexo em relação ao eixo y .

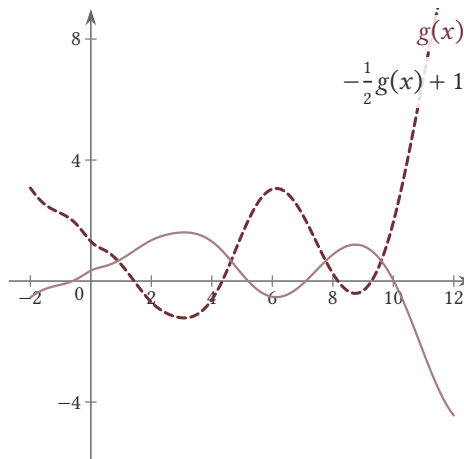


i.) Mantém-se a parte de $x \leq 0$ do gráfico de f e acrescenta-se seu reflexo em relação ao eixo y (a parte de $x > 0$ é descartada).

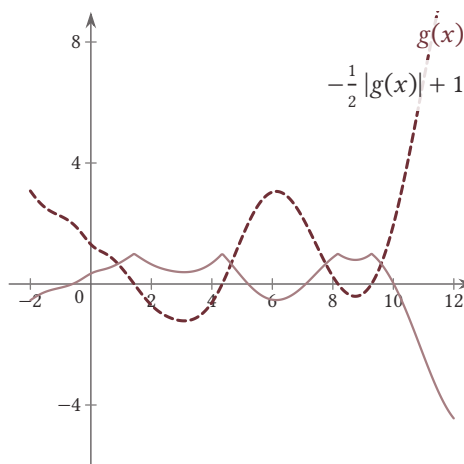




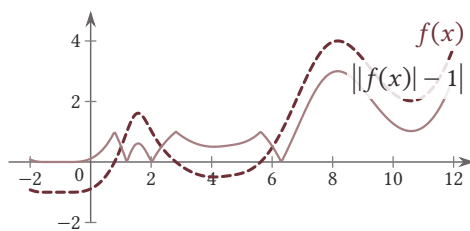
j.) **k.)** Reflexo do gráfico de g em relação ao eixo x , comprimido verticalmente por fator $\frac{1}{2}$ e deslocado 1 unidade para cima: $(x, y) \mapsto (x, 1 - \frac{y}{2})$.



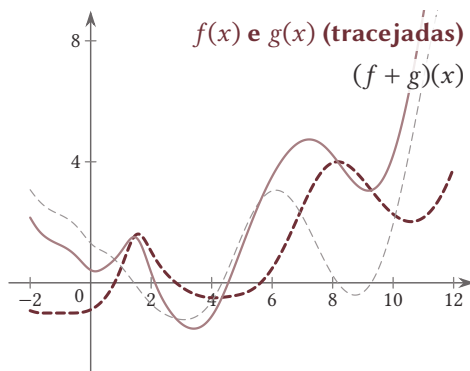
l.) Primeiro $|g|$ (reflete para cima as partes de g abaixo do eixo x), depois multiplica-se por $-\frac{1}{2}$ (reflexo em relação ao eixo x e compressão por $\frac{1}{2}$) e soma-se 1 (translação de 1 para cima). O gráfico fica sempre abaixo ou sobre a reta $y = 1$, tocando-a nos zeros de g .



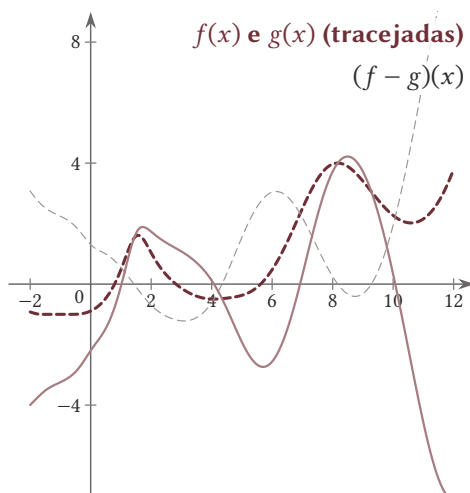
m.) Alonga-se horizontalmente o gráfico de f por fator 2: $(x, y) \mapsto (2x, y)$. n.) Primeiro $|f|$ (reflete para cima as partes abaixo do eixo x); depois desloca-se 1 para baixo, e reflete-se para cima o que ficar abaixo do eixo x (valor absoluto).



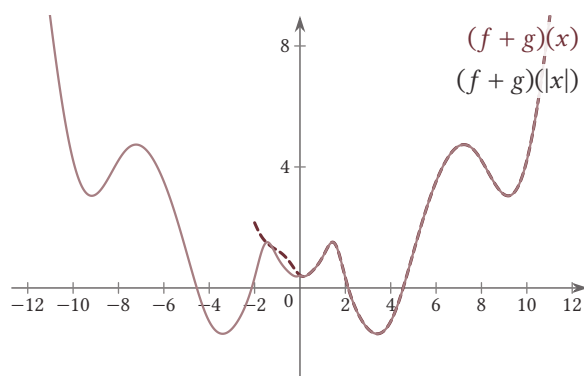
o.) Soma das ordenadas: para cada x , a altura do gráfico de $f + g$ é a soma das alturas dos gráficos de f e de g .

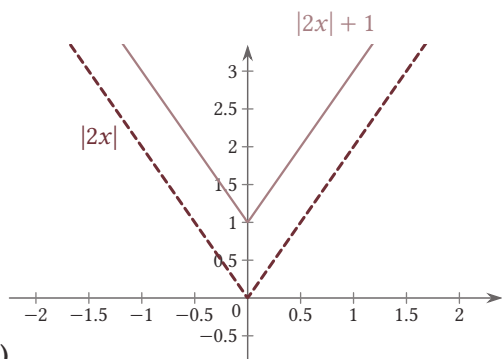


p.) Para cada x , a altura é a diferença $f(x) - g(x)$ (ordenada de f menos a de g).



q.) Constrói-se o gráfico de $f + g$ para $x \geq 0$ e acrescenta-se seu reflexo em relação ao eixo y .

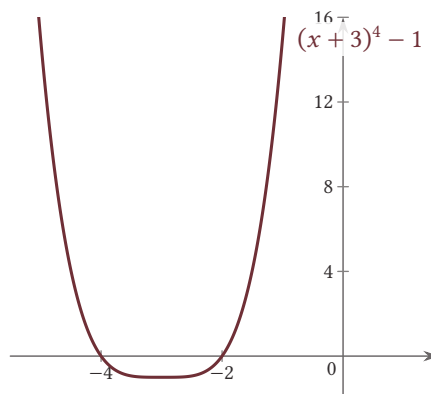
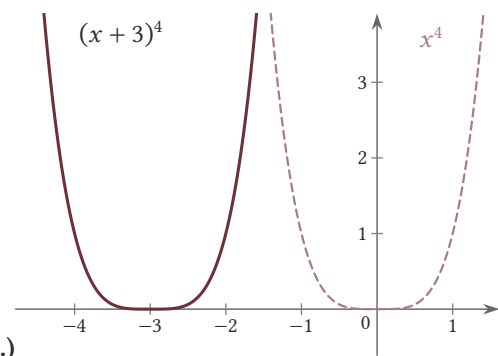




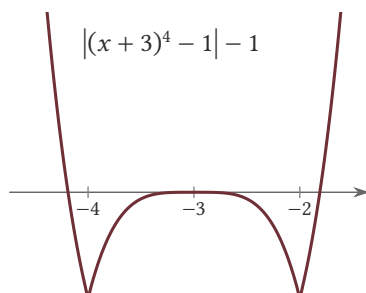
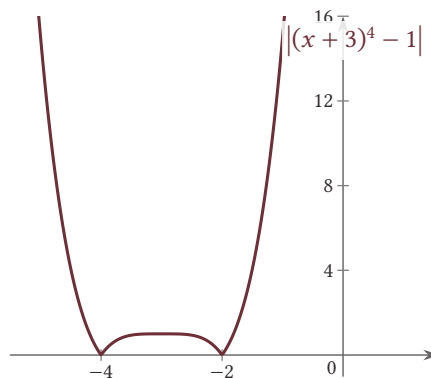
7.8 a.)

c.) Translação do gráfico de x^4 por 3 para a esquerda e 1 para baixo. Vértice (mínimo global) $(-3, -1)$; zeros $x = -4$ e $x = -2$; $f(0) = 80$. Positiva para $x < -4$ ou $x > -2$, negativa em $(-4, -2)$; decrescente em $(-\infty, -3)$, crescente em $(-3, \infty)$.

b.)



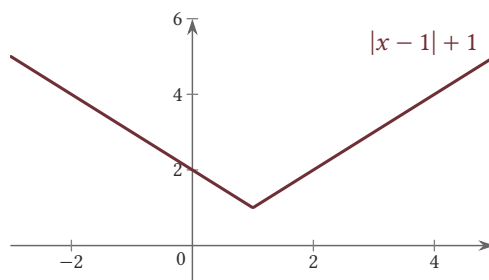
d.) Reflete-se para cima a parte negativa do item anterior. Zeros $x = -4$ e $x = -2$ (mínimos locais, de valor 0); $f(0) = 80$; máximo local $(-3, 1)$; positiva fora dos zeros. Decrescente em $(-\infty, -4)$ e em $(-3, -2)$; crescente em $(-4, -3)$ e em $(-2, \infty)$.



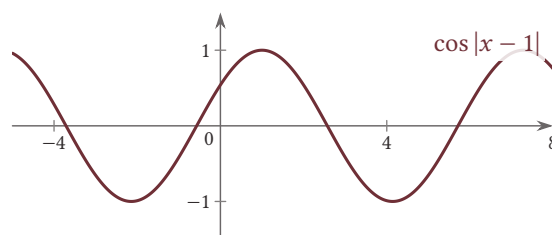
e.)

f.) V com vértice em $(1, 1)$ (translação de $|x|$). Sem zeros; $f(0) = 2$; sempre

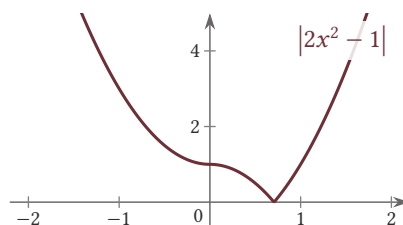
positiva. Decrescente em $(-\infty, 1)$, crescente em $(1, \infty)$; mínimo global 1 em $x = 1$.



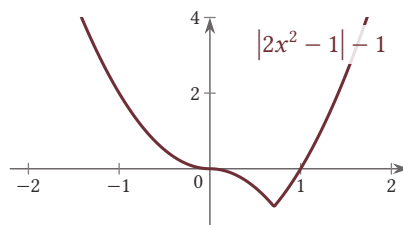
g.) Como $\cos$ é par, $\cos |x - 1| = \cos(x - 1)$: gráfico do cosseno deslocado 1 para a direita. $f(0) = \cos 1$; zeros $x = 1 + \frac{\pi}{2} + k\pi$; máximos 1 em $x = 1 + 2k\pi$; mínimos -1 em $x = 1 + \pi + 2k\pi$; positiva em $(1 - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ e negativa no restante; decrescente em $[1 + 2k\pi, 1 + \pi + 2k\pi]$ e crescente em $[1 + \pi + 2k\pi, 1 + 2\pi + 2k\pi]$.

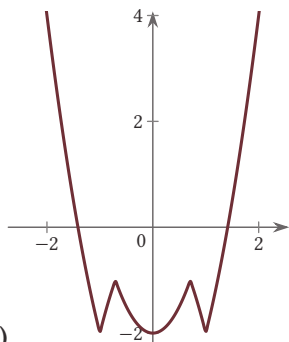


h.) Parte negativa da parábola $2x^2 - 1$ refletida para cima. Zeros $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (mínimos locais, valor 0); $f(0) = 1$ (máximo local); positiva fora dos zeros. Decrescente em $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e em $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; crescente em $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e em $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$.



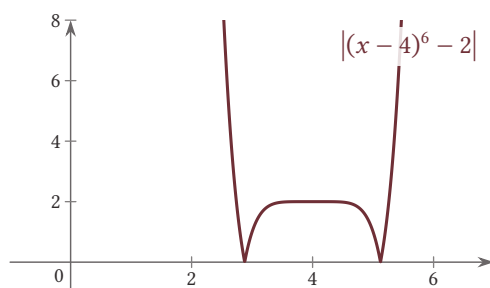
i.) Translação do item anterior por 1 para baixo. Zeros $x = -1, 0, 1$; $f(0) = 0$ (máximo local); mínimos locais -1 em $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Positiva para $|x| > 1$; negativa em $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Mesmos intervalos de crescimento do item anterior.



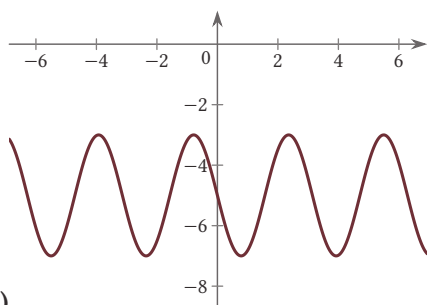
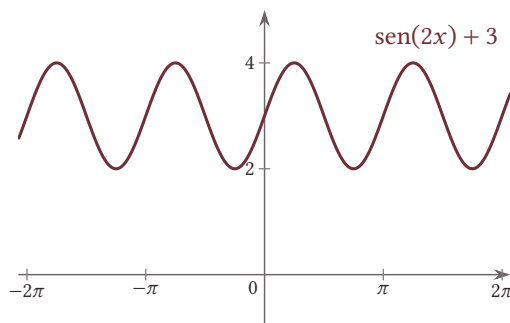


j.)

k.) Gráfico de $(x-4)^6 - 2$, com a parte negativa refletida para cima. Zeros $x = 4 \pm \sqrt[6]{2}$ (mínimos locais, valor 0); $f(0) = 4^6 - 2 = 4094$; máximo local $(4, 2)$; positiva fora dos zeros. Decrescente em $(-\infty, 4 - \sqrt[6]{2})$ e em $(4, 4 + \sqrt[6]{2})$; crescente nos outros dois intervalos.

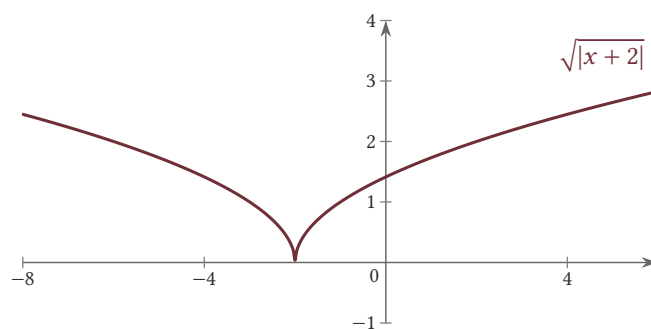


l.) Seno com período π , deslocado 3 para cima: imagem $[2, 4]$. Sem zeros; $f(0) = 3$; sempre positiva. Máximos 4 em $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; mínimos 2 em $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; crescente em $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$ e decrescente em $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$.

