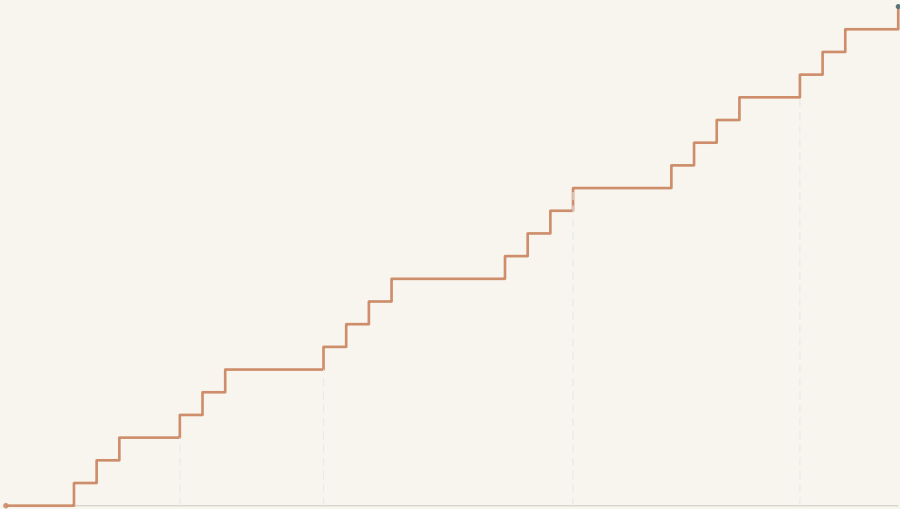


ANÁLISE REAL

Números reais, sequências, limites e séries

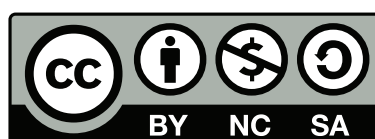


Copyright © 2026

Licenciado sob a Creative Commons Attribution 4.0. Você não pode usar esse arquivo exceto em conformidade com a Licença. Você pode obter uma cópia da Licença em

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>.

A menos que exigido por lei aplicável ou acordado por escrito, o livro distribuído sob a Licença é distribuído “COMO ESTÁ”, SEM GARANTIAS OU CONDIÇÕES DE QUALQUER TIPO, expressa ou implícita. Consulte a Licença para permissões específicas e limitações sob a Licença.



Conteúdo

1	Números reais	3
1.1	Operações binárias	3
1.2	Axiomas de corpo	5
1.3	Axiomas de ordem	10
1.4	Números naturais, inteiros e racionais	13
1.5	Indução matemática	15
1.6	Funções definidas recursivamente	17
1.7	Axioma de completude	21
1.8	Propriedade arquimediana	23
1.9	Propriedades do supremo e do ínfimo	26
1.10	Valor absoluto de um número real	30
1.11	Introdução à topologia da reta	32
1.12	Potenciação de números reais	42
1.13	Representação decimal dos números reais	47
2	Sequências	50
2.1	Conceitos básicos	50
2.2	Convergência e limite de sequências	52
2.3	Sequências limitadas	55

2.4	Sequências crescentes e decrescentes	58
2.5	O número e	61
2.6	Limites infinitos	62
2.7	Propriedades do limite de sequências	65
2.8	Teorema do confronto	69
2.9	Subsequências	71
2.10	Sequências de Cauchy	73
2.11	Limite superior e limite inferior	76
2.12	Sequências e a topologia da reta	81
3	Construção dos reais	83
3.1	Construção via sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$	83
3.2	Completude	88
3.3	Unicidade	92
3.4	Cortes de Dedekind	93
3.5	Exercícios	100
4	Séries	102
4.1	Convergência	102
4.2	Primeiros modelos: séries que podemos somar	107
4.3	Séries de termos não negativos: comparar com modelos	111
4.4	Sinais e cancelamento	118
4.5	A ordem dos termos importa	125
4.6	O número e revisitado	129
4.7	Representação decimal dos números reais II	131
5	Cardinalidade	134

5.1	Comparação de cardinalidades	134
5.2	O infinito enumerável	137
5.3	Enumerabilidade e densidade dos racionais	139
5.4	O teorema de Cantor	140
5.5	A cardinalidade do contínuo	141
5.6	Exercícios	142
6	Espaços métricos	144
6.1	Da distância na reta à métrica	144
6.2	Bolas e a geometria produzida pela métrica	146
6.3	Dos pontos próximos aos conjuntos abertos	148
6.4	Topologia relativa	151
6.5	Sequências, Cauchy e completude	152
6.6	Compacidade	157
6.7	Conjuntos perfeitos e o conjunto de Cantor	166
6.8	Conexidade	170
6.9	Exercícios	172
7	Continuidade em espaços métricos	180
7.1	Limites	180
7.2	Continuidade	187
7.3	Continuidade e compacidade	191
7.4	Continuidade e conexidade	197
7.5	Conexidade por caminhos	199
7.6	Exercícios	201
8	Limites de funções reais	205

8.1	Limites laterais	205
8.2	Descontinuidades e funções monótonas	207
8.3	Limites no infinito	210
8.4	Limites infinitos de funções	211
8.5	Exercícios	212
9	Derivadas	214
9.1	Derivada e aproximação linear	214
9.2	Regras de derivação	220
9.3	Derivada e extremos locais	223
9.4	Teoremas do valor médio e consequências	224
9.5	Regra de L'Hôpital	232
9.6	Convexidade	234
9.7	Fórmula de Taylor	236
10	Integração	248
10.1	Partições e somas de Darboux	248
10.2	Integral inferior, integral superior e integral de Darboux	250
10.3	Somas de Riemann e uma segunda caracterização	252
10.4	Classes de funções integráveis	255
10.5	Aditividade em intervalos	259
10.6	Descontinuidades e o critério de Lebesgue	260
10.7	A função integral e o Teorema Fundamental do Cálculo	265
10.8	Integral de Riemann–Stieltjes	268
10.9	Caracterizações da integrabilidade de Stieltjes	270
10.10	Funções Stieltjes-integráveis	274

10.11	Saltos e pesos concentrados	278
10.12	Quando $d\alpha$ se reduz a um peso dx	279
10.13	Integradores de variação limitada	280
10.14	O que as duas integrais estão medindo	285
10.15	Exercícios	285
11	Sequências, séries e aproximação de funções	290
11.1	Convergência pontual	290
11.2	Convergência uniforme	293
11.3	CrITÉrio de Cauchy para convergência uniforme	296
11.4	SÉries de funções e o teste M de Weierstrass	298
11.5	O que a convergência uniforme preserva	301
11.6	Equicontinuidade e o Teorema de Arzelà–Ascoli	305
11.7	Aproximação uniforme: Stone–Weierstrass	308
11.8	SÉries de potências	311
11.9	Propriedades das séries de potências	316
11.10	SÉrie de Taylor	320
11.11	Calculando a série de Taylor	327
11.12	Funções trigonométricas	330
11.13	Exemplo de uma função não representável por série de potência	333
	Gabarito	335

Prefácio

Este livro foi elaborado para os cursos de *Números Reais e Sequências* e *Análise Real I* da Universidade Federal do ABC (UFABC). Apresenta uma introdução gradual ao estudo rigoroso da análise real.

A estrutura algébrica, a ordem e a completude dos números reais constituem os fundamentos da teoria. Seu estudo oferece também uma primeira experiência sistemática com a formulação de conceitos e a construção de demonstrações. Ao longo do texto, procuramos explicitar as relações entre esses princípios e as propriedades que deles decorrem.

O estudo das demonstrações ocupa parte importante deste livro. Compreender um resultado requer examinar suas hipóteses, o alcance de sua conclusão e a organização do argumento que o estabelece. Procuramos desenvolver essa leitura junto com a apresentação da teoria, indicando como cada etapa da demonstração depende das definições e dos resultados anteriores.

A obra está organizada em capítulos que tratam dos seguintes temas:

- **Números reais:** propriedades algébricas, de ordem e de completude dos números reais, além de uma introdução à topologia da reta;
- **Sequências:** convergência, subsequências, sequências de Cauchy e critérios de convergência;
- **Construção dos números reais:** construção dos reais via sequências de Cauchy e via cortes de Dedekind;
- **Séries numéricas:** convergência de séries numéricas, incluindo convergência absoluta e condicional, bem como critérios de convergência;
- **Espaços métricos e continuidade:** noções básicas de espaços métricos, topologia, compacidade, conexidade, limites e continuidade;
- **Limites e derivadas de funções reais:** limites de funções, continuidade, derivação, teoremas fundamentais do cálculo diferencial, convexidade e fórmula de Taylor;
- **Séries de funções e séries de potências:** convergência pontual e uniforme, raio de convergência, séries de potência e séries de Taylor.

Os exercícios acompanham o desenvolvimento da teoria. Alguns permitem verificar a compreensão de definições e resultados; outros exigem combinar argumentos ou

examinar situações que ampliam os exemplos apresentados. Convém resolvê-los durante a leitura e, quando necessário, retomar as demonstrações correspondentes. Esse trabalho ajuda o estudante a reconhecer o papel das hipóteses e a adquirir autonomia na elaboração de seus próprios argumentos.

1

Números reais

Neste capítulo, apresentamos os números reais por meio de sua caracterização axiomática como corpo ordenado completo. Essa formulação separa três aspectos da reta real: a estrutura algébrica, a ordem e a completude.

Os números racionais já sustentam as operações algébricas usuais, mas deixam lacunas importantes. Há equações naturais cuja solução não pertence a $\mathbb{Q}$, e processos de aproximação podem apontar para números que também escapam dos racionais. O axioma de completude é o princípio que fecha essas lacunas.

Adotaremos inicialmente um ponto de vista axiomático. Em vez de construir os reais a partir dos racionais, partiremos de um conjunto $\mathbb{R}$ munido de operações e de uma ordem que satisfazem certos axiomas, e deduziremos suas propriedades fundamentais. A construção propriamente dita dos números reais será retomada no Capítulo 3.

O percurso começa com operações binárias, corpos e corpos ordenados. Depois entra a completude e, com ela, suas primeiras consequências: a propriedade arquimediana, a existência de raízes, supremos e ínfimos, o valor absoluto, a topologia básica da reta, a potenciação e a representação decimal.

Neste capítulo

- ▶ Operações binárias (p. 3)
- ▶ Axiomas de corpo (p. 5)
- ▶ Axiomas de ordem (p. 10)
- ▶ Números naturais, inteiros e racionais (p. 13)
- ▶ Indução matemática (p. 15)
- ▶ Funções definidas recursivamente (p. 17)
- ▶ Axioma de completude (p. 21)
- ▶ Propriedade arquimediana (p. 23)
- ▶ Propriedades do supremo e do ínfimo (p. 26)
- ▶ Valor absoluto de um número real (p. 30)
- ▶ Introdução à topologia da reta (p. 32)
- ▶ Potenciação de números reais (p. 42)
- ▶ Representação decimal dos números reais (p. 47)

1.1 Operações binárias

Os axiomas de corpo envolvem duas operações. Começamos, portanto, pela noção geral de operação binária. Se A é um conjunto não vazio, uma operação binária em A é uma função

$$\mu : A \times A \rightarrow A.$$

Assim, a cada par ordenado (x, y) de elementos de A corresponde um novo elemento de A , usualmente denotado por $\mu(x, y)$.

Na prática, raramente escrevemos a operação por meio da letra μ . Dependendo do contexto, usamos notações como

$$x + y, \quad x \cdot y, \quad xy, \quad x * y.$$

O par $(A, \cdot)$ indica, portanto, um conjunto A munido de uma operação binária $\cdot$.

Ideia central

Corpo, ordem e completude são as três estruturas que sustentam a reta real. O axioma do supremo é o fio condutor do capítulo.

1.1 Exemplos. 1. A adição e a multiplicação usuais são operações binárias em $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

2. A subtração é uma operação binária em $\mathbb{Z}$, mas a divisão não é: por exemplo, $1/2 \notin \mathbb{Z}$, e $1/0$ não está definido.

3. Se X é um conjunto e X^X denota o conjunto das funções de X em X , então a composição

$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

é uma operação binária em X^X .

4. Se X é um conjunto, então a união e a interseção são operações binárias em $\mathcal{P}(X)$.

Algumas propriedades de operações binárias terão papel central nos axiomas de corpo. A primeira é a associatividade. Uma operação $\cdot$ em A é associativa quando

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

para todos $x, y, z \in A$. Quando isso ocorre, podemos escrever simplesmente $x \cdot y \cdot z$, sem indicar a ordem de associação.

A adição e a multiplicação usuais são associativas. A subtração, por outro lado, não é associativa, pois, em geral,

$$(a - b) - c \neq a - (b - c).$$

A composição de funções é associativa: se as composições fazem sentido, então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Outra propriedade importante é a existência de elemento neutro. Um elemento $e \in A$ é neutro para uma operação $\cdot$ se

$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

para todo $x \in A$. Se uma operação possui elemento neutro, ele é único: de fato, se e e e' são neutros, então $e = e \cdot e' = e'$.

Finalmente, suponha que a operação seja associativa e possua elemento neutro e . Dizemos que $y \in A$ é inverso de $x \in A$ quando

$$x \cdot y = y \cdot x = e.$$

Nesse contexto, cada elemento possui no máximo um inverso. Com efeito, se y e z são inversos de x , então

$$y = y \cdot e = y \cdot (x \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z = e \cdot z = z.$$

Com essa linguagem, podemos formular os axiomas de corpo: a adição terá neutro e opostos, a multiplicação terá neutro e inversos para elementos não nulos, e as duas operações serão ligadas pela distributividade.

1.2 Axiomas de corpo

Um corpo é uma estrutura algébrica na qual duas operações, chamadas adição e multiplicação, obedecem às regras formais que tornam possível somar, multiplicar, subtrair e dividir por elementos não nulos.

1.2 Definição. Os símbolos $+$ e $\cdot$ não carregam aqui nenhum significado além daquele imposto pelos axiomas. Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$, munido de duas operações $(x, y) \mapsto x + y$ e $(x, y) \mapsto x \cdot y$ de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$, é chamado de **corpo** quando satisfaz os nove axiomas a seguir:

Axioma 1 Comutatividade da soma $x + y = y + x$ para todos os $x, y \in \mathbb{K}$.

Axioma 2 Associatividade da soma $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todos os $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Axioma 3 Existência do elemento neutro Existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $x + 0 = x$ para todos os $x \in \mathbb{K}$.

Axioma 4 Existência do oposto para todo $x \in \mathbb{K}$, existe um elemento $y \in \mathbb{K}$, de modo que $x + (y) = 0$.

Axioma 5 Comutatividade do produto $xy = yx$ para todos os $x, y \in \mathbb{K}$.

Axioma 6 Associatividade do produto $x(yz) = (xy)z$ para todos os $x, y, z \in \mathbb{K}$

Axioma 7 Existência do elemento neutro multiplicativo Existe um elemento $1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$ tal que $1x = x$ para todos os $x \in \mathbb{K}$.

Axioma 8 Existência do inverso para todo $x \neq 0$ em $\mathbb{K}$, existe $y \in \mathbb{K}$, tal que $xy = 1$.

Axioma 9 Distributividade $x(y + z) = xy + xz$ para todos os $x, y, z \in \mathbb{K}$.

1.3 Observação. A hipótese $1 \neq 0$ exclui a estrutura trivial. Se tivéssemos $1 = 0$, então, para todo $a \in \mathbb{K}$, valeria $a = 1a = 0a = 0$. Assim, $\mathbb{K}$ teria apenas um elemento.

Estritamente falando, um corpo é uma tripla $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, formada por um conjunto e duas operações que satisfazem os axiomas acima. Por economia de notação, costuma-se escrever apenas $\mathbb{K}$, deixando as operações subentendidas quando não houver risco de ambiguidade.

1.4 Exemplo. Sejam $\mathbb{Q}$ o conjunto de números racionais, $\mathbb{R}$, o conjunto de números reais e $\mathbb{C}$, o conjunto de números complexos. Com a adição e multiplicação usual, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são todos corpos com $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

1.5 Exemplo. Seja $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dados $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, definimos a soma e o produto, respectivamente, como:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \quad (1.1)$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) := (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}. \quad (1.2)$$

Com essas operações, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é fechado por soma e produto, possui os mesmos elementos neutros de $\mathbb{Q}$, e todo elemento não nulo admite inverso ainda em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Portanto, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um corpo.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tabela 1.1 Tabelas de Cayley da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_5$

1.6 Notação. A expressão $p := q$ significa que p é definido como q .

Os corpos dos Exemplos 1.4 e 1.5 são todos infinitos.

1.7 Exemplo. Seja p um número primo. Denotemos por

$$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$$

o conjunto das classes de congruência módulo p . Com a adição e a multiplicação induzidas pelas operações usuais em $\mathbb{Z}$, o conjunto $\mathbb{Z}_p$ é um corpo finito.

Para $p = 5$, as tabelas de Cayley das duas operações são:

A primalidade de p garante que toda classe não nula possui inverso multiplicativo módulo p . Assim, $\mathbb{Z}_p$ satisfaz os axiomas de corpo e possui exatamente p elementos.

1.8 Exemplo. O conjunto $M_2(\mathbb{R})$, munido da adição e da multiplicação usuais de matrizes, não é um corpo. A multiplicação de matrizes não é comutativa e, além disso, há matrizes não nulas sem inverso multiplicativo. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é não nula, mas não é inversível.

1.9 Exemplo. O corpo $\mathbb{Q}(i)$ pode ser descrito como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, com as operações

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

e

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Os elementos neutros são $(0, 0)$, para a adição, e $(1, 0)$, para a multiplicação.

Identificando $x \in \mathbb{Q}$ com $(x, 0)$ e escrevendo $i = (0, 1)$, todo elemento de $\mathbb{Q}(i)$ assume a forma $x + iy$, com $x, y \in \mathbb{Q}$, e satisfaz $i^2 = -1$. Assim, $\mathbb{Q}(i)$ é o subcorpo de $\mathbb{C}$ formado pelos números complexos com partes real e imaginária racionais.

A verificação dos axiomas de corpo é deixada como exercício. Por exemplo, dado um elemento $z = (x, y) \neq 0$, seu inverso é $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$.

Dos axiomas anteriores podemos deduzir todas as regras usuais da álgebra elementar. As mais importantes são apresentadas a seguir como teoremas. Nestes teoremas os símbolos a, b, c, d representam números reais arbitrários.

1.10 Proposição. Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

1. $\mathbb{K}$ possui pelo menos dois elementos 0 e 1 e $0 \neq 1$.
2. O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.
3. O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.
4. Para todos os $a \in \mathbb{K}$, $a0 = 0a = 0$.
5. O oposto de um elemento é único.
6. O inverso de um elemento (não nulo) é único.
7. Para todos os $a, b \in \mathbb{K}$, se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Nesse caso dizemos que $\mathbb{K}$ não tem **divisores de zero**.

Demonstração. O item 1 é imediato do axioma que afirma a existência de $1 \neq 0$.

Provemos 2. Suponha que 0 e $0'$ sejam ambos elementos neutros da soma. Então

$$0 = 0 + 0' = 0',$$

logo o elemento neutro aditivo é único.

Provemos 3. Suponha que 1 e $1'$ sejam ambos elementos neutros da multiplicação. Então

$$1 = 1 \cdot 1' = 1',$$

logo o elemento neutro multiplicativo é único.

Provemos 4. Para todo $a \in \mathbb{K}$,

$$a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a.$$

Somando o oposto de a aos dois membros, obtemos $a0 = 0$. Como o produto é comutativo, segue também que $0a = 0$.

Provemos 5. Se $a + a' = 0$ e $a + a'' = 0$, então

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a'',$$

logo o oposto de a é único.

Para o item 6, seja $a \neq 0$ e suponha que u e v sejam inversos de a . Então

$$u = u \cdot 1 = u(av) = (ua)v = 1 \cdot v = v.$$

Logo o inverso multiplicativo de um elemento não nulo é único.

Provemos 7. Suponha que $ab = 0$. Se $a = 0$, nada há a provar. Se $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que $a^{-1}a = 1$. Multiplicando a igualdade $ab = 0$ por a^{-1} , obtemos

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0.$$

Pela associatividade,

$$(a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b.$$

Portanto, $b = 0$. □

1.11 Proposição (Unicidade do inverso). Se $a \in \mathbb{K}$ e $a \neq 0$, existe no máximo um elemento $u \in \mathbb{K}$ tal que $au = 1$.

Demonstração. Esta é precisamente a demonstração do item 6 da Proposição 1.10: se $au = av = 1$, então $u = u(av) = (ua)v = v$. $\square$

1.12 Teorema (Cancelamento). Se $a + b = a + c$, então $b = c$.

Demonstração. Suponha que $a + b = a + c$. Seja y o oposto de a . Somando y aos dois membros e usando a associatividade da adição, obtemos $(y + a) + b = (y + a) + c$. Como $y + a = 0$, segue que $b = c$. $\square$

1.13 Teorema (Subtração). Dados $a, b \in \mathbb{K}$, existe um único $x \in \mathbb{K}$ tal que $a + x = b$. Esse número é denotado por $b - a$.

Demonstração. Seja y o oposto de a e defina $x = y + b$. Então $a + x = a + (y + b) = (a + y) + b = 0 + b = b$, o que prova a existência.

Para a unicidade, suponha que x e x' satisfaçam $a + x = b$ e $a + x' = b$. Então $a + x = a + x'$, e o Teorema 1.12 implica $x = x'$. $\square$

1.14 Definição. O número $0 - a$ escreve-se simplesmente $-a$ e é o oposto de a .

De agora em diante, escreveremos o oposto de a como $-a$.

1.15 Proposição.

1. $b - a = b + (-a)$.
2. $-(-a) = a$.
3. $a(b - c) = ab - ac$.

Demonstração. Provemos o primeiro item. Sejam $x = b - a$ e $y = b + (-a)$. Por definição de $b - a$, temos $a + x = b$. Além disso,

$$a + y = a + [b + (-a)] = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Logo $a + x = a + y$, e o cancelamento fornece $x = y$.

Para o segundo item, observe que $a + (-a) = 0$. Portanto, a é o oposto de $-a$. Pela unicidade do oposto, $a = -(-a)$.

Por fim, usando o primeiro item e a distributividade, obtemos

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c).$$

Como $ac + a(-c) = a(c + (-c)) = a0 = 0$, temos $a(-c) = -(ac)$. Assim,

$$a(b - c) = ab - (ac),$$

como queríamos. $\square$

1.16 Teorema (Regra de simplificação para a multiplicação). Se $ab = ac$ e $a \neq 0$, então $b = c$.

1.17 Teorema (Possibilidade da divisão). Dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a \neq 0$, existe um único $x \in \mathbb{K}$ tal que $ax = b$. Esse número x é denotado por b/a ou $\frac{b}{a}$, e é chamado de quociente de b por a . Em particular, $1/a$, que também se escreve a^{-1} , é chamado de inverso de a .

Demonstração. Como $a \neq 0$, existe o inverso multiplicativo a^{-1} . Tomando $x = a^{-1}b$, temos $ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1b = b$. Portanto, existe pelo menos um $x \in \mathbb{K}$ tal que $ax = b$.

Resta provar a unicidade. Suponha que x e y satisfaçam $ax = b$ e $ay = b$. Então $ax = ay$. Multiplicando essa igualdade por a^{-1} e usando a associatividade da multiplicação, obtemos

$$(a^{-1}a)x = (a^{-1}a)y.$$

Logo $1x = 1y$, isto é, $x = y$. Assim, o elemento x é único.

Esse único elemento é denotado por b/a . No caso particular $b = 1$, obtemos $1/a = a^{-1}$, como queríamos. $\square$

1.18 Teorema.

1. Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.
2. Se $a \neq 0$, então $(a^{-1})^{-1} = a$.
3. Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
4. $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.
5. $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
6. $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
7. $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$, se $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

A demonstração da regra de simplificação e dos itens do teorema anterior é deixada ao leitor. Todas elas seguem diretamente da existência e unicidade dos inversos, da associatividade, da comutatividade e da distributividade.

Ex. 1.1 — Mostre que num corpo valem:

a) $-0 = 0$.

b) $1^{-1} = 1$.

- c) Zero não admite recíproco.
- d) Se $a \neq 0$, então $b/a = b \cdot a^{-1}$.
- e) Se $a \neq 0$, então $(a^{-1})^{-1} = a$.
- f) $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.
- g) $(a/b) + (c/d) = (ad + bc)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$
- h) $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
- i) $-(a - b) = -a + b$.
- j) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Ex. 1.2 — Seja $\mathbb{Q}(i)$, cujos elementos são pares ordenados $z = (x, y)$ de números racionais, pode ser descrito como $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, quando visto como conjunto. As operações neste corpo são definidas da seguinte forma: a soma de dois elementos $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e o produto $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', x'y + xy')$. O elemento neutro da adição é $(0, 0)$ e o neutro da multiplicação é $(1, 0)$. Mostre que $\mathbb{Q}(i)$ é um corpo.

1.3 Axiomas de ordem

Além das operações de soma e produto, os números reais possuem uma ordem compatível com essas operações. Introduziremos essa ordem por meio de um subconjunto de elementos positivos. A partir dele, definiremos as relações $<$, $>$, $\leq$ e $\geq$.

1.19 Definição. Um **corpo ordenado** é um corpo $\mathbb{K}$ munido de um subconjunto não vazio $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$, cujos elementos são chamados positivos, satisfazendo os três axiomas de ordem a seguir:

Axioma 10 Compatibilidade com a soma e o produto Se x e y pertencem a $\mathbb{K}^+$ então $x + y$ e xy também pertencem.

Axioma 11 Tricotomia para todo $x \neq 0$, ou $x \in \mathbb{K}^+$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$, mas não ambos.

Axioma 12 $0 \notin \mathbb{K}^+$.

1.20 Exemplo. O conjunto $\mathbb{Q}$, com as operações usuais, é um corpo ordenado. Nesse caso, podemos tomar

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, pq > 0 \right\}.$$

Isto significa que um racional é positivo quando pode ser escrito como quociente de dois inteiros de mesmo sinal.

1.21 Exemplo. O corpo $\mathbb{Q}(t)$ pode ser ordenado, definindo uma fração $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ como positiva quando o coeficiente do termo de maior grau no polinômio $p(t)q(t)$ for positivo. Essa regra atribui a todo elemento não nulo exatamente um dos dois sinais. Resta verificar a compatibilidade com as operações. Se $r = \frac{p}{q}$ e $r' = \frac{p'}{q'}$ são positivas, os coeficientes dos termos de maior grau em pq e $p'q'$ são ambos positivos.

Para a soma, escrevendo

$$r + r' = \frac{pq' + p'q}{qq'},$$

o produto do numerador pelo denominador é

$$(pq' + p'q)qq' = pq(q')^2 + p'q'q^2.$$

O termo de maior grau tem coeficiente positivo, pois os termos dominantes das duas parcelas têm coeficientes positivos. Assim, a soma de duas frações positivas é positiva. A compatibilidade com o produto segue de modo imediato pela multiplicação dos termos dominantes.

1.22 Exemplo. O corpo $\mathbb{Z}_2$ não admite ordem compatível com suas operações. De fato, em qualquer corpo ordenado, temos $1 > 0$, e portanto $1 + 1 > 0$. Em $\mathbb{Z}_2$, porém, vale $1 + 1 = 0$, contradição.

O corpo $\mathbb{Q}(i)$ também não pode ser ordenado. Como $i^2 = -1$, uma ordem compatível faria de -1 um quadrado. Mas, em um corpo ordenado, todo quadrado de elemento não nulo é positivo, enquanto $-1 < 0$.

1.23 Definição. Definimos as relações $<, >, \leq$ e $\geq$ por

$$\begin{aligned} x < y &\iff y - x \in \mathbb{K}^+, \\ y > x &\iff x < y, \\ x \leq y &\iff x < y \text{ ou } x = y, \\ y \geq x &\iff x \leq y. \end{aligned}$$

Assim temos $x > 0$ se e só se x é positivo. Se $x < 0$, dizemos que x é negativo; se $x \geq 0$ dizemos que x é não negativo. Um par de desigualdades simultâneas tais como $x < y, y < z$ escreve-se frequentemente de forma mais abreviada $x < y < z$; interpretações semelhantes são dadas às desigualdades compostas $x \leq y < z, x < y \leq z, x \leq y \leq z$.

As regras usuais para manipular desigualdades seguem desses axiomas. Registramos a seguir as que serão usadas com mais frequência.

1.24 Teorema.

1. **Propriedade tricotômica.** Para quaisquer a, b em um corpo ordenado, vale uma e apenas uma das três relações $a < b, b < a$ ou $a = b$.
2. **Propriedade transitiva.** Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.
3. Se $a < b$ então $a + c < b + c$.
4. Se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.
5. Se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$.
6. $1 > 0$.

7. Se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.
8. Se $a < b$ então $-a > -b$. Em particular, se $a < 0$, então $-a > 0$.
9. Se $ab > 0$, então a e b são ambos positivos, ou ambos negativos.
10. Se $a < c$ e $b < d$, então $a + b < c + d$.

Demonstração. Provaremos os pontos que exigem algum cuidado; os demais seguem diretamente das definições.

Para a tricotomia, aplique o axioma de ordem a $x = b - a$. Se $x = 0$, então $a = b$. Se $x > 0$, então $a < b$. Se $-x > 0$, então $b < a$. As alternativas são mutuamente exclusivas pelo axioma de tricotomia.

Se $a < b$ e $b < c$, então $b - a > 0$ e $c - b > 0$. Como a soma de positivos é positiva,

$$c - a = (c - b) + (b - a) > 0,$$

logo $a < c$.

Se $a < b$, então $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$, e portanto $a + c < b + c$. Se, além disso, $c > 0$, então

$$bc - ac = (b - a)c > 0,$$

de onde $ac < bc$.

Se $a \neq 0$, então, pela tricotomia, $a > 0$ ou $-a > 0$. No primeiro caso, $a^2 > 0$. No segundo, $(-a)^2 > 0$, e como $(-a)^2 = a^2$, novamente $a^2 > 0$. Em particular, tomando $a = 1$, obtemos $1 > 0$.

Se $a < b$, então $b - a > 0$. Como

$$(-a) - (-b) = b - a,$$

segue que $-b < -a$, isto é, $-a > -b$. Em particular, se $a < 0$, então $-a > 0$.

Se $a < b$ e $c < 0$, então $-c > 0$. Pelo caso já provado para multiplicação por número positivo,

$$a(-c) < b(-c).$$

Aplicando a propriedade anterior aos dois membros, obtemos $ac > bc$.

Se $ab > 0$, então $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Pela tricotomia, cada um deles é positivo ou negativo. Se tivessem sinais opostos, o produto seria negativo, contradizendo $ab > 0$. Portanto, ambos são positivos ou ambos são negativos.

Por fim, se $a < c$ e $b < d$, então $a + b < c + b$ e $c + b < c + d$. Pela transitividade, $a + b < c + d$. $\square$

Poderíamos também ter assumido no lugar dos axiomas 10, 11 e 12 os seguintes axiomas de ordem total:

Axioma 10' Dados quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$, tem-se

$$(a) \ a \leq a \quad (\text{reflexiva})$$

- (b) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica)
- (c) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva)
- (d) Necessariamente, é $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ordem total)

Axioma 11' Compatibilidade com a soma

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

Axioma 12' Compatibilidade com a multiplicação

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}, a \leq b \text{ e } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$$

Ex. 1.3 — Mostre que num corpo ordenado valem as seguintes afirmações:

- a) Não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$.
- b) a soma de dois números negativos é um número negativo.
- c) Se $a > 0$, então $1/a > 0$, se $a < 0$, então $1/a < 0$.
- d) Se $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
- e) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.
- f) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, e $a = c$, então $b = c$.
- g) Para números reais a e b quaisquer tem-se $a^2 + b^2 \geq 0$. Se a e b não são ambos 0, então $a^2 + b^2 > 0$.
- h) Não existe nenhum número real a tal que $x \leq a$ para todo o real x .
- i) Se x satisfaz $0 \leq x < h$ para todo o número real positivo h , então $x = 0$.

* **Ex. 1.4** — Prove que, em um corpo, os axiomas de ordem formulados em termos de positividade e os axiomas de ordem total compatível com soma e produto são equivalentes.

1.4 Números naturais, inteiros e racionais

Dentro de um corpo ordenado $\mathbb{K}$, podemos reconhecer naturalmente os subconjuntos que desempenham o papel dos números naturais, inteiros e racionais.

Dentro de um corpo ordenado, os naturais são obtidos a partir de 1 por sucessivas adições de 1. A noção de conjunto indutivo formaliza esse procedimento.

1.25 Definição (Conjunto Indutivo). Um subconjunto de um corpo ordenado é denominado **conjunto indutivo** se satisfizer as seguintes propriedades:

1. O número 1 pertence ao conjunto.
2. Se x pertence ao conjunto, então $x + 1$ também pertence ao conjunto.

Por exemplo, $\mathbb{K}$ é um conjunto indutivo. Igualmente o é o conjunto $\mathbb{K}^+$. Podemos agora definir os números naturais como aqueles números que pertencem a todo o conjunto indutivo.

1.26 Definição (Números naturais). Um elemento do corpo ordenado é chamado de **natural** se pertence a todo subconjunto indutivo.

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais, isto é, a interseção de todos os subconjuntos indutivos do corpo. Essa interseção é indutiva: como cada conjunto indutivo contém 1, também $1 \in \mathbb{N}$; e, se $x \in \mathbb{N}$, então x pertence a todo conjunto indutivo, logo $x + 1$ pertence a cada um deles e, portanto, a $\mathbb{N}$. Como todos os elementos de $\mathbb{N}$ pertencem a qualquer conjunto indutivo, chamamos $\mathbb{N}$ de o menor conjunto indutivo. Essa característica de $\mathbb{N}$ fundamenta logicamente um tipo de raciocínio conhecido como demonstração por indução.

Os opostos dos números naturais são chamados de inteiros negativos. Os números naturais, juntamente com os inteiros negativos e o zero, formam o conjunto $\mathbb{Z}$, que é simplesmente denominado **conjunto dos números inteiros**.

1.27 Teorema. A soma, a diferença e o produto de dois inteiros são inteiros.

Demonstração. Primeiro, $\mathbb{N}$ é fechado por soma. Fixado $m \in \mathbb{N}$, temos $m + 1 \in \mathbb{N}$; se $m + n \in \mathbb{N}$, então

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}.$$

A indução fornece $m + n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Do mesmo modo, usando a distributividade e o fechamento pela soma,

$$m \cdot 1 = m, \quad m(n + 1) = mn + m,$$

e portanto $\mathbb{N}$ é fechado por produto. Como todo inteiro é natural, zero ou oposto de um natural, as propriedades para soma, diferença e produto em $\mathbb{Z}$ seguem separando os sinais. $\square$

O quociente de dois inteiros, em contraste, não precisa ser inteiro: por exemplo, $1/2 \notin \mathbb{Z}$. Essa falha de fechamento conduz naturalmente aos números racionais.

O quociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$) define os **números racionais**. O conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, contém $\mathbb{Z}$ como subconjunto.

Pode-se verificar que $\mathbb{Q}$ verifica todos os axiomas de corpo e de ordem. Por essa razão dizemos que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado. Os números reais que não pertencem a $\mathbb{Q}$ são chamados de **irracionais**.

Ex. 1.5 — Mostre que $\mathbb{Q}$ é o menor corpo contido em $\mathbb{R}$. Ou seja, para todo corpo $K \subset \mathbb{R}$, tem-se $\mathbb{Q} \subset K$.

1.5 Indução matemática

A indução matemática é um método de demonstração usado para provar afirmações parametrizadas pelos números naturais. Sua forma básica consiste em verificar um caso inicial e, em seguida, provar que a validade da afirmação em um natural k implica sua validade no natural seguinte $k + 1$.

Estrutura da prova por indução matemática Para provar que uma propriedade $P(n)$ vale para todo $n \geq n_0$, procede-se em dois passos:

1. **Caso inicial:** prova-se que $P(n_0)$ é verdadeira.
2. **Passo indutivo:** assumindo que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq n_0$, prova-se que $P(k + 1)$ também é verdadeira.

1.28 Exemplo. Considere a propriedade

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para $n = 1$, a igualdade é verdadeira. Suponha agora que ela valha para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é,

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Então

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Portanto, $P(k)$ implica $P(k+1)$. Pelo princípio de indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

A justificativa lógica deste método de demonstração é dada pelo seguinte teorema sobre números inteiros:

1.29 Teorema (Princípio da indução matemática). Seja S um conjunto de números naturais que possui as seguintes propriedades:

1. O número 1 pertence ao conjunto S .
2. Se o número k pertence a S , então $k + 1$ também pertence a S .

Logo, todo natural pertence ao conjunto S .

Demonstração. As propriedades 1 e 2 mostram que S é um conjunto indutivo. Como os números naturais foram definidos como os elementos que pertencem a todo conjunto indutivo, segue que todo natural pertence a S . $\square$

Ao demonstrarmos que uma afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$ por indução matemática, estamos aplicando o Teorema 1.29 ao conjunto S de todos os inteiros

para os quais a afirmação é verdadeira. Se queremos provar que $a(n)$ é verdadeira apenas para $n \geq n_1$, aplicamos o Teorema 1.29 ao conjunto dos números n para os quais $a(n + n_1 - 1)$ é verdadeira.

1.30 Exemplo. Mostremos, por indução, que $2^n \geq 1 + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, a desigualdade é $2 \geq 2$, portanto é verdadeira. Suponha agora que $2^k \geq 1 + k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2(1 + k) = 2 + 2k \geq 2 + k = 1 + (k + 1).$$

Pelo princípio da indução, a desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.31 Exemplo (Desigualdade de Bernoulli). Em todo corpo ordenado $\mathbb{K}$, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, então

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Para $n = 1$, a afirmação é imediata. Suponha que a desigualdade valha para algum n . Como $1 + x \geq 0$, podemos multiplicar ambos os membros da hipótese indutiva por $1 + x$, obtendo

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Pelo princípio de indução, a desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.32 Definição. Dizemos que $m \in X$ é o **máximo** de $X \subset \mathbb{K}$ se $m \geq x$ para todo $x \in X$. O máximo, quando existe, é único e é denotado por $\max X$.

1.33 Teorema. Todo subconjunto finito não vazio de um corpo ordenado possui máximo.

Demonstração. Faremos indução no número de elementos. Se o conjunto possui um único elemento, esse elemento é seu máximo.

Suponha que todo conjunto com k elementos possua máximo, e seja Y um conjunto com $k + 1$ elementos. Escolha $y_0 \in Y$ e considere $Y' = Y \setminus \{y_0\}$. Pela hipótese de indução, Y' possui máximo, digamos m . Se $y_0 \leq m$, então m é o máximo de Y . Se $y_0 > m$, então y_0 é o máximo de Y . Logo todo conjunto com $k + 1$ elementos possui máximo, e o resultado segue por indução. $\square$

1.34 Teorema (Princípio da Boa Ordem). Todo conjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.

Demonstração. Provaremos a contrapositiva: se $T \subseteq \mathbb{N}$ não possui menor elemento, então $T = \emptyset$.

Considere o conjunto $S = \mathbb{N} \setminus T$. Mostraremos, por indução, que $S = \mathbb{N}$.

Como T não possui menor elemento, necessariamente $1 \notin T$. Logo, $1 \in S$.

Para usar apenas a indução já estabelecida, considere

$$U = \{n \in \mathbb{N} : 1, 2, \dots, n \notin T\}.$$

Temos $1 \in U$. Se $n \in U$ e $n + 1 \in T$, então $n + 1$ seria o menor elemento de T , contradição; logo $n + 1 \in U$. Assim, pelo princípio da indução, $U = \mathbb{N}$. Portanto, nenhum natural pertence a T , isto é, $S = \mathbb{N}$ e $T = \emptyset$. $\square$

1.6 Funções definidas recursivamente

A indução matemática também fundamenta definições recursivas. Nesse procedimento, fixa-se um valor inicial e, a partir dele, define-se cada termo seguinte em função dos termos anteriores. Funções definidas em $\mathbb{N}$ dessa forma são exemplos fundamentais de seqüências.

1.35 Definição. Uma **seqüência real** é uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. A imagem de $n \in \mathbb{N}$ pela seqüência s será denotada por s_n , isto é, $s_n := s(n)$.

Começamos com a seqüência definida por

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Os primeiros termos são

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},$$

e, em geral, a_n é obtido por n radicais encaixados. Esse exemplo ilustra uma definição recursiva simples, na qual cada termo é obtido a partir do anterior.

Seqüência de Fibonacci

A seqüência de Fibonacci é definida recursivamente por

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Seus primeiros termos são

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Historicamente, essa seqüência aparece no *Liber Abaci*, de Fibonacci, em um modelo idealizado de crescimento de uma população de coelhos: cada casal fértil gera mensalmente um novo casal, e cada casal novo torna-se fértil após dois meses.

Fatorial

A função fatorial é definida, para $n \in \mathbb{N}$, pela regra informal

$$n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Recursivamente, isso corresponde às condições $1! = 1$ e $n! = n(n-1)!$, para $n > 1$.

A existência e a unicidade das funções definidas a seguir decorrem do Princípio da Recursão, enunciado e demonstrado logo adiante.

1.36 Definição. Definimos a função fatorial $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como a única função que satisfaz $f(1) = 1$ e $f(n) = n f(n-1)$ para todo $n > 1$.

Somatório

A notação de somatório permite escrever de forma compacta somas finitas. Por exemplo,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

De modo geral, se $a_1, \dots, a_n$ são números reais, escrevemos

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \leftarrow \text{termo}$$

Figura 1.1

A notação $\sum_{i=1}^n a_i$ representa a soma dos termos a_i para i variando de 1 até n .

De modo análogo ao fatorial, o somatório pode ser definido recursivamente.

1.37 Definição. Dada uma sequência (a_k) de números reais, definimos $\sum_{k=1}^n a_k$ pelas condições

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k, \quad n > 1.$$

Princípio da Recursão

As construções anteriores são justificadas pelo Teorema da Recursão, que nos assegura a existência de funções definidas recursivamente.

1.38 Teorema (Princípio da Recursão). Seja A um conjunto não vazio, seja $a \in A$ e seja $g : \mathbb{N} \times A \rightarrow A$ uma função. Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que

1. $f(1) = a$;
2. $f(n+1) = g(n, f(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A unicidade segue diretamente por indução. De fato, se f e h satisfazem as duas condições, então $f(1) = a = h(1)$. Supondo $f(n) = h(n)$, obtemos

$$f(n+1) = g(n, f(n)) = g(n, h(n)) = h(n+1).$$

Logo $f(n) = h(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para a existência, consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função finita

$$f_n : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$$

satisfazendo $f_n(1) = a$ e $f_n(k+1) = g(k, f_n(k))$, sempre que $1 \leq k < n$. A existência de tais funções finitas é obtida por indução: para $n = 1$, basta tomar $f_1(1) = a$; se f_n está construída, definimos f_{n+1} estendendo f_n e pondo

$$f_{n+1}(n+1) = g(n, f_n(n)).$$

A unicidade finita, também por indução, mostra que essas funções são compatíveis: se $m \geq n$, então f_m restrita a $\{1, \dots, n\}$ coincide com f_n . Assim, podemos definir $f(n) = f_n(n)$. A compatibilidade garante que essa definição é independente da etapa finita usada, e a função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ assim obtida satisfaz as duas condições desejadas. $\square$

Vamos usar o princípio da recursão para justificar a existência da função fatorial. Tomamos $A = \mathbb{N}$, $a = 1$ e definimos

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g(n, u) = (n+1)u.$$

Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(1) = 1 \quad \text{e} \quad f(n+1) = (n+1)f(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa função é precisamente a função fatorial.

Ex. 1.6 — Prove por indução as seguintes propriedades do somatório

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \quad (\text{propriedade telescópica})$$

Ex. 1.7 — Prove por indução a seguinte generalização da desigualdade triangular

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Ex. 1.8 — Definimos o produtório de a_k de 1 até n como sendo a função $\prod_{k=1}^n a_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\prod_{k=1}^1 a_k = a_1$.
2. $\prod_{k=1}^n a_k = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k$ para todo n maior que 1.

Prove por indução as seguintes propriedades do produtório

a) $\prod_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)$

b) $\prod_{k=1}^n (ca_k) = c^n \prod_{k=1}^n a_k$

c) Se $a_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n+1$, prove que $\prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$.

Ex. 1.9 — Prove que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 1.10 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 1.11 — Prove que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 1.12 — Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Ex. 1.13 — Prove que $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, quando $r \neq 1$.

Ex. 1.14 — Prove a seguinte fórmula para a soma de uma progressão geométrica

$$\sum_{k=1}^n px^{k-1} = \frac{p - px^n}{1 - x}$$

1.7 Axioma de completude

Os axiomas de corpo ordenado ainda não caracterizam os reais. Eles também são satisfeitos por $\mathbb{Q}$, embora $\mathbb{Q}$ tenha lacunas. O princípio que separa $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ é a completude.

A necessidade da completude aparece já em problemas elementares. Por exemplo, a equação $x^2 = 2$ não possui solução racional, embora seja natural esperar uma solução real positiva. Assim, os axiomas de corpo ordenado não bastam para garantir a existência de todos os números exigidos pela análise.

A ausência de $\sqrt{2}$ em $\mathbb{Q}$ é o exemplo elementar dessa lacuna.

1.39 Proposição. Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$. Escreva $q = n/m$, com $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, e n e m primos entre si. Então $n^2 = 2m^2$. Logo n^2 é par e, portanto, n é par; escreva $n = 2k$. Substituindo, obtemos $4k^2 = 2m^2$, isto é, $m^2 = 2k^2$. Assim, m também é par. Portanto, 2 divide simultaneamente n e m , contradizendo a escolha da fração em termos primos entre si. Logo não existe tal racional. $\square$

Assim, mesmo uma equação simples como $x^2 = 2$ força a passagem para além dos racionais. O axioma de completude formaliza essa passagem.

1.7.1 Supremos e ínfimos

Antes de enunciar o axioma de completude, convém introduzir a linguagem de cotas, supremos e ínfimos.

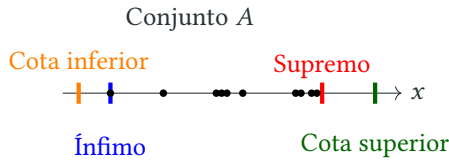
Seja $A \subset \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio. Dizemos que A é **limitado superiormente** se existe $M \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in A$. Nesse caso, M é chamado de **majorante** ou **cota superior** de A .

De modo análogo, dizemos que A é **limitado inferiormente** se existe $m \in \mathbb{K}$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in A$. Nesse caso, m é chamado de **minorante** ou **cota inferior** de A .

1.40 Exemplos. Considere os conjuntos $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ e

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 3\}.$$

1. O conjunto A é limitado inferiormente, mas não superiormente. Qualquer número não positivo é uma cota inferior de A .
2. O conjunto B não é limitado superiormente nem inferiormente.
3. O conjunto C é limitado inferiormente e superiormente. Todo número menor ou igual a 1 é uma cota inferior de C , e todo número maior ou igual a 3 é uma cota superior de C .



1.41 Definição. Um número $s \in \mathbb{K}$ é chamado de **supremo** de A se satisfaz as seguintes condições:

- S1** $x \leq s$ para todo $x \in A$;
- S2** se M é uma cota superior de A , então $s \leq M$.

Assim, o supremo de A é a menor das cotas superiores de A .

1.42 Definição. Um número $r \in \mathbb{K}$ é chamado de **ínfimo** de A se satisfaz as seguintes condições:

- I1** $r \leq x$ para todo $x \in A$;
- I2** se m é uma cota inferior de A , então $m \leq r$.

Assim, o ínfimo de A é a maior das cotas inferiores de A .

1.43 Teorema. Tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto, quando existem, são únicos.

Demonstração. Sejam s_1 e s_2 dois supremos de A . Como s_2 é cota superior de A e s_1 é a menor das cotas superiores, temos $s_1 \leq s_2$. Analogamente, $s_2 \leq s_1$. Logo $s_1 = s_2$. A demonstração para o ínfimo é análoga. $\square$

O teorema anterior justifica a notação $\sup A$ para o supremo de A e $\inf A$ para o ínfimo de A .

Nos exemplos acima, temos $\inf A = 1$, $\inf C = 1$ e $\sup C = 3$. O conjunto $A = \mathbb{N}$ não possui supremo, e $B = \mathbb{Z}$ não possui nem supremo nem ínfimo. Assim, há casos em que o supremo ou o ínfimo não existe. O axioma de completude afirma que, nos reais, isso só ocorre quando falta uma limitação adequada.

1.44 Exemplo. Se $X \subset \mathbb{K}$ possui máximo, então esse máximo é o supremo de X . Reciprocamente, se $\sup X$ pertence a X , então $\sup X = \max X$. De modo análogo, se X possui mínimo, então esse mínimo é $\inf X$, e, se $\inf X \in X$, então $\inf X = \min X$.

Por exemplo, se $X = (-\infty, b]$, então $\sup X = b$; se $Y = [a, +\infty)$, então $\inf Y = a$.

1.45 Exemplo. Dados $a < b$ em $\mathbb{K}$, seja $I = (a, b)$. Temos $\inf I = a$ e $\sup I = b$. De fato, a é uma cota inferior de I . Se $c > a$, então c não pode ser cota inferior de I : se $c \geq b$, isso é imediato; se $a < c < b$, então $(a + c)/2 \in I$ e $(a + c)/2 < c$. Portanto, $a = \inf I$. A prova de que $b = \sup I$ é análoga.

Axioma de completude.

Axioma 13 Todo subconjunto de $\mathbb{K}$, não vazio e limitado superiormente, possui supremo.

Embora o axioma seja formulado em termos de supremo, ele é equivalente à seguinte propriedade:

Axioma 13' Todo subconjunto de $\mathbb{K}$, não vazio e limitado inferiormente, possui ínfimo.

De fato, suponha a propriedade do supremo e seja $A \neq \emptyset$ limitado inferiormente. Então $-A = \{-a : a \in A\}$ é não vazio e limitado superiormente. Se $s = \sup(-A)$, então $-s$ é cota inferior de A ; e toda cota inferior m de A satisfaz $-m \geq s$, logo $m \leq -s$. Portanto, $-s = \inf A$. A recíproca segue aplicando o mesmo argumento a $-A$.

Um corpo que satisfaz os axiomas de corpo, os axiomas de ordem e o axioma de completude é chamado de **corpo ordenado completo**.

Dessa forma, os axiomas anteriores caracterizam os números reais a menos de isomorfismo de corpos ordenados. A existência e a unicidade nesse sentido serão demonstradas no Teorema 3.26, no Capítulo 3.

A partir deste ponto, passamos a extrair as primeiras consequências do axioma de completude. A mais imediata delas é a propriedade arquimediana, que será deduzida na próxima seção a partir da existência de supremos.

1.8 Propriedade arquimediana

A primeira consequência decisiva do axioma do supremo é a propriedade arquimediana. Ela expressa que, em $\mathbb{R}$, não existem elementos infinitamente grandes nem infinitesimais não nulos.

1.46 Teorema. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Pelo axioma de completude, existe $b = \sup \mathbb{N}$. Como $b - 1 < b$, o número $b - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > b - 1$. Então $n + 1 > b$, contradizendo o fato de que b é cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

1.47 Teorema. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demonstração. Caso contrário, x seria uma cota superior de $\mathbb{N}$, contradizendo o Teorema 1.46. $\square$

1.48 Teorema (Propriedade arquimediana). Se $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 1.47 ao número y/x . $\square$

1.49 Definição. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é dito **arquimediano** se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, com $x > 0$ e $y > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

O Teorema 1.48 mostra que $\mathbb{R}$ é arquimediano. Geometricamente, isso significa que qualquer segmento, por maior que seja, pode ser ultrapassado por um número finito de cópias de um segmento positivo fixado.

1.50 Proposição (Parte inteira). Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m \leq x < m + 1.$$

Esse inteiro é denotado por $\lfloor x \rfloor$ e chamado de **parte inteira** de x .

Demonstração. Pela propriedade arquimediana, escolha $N \in \mathbb{N}$ com $N > |x| + 1$. O conjunto finito

$$E = \{k \in \mathbb{Z} : -N \leq k \leq N, k \leq x\}$$

é não vazio, pois $-N < x$, e possui máximo; chame-o de m . Então $m \leq x$. Se $x \geq m + 1$, o inteiro $m + 1$ também pertenceria a E , contradizendo a maximalidade de m . Logo $x < m + 1$.

Se m' também satisfaz $m' \leq x < m' + 1$, então $m < m'$ implicaria $m + 1 \leq m' \leq x$, contradição; trocando os papéis de m e m' , obtemos $m = m'$. $\square$

1.51 Teorema. Se três números reais a, x, y satisfazem

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x = a$.

Demonstração. Se $x > a$, então $x - a > 0$. Pela propriedade arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(x - a) > y$, isto é, $x > a + y/n$, contradizendo a hipótese. Logo $x \leq a$. Como também $a \leq x$, concluímos que $x = a$. $\square$

Mais adiante, provaremos que existe apenas um corpo ordenado completo, no sentido de que quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos entre si.¹

¹Isto significa que, embora possam ser apresentados por construções diferentes, existe uma correspondência estrutural entre eles que preserva soma, produto e ordem.

Ex. 1.15 — Prove que, num corpo ordenado $\mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- a. $\mathbb{K}$ é arquimediano;
- b. $\mathbb{Z}$ é ilimitado superior e inferiormente;
- c. $\mathbb{Q}$ é ilimitado superior e inferiormente.

Ex. 1.16 — Prove que um corpo $\mathbb{K}$ é arquimediano se e somente se zero é o ínfimo, em $\mathbb{K}$, do conjunto $\{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$.

Existência da raiz quadrada

Pela apresentação que demos ao axioma de completude, ficou claro que tal axioma não seria satisfeito pelo conjunto $\mathbb{Q}$. Mostremos que de fato isso ocorre. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \text{ e } q^2 < 2\}.$$

Note que $A \neq \emptyset$ e é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$: por exemplo, $0 \in A$ e 3 é uma cota superior de A . Se o axioma de completude fosse válido em $\mathbb{Q}$, existiria $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p = \sup A$. Se mostrássemos que esse p satisfaz $p^2 = 2$, obteríamos uma contradição com a Proposição 1.39. Portanto, A não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

Mostraremos, na verdade, uma propriedade mais geral, da qual poderemos concluir a afirmação acima. Referimo-nos à *existência da raiz quadrada de um número real positivo*:

1.52 Proposição. Seja $b \in \mathbb{R}$ um número positivo. Então existe um único número real positivo a tal que $a^2 = b$. O número a é chamado de *raiz quadrada* de b e é denotado por $\sqrt{b}$.

Demonstração. Considere

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq b\}.$$

Como $b > 0$, o número $t = b/(b+1)$ satisfaz $0 < t < 1$ e $t < b$. Logo $t^2 < t < b$, de modo que $t \in A$. Além disso, $b+1$ é cota superior de A : se $x \geq 0$ e $x > b+1$, então $x^2 > x > b$, logo $x \notin A$. Pela completude, existe

$$a = \sup A,$$

e $a \geq t > 0$.

Mostremos que $a^2 = b$. Suponha primeiro que $a^2 < b$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$\frac{2a+1}{n} < b - a^2.$$

Então, com $c = a + 1/n$, temos

$$c^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a+1}{n} < b.$$

Logo $c \in A$, mas $c > a$, contrariando o fato de a ser cota superior de A .

Suponha agora que $a^2 > b$. Escolha $n \in \mathbb{N}$ tão grande que $1/n < a$ e

$$\frac{2a}{n} < a^2 - b.$$

Pondo $c = a - 1/n$, temos $c > 0$ e

$$c^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} > b.$$

Como $c < a = \sup A$, o número c não é cota superior de A ; portanto, diretamente pela definição de supremo, existe $x \in A$ tal que $c < x \leq a$. Em particular, $x > c > 0$. Da desigualdade $x > c$ e da positividade de ambos, obtemos $x^2 > c^2 > b$, contradizendo $x \in A$. Portanto, não pode ocorrer $a^2 > b$.

Concluimos que $a^2 = b$. A unicidade segue da ordem: se $u, v > 0$ e $u^2 = v^2 = b$, então, caso $u < v$, teríamos $u^2 < v^2$, contradição; analogamente, não pode ocorrer $v < u$. Logo $u = v$. $\square$

Definimos também $\sqrt{0} = 0$. Assim, para todo $b \geq 0$, $\sqrt{b}$ denota o único número não negativo cujo quadrado é b .

Voltando à questão formulada antes da Proposição 1.52, conclui-se que, se $p \in \mathbb{Q}$ fosse o supremo de A em $\mathbb{Q}$, então teríamos $p^2 = 2$. Isso contradiz a Proposição 1.39. Assim, o conjunto dos racionais não satisfaz o axioma de completude.

1.9 Propriedades do supremo e do ínfimo

1.53 Teorema. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio.

1. Se A possui supremo, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que

$$x > \sup A - \varepsilon.$$

2. Se A possui ínfimo, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que

$$x < \inf A + \varepsilon.$$

Demonstração. Provemos o primeiro item. Se $x \leq \sup A - \varepsilon$ para todo $x \in A$, então $\sup A - \varepsilon$ seria uma cota superior de A menor que $\sup A$, contradição. Logo existe $x \in A$ tal que $x > \sup A - \varepsilon$. A demonstração do segundo item é análoga. $\square$

1.54 Teorema (Propriedade aditiva). Dados dois subconjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}$, defina

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

1. Se A e B possuem supremo, então $A + B$ possui supremo e

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

2. Se A e B possuem ínfimo, então $A + B$ possui ínfimo e

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

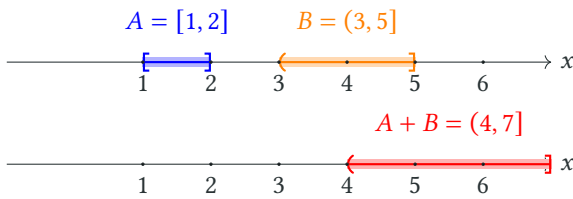


Figura 1.2

Ilustração da soma de dois conjuntos.

Demonstração. Provemos o item 1. Seja $C = A + B$. Se $z \in C$, então $z = x + y$, com $x \in A$ e $y \in B$. Assim $z \leq \sup A + \sup B$, de modo que $\sup A + \sup B$ é cota superior de C . Logo $\sup C \leq \sup A + \sup B$.

Para a desigualdade oposta, tome $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.53, existem $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tais que

$$x_n > \sup A - \frac{1}{n}, \quad y_n > \sup B - \frac{1}{n}.$$

Então $x_n + y_n > \sup A + \sup B - 2/n$. Como $x_n + y_n \in C$, segue que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.51, concluímos que $\sup C = \sup A + \sup B$. A prova para ínfimos é análoga. $\square$

1.55 Teorema. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios. Suponha que $x \leq y$ para todos $x \in A$ e $y \in B$. Então A possui supremo, B possui ínfimo e

$$\sup A \leq \inf B.$$

Demonstração. Cada elemento de B é uma cota superior de A . Logo A é limitado superiormente e possui supremo. Além disso, $\sup A \leq y$ para todo $y \in B$; portanto, $\sup A$ é uma cota inferior de B . Assim, B possui ínfimo e $\sup A \leq \inf B$. $\square$

1.56 Proposição (Propriedades do supremo e do ínfimo). Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos não vazios e limitados.

1. $\inf(-X) = -\sup X$.
2. Se $Y \subseteq X$, então $\sup Y \leq \sup X$ e $\inf Y \geq \inf X$.
3. O conjunto $X \cap Y$ é limitado. Se $X \cap Y \neq \emptyset$, então

$$\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$$

e

$$\inf(X \cap Y) \geq \max\{\inf X, \inf Y\}.$$

4. O conjunto $X \cup Y$ é limitado, com

$$\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}, \quad \inf(X \cup Y) = \min\{\inf X, \inf Y\}.$$

5. Se $\lambda > 0$, então

$$\sup(\lambda X) = \lambda \sup X, \quad \inf(\lambda X) = \lambda \inf X.$$

Se $\lambda < 0$, então

$$\sup(\lambda X) = \lambda \inf X, \quad \inf(\lambda X) = \lambda \sup X.$$

6. O conjunto $X + Y$ é limitado e

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y, \quad \inf(X + Y) = \inf X + \inf Y.$$

7. Se todos os elementos de X e Y são não negativos, então $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ é limitado e

$$\sup(XY) = \sup X \sup Y, \quad \inf(XY) = \inf X \inf Y.$$

8. Se $\inf X > 0$, então

$$\frac{1}{X} = \left\{ \frac{1}{x} : x \in X \right\}$$

é limitado, com

$$\sup\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\inf X}, \quad \inf\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\sup X}.$$

Demonstração. Provaremos alguns itens representativos; os demais seguem de modo semelhante.

Se $Y \subseteq X$, toda cota superior de X é também cota superior de Y . Assim, $\sup Y \leq \sup X$. Analogamente, toda cota inferior de X é também cota inferior de Y , e portanto $\inf Y \geq \inf X$.

Se $X \cap Y \neq \emptyset$, então $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$. Aplicando o item anterior, obtemos

$$\sup(X \cap Y) \leq \sup X, \quad \sup(X \cap Y) \leq \sup Y,$$

e portanto $\sup(X \cap Y) \leq \min\{\sup X, \sup Y\}$. A desigualdade para o ínfimo é análoga.

Por fim, suponha que $\inf X > 0$. Para todo $x \in X$, temos $x \geq \inf X > 0$, logo

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf X}.$$

Portanto $1/X$ é limitado superiormente. A igualdade para o supremo segue da caracterização aproximativa do ínfimo: para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ suficientemente próximo de $\inf X$ de modo que $1/x$ fica arbitrariamente próximo de $1/\inf X$. A igualdade para o ínfimo é análoga. $\square$

1.57 Notação (Supremo e ínfimo de uma função). Se $X \neq \emptyset$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, definimos

$$\sup f := \sup f(X), \quad \inf f := \inf f(X).$$

Assim, $\sup f$ e $\inf f$ são, respectivamente, o supremo e o ínfimo do conjunto de valores assumidos por f .

Ex. 1.17 — Seja $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Prove que $\inf X = 0$.

Ex. 1.18 —

- a) Se $x < y$, prove que existe pelo menos um número real z tal que $x < z < y$.
- b) Se $x \in \mathbb{R}$, prove que existem inteiros m e n tais que $m < x < n$.
- c) Se $x > 0$, prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < x$.

Ex. 1.19 — Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não vazio, limitado superiormente, e $c \in \mathbb{R}$. Prove que $c \leq \sup X$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $c - \varepsilon < x$. Enuncie e demonstre o resultado análogo para o ínfimo.

Ex. 1.20 — Seja $I = [0, 1)$. Prove que $\sup I = 1$.

Ex. 1.21 — Sejam $A \subset B$ conjuntos não vazios e limitados de números reais. Prove que

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Ex. 1.22 — Dado $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente, seja $-A = \{-x : x \in A\}$. Prove que $-A$ é limitado superiormente e que $\sup(-A) = -\inf A$.

Ex. 1.23 — Seja $A \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $cA = \{cx : x \in A\}$. Prove que cA é limitado e que

$$\sup(cA) = c \sup A, \quad \inf(cA) = c \inf A.$$

Enuncie e demonstre o que ocorre quando $c < 0$.

Ex. 1.24 — Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas.

- Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada.
- Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$.
- Conclua que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$.
- Considerando $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, mostre que as desigualdades anteriores podem ser estritas.

Ex. 1.25 — Sejam A e B conjuntos de números reais não negativos. Defina

$$AB = \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Prove que, se A e B são limitados, então AB é limitado e

$$\sup(AB) = \sup A \sup B, \quad \inf(AB) = \inf A \inf B.$$

1.10 Valor absoluto de um número real

O valor absoluto mede a distância de um número real à origem. Formalmente, temos a seguinte definição.

1.58 Definição. O **valor absoluto** de um número real x , também chamado de **módulo** de x , é denotado por $|x|$ e dado por

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Essa definição exige atenção ao sinal da quantidade que aparece dentro do módulo. Por exemplo, $|x| = x$ apenas quando $x \geq 0$, enquanto $|x| = -x$ quando $x < 0$.

1.59 Proposição. Sejam x e y números reais quaisquer, então:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = \sqrt{x^2}$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|xy| = |x| |y|$

1.60 Teorema. Se $a \geq 0$, então

1. $|x| \leq a$ se e somente se $-a \leq x \leq a$;
2. $|x| \geq a$ se e somente se $x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Demonstração. Para o primeiro item, suponha inicialmente que $|x| \leq a$. Como sempre vale $-|x| \leq x \leq |x|$, obtemos $-a \leq x \leq a$. Reciprocamente, se $-a \leq x \leq a$, então, quando $x \geq 0$, temos $|x| = x \leq a$; quando $x < 0$, temos $|x| = -x \leq a$. Logo $|x| \leq a$.

Para o segundo item, se $|x| \geq a$, então, caso $x \geq 0$, temos $x = |x| \geq a$; caso $x < 0$, temos $-x = |x| \geq a$, isto é, $x \leq -a$. A recíproca é imediata: se $x \geq a$ ou $x \leq -a$, então $|x| \geq a$. $\square$

1.61 Teorema. Para x e y números reais arbitrários tem-se

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

1.62 Observação. Essa propriedade é conhecida como desigualdade triangular. Em sua forma geométrica, ela afirma que o comprimento de um lado de um triângulo não excede a soma dos comprimentos dos outros dois.

Demonstração. Somando as desigualdades $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

e pelo Teorema 1.60, concluímos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Se fizermos $x = a - c$ e $y = c - b$, então $x + y = a - b$ e a desigualdade triangular segue:

$$|a - b| \leq |a - c| + |b - c|.$$

$\square$

Por indução matemática, podemos generalizar a desigualdade triangular do modo seguinte:

1.63 Teorema. Para quaisquer números reais $a_1, \dots, a_n$, tem-se

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j|.$$

Demonstração. Para $n = 1$, a desigualdade é imediata. Para $n = 2$, ela é a desigualdade triangular. Suponha que o resultado seja verdadeiro para n termos. Então, para $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, temos

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} a_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n a_j + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_j \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| + |a_{n+1}|.$$

Logo,

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |a_j|.$$

O resultado segue por indução. □

1.64 Teorema. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Ex. 1.26 — Demonstre as seguintes propriedades do módulo;

a) $|-x| = |x|$

b) $|x - y| = |y - x|$

c) $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$

d) $|x \cdot y| = |x| |y|$

e) $|x^2| = x^2$

f) Se $c \geq 0$ então $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$

g) $-|x| \leq x \leq |x|$

h) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)

i) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Ex. 1.27 — Discuta se vale ou não a seguinte desigualdade (para um número real arbitrário x):

$$-x \leq |x| \leq x$$

Ex. 1.28 — (Não existência de Infinitesimais) Mostre que se $|x - a| < \varepsilon$ para todo ε então $x = a$.

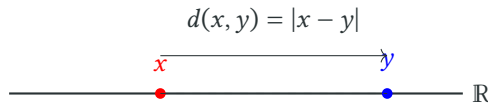
1.11 Introdução à topologia da reta

A ordem e o valor absoluto permitem agora descrever a topologia usual da reta: intervalos, vizinhanças, conjuntos abertos e fechados, fronteira, pontos de acumulação e fecho. Essa linguagem será usada no estudo de sequências e de funções reais de uma variável.²

A topologia usual da reta é descrita a partir da distância entre dois números reais x e y , dada por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

²A topologia é uma área ampla da matemática, dedicada ao estudo de propriedades preservadas por funções contínuas em contextos muito mais gerais. Aqui trataremos apenas da topologia usual da reta real.



Vista na reta real, essa distância corresponde ao comprimento do segmento cujos extremos têm abscissas x e y .

Dados $a < b$, os intervalos de extremos a e b são:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



Figura 1.3 Representação geométrica de intervalos na reta real.

A medida de um intervalo de extremos a e b é $|a - b|$, isto é, o comprimento do segmento correspondente na reta real.

Sobre notação. Alguns textos escrevem $]a, b[$ para o intervalo que aqui denotamos por (a, b) . Adotaremos apenas a notação com parênteses.

Usaremos também a notação de intervalo para semi-retas. Dado $a \in \mathbb{R}$, escrevemos

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

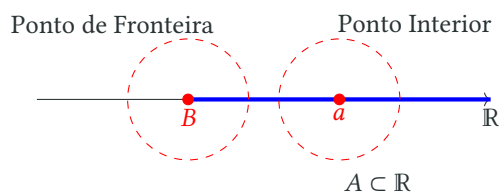
Não se usa colchete no extremo infinito, pois nem $-\infty$ nem $+\infty$ são números reais. Por simplicidade, também chamaremos essas semi-retas de intervalos.

Uma notação particularmente útil é a de intervalo centrado. Dado $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, definimos a vizinhança básica de centro a e raio ε por

$$V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Temos $x \in V_\varepsilon(a)$ se, e somente se, $|x - a| < \varepsilon$. Em geral, chamaremos $V \subseteq \mathbb{R}$ de vizinhança de a se existir $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(a) \subseteq V$. Desse modo, os intervalos $V_\varepsilon(a)$ são as vizinhanças básicas, em acordo com a definição usada depois em espaços métricos.