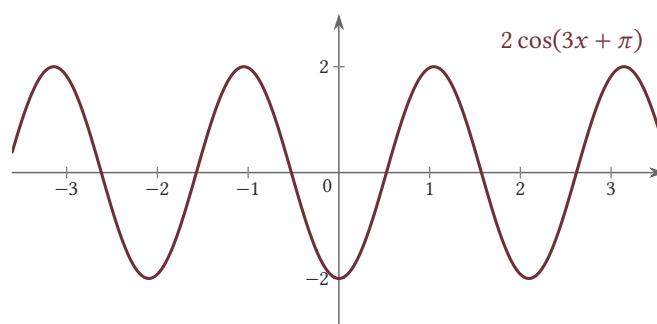


m.)

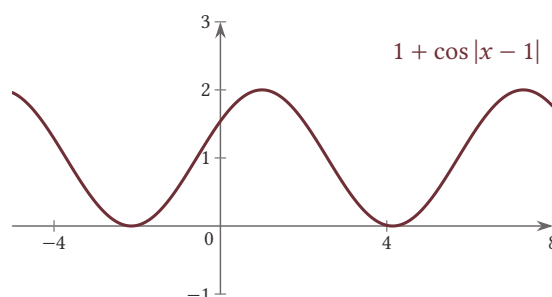
n.) Domínio $\mathbb{R}$. Para $x \geq -2$ é $\sqrt{x+2}$; para $x < -2$ é $\sqrt{-x-2}$: o gráfico é simétrico em relação a $x = -2$. Zero em $x = -2$ (mínimo global, com bico); $f(0) = \sqrt{2}$; positiva fora do zero. Decrescente em $(-\infty, -2)$ e crescente em $(-2, \infty)$.



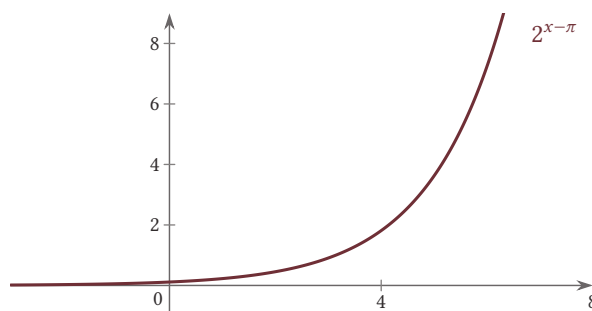
o.) $2 \cos(3x + \pi) = -2 \cos 3x$: amplitude 2, período $\frac{2\pi}{3}$, imagem $[-2, 2]$. $f(0) = -2$; zeros $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; mínimos -2 em $x = \frac{2k\pi}{3}$; máximos 2 em $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$. Positiva em $(-\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})$ e negativa no restante; crescente entre um mínimo e o máximo seguinte, decrescente entre um máximo e o mínimo seguinte.

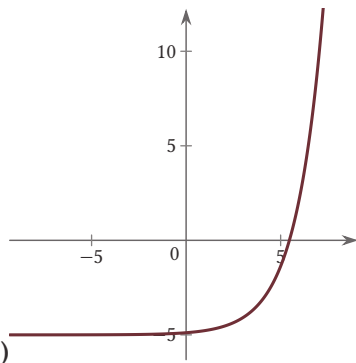


p.) Como $\cos|x-1| = \cos(x-1)$, o gráfico é o do cosseno deslocado 1 para a direita e 1 para cima; imagem $[0, 2]$. $f(0) = 1 + \cos 1$; zeros (mínimos, com valor 0) em $x = 1 + \pi + 2k\pi$; máximos 2 em $x = 1 + 2k\pi$; positiva fora dos zeros; decrescente em $[1 + 2k\pi, 1 + \pi + 2k\pi]$ e crescente em $[1 + \pi + 2k\pi, 1 + 2\pi + 2k\pi]$.



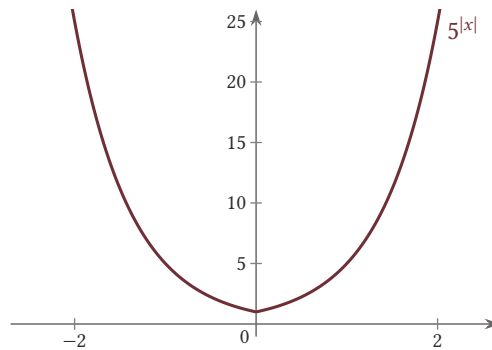
q.) Exponencial de base 2 deslocada π para a direita. Sem zeros; $f(0) = 2^{-\pi}$; sempre positiva; crescente em $\mathbb{R}$; sem extremos; a reta $y = 0$ é assíntota quando $x \rightarrow -\infty$.



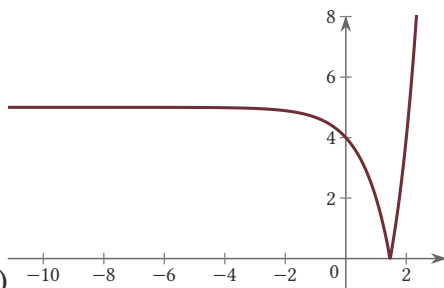
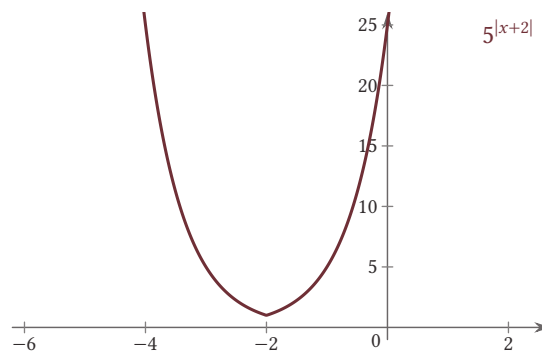


r.)

s.) Função par: para $x \geq 0$ é 5^x , e para $x < 0$ é o reflexo. Sem zeros; $f(0) = 1$ (mínimo global); positiva; decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, \infty)$.

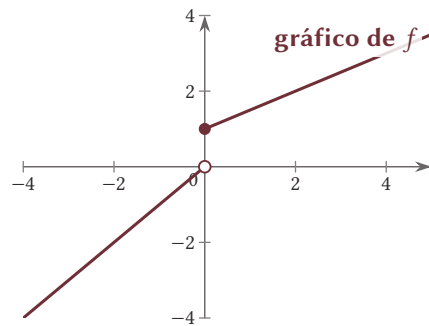


t.) Deslocamento por 2 para a esquerda do item anterior. Sem zeros; $f(0) = 5^2 = 25$; positiva; mínimo global 1 em $x = -2$; decrescente em $(-\infty, -2)$ e crescente em $(-2, \infty)$.

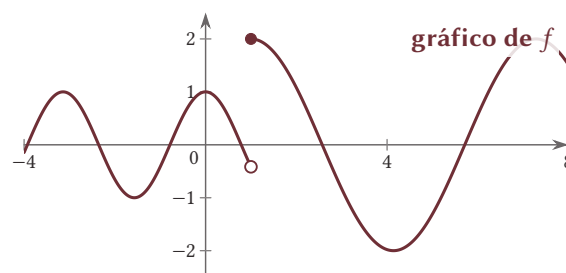


u.)

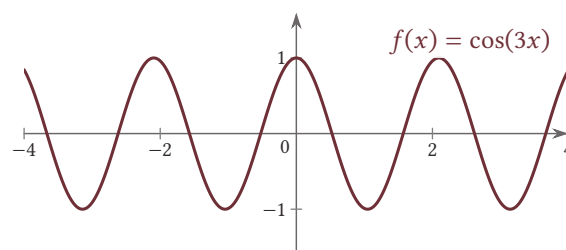
v.) Reta $y = x$ para $x < 0$ e reta $y = \frac{x}{2} + 1$ para $x \geq 0$; há um salto em $x = 0$ (as imagens ficam perto de 0 à esquerda e valem 1 em $x = 0$). Sem zeros (a raiz -2 da segunda reta não está em $x \geq 0$); $f(0) = 1$. Negativa para $x < 0$ e positiva para $x \geq 0$; crescente em $(-\infty, 0)$ e em $[0, \infty)$; sem extremos locais.



w.) Para $x < 1$: $\cos 2x$ (amplitude 1, período π); para $x \geq 1$: $2 \cos(x - 1)$ (amplitude 2, período 2π), com salto em $x = 1$, onde $f(1) = 2$ (máximo local). $f(0) = 1$. Zeros: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ com $k \leq 0$, e $x = 1 + \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \geq 0$. Máximos: 1 em $x = k\pi$ ($k \leq 0$) e 2 em $x = 1 + 2k\pi$ ($k \geq 0$); mínimos: -1 em $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \leq 0$) e -2 em $x = 1 + \pi + 2k\pi$ ($k \geq 0$).

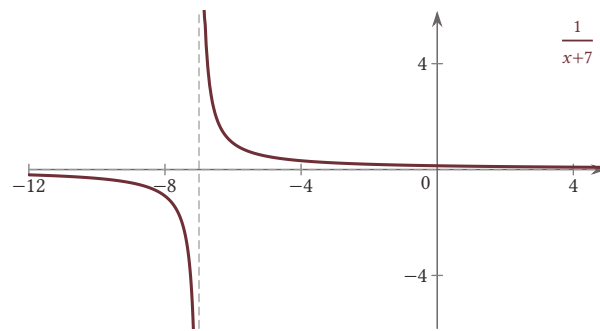


x.) Como $|x^2 - 1| + 1 \geq 1 > 0$, a primeira condição nunca ocorre e $f(x) = \cos 3x$ para todo x : período $\frac{2\pi}{3}$, imagem $[-1, 1]$; $f(0) = 1$; zeros $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; máximos 1 em $x = \frac{2k\pi}{3}$ e mínimos -1 em $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$.

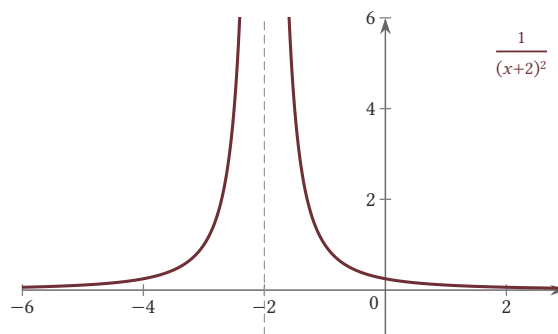


7.9 a.) $f \circ g$: domínio $[1, \infty)$, $(x-1)^{3/2}$. $f \circ f$: domínio $\mathbb{R}$, x^9 . $g \circ f$: domínio $[1, \infty)$ (deve valer $x^3 \geq 1$), $\sqrt{x^3 - 1}$. $g \circ g$: domínio $[2, \infty)$ (deve valer $\sqrt{x-1} \geq 1$), $\sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$. b.) $f \circ g$: domínio $(-\infty, 2)$, $-\frac{1}{\sqrt{2-x}}$. $f \circ f$: domínio $\mathbb{R}^*$, x . $g \circ f$: domínio $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$ (deve valer $-\frac{1}{x} \leq 2$), $\sqrt{2 + \frac{1}{x}}$. $g \circ g$: domínio $[-2, 2]$ (deve valer $\sqrt{2-x} \leq 2$), $\sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$. c.) Seja $u = (x-2)(x-3)$. $f \circ g$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, $u = (x-2)(x-3)$. $f \circ f$: domínio $\mathbb{R}^*$, x . $g \circ f$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$, $\frac{x^2}{(1-2x)(1-3x)}$. $g \circ g$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{15 \pm \sqrt{21}}{6}\}$ (excluídos os x com $g(x) \in \{2, 3\}$), $\frac{u^2}{(1-2u)(1-3u)}$. d.) $f \circ g$: domínio $[0, \infty)$, $\text{sen } \sqrt{x}$. $f \circ f$: domínio $\mathbb{R}$, $\text{sen}(\text{sen } x)$. $g \circ f$: domínio $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ (deve valer $\text{sen } x \geq 0$), $\sqrt{\text{sen } x}$. $g \circ g$: domínio $[0, \infty)$, $\sqrt[3]{x}$.

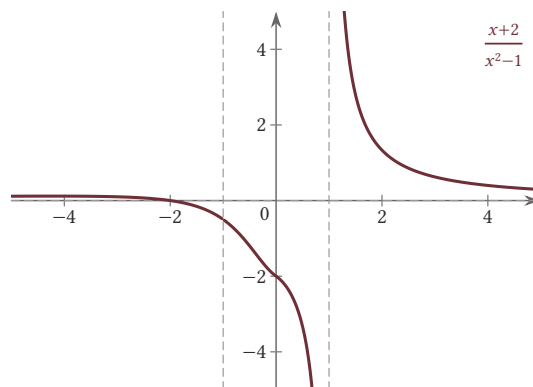
7.10 a.) Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$. Hipérbole $\frac{1}{x}$ deslocada 7 para a esquerda. Sem zeros; $f(0) = \frac{1}{7}$; positiva para $x > -7$, negativa para $x < -7$; decrescente em $(-\infty, -7)$ e em $(-7, \infty)$; sem extremos; assíntotas $x = -7$ e $y = 0$.

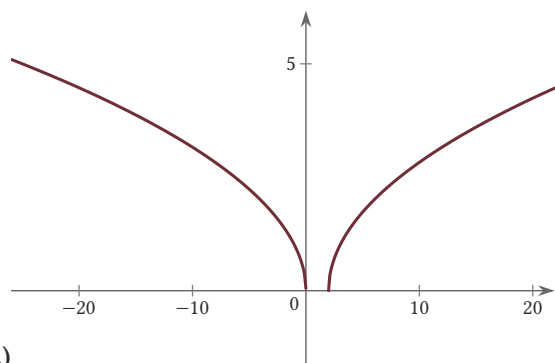


b.) Domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, e $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Sem zeros; $f(0) = \frac{1}{4}$; sempre positiva; crescente em $(-\infty, -2)$ e decrescente em $(-2, \infty)$; sem extremos; assíntotas $x = -2$ e $y = 0$.



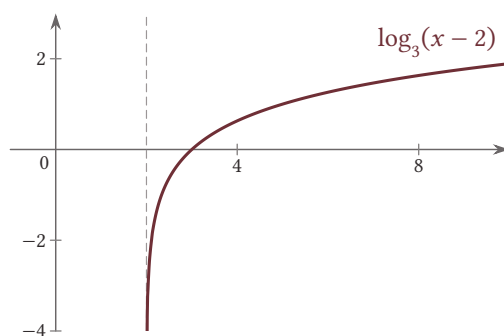
c.) Domínio $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Zero e $f(0)$: $x = -2$ e $f(0) = -2$. Sinal: negativa em $(-\infty, -2)$, positiva em $(-2, -1)$, negativa em $(-1, 1)$, positiva em $(1, \infty)$. Assíntotas $x = \pm 1$ e $y = 0$. Extremos locais: máximo local $-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $x = -2 + \sqrt{3}$ e mínimo local $-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $x = -2 - \sqrt{3}$ (obtidos impondo que $y(x^2 - 1) = x + 2$ tenha raiz dupla em x). Crescente em $(-2 - \sqrt{3}, -1)$ e em $(-1, -2 + \sqrt{3})$; decrescente em $(-\infty, -2 - \sqrt{3})$, em $(-2 + \sqrt{3}, 1)$ e em $(1, \infty)$.



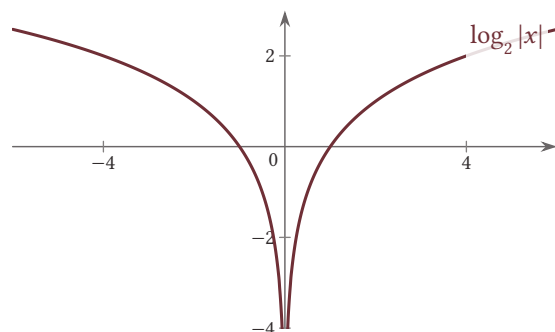


d.)

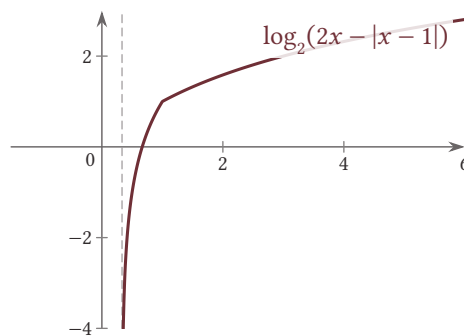
e.) Domínio $(2, \infty)$. Logaritmo em base 3 deslocado 2 para a direita. Zero $x = 3$; sem interseção com o eixo y ; negativa em $(2, 3)$, positiva em $(3, \infty)$; crescente; sem extremos; assíntota $x = 2$.



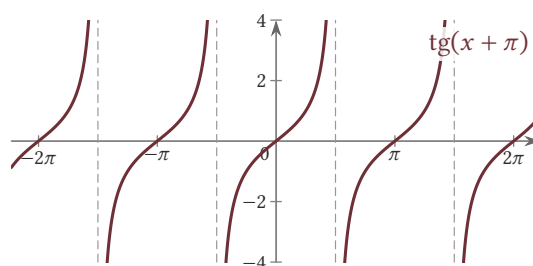
f.) Domínio $\mathbb{R}^*$; função par (o gráfico de $\log_2 x$, $x > 0$, junto com seu reflexo). Zeros $x = \pm 1$; sem interseção com o eixo y ; negativa em $(-1, 0) \cup (0, 1)$, positiva para $|x| > 1$; decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, \infty)$; sem extremos; assíntota $x = 0$.



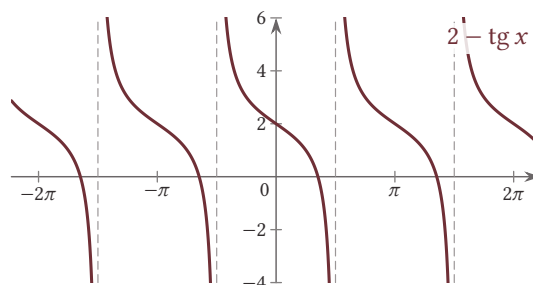
g.) Se $x \geq 1$, $2x - |x - 1| = x + 1$; se $x < 1$, é $3x - 1$. Domínio: $x > \frac{1}{3}$ (em $x \geq 1$ o argumento $x + 1$ é positivo; em $x < 1$, exige $3x - 1 > 0$). Logo $f(x) = \log_2(3x - 1)$ em $(\frac{1}{3}, 1)$ e $f(x) = \log_2(x + 1)$ em $[1, \infty)$ (as duas expressões valem 1 em $x = 1$). Zero: $x = \frac{2}{3}$; sem interseção com o eixo y ; negativa em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, positiva em $(\frac{2}{3}, \infty)$; crescente em todo o domínio; sem extremos; assíntota $x = \frac{1}{3}$.



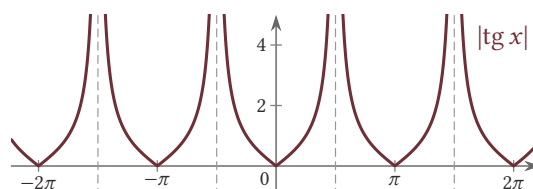
h.) Como $\tan(x + \pi) = \tan x$, é o gráfico da tangente. Domínio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; zeros $x = k\pi$ (inclusive $f(0) = 0$); positiva em $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ e negativa em $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$; crescente em cada intervalo do domínio; sem extremos; assíntotas verticais $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.



i.) $f(x) = 2 - \tan x$: reflexo da tangente em relação ao eixo x , deslocado 2 para cima. Domínio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $f(0) = 2$; zeros em $x = x_0 + k\pi$, onde $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\tan x_0 = 2$; positiva em $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, x_0 + k\pi)$ e negativa em $(x_0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; decrescente em cada intervalo do domínio; sem extremos; assíntotas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

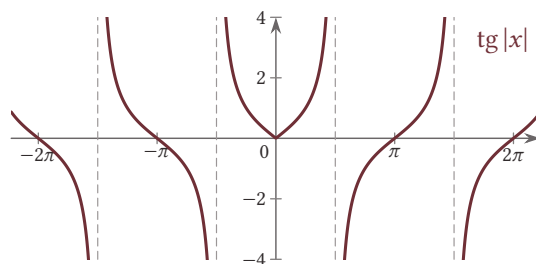


j.) Reflete-se para cima a parte negativa da tangente. Domínio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; zeros $x = k\pi$ (mínimos locais, com bico); positiva fora dos zeros; decrescente em $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$ e crescente em $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$; assíntotas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

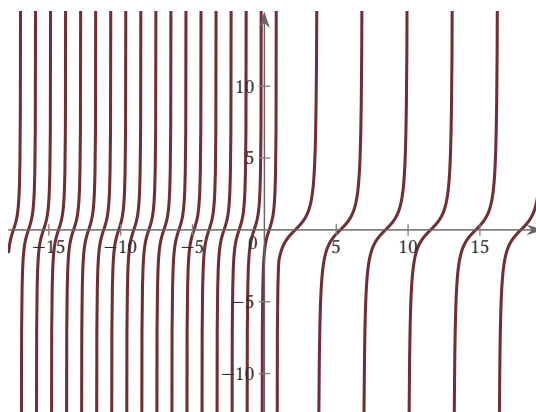


k.) Função par: para $x \geq 0$ é a tangente, e para $x < 0$ é o reflexo em relação ao eixo y . Domínio $x \neq \pm(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \geq 0$. Zeros $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (inclusive $f(0) = 0$, mínimo local com bico); positiva em $(0, \frac{\pi}{2})$, negativa em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$,

positiva em $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ etc. (e simetricamente para $x < 0$); crescente em cada intervalo do domínio com $x > 0$ e decrescente em cada intervalo com $x < 0$; assíntotas $x = \pm(\frac{\pi}{2} + k\pi)$.



1.)



Capítulo 8

8.1 1. As duas inclinações são 2; as retas são paralelas.

2. As duas retas são verticais; portanto, são paralelas.

3. As inclinações são $-1/2$ e 2; como o produto é -1 , as retas são perpendiculares.

4. As inclinações são $3/2$ e $-2/3$; as retas são perpendiculares.

8.2 1. Igualando as inclinações,

$$\frac{-1-a}{4} = \frac{a-4}{-8},$$

obtemos $a = -6$.

2. As inclinações são $(a-4)/3$ e $12/(a+1)$. Seu produto vale -1 quando $a = 3$.

3. A reta procurada tem inclinação $-1/3$. Logo, $(k-3)/(-5-1) = -1/3$, de onde $k = 5$.

4. $m_{AB} = 5/2$ e $m_{BC} = -2/5$. Como o produto é -1 , os lados AB e BC são perpendiculares e o ângulo reto está em B .

8.3 1. Se $b_1b_2 \neq 0$, os coeficientes angulares são $-a_1/b_1$ e $-a_2/b_2$, que são iguais exatamente quando $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$. Se algum b_i é zero, essa mesma igualdade força o outro a ser zero, e as

duas retas são verticais. Quando têm a mesma direção, existe $\lambda \neq 0$ tal que $a_2 = \lambda a_1$ e $b_2 = \lambda b_1$; elas coincidem precisamente quando também $c_2 = \lambda c_1$. Caso contrário, são paralelas distintas.

2. A expressão proposta é equivalente a $bx + ay = ab$. Ela é satisfeita por $(a, 0)$ e $(0, b)$ e representa uma reta; como dois pontos distintos determinam uma única reta, é a equação procurada.

- 8.4** 1. Se d é a distância horizontal, então $1000/d = 0,22$. Logo,

$$d = \frac{1000}{0,22} = \frac{50000}{11} \approx 4545 \text{ pés.}$$

2. Calculando a inclinação de cada barra e usando um de seus extremos, obtemos

$$\begin{aligned} OD : y &= \frac{12}{7}x, & AD : y &= -\frac{12}{7}x + 6, \\ AC : y &= \frac{6}{5}x - \frac{21}{5}, & BC : y &= -\frac{6}{7}x + \frac{57}{7}. \end{aligned}$$

- 8.5** Se t é o tempo de permanência em horas, um modelo para um período diário é

$$P(t) = \begin{cases} 6, & t = 0, \\ 6 + 3,5n, & n-1 < t \leq n, \quad n = 1, \dots, 7, \\ 34, & 7 < t \leq 24. \end{cases}$$

O gráfico é uma função em degraus e atinge o teto de R\$ 34,00 quando se inicia a oitava hora.

- 8.6** 1. O coeficiente angular é $(9 - 3)/(4 - 1) = 2$; logo, $f(x) = 2x + 1$.
 2. A temperatura aumenta 3°C por minuto; 20 é a temperatura inicial.
 3. Para a função modular, $7 = 2a - 1$, de modo que $a = 4$. Para a quadrática, $7 = 4a - 1$, de modo que $a = 2$.

- 8.7** 1. $f(-2) = 13$.
 2. $-3x + 7 = 0$ fornece $x = 7/3$.
 3. $-3x + 7 = 16$ fornece $x = -3$.
 4. Isolando x em $y = -3x + 7$, obtemos $x = (7 - y)/3$; logo, $f^{-1}(x) = (7 - x)/3$.
 5. $-3x + 7 \geq 1$ equivale a $x \leq 2$.

- 8.8** O coeficiente angular é

$$a = \frac{-7 - 5}{4 - (-2)} = -2.$$

Usando $5 = -2(-2) + b$, obtemos $b = 1$ e, portanto, $f(x) = -2x + 1$. A interseção com o eixo y é $(0, 1)$; a interseção com o eixo x é $(1/2, 0)$.

8.9 1.

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 5, & x < -1, \\ 2x - 1, & x \geq -1. \end{cases}$$

2. O vértice é $(-1, -3)$, o eixo de simetria é $x = -1$ e $\text{Im } g = [-3, +\infty)$.
3. $2|x + 1| - 3 = 0$ equivale a $|x + 1| = 3/2$; logo, $x = -5/2$ ou $x = 1/2$.
4. $2|x + 1| - 3 \leq 1$ equivale a $|x + 1| \leq 2$; portanto, $-3 \leq x \leq 1$.

8.10 1. $q(x) = -2(x - 2)^2 + 3$.

2. O vértice é $(2, 3)$, o eixo de simetria é $x = 2$ e $\text{Im } q = (-\infty, 3]$.
3. De $(x - 2)^2 = 3/2$, obtemos $x = 2 \pm \sqrt{6}/2$.
4. Como a parábola tem concavidade voltada para baixo,

$$2 - \frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

8.11 1. Os termos 18 e 6 são as tarifas fixas; 1,40 e 1,90 são os preços por quilômetro.

2. $18 + 1,40x = 6 + 1,90x$ fornece $x = 24$ km.
3. Para $0 \leq x < 24$, a empresa B é mais econômica; para $x > 24$, a empresa A é mais econômica. Em $x = 24$, os preços coincidem.
4. $A(40) = \text{R\$ } 74,00$ e $B(40) = \text{R\$ } 82,00$.

8.12 1. $R(p) = p(600 - 20p) = -20p^2 + 600p$.

2. $R(p) = -20(p - 15)^2 + 4500$; portanto, a receita máxima é $\text{R\$ } 4500,00$, obtida com $p = \text{R\$ } 15,00$ e venda de 300 ingressos.
3. Em $p = 0$, há procura, mas os ingressos são gratuitos; em $p = 30$, o modelo prevê procura nula. Nos dois casos, a receita é zero.

8.13 O domínio físico é $[0, 4]$ e a imagem é $[12, 16]$. A altura máxima, 16 m, ocorre em $t = 2$ s. A equação $h(t) = 15$ tem as soluções $t = 1$ s e $t = 3$ s.8.14 1. Ambas têm domínio $\mathbb{R}$. A imagem de p é $[0, +\infty)$ e a de r é $\mathbb{R}$.

2. O domínio é $[-1, +\infty)$ e a imagem é $[-2, +\infty)$. De $\sqrt{x + 1} = 2$, obtemos $x = 3$. O gráfico de $\sqrt{x}$ é deslocado uma unidade para a esquerda e duas para baixo.
3. A função restrita é uma bijeção de $[0, +\infty)$ em si mesmo. Sua inversa é $y \mapsto \sqrt[4]{y}$, com domínio $[0, +\infty)$.

8.15 Como $16^{3/4} = 8$,

$$B(16M) = B_0(16M)^{3/4} = 8B(M).$$

Por outro lado, $B(M)/M = B_0 M^{-1/4}$. Portanto,

$$\frac{B(16M)}{16M} = \frac{1}{2} \frac{B(M)}{M}.$$

Nesse modelo, o animal de massa dezesseis vezes maior tem taxa metabólica total oito vezes maior, mas taxa por unidade de massa duas vezes menor.

8.16 O quociente deve ser não negativo e $x \neq 3$, de modo que

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup (3, \infty).$$

Se $y = f(x)$, então $y \geq 0$ e $y^2 = (x+2)/(x-3)$. O valor $y = 1$ é impossível; todos os demais valores não negativos ocorrem. Assim, $\text{Im } f = [0, 1) \cup (1, \infty)$.

8.17 1. O grau é 3. As raízes são -1 , de multiplicidade 2, e 2, simples. Temos $P(0) = 2$. O extremo esquerdo aponta para cima e o direito, para baixo. O gráfico toca o eixo em -1 e o cruza em 2.

2. $Q(x) = x(x-2)(x+2)$, com raízes simples -2 , 0 e 2. O sinal é negativo em $(-\infty, -2)$ e $(0, 2)$, e positivo em $(-2, 0)$ e $(2, +\infty)$. A função é ímpar: seu gráfico é simétrico em relação à origem. O extremo esquerdo aponta para baixo e o direito, para cima.

8.18 1. $g(x) = x + 2$, para $x \neq 2$. Falta o ponto $(2, 4)$, e os valores se aproximam de 4 pelos dois lados.

2. O domínio exclui 2. As interseções são $(-1, 0)$ e $(0, -1/2)$. Como $h(x) = 1 + 3/(x-2)$, as assíntotas são $x = 2$ e $y = 1$. A função é positiva em $(-\infty, -1)$ e $(2, +\infty)$ e negativa em $(-1, 2)$. Perto de 2, decresce sem limite pela esquerda e cresce sem limite pela direita. Longe da origem, aproxima-se de 1. O gráfico é obtido de $1/x$ por uma translação de duas unidades para a direita, escala vertical por fator 3 e translação de uma unidade para cima.

3. O domínio exclui 2. Os valores são negativos e decrescem sem limite dos dois lados de 2. Quando $|x|$ cresce, aproximam-se de 0 por valores negativos.

8.19 $P(12) = 720/12 = 60$ kPa e $P(8) = 720/8 = 90$ kPa. A pressão aumenta 30 kPa, isto é, 50% em relação ao valor inicial.