Dado $S \subset \mathbb{R}$, as noções de ponto interior e ponto de fronteira tornam precisa a distinção entre estar dentro de S , estar fora de S ou estar na região em que S e seu complementar se acumulam.



1.65 Definição. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$.

- Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um **ponto interior** de S se existir uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq S$.
- Se para toda vizinhança V de x , temos que $V \cap S \neq \emptyset$ e $V \cap (\mathbb{R} \setminus S) \neq \emptyset$, então x é chamado de **ponto de fronteira** de S .

O conjunto de todos os pontos interiores de S é denotado por $\text{int } S$, e o conjunto de todos os pontos de fronteira de S é denotado por $\text{fr } S$.

1.66 Proposição. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então

- $\text{fr } S = \text{fr}(S^c)$.
- Para todo ponto $x \in \mathbb{R}$ temos que x pertence a um e somente um dos seguintes conjuntos: $\text{int } S$, $\text{fr } S$ ou $\text{int}(S^c)$.

Demonstração. A condição que define um ponto de fronteira é simétrica em S e S^c , pois $(S^c)^c = S$; logo $\text{fr } S = \text{fr}(S^c)$.

Fixe $x \in \mathbb{R}$. Se alguma vizinhança de x está contida em S , então $x \in \text{int } S$. Se alguma está contida em S^c , então $x \in \text{int}(S^c)$. Se nenhuma dessas alternativas ocorre, toda vizinhança de x encontra S e S^c , e portanto $x \in \text{fr } S$. As três possibilidades são mutuamente exclusivas. $\square$

Com essa linguagem, podemos definir conjuntos abertos e fechados. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que A é **aberto** quando todo ponto $x \in A$ é centro de um intervalo contido em A . Equivalentemente, pontos suficientemente próximos de um ponto de A ainda pertencem a A .

1.67 Definição. Dizemos que A é aberto se, para todo $x \in A$, temos $x \in \text{int } A$. Equivalentemente, A é aberto se, para todo $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

Por outro lado, um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é fechado quando seu complementar em $\mathbb{R}$ é aberto.

1.68 Definição. Dizemos que $B \subset \mathbb{R}$ é fechado se $\mathbb{R} \setminus B$ é aberto.

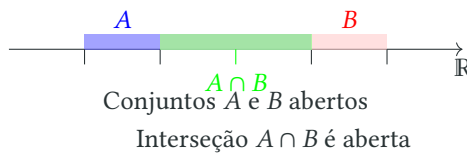
As seguintes caracterizações relacionam abertura, fechamento e fronteira:

1.69 Teorema. Seja $S \subseteq \mathbb{R}$.

1. Se $\text{fr } S \subseteq S$, então S é fechado.
2. Se $\text{fr } S \subseteq \mathbb{R} \setminus S$, então S é aberto.

Demonstração. Se $\text{fr } S \subseteq S$, nenhum ponto de S^c pertence à fronteira. Pela decomposição anterior, todo ponto de S^c pertence a $\text{int}(S^c)$; logo S^c é aberto e S é fechado.

Se $\text{fr } S \subseteq \mathbb{R} \setminus S$, nenhum ponto de S pertence à fronteira. Novamente pela decomposição anterior, todo ponto de S pertence a $\text{int } S$, e portanto S é aberto. $\square$



1.70 Teorema.

1. A união de qualquer coleção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
2. A interseção de qualquer coleção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Demonstração.

Demonstração de 1. Seja $\mathcal{A}$ uma coleção arbitrária de conjuntos abertos e seja $S = \bigcup \{U : U \in \mathcal{A}\}$. Se $x \in S$, então $x \in U$ para algum $U \in \mathcal{A}$. Como U é aberto, existe uma vizinhança V de x tal que $V \subseteq U$. Como $U \subseteq S$, temos $V \subseteq S$. Logo, x é ponto interior de S , e portanto S é aberto.

Demonstração de 2. Sejam $U_1, \dots, U_n$ conjuntos abertos e seja $T = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Se $T = \emptyset$, nada há a provar. Caso contrário, tome $x \in T$. Para cada i , como U_i é aberto, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $V_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, temos $V_\varepsilon(x) \subseteq T$. Logo T é aberto. $\square$

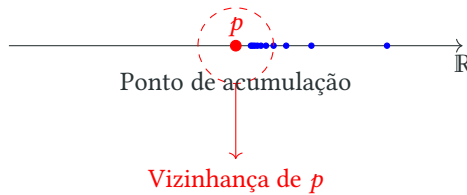
1.71 Exemplos.

1. Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x - a|$ e $|x - b|$, resulta que $(x - r, x + r) \subset (a, b)$.
2. Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x - a|$, resulta que $(x - r, x + r)$ está contido na semi-reta considerada.
3. Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado. De fato, seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que é aberto (pois é união de dois conjuntos abertos).

4. Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a]$ ou $[a, +\infty)$ é fechado, pois seus complementares são semi-retas abertas.
5. O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.
6. O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é aberto, pois $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (m, m+1)$.
7. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado pois seu complementar é aberto.
8. Um intervalo do tipo $[a, b)$ não é nem aberto, nem fechado. De fato, nenhum intervalo centrado em a está contido em $[a, b)$ (descartando que este seja aberto) e nenhum intervalo centrado em b está contido no complementar de $[a, b)$ (descartando que $[a, b)$ seja fechado).
9. De modo análogo, um intervalo do tipo $(a, b]$ não é nem aberto, nem fechado.

Os dois últimos exemplos mostram que “aberto” e “fechado” não são conceitos opostos: um conjunto pode não ser aberto nem fechado.

Observação. O conjunto vazio é aberto por vacuidade. Consequentemente, seu complementar, $\mathbb{R}$, é fechado. Como $\mathbb{R}$ também é aberto, seu complementar, $\emptyset$, também é fechado. Mais adiante, poderemos mostrar que, na reta real, esses são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados.



1.72 Teorema. Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, o interior $\text{int } S$ é aberto e é o maior conjunto aberto contido em S . Equivalentemente,

$$\text{int } S = \bigcup \{U \subseteq S : U \text{ é aberto}\}.$$

Demonstração. Seja

$$V = \bigcup \{U \subseteq S : U \text{ é aberto}\}.$$

Como união de abertos, V é aberto, e claramente $V \subseteq S$. Além disso, todo aberto $U \subseteq S$ está contido em V , de modo que V é o maior aberto contido em S .

Se $x \in V$, existe um aberto U com $x \in U \subseteq S$; portanto $x \in \text{int } S$. Reciprocamente, se $x \in \text{int } S$, existe um aberto U tal que $x \in U \subseteq S$, logo $x \in V$. Assim, $V = \text{int } S$. $\square$

1.73 Definição (Ponto de acumulação). Seja $A \subset \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que x_0 é um **ponto de acumulação** de A se, para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$, com $x \neq x_0$, tal que $|x - x_0| < \delta$.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A' . Se $x \in A$ e $x \notin A'$, então x é chamado de ponto isolado de A .^a

^aUm conjunto é dito **discreto** se todos os seus pontos são isolados, isto é, se em torno de cada ponto do conjunto existe uma vizinhança que não contém nenhum outro ponto do conjunto.

Um ponto de acumulação de A também é chamado de ponto limite de A . Ele pode pertencer ou não ao próprio conjunto A .

- (a) Se $A = (0, 1]$, então $A' = [0, 1]$.
- (b) Se $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, então $A' = \{0\}$.
- (c) Se $A = \mathbb{N}$, então $A' = \emptyset$. Assim, $\mathbb{N}$ consiste inteiramente de pontos isolados.
- (d) Se A é finito, então $A' = \emptyset$.

1.74 Definição. Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, o **fecho** de A , denotado por $\text{cl } A$, é definido por

$$\text{cl } A = A \cup A',$$

onde A' é o conjunto dos pontos de acumulação de A .

1.75 Proposição. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Então:

- a. A é fechado se e somente se contém todos os seus pontos de acumulação.
- b. $\text{cl } A$ é fechado.
- c. A é fechado se e somente se $A = \text{cl } A$.
- d. $\text{cl } A = A \cup \text{fr } A$.

Demonstração. Provemos o primeiro item. Suponha que A seja fechado e seja x um ponto de acumulação de A . Se $x \notin A$, então $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Como $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, existe uma vizinhança de x contida em $\mathbb{R} \setminus A$, contradizendo o fato de que x é ponto de acumulação de A . Logo $x \in A$.

Reciprocamente, suponha que A contenha todos os seus pontos de acumulação. Se $y \in \mathbb{R} \setminus A$, então y não é ponto de acumulação de A . Portanto, existe uma vizinhança de y que não intersecta A , isto é, uma vizinhança contida em $\mathbb{R} \setminus A$. Assim, $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto, e A é fechado.

Para o segundo item, seja $x \notin A \cup A'$. Como $x \notin A'$, existe uma vizinhança básica V de x disjunta de A . Uma vizinhança básica menor W , cujo fecho esteja contido em V , não contém pontos de acumulação de A . Logo $W \cap (A \cup A') = \emptyset$, e o complemento de $A \cup A'$ é aberto. Portanto, $\text{cl } A$ é fechado.

O terceiro item segue do primeiro: A é fechado se e somente se $A' \subseteq A$, isto é, se e somente se $A = A \cup A' = \text{cl } A$. Finalmente, se $x \in A' \setminus A$, toda vizinhança de x encontra A e também contém $x \in A^c$, logo $x \in \text{fr } A$. Reciprocamente, se $x \in \text{fr } A$, então $x \in A$ ou toda vizinhança de x contém um ponto de A distinto de x ; assim $x \in A \cup A'$. Portanto, $\text{cl } A = A \cup \text{fr } A$. $\square$

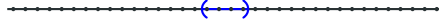
1.11.1 Densidade dos racionais e irracionais

Os elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são chamados de números irracionais. Já vimos um exemplo fundamental: $\sqrt{2}$.

Mostraremos agora que tanto os racionais quanto os irracionais aparecem em todo intervalo real.

1.76 Definição. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito denso em $\mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto (a, b) contém pelo menos um ponto de X .

Conjunto denso na reta real



Equivalentemente, X é denso em $\mathbb{R}$ se, para quaisquer $a < b$, existe $x \in X$ tal que $a < x < b$.

Por exemplo, seja $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, o conjunto dos números reais que não são inteiros. Este conjunto é denso em $\mathbb{R}$ porque, para qualquer intervalo (a, b) , existem infinitos números reais, enquanto há no máximo um número finito de inteiros n tal que $a < n < b$. Assim, qualquer intervalo (a, b) contém elementos de X (ou seja, números reais não inteiros).

1.77 Teorema. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ dos números racionais e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Considere um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Primeiro mostraremos que o intervalo contém um racional. Escolha $p \in \mathbb{N}$ tal que $1/p < b - a$. Pela propriedade arquimediana, o conjunto

$$M = \{m \in \mathbb{Z} : m/p \geq a\}$$

é não vazio. Ele é limitado inferiormente em $\mathbb{Z}$; após transladá-lo por um inteiro suficientemente grande, o Princípio da Boa Ordem garante que M possui um menor elemento, que denotaremos por m_0 . Então $(m_0 - 1)/p < a$. Além disso, se tivéssemos $(m_0 - 1)/p \leq a$, então

$$\frac{m_0}{p} = \frac{m_0 - 1}{p} + \frac{1}{p} < a + (b - a) = b,$$

contradição. Logo

$$a < \frac{m_0 - 1}{p} < b,$$

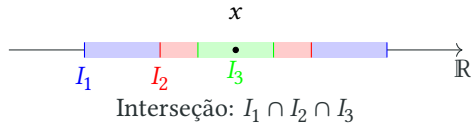
e encontramos um racional em (a, b) .

Para obter um irracional, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{2}/n < b - a$. Pelo que acabamos de provar, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a - \frac{\sqrt{2}}{n} < q < b - \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Então $q + \sqrt{2}/n \in (a, b)$. Esse número é irracional, pois, se fosse racional, então $\sqrt{2}/n = (q + \sqrt{2}/n) - q$ seria racional, o que implicaria $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, contradição. $\square$

Assim, racionais e irracionais são ambos onipresentes na reta real, no sentido de que todo intervalo aberto contém elementos dos dois tipos.



Princípio dos Intervalos Encaixantes

1.78 Teorema (Princípio dos Intervalos Encaixantes). Seja $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados com $I_n = [a_n, b_n]$. A interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia, ou seja, existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, se $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, então $a \leq b$ e a interseção é exatamente $[a, b]$.

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que implica que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Assim, podemos escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

Denote por $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos extremos inferiores e por $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos extremos superiores. O conjunto A é limitado superiormente por cada b_n , e B é limitado inferiormente por cada a_n . Sejam $a = \sup A$ e $b = \inf B$. Como cada b_n é cota superior de A , temos $a \leq b_n$ para todo n . Assim, a é cota inferior de B , e portanto $a \leq b$. Consequentemente,

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a \leq b \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluimos que $[a, b] \subset I_n$ para todo n , logo $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Além disso, nenhum $x < a$ pertence a todos os intervalos: como $a = \sup A$, existe n tal que $x < a_n$, e então $x \notin I_n$. Da mesma forma, se $y > b$, então $y > b_m$ para algum m , de onde $y \notin I_m$. Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$. $\square$

Usaremos o Teorema 1.78 para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável.

1.79 Teorema. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.

Demonstração. Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado com $a < b$, e seja x_0 um número real qualquer. Existe um intervalo fechado e limitado $J = [c, d]$, com $c < d$, tal que $x_0 \notin J$ e $J \subset I$. Essa afirmação é direta.

Usaremos essa propriedade repetidamente para demonstrar que, dado um subconjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$, podemos sempre encontrar um número real $x \notin X$.

Inicialmente, seja I_1 um intervalo fechado e não degenerado tal que $x_1 \notin I_1$. Em seguida, escolhemos I_2 , um intervalo do mesmo tipo, com $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$. Continuamos esse processo indutivamente. Suponhamos que tenhamos obtido $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n$, todos intervalos fechados e não degenerados, com $x_i \notin I_i$ para $1 \leq i \leq n$. Podemos então construir $I_{n+1} \subset I_n$ de modo que $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

Assim, obtemos uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$. De acordo com o Teorema 1.78, existe pelo menos um número real x que pertence a todos os intervalos I_n . Como $x_i \notin I_i$ para todo i , concluímos que x não é igual a nenhum dos x_n . Portanto, nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais. $\square$

1.80 Corolário. Todo intervalo não degenerado de números reais é não enumerável.

Demonstração. De fato, consideremos a função $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ definida por $f(x) = (b - a)x + a$, que é uma bijeção entre o intervalo aberto $(0, 1)$ e um intervalo aberto arbitrário (a, b) . Basta, portanto, provar que $(0, 1)$ não é enumerável.

Contudo, isso implicaria que

$$\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$$

seria enumerável: $\mathbb{Z}$ é enumerável, cada intervalo $(n, n + 1)$ seria enumerável e uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Isso contradiz o Teorema 1.79. Logo todo intervalo aberto não degenerado é não enumerável. Como qualquer intervalo não degenerado contém um intervalo aberto não degenerado, o resultado vale para todos os tipos de intervalo. $\square$

1.81 Corolário. O conjunto dos números irracionais não é enumerável.

Demonstração. De fato, temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também fosse enumerável, então $\mathbb{R}$ seria enumerável, pois seria a união de dois conjuntos enumeráveis. No entanto, isso contraria o que provamos no Teorema 1.79. $\square$

Ex. 1.29 — Dado um número natural $p > 1$, prove que os números racionais da forma $\frac{m}{p^n}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ constituem um subconjunto denso em $\mathbb{R}$.

Ex. 1.30 — Se $a < b$, mostre que existem infinitos números racionais entre a e b .

Ex. 1.31 — Prove ou forneça um contraexemplo: Se um conjunto S possui um máximo e um mínimo, então S é um conjunto fechado.

Ex. 1.32 — Seja A um subconjunto não vazio e aberto de $\mathbb{R}$ e seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Prove que $A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Ex. 1.33 — Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Prove o seguinte:

a) $\text{int } S$ é um conjunto aberto.

b) $\text{int}(\text{int } S) = \text{int } S$.

- c) $\text{int}(S \cap T) = (\text{int } S) \cap (\text{int } T)$.
- d) $(\text{int } S) \cup (\text{int } T) \subseteq \text{int}(S \cup T)$.
- e) Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

*** **Ex. 1.34 — [Corte de Dedekind]** Este exercício antecipa o capítulo sobre a construção dos reais. Um par ordenado (A, B) , em que A e B são subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$, A não possui elemento máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, tem-se $x < y$, é chamado de corte de Dedekind. O Capítulo 3 adota a convenção equivalente dos cortes superiores: nele, o conjunto principal é (B) , fechado para cima e sem elemento mínimo.

- a) Prove que, num corte de Dedekind (A, B) , vale $\sup A = \inf B$.
- b) Seja $\mathcal{D}$ o conjunto dos cortes de Dedekind. Prove que existe uma bijeção $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex. 1.35 — Se A é aberto e B é fechado, prove que $A \setminus B$ é aberto e $B \setminus A$ é fechado.

Ex. 1.36 — Prove o seguinte:

- a) Um ponto de acumulação de um conjunto S é um ponto interior de S ou um ponto de fronteira de S .
- b) Um ponto de fronteira de um conjunto S é um ponto de acumulação de S ou um ponto isolado de S .

Ex. 1.37 — Prove que se x é um ponto isolado de um conjunto S , então $x \in \text{fr } S$.

Ex. 1.38 — Prove: $(\text{cl } S) \setminus (\text{int } S) = \text{fr } S$.

Ex. 1.39 — Seja S um conjunto infinito e limitado e seja $x = \sup S$. Prove: Se $x \notin S$, então $x \in S'$.

Ex. 1.40 — Prove: Se x é um ponto de acumulação do conjunto S , então todo entorno de x contém infinitos pontos de S .

Ex. 1.41 —

- a) Prove: $\text{fr } S = (\text{cl } S) \cap [\text{cl}(\mathbb{R} \setminus S)]$.
- b) Prove: $\text{fr } S$ é um conjunto fechado.
- c) Prove: S' é um conjunto fechado.

Ex. 1.42 — Suponha que S seja um conjunto não vazio e limitado, e seja $m = \sup S$. Prove ou forneça um contraexemplo: m é um ponto de fronteira de S .

Ex. 1.43 — Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Prove o seguinte:

- a) $\text{cl}(\text{cl } S) = \text{cl } S$.
- b) $\text{cl}(S \cup T) = (\text{cl } S) \cup (\text{cl } T)$.
- c) $\text{cl}(S \cap T) \subseteq (\text{cl } S) \cap (\text{cl } T)$.
- d) Encontre um exemplo que mostre que a igualdade não precisa valer no item anterior.

Ex. 1.44 — Para qualquer conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, seja $\bar{S}$ a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm S .

- a) Prove que $\bar{S}$ é um conjunto fechado.
- b) Prove que $\bar{S}$ é o menor conjunto fechado que contém S . Ou seja, mostre que $S \subseteq \bar{S}$, e se C é qualquer conjunto fechado que contém S , então $\bar{S} \subseteq C$.
- c) Prove que $\bar{S} = \text{cl } S$.
- d) Se S é limitado, prove que $\bar{S}$ é limitado.

Ex. 1.45 — Dê exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados (ilimitados) cuja interseção seja vazia e de uma sequência decrescente de intervalos (abertos) limitados cuja interseção seja vazia.

1.12 Potenciação de números reais

A potenciação começa com expoentes naturais. Se $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ fatores}}.$$

Essa operação está definida para todo $a \in \mathbb{R}$. Quando $a \neq 0$, estendemos a definição aos inteiros negativos por

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Por convenção, definimos ainda $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$. O símbolo 0^0 permanecerá indefinido.

1.82 Proposição (Lei dos expoentes). Sejam $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então:

1. $a^{m+n} = a^m a^n$.
2. $a^{mn} = (a^m)^n$.
3. Se $n < m$, então

$$\begin{cases} a^n < a^m, & \text{se } a > 1, \\ a^n > a^m, & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

As demonstrações seguem das definições e das propriedades algébricas da multiplicação. No caso de expoentes negativos, usa-se também a unicidade do inverso multiplicativo.

Potência com expoente racional Para definir potências com expoente racional, começamos pelas raízes. Se $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos $a^{1/n}$ como o único número real positivo b tal que

$$b^n = a.$$

Esse número também é denotado por $\sqrt[n]{a}$. A existência e a unicidade de b seguem do mesmo argumento usado para a raiz quadrada, substituindo x^2 por x^n .

Se $q \in \mathbb{Q}$, escrevemos $q = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, e definimos

$$a^q = \left(a^{1/n}\right)^m, \quad a > 0.$$

É necessário verificar que essa definição não depende da representação escolhida para q . Essa verificação é algébrica e será deixada ao leitor.

1.83 Proposição (Leis dos expoentes racionais). Sejam $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{Q}$. Então:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$.
3. Se $x < y$, então

$$\begin{cases} a^x < a^y, & \text{se } a > 1, \\ a^x > a^y, & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

4. Se $x < 0 < y$, então

$$\begin{cases} a^x < a^0 = 1 < a^y, & \text{se } a > 1, \\ a^x > a^0 = 1 > a^y, & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

5. $a^x b^x = (ab)^x$.

6. Se $0 < a < b$, então

$$\begin{cases} a^x < b^x, & \text{se } x > 0, \\ a^x > b^x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Provaremos apenas dois itens representativos. Os demais seguem por argumentos semelhantes, usando a definição de potência racional, a unicidade da raiz n -ésima positiva e as leis dos expoentes inteiros.

Provemos o primeiro item. Escreva $x = p/q$ e $y = r/s$, com $p, r \in \mathbb{Z}$ e $q, s \in \mathbb{N}$. Então

$$x + y = \frac{ps + rq}{qs}.$$

Pela definição de potência racional e pelas leis dos expoentes inteiros,

$$a^{x+y} = \left(a^{1/(qs)}\right)^{ps+rq} = \left(a^{1/(qs)}\right)^{ps} \left(a^{1/(qs)}\right)^{rq}.$$

Como $\left(a^{1/(qs)}\right)^s = a^{1/q}$ e $\left(a^{1/(qs)}\right)^q = a^{1/s}$, obtemos

$$\left(a^{1/(qs)}\right)^{ps} = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{p/q}$$

e, analogamente,

$$\left(a^{1/(qs)}\right)^{rq} = \left(a^{1/s}\right)^r = a^{r/s}.$$

Portanto $a^{x+y} = a^x a^y$.

Provemos agora o quinto item. Escreva $x = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $a^{1/n}$ e $b^{1/n}$ são positivos, temos

$$\left(a^{1/n} b^{1/n}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n \left(b^{1/n}\right)^n = ab.$$

Pela unicidade da raiz n -ésima positiva,

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}.$$

Assim,

$$(ab)^x = \left((ab)^{1/n}\right)^m = \left(a^{1/n} b^{1/n}\right)^m = \left(a^{1/n}\right)^m \left(b^{1/n}\right)^m = a^x b^x.$$

Logo $a^x b^x = (ab)^x$. □

Potência com expoente real Para estender a potência a expoentes reais, usamos a densidade dos racionais e a completude de $\mathbb{R}$. Seja $a > 0$ e seja $x \in \mathbb{R}$.

Se $a \geq 1$, definimos

$$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}.$$

Se $0 < a < 1$, definimos

$$a^x = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}.$$

No caso $a = 1$, ambas as definições dão $1^x = 1$.

Com essa definição, a operação a^x fica definida para toda base positiva a e todo expoente real x . As leis usuais continuam válidas.

1.84 Proposição (Compatibilidade da potência com supremos e ínfimos racionais). Seja $a > 1$.

1. Se $E \subset \mathbb{Q}$ é não vazio e limitado superiormente, então

$$\sup\{a^r : r \in E\} = a^{\sup E}.$$

2. Se $E \subset \mathbb{Q}$ é não vazio e limitado inferiormente, então

$$\inf\{a^r : r \in E\} = a^{\inf E}.$$

Demonstração. Usaremos duas consequências elementares da definição de potência real: para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$a^u = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < u\} \quad \text{e} \quad a^u = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, u < q\}.$$

A primeira igualdade é imediata quando $u \notin \mathbb{Q}$. Quando $u \in \mathbb{Q}$, seja $L = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < u\}$. Temos $L \leq a^u$. Por outro lado, $a^{u-1/n} \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$a^u - a^{u-1/n} = a^u(1 - a^{-1/n}) \leq a^u(a^{1/n} - 1).$$

Como $a = (a^{1/n})^n$, a desigualdade de Bernoulli fornece $a^{1/n} - 1 \leq (a - 1)/n$. Logo $a^u - L \leq a^u(a - 1)/n$ para todo n , e a propriedade arquimediana implica $a^u \leq L$. Portanto $L = a^u$. A segunda igualdade é análoga, aproximando u por racionais maiores.

Provemos agora o primeiro item. Seja $\alpha = \sup E$. Como $r \leq \alpha$ para todo $r \in E$, a monotonicidade da potência racional implica $a^r \leq a^\alpha$. Logo $\sup\{a^r : r \in E\} \leq a^\alpha$. Para a desigualdade contrária, tome $q \in \mathbb{Q}$ com $q < \alpha$. Como q não é cota superior de E , existe $r \in E$ tal que $q < r$. Então $a^q < a^r \leq \sup\{a^s : s \in E\}$. Assim, $\sup\{a^s : s \in E\}$ é cota superior de $\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < \alpha\}$. Pela caracterização inicial, $a^\alpha \leq \sup\{a^s : s \in E\}$, e obtemos

$$\sup\{a^r : r \in E\} = a^\alpha = a^{\sup E}.$$

O segundo item é semelhante. Seja $\beta = \inf E$. Como $\beta \leq r$ para todo $r \in E$, temos $a^\beta \leq a^r$, de modo que a^β é cota inferior de $\{a^r : r \in E\}$. Assim, $a^\beta \leq \inf\{a^r : r \in E\}$. Para a desigualdade oposta, tome $q \in \mathbb{Q}$ com $\beta < q$. Como q não é cota inferior de E , existe $r \in E$ tal que $r < q$. Então $a^r < a^q$, e portanto $\inf\{a^s : s \in E\} \leq a^q$. Como isso vale para todo racional $q > \beta$, a segunda caracterização inicial fornece

$$\inf\{a^r : r \in E\} = a^\beta = a^{\inf E}.$$

□

1.85 Proposição (Leis dos expoentes reais). Dados $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, valem:

$$1. \quad a^{x+y} = a^x a^y.$$

$$2. \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

$$3. \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

$$4. \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

$$5. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Demonstração. Provaremos os dois primeiros itens; os demais serão deixados como exercício. O caso $a = 1$ é imediato. Suponhamos inicialmente que $a > 1$.

Para o primeiro item, defina $R_x = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq x\}$ e $R_y = \{s \in \mathbb{Q} : s \leq y\}$. Pela definição de potência real, $a^x = \sup\{a^r : r \in R_x\}$ e $a^y = \sup\{a^s : s \in R_y\}$. Como todos os números envolvidos são positivos, a propriedade do supremo do produto dá

$$a^x a^y = \sup\{a^r a^s : r \in R_x, s \in R_y\}.$$

Pelas leis dos expoentes racionais, $a^r a^s = a^{r+s}$. Além disso, $R_x + R_y = \{r + s : r \in R_x, s \in R_y\}$ tem supremo $x + y$. De fato, $x + y$ é cota superior; e, se $t < x + y$, a densidade de $\mathbb{Q}$ permite escolher $r \in \mathbb{Q}$ com $t - y < r \leq x$ e, em seguida, $s \in \mathbb{Q}$ com $t - r < s \leq y$, de modo que $t < r + s$. Pela compatibilidade da potência com supremos racionais, segue que $a^x a^y = a^{x+y}$.

Passemos ao segundo item. Primeiro observamos que, para todo $q \in \mathbb{Q}$, vale $(a^x)^q = a^{xq}$. Escreva $q = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Pelo item já provado, $(a^{x/n})^n = a^x$. Como $a^{x/n} > 0$, a unicidade da raiz n -ésima positiva implica $(a^x)^{1/n} = a^{x/n}$. Elevando ambos os membros à potência inteira m , obtemos $(a^x)^{m/n} = a^{xm/n}$.

Fixe agora $y \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$, então $a^x > 1$. Pela definição de potência real aplicada à base a^x e pelo caso racional recém-provado,

$$(a^x)^y = \sup\{(a^x)^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq y\} = \sup\{a^{xq} : q \in \mathbb{Q}, q \leq y\}.$$

Como $x > 0$, o conjunto $\{xq : q \in \mathbb{Q}, q \leq y\}$ tem supremo xy . Logo, pela compatibilidade com supremos racionais, $(a^x)^y = a^{xy}$.

Se $x = 0$, então $(a^x)^y = 1^y = 1 = a^{xy}$. Se $x < 0$, então $0 < a^x < 1$, e a definição de potência real para bases entre 0 e 1, juntamente com o caso racional, dá

$$(a^x)^y = \inf\{(a^x)^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq y\} = \inf\{a^{xq} : q \in \mathbb{Q}, q \leq y\}.$$

Como $x < 0$, o conjunto $\{xq : q \in \mathbb{Q}, q \leq y\}$ tem ínfimo xy . Pela compatibilidade com ínfimos racionais, obtemos $(a^x)^y = a^{xy}$. Assim, os dois primeiros itens estão provados para $a > 1$.

Por fim, se $0 < a < 1$, ponha $c = 1/a$. Então $c > 1$ e, pela definição, $a^t = c^{-t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Aplicando os casos já provados à base c , temos $a^{x+y} = c^{-(x+y)} = c^{-x} c^{-y} = a^x a^y$ e $(a^x)^y = (c^{-x})^y = c^{-xy} = a^{xy}$. Portanto os dois primeiros itens valem para todo $a > 0$. $\square$

Ex. 1.46 — Prove, para x e y racionais, as seguintes propriedades:

a) $a^{x+y} = a^x a^y$.

b) $(a^x)^y = a^{xy}$.

c) $(ab)^x = a^x b^x$.

d) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

*** Ex. 1.47 — Utilizando o exercício anterior, prove as propriedades acima para x e y reais.

1.13 Representação decimal dos números reais

A representação decimal é uma das formas mais usuais de escrever números reais, mas sua interpretação exige algum cuidado. A notação decimal é posicional: cada algarismo representa um múltiplo de uma potência de 10. À esquerda da vírgula aparecem potências não negativas; à direita, potências negativas.

Quando apenas um número finito de casas decimais é não nulo, essa interpretação é direta. Expansões decimais infinitas, por outro lado, envolvem somas infinitas. A formulação completa dessas somas será feita no estudo de séries numéricas. Ainda assim, já podemos descrever a obtenção dos desenvolvimentos decimais a partir da ordem e do axioma do supremo.

Começemos com $x \geq 0$. Seja a_0 o maior inteiro tal que

$$a_0 \leq x.$$

Definido a_0 , escolhemos a_1 como o maior inteiro em $\{0, 1, \dots, 9\}$ tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x.$$

Indutivamente, supondo definidos $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, escolhemos a_n como o maior inteiro em $\{0, 1, \dots, 9\}$ tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x.$$

Denotemos por

$$s_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

o n -ésimo truncamento decimal assim obtido.

Por construção, $s_n \leq x$ para todo n . Além disso,

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}.$$

Com efeito, para $n = 0$, essa desigualdade afirma simplesmente que $a_0 \leq x < a_0 + 1$. Suponha agora $n \geq 1$. Como a_n é escolhido como o maior algarismo possível, temos

$$a_n \leq 10^n(x - s_{n-1}) < a_n + 1.$$

Subtraindo a_n e dividindo por 10^n , obtemos

$$0 \leq x - s_n < 10^{-n}.$$

Assim, os truncamentos decimais aproximam x arbitrariamente bem. Em particular,

$$x = \sup\{s_n : n \geq 0\}.$$

Os inteiros $a_0, a_1, a_2, \dots$ fornecem uma representação decimal de x , que escrevemos simbolicamente como

$$x = a_0.a_1a_2a_3\dots$$

Dessa forma, a representação decimal de um número real pode ser entendida como o registro dos truncamentos decimais que se aproximam dele pela esquerda. Se $x < 0$, aplica-se o procedimento a $-x$ e acrescenta-se o sinal negativo.

Por exemplo, para $x = 1/8$, obtemos

$$\frac{1}{8} = 0,125000 \dots$$

Os truncamentos correspondentes são

$$0, \quad 0,1, \quad 0,12, \quad 0,125, \quad 0,1250, \dots,$$

e seu supremo é $1/8$.

A representação decimal não é sempre única. Se, no procedimento anterior, substituirmos a condição $\leq x$ por $< x$, obteremos, em certos casos, outra sequência de algarismos, mas com o mesmo supremo. Para $x = 1/8$, por exemplo, essa convenção produz

$$\frac{1}{8} = 0,124999 \dots$$

As duas escritas representam o mesmo número real, pois seus truncamentos têm o mesmo supremo.

O mesmo fenômeno explica a identidade

$$1 = 0,999999 \dots$$

De fato, os truncamentos

$$0,9, \quad 0,99, \quad 0,999, \quad 0,9999, \quad \dots$$

são todos menores que 1, e a diferença entre 1 e o n -ésimo truncamento é 10^{-n} . Como essas diferenças tendem a 0, o supremo desses truncamentos é 1.

De modo geral, a ambiguidade ocorre exatamente quando uma expansão decimal possui, a partir de certa casa, uma cauda infinita de algarismos 9. Nesses casos, a mesma quantidade também pode ser escrita por uma expansão decimal que termina em zeros. Por exemplo,

$$0,5000 \dots = 0,4999 \dots$$

Os reais não são enumeráveis Para encerrar a seção, apresentaremos uma segunda demonstração de que os números reais não são enumeráveis. Provaremos, mais precisamente, que o intervalo $(0, 1)$ não é enumerável.

Suponha, por absurdo, que $(0, 1)$ seja enumerável. Então seus elementos poderiam ser listados na forma

$$r_1, r_2, r_3, \dots$$

Escolhamos, para cada r_i , uma representação decimal que não possua cauda infinita de algarismos 9. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4} \dots, \\ r_2 &= 0,a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4} \dots, \\ r_3 &= 0,a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4} \dots, \\ r_4 &= 0,a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4} \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

com $a_{i,j} \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Construiremos um número $r \in (0, 1)$ que não aparece nessa lista. Para cada $j \in \mathbb{N}$, escolha

$$b_j \in \{1, 2, \dots, 8\}$$

de modo que $b_j \neq a_{j,j}$. Defina

$$r = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Como todos os algarismos b_j pertencem a $\{1, \dots, 8\}$, temos $r \in (0, 1)$, e sua expansão decimal não possui cauda infinita de algarismos 9.

Além disso, $r \neq r_j$ para todo j . De fato, a representação decimal escolhida para r difere da representação escolhida para r_j na j -ésima casa decimal, pois $b_j \neq a_{j,j}$. Como estamos usando sempre representações sem cauda infinita de 9's, essa diferença de algarismos implica diferença entre os números representados.

Assim, r é um elemento de $(0, 1)$ que não aparece na lista $r_1, r_2, r_3, \dots$. Isso contradiz a hipótese de que a lista continha todos os elementos de $(0, 1)$. Portanto, o intervalo $(0, 1)$ não é enumerável. Como $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, segue que $\mathbb{R}$ também não é enumerável.

1.86 Observação. O argumento diagonal de Cantor mostra que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade: o intervalo $(0, 1)$ não pode ser colocado em bijeção com $\mathbb{N}$.

2

Sequências

A noção de limite é uma das ideias centrais da Análise. Entre suas primeiras manifestações rigorosas está o estudo das sequências reais, que permite tratar a aproximação de números por meio de objetos discretos e, ao mesmo tempo, introduzir os principais fenômenos que reaparecem depois no estudo de séries, continuidade, derivação e espaços métricos.

Neste capítulo, estudaremos sequências de números reais e seus limites. O ponto central será entender o que significa uma sucessão de números aproximar-se de um valor fixo, quais propriedades essa aproximação preserva e de que modo podemos reconhecer convergência sem conhecer previamente o limite.

Além da definição de convergência, trataremos de subsequências, sequências monótonas, sequências de Cauchy e critérios de convergência. Esses resultados formam uma primeira ponte entre a completude dos números reais e o comportamento assintótico de processos infinitos.

Neste capítulo

- ▶ Conceitos básicos (p. 50)
- ▶ Convergência e limite de sequências (p. 52)
- ▶ Sequências limitadas (p. 55)
- ▶ Sequências crescentes e decrescentes (p. 58)
- ▶ O número e (p. 61)
- ▶ Limites infinitos (p. 62)
- ▶ Propriedades do limite de sequências (p. 65)
- ▶ Teorema do confronto (p. 69)
- ▶ Subsequências (p. 71)
- ▶ Sequências de Cauchy (p. 73)
- ▶ Limite superior e limite inferior (p. 76)
- ▶ Sequências e a topologia da reta (p. 81)

2.1 Conceitos básicos

No Capítulo 1, ao discutir definições recursivas, introduzimos uma **sequência real** como uma função

$$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Retomamos agora essa noção sistematicamente. Escreveremos $s_n = s(n)$ e denotaremos a sequência por (s_n) ou $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. A ordem dos índices faz parte do objeto: duas sequências podem ter o mesmo conjunto de valores e, ainda assim, serem diferentes.



Figura 2.1

A sequência (s_n) associa a cada natural n um real s_n .

Ideia central

Convergência é comportamento de cauda. Monotonicidade, subsequências, Cauchy, limsup e liminf oferecem maneiras complementares de enxergá-lo.

Em diversas situações consideraremos funções cujo domínio não seja o conjunto dos naturais, mas sim um subconjunto dos inteiros da forma $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ para algum k . Essas funções também serão ditas sequências e para essas sequências usaremos a notação $(s_n)_{n=k}^{\infty}$, indicando o ponto a partir do qual a sequência está definida.

Como toda função, uma sequência pode ser especificada por uma regra explícita, por uma definição por casos ou por uma regra recursiva.

2.1 Exemplo (Modos de especificar uma sequência). As sequências

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par}, \\ 1, & n \text{ ímpar}, \end{cases}$$

são dadas diretamente em função do índice n . Já a sequência (c_n) , definida por

$$c_1 = \sqrt{2}, \quad c_{n+1} = \sqrt{2c_n},$$

é dada recursivamente: cada termo é determinado a partir do termo anterior.

A ordem dos termos é parte essencial da sequência. Por exemplo, as sequências $((-1)^n)$ e $((-1)^{n+1})$ têm a mesma imagem, o conjunto $\{-1, 1\}$, mas não são a mesma sequência.

Como uma sequência é uma função dos naturais nos reais, um ponto da função é um par ordenado (n, s_n) com $n \in \mathbb{N}$ e $s_n \in \mathbb{R}$ e desse modo uma sequência real pode ser vista como um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

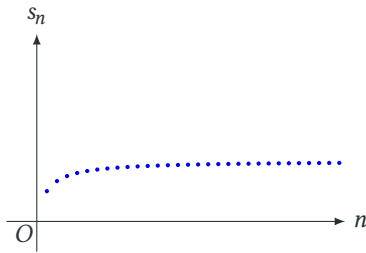


Figura 2.2 Gráfico da sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Outra forma de representar uma sequência graficamente é marcar, sobre a reta real, as imagens da sequência, rotuladas pelo termo correspondente.

Assim, a sequência do exemplo anterior, dada por $a_n = \frac{n}{n+1}$, também pode ser representada graficamente como nas Figuras 2.2 e 2.3.

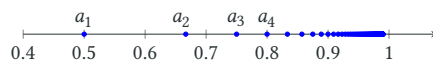


Figura 2.3 Gráfico de $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

A sequência $c_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ilustra um comportamento oscilatório com amplitude decrescente. Para índices pares, seus pontos pertencem ao gráfico de $x \mapsto 1/\sqrt{x}$; para índices

ímpares, pertencem ao gráfico de $x \mapsto -1/\sqrt{x}$. Assim, o gráfico dessa sequência pode ser representado como na Figura 2.4.

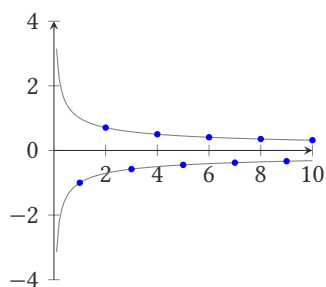


Figura 2.4 Gráfico de $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

2.2 Convergência e limite de sequências

O conceito de limite ocupa posição central na Análise. Começaremos pelo caso mais simples: o limite de sequências reais.

Historicamente, a ideia de limite apareceu de modo gradual. Ela está presente, ainda de forma intuitiva, em argumentos de Arquimedes e reaparece em diferentes momentos da matemática anterior ao século XIX. A formulação precisa que usamos hoje, associada sobretudo ao trabalho de Cauchy e posteriormente refinada na linguagem ε - N , transformou essa intuição em uma definição matemática rigorosa.

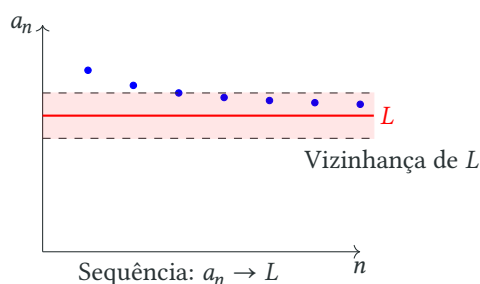


Figura 2.5 Convergência de uma sequência.

2.2 Definição (Definição de limite). Dada uma sequência $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que (a_n) converge para o número real L , denotando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, vale $|a_n - L| < \varepsilon$.

A definição formal exprime a seguinte ideia: dado um erro arbitrário $\varepsilon > 0$, existe um índice a partir do qual todos os termos da sequência permanecem a distância menor

que ε do limite. Uma sequência que converge para algum valor é dita **convergente**, e, caso contrário, é dita **divergente**.

2.3 Observação (Formulação por vizinhanças). A definição anterior equivale a afirmar que, para toda vizinhança V de L , todos os termos da sequência, com exceção de um número finito deles, pertencem a V . Basta aplicar a definição à vizinhança básica $V_\varepsilon(L)$ contida em V .

Provaremos alguns limites elementares utilizando a definição.

2.4 Exemplo. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

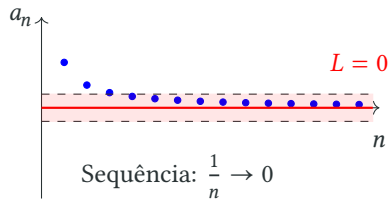


Figura 2.6 Convergência da sequência $\frac{1}{n}$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pela propriedade Arquimediana, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $M > \frac{1}{\varepsilon}$. Então, para todo $n > M$, temos

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. □

A sequência constante $b_n = b$ satisfaz $b_n \rightarrow b$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, para qualquer escolha de $M \in \mathbb{N}$ e todo $n > M$, temos $|b_n - b| = 0 < \varepsilon$.

2.5 Exemplo. Mostremos, pela definição, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2.$$

De fato,

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n-1-2n-6}{n+3} \right| = \frac{7}{n+3}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $M \in \mathbb{N}$ tal que $M > 7/\varepsilon$. Então, para todo $n > M$,

$$\left| \frac{2n-1}{n+3} - 2 \right| = \frac{7}{n+3} < \frac{7}{n} < \varepsilon.$$

Logo, $\frac{2n-1}{n+3} \rightarrow 2$.

Intuitivamente, a sequência $i_n = (-1)^n$ não converge, pois oscila entre os valores 1 e -1 e, portanto, não se aproxima de um único número real quando n cresce.

2.6 Exemplo. A sequência $i_n = (-1)^n$ não converge.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que a sequência convergisse para algum número real i . Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existiria $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > M$,

$$|i_n - i| < \frac{1}{2}.$$

Se $n > M$ for par, então $i_n = 1$, e teríamos

$$|1 - i| < \frac{1}{2},$$

o que implica $i > \frac{1}{2}$. Se $n > M$ for ímpar, então $i_n = -1$, e teríamos

$$|-1 - i| < \frac{1}{2},$$

o que implica $i < -\frac{1}{2}$. Isso é impossível. Logo, a sequência não converge. $\square$

2.7 Proposição. O limite de uma sequência, se existir, é único.

Demonstração. Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_2.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow a_1$, existe N_1 tal que, para todo $n > N_1$,

$$|a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Como $a_n \rightarrow a_2$, existe N_2 tal que, para todo $n > N_2$,

$$|a_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, as duas desigualdades valem para todo $n > N$. Logo, pela desigualdade triangular,

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - a_n + a_n - a_2| \leq |a_1 - a_n| + |a_n - a_2| < \varepsilon.$$

Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $a_1 = a_2$. $\square$

Ex. 2.1 — Prove a partir da definição que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Ex. 2.2 — Seja $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n < \dots$ uma sequência de números naturais. Prove (por indução) que $j_n \geq n$ para todo $n \geq 1$.

Ex. 2.3 — a) Mostre que se a_n converge para a , então $|a_n|$ converge para $|a|$ (use que $||x| - |y|| \leq |x - y|$).

b) É verdade que se $|a_n|$ converge, então a_n converge? Prove ou forneça um contraexemplo.

Ex. 2.4 — Suponha que a_n converge para a . Prove que para qualquer $\varepsilon > 0$, a_n está em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todos os n , exceto possivelmente para um número finito.

Ex. 2.5 — Seja a_n uma sequência de números reais que converge para L . Defina $b_n = a_{n+k_0}$. Mostre que b_n também converge para L .

Ex. 2.6 — Seja a_n uma sequência de números reais, e L um número real. Defina $b_n = |a_n - L|$. Mostre que a_n converge para L se, e somente se, b_n converge para 0.

Ex. 2.7 — Considere uma sequência a_n que assume valores nos naturais.

- Dê um exemplo de tal sequência.
- Mostre que a_n converge se, e somente se, ela é estacionária, ou seja, se, e somente se, existe um natural N tal que, se $n \geq N$, então $a_n = a_N$.

Ex. 2.8 — Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

2.3 Sequências limitadas

A limitação de uma sequência descreve quando seus termos permanecem contidos em uma região finita da reta real. Como uma sequência (a_n) é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, essa propriedade corresponde à limitação do conjunto de seus valores,

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2.8 Definição. Seja (a_n) uma sequência real.

- Dizemos que (a_n) é **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que (a_n) é **limitada inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Dizemos que (a_n) é **limitada** se é limitada superiormente e inferiormente. Equivalentemente, existe $C > 0$ tal que $|a_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Uma sequência que não é limitada é chamada **ilimitada**.

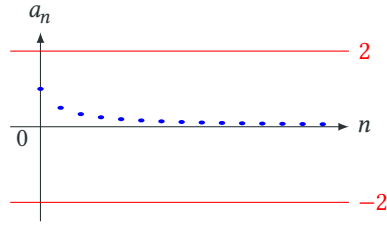


Figura 2.7 A sequência $\frac{1}{n+1}$ é limitada.

2.9 Exemplo. As sequências

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad b_n = -\frac{1}{n^2}, \quad c_n = n$$

ilustram três comportamentos distintos de limitação. A primeira satisfaz $0 < a_n \leq 1/2$ para todo $n \geq 1$, logo é limitada. A segunda satisfaz $-1 \leq b_n < 0$, logo também é limitada. Já (c_n) é limitada inferiormente, por exemplo por 0, mas não é limitada superiormente. Com efeito, se existisse $M \in \mathbb{R}$ tal que $n \leq M$ para todo n , teríamos uma contradição com a propriedade Arquimediana.

Um modo simples de mostrar que uma sequência é limitada é compará-la com outra que já conhecemos. O seguinte teorema nos fornece um modo de realizar essa comparação.

2.10 Teorema. Sejam $(a_n), (b_n)$ duas sequências satisfazendo $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$. Então:

- se a sequência a_n é limitada inferiormente, a sequência b_n também é limitada inferiormente.
- se a sequência b_n é limitada superiormente, a sequência a_n também é limitada superiormente.

2.11 Exemplo. A sequência

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

é limitada, mas não é convergente. De fato, como $|(-1)^n| = 1$ e $0 < 1/n \leq 1$, temos $|a_n| \leq 2$ para todo n . Portanto, (a_n) é limitada.

Por outro lado, as subsequências de índices pares e ímpares satisfazem

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1, \quad a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1} \rightarrow -1.$$

Como uma sequência convergente tem todas as suas subsequências convergindo para o mesmo limite, concluímos que (a_n) não converge.

2.12 Proposição. Se a sequência (a_n) converge, então (a_n) é limitada.

Demonstração. Suponha que $a_n \rightarrow a$. Pela definição de limite, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > M$, temos $|a_n - a| < 1$. Pela desigualdade triangular,

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$$

para todo $n > M$.

Resta considerar os termos $a_1, \dots, a_M$. Como esse conjunto é finito, existe

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_M|\}.$$

Tomando $D = \max\{C, |a| + 1\}$, obtemos $|a_n| \leq D$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é limitada. $\square$

Consequentemente, toda sequência ilimitada é divergente. Esse critério é apenas suficiente para divergência: uma sequência pode ser limitada e ainda assim divergir, como ocorre com $((-1)^n)$.

Ex. 2.9 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n^2 + n$

b) $a_n = n^2 - 7n$

c) $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$

d) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

e) $a_n = \frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$

g) $a_n = 2^n$

h) $n/n!$

i) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$.

Ex. 2.10 — Prove que as seguintes sequências divergem:

a) $n - 10000$

b) $n^2 - 2$

c) $n!$

d) n^3

e) $(-1)^n n$

f) $a_1 = 1$ $a_n = n!a_{n-1}$

g) $\sqrt{n}$ (Dica: eleve ao quadrado)

Ex. 2.11 — Suponha que a_n converge para L e é limitado inferiormente por m . Mostre que $L \geq m$.

2.4 Sequências crescentes e decrescentes

Como no caso de funções reais, podemos classificar sequências de acordo com o comportamento de seus termos quando o índice aumenta.

2.13 Definição. Seja (a_n) uma sequência real.

- Dizemos que (a_n) é **crescente** se, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, vale $a_n < a_m$.
- Dizemos que (a_n) é **não-decrescente** se, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, vale $a_n \leq a_m$.
- Dizemos que (a_n) é **decrescente** se, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, vale $a_n > a_m$.
- Dizemos que (a_n) é **não-crescente** se, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$, vale $a_n \geq a_m$.

Em qualquer um desses casos, dizemos que a sequência é **monótona**¹. Quando a sequência é crescente ou decrescente, dizemos que ela é **estritamente monótona**.

Para sequências, basta comparar termos consecutivos.

2.14 Observação (Critério por termos consecutivos). Seja (a_n) uma sequência real. Então:

- (a_n) é crescente se, e somente se, $a_n < a_{n+1}$ para todo n ;
- é não-decrescente se, e somente se, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n ;
- é decrescente se, e somente se, $a_n > a_{n+1}$ para todo n ;
- é não-crescente se, e somente se, $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n .

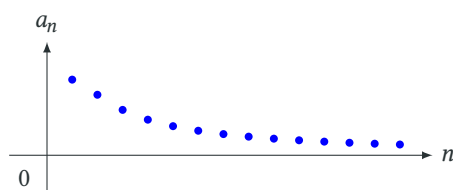


Figura 2.8

A sequência $\frac{n}{n^2 + 1}$ é decrescente.

¹Também é usual o termo *monotônica*.

2.15 Exemplo. A sequência $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ é decrescente.

Com efeito, para todo $n \geq 1$,

$$\frac{n}{n^2 + 1} > \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1}$$

é equivalente a

$$(n+1)(n^2 + 1) < n((n+1)^2 + 1),$$

isto é, a $1 < n^2 + n$. Como essa desigualdade vale para todo $n \geq 1$, segue que $a_n > a_{n+1}$ para todo n , e a sequência é decrescente.

2.16 Teorema (Convergência monótona). Toda sequência monótona e limitada converge.

Demonstração. Suponha primeiro que (a_n) seja crescente e limitada. O conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

é limitado superiormente; portanto, pela completude de $\mathbb{R}$, possui supremo. Denote esse supremo por L . Como L é cota superior de A , temos $a_n \leq L$ para todo n .

Seja $\varepsilon > 0$. Como $L - \varepsilon$ não é cota superior de A , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N > L - \varepsilon$. Como a sequência é crescente, para todo $n \geq N$ vale

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L.$$

Logo, $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Assim, $a_n \rightarrow L$.

Se (a_n) é decrescente e limitada, aplica-se o mesmo argumento ao ínfimo do conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

2.17 Exemplo. A sequência

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

é crescente e limitada; portanto, converge.

De fato, temos $s_{n+1} - s_n = 1/(n+1)^2 > 0$, logo (s_n) é crescente. Além disso, para $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Assim,

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Logo, (s_n) é crescente e limitada superiormente. Pelo Teorema da Convergência Monótona, (s_n) converge.

Ex. 2.12 — Prove que se (a_n) é decrescente e limitada então a_n converge.

Ex. 2.13 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma dessas duas. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n + 7$

b) $a_n = n^2 + n$

c) $a_n = n^2 - 7n$

d) $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$

e) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

f) $a_n = \frac{1}{n^2}$

g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$

h) $a_n = 2^n$

i) $a_n = \frac{2n - 6}{3n + 4}$

j) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n + 3}$

k) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

Ex. 2.14 — Suponha que a_n seja uma sequência crescente, b_n seja uma sequência decrescente, e que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 1$.

a) Mostre que a_n e b_n convergem.

b) Se, além das hipóteses anteriores, temos que $b_n - a_n$ converge para 0, prove que a_n e b_n convergem para o mesmo limite.

Ex. 2.15 — Suponha que $a_n < b_n$ para todos os naturais n . Suponha que a_n e b_n convergem para a e b , respectivamente. É verdade que $a < b$? Prove ou forneça um contraexemplo.

2.5 O número e

2.18 Proposição. A sequência $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente.

Demonstração. Para $n \geq 2$, comparemos dois termos consecutivos. Temos

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Pela desigualdade de Bernoulli,

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n^2}.$$

Portanto,

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} \geq \left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^3} > 1.$$

Assim, $e_n > e_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, e a sequência é estritamente crescente. $\square$

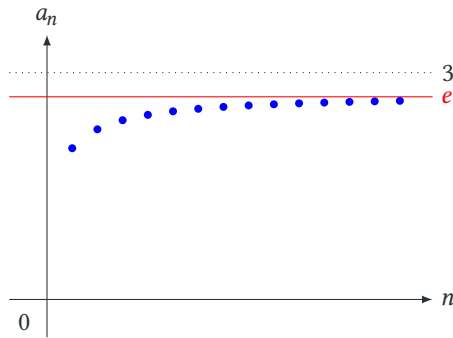


Figura 2.9

Gráfico de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Essa sequência é crescente e limitada por 3.

2.19 Proposição. A sequência $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente.

Demonstração. Pela fórmula binomial,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}.$$

Como

$$0 < \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \leq 1$$

para $2 \leq k \leq n$, obtemos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Além disso, para $k \geq 2$, vale $k! \geq 2^{k-1}$. Logo,

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3.$$

Portanto, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo n . Como a sequência é crescente e $e_1 = 2$, também temos $2 \leq e_n < 3$. Assim, (e_n) é limitada. $\square$

Como a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada, ela converge pelo Teorema 2.16. Seu limite é chamado **número de Euler**, ou simplesmente e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pelas estimativas anteriores, temos $2 \leq e \leq 3$. Com um pouco mais de trabalho, pode-se mostrar que $e \approx 2,71828183$ e que e é irracional.

De posse do número e , definimos a função exponencial de base e , que chamaremos simplesmente de **função exponencial**. Das desigualdades $2 < e < 3$, segue que, para $x > 0$, vale $2^x < e^x < 3^x$, enquanto, para $x < 0$, vale $3^x < e^x < 2^x$.

A função logaritmo de base e é chamada **logaritmo natural**, ou simplesmente **logaritmo**. Trata-se da função $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

Ex. 2.16 — .

- Mostre que $e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ para $n \geq 1$.
- Mostre que $e^x \geq 1 + x$.
- Usando que $e^x \geq 1 + x$ e que $e^{-x} \geq 1 - x$, mostre que $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

2.6 Limites infinitos

Algumas sequências, embora não convirjam em $\mathbb{R}$, têm comportamento assintótico bem definido: seus termos tornam-se maiores do que qualquer número real previamente fixado, ou menores do que qualquer número real previamente fixado. Para descrever esses casos, usamos as notações

$$a_n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad a_n \rightarrow -\infty.$$

2.20 Definição (Limites infinitos). Seja (a_n) uma sequência real.

- Dizemos que $a_n \rightarrow +\infty$, ou que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, se, para todo $C \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > C$ sempre que $n > M$.
- Dizemos que $a_n \rightarrow -\infty$, ou que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, se, para todo $C \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < C$ sempre que $n > M$.

O símbolo ∞ não representa um número real. Ele indica apenas um tipo de comportamento da sequência. Assim, expressões como $\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ não têm significado algébrico por si mesmas.

2.21 Exemplo. Temos $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$. De fato, dado $C \in \mathbb{R}$, pela propriedade Arquimédiana existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $M > C$. Se $n > M$, então $n > C$. Portanto, $n \rightarrow +\infty$.

De modo análogo, $-n \rightarrow -\infty$.

2.22 Teorema (Comparação para limites infinitos). Sejam (a_n) e (b_n) sequências reais tais que $a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande.

1. Se $a_n \rightarrow +\infty$, então $b_n \rightarrow +\infty$.
2. Se $b_n \rightarrow -\infty$, então $a_n \rightarrow -\infty$.

Demonstração. Provaremos apenas a primeira afirmação. Seja $C \in \mathbb{R}$. Como $a_n \rightarrow +\infty$, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > C$ para todo $n > M_1$. Além disso, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq b_n$ para todo $n > M_2$. Assim, para $n > \max\{M_1, M_2\}$, temos $b_n \geq a_n > C$. Logo, $b_n \rightarrow +\infty$. A segunda afirmação é análoga. $\square$

2.23 Corolário. Por comparação com n e $-n$, obtemos:

1. $n^n \rightarrow +\infty$;
2. $n! \rightarrow +\infty$;
3. $2^n \rightarrow +\infty$;
4. se $k \in \mathbb{N}^*$, então $n^k \rightarrow +\infty$;
5. se $k \in \mathbb{N}^*$ é ímpar, então $(-n)^k \rightarrow -\infty$;
6. se $k \in \mathbb{N}^*$ é par, então $(-n)^k \rightarrow +\infty$;
7. $e^n \rightarrow +\infty$.

2.24 Proposição. Se (a_n) é não-decrescente e não é limitada superiormente, então $a_n \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Seja $C \in \mathbb{R}$. Como (a_n) não é limitada superiormente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_N > C$. Como a sequência é não-decrescente, para todo $n > N$ temos $a_n \geq a_N > C$. Portanto, $a_n \rightarrow +\infty$. $\square$

De modo análogo, se (a_n) é não-crescente e não é limitada inferiormente, então $a_n \rightarrow -\infty$.

2.25 Exemplo. Temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$.

A sequência $(\ln n)$ é crescente. Se fosse limitada superiormente, existiria $C \in \mathbb{R}$ tal que $\ln n < C$ para todo n . Aplicando a exponencial, obteríamos $n = e^{\ln n} < e^C$ para todo n , o que contradiz a propriedade Arquimediana. Logo, $(\ln n)$ não é limitada superiormente. Como é crescente, segue que $\ln n \rightarrow +\infty$.

2.26 Proposição. Seja (a_n) uma sequência real.

1. Se $a_n > 0$ para todo n , então $a_n \rightarrow +\infty$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.
2. Se $a_n < 0$ para todo n , então $a_n \rightarrow -\infty$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

Demonstração. Provaremos apenas a primeira afirmação. Suponha primeiro que $a_n \rightarrow +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $n \geq N$. Como $a_n > 0$, segue que

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Portanto, $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

Reciprocamente, suponha que $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$. Dado $K > 0$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{K}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{K}$$

para todo $n \geq N$. Logo, $a_n > K$ para todo $n \geq N$, e portanto $a_n \rightarrow +\infty$. A segunda afirmação é análoga. $\square$

2.27 Exemplo. Mostremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

Como $n^{1/n} \geq 1$, podemos escrever $n^{1/n} = 1 + a_n$, com $a_n \geq 0$. Então $n = (1 + a_n)^n$. Para $n \geq 2$, pela fórmula binomial,

$$n = (1 + a_n)^n \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Assim,

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Pelo Teorema do Confronto, $a_n \rightarrow 0$. Portanto,

$$n^{1/n} = 1 + a_n \rightarrow 1.$$

Ex. 2.17 — Dê um exemplo de uma sequência não limitada que não diverge para $+\infty$ nem para $-\infty$.

Ex. 2.18 —

- a) Dê um exemplo de uma sequência convergente (s_n) de números positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1}/s_n) = 1$.

- b) Dê um exemplo de uma sequência divergente (t_n) de números positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1}/t_n) = 1$.

2.7 Propriedades do limite de sequências

Nesta seção reunimos as propriedades algébricas básicas dos limites. Elas serão usadas continuamente no cálculo de limites.

2.28 Teorema (Propriedades algébricas do limite). Seja $c \in \mathbb{R}$, e sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes, com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

Então:

- L1.** $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = cA.$
- L2.** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B.$ (Limite da soma)
- L3.** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB.$ (Limite do produto)
- L4.** Se $B \neq 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$ (Limite do quociente)
- L5.** $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|.$ (Limite do módulo)
- L6.** Se k é ímpar, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}.$ (Limite da raiz)
- L7.** Se k é par e $a_n \geq 0$ para todo n , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}.$ (Limite da raiz)

Demonstração. Provaremos os itens principais.

Para o produto por constante, se $c = 0$, a afirmação é imediata. Se $c \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $|a_n - A| < \varepsilon/|c|$ para todo $n > N$. Logo,

$$|ca_n - cA| = |c| |a_n - A| < \varepsilon.$$

Para a soma, dado $\varepsilon > 0$, existem N_1, N_2 tais que

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $n > N_1$ e $n > N_2$, respectivamente. Se $N = \max\{N_1, N_2\}$, então, para $n > N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon.$$

Para o produto, usamos que toda sequência convergente é limitada. Assim, existe $C > 0$ tal que $|b_n| \leq C$ para todo n . Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos N_1 tal que

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

para $n > N_1$. Se $A \neq 0$, escolhemos N_2 tal que

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$$

para $n > N_2$. Então, para $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - A b_n + A b_n - AB| \leq |b_n| |a_n - A| + |A| |b_n - B| < \varepsilon.$$

Se $A = 0$, o segundo termo desaparece e basta escolher N_1 de modo que $C|a_n| < \varepsilon$ para $n > N_1$.

Para o quociente, basta provar que $1/b_n \rightarrow 1/B$. Como $B \neq 0$ e $b_n \rightarrow B$, existe N_1 tal que $|b_n - B| < |B|/2$ para $n > N_1$. Então $|b_n| > |B|/2$ para $n > N_1$. Além disso, existe N_2 tal que

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon|B|^2}{2}$$

para $n > N_2$. Assim, para $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|B||b_n|} < \frac{\varepsilon|B|^2/2}{|B|(|B|/2)} = \varepsilon.$$

O resultado para $\frac{a_n}{b_n}$ segue do item do produto.

O item do módulo decorre de

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A|.$$

Para as raízes pares, usamos a seguinte estimativa: se $x, y \geq 0$, então

$$|x^{1/k} - y^{1/k}|^k \leq |x - y|.$$

Aplicando-a a $x = a_n$ e $y = A$, obtemos $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{A}$. Para raízes ímpares, o caso $A = 0$ segue do item do módulo e da estimativa anterior aplicada a $|a_n|$. Se $A \neq 0$, então, para n suficientemente grande, a_n tem o mesmo sinal de A , e o argumento reduz-se ao caso não negativo, com o sinal adequado. $\square$

2.29 Exemplo. Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

De fato,

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$

e já sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Pela propriedade da soma, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

2.30 Exemplo. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

O caso $k = 1$ já foi demonstrado. Se o resultado vale para $k-1$, então, pela propriedade do produto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

O resultado segue por indução.

2.31 Exemplo. Calculemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3}.$$

Dividindo numerador e denominador por n^2 , obtemos

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}}.$$

Como $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, pelas propriedades algébricas do limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2.$$

2.32 Exemplo. Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

Para $n \geq 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}.$$

Como $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \rightarrow e$ e $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow 1$, segue que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Ex. 2.19 — Para s_n a sequência de termo geral dado abaixo, determine a convergência ou divergência da sequência (s_n) . Calcule, caso exista, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

a) $s_n = \frac{n^4 + 3n + 1}{5n^4 + 2}$

b) $s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

c) $s_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

d) $s_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx$

e) $s_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$, onde α é um real dado

f) $s_n = \int_0^n e^{-sx} dx (s > 0)$

g) $s_n = \frac{3-2n}{1+n}$

h) $s_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$

i) $s_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1}$

j) $s_n = \frac{2^n}{3 \cdot 2^n}$

k) $s_n = \frac{n^2-2}{n+1}$

$$l) s_n = \frac{3+n-n^2}{1+2n}$$

$$m) s_n = \frac{1-n}{2^n}$$

$$n) s_n = \frac{3^n}{n^3+5}$$

$$o) s_n = \frac{n!}{2^n}$$

$$p) s_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$q) s_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$$r) s_n = \frac{n^2}{n!}$$

Ex. 2.20 — Prove por indução que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ex. 2.21 — Usando o exercício anterior, mostre que dados $p, q \in \mathbb{N}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Ex. 2.22 — (Difícil) Mostre que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^\alpha = a^\alpha.$$

Ex. 2.23 — Para cada um dos itens a seguir, prove ou forneça um contraexemplo.

- a) Se (s_n) e (t_n) são sequências divergentes, então $(s_n + t_n)$ diverge.
- b) Se (s_n) e (t_n) são sequências divergentes, então $(s_n t_n)$ diverge.
- c) Se (s_n) e $(s_n + t_n)$ são sequências convergentes, então (t_n) converge.
- d) Se (s_n) e $(s_n t_n)$ são sequências convergentes, então (t_n) converge.

Ex. 2.24 — Seja a sequência a_n definida recursivamente, estabelecendo $a_1 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}.$$

- a) Mostre que, para todo $n \geq 1$, se $a_n > 1$, então $a_{n+1} > 1$.
- b) Use o item anterior para mostrar que a sequência a_n está bem definida e que a_n é limitada inferiormente por 1.

c) Mostre que a_n é decrescente.

d) Mostre que a_n converge para algum limite $L \geq 1$.

e) Mostre que

$$\frac{2a_n - 1}{a_n} \text{ converge para } \frac{2L - 1}{L}.$$

f) Determine o valor de L

Ex. 2.25 — Prove:

a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ e $k > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} ks_n = +\infty$.

b) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ e $k < 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} ks_n = -\infty$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-s_n) = -\infty$.

d) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ e se (t_n) é uma sequência limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = +\infty$.

e) Se (s_n) converge para $L > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n) = +\infty$.

2.8 Teorema do confronto

O Teorema do Confronto é uma das ferramentas mais úteis para calcular limites. Ele afirma que, se uma sequência fica presa entre duas sequências que convergem para o mesmo limite, então ela também converge para esse limite.

2.33 Teorema (Teorema do confronto). Sejam (a_n) , (b_n) e (c_n) sequências reais tais que

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

para todo $n > n_0$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

então (b_n) converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow L$, existe M_1 tal que, para todo $n > M_1$,

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Como $c_n \rightarrow L$, existe M_2 tal que, para todo $n > M_2$,

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Tome $M = \max\{M_1, M_2, n_0\}$. Se $n > M$, então

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Logo, $|b_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > M$. Portanto, $b_n \rightarrow L$. $\square$

2.34 Exemplo. Se $|r| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

Primeiro suponha $0 < r < 1$. Então $\frac{1}{r} > 1$, e podemos escrever $\frac{1}{r} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli,

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Assim,

$$0 < r^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} \leq \frac{1}{1 + n\alpha} < \frac{1}{n\alpha}.$$

Como $\frac{1}{n\alpha} \rightarrow 0$, o Teorema do Confronto dá $r^n \rightarrow 0$.

Se $-1 < r < 0$, então $|r| \in (0, 1)$ e

$$-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n.$$

Como $|r|^n \rightarrow 0$, novamente pelo Teorema do Confronto obtemos $r^n \rightarrow 0$. O caso $r = 0$ é imediato.

2.35 Exemplo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Como $-1 \leq \sin x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos, para $n \geq 1$,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como os extremos convergem para 0, segue pelo Teorema do Confronto que $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$.

2.36 Exemplo. Se (a_n) é limitada e $b_n \rightarrow 0$, então $a_n b_n \rightarrow 0$.

Como (a_n) é limitada, existe $C > 0$ tal que $|a_n| \leq C$ para todo n . Logo,

$$-C|b_n| \leq a_n b_n \leq C|b_n|.$$

Como $|b_n| \rightarrow 0$, temos $C|b_n| \rightarrow 0$ e $-C|b_n| \rightarrow 0$. Pelo Teorema do Confronto, $a_n b_n \rightarrow 0$.