8.20 $(f \circ g)(x) = 1/(x^2 - 1)$, com domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; $(g \circ f)(x) = 1 + 1/(x-2)^2$, com domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. A imagem da segunda composição é $(1, \infty)$: $1/(x-2)^2$ percorre $(0, \infty)$. A função g atinge 1 apenas quando sua entrada é zero, mas $f(x)$ nunca é zero.

Capítulo 9

9.1 1. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = (0, \infty)$, crescente, assíntota $y = 0$.

2. $\text{Dom } g = \mathbb{R}$, $\text{Im } g = (0, \infty)$, decrescente, assíntota $y = 0$.

3. $\text{Dom } h = \mathbb{R}$, $\text{Im } h = (-1, \infty)$, crescente, assíntota $y = -1$.

4. Dom $q = \mathbb{R}$, Im $q = (-\infty, 5)$, crescente, assíntota $y = 5$.

9.2 Da lei $a^{x+(-x)} = a^x a^{-x} = a^0 = 1$, segue $a^{-x} = 1/a^x$. Como $a^{-x} = f(-x)$, a segunda função é a reflexão horizontal da primeira.

9.3

$$f(-2) = \frac{4}{9}, \quad f(0) = 1, \quad f(3) = \frac{27}{8}.$$

Como a base é maior que 1, a função é crescente.

9.4 Como $4^x = 2^{2x}$, para $x > 0$ temos $4^x > 2^x$; para $x = 0$, ambas valem 1; para $x < 0$, $4^x < 2^x$.

9.5 Como $1/8 = 2^{-3}$, temos $x = -3$.

9.6

$$\text{Dom } g = \mathbb{R}, \quad \text{Im } g = (-\infty, 0).$$

Como 2^x é crescente, -2^x é decrescente. A assíntota horizontal é $y = 0$.

9.7 O gráfico é deslocado uma unidade para a direita, esticado verticalmente por fator 3 e deslocado quatro unidades para baixo. Como $3 \cdot 2^{x-1} > 0$,

$$\text{Im } h = (-4, \infty).$$

9.8

$$P(t) = 1200(1,08)^t, \quad P(5) \approx 1763.$$

9.9

$$M(t) = 50(0,88)^t, \quad M(6) \approx 23,22 \text{ g}.$$

9.10 A incógnita aparece no expoente. Isolá-la exige desfazer uma exponenciação; essa operação inversa será precisamente o logaritmo.

9.11 Se $Q(t) = 80r^t$, então $80r^3 = 640$, logo $r^3 = 8$ e $r = 2$. Portanto,

$$Q(t) = 80 \cdot 2^t.$$

9.12 A tem acréscimo constante de 20 por unidade de tempo, portanto é afim. B tem fator multiplicativo constante 1,2, portanto é exponencial.

9.13 $2^4 = 16$, $5^{-2} = 1/25$ e $10^3 = 1000$.

9.14 $\log_3 81 = 4$, $\log_{10}(10^{-5}) = -5$ e $\log_7 1 = 0$.

9.15

$$\text{Dom } f = (0, \infty), \quad \text{Im } f = \mathbb{R}.$$

A função é decrescente e sua assíntota vertical é $x = 0$.

9.16 Para $a > 0$, toda potência real a^x é positiva. Portanto não existe expoente real x com $a^x = -2$.

9.17 3 , $-1/2$ e -3 , respectivamente.

9.18 É preciso $x - 3 > 0$, portanto

$$\text{Dom } f = (3, \infty), \quad \text{Im } f = \mathbb{R}.$$

A assíntota vertical é $x = 3$.

9.19

$$x = \log_5 17.$$

9.20 1. Domínio $x > 0$; $3 + \log_2 x$.

2. Domínio $x \neq 0$; $2 \ln |x|$.

3. Domínio $x > 0$; $\frac{1}{2} \ln x - 2x$.

9.21 A primeira e a terceira são verdadeiras. A segunda é falsa em geral: por exemplo, com $a = 2$ e $x = y = 1$, $\log_2(1 + 1) = 1 \neq 0 = \log_2 1 + \log_2 1$. As leis dos logaritmos correspondem a produtos, quocientes e potências, não a somas; a versão correta é $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

9.22

$$\log_7 20 = \frac{\ln 20}{\ln 7}.$$

9.23

$$3 + 3 \log_2 x - \log_2 y.$$

9.24

$$\ln \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \right).$$

9.25 A expressão original exige simultaneamente $x - 1 > 0$, $x + 2 > 0$ e $x + 1 > 0$; portanto,

$$\text{Dom } E = (1, \infty).$$

Nesse domínio,

$$E(x) = \log_2 \left(\frac{(x-1)(x+2)}{x+1} \right).$$

A expressão isolada à direita está definida quando

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x+1} > 0,$$

isto é, em

$$(-2, -1) \cup (1, \infty).$$

O intervalo $(-2, -1)$ aparece apenas depois de combinar os logaritmos: nele, os logaritmos da expressão original não existem separadamente. Logo, a igualdade entre as duas fórmulas vale somente no domínio original $(1, \infty)$.

9.26 Como $a^0 = 1$, temos $\log_a 1 = 0$. Como $a^1 = a$, temos $\log_a a = 1$.

9.27 $(f \circ g)(x) = x - 1$, com domínio $\mathbb{R}$; $(g \circ f)(x) = x/2$, com domínio $(0, \infty)$. Na segunda ordem é necessário calcular primeiro $\log_2 x$.

9.28 As etapas são $x \mapsto 4 - x^2$, a raiz quadrada, a soma de 1 e o logaritmo natural. A raiz exige $-2 \leq x \leq 2$; nesse intervalo o argumento do logaritmo está em $[1, 3]$. Portanto, $\text{Dom } L = [-2, 2]$ e $\text{Im } L = [0, \ln 3]$. O mínimo 0 ocorre em $x = \pm 2$ e o máximo $\ln 3$ em $x = 0$.

9.29 A condição $3 - 2^x > 0$ fornece $x < \log_2 3$. A função $3 - 2^x$ é decrescente e o logaritmo de base $1/2$ também; a composição é crescente. O argumento percorre $(0, 3)$, de modo que

$$\text{Im } F = (1 - \log_2 3, \infty).$$

Quando x se aproxima de $\log_2 3$ pela esquerda, o argumento positivo se aproxima de zero e $F(x)$ cresce sem limite: a assíntota vertical é $x = \log_2 3$. Quando x assume valores negativos de módulo cada vez maior, 2^x se aproxima de zero e $F(x)$ se aproxima de $1 - \log_2 3$: essa é a assíntota horizontal. Por fim,

$$y - 1 = \log_{1/2}(3 - 2^x) \iff 2^{1-y} = 3 - 2^x,$$

portanto

$$F^{-1}(y) = \log_2(3 - 2^{1-y}), \quad y > 1 - \log_2 3.$$

9.30 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ e $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são inversas; por isso, seus gráficos são simétricos em relação a $y = x$.

2. $N(12) = 800(1/2)^3 = 100$: após 12 unidades de tempo, resta um oitavo da quantidade inicial.

9.31 A condição $I(T_{60}) = 10^{-6}I_0$ fornece

$$e^{-kT_{60}} = 10^{-6}.$$

Aplicando o logaritmo natural, obtemos $-kT_{60} = -6 \ln 10$ e, portanto, $T_{60} = 6 \ln(10)/k$. Quanto maior for k , mais rapidamente o som decai.

9.32 1. 5.

2. -3 .

3. $x = 4$.

4. $x = 3$.

5. É necessário $x > 1$; a equação fornece $x - 1 = 9$, logo $x = 10$.

6. $x = \log_2 5 - 1 = \ln 5 / \ln 2 - 1$.

9.33 $V(5) \approx R\$ 17\,795,51$. Como $\log(15000/48000)/\log(0,82) \approx 5,861$, o primeiro ano inteiro com valor inferior a $R\$ 15\,000,00$ é o sexto.

9.34 O primeiro pH é $-\log_{10}(2,5 \times 10^{-6}) \approx 5,60$. A solução de pH 5,1 é mais ácida e sua concentração de H^+ é cerca de 3,18 vezes maior.

9.35 O domínio é $(3, \infty)$. Nesse intervalo,

$$\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-3)^3}\right) = 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x+1) - 3 \ln(x-3).$$

9.36 $\beta_1 = 60$ dB e $\beta_2 \approx 76,02$ dB. A diferença é $10 \log_{10}(I_2/I_1) = 10 \log_{10} 40 \approx 16,02$ dB. A escala é logarítmica: ela transforma razões de intensidades em diferenças de níveis.

Capítulo 10

10.1 $2\pi/3$, $5\pi/4$, 135° e 315° , respectivamente.

10.2

$$s = r\theta = 5 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \text{ cm.}$$

10.3 O deslocamento angular é

$$12 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi \text{ rad,}$$

correspondente a duas voltas completas.

10.4 1. $\sqrt{3}/2$ e $-1/2$.

2. $-\sqrt{2}/2$ e $-\sqrt{2}/2$.

3. $-1/2$ e $\sqrt{3}/2$.

10.5 Negativo, negativo, negativo e negativo, respectivamente.

10.6 $1/2$, $\sqrt{2}/2$ e $1/2$.

10.7 O ponto $P_x = (\cos x, \sin x)$ pertence à circunferência unitária, cuja equação é $X^2 + Y^2 = 1$. Substituindo $X = \cos x$ e $Y = \sin x$, obtemos $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

10.8

$$P_{2\pi/3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_{7\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

10.9 O ponto inferior da circunferência corresponde a

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

10.10 A reflexão no eixo horizontal dá

$$P_{-x} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Logo,

$$\sin(-x) = -\frac{4}{5}, \quad \cos(-x) = \frac{3}{5}.$$

10.11 Ambas têm domínio $\mathbb{R}$, imagem $[-1, 1]$ e período 2π . Os zeros do seno são $k\pi$; os do cosseno são $\pi/2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

10.12 Para o seno, os valores são 0, 1, 0, -1, 0. Para o cosseno, são 1, 0, -1, 0, 1.

10.13 Somar $\pi/2$ ao argumento do seno desloca seu gráfico para a esquerda em $\pi/2$; o resultado coincide com o gráfico do cosseno.

10.14 É positivo em $(0, \pi)$, negativo em $(\pi, 2\pi)$ e nulo em 0, π , 2π .

10.15 É positivo em $[0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$, negativo em $(\pi/2, 3\pi/2)$ e nulo em $\pi/2$ e $3\pi/2$.

10.16 Os máximos, de valor 1, ocorrem em

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Os mínimos, de valor -1, ocorrem em

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

10.17 Ambas as funções têm período 2π . Portanto, o padrão em qualquer intervalo de comprimento 2π se repete por translações horizontais de $2k\pi$.

10.18 As duas composições têm domínio $\mathbb{R}$. Como $\llbracket x \rrbracket$ é inteiro,

$$(f \circ g)(x) = \sin(\pi \llbracket x \rrbracket) = 0,$$

logo $\text{Im}(f \circ g) = \{0\}$. Já $(g \circ f)(x) = \pi \llbracket \sin x \rrbracket$ assume os valores $-\pi$, 0 e π . Portanto, $\text{Im}(g \circ f) = \{-\pi, 0, \pi\}$.

10.19

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

10.20 A igualdade é a fórmula do cosseno da soma com os dois ângulos iguais. Com $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, ela fornece $\cos^2 x = (1 + \cos(2x))/2$ e $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos(2x))/2$.

10.21 Para a diferença,

$$\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen} x = 2 \cos(3x) \operatorname{sen}(2x),$$

e os zeros em $[0, \pi]$ são $0, \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, \pi$. Para a soma,

$$\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(3x) \cos(2x).$$

Seus zeros em $[0, \pi]$ são $0, \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4, \pi$.

10.22 Some as fórmulas de $\cos(x + y)$ e $\cos(x - y)$ e tome $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$.

10.23 Substitua y por $-y$ nas fórmulas de adição e use $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ e $\cos(-y) = \cos y$.

10.24 Expanda os dois cossenos pelas fórmulas de adição; os termos contendo $\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ se cancelam.

10.25 Da fórmula

$$\cos(2x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

segue imediatamente a identidade.

10.26 Use $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$ nas fórmulas de diferença.

10.27 1. A amplitude é 2 e o período é $2\pi/3$. Em $[0, 2\pi/3]$, os valores nos quartos do período são $-2, 0, 2, 0, -2$.

2. Como $-3 \operatorname{sen}(-4x) = 3 \operatorname{sen}(4x)$, a amplitude é 3 e o período é $\pi/2$. Em $[0, \pi/2]$, os valores principais são $0, 3, 0, -3, 0$.

3. A amplitude é 3 e o período é π . Em $[0, \pi]$, os valores principais são $3, 0, -3, 0, 3$.

4. Como $2 \operatorname{sen}(2x + \pi/2) = 2 \cos(2x)$, a amplitude é 2 e o período é π . Em $[0, \pi]$, os valores principais são $2, 0, -2, 0, 2$.

5. Pela fórmula de ângulo duplo, a função é $\cos(2x)$. Sua amplitude é 1 e seu período é π .

6. Como $-3 \operatorname{sen}(\pi x + \pi) = 3 \operatorname{sen}(\pi x)$, a amplitude é 3 e o período é 2. Em $[0, 2]$, os valores principais são $0, 3, 0, -3, 0$.

10.28 Amplitude 2, período $2\pi/3$, linha média $y = 4$ e deslocamento $\pi/6$ para a direita.

10.29 Amplitude 4, período 2 e

$$\operatorname{Im} g = [-2, 6].$$

10.30

$$h(x) = 3 \operatorname{sen} \left(2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) + 1.$$

Logo, $A = 3$, $B = 2$, $h_0 = \pi/2$ e $k = 1$.

10.31 Uma possibilidade é

$$f(x) = 5 \cos \left(\frac{x}{2} \right) - 2.$$

10.32 Como $\operatorname{sen} u = \cos(u - \pi/2)$,

$$\operatorname{sen} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(2x - \frac{5\pi}{6} \right),$$

logo $f = g$. A amplitude é 3, o período é π , a linha média é $y = 1$ e a imagem é $[-2, 4]$.

As duas fórmulas usam funções básicas diferentes. Seno e cosseno já diferem por uma mudança de fase de $\pi/2$; por isso, a mesma oscilação pode aparecer com parâmetros de fase distintos sem que o gráfico mude.

10.33 1. $x \neq \pi/2 + k\pi$.2. $3x - \pi/4 \neq \pi/2 + k\pi$, isto é, $x \neq \pi/4 + k\pi/3$.3. $x \neq \pi/3 + k\pi$.4. $x \neq k\pi/3$.**10.34** 1, $-1/\sqrt{3}$, -2 e -2 .**10.35**

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad \sec(-x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

10.36 A primeira vem de dividir $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ e vale para $x \neq \pi/2 + k\pi$. A segunda vem da divisão por $\operatorname{sen}^2 x$ e vale para $x \neq k\pi$, sempre com $k \in \mathbb{Z}$.

10.37 O domínio é $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Nele, $1 - \cos(2x) = 2 \operatorname{sen}^2 x$ e $F(x) = 2 \operatorname{tg} x$. A expressão $2 \operatorname{tg} x$ também está definida nos múltiplos inteiros de π , mas esses pontos não pertencem ao domínio de F . Os únicos zeros de $2 \operatorname{tg} x$ são justamente esses múltiplos; portanto, $F(x) = 0$ não tem solução. Cancelar um fator não restitui os pontos em que ele era zero.