2.37 Proposição (Preservação de desigualdades). Sejam (a_n) e (b_n) sequências reais convergentes, com $a_n \rightarrow L$ e $b_n \rightarrow M$. Se $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $L \leq M$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $L > M$. Tome $\varepsilon = (L - M)/2 > 0$. Como $a_n \rightarrow L$, existe N_1 tal que, para todo $n \geq N_1$,

$$a_n > \frac{L + M}{2}.$$

Como $b_n \rightarrow M$, existe N_2 tal que, para todo $n \geq N_2$,

$$b_n < \frac{L + M}{2}.$$

Para $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, obtemos $a_n > b_n$, contradizendo a hipótese $a_n \leq b_n$. Portanto, $L \leq M$. $\square$

2.9 Subsequências

2.38 Definição. Seja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números naturais tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. A sequência $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é chamada de **subsequência** de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

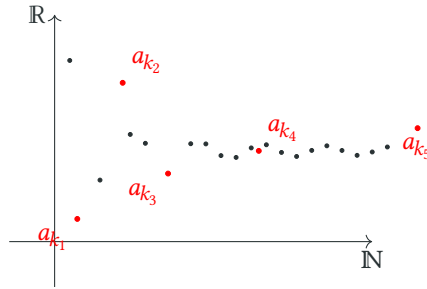


Figura 2.10

Sequência real (a_n) . Uma subsequência (a_{n_k}) é selecionada pelos pontos vermelhos.

2.39 Exemplo. Considere $a_n = (-1)^n$. Escolhendo $n_k = 2k$, obtemos a subsequência

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1,$$

isto é, $(a_{2k}) = (1, 1, 1, \dots)$. Escolhendo $m_k = 2k - 1$, obtemos

$$a_{m_k} = a_{2k-1} = -1,$$

isto é, $(a_{2k-1}) = (-1, -1, -1, \dots)$. Assim, a mesma sequência possui uma subsequência constante igual a 1 e outra constante igual a -1 .

Além disso, toda cauda de uma sequência é uma subsequência: para N fixo, a sequência $(a_{N+k})_{k=1}^{\infty}$ é obtida pela escolha estritamente crescente $n_k = N + k$.

2.40 Teorema. Se uma sequência (s_n) converge para $s \in \mathbb{R}$, então toda subsequência de (s_n) também converge para s .

Demonstração. Seja (s_{n_k}) uma subsequência de (s_n) . Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$. Como $n_k \geq k$, temos $n_k \geq N$ para todo $k \geq N$. Logo,

$$|s_{n_k} - s| < \varepsilon$$

para todo $k \geq N$. Portanto, $s_{n_k} \rightarrow s$. $\square$

2.41 Exemplo. O Teorema 2.40 também pode ser útil para mostrar que uma sequência é divergente. Se a sequência $s_n = (-1)^n$ fosse convergente para algum número s , então todas as subsequências também convergiriam para s . No entanto, as subsequências (s_{2n}) e (s_{2n-1}) convergem para valores diferentes, $+1$ e -1 , respectivamente, o que mostra que (s_n) não é convergente.

2.42 Teorema (Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Seja (s_n) uma sequência limitada. Escolha um intervalo fechado $I_0 = [a_0, b_0]$ que contenha todos os seus termos. Dividimos I_0 em duas metades. Pelo menos uma delas contém s_n para infinitos índices n ; escolhemos uma dessas metades e a chamamos I_1 .

Repetindo o procedimento, construímos intervalos fechados

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots, \quad I_j = [a_j, b_j],$$

tais que cada I_j contém termos da sequência para infinitos índices e

$$b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j}.$$

Como cada I_j contém infinitos termos, podemos escolher indutivamente índices

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots \quad \text{com} \quad s_{n_j} \in I_j.$$

Os extremos esquerdos satisfazem $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots$, enquanto os extremos direitos satisfazem $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$. Ambas as sequências são limitadas; portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_j \rightarrow \alpha, \quad b_j \rightarrow \beta.$$

Como $b_j - a_j \rightarrow 0$, segue que $\alpha = \beta$. Denotemos esse valor comum por L . Para todo j ,

$$a_j \leq s_{n_j} \leq b_j.$$

O Teorema do Confronto fornece então $s_{n_j} \rightarrow L$. Logo (s_n) possui uma subsequência convergente. $\square$

Ex. 2.26 — Dado s_k uma sequência convergente e $t_k = s_{n_k}$ com $n_k = k + n_0$ uma subsequência (estamos removendo os n_0 primeiros termos da sequência original, mantendo a ordem dos subsequentes). Então t_k converge e o limite é o mesmo da sequência s_k .

Ex. 2.27 — Se (n_k) é uma sequência crescente de números naturais então (n_k) é ilimitada.

Ex. 2.28 — Mostre que, se uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ não é limitada superiormente, então existe uma subsequência $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \infty$. Um resultado similar vale se a sequência não for limitada inferiormente, mas $-\infty$ substitui ∞ .

Ex. 2.29 — Prove que toda sequência possui uma subsequência monótona. Use isso para fornecer outra demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Dica: Considere o conjunto de todos os inteiros n com a propriedade de que $a_m \leq a_n$ para todo $m \geq n$ e reflita sobre as consequências de este conjunto ser finito ou infinito.

Ex. 2.30 — Suponha que toda subsequência da sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tem um limite, mas sem assumir que todos têm o mesmo limite. Prove que a sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ possui um limite.

Ex. 2.31 — Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais e suponha que o conjunto de valores $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ que aparece na sequência possui um ponto de acumulação L . Mostre que existe uma subsequência $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, com termos distintos, que converge para L .

2.10 Sequências de Cauchy

Quando conhecemos o limite de uma sequência, podemos comparar cada termo com esse número. Uma sequência de Cauchy formula uma ideia mais interna: para índices grandes, os próprios termos ficam arbitrariamente próximos entre si. Essa formulação é especialmente importante porque não exige que o limite seja conhecido de antemão.

2.43 Definição (Sequências de Cauchy). Uma sequência (s_n) de números reais é chamada de **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

sempre que $m, n \geq N$.

2.44 Proposição. Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Suponha que $s_n \rightarrow s$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha N tal que $|s_k - s| < \varepsilon/2$ para todo $k \geq N$. Se $m, n \geq N$, então

$$|s_n - s_m| \leq |s_n - s| + |s - s_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

2.45 Proposição. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Escolha N tal que $|s_n - s_m| < 1$ para $m, n \geq N$. Tomando $m = N$, obtemos, para $n \geq N$,

$$|s_n| \leq |s_N| + 1.$$

Os termos anteriores formam um conjunto finito. Logo, o número

$$C = |s_N| + 1 + \sum_{k=1}^{N-1} |s_k|,$$

satisfaz $|s_n| \leq C$ para todo n , inclusive quando $N = 1$, pois nesse caso a soma vazia vale zero. □

2.46 Teorema (Critério de Convergência de Cauchy). Uma sequência de números reais converge se, e somente se, é de Cauchy.

Demonstração. Já provamos uma das implicações. Suponha agora que (s_n) seja de Cauchy. Pela Proposição 2.45, ela é limitada. O Teorema de Bolzano–Weierstrass fornece uma subsequência (s_{n_k}) e um número $L \in \mathbb{R}$ tais que $s_{n_k} \rightarrow L$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolha N de modo que

$$|s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m, n \geq N).$$

Escolha depois k suficientemente grande para que $n_k \geq N$ e $|s_{n_k} - L| < \varepsilon/2$. Para todo $n \geq N$,

$$|s_n - L| \leq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - L| < \varepsilon.$$

Portanto, $s_n \rightarrow L$. □

2.47 Exemplo. A sequência das somas parciais harmônicas

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

não é de Cauchy. De fato,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Assim, arbitrariamente longe na sequência existem dois termos separados por uma distância pelo menos $1/2$.

2.10.1 Sequências de Cauchy e completude

Em $\mathbb{R}$, ser de Cauchy e ser convergente são propriedades equivalentes. Essa equivalência é outra forma de enxergar a completude: não existem “aproximações coerentes” que procurem um limite fora do espaço.

2.48 Proposição (Bolzano–Weierstrass em corpos ordenados completos).

Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, toda sequência limitada em $\mathbb{K}$ possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Pelo Teorema 1.46, $\mathbb{K}$ é arquimediano. A demonstração do Teorema 2.42 aplica-se sem alteração essencial: bissectamos um intervalo que contém a sequência, escolhemos em cada etapa uma metade que contém infinitos termos e obtemos intervalos encaixantes de comprimentos $(b_0 - a_0)/2^j$. A propriedade arquimediana garante que esses comprimentos tendem a zero; a completude fornece os limites dos extremos. O Teorema do Confronto conclui a convergência da subsequência escolhida. □

2.49 Teorema. Se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é arquimediano e toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ converge. Reciprocamente, se $\mathbb{K}$ é arquimediano e toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ converge, então $\mathbb{K}$ é completo.

Demonstração. Suponha primeiro que $\mathbb{K}$ seja completo. O argumento do Teorema 1.46, aplicado em $\mathbb{K}$, mostra que ele é arquimediano. Pela Proposição 2.48, toda sequência limitada em $\mathbb{K}$ possui uma subsequência convergente. Como toda sequência de Cauchy é limitada, ela possui uma subsequência convergente; o mesmo argumento do Teorema 2.46 força então a sequência inteira a convergir para o mesmo limite.

Reciprocamente, suponha que $\mathbb{K}$ seja arquimediano e que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ convirja. Seja $S \subset \mathbb{K}$ não vazio e limitado superiormente. Escolha $a_0 \in S$ e uma cota superior b_0 de S . Construiremos intervalos $[a_n, b_n]$ tais que

$$a_n \in S, \quad b_n \text{ é cota superior de } S, \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],$$

e

$$b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Suponha $[a_n, b_n]$ construído e ponha $m_n = (a_n + b_n)/2$. Se m_n é cota superior de S , definimos

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = m_n.$$

Se m_n não é cota superior, existe $s_{n+1} \in S$ com

$$s_{n+1} > m_n.$$

Como b_n é cota superior, também $s_{n+1} \leq b_n$. Nesse caso, definimos

$$a_{n+1} = s_{n+1}, \quad b_{n+1} = b_n.$$

Em ambos os casos, o novo intervalo está contido no anterior e seu comprimento é no máximo metade do comprimento precedente.

Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, $(b_0 - a_0)/2^n \rightarrow 0$. Se $m \geq n$, então $a_m, a_n \in [a_n, b_n]$, e portanto

$$|a_m - a_n| \leq b_n - a_n \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Logo (a_n) é de Cauchy e, por hipótese, converge para algum $s \in \mathbb{K}$. Como $0 \leq b_n - a_n \rightarrow 0$, também $b_n \rightarrow s$.

Cada b_n é cota superior de S . Portanto, para $x \in S$, temos $x \leq b_n$ para todo n , e passando ao limite obtemos $x \leq s$. Assim, s é cota superior de S .

Se $t < s$, então, como $a_n \rightarrow s$, vale $a_n > t$ para todo n suficientemente grande. Mas $a_n \in S$; logo t não é cota superior de S . Portanto s é a menor cota superior de S , isto é, $s = \sup S$. Assim, $\mathbb{K}$ é completo. $\square$

Ex. 2.32 — Dizemos que uma sequência (s_n) é contrativa se existe $0 < q < 1$ tal que

$$|s_{n+2} - s_{n+1}| \leq q|s_{n+1} - s_n|$$

para todo n . Prove que toda sequência contrativa é de Cauchy e, portanto, converge.

Ex. 2.33 — Construa uma sequência de números racionais que seja de Cauchy e que não convirja em $\mathbb{Q}$. Explique por que esse exemplo antecipa a construção dos reais do próximo capítulo.

* **Ex. 2.34** — Prove que, para corpos ordenados arquimedianos, a propriedade dos intervalos fechados encaixantes é equivalente à completude.

** **Ex. 2.35** — Mostre que a hipótese arquimediana no Teorema 2.49 não pode simplesmente ser omitida. Investigue o corpo ordenado das séries formais de Laurent $\mathbb{R}((x))$, com a ordem determinada pelo primeiro coeficiente não nulo.

2.11 Limite superior e limite inferior

A definição de limite superior e limite inferior costuma parecer mais difícil do que a ideia que ela formaliza. O ponto essencial é não começar pela fórmula. Começamos pelas *caudas* da sequência.

Para uma sequência real arbitrária (a_n) , considere, para cada n ,

$$T_n = \{a_k : k \geq n\}.$$

A cauda T_n contém tudo o que a sequência ainda pode fazer depois do índice n . Quando passamos de T_n para T_{n+1} , retiramos apenas um termo; por isso

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \dots$$

Adotamos as convenções

$\sup T_n = +\infty$ se T_n não é limitado superiormente, $\inf T_n = -\infty$ se T_n não é limitado inferiormente.

Definimos então duas sequências auxiliares com valores estendidos:

$$M_n = \sup T_n = \sup_{k \geq n} a_k, \quad m_n = \inf T_n = \inf_{k \geq n} a_k.$$

Pense em M_n como um *teto* para a cauda e em m_n como um *piso*. Sempre vale

$$m_n \leq a_k \leq M_n \quad \text{para todo } k \geq n.$$

Como as caudas diminuem,

$$M_{n+1} \leq M_n, \quad m_{n+1} \geq m_n.$$

Assim, (M_n) é não-crescente e (m_n) é não-decrescente em $[-\infty, +\infty]$. Seus limites estendidos sempre existem. É desses dois limites que surgem $\limsup$ e $\liminf$.

2.50 Definição (Limite superior e limite inferior). Seja (a_n) uma sequência real arbitrária. Definimos, em $[-\infty, +\infty]$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k,$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Em particular, $\limsup a_n = +\infty$ significa que os tetos das caudas tendem a $+\infty$, e $\liminf a_n = -\infty$ significa que os pisos tendem a $-\infty$. Essas convenções permitem aplicar literalmente os critérios posteriores de séries mesmo quando os limites envolvidos são infinitos.

Há duas observações que evitam confusões comuns. Primeiro, $\limsup a_n$ não é, em geral, o supremo de todos os termos da sequência. Ele descreve o comportamento superior *da cauda*, portanto ignora qualquer número finito de termos iniciais. Por exemplo, se

$$a_1 = 1000, \quad a_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 2),$$

então $\sup_n a_n = 1000$, mas

$$\limsup a_n = \liminf a_n = 0.$$

Segundo, o supremo ou o ínfimo de uma cauda não precisa ser atingido por nenhum termo. É por isso que trabalhamos com $\sup$ e $\inf$, e não com máximo e mínimo.

Para calcular $\limsup$ e $\liminf$ diretamente da definição, o roteiro é sempre o mesmo:

1. fixe n e olhe apenas para a cauda T_n ;
2. determine ou estime seu teto M_n e seu piso m_n ;
3. faça $n \rightarrow \infty$.

A sequência original pode oscilar para sempre. O que sempre converge são os dois envelopes: o teto das caudas desce, e o piso das caudas sobe.

2.51 Exemplo (Uma sequência que converge). Considere $a_n = 1/n$. Como a sequência é decrescente,

$$M_n = \frac{1}{n}.$$

Por outro lado, a cauda T_n contém números positivos arbitrariamente próximos de zero, e por isso

$$m_n = 0.$$

Observe que o ínfimo 0 não precisa ser um termo da sequência. Temos

$$\limsup a_n = \liminf a_n = 0.$$

2.52 Exemplo (Uma sequência que oscila). Considere

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Os termos pares são positivos e decrescem para 1; os termos ímpares são negativos e crescem para -1 . Se $j \geq 1$, então

$$M_{2j-1} = M_{2j} = 1 + \frac{1}{2j},$$

enquanto

$$m_{2j-1} = -1 - \frac{1}{2j-1}, \quad m_{2j} = -1 - \frac{1}{2j+1}.$$

Logo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

Aqui fica visível o papel das duas envoltórias: o teto segue os picos positivos e o piso segue os vales negativos.

2.53 Proposição (Caracterização por ε). Seja (a_n) limitada e seja $L \in \mathbb{R}$. Então $L = \limsup a_n$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$:

1. eventualmente, $a_n < L + \varepsilon$;
2. existem infinitos índices n para os quais $a_n > L - \varepsilon$.

Analogamente, $L = \liminf a_n$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$:

1. eventualmente, $a_n > L - \varepsilon$;
2. existem infinitos índices n para os quais $a_n < L + \varepsilon$.

Demonstração. Provaremos apenas a afirmação sobre o limite superior. Escreva $M_n = \sup_{k \geq n} a_k$.

Se $M_n \rightarrow L$, então, dado $\varepsilon > 0$, para n grande temos $M_n < L + \varepsilon$. Como $a_n \leq M_n$, segue a primeira condição. Se a segunda falhasse, então, a partir de algum índice N , teríamos $a_n \leq L - \varepsilon$. Isso implicaria $M_N \leq L - \varepsilon$, impossível porque (M_n) é não-crescente e converge para L , logo $M_N \geq L$.

Reciprocamente, suponha as duas condições. A primeira fornece N tal que, para $n \geq N$, toda a cauda está abaixo de $L + \varepsilon$; portanto $M_n \leq L + \varepsilon$. A segunda garante que toda cauda contém algum termo maior que $L - \varepsilon$, e então $M_n \geq L - \varepsilon$ para todo n . Assim, para $n \geq N$,

$$L - \varepsilon \leq M_n \leq L + \varepsilon,$$

e portanto $M_n \rightarrow L$. □

Essa proposição fornece uma leitura prática do símbolo $\limsup$: depois de algum ponto, a sequência não ultrapassa significativamente L , mas continua voltando arbitrariamente perto de L por baixo. O limite inferior descreve o comportamento simétrico.

2.54 Teorema (Limite superior e subsequências). Seja (a_n) uma sequência real limitada. Então

1. $\limsup a_n$ é o maior limite de uma subsequência convergente de (a_n) ;
2. $\liminf a_n$ é o menor limite de uma subsequência convergente de (a_n) .

Demonstração. Provaremos a primeira afirmação. Ponha $L = \limsup a_n$ e $M_n = \sup_{k \geq n} a_k$. Construiremos uma subsequência que converge para L .

Escolha N_1 tal que $|M_{N_1} - L| < 1$. Pela propriedade do supremo, existe $n_1 \geq N_1$ com

$$a_{n_1} > M_{N_1} - 1.$$

Depois de escolhido n_j , escolha $N_{j+1} > n_j$ tão grande que

$$|M_{N_{j+1}} - L| < \frac{1}{j+1},$$

e escolha $n_{j+1} \geq N_{j+1}$ tal que

$$a_{n_{j+1}} > M_{N_{j+1}} - \frac{1}{j+1}.$$

Temos, portanto,

$$L - \frac{2}{j} < a_{n_j} \leq M_{N_j} < L + \frac{1}{j}$$

para j suficientemente grande. Logo $a_{n_j} \rightarrow L$.

Agora seja $a_{k_j} \rightarrow \ell$ qualquer subsequência convergente. Fixado N , para j suficientemente grande temos $k_j \geq N$, e então

$$a_{k_j} \leq M_N.$$

Passando ao limite, $\ell \leq M_N$. Como isso vale para todo N ,

$$\ell \leq \inf_N M_N = L.$$

Portanto, nenhum limite subsequencial é maior que L , e L é de fato o maior deles. A prova para o limite inferior é análoga. $\square$

2.55 Teorema (Critério de convergência por $\limsup$ e $\liminf$). Seja (a_n) uma sequência real limitada. Então (a_n) converge se, e somente se,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Nesse caso, o valor comum é $\lim a_n$.

Demonstração. Se os dois limites são iguais a L , então

$$m_n \leq a_n \leq M_n,$$

com $m_n \rightarrow L$ e $M_n \rightarrow L$. O Teorema do Confronto dá $a_n \rightarrow L$.

Reciprocamente, suponha $a_n \rightarrow L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon \quad (k \geq N).$$

Logo, para $n \geq N$,

$$L - \varepsilon \leq m_n \leq M_n \leq L + \varepsilon.$$

Passando ao limite e usando a arbitrariedade de ε , obtemos $\liminf a_n = \limsup a_n = L$. $\square$

2.56 Definição (Oscilação de uma sequência). Para uma sequência limitada (a_n) , definimos sua oscilação por

$$\omega(a_n) = \limsup a_n - \liminf a_n.$$

O teorema anterior diz exatamente que uma sequência limitada converge se, e somente se, sua oscilação é zero.

A mesma ideia reaparecerá no capítulo de integração para medir a oscilação de uma função em vizinhanças de um ponto: aqui encolhemos caudas de uma sequência; lá, encolheremos vizinhanças no domínio.

2.57 Proposição (Monotonicidade). Se (a_n) e (b_n) são sequências reais arbitrárias e $a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande, então

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n, \quad \liminf a_n \leq \liminf b_n.$$

Demonstração. Depois de descartar um número finito de termos, podemos supor $a_n \leq b_n$ para todo n . Para cada cauda,

$$\sup_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} b_k, \quad \inf_{k \geq n} a_k \leq \inf_{k \geq n} b_k.$$

Basta tomar limites. □

As propriedades algébricas de $\limsup$ e $\liminf$ são úteis, mas não trazem uma nova ideia conceitual. Por isso, serão desenvolvidas nos exercícios.

Ex. 2.36 — Calcule $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$ para cada sequência:

- a) $a_n = (-1)^n$;
- b) $a_n = (-1)^n + 1/n$;
- c) $a_n = 1 + (-1)^n/n$;
- d) $a_n = \cos(n\pi/2)$;
- e) $a_n = 1$ se n é um quadrado perfeito e $a_n = 0$ caso contrário.

Ex. 2.37 — Prove diretamente das definições que

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n, \quad \liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

Ex. 2.38 — Se (a_n) e (b_n) são limitadas, prove

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

e

$$\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n.$$

Dê um exemplo em que a primeira desigualdade seja estrita.

Ex. 2.39 — Prove as caracterizações

$$\limsup a_n = \sup\{r \in \mathbb{R} : a_n > r \text{ para infinitos valores de } n\}$$

e

$$\liminf a_n = \inf\{r \in \mathbb{R} : a_n < r \text{ para infinitos valores de } n\}.$$

Ex. 2.40 — Mostre que uma sequência limitada converge para L se, e somente se, L é o único limite possível de suas subsequências convergentes. **Dica:** se a sequência não convergir para L , extraia uma subsequência que permaneça a uma distância positiva de L e aplique Bolzano-Weierstrass.

**** Ex. 2.41** — Use o fato de que, se α é irracional, as partes fracionárias de $n\alpha$ são densas em $[0, 1]$, para provar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sin n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sin n = -1.$$

Esse exercício é opcional: o resultado de densidade usado aqui pertence a um tópico posterior.

2.12 Sequências e a topologia da reta

Conjuntos fechados também podem ser caracterizados em termos de sequências.

2.58 Proposição. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, o limite de toda sequência convergente em F pertence a F .

Demonstração. Suponha primeiro que F é fechado e que (x_n) é uma sequência convergente de pontos $x_n \in F$ tal que $x_n \rightarrow x$. Então, toda vizinhança de x contém pontos $x_n \in F$. Isso implica que $x \notin F^c$, já que F^c é aberto e todo $y \in F^c$ possui uma vizinhança $V \subset F^c$ que não contém pontos em F . Portanto, $x \in F$.

Reciprocamente, suponha que o limite de toda sequência convergente de pontos em F pertença a F . Seja $x \in F^c$. Então, x deve ter uma vizinhança $V \subset F^c$; caso contrário, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F$ tal que $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$, de modo que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, e x seria o limite de uma sequência em F . Assim, F^c é aberto e F é fechado. $\square$

A seguinte proposição fornece uma definição sequencial de um ponto de acumulação.

2.59 Proposição. Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em A com $x_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha que $x \in \mathbb{R}$ seja um ponto de acumulação de A . Logo temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A \setminus \{x\}$ tal que $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$. Segue-se que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Reciprocamente, se x é o limite de uma sequência (x_n) em A com $x_n \neq x$, e V é uma vizinhança de x , então $x_n \in V \setminus \{x\}$ para n suficientemente grande, o que prova que x é um ponto de acumulação de A . $\square$

2.60 Exemplo. Se

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

então 0 é um ponto de acumulação de A , pois $(1/n)$ é uma sequência em A tal que $1/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, 1 não é um ponto de acumulação de A , pois não existem sequências em A com termos distintos de 1 que convergem para 1. Todos os elementos de A diferentes de 1 são menores que $\frac{1}{2}$, e logo não se aproximam de 1.

Ex. 2.42 — Prove que todo número real é limite de uma sequência de números racionais.

3

Construção dos reais

Nos capítulos anteriores, tratamos os números reais axiomáticamente: partimos de um corpo ordenado completo e deduzimos dele as propriedades necessárias para a Análise. Esse ponto de vista é o mais eficiente para desenvolver a teoria, mas deixa uma pergunta em aberto. Existe, de fato, um objeto matemático que satisfaz simultaneamente os axiomas de corpo, de ordem e de completude?

Neste capítulo, responderemos afirmativamente a essa pergunta. A primeira construção parte de sequências de Cauchy de números racionais. A ideia é simples: um número real pode ser aproximado por racionais com precisão arbitrária, mesmo quando o próprio número ainda não está disponível em $\mathbb{Q}$. O que podemos reconhecer inteiramente dentro de $\mathbb{Q}$ é que as aproximações se tornam progressivamente próximas entre si.

Esse ponto é importante. Não podemos definir $\sqrt{2}$, por exemplo, como “o limite” de uma sequência racional antes de termos construído o espaço no qual esse limite vive. Podemos, porém, reconhecer uma sequência racional de Cauchy sem mencionar nenhum número real. É essa observação que torna a construção possível.

Ao final, veremos também uma segunda construção, por cortes de Dedekind. As duas realizam a mesma ideia de completude por caminhos diferentes: a primeira completa $\mathbb{Q}$ acrescentando limites ausentes; a segunda preenche suas lacunas por meio da ordem.

3.1 Construção via sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$

Uma expansão decimal sugere naturalmente a ideia de aproximação. Ao escrever

$$3, \quad 3,1, \quad 3,14, \quad 3,141, \quad 3,1415, \dots,$$

produzimos uma sequência de racionais cujos termos se tornam cada vez mais próximos. A construção que segue abstrai exatamente esse fenômeno.

Neste capítulo

- ▶ **Construção via sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$** (p. 83)
- ▶ **Completude** (p. 88)
- ▶ **Unicidade** (p. 92)
- ▶ **Cortes de Dedekind** (p. 93)
- ▶ **Exercícios** (p. 100)

Ideia central

Completar $\mathbb{Q}$ significa acrescentar os limites que faltam. Sequências de Cauchy e cortes de Dedekind realizam essa mesma ideia por caminhos diferentes.

3.1 Definição (Sequências nulas de números racionais). Uma sequência $x = (x_n)$ de números racionais é chamada de **sequência nula** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, com $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Denotamos por $\mathcal{N}$ o conjunto das sequências nulas de números racionais.

Assim, $(1/n)$, $((-1)^n/n)$ e $(n/(n^2+1))$ pertencem a $\mathcal{N}$. A definição usa apenas a ordem, as operações e o valor absoluto em $\mathbb{Q}$.

3.2 Definição (Sequências de Cauchy de números racionais). Uma sequência $x = (x_n)$ de números racionais é chamada de **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, com $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \text{para todos } m, n \geq N.$$

Denotamos por $\mathcal{C}$ o conjunto das sequências de Cauchy de números racionais.

Quando uma sequência racional é vista, depois da construção de $\mathbb{R}$, como uma sequência real, esta definição coincide com a do capítulo anterior. A quantificação por $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ é usada aqui justamente para que nenhuma propriedade dos reais seja pressuposta na construção.

Toda sequência nula é de Cauchy. Além disso, sequências de Cauchy são limitadas, e as operações termo a termo preservam as classes que precisaremos usar.

3.3 Lema (Limitação das sequências de Cauchy). Toda sequência de Cauchy de números racionais é limitada.

Demonstração. Seja $x = (x_n)$ uma sequência de Cauchy. Existe N tal que $|x_n - x_N| < 1$ para $n \geq N$. Com a convenção de que uma soma vazia vale zero, ponha

$$M = |x_N| + 1 + \sum_{k=1}^{N-1} |x_k|.$$

Então $|x_n| < |x_N| + 1 \leq M$ para $n \geq N$, enquanto $|x_n| \leq M$ para $n < N$. Logo x é limitada. $\square$

3.4 Proposição. Sejam x, y sequências racionais.

1. se $x, y \in \mathcal{C}$, então $x + y \in \mathcal{C}$ e $xy \in \mathcal{C}$;
2. se $x, y \in \mathcal{N}$, então $x + y \in \mathcal{N}$ e $xy \in \mathcal{N}$;
3. se $x \in \mathcal{N}$ e $y \in \mathcal{C}$, então $xy \in \mathcal{N}$.

Os itens 1 e 2 são consequências diretas das estimativas triangulares e ficam como parte do Exercício 3.1. O terceiro item é o elo que será usado na boa definição do produto, por isso o registramos aqui.

Demonstração do item 3. Se $x \in \mathcal{N}$ e $y \in \mathcal{C}$, o Lema 3.3 fornece $M \in \mathbb{Q}$, $M > 0$, tal que $|y_n| \leq M$ para todo n . Dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (n \geq N).$$

Logo

$$|x_n y_n| \leq M |x_n| < \varepsilon \quad (n \geq N),$$

e portanto $xy \in \mathcal{N}$. □

Duas seqüências de Cauchy podem representar a mesma aproximação assintótica. Isso ocorre precisamente quando sua diferença é nula.

3.5 Definição. Para $x, y \in \mathcal{C}$, definimos

$$x \sim y \iff x - y \in \mathcal{N}.$$

3.6 Proposição. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$.

Demonstração. A reflexividade segue de $x - x = 0 \in \mathcal{N}$. Se $x - y \in \mathcal{N}$, então $y - x = -(x - y) \in \mathcal{N}$, o que prova a simetria. Finalmente, se $x - y \in \mathcal{N}$ e $y - z \in \mathcal{N}$, então

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{N}$$

pela Proposição 3.4. Logo a relação é transitiva. □

Denotamos por

$$[x] = \{y \in \mathcal{C} : y \sim x\}$$

a classe de equivalência de x .

3.7 Definição (Números reais). Definimos

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathcal{C} / \sim,$$

isto é, $\tilde{\mathbb{R}}$ é o conjunto das classes de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais.

A partir daqui, o trabalho consiste em transportar para $\tilde{\mathbb{R}}$ as operações e a ordem de $\mathbb{Q}$, verificando que elas não dependem do representante escolhido.

3.1.1 Operações e o mergulho dos racionais

Para $q \in \mathbb{Q}$, escrevemos $\bar{q}$ para a seqüência constante $\bar{q}_n = q$.

3.8 Definição (Seqüências constantes de números racionais). A aplicação $q \mapsto \bar{q}$ associa a cada racional uma seqüência de Cauchy constante. Observe que $\bar{q} \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $q = 0$.

3.9 Definição (Operações sobre os números reais). Para $[x], [y] \in \widetilde{\mathbb{R}}$, definimos

$$[x] + [y] := [x + y], \quad [x] [y] := [xy].$$

Antes de usar essas fórmulas, é indispensável verificar que elas são independentes dos representantes.

3.10 Proposição. As operações da Definição 3.9 estão bem definidas.

Demonstração. Suponha que $x \sim x'$ e $y \sim y'$. Escreva

$$p = x' - x \in \mathcal{N}, \quad q = y' - y \in \mathcal{N}.$$

Então

$$(x' + y') - (x + y) = p + q \in \mathcal{N},$$

logo $x' + y' \sim x + y$. Para o produto,

$$x'y' - xy = (x + p)(y + q) - xy = py + xq + pq.$$

Como $x, y \in \mathcal{C}$ e $p, q \in \mathcal{N}$, a Proposição 3.4 mostra que os três termos do lado direito pertencem a $\mathcal{N}$. Portanto $x'y' \sim xy$. $\square$

O único axioma de corpo que merece atenção especial é a existência do inverso multiplicativo. Para tratá-lo, isolamos primeiro uma propriedade elementar das sequências de Cauchy não nulas.

3.11 Proposição (Separação do zero). Se $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$, então existem $a \in \mathbb{Q}$, com $a > 0$, e $N \in \mathbb{N}$ tais que exatamente uma das alternativas vale:

$$x_n > a \quad \text{para todo } n \geq N, \quad \text{ou} \quad x_n < -a \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Além disso, qualquer sequência $y \sim x$ tem, a partir de alguma ordem, o mesmo sinal de x .

Demonstração. Se para todo $a > 0$ e todo N existisse $n \geq N$ com $|x_n| \leq a$, a propriedade de Cauchy implicaria que x seria nula: dado $\varepsilon > 0$, escolha N tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$ para $m, n \geq N$, e depois escolha $m \geq N$ com $|x_m| \leq \varepsilon/2$. Então, para $n \geq N$,

$$|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon.$$

Como $x \notin \mathcal{N}$, existem portanto $a > 0$ racional e N_0 tais que $|x_n| > a$ para todo $n \geq N_0$.

Escolha agora $N \geq N_0$ de modo que $|x_m - x_n| < a$ para $m, n \geq N$. Dois termos dessa cauda não podem ter sinais opostos, pois nesse caso

$$|x_m - x_n| = |x_m| + |x_n| > 2a.$$

Logo toda a cauda tem o mesmo sinal, o que prova a primeira afirmação.

Se $y \sim x$, então $|x_n - y_n| < a/2$ para todo n suficientemente grande. Assim, uma cauda de x situada acima de a força a cauda correspondente de y a ficar acima de $a/2$; o caso negativo é análogo. $\square$

3.12 Definição (Ordem em $\tilde{\mathbb{R}}$). Dizemos que $[x] > 0$ se existem $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n > a \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Pela Proposição 3.11, essa condição não depende do representante. Definimos, então,

$$r < s \iff s - r > 0.$$

3.13 Teorema (Estrutura de corpo). Com as operações da Definição 3.9, $\tilde{\mathbb{R}}$ é um corpo.

Demonstração. Os elementos neutros são $[\bar{0}]$ e $[\bar{1}]$, e o oposto de $[x]$ é $[-x]$. Associatividade, comutatividade e distributividade são herdadas termo a termo de $\mathbb{Q}$; essas verificações são reunidas no Exercício 3.2.

Resta verificar o inverso multiplicativo. Seja $[x] \neq [\bar{0}]$. Pela Proposição 3.11, existem $a > 0$ racional e N tais que $|x_n| > a$ para $n \geq N$. Defina

$$y_n = \begin{cases} 0, & n < N, \\ 1/x_n, & n \geq N. \end{cases}$$

Para $m, n \geq N$,

$$|y_n - y_m| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n x_m|} \leq \frac{1}{a^2} |x_n - x_m|,$$

de modo que $y \in \mathcal{C}$. Além disso, $x_n y_n = 1$ para $n \geq N$, logo $xy - \bar{1} \in \mathcal{N}$. Portanto

$$[x][y] = [\bar{1}].$$

□

3.14 Definição (Mergulho canônico de $\mathbb{Q}$ em $\tilde{\mathbb{R}}$). Definimos

$$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}, \quad \varphi(q) = [\bar{q}].$$

3.15 Teorema. A aplicação φ é injetora e preserva soma, produto e ordem. Identificaremos, daqui em diante, $\mathbb{Q}$ com sua imagem $\varphi(\mathbb{Q}) \subset \tilde{\mathbb{R}}$.

Demonstração. Se $[\bar{p}] = [\bar{q}]$, então a sequência constante $\overline{p - q}$ é nula, o que só ocorre quando $p = q$. Logo φ é injetora. As identidades

$$\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}, \quad \overline{pq} = \bar{p} \bar{q}$$

mostram que soma e produto são preservados. Finalmente, se $p < q$, a sequência constante $\overline{q - p}$ é estritamente maior que o racional positivo $(q - p)/2$; portanto $\varphi(p) < \varphi(q)$. □

3.16 Teorema (Corpo ordenado). A ordem da Definição 3.12 torna $\tilde{\mathbb{R}}$ um corpo ordenado.

Demonstração. Primeiro, $0 \notin \tilde{\mathbb{R}}^+$: a sequência constante nula não fica estritamente acima de racional positivo algum e a definição de positividade é independente do representante.

Se $r \neq 0$, a Proposição 3.11 mostra que exatamente uma das relações $r > 0$ ou $-r > 0$ vale. Assim, a ordem é total.

Se $r = [x] > 0$ e $s = [y] > 0$, existem $a, b > 0$ racionais e um índice N tais que $x_n > a$ e $y_n > b$ para $n \geq N$. Consequentemente,

$$x_n + y_n > a + b > 0, \quad x_n y_n > ab > 0,$$

para n suficientemente grande. Logo $r + s > 0$ e $rs > 0$. Essas duas propriedades são exatamente as condições de compatibilidade entre a ordem e as operações de corpo. $\square$

3.2 Completeness

Até aqui construímos um corpo ordenado que contém uma cópia de $\mathbb{Q}$. Falta a propriedade decisiva: provar que esse corpo não possui lacunas. É justamente nesse ponto que a construção por sequências de Cauchy precisa devolver o que prometeu.

A estratégia será construir o supremo de um conjunto limitado por bisseções racionais. Para isso, começamos com duas observações sobre a ordem recém-definida.

3.17 Proposição. Se $x \in \mathcal{C}$ representa $r \in \tilde{\mathbb{R}}$ e existe N tal que

$$x_n \geq 0 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

então $r \geq 0$.

Demonstração. Se $r < 0$, então $-r > 0$. Pela definição de positividade, existiriam $a > 0$ racional e M tais que $-x_n > a$ para todo $n \geq M$, isto é, $x_n < -a < 0$ nessa cauda. Isso contradiz a hipótese. Logo $r \geq 0$. $\square$

3.18 Proposição. Se $r > 0$ em $\tilde{\mathbb{R}}$, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < p < r.$$

Demonstração. Seja x um representante de r . Pela definição de positividade, existem $a > 0$ racional e N tais que $x_n > a$ para $n \geq N$. A sequência $(x_n - a)$ é então eventualmente não negativa; pela Proposição 3.17, temos $r - a \geq 0$, isto é, $a \leq r$. Tomando $p = a/2$, obtemos

$$0 < p < a \leq r,$$

e portanto $0 < p < r$. □

3.19 Proposição (Densidade dos racionais). Se $r, s \in \tilde{\mathbb{R}}$ e $r < s$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r < q < s.$$

Demonstração. Como $s - r > 0$, pela Proposição 3.18 existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < p < s - r.$$

Seja $x = (x_n)$ um representante de r . Como x é de Cauchy, existe N tal que

$$|x_n - x_N| < \frac{p}{3} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Defina

$$q = x_N + \frac{p}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Para $n \geq N$,

$$q - x_n = \frac{p}{2} + (x_N - x_n) > \frac{p}{6},$$

logo $q - r > 0$ e, portanto, $r < q$. Por outro lado,

$$p - (q - x_n) = \frac{p}{2} + (x_n - x_N) > \frac{p}{6},$$

de modo que $q - r < p$. Como $p < s - r$, segue que

$$q < r + p < s.$$

Assim, $r < q < s$. □

Agora podemos cercar qualquer conjunto não vazio e limitado superiormente por dois racionais cuja distância inicial é 1.

3.20 Proposição. Seja $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ não vazio e limitado superiormente. Então existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que p não é cota superior de A , enquanto $p + 1$ é cota superior de A .

Demonstração. Escolha $a \in A$ e uma cota superior u de A . Pela densidade de $\mathbb{Q}$, podemos escolher racionais s, q tais que

$$a - 1 < s < a, \quad u < q < u + 1.$$

Assim, s não é cota superior de A , enquanto q é.

Pela propriedade arquimediana dos racionais, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > q - s.$$

Logo $s + n > q$, e portanto $s + n$ também é cota superior de A . Considere

$$E = \{m \in \mathbb{N} : s + m \text{ é cota superior de } A\}.$$

O conjunto E é não vazio; seja m_0 seu menor elemento. Defina

$$p = s + m_0 - 1.$$

Então $p + 1 = s + m_0$ é cota superior. Se $m_0 = 1$, temos $p = s$, que não é cota superior. Se $m_0 > 1$, a minimalidade de m_0 mostra que $s + (m_0 - 1) = p$ não é cota superior. Em ambos os casos, p tem a propriedade desejada. $\square$

A partir desse primeiro intervalo racional, repetimos a bisseção e conservamos, em cada etapa, uma extremidade que não é cota superior e outra que é.

3.21 Proposição. Seja $A \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}$ não vazio e limitado superiormente. Existem sequências racionais (p_n) e (q_n) tais que, para todo $n \geq 1$,

1. p_n não é cota superior de A ;
2. q_n é cota superior de A ;
3. $q_n - p_n = 2^{-(n-1)}$;
4. $p_n \leq p_{n+1} \leq q_{n+1} \leq q_n$.

Demonstração. Escolha p_1 pela Proposição 3.20 e ponha $q_1 = p_1 + 1$. Suponha construídos p_n, q_n . Defina o ponto médio

$$m_n = \frac{p_n + q_n}{2}.$$

Se m_n é cota superior de A , ponha

$$p_{n+1} = p_n, \quad q_{n+1} = m_n.$$

Caso contrário, ponha

$$p_{n+1} = m_n, \quad q_{n+1} = q_n.$$

As quatro propriedades são preservadas e o comprimento do intervalo é dividido por 2 a cada passo. A construção segue por indução. $\square$

3.22 Proposição. As sequências (p_n) e (q_n) da Proposição 3.21 são sequências de Cauchy equivalentes.

Demonstração. Se $m \geq n$, a monotonicidade e o encaixe dos intervalos dão

$$0 \leq p_m - p_n \leq q_n - p_n = 2^{-(n-1)}$$

e

$$0 \leq q_n - q_m \leq q_n - p_n = 2^{-(n-1)}.$$

Essa quantidade pode ser tornada menor que qualquer racional positivo sem recorrer a uma teoria prévia de convergência. De fato, dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, a propriedade arquimediana de $\mathbb{Q}$ fornece N tal que $N > 1/\varepsilon$. Pela desigualdade de Bernoulli,

$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq n$. Portanto, para $n \geq N$, temos $2^{-(n-1)} \leq 1/n < \varepsilon$. As estimativas anteriores mostram que ambas as sequências são de Cauchy. Além disso,

$$|q_n - p_n| = 2^{-(n-1)} < \varepsilon \quad (n \geq N),$$

logo $q - p \in \mathcal{N}$, isto é, $p \sim q$. $\square$

Chegamos agora ao ponto central da construção. A prova a seguir merece ser lida com atenção: é nela que uma sequência de intervalos racionais encaixados produz, dentro do corpo que construímos, o supremo de um conjunto arbitrário limitado superiormente.

3.23 Teorema (Completeness). Todo subconjunto não vazio de $\tilde{\mathbb{R}}$ que é limitado superiormente possui supremo.

Demonstração. Seja $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ não vazio e limitado superiormente. Construa (p_n) e (q_n) como nas Proposições 3.21 e 3.22. Como $p \sim q$, as duas sequências representam o mesmo número real; denote-o por

$$r = [p] = [q].$$

Mostraremos que $r = \sup A$.

Primeiro, r é cota superior de A . Suponha, ao contrário, que exista $a \in A$ com $r < a$. Pela densidade dos racionais, escolha $t \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r < t < a.$$

Como $t - r > 0$ e (q_n) representa r , pela definição da ordem existem $\delta > 0$ racional e N tais que

$$t - q_n > \delta > 0 \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Assim, $q_n < t < a$ para $n \geq N$. Mas cada q_n é cota superior de A , o que exigiria $a \leq q_n$. Contradição. Logo r é cota superior.

Resta provar que nenhuma cota superior é menor que r . Suponha que s seja uma cota superior de A e que $s < r$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$, escolha $t \in \mathbb{Q}$ com

$$s < t < r.$$

Como $r - t > 0$ e (p_n) representa r , existem $\delta > 0$ racional e N tais que

$$p_n - t > \delta > 0 \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Fixe um desses índices. Como p_n não é cota superior de A , existe $a_n \in A$ tal que

$$a_n > p_n > t > s.$$

Isso contradiz o fato de s ser cota superior de A . Portanto nenhuma cota superior pode ser menor que r .

Concluimos que r é a menor cota superior de A , isto é,

$$r = \sup A.$$

$\square$

A construção está agora completa: começamos apenas com $\mathbb{Q}$, formamos classes de seqüências de Cauchy, definimos nelas operações e ordem e acabamos de provar a propriedade do supremo.

3.24 Teorema (Existência dos reais). Existe um corpo ordenado completo.

3.3 Unicidade

A construção anterior produz um corpo ordenado completo, mas isso não significa que exista uma única realização conjuntista desse objeto. O enunciado correto é estrutural: quaisquer duas realizações são isomorfas como corpos ordenados.

3.25 Definição. Sejam $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ corpos ordenados. Um **isomorfismo de corpos ordenados** é uma bijeção

$$\varphi : \mathbb{K}_1 \longrightarrow \mathbb{K}_2$$

tal que, para todos $a, b \in \mathbb{K}_1$,

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

e

$$a < b \iff \varphi(a) < \varphi(b).$$

3.26 Teorema (Unicidade do corpo ordenado completo). Quaisquer dois corpos ordenados completos são isomorfos. Mais ainda, existe um único isomorfismo de corpos ordenados entre eles que identifica as cópias canônicas de $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Identifique em cada corpo sua cópia canônica de $\mathbb{Q}$. Para $x \in K_1$, ponha

$$L_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}, \quad \varphi(x) = \sup_{K_2} L_x.$$

A propriedade arquimediana fornece inteiros m, n com $-m < x < n$; logo L_x é não vazio e limitado superiormente. A densidade de $\mathbb{Q}$ mostra que $\varphi(q) = q$ para $q \in \mathbb{Q}$.

Se $x < y$, existem racionais r, s tais que $x < r < s < y$. Então r é cota superior de L_x e $s \in L_y$, de modo que $\varphi(x) \leq r < s \leq \varphi(y)$. Assim, φ preserva estritamente a ordem.

Dados $a < x$ e $b < y$, temos $a + b < x + y$; reciprocamente, se $t < x + y$, a densidade permite escolher $a < x$ com $t - a < y$ e depois $b \in \mathbb{Q}$ com $t - a < b < y$. Tomando supremos, obtemos $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. O argumento análogo com aproximações racionais positivas e a monotonicidade do produto dá $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para $x, y > 0$; os demais sinais seguem dos opostos.

Construa analogamente $\psi : K_2 \rightarrow K_1$. Para todo racional q , a densidade dá

$$q < \varphi(x) \iff q < x.$$

Logo x e $\psi(\varphi(x))$ têm os mesmos racionais estritamente abaixo deles; se fossem distintos, haveria um racional entre ambos. Portanto $\psi \circ \varphi$ é a identidade, e simetricamente $\varphi \circ \psi$ também é. Assim, φ é um isomorfismo.

Por fim, qualquer isomorfismo de corpos ordenados fixa $\mathbb{Q}$ e preserva os conjuntos L_x e seus supremos. Consequentemente, ele coincide com φ , provando a unicidade. $\square$

Assim, quando falamos em o corpo dos números reais, estamos usando a unicidade a menos de isomorfismo. A construção por sequências de Cauchy é uma realização concreta desse objeto; a construção de Dedekind, que veremos a seguir, produzirá outra.

3.4 Cortes de Dedekind

A construção por sequências de Cauchy completa $\mathbb{Q}$ a partir de aproximações. Dedekind parte de outra característica dos racionais: sua ordem possui lacunas. Em vez de representar um real por uma sequência, representaremos sua posição na reta pelo conjunto dos racionais que ficam estritamente à sua direita.

Usaremos a convenção de *cortes superiores*. Para um racional r , o modelo é

$$Q_r := \{q \in \mathbb{Q} : q > r\}.$$

O ponto de fronteira r não pertence ao corte. Para um real ausente de $\mathbb{Q}$, como $\sqrt{2}$, a fronteira não será racional, mas o subconjunto de $\mathbb{Q}$ ainda poderá ser descrito inteiramente em termos racionais.

3.27 Definição (Corte de Dedekind). Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ é um **corte de Dedekind superior** se:

1. $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{Q}$;
2. se $x \in A$ e $y \in \mathbb{Q}$ satisfaz $y \geq x$, então $y \in A$;
3. A não possui elemento mínimo.

A antecipação do Capítulo 1 usa a convenção equivalente de um par inferior–superior e pode atribuir ao lado superior um ponto de fronteira racional. Para passar desse par (L, U) à convenção aberta usada aqui, substitui-se U por $U^\circ = \{q \in \mathbb{Q} : \text{existe } u \in U \text{ com } u < q\}$. Reciprocamente, dado um corte superior aberto A , toma-se $L = \{q \in \mathbb{Q} : \text{existe } c \notin A \text{ com } q < c\}$ e $U = \mathbb{Q} \setminus L$. Essas operações apenas decidem em qual lado colocar uma eventual fronteira racional e representam a mesma separação de $\mathbb{Q}$.

3.28 Exemplo (Cortes racionais). Para $r \in \mathbb{Q}$, o conjunto

$$Q_r = \{q \in \mathbb{Q} : q > r\}$$

é um corte de Dedekind. Ele é não vazio e próprio; é fechado para cima; e, dado $q > r$, a densidade de $\mathbb{Q}$ fornece q' com $r < q' < q$, de modo que q não pode ser mínimo.

A caracterização seguinte explica por que os cortes Q_r são exatamente aqueles cuja fronteira já pertence a $\mathbb{Q}$.

3.29 Proposição. Um corte de Dedekind $A \subseteq \mathbb{Q}$ possui ínfimo em $\mathbb{Q}$ se, e somente se, $A = Q_r$ para algum $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Se $A = Q_r$, então r é cota inferior de A . Se $t > r$, a densidade de $\mathbb{Q}$ fornece a com $r < a < t$. Como $a \in Q_r = A$, o número t não é cota inferior de A . Logo $\inf A = r$.

Reciprocamente, suponha que $r = \inf A \in \mathbb{Q}$. Todo $a \in A$ satisfaz $r \leq a$, e a igualdade é impossível porque A não possui mínimo. Assim, $a > r$, e portanto $A \subseteq Q_r$.

Se $x > r$, então x não pode ser cota inferior de A , pois é estritamente maior que o ínfimo. Existe, portanto, $a \in A$ com $a < x$. Como A é fechado para cima, $x \in A$. Logo $Q_r \subseteq A$, e $A = Q_r$. $\square$

3.30 Exemplo (O corte de $\sqrt{2}$). Considere

$$D_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 > 2\}.$$

Esse conjunto é um corte de Dedekind e não possui ínfimo racional. Pela Proposição 3.29, não é da forma Q_r com $r \in \mathbb{Q}$. A verificação detalhada, que usa a irracionalidade de $\sqrt{2}$ apenas para excluir um ínfimo racional, é o Exercício 3.6.

3.4.1 A ordem dos cortes

Escrevemos $A^c = \mathbb{Q} \setminus A$.

3.31 Proposição. Se A é um corte de Dedekind, então

$$A^c = \{x \in \mathbb{Q} : x < a \text{ para todo } a \in A\}.$$

Em particular, A^c é fechado para baixo.

Demonstração. Se $x \notin A$ e existisse $a \in A$ com $a \leq x$, o fechamento de A para cima implicaria $x \in A$, contradição. Portanto $x < a$ para todo $a \in A$.

Reciprocamente, se $x < a$ para todo $a \in A$, então $x \notin A$, pois do contrário poderíamos tomar $a = x$. A afirmação sobre o fechamento para baixo é imediata. $\square$

Uma propriedade especial dos cortes superiores é que quaisquer dois deles são comparáveis por inclusão.

3.32 Proposição. Se A e B são cortes de Dedekind, então exatamente uma das relações

$$A \subsetneq B, \quad A = B, \quad B \subsetneq A$$

vale.

Demonstração. Suponha $A \neq B$. Se nenhum dos conjuntos estivesse contido no outro, existiriam

$$a \in A \setminus B, \quad b \in B \setminus A.$$

Se $a \leq b$, o fechamento de A para cima daria $b \in A$, contradição. Se $b \leq a$, o fechamento de B para cima daria $a \in B$, novamente uma contradição. Logo um dos cortes está propriamente contido no outro. $\square$

3.33 Definição. Definimos

$$\widehat{\mathbb{R}} := \{A \subseteq \mathbb{Q} : A \text{ é um corte de Dedekind}\}.$$

Para $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$, definimos a ordem por inclusão reversa:

$$A < B \iff A \not\supseteq B, \quad A \leq B \iff A \supseteq B.$$

Essa inversão é natural para cortes superiores: se $r < s$, então

$$Q_r \not\supseteq Q_s.$$

3.34 Proposição. Seja $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ e $r \in \mathbb{Q}$. Então:

1. $A > Q_r$ se, e somente se, existe $q \in A^c$ tal que $q > r$;
2. $A \geq Q_r$ se, e somente se, $r \in A^c$;
3. se $A < Q_0$, então $-A > Q_0$, onde $-A$ será definido a seguir.

Demonstração. Para o item 1, suponha primeiro $A > Q_r$. Pela definição da ordem, $A \subsetneq Q_r$. Escolha $q \in Q_r \setminus A$. Então $q \in A^c$ e $q > r$.

Reciprocamente, suponha que exista $q \in A^c$ com $q > r$. Pela Proposição 3.31, todo $a \in A$ satisfaz $a > q > r$, logo $A \subseteq Q_r$. Como $q \in Q_r \setminus A$, a inclusão é estrita e $A > Q_r$.

O item 2 é uma reformulação da mesma ideia: $A \geq Q_r$ significa $A \subseteq Q_r$, o que equivale a $r \notin A$, isto é, $r \in A^c$.

O item 3 será concluído depois da definição do oposto, mas registramos aqui a consequência que será usada na definição do produto. Sua verificação aparece ao final da Proposição 3.36. $\square$

3.4.2 Operações com cortes

Começamos pela soma e pelo oposto.

3.35 Definição. Para $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$, definimos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

e

$$-A = \{r \in \mathbb{Q} : -r < c \text{ para algum } c \in A^c\}.$$

3.36 Proposição. Sejam $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$.

1. $A + B$ é um corte de Dedekind;
2. $-A$ é um corte de Dedekind;
3. se $A \geq Q_0$ e $B \geq Q_0$, então

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$$

é um corte de Dedekind;

4. se $A > Q_0$, então

$$I(A) := \left\{ r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } \frac{1}{r} < c \text{ para algum } c \in A^c \right\}$$

é um corte de Dedekind.

Demonstração. Para o item 1, $A + B$ é não vazio. Se $p \in A^c$ e $q \in B^c$, então $p < a$ e $q < b$ para todos $a \in A, b \in B$; logo $p + q < a + b$ para todo $a + b \in A + B$, e portanto $p + q \notin A + B$. Assim, $A + B \neq \mathbb{Q}$.

Se $r = a + b \in A + B$ e $s \geq r$, então

$$a' = a + (s - r) \geq a.$$

Como A é fechado para cima, $a' \in A$, e $s = a' + b \in A + B$. Finalmente, se $r = a + b \in A + B$, escolha $a' \in A$ com $a' < a$; então $a' + b \in A + B$ e $a' + b < r$. Logo $A + B$ não possui mínimo.

Para o item 2, escolha $c \in A^c$. Então $-c + 1 \in -A$, logo $-A \neq \emptyset$. Se $a \in A$, não pode existir $c \in A^c$ com $a < c$, pois todo elemento de A^c é menor que todo elemento de A . Portanto $-a \notin -A$, e $-A \neq \mathbb{Q}$.

Se $r \in -A$ e $s \geq r$, existe $c \in A^c$ com $-r < c$; como $-s \leq -r < c$, temos $s \in -A$. Se $r \in -A$, escolha $c \in A^c$ com $-r < c$ e depois, pela densidade de $\mathbb{Q}$, escolha d com

$$-r < d < c.$$

Então $-d < r$ e $-(-d) = d < c$, logo $-d \in -A$. Portanto $-A$ não tem mínimo.

Para o item 3, observe que $A \geq Q_0$ e $B \geq Q_0$ significam $A, B \subseteq Q_0$; em particular, todos os seus elementos são positivos. Assim, $AB \neq \emptyset$ e $0 \notin AB$, logo $AB \neq \mathbb{Q}$. Se $r = ab \in AB$ e $s \geq r$, então $b > 0$ e

$$a' = \frac{s}{b} \geq a.$$

Logo $a' \in A$ e $s = a'b \in AB$. Se $r = ab \in AB$, escolha $a' \in A$ com $0 < a' < a$; então $a'b < ab$, mostrando que AB não possui mínimo.

Para o item 4, como $A > Q_0$, o item 1 da Proposição 3.34 fornece $c_0 \in A^c$ com $c_0 > 0$. Então qualquer racional $r > 1/c_0$ pertence a $I(A)$, de modo que $I(A) \neq \emptyset$. Escolha $a \in A$. Como $A \subseteq Q_0$, temos $a > 0$; o número $1/a$ não pertence a $I(A)$, pois a condição $a < c$ é impossível para $c \in A^c$. Logo $I(A) \neq \mathbb{Q}$.

Se $r \in I(A)$ e $s \geq r$, então $s > 0$ e $1/s \leq 1/r < c$ para algum $c \in A^c$, logo $s \in I(A)$. Por fim, se $r \in I(A)$, escolha $c \in A^c$ com $1/r < c$. Pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe d tal que

$$\frac{1}{r} < d < c.$$

Então $d > 0$, $r' = 1/d < r$ e $1/r' = d < c$. Logo $r' \in I(A)$, e $I(A)$ não possui mínimo.

Resta justificar o item 3 da Proposição 3.34. Se $A < Q_0$, então $A \not\supseteq Q_0$. Existe, portanto, $a_0 \in A$ com $a_0 \leq 0$; como A não tem mínimo, podemos escolher $a \in A$ com $a < 0$. Todo $c \in A^c$ satisfaz $c < a < 0$. Se $r \in -A$, então $-r < c < 0$ para algum $c \in A^c$, e portanto $r > 0$. Logo $-A \subseteq Q_0$. Além disso, $-a/2 > 0$ não pertence a $-A$, pois $a/2 > a > c$ para todo $c \in A^c$. Assim $-A \subsetneq Q_0$, isto é, $-A > Q_0$. $\square$

Agora podemos definir o produto em todos os casos e o inverso de todo elemento não nulo.

3.37 Definição. Para $A, B \in \hat{\mathbb{R}}$, definimos

$$A \cdot B = \begin{cases} \{ab : a \in A, b \in B\}, & A \geq Q_0, B \geq Q_0, \\ -[(-A) \cdot B], & A < Q_0, B \geq Q_0, \\ -[A \cdot (-B)], & A \geq Q_0, B < Q_0, \\ (-A) \cdot (-B), & A < Q_0, B < Q_0. \end{cases}$$

Se $A \neq Q_0$, definimos

$$A^{-1} = \begin{cases} I(A), & A > Q_0, \\ -I(-A), & A < Q_0. \end{cases}$$

Uma pequena propriedade de aproximação dos cortes será útil para identificar o oposto aditivo.

3.38 Lema (Lacunas racionais arbitrariamente pequenas). Se $A \in \hat{\mathbb{R}}$ e $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, existem $c \in A^c$ e $a \in A$ tais que

$$0 < a - c < \varepsilon.$$

Demonstração. Escolha $c_0 \in A^c$ e $a_0 \in A$. Pela Proposição 3.31, $c_0 < a_0$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$h := \frac{a_0 - c_0}{N} < \varepsilon.$$

Entre os pontos $c_0 + kh$, $k = 0, \dots, N$, o primeiro está fora de A e o último pertence a A . Seja k_0 o menor índice para o qual $c_0 + k_0 h \in A$. Então

$$c = c_0 + (k_0 - 1)h \in A^c, \quad a = c_0 + k_0 h \in A,$$

e $a - c = h < \varepsilon$. $\square$

3.39 Teorema (Estrutura algébrica e de ordem dos cortes). Com a ordem e as operações acima, $\hat{\mathbb{R}}$ é um corpo ordenado. Seu zero é Q_0 e sua unidade é Q_1 .

Demonstração. A Proposição 3.32 mostra que a ordem é total. A associatividade e a comutatividade da soma seguem diretamente das propriedades correspondentes em $\mathbb{Q}$.

Mostremos a identidade aditiva. Se $a \in A$, escolha $c \in A$ com $c < a$. Como $a - c > 0$, temos $a - c \in Q_0$, e

$$a = c + (a - c) \in A + Q_0.$$

Logo $A \subseteq A + Q_0$. Reciprocamente, se $d = s + t \in A + Q_0$, então $t > 0$, de modo que $d > s$. Como $s \in A$ e A é fechado para cima, $d \in A$. Portanto

$$A + Q_0 = A.$$

Agora provemos que $-A$ é de fato o oposto aditivo de A . Se $x = a + t \in A + (-A)$, existe $c \in A^c$ tal que $-t < c$. Pela Proposição 3.31, $c < a$; logo $-t < a$, isto é, $x = a + t > 0$. Assim,

$$A + (-A) \subseteq Q_0.$$

Para a inclusão inversa, seja $x \in Q_0$, isto é, $x > 0$. Pelo Lema 3.38, escolha $c \in A^c$ e $a \in A$ com $a - c < x$. Então

$$a - x < c,$$

portanto $x - a \in -A$. Consequentemente,

$$x = a + (x - a) \in A + (-A).$$

Logo $A + (-A) = Q_0$.

A compatibilidade da ordem com a soma também é transparente. Se $A < B$, então $A \not\supseteq B$, e portanto $A + C \supseteq B + C$. A inclusão não pode ser uma igualdade: se fosse, somando $-C$ aos dois lados e usando associatividade e o oposto já provados, obteríamos $A = B$. Assim,

$$A + C < B + C.$$

As verificações multiplicativas — associatividade, unidade, inverso, distributividade e compatibilidade da ordem com o produto positivo — são mais longas por causa da separação em casos de sinal, mas não introduzem uma ideia nova. Elas constituem o Exercício 3.8. Com essas verificações, todos os axiomas de corpo ordenado ficam estabelecidos. $\square$

3.4.3 Completude dos cortes

A grande vantagem da convenção por cortes superiores aparece agora: o ínfimo de uma família é simplesmente sua união.

3.40 Proposição. Se $\mathcal{A}$ é uma família não vazia de cortes de Dedekind e

$$\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \neq \mathbb{Q},$$

então $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ é um corte de Dedekind.

Demonstração. Defina $L = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$. O conjunto L é não vazio e, por hipótese, próprio. Se $x \in L$, então $x \in X$ para algum $X \in \mathcal{A}$. Para $y \geq x$, o fechamento de X para cima dá $y \in X \subseteq L$. Finalmente, como X não possui mínimo, existe $z \in X \subseteq L$ com $z < x$. Portanto L é um corte. $\square$

3.41 Teorema (Existência do ínfimo). Todo subconjunto não vazio de $\widehat{\mathbb{R}}$ que é limitado inferiormente possui ínfimo.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ não vazio e limitado inferiormente. Defina

$$L = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X.$$

Como $\mathcal{A}$ possui um limitante inferior, existe $B \in \widehat{\mathbb{R}}$ tal que

$$B \leq X \quad \text{para todo } X \in \mathcal{A}.$$

Pela definição da ordem reversa, isso significa $B \supseteq X$ para todo $X \in \mathcal{A}$. Logo

$$L \subseteq B \neq \mathbb{Q}.$$

A Proposição 3.40 mostra então que $L \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Para cada $X \in \mathcal{A}$, temos $L \supseteq X$, portanto $L \leq X$. Assim, L é um limitante inferior de $\mathcal{A}$.

Se B' é qualquer outro limitante inferior, então $B' \supseteq X$ para todo $X \in \mathcal{A}$; consequentemente,

$$B' \supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X = L.$$

Pela ordem reversa, isso equivale a $B' \leq L$. Logo L é o maior dos limitantes inferiores, isto é,

$$L = \inf \mathcal{A}.$$

□

3.42 Corolário (Propriedade do supremo). Todo subconjunto não vazio de $\widehat{\mathbb{R}}$ que é limitado superiormente possui supremo.

Demonstração. Seja $S \subseteq \widehat{\mathbb{R}}$ não vazio e limitado superiormente. Então

$$-S := \{-x : x \in S\}$$

é não vazio e limitado inferiormente. Seja $m = \inf(-S)$. Para $x \in S$, temos $m \leq -x$, logo $x \leq -m$; portanto $-m$ é cota superior de S . Se u é outra cota superior de S , então $-u$ é cota inferior de $-S$, de modo que $-u \leq m$, ou seja, $-m \leq u$. Portanto

$$-m = \sup S.$$

□

3.43 Teorema (Construção de Dedekind). O conjunto $\widehat{\mathbb{R}}$, munido das operações e da ordem definidas acima, é um corpo ordenado completo.

Temos, assim, duas construções concretas de um corpo ordenado completo: $\widetilde{\mathbb{R}}$, obtido de seqüências de Cauchy, e $\widehat{\mathbb{R}}$, obtido de cortes de Dedekind. Pelo Teorema 3.26, elas são isomorfas como corpos ordenados.

O ponto conceitual do capítulo é justamente este: a partir daqui, a maneira escolhida para construir os reais deixa de ser essencial. O que usaremos nos capítulos seguintes são suas propriedades abstratas — corpo, ordem e completude. As duas construções servem para garantir que esse objeto existe e que não há ambiguidade estrutural em chamá-lo de *os números reais*.

3.5 Exercícios

As verificações deixadas fora do fluxo principal estão reunidas aqui. Elas completam os detalhes algébricos das duas construções sem interromper a linha conceitual do capítulo.

Ex. 3.1 — Demonstre os três itens da Proposição 3.4, usando o Lema 3.3. Em particular, mostre explicitamente por que o produto de uma sequência nula por uma sequência de Cauchy é nulo.

Ex. 3.2 — Complete a demonstração do Teorema 3.13: verifique diretamente, nas classes de equivalência, a associatividade e a comutatividade da soma e do produto, a existência do oposto aditivo e a distributividade. Indique em cada passo onde é usada a boa definição das operações.

Ex. 3.3 — Mostre que, para $r \in \widetilde{\mathbb{R}}$, as seguintes condições são equivalentes:

1. $r > 0$;
2. todo representante $x = (x_n)$ de r é eventualmente positivo e fica uniformemente afastado de zero, isto é, existem $a > 0$ racional e N tais que $x_n > a$ para $n \geq N$;
3. algum representante possui essa propriedade.

Explique por que a condição “eventualmente positivo” sem afastamento uniforme de zero não seria suficiente para distinguir um número positivo do zero.

Ex. 3.4 — Prove que o mergulho canônico $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ do Teorema 3.15 preserva também subtração, inversos multiplicativos não nulos e valor absoluto.

Ex. 3.5 — Mostre que a definição de corte superior usada neste capítulo é equivalente à seguinte: uma decomposição $\mathbb{Q} = L \sqcup U$, com $L, U \neq \emptyset$, tal que $x < y$ para todos $x \in L, y \in U$, e U não possui elemento mínimo.

Ex. 3.6 — Prove diretamente que

$$D_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \text{ e } q^2 > 2\}$$

é um corte de Dedekind. Mostre que ele não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$. Você pode usar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ já estabelecida no Capítulo 1, mas a definição do conjunto e todas as verificações devem permanecer internas a $\mathbb{Q}$.

Ex. 3.7 — Mostre que a aplicação

$$\iota : \mathbb{Q} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad \iota(r) = Q_r,$$

é injetora e preserva ordem e soma. Depois de estabelecidas as propriedades multiplicativas do exercício seguinte, mostre também que $Q_r Q_s = Q_{rs}$ para $r, s \geq 0$, e conclua a preservação do produto para todos os sinais.

Ex. 3.8 — Complete a demonstração do Teorema 3.39. Prove:

1. $-A = Q_{-1} \cdot A$ e $-(-A) = A$;
2. $(AB)C = A(BC)$ e $AB = BA$;
3. $AQ_1 = A$;
4. se $A \neq Q_0$, então $AA^{-1} = Q_1$;
5. $A(B + C) = AB + AC$;
6. se $A < B$ e $C > Q_0$, então $AC < BC$.

Nos itens envolvendo sinais negativos, reduza primeiro ao caso não negativo usando as definições por casos. Registre cuidadosamente onde o fato de os cortes não possuírem mínimo é necessário.

Ex. 3.9 — Dê uma prova direta da propriedade do supremo em $\widehat{\mathbb{R}}$, sem passar pelo ínfimo e pela negação. Sugestão: procure descrever $\sup \mathcal{A}$ em termos de interseções de cortes e determine qual pequena correção pode ser necessária para garantir a ausência de elemento mínimo.

Ex. 3.10 — Usando o Teorema 3.26, construa o isomorfismo de corpos ordenados entre $\widetilde{\mathbb{R}}$ e $\widehat{\mathbb{R}}$ e mostre que ele envia a classe da sequência constante $\bar{q}$ no corte racional Q_q , para todo $q \in \mathbb{Q}$.