10.38 1. Para $\cos t \neq 0$,

$$\sec t - \cos t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} = \operatorname{tg} t \operatorname{sen} t.$$

2. Para $\operatorname{sen} y \neq 0$ e $\cos y \neq 0$, o lado esquerdo é $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$.

3. Para $\cos A \cos B \neq 0$,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B} = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}.$$

4. Para $\operatorname{sen} t \neq 0$,

$$\operatorname{cosec} t - \operatorname{sen} t = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t} = \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} = \cos t \cotg t.$$

5. Pela fórmula de adição,

$$\operatorname{sen}(3t) = \operatorname{sen}(2t) \cos t + \cos(2t) \operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} t \cos^2 t + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 t) \operatorname{sen} t.$$

Substituindo $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ e simplificando, obtemos $3 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}^3 t$.

6. O lado direito pode ser fatorado como

$$2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen}(2\theta).$$

10.39 Onde estão definidas,

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1, \quad |\operatorname{cosec} x| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \geq 1.$$

Logo, as imagens estão contidas em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Reciprocamente, se $|y| \geq 1$, então $1/y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ é valor do cosseno (e do seno), e portanto y é atingido. Assim, ambas têm imagem

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

10.40

$$\cotg(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = \cotg x$$

sempre que as expressões estão definidas.

10.41 Como $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$, ela é positiva nos quadrantes I e III, em que seno e cosseno têm o mesmo sinal, e negativa nos quadrantes II e IV.

10.42

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x &= \operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^4 x \\ &= \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \\ &= \operatorname{sen} x (\cos^4 x - 2 \cos^6 x + \cos^8 x). \end{aligned}$$

10.43 Como $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 x \sec^5 x &= (\operatorname{tg}^2 x \sec^4 x)(\sec x \operatorname{tg} x) \\ &= (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \operatorname{tg} x) \\ &= (\sec^6 x - \sec^4 x)(\sec x \operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

10.44 1.

$$\operatorname{sen}(5x) \cos(2x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(7x) + \operatorname{sen}(3x)).$$

2.

$$\cos(3x) \cos x = \frac{1}{2}(\cos(4x) + \cos(2x)).$$

3.

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)).$$

10.45 Uma possibilidade é

$$H(t) = 20 - 18 \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right).$$

Ela tem linha média 20, amplitude 18, período 40 e $H(0) = 2$.**10.46** A amplitude é 4 e a linha média é 20. Um modelo é

$$T(t) = 20 + 4 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

10.47 A altura média é 2,5 m, a amplitude é 1,2 m e o período é

$$\frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \text{ h.}$$

10.48 O argumento aumenta 2π quando

$$2\pi fT = 2\pi,$$

portanto $T = 1/f$.**10.49** A amplitude é $A = 4$, a linha média é $D = 5$ e $B = 2\pi/10 = \pi/5$. De $5 + 4 \sin \varphi = 3$ vem $\sin \varphi = -1/2$, logo $\varphi = 7\pi/6$ ou $11\pi/6$ no intervalo escolhido. O seno diminui perto de $7\pi/6$ e aumenta perto de $11\pi/6$; a condição inicial seleciona $\varphi = 7\pi/6$. Portanto,

$$f(t) = 5 + 4 \sin\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{7\pi}{6}\right).$$

Sem a informação sobre o sentido da variação, as duas fases seriam possíveis. O primeiro mínimo ocorre quando $\pi t/5 + 7\pi/6 = 3\pi/2$, isto é, em $t = 5/3$.**10.50** A amplitude é 170. Como

$$T = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60} \text{ s,}$$

a frequência é $1/T = 60 \text{ Hz}$.**10.51** A linha média é 12 horas, a amplitude é 2,5 horas e o período é 365 dias. O máximo ocorre quando o cosseno vale 1, pela primeira vez em $t = 172$.**10.52**

$$\text{Dom}(\arcsen) = \text{Dom}(\arccos) = [-1, 1],$$

$$\text{Im}(\arcsen) = [-\pi/2, \pi/2], \quad \text{Im}(\arccos) = [0, \pi],$$

$$\text{Dom}(\arctg) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(\arctg) = (-\pi/2, \pi/2).$$

10.53 $\arcsen$ é a função inversa de uma restrição do seno; $1/\sin x$ é a cossecante. Inversa e recíproco são operações diferentes.

10.54

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{4}.$$

10.55 Se $\theta = \arccos(3/5)$, então $\theta \in [0, \pi]$ e $\cos \theta = 3/5$. Como o cosseno é positivo, θ está no primeiro quadrante. Pela identidade pitagórica,

$$\sin \theta = \frac{4}{5}.$$

10.56 Como $\operatorname{tg}(3\pi/4) = -1$ e a imagem de arctg é $(-\pi/2, \pi/2)$,

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

10.57 É necessário

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1,$$

o que equivale a

$$0 \leq x \leq 1.$$

Logo, $\operatorname{Dom} f = [0, 1]$.

10.58 No primeiro item, a expressão é $2\pi - x$ em $[\pi, 2\pi]$ e $x - 2\pi$ em $[2\pi, 3\pi]$. No segundo, é $x + \pi$, que pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$. No terceiro, ambas são $\sqrt{1 - x^2}$: o seno é não negativo em $[0, \pi]$, e o cosseno é não negativo em $[-\pi/2, \pi/2]$.

10.59 O quociente é $1 - 2x^2/(1 + x^2) \leq 1$ e, ao somarmos 1 a ele, obtemos $2/(1 + x^2) > 0$. Portanto, $\operatorname{Dom} H = \mathbb{R}$. Como $0 \leq \theta < \pi/2$, temos $0 \leq 2\theta < \pi$ e

$$\cos(2\theta) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

O ângulo 2θ já está no intervalo principal do arco-cosseno, logo $H(x) = 2 \operatorname{arctg} |x|$. A imagem é $[0, \pi)$; o valor π não é atingido.

10.60 A projeção vertical do fio mede $a \cos \theta$; portanto, a elevação é $h = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$. Um domínio adequado é $-\pi < \theta < \pi$; em uma oscilação de amplitude $\theta_0 < \pi$, pode-se usar $[-\theta_0, \theta_0]$.

10.61 No modelo de terreno horizontal e prédio vertical,

$$H = 1,7 + 40 \operatorname{tg} 37^\circ \approx 31,8 \text{ m}.$$

10.62 A componente vertical da velocidade é $200 \sin 20^\circ$ pés por segundo. Assim,

$$t = \frac{10\,000}{200 \sin 20^\circ} \approx 146 \text{ segundos},$$

ou aproximadamente 2,44 minutos.

10.63 Se N é o pé da perpendicular traçada de A à margem oposta, então

$$NP_0 = 1000 \cotg 30^\circ, \quad NP_1 = 1000 \cotg 40^\circ.$$

Em um minuto, a corredora percorre

$$1000(\cotg 30^\circ - \cotg 40^\circ) \approx 540,3 \text{ pés.}$$

Sua velocidade é, portanto, aproximadamente 540 pés por minuto, ou 9,0 pés por segundo.

10.64

$$h = 6 \sen 65^\circ \approx 5,44 \text{ m.}$$

10.65 Se θ é o ângulo,

$$\tg \theta = \frac{1,2}{8} = 0,15,$$

portanto

$$\theta = \arctg(0,15) \approx 8,53^\circ.$$

10.66

$$H = 14 \tg 38^\circ \approx 10,94 \text{ m.}$$

Capítulo 11

11.1 a.) Os termos são 1, $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt[3]{3} \approx 1,44$, $\sqrt[4]{4} \approx 1,41$, $\sqrt[5]{5} \approx 1,38, \dots$: a sequência cresce até $n = 3$ e depois decresce, aproximando-se de 1. **b.)** Termos 0,5; 0,41; 0,37; 0,33; ...: decrescente, com os pontos se aproximando da reta $y = 0$. **c.)** Termos 1; 8; 13,5; 10,7; 5,2; 1,8; 0,48; 0,10; ...: cresce até $n = 3$ (máximo 13,5) e depois decresce rapidamente para 0. **d.)** Os pontos oscilam em torno do eixo x , dentro do funil $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$: 0,84; 0,64; 0,08; -0,38; -0,43; -0,11; ...: aproximando-se de 0. **e.)** Também oscila dentro do funil $|a_n| \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n}$: 0,42; 0,36; 0,04; -0,18; ...: aproximando-se de 0. **f.)** Termos 1; 1,5; 1,83; 2,08; 2,28; ...: crescente e sem limitação (os pontos sobem muito lentamente, mas ultrapassam qualquer nível: $a_{2n} \geq a_n + \frac{1}{2}$). **g.)** Termos 1; 1,25; 1,36; 1,42; 1,46; ...: crescente e limitada (por 2); os pontos se acumulam abaixo de uma reta horizontal. **h.)** Termos 1,41; 1,68; 1,83; 1,92; 1,96; ...: crescente, limitada por 2, aproximando-se de 2. **i.)** Termos 1; 2; 9; 262 144; $5^{262\,144}$; ...: crescimento explosivo (o quinto termo já tem mais de 180 000 algarismos), impossível de representar na mesma escala. **j.)** Termos 1; 0,5; 0,67; 0,6; 0,625; 0,615; ...: os pontos alternam acima e abaixo de $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$, aproximando-se dele.

11.2 a.) Pontos do gráfico de $y = x^5$ nas abscissas inteiras positivas: 1, 32, 243, ... (crescente, ilimitada). **b.)** Pontos do gráfico de $y = (x+2)^5$ (gráfico de x^5 deslocado 2 para a esquerda), nas abscissas $n \geq 1$: 243, 1024, ... **c.)** Pontos de $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ (gráfico de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ deslocado 2 para a esquerda): 0,58; 0,5; 0,45; ...: decrescente com os pontos se aproximando de $y = 0$. **d.)** Como $\sen x + 1 \geq 0$, tem-se $|\sen x + 1| + 2 = \sen x + 3$: são os pontos do gráfico de $\sen x + 3$ nas abscissas inteiras (com $x = n$), todos entre 2 e 4, sem padrão monótono. **e.)** Pontos de $y = 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$: 1,25; 1,11; 1,06; ...: decrescente, aproximando-se de 1. **f.)** Pontos do gráfico de $y = \frac{3}{2} \cos(3x)$ nas abscissas inteiras: ficam entre $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ e não se estabilizam. **g.)** Pontos de $y = \frac{3 \cos(3x)}{x}$: oscilam dentro do funil $|y| \leq \frac{3}{x}$, aproximando-se de 0.

11.3 a.) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$. **b.)** $-\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{28}{27}, \frac{80}{81}, -\frac{244}{243}, \frac{728}{729}$. **c.)** 1, 2, 6, 24, 120, 720 (os fatoriais $n!$). **d.)** 1, 2, 9, 262 144, $5^{262\,144}$, $6^{5^{262\,144}}$; os dois últimos são números gigantes (o quinto tem cerca de 183 000 algarismos). **e.)** $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}$. **f.)** 2, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 1.

11.4 a.) Crescente: $a_{n+1} - a_n = 1 > 0$. **b.)** Crescente: $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n+2 > 0$. **c.)** Nenhuma: $a_{n+1} - a_n = 2n - 6$, que é negativo para $n < 3$ e positivo para $n > 3$; de fato $a_1 = -6 > a_2 = -10 > a_3 = -12 = a_4 < a_5 = -10$. **d.)** Crescente: $a_{n+1} - a_n = 2n + \frac{1}{2} > 0$. **e.)** Não-decrescente, mas não crescente: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2} \geq 1$, com igualdade só para $n = 1$ ($a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$). **f.)** Decrescente: se $n < m$, então $n^2 < m^2$ e $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{m^2}$. **g.)** Nenhuma: $a_1 = -1 < a_2 = \frac{1}{8}$, mas $a_2 > a_3 = -\frac{1}{27}$; os sinais se alternam. **h.)** Crescente: $a_{n+1} - a_n = 2^n > 0$. **i.)** Crescente: $a_{n+1} - a_n = \frac{2n-4}{3n+7} - \frac{2n-6}{3n+4} = \frac{(2n-4)(3n+4) - (2n-6)(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} = \frac{26}{(3n+7)(3n+4)} > 0$. **j.)** Nenhuma: $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{5} < a_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (pois $6\sqrt{2} < 5\sqrt{3} \iff 72 < 75$), mas $a_3 > a_4 = \frac{2}{7}$ (pois $7\sqrt{3} > 12 \iff 147 > 144$). **k.)** Crescente. Como $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$ (pois $2 < 2\sqrt{2}$), e se $a_{n-1} < a_n$ então $2a_{n-1} < 2a_n$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}} < \sqrt{2a_n} = a_{n+1}$, o resultado segue por indução.

11.5 a.) Limitada inferiormente ($a_n \geq 2$), mas não superiormente: $n^2 + n > n$ e n é ilimitada. **b.)** Limitada inferiormente: $n^2 - 7n + 12 = (n-3)(n-4) \geq 0$ para todo natural n , logo $a_n \geq -12$. Não é limitada superiormente: $n^2 - 7n \geq n$ para $n \geq 8$. **c.)** Limitada inferiormente: $n^2 - \frac{n}{2} = n\left(n - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}$. Não é limitada superiormente: $n^2 - \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2}$, que é ilimitada. **d.)** Limitada inferiormente ($a_n > 0$), mas não superiormente: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2} \geq 2$ para $n \geq 3$, logo $a_n \geq a_3 \cdot 2^{n-3} = \frac{3}{4} \cdot 2^{n-3}$, que é ilimitada. **e.)** Limitada: $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1$. **f.)** Limitada: $\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| \leq 1$. **g.)** Limitada inferiormente ($a_n \geq 2$), mas não superiormente: $2^n > n$ (Bernoulli: $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$). **h.)** Limitada: $0 < \frac{n}{n!} \leq 1$, pois $n! \geq n$. (Além disso, é não-crescente: $a_{n+1} = \frac{1}{n!} \leq \frac{n}{n!} = a_n$.) **i.)** Limitada: $0 < a_n < 2$ para todo n . Por indução: $a_1 = \sqrt{2} < 2$ e, se $a_{n-1} < 2$, então $2a_{n-1} < 4$ e $a_n < 2$.

11.6 Por indução em n . Para $n = 1$ há igualdade. Se $(1+x)^k \geq 1+kx$, como $1+x \geq 0$ podemos multiplicar por $1+x$: $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$. (A expansão binomial dá diretamente o resultado para $x \geq 0$, pois todos os termos são não negativos, mas não cobre $-1 \leq x < 0$.)

11.7 a.) Se $x \neq y$, então $|x-y| > 0$. Pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}^*$ com $n > \frac{1}{|x-y|}$, isto é, $\frac{1}{n} < |x-y|$, contradizendo a hipótese. Logo $x = y$. **b.)** Se $|x-y| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, em particular $|x-y| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ (tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$); pelo item anterior, $x = y$.

11.8 Como $y-x > 0$, pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}^*$ com $n(y-x) > 1$, isto é, $\frac{1}{n} < y-x$. Seja m o menor inteiro com $m > nx$ (existe pela propriedade arquimediana), de modo que $m-1 \leq nx < m$. Então $p = \frac{m}{n}$ é racional e $x < p \leq x + \frac{1}{n} < y$.