4

Séries

Uma série numérica é uma soma infinita interpretada por meio do limite de suas somas parciais. Essa interpretação é essencial: embora a notação sugira uma soma com infinitas parcelas, o objeto rigoroso que se estuda é uma sequência de somas finitas. Desse modo, a teoria das séries prolonga naturalmente a teoria das sequências, mas introduz fenômenos próprios das somas infinitas.

Neste capítulo, estudaremos critérios de convergência, convergência absoluta e condicional, séries alternadas, rearranjos e exemplos fundamentais. O objetivo é desenvolver ferramentas que permitam decidir quando uma soma infinita é bem definida e compreender de que modo seu valor depende da estrutura dos termos e, em certos casos, da ordem em que eles são somados.

4.1 Convergência

A teoria começa exatamente onde terminou o capítulo anterior: uma série é convergente quando a sequência de suas somas parciais converge. Convém manter essa tradução em mente, pois quase todos os argumentos deste capítulo serão, em última instância, argumentos sobre sequências.

Dada uma sequência (a_n) de números reais, associamos a ela a sequência (s_n) de suas somas parciais, definida por

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

e, em geral,

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

A expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

é chamada **série infinita**, ou simplesmente **série**. A sequência (s_n) é chamada **sequência das somas parciais**, e s_n é a n -ésima soma parcial da série. Os **termos** da série são os números $a_1, a_2, a_3, \dots$, enquanto $s_1, s_2, s_3, \dots$ são suas somas parciais.

Neste capítulo

- ▶ Convergência (p. 102)
- ▶ Primeiros modelos: séries que podemos somar (p. 107)
- ▶ Séries de termos não negativos: comparar com modelos (p. 111)
- ▶ Sinais e cancelamento (p. 118)
- ▶ A ordem dos termos importa (p. 125)
- ▶ O número e revisitado (p. 129)
- ▶ Representação decimal dos números reais II (p. 131)

Ideia central

Uma série é uma sequência de somas parciais. Os critérios de convergência são maneiras diferentes de controlar essas somas e seus cancelamentos.

4.1 Exemplo.

1. As primeiras somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ são

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

2. As primeiras somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ são

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \quad s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

3. As primeiras somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ são

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + x, \quad s_3 = 1 + x + x^2, \quad s_4 = 1 + x + x^2 + x^3.$$

O estudo de uma série reduz-se, portanto, ao estudo de sua sequência de somas parciais.

4.2 Definição (Convergência de séries). Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série e seja $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ sua sequência de somas parciais. Dizemos que a série **converge** para L se $s_n \rightarrow L$, isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > M$,

$$|s_n - L| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - L \right| < \varepsilon.$$

Nesse caso, L é chamado **soma** da série.

Observação. Por abuso de linguagem, é usual escrever $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tanto para a série quanto, quando há convergência, para a sua soma.

Assim como ocorre nas somas finitas, o índice de uma série é uma variável muda. Portanto,

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j = \sum_{k=0}^{\infty} z_k.$$

Também usaremos a notação

$$\sum_{j=m}^{\infty} z_j := \sum_{k=0}^{\infty} z_{m+k},$$

sempre que os termos envolvidos estejam definidos.

A convergência de uma série não depende de seus termos iniciais, mas apenas do comportamento de sua cauda. Mais precisamente, vale a proposição seguinte.

4.3 Proposição. A série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge se, e somente se, a série $\sum_{j=m+1}^{\infty} z_j$ converge. Nesse caso,

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = \sum_{j=1}^m z_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} z_j.$$

Demonstração. Se $s_n = \sum_{j=1}^n z_j$, então, para $n \geq m$, temos

$$\sum_{j=m+1}^n z_j = s_n - \sum_{j=1}^m z_j.$$

Logo, a sequência das somas parciais da série de cauda difere da sequência (s_n) apenas por uma constante. Portanto, uma delas converge se, e somente se, a outra converge, e a identidade da soma segue passando ao limite. $\square$

4.4 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

é um dos exemplos mais simples de série convergente.

Provemos que ela converge para 1. A soma parcial dos primeiros n termos é

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Como se trata de uma soma geométrica finita,

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

e logo

$$|s_n - 1| = \frac{1}{2^n}$$

de modo que s_n tende a 1.

4.5 Teorema. Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, então $a_k \rightarrow 0$.

Demonstração. Seja $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Como a série converge, a sequência (s_n) converge para algum número s . Para $n \geq 2$, temos

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Como $s_n \rightarrow s$ e também $s_{n-1} \rightarrow s$, segue que

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0.$$

Portanto, $a_n \rightarrow 0$. $\square$

4.6 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2 + 7}$$

diverge. De fato, seu termo geral satisfaz

$$\frac{n^2}{3n^2 + 7} = \frac{1}{3 + 7/n^2} \rightarrow \frac{1}{3} \neq 0.$$

Logo, a condição necessária $a_n \rightarrow 0$ não é satisfeita, e a série diverge pelo Teorema 4.5.

4.7 Exemplo. A série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

diverge. Ela é um exemplo fundamental: seus termos tendem a zero, mas a série não converge. Ao longo do texto, denotaremos por H_n sua n -ésima soma parcial, isto é,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Para provar a divergência,¹ consideremos a subsequência $(H_{2^k})_{k \geq 0}$. Agrupando os termos entre potências sucessivas de 2, obtemos

$$H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right).$$

Em cada bloco

$$\frac{1}{2^{j-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^j}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

há 2^{j-1} termos, todos maiores ou iguais a $1/2^j$. Portanto, cada bloco é maior ou igual a $1/2$. Assim,

$$H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}.$$

Como essa subsequência é ilimitada, a sequência (H_n) também é ilimitada. Logo, a série harmônica diverge.

Linearidade

Como vimos na Seção 1.6, os somatórios finitos possuem as seguintes propriedades:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (\text{propriedade aditiva}) \quad (4.1)$$

$$\sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{propriedade homogênea}). \quad (4.2)$$

O próximo teorema é a extensão natural dessas propriedades para séries infinitas convergentes.

4.8 Teorema. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries convergentes e se $c, d \in \mathbb{R}$, então a série $\sum (ca_n + db_n)$ também converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + db_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (4.3)$$

¹Essa demonstração é atribuída a Nicole Oresme, por volta de 1350.

Demonstração. Para cada n , pelas propriedades dos somatórios finitos,

$$\sum_{k=1}^n (ca_k + db_k) = c \sum_{k=1}^n a_k + d \sum_{k=1}^n b_k. \quad (4.4)$$

Passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, o primeiro termo do lado direito converge para $c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e o segundo para $d \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Logo, a sequência das somas parciais de $\sum (ca_n + db_n)$ converge, e sua soma é dada por (4.3). $\square$

O teorema anterior tem o seguinte corolário, frequentemente útil para concluir divergência.

4.9 Corolário. Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge, então $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

Demonstração. De fato, $b_n = (a_n + b_n) - a_n$. Se $\sum (a_n + b_n)$ convergisse, então, pela linearidade e pela convergência de $\sum a_n$, a série $\sum b_n$ também convergiria. Isso contradiz a hipótese. Logo, $\sum (a_n + b_n)$ diverge. $\square$

4.10 Exemplo. A série $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k + 1/2^k)$ diverge, pois $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverge e $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$ converge.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes, a série $\sum (a_n + b_n)$ pode convergir ou divergir. Por exemplo, se $a_n = b_n = 1$ para todo n , então $\sum (a_n + b_n)$ diverge. Por outro lado, se $a_n = 1$ e $b_n = -1$ para todo n , então $\sum (a_n + b_n)$ converge.

4.11 Teorema (Critério de Cauchy para séries). A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

sempre que $n \geq m \geq N$.

Demonstração. Seja $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Se a série converge, então (s_n) é uma sequência de Cauchy. Escolhendo N suficientemente grande e tomando $n \geq m \geq N$, temos

$$|a_m + \cdots + a_n| = |s_n - s_{m-1}| < \varepsilon,$$

após aumentar N em uma unidade, se necessário.

Reciprocamente, suponha que as caudas da série satisfaçam a condição do enunciado. Para $n > m \geq N$,

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Logo (s_n) é de Cauchy. Pela completude de $\mathbb{R}$, ela converge; portanto a série converge. $\square$

O critério de Cauchy muda o ponto de vista: em vez de procurar a soma, podemos perguntar se toda cauda suficientemente distante tem soma pequena. Essa ideia será decisiva quando tratarmos de convergência absoluta.

Ex. 4.1 — Dadas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, suponha que existe um número natural N tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq N$. Prove que $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, $\sum b_n$ é convergente. Assim, a convergência de uma série não é afetada pela alteração de um número finito de termos. (Claro, o valor da soma pode mudar.)

Ex. 4.2 — Seja (a_n) uma sequência de números reais não negativos. Prove que $\sum a_n$ converge se, e somente se, a sequência das somas parciais é limitada.

Ex. 4.3 — Prove que a série $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ converge se, e somente se, $\sum_{j=m+1}^{\infty} z_j$ converge. Se uma dessas séries converge, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_j = \sum_{j=1}^m z_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} z_j.$$

Ex. 4.4 — Reprove diretamente, a partir do critério de Cauchy para sequências, o Teorema 4.11:

Uma série infinita $\sum a_n$ converge se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, se $n \geq m \geq N$, então

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

4.2 Primeiros modelos: séries que podemos somar

Antes de acumular critérios de decisão, vale conhecer séries cuja soma pode ser calculada diretamente. Elas serão nossas primeiras referências: mais adiante, em vez de tentar somar uma série complicada, tentaremos compará-la com um desses modelos.

4.2.1 Série geométrica

A série geométrica é obtida somando os termos de uma progressão geométrica, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} px^{k-1}.$$

Como vimos no exercício 1.14, se $x \neq 1$, então a n -ésima soma parcial é dada por

$$\sum_{k=1}^n px^{k-1} = \frac{p - px^n}{1 - x}.$$

No caso $x = 1$, temos simplesmente

$$\sum_{k=1}^n p = np.$$

Passemos ao limite das somas parciais. Se $x \neq 1$, então

$$\sum_{k=1}^n px^{k-1} = \frac{p - px^n}{1 - x} = p \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Assim, o comportamento das somas parciais é determinado pelo comportamento de x^n . Como vimos no exercício 2.34, se $|x| < 1$, então $x^n \rightarrow 0$, e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n px^{k-1} = \frac{p}{1 - x}.$$

Se $|x| \geq 1$ e $p \neq 0$, os termos px^{k-1} não tendem a zero. Portanto, pela condição necessária de convergência, a série diverge.

Obtemos, assim, o seguinte resultado.

4.12 Teorema (Série geométrica). Sejam $p, x \in \mathbb{R}$. Se $|x| < 1$, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} px^{k-1}$ converge e

$$p + px + px^2 + \dots = \frac{p}{1 - x}. \quad (4.5)$$

Se $|x| \geq 1$ e $p \neq 0$, então a série diverge. Se $p = 0$, a série converge para 0, qualquer que seja x .

Algumas consequências imediatas são as seguintes.

4.13 Exemplo.

1. Tomando $p = 1$ na fórmula da série geométrica, obtemos

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

2. Tomando $p = 1$ e substituindo x por $-x$, obtemos

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1 + x}, \quad |x| < 1.$$

4.14 Exemplo.

A série

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \dots$$

é geométrica, de termo inicial 3 e razão $-2/5$. Como $|-2/5| < 1$, ela converge, e sua soma é

$$3 - \frac{6}{5} + \frac{12}{25} - \frac{24}{125} + \dots = \frac{3}{1 + 2/5} = \frac{15}{7}.$$

4.2.2 Série telescópica

A propriedade telescópica de soma (vide exercício 1.6.c)) nos diz que

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Uma série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é dita **telescópica** em relação à sequência (b_n) se cada termo a_n puder ser expresso como

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

4.15 Exemplo. Para a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, temos as somas parciais dadas por

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

e logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge para 1.

O exemplo anterior pode ser generalizado para o seguinte teorema.

4.16 Teorema. Seja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ uma série telescópica em relação à sequência (b_n) , isto é, suponha que $a_n = b_n - b_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Então:

1. a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se, e somente se, a sequência (b_n) converge;
2. se $b_n \rightarrow b$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b.$$

Demonstração. Seja s_n a n -ésima soma parcial. Então

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Logo, (s_n) converge se, e somente se, (b_{n+1}) converge, o que equivale à convergência de (b_n) . Se $b_n \rightarrow b$, então

$$s_n = b_1 - b_{n+1} \rightarrow b_1 - b,$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b.$$

□

4.17 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}$$

converge e sua soma é $1/6$. De fato,

$$\frac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

Portanto, a série é telescópica com $b_n = 1/((n+1)(n+2))$. Como $b_1 = 1/6$ e $b_n \rightarrow 0$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{1}{6}.$$

Exercícios básicos

Ex. 4.5 — Para cada uma das séries abaixo, identifique se ela é geométrica, telescópica ou se possui somas parciais que podem ser simplificadas diretamente. Determine se a série converge e, quando convergir, calcule sua soma.

a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{3^j}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+2)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$

c) $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{4}{j^2 - 4}$

j) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}$

d) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{j^2 + 4j + 3}$

k) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j} + \sqrt{j+1}}$

e) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{6}{(3j-2)(3j+1)}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$

Exercícios complementares

Ex. 4.6 — Seja (x_j) uma sequência de números reais não nulos tal que $x_j \rightarrow +\infty$. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{j+1}} \right)$ converge.

Ex. 4.7 — Pode $\sum_{j=0}^{\infty} (x_j + y_j)$ convergir quando pelo menos uma de $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ diverge?

Ex. 4.8 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ converge, onde $z_j \neq 0$ para todo j , então $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z_j}$ diverge.

Ex. 4.9 — A série $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j 2^{1/j}$ é convergente?

Ex. 4.10 — Mostre que $\sum_{j=1}^{\infty} a^j$ converge se, e somente se, $a = 0$.

Ex. 4.11 — Avalie as seguintes somas:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j + 2j}{3^j};$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5^j} - \frac{1}{j(j+1)} \right).$

Ex. 4.12 — Seja (x_n) uma sequência decrescente de termos positivos e suponha que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$. Este resultado é conhecido como o teorema de Pringsheim.

Dica: Defina $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Como (x_n) é decrescente, $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n x_k \geq (n-m)x_n$. Além disso, $n-m \geq n/2$. Use o fato de que $S_n - S_m \rightarrow 0$.

4.3 Séries de termos não negativos: comparar com modelos

Para termos não negativos não há cancelamento: as somas parciais só podem crescer. A pergunta deixa então de ser “qual é a soma?” e passa a ser “esse crescimento permanece limitado?”. As próximas ferramentas são três formas da mesma estratégia: comparar a série desconhecida com um comportamento que já entendemos.

4.3.1 Comparação termo a termo

Começamos pelo caso em que a desigualdade entre os termos é visível. Para séries de termos não negativos, as somas parciais são crescentes; por isso, comparar termos equivale a comparar o crescimento dessas somas.

4.18 Teorema. Se $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$, então a série $\sum a_n$ converge se e somente se a sequência das respectivas somas parciais é limitada superiormente.

Se as somas parciais são limitadas superiormente por um número M , então a soma da série não pode exceder M .

4.19 Teorema (Critério da Comparação). Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries infinitas de termos não negativos. Isto é, $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ para todo n . Então:

1. Se $\sum a_n$ converge e $0 \leq b_n \leq a_n$ para todo n , então $\sum b_n$ converge.
2. Se $\sum a_n$ diverge e $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum b_n$ diverge.

Demonstração. Seja $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ a sequência de somas parciais de $\sum b_n$. Como $b_n \geq 0$ para todo n , a sequência (t_n) é crescente.

Na parte 1, se $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, então $0 \leq t_n \leq s_n$ para todo n . Como $\sum a_n$ converge, a sequência (s_n) é limitada superiormente; logo, (t_n) também é limitada superiormente. Pelo teorema da convergência monótona, (t_n) converge, e portanto $\sum b_n$ converge.

A parte 2 é a contrapositiva da parte 1: se $\sum b_n$ convergisse e $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n , então $\sum a_n$ também convergiria, o que contradiz a hipótese. Portanto, $\sum b_n$ diverge. $\square$

4.20 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

converge. Para todo $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1))$ converge pelo Exemplo 4.15, o critério da comparação implica a convergência da série dada.

4.21 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge. De fato, $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$, e portanto

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)}$ converge, o critério da comparação implica a convergência de $\sum 1/n!$.

4.22 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

diverge. De fato, para $n \geq 3$, temos $\log n > 1$, e portanto

$$\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}.$$

Como a série harmônica diverge, o critério da comparação implica a divergência da série dada.

Exercícios básicos

Ex. 4.13 — Use o Critério da Comparação para determinar se as séries são convergentes ou divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Ex. 4.14 — Mostre que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^j \sqrt{j}}$ converge.

Ex. 4.15 — Mostre que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j}}$ diverge.

Ex. 4.16 — Seja (x_n) uma sequência de termos positivos e suponha que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ também converge.

Ex. 4.17 — Seja (x_n) uma sequência de termos positivos. Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge se, e somente se, $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{1+x_j}$ converge.

Ex. 4.18 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ converge, então $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x_j|}{j}$ também converge.

Exercícios mais difíceis

*** **Ex. 4.19** —

- Seja (a_n) uma sequência decrescente de termos não negativos. Prove o critério de condensação de Cauchy: a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.
- Use a parte (a) para mostrar que a série p -série $\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.
- Use as partes (a) e (b) para mostrar que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \leq 1$.

A comparação direta é poderosa quando a desigualdade é evidente, mas às vezes obriga a adivinhar uma estimativa pouco natural. Há outra maneira de construir séries-modelo: transformar a soma discreta em uma questão sobre áreas.

4.3.2 Comparação com integrais e séries p

Comparar uma série nova só é útil quando já possuímos bons modelos. A série geométrica é um deles; as séries p formarão outra família fundamental. O elo entre somas e integrais fornece esses modelos de maneira sistemática.

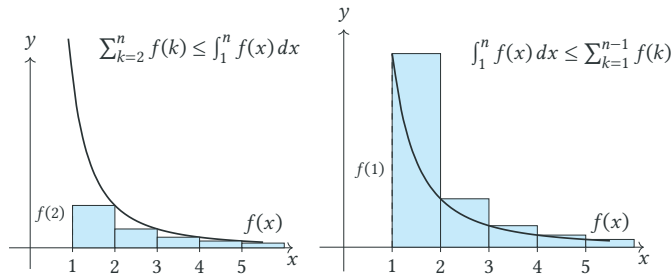


Figura 4.1 Ilustração do critério de comparação com a integral.

4.23 Teorema (Critério de comparação com a integral). Seja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente. Então a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

converge se, e somente se, a integral imprópria

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

converge.

Demonstração. Escreva $a_k = f(k)$ e $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Como f é decrescente, para todo $k \geq 2$ e todo $x \in [k-1, k]$ temos $f(k) \leq f(x)$. Logo,

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx.$$

Se $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge, então

$$s_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Como (s_n) é crescente, por ter termos positivos, ela converge. Portanto, a série converge.

Reciprocamente, para todo $k \geq 1$ e todo $x \in [k, k+1]$ temos $f(x) \leq f(k)$. Assim,

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) = s_n.$$

Se a série converge, então (s_n) é limitada, e a desigualdade anterior mostra que as integrais $\int_1^t f(x) dx$ também são limitadas superiormente. Como essas integrais crescem com t , a integral imprópria converge. Equivalentemente, se a integral imprópria diverge, a série também diverge. $\square$

4.24 Exemplo (Série p). O critério de comparação com a integral permite demonstrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se, e somente se, } p > 1.$$

De fato, para $f(x) = x^{-p}$, temos

$$\int_1^n x^{-p} dx = \begin{cases} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p}, & \text{se } p \neq 1, \\ \log n, & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Se $0 < p \leq 1$, a integral diverge e o critério da integral mostra que a série também diverge. Para $p \leq 0$, nem precisamos do critério: o termo $1/n^p$ não tende a zero. Portanto, em todos os casos, a série- p converge exatamente quando $p > 1$.

4.25 Exemplo. O mesmo método mostra que²

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s} \text{ converge se, e somente se, } s > 1.$$

De fato,

$$\int_2^n \frac{1}{x(\log x)^s} dx = \begin{cases} \frac{(\log n)^{1-s} - (\log 2)^{1-s}}{1-s}, & \text{se } s \neq 1, \\ \log(\log n) - \log(\log 2), & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

A função $x \mapsto 1/[x(\log x)^s]$ é positiva e, para cada $s \in \mathbb{R}$, é decrescente a partir de algum ponto. Como retirar um número finito de termos não altera a convergência, aplicamos o critério da integral à cauda. A integral imprópria converge exatamente quando $s > 1$; portanto, o mesmo vale para a série.

Ex. 4.20 — Determine se as seguintes séries convergem ou divergem e justifique sua resposta:

- | | |
|--|---|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} \log(4n+1)}{n(n+1)}$ | g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ | h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ | i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ \sin(nx) }{n^2}$ | |

As séries p passam agora a funcionar como uma régua assintótica. Muitas séries não são literalmente maiores ou menores que $1/n^p$ de maneira conveniente, mas se tornam indistinguíveis dela na escala correta.

²Inicia-se a soma em $n = 2$ para evitar que $\log n$ se anule.

4.3.3 Comportamento assintótico

A comparação termo a termo pode ser artificial quando duas sequências têm a mesma escala assintótica. Nessa situação, o quociente entre os termos revela a comparação que realmente importa.

4.26 Definição. Sejam (a_n) e (b_n) sequências de termos positivos. Dizemos que a_n é assintoticamente equivalente a Lb_n , com $L > 0$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Nesse caso, escrevemos $a_n \sim Lb_n$. Em particular, quando $L = 1$, escrevemos simplesmente $a_n \sim b_n$.

4.27 Teorema (Critério do Limite). Sejam $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ séries de termos positivos. Se $a_n \sim Lb_n$ para algum $L > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas divergem.

Demonstração. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$

Logo,

$$\frac{L}{2}b_n < a_n < \frac{3L}{2}b_n, \quad n \geq N.$$

Se $\sum b_n$ converge, então $\sum (3L/2)b_n$ converge e, pelo critério da comparação, a cauda de $\sum a_n$ converge. Portanto, $\sum a_n$ converge. Reciprocamente, se $\sum a_n$ converge, então a desigualdade $b_n < (2/L)a_n$, válida para $n \geq N$, mostra novamente pelo critério da comparação que $\sum b_n$ converge. Assim, as duas séries têm o mesmo comportamento quanto à convergência. $\square$

4.28 Exemplo. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$$

converge. Com efeito, se $a_n = 1/(n^2 + n + 1)$ e $b_n = 1/n^2$, então

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2 + n + 1} \rightarrow 1.$$

Logo, $a_n \sim b_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, o critério do limite implica a convergência da série dada.

4.29 Exemplo. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2$$

diverge. Para $n \geq 1$, racionalizando o termo geral, obtemos

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}.$$

Comparando com $b_n = 1/n$, temos

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}{n} = 2 + \frac{1}{n} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 4.$$

Assim, $a_n \sim b_n/4$. Como a série harmônica diverge, o critério do limite implica a divergência da série dada.

Exercícios básicos

Ex. 4.21 — Determine a convergência de cada uma das seguintes séries:

- | | |
|--|---|
| a) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+1}{5^j}$ | j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2(n)}$ |
| b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+1} - \sqrt{j}}{j}$ | k) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n^2 + 2n}$ |
| c) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j^2}$ | l) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n^2 - n}{n^3 + 9}$ |
| d) $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j-3} + \sqrt{j+3}}$ | m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 4n + 1}}{n^3 + 1}$ |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1}\right)^2$ | n) $\sum_{j=1}^{\infty} (e^{1/j} - 1)^p$ para todo p racional; |
| f) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 - 3}$ | o) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j^2 + 1} - j}$ |
| g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)}$ | p) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+1} - \sqrt{j}}{\sqrt{j+1}}$ |
| h) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 2n - 3}$ | q) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2+1/j}}$ |
| i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^6 + 9}}$ | |

Exercícios complementares

Ex. 4.22 — Encontre todos os inteiros $t \geq 0$ tais que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1+t-\sqrt{t}}}$$

seja convergente.

Ex. 4.23 — Considere $a > 0$ e $b > 0$. Encontre todo p racional tal que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(aj + b)^p}$$

seja convergente.

Convém guardar a diferença entre as três ideias. A comparação direta usa uma desigualdade; o critério integral constrói modelos a partir de funções; a comparação

assintótica ignora constantes e detalhes de baixa ordem. Não são três receitas concorrentes, mas três maneiras de responder à mesma pergunta: com que série conhecida este termo se parece?

4.4 Sinais e cancelamento

Quando os termos mudam de sinal, a monotonicidade das somas parciais desaparece. Há então duas razões muito diferentes para uma série convergir: ou seus módulos já formam uma série convergente, ou sinais opostos produzem cancelamento. Essa distinção organiza o restante da teoria.

4.4.1 Convergência absoluta

Até aqui, a positividade dos termos permitiu controlar as somas parciais por monotonicidade e comparação. Quando aparecem sinais diferentes, surge uma possibilidade nova: o cancelamento. Antes de explorá-lo, isolamos uma situação especialmente estável, a convergência absoluta.

4.30 Definição. Dizemos que uma série $\sum a_n$ **converge absolutamente** se a série $\sum |a_n|$ converge. Dizemos que $\sum a_n$ **converge condicionalmente** se $\sum a_n$ converge, mas $\sum |a_n|$ diverge.

4.31 Teorema. Se uma série converge absolutamente, então ela converge.

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ seja absolutamente convergente. Pelo critério de Cauchy aplicado à série $\sum |a_n|$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq m \geq N$, então

$$|a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_m| + |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Portanto, $\sum a_n$ satisfaz o critério de Cauchy para séries e, consequentemente, converge. $\square$

Quando os termos de uma série são não negativos, convergência e convergência absoluta são equivalentes.

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são absolutamente convergentes, o mesmo se verifica para a série $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ qualquer que seja a escolha de α e β . Essa é uma consequência imediata da desigualdade triangular, e a demonstração será deixada ao leitor.

Ex. 4.24 — Prove que, se $\sum |a_n|$ converge e (b_n) é uma sequência limitada, então $\sum a_n b_n$ também converge.

Ex. 4.25 — a) Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge absolutamente, então $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ também converge.

b) O recíproco é verdadeiro?

c) É verdade que, se $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge, então $\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2$ também converge?

Ex. 4.26 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} w_j$ são séries absolutamente convergentes, então $\sum_{j=0}^{\infty} z_j w_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha z_j + \beta w_j)$ também são absolutamente convergentes para todos os números reais α e β .

Ex. 4.27 — Mostre que, se $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ é uma série absolutamente convergente, então

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} z_j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |z_j|.$$

A convergência absoluta permite esquecer os sinais e voltar ao mundo das séries positivas. Em algumas famílias, a própria forma algébrica dos termos fornece uma comparação geométrica sem que seja preciso adivinhar uma série-modelo.

4.4.2 Quando a forma do termo decide: raiz e razão

4.32 Teorema (Critério da Raiz). Dada uma série $\sum a_n$, seja

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Então:

- se $R < 1$, a série converge absolutamente;
- se $R > 1$, a série diverge;
- se $R = 1$, o critério não fornece informação sobre a convergência ou divergência.

Demonstração. Se $R < 1$, escolha r tal que $R < r < 1$. Então, para n suficientemente grande, temos $|a_n|^{1/n} \leq r$, isto é, $|a_n| \leq r^n$. Como a série geométrica $\sum r^n$ converge, o critério da comparação mostra que $\sum a_n$ converge absolutamente.

Se $R > 1$, então existem infinitos índices n tais que $|a_n|^{1/n} > 1$, e portanto $|a_n| > 1$. Em particular, $a_n \not\rightarrow 0$, de modo que a série diverge pelo Teorema 4.5.

Quando $R = 1$, o critério é inconclusivo. De fato, para a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, temos $|a_n|^{1/n} \rightarrow 1$ em ambos os casos, mas a primeira diverge e a

segunda converge. $\square$

4.33 Exemplo. O Critério da Raiz determina diretamente a convergência da série $\sum_{n=3}^{\infty} (\log n)^{-n}$. De fato, se $a_n = (\log n)^{-n}$, então

$$|a_n|^{1/n} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0.$$

Logo, a série converge absolutamente.

4.34 Exemplo. Aplicando o Critério da Raiz à série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2},$$

temos, para $a_n = (n/(n+1))^{n^2}$,

$$|a_n|^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

Como $1/e < 1$, a série converge.

Uma variante do mesmo tipo de argumento conduz ao critério da razão.

4.35 Teorema (Critério da Razão). Seja $\sum a_n$ uma série de termos não nulos.

- (a) Se $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, então a série converge absolutamente.
- (b) Se $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, então a série diverge.
- (c) Nos casos restantes, isto é, quando $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, o critério da razão, por si só, não decide a convergência.

Demonstração. Seja $L = \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Se $L < 1$, escolha r tal que $L < r < 1$. Então, para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r.$$

Fixado tal n , obtemos por indução que $|a_{n+k}| \leq r^k |a_n|$ para todo $k \geq 0$. Logo, a cauda de $\sum |a_n|$ é dominada por uma série geométrica, e portanto $\sum a_n$ converge absolutamente.

Se $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, existe $r > 1$ tal que, para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq r.$$

Assim, $|a_n|$ não pode tender a zero. Pelo Teorema 4.5, a série diverge.

A parte (c) decorre do fato de que tanto a série harmônica quanto a série $\sum 1/n^2$ satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1,$$

mas a primeira diverge e a segunda converge. $\square$

4.36 Exemplo.

- Considere a série $\sum n/2^n$. Para $a_n = n/2^n$, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$|a_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Assim, tanto o critério da razão quanto o critério da raiz mostram que $\sum n/2^n$ converge.

- Qualquer série da forma $\sum 1/n^p$, onde $p \in \mathbb{R}$, é chamada de série- p . Para essa série, se $p > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^p} \right)^{1/n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{-p}}{n^{-p}} = 1.$$

Assim, os critérios da raiz e da razão são inconclusivos.

Para $p \leq 1$, temos $n^p \leq n$, de modo que $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$. Como a série harmônica $\sum 1/n$ diverge, concluímos, pelo critério da comparação, que a série- p diverge para $p \leq 1$.

- Considere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k!}, \quad 0 < p < \infty.$$

Aqui, $a_k = \frac{p^k}{k!}$. Assim,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p^{k+1}}{p^k} \frac{k!}{(k+1)!} = p \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Pelo critério da razão, a série converge para todo p , $0 < p < \infty$. Neste exemplo, a presença de $k!$ torna o critério da raiz difícil de usar.

- Considere $\sum a_n$, onde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & \text{se } n = 2k \\ \frac{1}{3^k}, & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}.$$

Aqui,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Por cálculo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^k, & n = 2k \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^k, & n = 2k+1 \end{cases}.$$

Consequentemente, o critério da razão é inconclusivo. Por outro lado,

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & n = 2k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{1/(2k+1)}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^{1/(2k+1)} = 1$, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Portanto, a série converge pelo critério da raiz.

O último item do Exemplo 4.36 mostra uma série para a qual o critério da razão é inconclusivo, enquanto o critério da raiz decide a convergência. O resultado seguinte explica essa diferença.

4.37 Teorema. Seja (a_n) uma sequência de números positivos. Então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Observação. Como consequência do teorema, sempre que o critério da razão decide a convergência ou a divergência de uma série de termos positivos, o critério da raiz também decide. O recíproco é falso, como mostra o exemplo anterior.

Demonstração. Seja

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Se $R = \infty$, a última desigualdade é imediata. Suponha, então, que $R < \infty$, e fixe $\beta > R$. Pela definição de limite superior, existe n_0 tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \beta \quad (n \geq n_0).$$

Por iteração, para todo $n \geq n_0$,

$$a_n \leq a_{n_0} \beta^{n-n_0} = M \beta^n, \quad M = \frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}}.$$

Logo, $\sqrt[n]{a_n} \leq \beta \sqrt[n]{M}$ para $n \geq n_0$, e portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \beta.$$

Como $\beta > R$ é arbitrário, obtemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

A desigualdade envolvendo os limites inferiores é análoga. Se

$$\rho = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

então, para todo $0 < \alpha < \rho$, existe n_1 tal que $a_{n+1}/a_n \geq \alpha$ para $n \geq n_1$. Por iteração, $a_n \geq C\alpha^n$ para n suficientemente grande, e assim

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \alpha.$$

Fazendo $\alpha \uparrow \rho$, obtemos a primeira desigualdade. A desigualdade central é tautológica. $\square$

Exercícios básicos

Ex. 4.28 — Seja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ uma série de termos positivos. Mostre que, se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n , então a série diverge.

Ex. 4.29 — Determine a convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{e^j};$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{j!};$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j};$

e) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^2}{(2j)!};$

c) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j!};$

f) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^3}{(3j)!}.$

Exercícios complementares

Ex. 4.30 —

- a) Suponha que $a_n > 0$, $b_n > 0$, e $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ para todo n . Mostre que $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ converge se $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ converge.

Dica: Mostre que a sequência $\{a_n/b_n\}$ é não-crescente e use o Exercício 4.24.)

- b) Use a parte (a) para testar a convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{je^j j!};$

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{e^j j!}.$

Note que o critério da razão não fornece conclusões nesses exemplos.

Ex. 4.31 — Determine a convergência da série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!x^j}{j^j}$ para todo $x > 0$.

Ex. 4.32 — Aplique o critério da raiz para investigar a convergência da série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^j}{j!}.$

Ex. 4.33 — Determine a convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j}{2j-1}\right)^j;$

f) $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)^j$, para todo $x \neq -1$;

b) $\sum_{j=2}^{\infty} (j^{1/j} - 1)^j;$

g) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j^2+1)^{-j^2}}{(j^2+j+1)^{-j^2}};$

c) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3j/2}{2^j};$

h) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{j}\right)^{j^2};$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{\alpha j}$ para todo α real;

i) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^j}{2^{j^2}}.$

e) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{(j^{1/2}+1)^j}$ para todo $x > 0$;

Ex. 4.34 — Considere a série $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{j}\right)^j$.

- Mostre que o critério da raiz não é aplicável.
- Determine a convergência da série. (**Dica:** use uma série conhecida.)

Os critérios da raiz e da razão detectam sobretudo decaimento geométrico. Quando o limite relevante é 1, isso não representa uma falha: significa apenas que a escala é mais lenta e devemos voltar à comparação, às séries p ou a outra estrutura do problema.

4.4.3 Cancelamento controlado: séries alternadas

A convergência absoluta não é a única forma de uma série com sinais diferentes convergir. O exemplo mais simples de cancelamento persistente ocorre quando os sinais alternam de maneira regular.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

com $a_n > 0$.