11.9 a.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 10\}$ **b.)** $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 1000\}$: $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ é sempre menor que 1,111 e $1 - \frac{1}{n} > 0,999 \iff \frac{1}{n} < 0,001 \iff n > 1000$. **c.)** $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$ **d.)** $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 1000\}$

11.10 a.) Sim **b.)** Sim **c.)** Não **d.)** Sim

11.11 a.) $m = 2$ (na realidade m pode ser qualquer natural maior ou igual a 2). b.) $m = 10^{23} + 1$ c.) $m = 40003$ d.) $m = 24$ e.) $\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10}$ quando $n > 100$; logo $m = 101$.

11.12 a.) $m > \frac{1}{\epsilon}$ (por exemplo, $m = \frac{1}{\epsilon} + 1$), pois $\left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$. b.) $m = \frac{1}{\epsilon} + 2$, pois $\left| \frac{n}{n-1} - 1 \right| = \frac{1}{n-1} < \epsilon$ quando $n > 1 + \frac{1}{\epsilon}$. c.) $m = \frac{1}{\epsilon^2} - 1$, pois $\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon^2} - 2$. d.) Para $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} - a_n < \epsilon$ equivale a $n > \frac{1-6\epsilon+9\epsilon^2}{18\epsilon+27\epsilon^2}$; logo $m = \frac{1-6\epsilon+9\epsilon^2}{18\epsilon+27\epsilon^2} + 1$ serve (para $\epsilon \geq \frac{1}{3}$ qualquer m serve). e.) Não existe m quando ϵ é pequeno (por exemplo, $\epsilon = \frac{1}{4}$), pois $a_n < \frac{1}{3}$ para todo n , então $a_n \notin (\frac{1}{3}, \frac{5}{4})$. A sequência converge a $\frac{1}{3}$, não a 1. f.) $a_n + 1 = \frac{9}{9-n^2}$, e para $n > 3$, $|a_n + 1| = \frac{9}{n^2-9} < \epsilon \iff n > \sqrt{9 + \frac{9}{\epsilon}}$; logo $m = \sqrt{\frac{9+9\epsilon}{\epsilon}} + 1$ serve.

11.13 O n -ésimo termo é $a_n = 1 - 10^{-n}$. Dado $\epsilon > 0$, como $10^n > n$, para $n > \frac{1}{\epsilon}$ (que existe pela propriedade arquimediana) temos $|a_n - 1| = 10^{-n} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

11.14 O n -ésimo termo é $a_n = \frac{1}{3}(1 - 10^{-n})$, logo $\left| a_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{10^{-n}}{3} < \frac{1}{n}$. Dado $\epsilon > 0$, para $n > \frac{1}{\epsilon}$ temos $\left| a_n - \frac{1}{3} \right| < \epsilon$.

11.15 Seja $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, limitado inferiormente e não vazio, e seja $L = \inf A$. Dado $\epsilon > 0$, $L + \epsilon$ não é minorante de A , logo existe N com $a_N < L + \epsilon$. Para $n \geq N$, como (a_n) é decrescente, $L \leq a_n \leq a_N < L + \epsilon$, ou seja, $|a_n - L| < \epsilon$. Logo $a_n \rightarrow L$.

11.16 Uma sequência convergente é limitada (proposição acima); basta mostrar que cada sequência dos itens a) a g) é ilimitada. a.) Dado M , para $n > M + 10000$ tem-se $n - 10000 > M$. b.) $n^2 - 2 \geq n - 2$ para $n \geq 1$, que é ilimitada. c.) $n! \geq n$. d.) $n^3 \geq n$. e.) $|(-1)^n n| = n$ é ilimitada. f.) $a_n = 2! 3! \cdots n! \geq n!$ para $n \geq 2$. g.) Se $\sqrt{n} \leq M$ para todo n , então $n \leq M^2$ para todo n , contradizendo a propriedade arquimediana. h.) Suponha $\sin n \rightarrow L$. Pelo Exercício 11.17, $\sin(n+2) \rightarrow L$; logo $\sin(n+2) - \sin n = 2 \sin 1 \cos(n+1) \rightarrow 0$ e, como $\sin 1 \neq 0$, $\cos(n+1) \rightarrow 0$, e portanto $\cos n \rightarrow 0$. Então $\sin(2n) = 2 \sin n \cos n \rightarrow 0$. Mas $(\sin(2n))$ é formada por termos de $(\sin n)$ com índices $2n \geq n$, logo também converge a L ; pela unicidade, $L = 0$. Mas então $1 = \sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0$, absurdo. i.) Suponha $\frac{1}{\sin n} \rightarrow L$. Como $\left| \frac{1}{\sin n} \right| \geq 1$, tem-se $|L| \geq 1$, em particular $L \neq 0$. Pela propriedade do quociente, $\sin n = \frac{1}{1/\sin n} \rightarrow \frac{1}{L}$, contradizendo o item anterior.

11.17 a.) Seja $a_n \rightarrow L$ e $\epsilon > 0$. Existe N com $|a_n - L| < \epsilon$ para $n \geq N$. Se $n \geq N$, então $n + k \geq N$ e $|b_n - L| = |a_{n+k} - L| < \epsilon$. Logo $b_n \rightarrow L$. b.) Seja $b_n \rightarrow L$ e $\epsilon > 0$. Existe N com $|b_m - L| < \epsilon$ para $m \geq N$. Se $n \geq N + k$, então $n - k \geq N$ e $|a_n - L| = |b_{n-k} - L| < \epsilon$. Logo $a_n \rightarrow L$.

11.18 a.) $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, então $3 + \frac{2}{n} \rightarrow 3$ (soma). b.) Dividindo por n : $\frac{3n-1}{2n+5} = \frac{3-1/n}{2+5/n} \rightarrow \frac{3}{2}$. c.) Dividindo por n^2 : $\frac{n^2+1}{2n^2+3} = \frac{1+1/n^2}{2+3/n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$, pois $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

11.19 Se $c = 0$, $ca_n = 0 \rightarrow 0 = cA$. Se $c \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{|c|}$ para $n \geq N$. Então, para $n \geq N$, $|ca_n - cA| = |c| |a_n - A| < \epsilon$.

11.20 a.) $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ e $\pm \frac{1}{n} \rightarrow 0$. b.) $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0$. c.) De $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ segue $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$, e ambos os extremos tendem a 0.

11.21 a.) Dado $M > 0$, tome $N > M$. Se $n \geq N$, então $n + 5 > n > M$. b.) Dado $M > 0$, tome $N > M$. Se $n \geq N$, então $3n \geq n > M$. c.) Dado $M > 0$, tome $N > M + 4$. Se $n \geq N$, então $4 - n < 4 - (M + 4) = -M$. d.) Dado $M > 0$, tome $N > M$. Se $n \geq N$, então $-2n - 1 < -n \leq -N < -M$.

11.22 Os termos de índice par são $a_n = n > 0$ e os de índice ímpar são $a_n = -n < 0$. Se tendesse a $+\infty$, para $M = 1$ existiria N com $a_n > 1$ para todo $n \geq N$, mas há termos ímpares $n \geq N$ com $a_n < 0$. Se tendesse a $-\infty$, para $M = 1$ existiria N com $a_n < -1$ para todo $n \geq N$, mas há termos pares $n \geq N$ com $a_n > 0$.

$$\mathbf{11.23} \quad \mathbf{a.)} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \quad \mathbf{b.)} \frac{3}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}. \quad \mathbf{c.)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{11.24} \quad \mathbf{a.)} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}, \text{ logo a soma parcial é } S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{1}{2}. \text{ A soma é } \frac{1}{2}. \quad \mathbf{b.)} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}, \text{ logo } S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{3}{2}. \text{ A soma é } \frac{3}{2}.$$

12.1 1. Os valores são 3,41, 3,0401 e 3,004001. Conjectura: 3, confirmada por substituição direta.

2. Os valores são aproximadamente 0,140845, 0,142653 e 0,142837. Conjectura: $1/7$. Para $x \neq 4$, a expressão é $1/(x+3)$.

3. Os valores são aproximadamente 0,661358, 0,666114 e 0,666611. Conjectura: $2/3$. Para confirmar, ponha $u = x^{1/6}$: o quociente fica $(u^2 - 1)/(u^3 - 1) = (u + 1)/(u^2 + u + 1)$, com $u \rightarrow 1$.

12.2 Em todos os itens, dado $\varepsilon > 0$, a escolha de δ abaixo garante a desigualdade exigida pela definição.

1. Tome $\delta = 7\varepsilon$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então $|x/7 - 2/7| = |x - 2|/7 < \varepsilon$.

2. Tome $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$, então $|x^2| < \delta^2 = \varepsilon$.

3. Tome $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$, então $|x^3| < \delta^3 = \varepsilon$.

4. Tome $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então $1 < x < 3$, logo $|x + 2| < 5$ e $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5\delta \leq \varepsilon$.

12.3 1. 0: dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$.

2. Não existe: o limite pela esquerda é -1 e o da direita é 1 .

3. 2, pois $(x^2 - 2x)/(x - 2) = x$ para $x \neq 2$.

12.4 Para todo x , temos $0 \leq f(x) \leq x^2$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x)| \leq x^2 < \varepsilon$, provando o limite pela definição.

12.5

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Como os dois limites laterais coincidem, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

12.6 Para $x < 2$, $g(x) = -1$; para $x > 2$, $g(x) = 1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1,$$

e o limite bilateral não existe.

12.7 Os limites laterais são $3 + C$ e 3 . Eles coincidem se e somente se $C = 0$.

12.8 1. 60.

2. 928.

3. $\frac{10}{3}$.

4. 3.

5. $\sqrt{2}$.

6. 4.

7. 8.

8. 108.

9. $\frac{1}{6}$.

No item 4, fatoramos $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. No item 8, $x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$, para $x \neq 3$. No item 9, a racionalização fornece $1/(\sqrt{x^2 + 9} + 3)$, cujo limite é $1/6$.

12.9 Tome $f(x) = 1$ para $x > a$, $f(x) = -1$ para $x < a$, e defina $f(a) = 0$. Faça $g = -f$. Os limites laterais de cada função são distintos, logo nenhum dos limites bilaterais existe. Entretanto, $f(x) + g(x) = 0$ para todo x , de modo que o limite da soma é 0.

12.10 O numerador se fatora como $(x - a)(x - 3)(x + 3)$, e o denominador como $(x - 2)(x - 3)$. Perto de 2, a expressão é $(x - a)(x + 3)/(x - 2)$. Para $a = 2$, ela se reduz a $x + 3$ e o limite é 5. Para $a \neq 2$, o numerador tende a $5(2 - a) \neq 0$, enquanto o denominador troca de sinal em 2; os limites laterais são infinitos de sinais opostos. Portanto, o único valor é $a = 2$.

12.11 Temos $|x^3 \cos(1/x)| \leq |x|^3$ para $x \neq 0$. Como $|x|^3 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$, o Teorema do Confronto dá o limite 0.

12.12 1. 5.

2. $\frac{5}{4}$.

3. $\frac{5}{3}$.

4. 2.

Usamos $\sin(kx)/x = k [\sin(kx)/(kx)]$ e $\operatorname{tg}(5x) = \sin(5x)/\cos(5x)$. No último item, subtraímos os limites 5 e 3.

- 12.13**
1. 4, após fatorar $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
 2. -1 , após fatorar $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.
 3. $3/2$, pois $(x^3 - 1)/(x^2 - 1) = (x^2 + x + 1)/(x + 1)$ para $x \neq 1$.
 4. $3/2$, após multiplicar pelo conjugado.
 5. $1/4$, pois a razão se reduz a $1/(\sqrt{x} + 2)$.
 6. -1 , pois a expressão se reduz a $-1/(1 + x)$ para $x \neq 0$.
 7. $7/3$.
 8. 4, usando $\cos x - \cos(3x) = 2 \sin(2x) \sin x$.

- 12.14**
1. Os limites laterais são -1 e 1 ; o limite bilateral não existe.
 2. Os limites laterais são -1 e 1 ; o limite bilateral não existe.
 3. O domínio é $(0, \infty)$ e, nele, a expressão vale $1/2$. Portanto,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, \infty)}} \frac{x}{|x| + x} = \frac{1}{2}.$$

Não há pontos do domínio à esquerda de 0 , portanto não há limite lateral esquerdo a calcular.

4. Como a expressão vale $-(x + 2)$ à esquerda de 2 e $x + 2$ à direita, os limites laterais são -4 e 4 ; o limite bilateral não existe.

- 12.15**
1. $\cos(1)$.

2. 1 .
3. $\frac{\pi}{6}$.
4. $-\frac{\pi}{4}$.

No item 3, o argumento do arco-seno simplifica-se para $(x + 1)/(x + 4)$ e tende a $1/2$. No item 4, o argumento do arco-tangente simplifica-se para $(x + 1)/(x - 3)$ e tende a -1 .

- 12.16**
1. 8 .

2. 1 .
3. 132 .
4. -60 .
5. $\frac{3}{2}$.
6. 4 .
7. $3a^2$.
8. $\frac{1}{12}$.

9. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. 0.

No item 6, a racionalização reduz o quociente a $2 + \sqrt{t}$. No item 8, use $a - b = (a^3 - b^3)/(a^2 + ab + b^2)$ com $a = \sqrt[3]{8+t}$ e $b = 2$. No item 10, $1/2 \leq 2^{\cos x} \leq 2$, de modo que $0 \leq x^2 2^{\cos x} \leq 2x^2 \rightarrow 0$.

12.17 Pela continuidade, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Aplicando as propriedades dos limites:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = f(a)g(a) = (fg)(a)$.
3. Se $g(a) \neq 0$, a continuidade garante que g não se anula numa vizinhança de a . A regra do quociente dá $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = f(a)/g(a) = (f/g)(a)$.

Cada igualdade é a definição de continuidade da função correspondente.

12.18 Não existe tal a . O limite pela esquerda em 0 é 1, enquanto $f(0) = 3$ e o limite pela direita é 3, independentemente de a .

12.19 Se $b \neq 0$, a continuidade exige $b^3 + 3b + 1 = ab^2 + 3$, portanto $a = (b^3 + 3b - 2)/b^2$. Para esse valor, os limites laterais e $g(b)$ coincidem. Se $b = 0$, o limite pela esquerda é 1 e $g(0) = 3$, de modo que nenhum valor de a serve.

12.20 Se $b \neq 0$, a continuidade exige $\cos b + 1 = ab^2 + b$, portanto $a = (\cos b + 1 - b)/b^2$. Se $b = 0$, o limite pela esquerda é 2, mas $h(0) = 0$, de modo que nenhum valor de a serve.

12.21 1. $T(3500) = \text{R\$ } 150$ e $T(5000) = \text{R\$ } 400$.

2. Em 2000, os dois limites são 0; em 4000, ambos são 200. Logo, T é contínua nos dois pontos.

3. Como x não se anula nos pontos de corte, $E = T/x$ também é contínua neles. Além disso,

$$E(3500) = \frac{150}{3500} = \frac{3}{70} \approx 4,29\%, \quad E(5000) = \frac{400}{5000} = 8\%.$$

4. A inclinação de cada trecho passa de 0 para 0,10 e depois para 0,20, mas as constantes dos trechos fazem coincidir seus valores nos pontos de corte. Assim, muda a taxa aplicada ao próximo real sem mudar subitamente o total já devido.

12.22 A função $F(x) = x^3 - 3x + 1$ é contínua em $[1, 2]$. Como $F(1) = -1$ e $F(2) = 3$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (1, 2)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

12.23 A função $F(x) = 4x^2 - 2(x+1)^2$ é contínua em $[-1, 1]$. Como $F(-1) = 4$ e $F(1) = -4$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (-1, 1)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

12.24 A função $F(x) = x^5 - x^2 - 2$ é contínua em $[0, 2]$. Como $F(0) = -2$ e $F(2) = 26$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (0, 2)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

12.25 A função $F(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$ é contínua em $[0, 2]$. Como $F(0) = -\sqrt{2}$ e $F(2) = 2$ têm sinais opostos, o Teorema de Bolzano fornece $c \in (0, 2)$ com $F(c) = 0$, como pedido.

12.26 Uma solução é $x = 0$. Para obter uma positiva, considere $F(x) = \sin x - x \cos x$, contínua em $[\pi, 3\pi/2]$. Temos $F(\pi) = \pi > 0$ e $F(3\pi/2) = -1 < 0$. Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (\pi, 3\pi/2)$ com $F(c) = 0$. Como $\cos c \neq 0$ nesse intervalo, isso equivale a $\tan c = c$. Pela imparidade da tangente, $-c$ também é solução. Assim, $-c$, 0 e c são três soluções distintas.

12.27 A função $F(x) = x^2$ é contínua em $[1, 2]$, e $F(1) = 1 < 2 < 4 = F(2)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $b \in (1, 2)$ com $b^2 = 2$. Como $b > 0$, esse número é $\sqrt{2}$.

12.28 Para $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$. Por exemplo, os valores em 1,9, 1,99, 2,01 e 2,1 são, respectivamente, 3,9, 3,99, 4,01 e 4,1. Portanto, o limite é 4. O limite depende dos valores arbitrariamente próximos de 2, não do valor no ponto, que não está definido na expressão original.

12.29 No primeiro limite, o quociente vale -1 à esquerda de -1 e 1 à direita; como os limites laterais diferem, o limite bilateral não existe. No segundo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 5.$$

12.30 Como $f(2) = 1$, basta exigir $2a + b = 1$. Há infinitas soluções: $b = 1 - 2a$, com $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

12.31 O gráfico é o segmento da reta $18 - 3t$ até um círculo aberto em $(4, 6)$ e, a partir de $t = 4$, o segmento horizontal $Q = 0$, com ponto fechado em $(4, 0)$. Como $\lim_{t \rightarrow 4^-} Q(t) = 6$ e $\lim_{t \rightarrow 4^+} Q(t) = Q(4) = 0$, há uma descontinuidade de salto.

12.32 Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon/2$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(2x - 1) - 5| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon.$$

Isso prova o limite pela definição.

12.33 Para $F(x) = x^3 + x - 5$, temos $F(1) = -3$ e $F(2) = 5$. Como F é contínua, o TVI fornece ao menos uma raiz em $(1, 2)$. O teorema é apenas uma afirmação de existência; sem uma hipótese adicional, como monotonicidade estrita, ele não exclui outras raízes.

12.34 No domínio original, $x = -1$ e $x = 3$ são excluídos. Para $x \neq 3$, $g(x) = (x + 3)/(x + 1)$. Assim, $x = 3$ é uma descontinuidade removível, eliminada definindo $g(3) = 3/2$, enquanto $x = -1$ é uma descontinuidade infinita.

12.35 Num modelo físico usual, a temperatura varia continuamente, inclusive nos instantes em que o termostato comuta. Já o estado ligado/desligado assume dois valores discretos e muda por salto nos limiares; portanto, não é contínuo nesses instantes.

12.36 Usando $1 - \cos u = 2 \sin^2(u/2)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} = 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

12.37 Para a primeira, tome a função de Dirichlet d , igual a 1 nos racionais e a 0 nos irracionais: d e $-d$ são descontínuas em toda parte, mas sua soma é zero. Para a segunda, tome $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x \geq 0$; f é descontínua em 0, mas $f^2 \equiv 1$ é contínua.

12.38 Como $f(x) = (x - 2)^2 - 3$, o mínimo absoluto é -3 , atingido em $x = 2$. Nos extremos,

$$f(-1) = f(5) = 6,$$

portanto o máximo absoluto é 6, atingido em $x = -1$ e $x = 5$.

12.39 A função é contínua e estritamente decrescente em $[1, 4]$. Assim, o máximo é $f(1) = 1$ e o mínimo é $f(4) = 1/4$.

12.40 O intervalo não é fechado, portanto falta uma das hipóteses do teorema. A função é contínua em $(0, 1)$, mas não atinge nem 0 nem 1: não possui mínimo nem máximo absolutos nesse domínio.

12.41

$$|f(x) - f(y)| = |m| |x - y|,$$

portanto podemos tomar $M = |m|$.

12.42 Se $x, y \in [-R, R]$, então

$$|x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| \leq 2R |x - y|.$$

Assim, f é Lipschitz com constante $2R$.

12.43 Para $x, y \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq |x - y|.$$

Logo, f é Lipschitz com constante 1 nesse domínio.

13.1 Dado $\varepsilon > 0$, tome $M = 3/\varepsilon$. Se $x > M$, então $x + 2 > x > M$ e

$$0 < \frac{3}{x+2} < \frac{3}{x} < \varepsilon.$$

13.2 Para $x > 0$,

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + 1/x^2}} \rightarrow 2.$$

Para $x < 0$, usamos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$:

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 + 1/x^2}} \rightarrow -2.$$

As assíntotas horizontais são $y = 2$ à direita e $y = -2$ à esquerda.

13.3 Dado $M > 0$, tome $\delta = 1/\sqrt{M}$. Se $0 < |x-3| < \delta$, então $(x-3)^2 < 1/M$ e, portanto, $1/(x-3)^2 > M$.

13.4 O numerador tende a $3 > 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty.$$

Logo, $x = 2$ é assíntota vertical. O limite bilateral não é $+\infty$ nem $-\infty$, pois os dois lados têm comportamentos opostos.

13.5 1. $3/5$.

2. $-1/3$, pois, para $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

3. Racionalizando, $\sqrt{x^2 + x} - x = x/(\sqrt{x^2 + x} + x) \rightarrow 1/2$.

4. Como $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ e o numerador não se anula em 3 nem em -2 , as assíntotas verticais são $x = 3$ e $x = -2$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, de modo que $y = 2$ é a assíntota horizontal.

13.6 A divisão polinomial fornece

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1-x}{x^2 + 1}.$$

Logo, a diferença tende a zero exatamente para $m = 1$ e $b = 0$. A reta $y = x$ é a assíntota inclinada do gráfico quando $x \rightarrow \infty$; o mesmo cálculo mostra que ela também é assíntota quando $x \rightarrow -\infty$.

13.7 Pelas relações de Viète, se r_1 é a raiz que permanece limitada e r_2 a outra, então

$$r_1 + r_2 = \frac{b}{a}, \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Uma forma estável de escrever a raiz limitada é

$$r_1 = \frac{2c}{b + \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

para a suficientemente próximo de zero e discriminante positivo. Assim, $r_1 \rightarrow c/b$. Consequentemente, $r_2 = b/a - r_1 \sim b/a$, sendo ilimitada. A equação limite é linear e conserva apenas a raiz finita c/b ; a segunda raiz escapa para o infinito quando o termo quadrático desaparece.

13.8 1. Os limites são, respectivamente, 12, 18 e 3,6. Em cada caso, o valor representa o platô previsto pelo modelo.

2. As metades dos platôs são atingidas quando $N = 5$, $I = 120$ e $s = 2$.

3. Em $Ax/(B+x)$, o parâmetro A é o valor-limite e B é o valor da variável no qual a resposta vale $A/2$.

13.9 1. e^6 .

2. 3.

3. 5.

4. $1000e^{0,08} \approx \text{R\$ } 1.083,29$.

13.10 Com $C = 10\,000$, $r = 0,06$ e $k = 3$,

$$M = Ce^{rk} = 10\,000e^{0,18}.$$

13.11 Os três montantes são

$$C(1+r), \quad C\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}, \quad Ce^r.$$

Eles correspondem, respectivamente, a $n = 1$, $n = 12$ e ao valor-limite obtido quando a frequência de capitalização cresce sem limite.

13.12 Como $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$, temos $f(x) = 2x - 1$ para $x \neq 1$. O gráfico é essa reta com um ponto removido em $(1, 1)$. Não há assíntotas verticais ou horizontais; $y = 2x - 1$ é a assíntota oblíqua.

13.13 Dado $\varepsilon > 0$, tome $N = 7/\varepsilon$. Se $x > N$, então

$$\left| \frac{7}{x+4} \right| < \frac{7}{x} < \varepsilon.$$

13.14 $\lim_{R \rightarrow 0^+} I(R) = +\infty$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$. A primeira previsão não é fisicamente realizável: a fonte e os condutores possuem resistência interna e limites de corrente, ignorados pelo modelo $12/R$.

13.15 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$. Como os comportamentos laterais diferem, não há limite bilateral em 0.

13.16 A razão tende a 0. Para obter 10%, $e^{-0,18t} = 0,1$, de onde $t = \ln(10)/0,18 \approx 12,79$, na unidade de tempo do modelo.

13.17 A divisão polinomial fornece

$$\frac{3x^3 - 2x + 7}{x^2 + 4} = 3x + \frac{-14x + 7}{x^2 + 4}.$$

Logo, a função simples é $3x$, e a diferença tende a zero em ambas as extremidades.

Apêndice A

A.1 Como $a \neq 0$, a fatoração é $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Comparando coeficientes, obtemos:

$$1. -a(x_1 + x_2) = b, \text{ logo } x_1 + x_2 = -b/a.$$

2. $ax_1x_2 = c$, logo $x_1x_2 = c/a$.

A.2 1. Raízes opostas têm soma zero. Como $x_1 + x_2 = 2m$, precisamos de $m = 0$. Nesse caso, a equação é $x^2 - 1 = 0$ e as raízes são -1 e 1 .

2. Raízes inversas têm produto 1. Como $x_1x_2 = m - 1$, precisamos de $m = 2$. Nesse caso, as raízes são $2 - \sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, cujo produto é 1.

A.3 1. $\{-7/3\}$.

2. $\{-2, 0, 2\}$.

3. $\{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\}$.

4. $\{-5, 5\}$.

5. $\{-1, -\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2, 1\}$.

6. $\{(3 - \sqrt{13})/2, 1, 2, (3 + \sqrt{13})/2\}$.

7. $\{2/3, 3/4\}$.

A.4 Pelo teorema do resto, os valores procurados são $q(2) = 13$ e $q(-1) = -11$.

A.5 É necessário que $r(-2) = 4k + 8 = 0$, logo $k = -2$. Nesse caso,

$$r(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x + 2)(x - 2)^2.$$

A.6 1. $\{(-1 - \sqrt{73})/4, (-1 + \sqrt{73})/4\}$.

2. $\{-3/2\}$.

A.7 1. Isolando um radical e elevando ao quadrado, chegamos a $8\sqrt{3x-1} = 31 + x$ e depois a $x^2 - 130x + 1025 = 0$, cujas raízes são $65 \pm 40\sqrt{2}$. Só $65 - 40\sqrt{2}$ serve ($65 + 40\sqrt{2}$ dá $8 - \sqrt{3x-1} < 0$). $\{65 - 40\sqrt{2}\}$.

2. Sendo $A = \sqrt{x + \sqrt{x+11}}$ e $B = \sqrt{x - \sqrt{x+11}}$, de $A + B = 4$ obtemos $A^2 + B^2 + 2AB = 16$, isto é, $2x + 2\sqrt{x^2 - x - 11} = 16$, ou $\sqrt{x^2 - x - 11} = 8 - x$. Elevando ao quadrado, $x = 5$, que verifica a equação original. $\{5\}$.

3. Elevando ao quadrado uma vez, $2\sqrt{(4x-3)(5x-1)} = 6x + 8$, isto é, $\sqrt{20x^2 - 19x + 3} = 3x + 4$; elevando de novo, $11x^2 - 43x - 13 = 0$, com raízes $(43 \pm 3\sqrt{269})/22$. A raiz negativa não pertence ao domínio ($x \geq 3/4$). $\{(43 + 3\sqrt{269})/22\}$.

4. Com $u = \sqrt[3]{x-3}$, a equação é $\sqrt[3]{x+34} = u + 1$; elevando ao cubo, $u^3 + 37 = u^3 + 3u^2 + 3u + 1$, ou seja, $u^2 + u - 12 = (u+4)(u-3) = 0$. Logo $u = -4$ ou $u = 3$, isto é, $x = -61$ ou $x = 30$. $\{-61, 30\}$.

Em cada item com raízes quadradas, os candidatos devem ser substituídos na equação original.

A.8 1. $\{-1, 0, 1\}$.

2. $\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$.

3. $\{-1\}$.

4. $\{1/3\}$.

5. $\emptyset$.

6. $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

7. $[1, 2] \cup \{5\}$.

A.9 Os pontos de mudança são -1 e $5/2$. A análise dos três intervalos fornece $x = -7/3$ no primeiro, nenhuma solução no segundo e $x = 5$ no terceiro. Logo, $Sol = \{-7/3, 5\}$.

A.10 Os gráficos se cruzam em $x = 1$. No domínio indicado,

$$Sol_{f=g} = \{1\}, \quad Sol_{f>g} = (1, 3], \quad Sol_{f\leq g} = [-1, 1].$$

A.11 A condição é $|x - 25| < 0,02$, equivalente a $24,98 < x < 25,02$.

A.12 Escreva $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$, sejam $x_1 < x_2$ as raízes; se $\Delta = 0$, escreva $r = -b/(2a)$. O conjunto-solução é

$$Sol = \begin{cases} \mathbb{R}, & \Delta < 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{r\}, & \Delta = 0, \\ (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), & \Delta > 0. \end{cases}$$

De fato, sem raízes reais o polinômio tem o sinal de a ; com raiz dupla, tem esse sinal exceto na raiz; com duas raízes distintas, a fatoração $a(x - x_1)(x - x_2)$ mostra que o sinal coincide com o de a fora do intervalo entre as raízes e é oposto dentro dele.

A.13 O resultado coincide com o do item anterior porque, nos dois enunciados, procuramos os pontos em que o trinômio tem o mesmo sinal de seu coeficiente principal. Escreva $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$, sejam $x_1 < x_2$ as raízes; se $\Delta = 0$, escreva $r = -b/(2a)$. Então

$$Sol = \begin{cases} \mathbb{R}, & \Delta < 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{r\}, & \Delta = 0, \\ (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), & \Delta > 0. \end{cases}$$

Com duas raízes distintas, por exemplo, a parábola abre para baixo e fica negativa fora do intervalo $[x_1, x_2]$.

A.14 1. $[-2, 3]$.

2. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

3. $[-2, 2]$.

4. $[-2, 1]$.
5. $\{-1\}$.
6. $[-5/2, -1/2]$.
7. $(-\infty, -2/3) \cup (4/3, \infty)$.
8. $(-\infty, -\pi) \cup (\pi, \infty)$.
9. $(-\pi, -\sqrt{3}) \cup (\pi/2, \infty)$.
10. $(-1, 3]$.
11. $[-1, 3]$.

A.15 1. $(-\infty, -1/2) \cup (1, \infty)$.

2. $(3/2, 2) \cup (3, \infty)$.
3. $(-\infty, -1) \cup (-1/2, 0]$.
4. $(-\infty, -1/2) \cup (3/2, 5)$.
5. $(-\infty, 0) \cup (4/5, \infty)$.
6. $(-\infty, 0) \cup (1/3, \infty)$.
7. $(-\infty, -1/2) \cup (1/3, \infty)$.
8. $(-\infty, -1/3) \cup (2, \infty)$.
9. $(-\infty, -4) \cup [5, \infty)$.
10. $[5, 14)$.
11. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
12. $(-\infty, -1) \cup (3, 7)$.
13. $(1, 2)$.
14. $((3 - \sqrt{57})/8, (3 + \sqrt{57})/8) \cup (\pi, \infty)$.
15. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \cup [2, \infty)$.
16. $(-2, 2)$.

A.16 Os pontos críticos são $-4, -2, 1, 3$. O fator $(x + 2)^2$ tem multiplicidade par, por isso não muda o sinal e seu zero é incluído; $x = 1$ anula o denominador e é sempre excluído. A tabela de sinais fornece

$$Sol = (-\infty, -4) \cup \{-2\} \cup (1, 3].$$

A.17 1. O domínio é $-5 \leq x \leq 1/3$. Escrevendo $\sqrt{1 - 3x} > 1 + \sqrt{5 + x}$ (ambos os lados positivos) e elevando ao quadrado, obtemos $-4x - 5 > 2\sqrt{5 + x}$; isso exige $x < -5/4$ e, elevando ao quadrado de novo, $16x^2 + 36x + 5 > 0$, isto é, $x < (-9 - \sqrt{61})/8$ ou $x > (-9 + \sqrt{61})/8$. Com $x < -5/4$ e $x \geq -5$: $[-5, (-9 - \sqrt{61})/8)$.

2. O domínio é $-15 \leq x \leq 1$. A desigualdade equivale a $4 - \sqrt{1-x} > 2 - x$, isto é, $2 + x > \sqrt{1-x}$, o que exige $x > -2$ e, elevando ao quadrado, $x^2 + 5x + 3 > 0$, isto é, $x < (-5 - \sqrt{13})/2$ ou $x > (-5 + \sqrt{13})/2$. Resulta $((-5 + \sqrt{13})/2, 1]$.

Em cada etapa, a elevação ao quadrado é feita somente depois de impor o domínio e verificar que os dois membros são não negativos.

- A.18** 1. Se $x \leq -2$, o lado esquerdo vale $4 > 2$ (todo $x \leq -2$ serve); se $-2 < x < 2$, vale $-2x$, e $-2x > 2 \iff x < -1$; se $x \geq 2$, vale -4 (nenhuma solução). Resposta: $(-\infty, -1)$.
2. Se $x \geq 2$, a desigualdade é $-x^2 - x - 3 < 0$, sempre verdadeira; se $-2 \leq x < 2$, é $x^2 + 3x - 1 > 0$, que dá $x > (-3 + \sqrt{13})/2$; se $x < -2$, é $x^2 + x + 1 < 0$, impossível. Resposta: $((-3 + \sqrt{13})/2, \infty)$.
3. Se $x \geq -1/2$, o lado esquerdo é soma de números não negativos, e a desigualdade vale. Se $x < -1/2$, ela equivale a $|x^2 - 2| \geq -2x - 1 > 0$, isto é, $x^2 + 2x - 1 \geq 0$ ou $x^2 - 2x - 3 \leq 0$; isso dá $x \leq -1 - \sqrt{2}$ ou $-1 \leq x < -1/2$. Resposta: $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1, \infty)$.
4. Como $|x - 2| \geq 0$, o lado esquerdo deve ser positivo, isto é, $|x - 5| > 3$, ou seja, $x < 2$ ou $x > 8$. Se $x < 2$, a desigualdade é $9 > (2 - x)^2$, isto é, $-1 < x < 5$, o que dá $(-1, 2)$. Se $x > 8$, é $9 > (x - 2)(x - 8)$, isto é, $x^2 - 10x + 7 < 0$, que dá $8 < x < 5 + 3\sqrt{2}$. Resposta: $(-1, 2) \cup (8, 5 + 3\sqrt{2})$.

- A.19** 1. $Sol = \{2\}$.
2. Com $t = 2^x > 0$, temos $(t - 2)(t - 4) = 0$; logo $Sol = \{1, 2\}$.
3. O domínio é $x > -6$ e $x + 6 = 9$; logo $Sol = \{3\}$.
4. O domínio é $x > 3$. Como $x(x - 3) = 4$, obtemos $(x - 4)(x + 1) = 0$; apenas $x = 4$ pertence ao domínio. Logo $Sol = \{4\}$.

A.20 O membro direito exige apenas $(x - 1)(x - 5) > 0$, o que também ocorre para $x < 1$. O membro esquerdo exige simultaneamente $x > 1$ e $x > 5$. Por exemplo, $x = 0$ pertence ao domínio do membro direito, mas não ao do esquerdo.

- A.21** 1. $\{3\}$.
2. $\{3/2\}$.
3. $\{0, 2\}$.
4. $\{2\}$.
5. $\{3\}$.
6. $(-\infty, 2)$.
7. $[-1, \infty)$.
8. $(-1, \infty)$.

A.22 Pondo $u = 3^x > 0$, obtemos $u^2 - 4u - 5 = 0$, isto é, $(u - 5)(u + 1) = 0$. Somente $u = 5$ é admissível; portanto, $x = \log_3 5$.

A.23 A massa total é $x + (3x + 18) = 4x + 18$. Assim,

$$450 \leq 4x + 18 \leq 630 \quad \Longleftrightarrow \quad 108 \leq x \leq 153.$$

A.24 Em todos os itens, $k \in \mathbb{Z}$.

1. $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = 7\pi/6 + 2k\pi$.
2. $x = \pi/2 + k\pi$.
3. Como $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$, obtemos $x = \pi/6 + 2k\pi$, $x = 5\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = \pi/2 + 2k\pi$.

A.25 Como $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$, temos $(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$. Logo,

$$\text{Sol} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

A.26 Em todos os itens, $k \in \mathbb{Z}$.

1. $x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x = 2\pi/3 + 2k\pi$.
2. $x = 3\pi/4 + 2k\pi$ ou $x = 5\pi/4 + 2k\pi$.
3. $x = -\pi/4 + k\pi$.
4. $x = \pi/4 + k\pi$.
5. $x = 2k\pi$ ou $x = 2\pi/3 + 2k\pi$.
6. Como $(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$, temos

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

A.27 1. Como $\cos x \neq 0$, podemos multiplicar a equação por $\cos x$:

$$\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0.$$

As possibilidades são $\cos x = -1$ e $\cos x = -2$; a segunda é impossível. Logo, $x = \pi$.

2. Usando $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, obtemos

$$\sec^2 x - \sec x - 2 = 0.$$

Assim, $\sec x = 2$ ou $\sec x = -1$, e $x \in \{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$.

3. Fatorando,

$$\cos x(\cos x - \sin x) = 0.$$

Portanto, $x \in \{\pi/4, \pi/2, 5\pi/4, 3\pi/2\}$.

4. Como $\text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$, a equação equivale a $\cot x(\cot x - 1) = 0$. Logo, $x \in \{\pi/4, \pi/2, 5\pi/4, 3\pi/2\}$.

A.28 1. $(\pi/2, 3\pi/2)$.

2. $[7\pi/6, 11\pi/6]$.
3. $[0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi)$.
4. $(\pi/4, \pi/2) \cup (5\pi/4, 3\pi/2)$. Os pontos $\pi/2$ e $3\pi/2$ ficam excluídos porque a tangente não está definida neles.

Respostas dos Problemas

Paradoxo de Russell

O conjunto C não pode ser nem exológico nem endológico. De fato, analisemos cada possibilidade. Se C fosse exológico, ele seria (pela definição do próprio conjunto C) um elemento de C . Mas ser exológico significa, conforme nossa definição, que C não é um elemento de si mesmo. Ora, isso é uma contradição. Logo, nossa hipótese inicial (isto é, a de C ser exológico) era falsa. Se C não é exológico, só lhe resta então ser endológico. Isso significa que C contém a si mesmo. Mas os elementos de C são conjuntos exológicos, e novamente encontramos uma contradição!

Paradoxo de Grelling. Na língua portuguesa, temos adjetivos que podem ser aplicados a si mesmos: *proparoxítono* é um adjetivo proparoxítono; *comum* é um adjetivo comum; *curto* é um adjetivo curto (caso não concorde, então pode considerar que *longo* é um adjetivo longo); *masculino* é um adjetivo do gênero masculino. E assim por diante. Por outro lado, há adjetivos (provavelmente a maioria deles) que não se aplicam a si mesmos: *azul* não é azul; *econômico* não é econômico; *fanático* não é fanático. Vamos agora inventar mais dois termos: chamaremos de *autológico* um adjetivo que se aplica a si mesmo; chamaremos de *heterológico* um adjetivo que não se aplica a si mesmo. Evidentemente, todo adjetivo ou é autológico ou é heterológico, certo? Mas cada um desses dois novos termos também é um adjetivo, logo deveria ser autológico ou heterológico. Pois então, a qual categoria pertence o adjetivo *heterológico*? Será um adjetivo autológico? Será heterológico?

Problema do Circuito

A idéia é estudar o problema por indução, tomando como “índice” da indução o número n de galões dispostos no circuito. O caso mais simples é quando só há um único galão ao longo do circuito. Nesse caso, pela hipótese do problema (a quantidade total de gasolina é suficiente para dar uma volta completa no circuito), esse galão deve conter toda a gasolina necessária a completar a volta. Logo, quando $n = 1$, a resposta do problema é afirmativa. Suponhamos agora que para um certo número n de galões o problema admita solução, isto é: qualquer que seja a distribuição de n galões ao longo do circuito (desde que respeitadas as condições do problema), há sempre ao menos um galão que, tomado como ponto inicial, faz com que o carro complete a volta. Isso assumido (é a nossa hipótese de indução), vejamos o que acontece se tivermos $n + 1$ galões distribuídos ao longo do circuito. Nesse caso, é evidente que existe ao menos um galão (denote-o por G) cuja gasolina é suficiente para que o carro, abastecendo-se somente com essa quantidade de gasolina, consiga chegar ao próximo galão (denote-o por $G+$). De fato, se assim não fosse, a gasolina total distribuída em todos os $n + 1$ galões não seria suficiente para dar a volta completa do circuito. Pois bem, mantendo intactos os outros $n + 1$ galões, elimine o galão $G+$ transferindo a gasolina nele contida para o galão G . A nova situação assim construída é equivalente ‘a anterior no seguinte sentido: se na situação original era possível escolher um galão inicial de modo a completar a volta no circuito, na nova situação também o é. E vice-versa. Afinal, o que fizemos foi apenas antecipar o versamento da gasolina de $G+$ no tanque do carro, o que não faz nenhuma diferença, uma vez que a gasolina em G

já era suficiente por si só a fazer o carro chegar ao galão $G+$. Agora, o passo principal foi dado e já podemos usar a hipótese indutiva. De fato, a nova situação constitui-se de n galões, nas condições

do problema. Mas a nossa hipótese indutiva garante solução nesse caso, logo o problema original também possui solução.

Índice Remissivo

- amplitude, 163
- arco-cosseno, 175
- arco-seno, 174
- arco-tangente, 175
- arranjo, 75
- assíntota horizontal, 133, 254
- assíntota oblíqua, 137, 265
- assíntota vertical, 133, 257
- axioma de completude, 51

- base, 40
- bi-implicação, 11
- bicondicional, 11
- bijetora, 94
- binômio de Newton, 84
- biquadrática, 278

- coeficientes, 129
- combinação, 80
- complementar, 32
- condicional, 9
- condição suficiente, 11
- condição necessária, 11
- conjunto, 23
 - complementar, 32
 - das partes, 28
 - disjuntos, 29
 - intersecção, 29
 - potência, 28
 - união, 29
 - vazio, 27
- conjunto verdade, 3
- conjunto-solução, 275, 285
- conjuntos
 - iguais, 26
- conjunção, 6

- constante de Lipschitz, 248
- contido, 26
- contradomínio, 91
- contrapositiva, 10
- contínua, 231, 233
- contínua por partes, 233

- diagramas de Venn-Euler, 34
- diferença, 31
- diferença simétrica, 33
- discriminante, 277
- disjuntos, 29
- disjunção, 6
- divide, 15
- domínio
 - de uma função, 91
 - de discurso, 2
- domínio da equação, 275

- elemento, 23
- equação, 275
 - linear, 276
 - quadrática, 277
- equações
 - equivalentes, 276
- existe, 3
- existe e é único, 4
- expoente, 40
- exponencial natural, 147

- forma canônica, 123
- forma ponto-inclinação, 119
- função, 90
 - bijetora, 94
 - contínua, 231, 233
 - injetora, 93
 - limite, 214, 254

- sobrejetora, 93
- função afim, 117
- função exponencial de base a , 140
- função linear, 117
- função logarítmica de base a , 144
- função polinomial, 129
- função quadrática, 122
- função racional, 131
- hipótese, 9
- imagem, 91
- implicação, 9
- incógnita, 275
- indeterminação, 224, 263
- inequação quadrática, 287
- injetora, 93
- inteiros, 39
- intersecção, 29
- inversa, 10
- irracional, 15
- limitado
 - superiormente, 52
- limitado inferiormente, 52
- limite, 222, 262
 - função, 208, 214, 254
 - infinito, 260
 - lateral, 218
 - propriedades, 222, 262
 - sequência, 189, 190
- limite fundamental, primeiro, 228
- limite fundamental, segundo, 266
- limite fundamental, terceiro, 270
- Lipschitz, 248
- logaritmo, 269
- logaritmo natural, 147, 269
- majorante, 52
- minorante, 52
- multiplicidade m , 130
- naturais, 39
- negação, 6
- não possui coeficiente angular, 119
- não-crescente, 185
- número
 - impar, 15
 - irracional, 15
 - par, 15
 - racional, 15
- par, 15
- para todo, 3
- paradoxo
 - de Russell, 25
- paralelas, 120
- pela direita, 219
- pela esquerda, 218
- permutação, 76
- perpendiculares, 120
- pertence, 23
- período fundamental, 155
- potência, 40
- premissa, 9
- princípio
 - de indução finita, 41
 - aditivo, 71
 - de indução finita, 45
 - fundamental da contagem, 72
 - multiplicativo, 72
- produto cartesiano, 34
- proposição, 1
 - contrapositiva, 10
 - inversa, 10
 - recíproca, 10
- quantificador
 - existencial, 3
 - universal, 3
- racionais, 39
- racional, 15
- raiz, 129, 275
- reais, 47
 - axiomas, 48
 - completude, 51
 - reta, 59
- recíproca, 10
- relação, 89
- removível, 133
- representação
 - decimal, 57
- reta
 - real, 59

se e somente se, 11

sequência, 179, 183

- crescente, 185
- decrecente, 185
- limitada, 186
- limitadas inferiormente, 186
- limitadas superiormente, 186
- limite, 190
- não-decrecente, 185
- termos de uma, 179

sequências

- recursivas, 182

sobrejetora, 93

solução, 275, 285

subconjunto, 26

- próprio, 27

superconjunto, 26

supremo, 53

série

- geométrica, 202
- telescópica, 203

séries, 201

teorema

- binomial, 43
- do confronto, 198
- do valor intermediário, 239

tese, 9

uniformemente contínua, 247

universo do discurso, 2

união, 29

- disjunta, 29

variável

- aparente, 4
- livre, 4

zero, 129

ímpar, 15

ínfimo, 53