4.38 Teorema (Critério das Séries Alternadas). Se (a_n) é uma sequência decrescente de números positivos e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Demonstração. Seja s_n a sequência das somas parciais. As somas parciais pares satisfazem

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Como (a_n) é decrescente, temos

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0.$$

Logo, (s_{2n}) é crescente. Além disso,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

e portanto (s_{2n}) converge, pelo Teorema da Convergência Monótona. Seja s seu limite.

Como $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ e $a_{2n+1} \rightarrow 0$, segue que $s_{2n+1} \rightarrow s$. As subsequências de índices pares e ímpares têm, portanto, o mesmo limite. Consequentemente, a sequência completa (s_n) converge para s , e a série alternada converge. $\square$

4.39 Exemplo. Como a sequência $(1/n)$ é decrescente e $1/n \rightarrow 0$, a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

converge. Mais adiante, a partir da série de Taylor de $\log(1+x)$, veremos que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Assim, a soma da série harmônica alternada é $\log 2$.

Exercícios básicos

Ex. 4.35 — Determine a convergência ou divergência das seguintes séries.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n-1)}{2n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$

Exercícios complementares

Ex. 4.36 — Determine, conforme o caso, se as seguintes séries convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem:

a) $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j-\sqrt{j}}$

c) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{j}{j^2+1}$

b) $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{j+2}{3}\right)^j$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(1 + \frac{j-1}{2j}\right)$

Ex. 4.37 — Seja (a_n) uma sequência decrescente de números positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Mostre que a soma s da série alternada $\sum (-1)^{n+1} a_n$ está entre qualquer par de somas parciais sucessivas. Isto é, mostre que $s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$. Use isso para concluir que, para todo n , $|s - s_n| \leq a_{n+1}$. Assim, o erro ao parar no n -ésimo termo não excede o valor absoluto do próximo termo.

Ex. 4.38 — Mostre que a série é convergente. Quantos termos da série são necessários para somar com a precisão indicada?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (erro $< 0,01$)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$ (erro $< 0,0001$)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ (erro $< 0,00005$)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}$ (erro $< 0,01$)

A série harmônica alternada mostra a fronteira essencial: uma série pode convergir mesmo quando a série dos módulos diverge. A partir daqui, a ordem dos termos deixa de ser um detalhe inocente.

4.5 A ordem dos termos importa

Para somas finitas, reordenar parcelas é inofensivo. Para séries infinitas, isso só continua verdadeiro sob uma hipótese forte: convergência absoluta. O caso condicionalmente convergente revela um fenômeno genuinamente novo.

4.5.1 Rearranjos e convergência absoluta

A propriedade comutativa da adição garante que, em uma soma finita, a ordem dos termos não altera o resultado. Para séries infinitas, a situação é mais delicada. Em 1852, Bernhard Riemann mostrou que a ordem dos termos de uma série condicionalmente convergente pode alterar sua soma e pode até produzir rearranjos divergentes.

Considere, por exemplo, a série

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$$

Ela converge para 0. No entanto, a série dos valores absolutos é

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots,$$

que diverge, pois corresponde à série harmônica duplicada. Assim, a série original é condicionalmente convergente.

Rearranjos apropriados de séries condicionalmente convergentes podem produzir outras somas. Por exemplo, tomando dois termos positivos seguidos de um termo negativo, repetidamente, obtemos

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \dots$$

O fenômeno geral é descrito pelo Teorema de Riemann: uma série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para convergir a qualquer número real previamente fixado. Em contraste, séries absolutamente convergentes preservam sua soma sob qualquer rearranjo.

4.40 Definição. Uma **permutação** dos números naturais é uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

4.41 Exemplo. A função $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$\sigma(k) = \begin{cases} k-1, & \text{se } k \text{ é par,} \\ k+1, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

é uma permutação dos naturais.

Se σ é uma permutação, cada natural aparece exatamente uma vez como valor de σ . Em particular, $x \neq y$ implica $\sigma(x) \neq \sigma(y)$.

4.42 Definição. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série e σ é uma permutação dos números naturais, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, onde $b_n = a_{\sigma(n)}$, é chamada **rearranjo** da série original.

4.43 Teorema. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente com soma L . Então, todo rearranjo dessa série também converge absolutamente e tem soma L .

Demonstração. Seja σ uma permutação de $\mathbb{N}$ e ponha $b_n = a_{\sigma(n)}$. A série $\sum |b_n|$ converge, pois cada soma parcial de $\sum |b_n|$ é uma soma finita de termos da série $\sum |a_n|$ e, portanto, é limitada superiormente por $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Logo, o rearranjo converge absolutamente.

Resta provar que sua soma é L . Seja $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha N tal que

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k - L \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

Como σ é sobrejetiva, existe M tal que o conjunto

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(M)\}$$

contém todos os índices $1, 2, \dots, N$. Para $n \geq M$, podemos escrever

$$B_n = \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{j \in J_n} a_j,$$

onde J_n é um subconjunto finito de $\{N+1, N+2, \dots\}$. Assim,

$$|B_n - L| \leq \left| \sum_{k=1}^N a_k - L \right| + \sum_{j \in J_n} |a_j| < 2\varepsilon.$$

Portanto, $B_n \rightarrow L$, e o rearranjo tem a mesma soma da série original. $\square$

A hipótese de convergência absoluta no Teorema 4.43 é essencial. Para preparar o Teorema de Riemann, convém decompor uma série real em suas partes positiva e negativa. Definimos

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Então

$$a_n = a_n^+ + a_n^- \quad \text{e} \quad |a_n| = a_n^+ - a_n^-.$$

Note que $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$.

4.44 Teorema. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos reais, valem as seguintes afirmações.

1. Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, então $\sum a_n^+$ diverge para $+\infty$ e $\sum a_n^-$ diverge para $-\infty$.
2. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergem, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Demonstração. Como $a_n^+ = (|a_n| + a_n)/2$ e $a_n^- = (a_n - |a_n|)/2$, a convergência simultânea de $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ implica a convergência de $\sum a_n^+$ e de $\sum a_n^-$. Isso prova a segunda afirmação, quando a série é absolutamente convergente, e a identidade das somas segue de $a_n = a_n^+ + a_n^-$ e da linearidade.

Suponha agora que $\sum a_n$ seja condicionalmente convergente. Se $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergissem, então $\sum |a_n| = \sum (a_n^+ - a_n^-)$ também convergiria, contradizendo a convergência

apenas condicional. Além disso, como $\sum a_n = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$ converge, não pode ocorrer que apenas uma das duas séries convirja. Logo, $\sum a_n^+$ diverge e $\sum a_n^-$ diverge. Como a primeira tem termos não negativos e a segunda tem termos não positivos, suas divergências são, respectivamente, para $+\infty$ e para $-\infty$. $\square$

No rearranjo exibido acima, em que tomamos dois termos positivos para cada termo negativo da série

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots,$$

as somas ao final de cada bloco são

$$H_{2n} - H_n,$$

e portanto tendem a $\log 2$. A mudança de ordem não apenas pode alterar a soma: aqui ela transforma uma série de soma 0 em outra de soma $\log 2$.

4.5.2 Teorema do Rearranjo de Riemann

4.45 Teorema (Teorema do Rearranjo de Riemann). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente de termos reais e seja $L \in \mathbb{R}$. Então existe um rearranjo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos termos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge para L .

Demonstração. Liste os termos positivos da série, na ordem em que aparecem, como $p_1, p_2, p_3, \dots$, e os módulos dos termos negativos como $q_1, q_2, q_3, \dots$. Pelo resultado anterior,

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} q_j = +\infty.$$

Além disso, como $a_n \rightarrow 0$, temos $p_j \rightarrow 0$ e $q_j \rightarrow 0$.

Construímos o rearranjo por etapas. A partir da soma parcial zero, somamos termos positivos p_j , em ordem, até ultrapassar L . Depois somamos termos negativos $-q_j$, em ordem, até ficar abaixo de L . Repetimos esse procedimento indefinidamente: após ficar abaixo de L , acrescentamos termos positivos até ultrapassar L ; após ultrapassar L , acrescentamos termos negativos até ficar abaixo de L .

Além disso, nenhum termo positivo ou negativo é repetido ou omitido. Se a série original contém termos nulos, eles podem ser inseridos em quaisquer posições do rearranjo sem alterar as somas parciais relevantes nem o limite. Dentro de cada classe, positiva ou negativa, os termos são usados em sua ordem original.

Seja S_m a sequência de somas parciais do rearranjo construído. Dado $\varepsilon > 0$, escolha J tal que $p_j < \varepsilon$ e $q_j < \varepsilon$ para todo $j \geq J$. Depois que todos os termos $p_1, \dots, p_{J-1}$ e $q_1, \dots, q_{J-1}$ tiverem sido usados, cada ultrapassagem de L excede L por menos de ε , pois ocorre pela adição de um termo positivo menor que ε . Do mesmo modo, cada passagem abaixo de L fica a menos de ε de L , pois ocorre pela adição de um termo negativo de módulo menor que ε .

Entre uma ultrapassagem e a passagem seguinte, as somas parciais diminuem monotonamente e permanecem entre esses dois valores. Entre uma passagem abaixo de L

e a ultrapassagem seguinte, elas aumentam monotonamente e também permanecem entre esses dois valores. Assim, para todo m suficientemente grande,

$$|S_m - L| < \varepsilon.$$

Logo, $S_m \rightarrow L$, isto é, o rearranjo construído converge para L . $\square$

Exercícios de síntese

Ex. 4.39 — Determine se cada série converge condicionalmente, converge absolutamente ou diverge. Justifique sua resposta.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n}$

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)$

4.6 O número e revisitado

Os critérios anteriores não servem apenas para classificar séries. Eles também permitem voltar a objetos já conhecidos e vê-los de outra forma. O número e , definido anteriormente por um limite, reaparece agora como soma de uma série de termos positivos.

Como aplicação dos critérios de convergência, retomamos o número de Euler e mostramos que ele admite a representação

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Em seguida, usamos essa representação para provar que e é irracional.

Defina

$$e' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

A série converge pelo critério da razão, pois, para $a_n = 1/n!$, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

4.46 Teorema. Vale a identidade

$$e' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Demonstração. Escreva

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{e} \quad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Por definição, $s_n \rightarrow e'$. Provaremos que $t_n \rightarrow e'$.

Pelo teorema binomial,

$$t_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

onde, para $k = 0$ e $k = 1$, o produto vazio é entendido como 1. Como todos os fatores são menores ou iguais a 1, obtemos $t_n \leq s_n$ e, portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq e'.$$

Para a desigualdade oposta, fixe $m \in \mathbb{N}$. Se $n \geq m$, então

$$t_n \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Passando ao limite inferior quando $n \rightarrow \infty$, cada produto finito tende a 1, e segue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = s_m.$$

Como isso vale para todo m , obtemos $\liminf t_n \geq e'$. Logo, $t_n \rightarrow e'$. $\square$

A estimativa seguinte mede a rapidez com que as somas parciais da série de e se aproximam do limite.

4.47 Proposição (Estimativa do resto). Para todo $n \geq 1$, se $s_n = \sum_{k=0}^n 1/k!$, então

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

Demonstração. Como $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$, temos

$$e - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right).$$

Cada termo entre parênteses, a partir do segundo, é dominado pela correspondente potência de $1/(n+1)$. Portanto,

$$e - s_n < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}.$$

A desigualdade $e - s_n > 0$ é imediata, pois o resto é soma de termos positivos. $\square$

4.48 Teorema. O número e é irracional.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $e = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Aplicando a proposição anterior com $n = q$, obtemos

$$0 < e - s_q < \frac{1}{q!q}.$$

Multiplicando por $q!$, segue que

$$0 < q!e - q!s_q < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Por outro lado, $q!e = q!p/q = (q-1)!p$ é inteiro, e

$$q!s_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$$

também é inteiro. Assim, $q!e - q!s_q$ seria um inteiro positivo estritamente menor que 1, o que é impossível. Logo, e é irracional. $\square$

4.7 Representação decimal dos números reais II

Na Seção 1.13, a representação decimal foi introduzida por meio de truncamentos. A teoria de séries permite agora dizer com precisão o que a notação decimal infinita significa.

Seja $r \geq 0$. Escolhidos $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e dígitos $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, definimos os truncamentos

$$s_n = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}.$$

Escrever

$$r = a_0.a_1a_2a_3\dots$$

significa precisamente que $s_n \rightarrow r$, isto é,

$$r = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Reciprocamente, qualquer sequência de dígitos determina um número real. De fato, para

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$$

temos $S_{n+1} \geq S_n$ e

$$0 \leq S_n \leq 9 \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} < 1.$$

Assim, (S_n) é crescente e limitada; pelo Teorema da Convergência Monótona, ela converge. Portanto toda sequência de dígitos determina um número de $[0, 1]$. Todo

real não negativo admite uma representação desse tipo; para números negativos, aplicamos a construção ao módulo e acrescentamos o sinal.

A representação não é única exatamente quando uma expansão termina, a partir de certo ponto, em uma cauda infinita de algarismos 9. Por exemplo,

$$1 = 0,999 \dots,$$

pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \frac{1/10}{1 - 1/10} = 1.$$

De modo geral,

$$0,5000 \dots = 0,4999 \dots$$

Exercícios complementares

Ex. 4.40 — Prove que a representação decimal de um número racional é finita ou eventualmente periódica.

Ex. 4.41 — Prove que, se a representação decimal de um número é finita ou eventualmente periódica, então ele é racional.

Ex. 4.42 — Prove que todo número cuja representação decimal é da forma $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$, com $a_n \neq 0$, também pode ser representado como $a_0, a_1 a_2 \dots (a_n - 1) 99999 \dots$.

Ex. 4.43 — Prove que a constante de Liouville $L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ é irracional.

**** Ex. 4.44** — Transformação de Abel e critério de Dirichlet. Sejam (a_n) e (b_n) sequências reais e defina

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Prove a identidade de Abel

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Deduza o critério de Dirichlet: se as somas parciais de $\sum a_n$ são limitadas e (b_n) é monótona com $b_n \rightarrow 0$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

converge.

***** Ex. 4.45** — Teorema de rearranjo de Riemann. Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

uma série real condicionalmente convergente. Prove que, para todo $L \in \mathbb{R}$, existe um rearranjo da série que converge para L .

Mostre também que existem rearranjos cujas somas parciais tendem a $+\infty$ e rearranjos cujas somas parciais tendem a $-\infty$.

**** Ex. 4.46** — Produto de Cauchy. Sejam

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

duas séries absolutamente convergentes. Defina

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Prove que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

converge absolutamente e que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

**** Ex. 4.47** — Séries logarítmicas clássicas. Determine, em função dos parâmetros reais p e q , a convergência das séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

e

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^q}.$$

***** Ex. 4.48** — Sub-séries e convergência absoluta. Prove que uma série real

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é absolutamente convergente se, e somente se, toda sub-série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}, \quad n_1 < n_2 < \dots,$$

é convergente.

5

Cardinalidade

Contar um conjunto finito consiste em associar seus elementos aos números $1, 2, \dots, n$. A comparação por meio de funções também se aplica a conjuntos infinitos. Nesse caso, um conjunto pode ter a mesma cardinalidade que um subconjunto próprio, e dois conjuntos infinitos podem ter cardinalidades diferentes.

Neste capítulo, estudaremos essas comparações. Começaremos pelos conjuntos enumeráveis, que têm a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, e provaremos que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis. Em seguida, mostraremos que $\mathbb{R}$ não é enumerável. O caso dos racionais permite distinguir duas noções: embora $\mathbb{Q}$ seja denso em $\mathbb{R}$, os dois conjuntos não têm a mesma cardinalidade.

5.1 Notação. Ao longo do texto,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\},$$

e, para $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

5.1 Comparação de cardinalidades

Retomaremos as noções de função injetora, sobrejetora e bijetora, que serão usadas para comparar conjuntos.

5.2 Definição. Uma **função** $f : A \rightarrow B$ associa a cada $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$. O conjunto A é o domínio e B é o contradomínio.

5.3 Definição. Seja $f : A \rightarrow B$.

(a) Se $E \subset A$, a **imagem** de E é

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

(b) Se $F \subset B$, a **pré-imagem** de F é

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}.$$

Neste capítulo

- ▶ Comparação de cardinalidades (p. 134)
- ▶ O infinito enumerável (p. 137)
- ▶ Enumerabilidade e densidade dos racionais (p. 139)
- ▶ O teorema de Cantor (p. 140)
- ▶ A cardinalidade do contínuo (p. 141)
- ▶ Exercícios (p. 142)

Ideia central

Para conjuntos infinitos, contar significa construir correspondências. Bijeções, injeções e o argumento diagonal substituem a contagem finita.

(c) A função é **injetora** se

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2;$$

é **sobrejetora** se $f(A) = B$; e é **bijetora** se é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Dois conjuntos têm a mesma cardinalidade quando seus elementos podem ser postos em correspondência um a um. A definição seguinte formaliza essa ideia.

5.4 Definição. Se existe uma bijeção $f : A \rightarrow B$, dizemos que A e B têm a mesma cardinalidade, ou que são **equipotentes**, e escrevemos

$$A \sim B.$$

5.5 Observação. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência: a identidade mostra que $A \sim A$; a inversa de uma bijeção mostra a simetria; e a composição de bijeções mostra a transitividade.

Para comparar conjuntos que talvez não tenham a mesma cardinalidade, usaremos injeções.

5.6 Definição. Escrevemos

$$A \preceq B$$

se existe uma função injetora $A \rightarrow B$. Intuitivamente, isso significa que A cabe dentro de B sem identificar dois de seus elementos.

O resultado seguinte permite transformar duas comparações em sentidos opostos em uma bijeção. Ele será útil para comparar intervalos e a reta real.

5.7 Teorema (Cantor–Bernstein). Se existem injeções $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$, então existe uma bijeção $A \rightarrow B$. Em outras palavras,

$$A \preceq B \quad \text{e} \quad B \preceq A \implies A \sim B.$$

Demonstração. Defina

$$A_0 = A \setminus g(B), \quad A_{n+1} = g(f(A_n)), \quad C = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Construiremos $h : A \rightarrow B$ por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in C, \\ g^{-1}(x), & x \notin C. \end{cases}$$

A segunda expressão faz sentido: se $x \notin C$, então $x \notin A_0$, logo $x \in g(B)$; como g é injetora, existe um único $g^{-1}(x)$.

A função h é injetora em cada uma das duas partes, pois f e g são injetoras. Além disso, suas imagens nessas duas partes não se misturam. De fato, se $x \in C$ e $h(x) = h(y)$ com $y \notin C$, então $f(x) = g^{-1}(y)$, e portanto

$$y = g(f(x)) \in g(f(C)) \subset C,$$

contradição.

Resta provar a sobrejetividade. Seja $b \in B$. Se $g(b) \notin C$, então $h(g(b)) = b$. Se $g(b) \in C$, não pode ocorrer $g(b) \in A_0$; logo $g(b) \in A_{n+1} = g(f(A_n))$ para algum n . Pela injetividade de g , existe $x \in A_n \subset C$ tal que $f(x) = b$, e então $h(x) = b$. Portanto h é bijetora. $\square$

5.8 Definição. Para um conjunto A , dizemos:

- (a) A é **finito** se $A \sim [n]$ para algum $n \in \mathbb{N}$; o conjunto vazio também é considerado finito;
- (b) A é **infinito** se não é finito;
- (c) A é **enumerável** se $A \sim \mathbb{N}$;
- (d) A é **no máximo enumerável** se é finito ou enumerável;
- (e) A é **não enumerável** se é infinito e não é enumerável.

Para conjuntos finitos, essa definição recupera a contagem usual. O exemplo seguinte mostra uma diferença entre o caso finito e o infinito.

5.9 Exemplo. O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável. Uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par}, \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Assim,

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

é uma enumeração dos inteiros.

5.10 Observação. Um conjunto finito nunca é equipotente a um subconjunto próprio. No caso infinito, isso pode acontecer: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, mas $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Essa é a primeira indicação de que o tamanho de conjuntos infinitos não se comporta como a contagem finita.

5.11 Definição. Como já vimos, uma sequência em A é uma função $\mathbb{N} \rightarrow A$. Portanto, dizer que A é enumerável equivale a dizer que seus elementos podem ser organizados como uma sequência

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

sem repetições e sem omissões.

5.12 Observação. Usaremos livremente a caracterização

$$x \in \bigcup_{i \in I} E_i \iff (\exists i \in I) x \in E_i,$$

e a versão análoga para interseções. As propriedades associativa, comutativa e distributiva de uniões e interseções seguem diretamente dessas equivalências.

5.2 O infinito enumerável

A propriedade de ser no máximo enumerável é preservada pela passagem a subconjuntos, por produtos finitos e por uniões enumeráveis. Estabeleceremos esses fatos antes de examinar conjuntos não enumeráveis.

5.13 Lema. Um conjunto S é no máximo enumerável se, e somente se, existe uma função injetora

$$m : S \rightarrow \mathbb{N}.$$

Demonstração. Se S é finito, basta numerar seus elementos por naturais distintos; se é enumerável, qualquer bijeção $S \rightarrow \mathbb{N}$ é, em particular, injetora.

Reciprocamente, suponha que $m : S \rightarrow \mathbb{N}$ seja injetora. Então $S \sim m(S) \subset \mathbb{N}$. Se $m(S)$ é finito, terminamos. Se é infinito, podemos enumerá-lo em ordem crescente: escolha

$$n_1 = \min m(S)$$

e, depois de escolhidos $n_1 < \dots < n_k$, defina

$$n_{k+1} = \min(m(S) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}).$$

O bom ordenamento de $\mathbb{N}$ garante que o processo está bem definido, e todo elemento de $m(S)$ aparece em algum estágio. Assim $m(S) \sim \mathbb{N}$, e portanto S é enumerável. $\square$

5.14 Corolário. Todo subconjunto de um conjunto no máximo enumerável é no máximo enumerável.

Demonstração. Se $T \subset S$ e S admite uma injeção em $\mathbb{N}$, basta restringi-la a T . $\square$

5.15 Lema. Se $S \neq \emptyset$ e existe uma função sobrejetora $g : \mathbb{N} \rightarrow S$, então S é no máximo enumerável.

Demonstração. Para cada $s \in S$, o conjunto

$$g^{-1}(\{s\}) = \{n \in \mathbb{N} : g(n) = s\}$$

é não vazio. Pelo bom ordenamento de $\mathbb{N}$, ele possui um menor elemento. Defina

$$m(s) = \min g^{-1}(\{s\}).$$

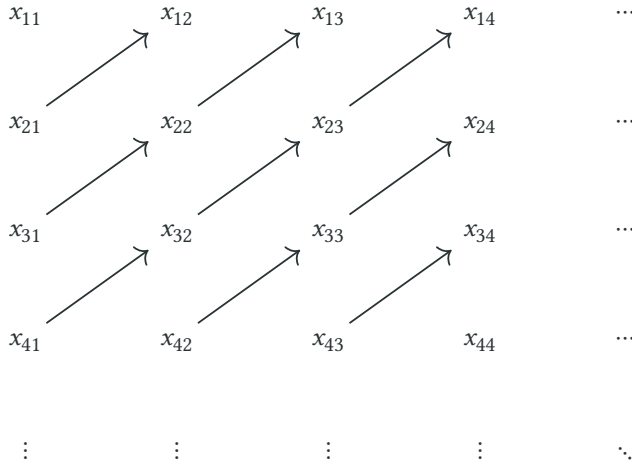
Se $m(s_1) = m(s_2) = n$, então $g(n) = s_1 = s_2$. Logo $m : S \rightarrow \mathbb{N}$ é injetora, e o lema anterior conclui a prova. $\square$

5.16 Teorema. Se $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos enumeráveis, então

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad (5.1)$$

é no máximo enumerável. Se S é infinito, então é enumerável.

Demonstração. Para cada n , escolha uma sobrejeção $\phi_n : \mathbb{N} \rightarrow E_n$, e escreva $x_{nk} = \phi_n(k)$. Disponemos os termos em uma tabela infinita:



Percorrendo as diagonais sucessivas, obtemos uma sobrejeção $g : \mathbb{N} \rightarrow S$. Por exemplo,

$$g(1) = x_{11}, \quad (5.2)$$

$$g(2) = x_{21}, \quad g(3) = x_{12}, \quad (5.3)$$

$$g(4) = x_{31}, \quad g(5) = x_{22}, \quad g(6) = x_{13}, \quad \dots \quad (5.4)$$

Todo $s \in S$ pertence a algum E_n , logo é da forma x_{nk} para algum par (n, k) , e portanto aparece nesse percurso. Pelo Lema 5.15, S é no máximo enumerável. Se S é infinito, então é enumerável. $\square$

5.17 Corolário. Se A é no máximo enumerável e, para cada $\alpha \in A$, o conjunto B_α é no máximo enumerável, então

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

é no máximo enumerável.

Demonstração. Se $A = \emptyset$, a união é vazia. Suponha $A \neq \emptyset$. Como A é no máximo enumerável, existe uma sobrejeção $\psi : \mathbb{N} \rightarrow A$: no caso finito, basta repetir elementos.

Para cada n , ponha $E_n = B_{\psi(n)}$. Descartemos as linhas vazias. Para cada $E_n \neq \emptyset$, existe uma sobrejeção $\phi_n : \mathbb{N} \rightarrow E_n$: se E_n é finito, repetimos seus elementos; se é enumerável, usamos uma enumeração. Percorrendo a tabela $\phi_n(k)$ por diagonais, exatamente como na prova do Teorema 5.16, obtemos uma sobrejeção de $\mathbb{N}$ sobre a união. Pelo Lema 5.15, essa união é no máximo enumerável. $\square$

5.18 Teorema. Se A é enumerável, então, para todo $n \geq 1$, o conjunto A^n das n -uplas de elementos de A é enumerável.

Demonstração. Para $n = 1$, não há o que provar. Suponha que A^{n-1} seja enumerável. Para cada $b \in A^{n-1}$, o conjunto

$$C_b = \{(b, a) : a \in A\}$$

é equipotente a A , logo enumerável. Como

$$A^n = \bigcup_{b \in A^{n-1}} C_b,$$

o resultado segue do teorema da união enumerável. A conclusão vem por indução. $\square$

5.3 Enumerabilidade e densidade dos racionais

A enumerabilidade dos racionais decorre da enumerabilidade dos inteiros e de seus produtos finitos.

5.19 Corolário. O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Demonstração. Como $\mathbb{Z}$ é enumerável, $\mathbb{Z}^2$ é enumerável. O subconjunto

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

é, portanto, no máximo enumerável. A aplicação

$$(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

é sobrejetora sobre $\mathbb{Q}$. Logo $\mathbb{Q}$ é no máximo enumerável. Como é infinito, é enumerável. $\square$

A enumerabilidade não impede que um conjunto seja denso. No caso de $\mathbb{Q}$, todo intervalo aberto não vazio da reta contém um de seus elementos.

5.20 Proposição (Densidade dos racionais). Entre dois números reais distintos existe um número racional. Equivalentemente, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $a < b$. Pela propriedade arquimediana, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Existe um inteiro m tal que

$$m - 1 \leq na < m.$$

Então

$$a < \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b.$$

Logo $m/n \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$. □

Essa distinção será importante no capítulo seguinte: a densidade depende da topologia, enquanto a comparação de cardinalidades depende da existência de funções injetoras e bijetoras. Um subconjunto pode ser denso sem ter a mesma cardinalidade do espaço que o contém.

5.4 O teorema de Cantor

O teorema de Cantor fornece, a partir de qualquer conjunto, outro de cardinalidade estritamente maior: seu conjunto das partes.

5.21 Teorema (Cantor). Para todo conjunto A , não existe sobrejeção

$$f : A \rightarrow \mathcal{P}(A),$$

onde $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de A . Em particular,

$$A \prec \mathcal{P}(A).$$

Demonstração. Suponha que $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ seja sobrejetora e defina

$$D = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Como $D \subset A$, pela sobrejetividade existe $d \in A$ tal que $f(d) = D$. Mas então

$$d \in D \iff d \notin f(d) = D,$$

contradição. □

A aplicação $x \mapsto \{x\}$ é uma injeção de A em $\mathcal{P}(A)$. Assim, $A \preceq \mathcal{P}(A)$, mas o teorema mostra que não existe bijeção entre os dois conjuntos: o conjunto das partes tem cardinalidade estritamente maior.

A ideia de diagonalização também pode ser aplicada às expansões decimais, como veremos na prova da não enumerabilidade de um intervalo real.

5.22 Teorema. O intervalo $[0, 1]$ é não enumerável.

Demonstração. Mostraremos primeiro que $[0, 1)$ não é enumerável. Suponha, por absurdo, que seus elementos possam ser listados como

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Para cada n , escolha a expansão decimal de x_n que não termina em uma cauda de algarismos 9:

$$x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$$

Essa convenção fornece uma representação para todo elemento de $[0, 1)$.

Defina

$$y = 0.b_1b_2b_3 \dots$$

por

$$b_n = \begin{cases} 1, & a_{nn} \neq 1, \\ 2, & a_{nn} = 1. \end{cases}$$

Como todos os dígitos b_n pertencem a $\{1, 2\}$, temos $y \in [0, 1)$. Além disso, o n -ésimo dígito de y difere do n -ésimo dígito de x_n . Logo $y \neq x_n$ para todo n , contradizendo a hipótese de que a lista continha todos os elementos de $[0, 1)$.

Portanto $[0, 1)$ é não enumerável. Se $[0, 1]$ fosse enumerável, seu subconjunto $[0, 1)$ seria no máximo enumerável pelo Corolário 5.14; como $[0, 1)$ é infinito, seria enumerável, contradição. Logo $[0, 1]$ é não enumerável. $\square$

$x_1 = 0.$		a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
$x_2 = 0.$	a_{21}		a_{23}	a_{24}	a_{25}
$x_3 = 0.$	a_{31}	a_{32}		a_{34}	a_{35}
$x_4 = 0.$	a_{41}	a_{42}	a_{43}		a_{45}
$x_5 = 0.$	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	

Figura 5.1

Na diagonal escolhemos, em cada linha, o dígito que será alterado.

O argumento não depende da base decimal: construímos um objeto que difere do n -ésimo elemento de uma lista na n -ésima coordenada. Esse procedimento é chamado **processo diagonal de Cantor**.

5.5 A cardinalidade do contínuo

A não enumerabilidade de $[0, 1]$ mostra que sua cardinalidade é maior que a de um conjunto enumerável. Veremos agora que todos os intervalos não degenerados da reta têm a mesma cardinalidade.

5.23 Teorema. Temos

$$(0, 1) \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}.$$

Demonstração. A inclusão $(0, 1) \hookrightarrow [0, 1]$ é injetora. Por outro lado,

$$f : [0, 1] \rightarrow (0, 1), \quad f(x) = \frac{x+1}{3},$$

é injetora. Pelo Teorema de Cantor–Bernstein, $(0, 1) \sim [0, 1]$.

Além disso,

$$g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - 1/2)),$$

é uma bijeção. Logo todos os três conjuntos são equipotentes. $\square$

A cardinalidade de $\mathbb{R}$ é chamada **cardinalidade do contínuo** e é tradicionalmente denotada por $\mathfrak{c}$.

Reunindo os resultados sobre os racionais e os reais, temos:

$\mathbb{Q}$ é enumerável e denso em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

A comparação de cardinalidades também permite demonstrar a existência de números transcendentos, sem construir um exemplo explícito.

5.24 Teorema. O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Demonstração. Para cada $n \geq 0$, o conjunto dos polinômios

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_j \in \mathbb{Z},$$

é no máximo enumerável, pois pode ser identificado com um subconjunto de $\mathbb{Z}^{n+1}$. A união, sobre todos os graus, do conjunto de polinômios não nulos com coeficientes inteiros é, portanto, no máximo enumerável.

Cada polinômio não nulo possui apenas um número finito de raízes complexas. Logo o conjunto de todos os números algébricos é uma união enumerável de conjuntos finitos e, portanto, é no máximo enumerável. Como contém $\mathbb{Q}$, é infinito; logo é enumerável. $\square$

5.25 Corolário. O conjunto dos números reais transcendentos é não enumerável.

Demonstração. Se os transcendentos reais fossem no máximo enumeráveis, então $\mathbb{R}$, sendo a união dos algébricos reais com os transcendentos reais, seria no máximo enumerável. Isso contradiz a não enumerabilidade de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. $\square$

Os números algébricos, entre os quais está $\sqrt{2}$, formam um conjunto enumerável. Já o conjunto dos reais transcendentos é não enumerável.

5.6 Exercícios

Ex. 5.1 — Prove diretamente que o conjunto dos números pares é equipotente a $\mathbb{N}$, e construa uma bijeção explícita.

Ex. 5.2 — Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

Ex. 5.3 — Prove que o conjunto de todas as sequências finitas de números racionais é enumerável.

Ex. 5.4 — Mostre que $\mathbb{Q}^n$ é enumerável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 5.5 — Mostre que o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ não é enumerável. Relacione esse conjunto com $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ex. 5.6 — Prove que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem a mesma cardinalidade que $[0, 1]$. **Sugestão:** use expansões binárias com uma convenção que elimine a ambiguidade das caudas de 1's, ou use Cantor–Bernstein.

Ex. 5.7 — Mostre que todo intervalo aberto (a, b) , com $a < b$, tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Ex. 5.8 — Prove que o conjunto dos irracionais é não enumerável.

Ex. 5.9 — Dê uma nova prova de que existem números reais transcendentos usando apenas os Teoremas 5.22 e 5.24.

Ex. 5.10 — Prove que, se A é infinito e no máximo enumerável, então $A \sim \mathbb{N}$.

6

Espaços métricos

Na reta real, a ideia de proximidade já apareceu muitas vezes. Dizer que uma sequência (x_n) converge para x significa que $|x_n - x|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno; dizer que (x_n) é de Cauchy significa que $|x_n - x_m|$ se torna pequeno quando m e n são grandes. Em ambos os casos, o valor absoluto está sendo usado como uma medida de distância.

A teoria dos espaços métricos começa com uma pergunta simples: quais propriedades dessa distância são realmente necessárias? Ao isolá-las, podemos transportar as ideias de proximidade, vizinhança, convergência e completude para conjuntos muito diferentes da reta, sem depender da ordem ou das operações algébricas de $\mathbb{R}$.

Neste primeiro momento seguiremos um caminho concreto. Começaremos pela distância na reta, passaremos à noção abstrata de métrica e veremos como uma métrica produz bolas e, a partir delas, conjuntos abertos e fechados. Somente depois retomaremos sequências e completude nesse novo contexto.

6.1 Da distância na reta à métrica

Na reta, a distância entre x e y é

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Ela satisfaz quatro propriedades elementares:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x),$$

e

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

A última desigualdade é a forma abstrata da desigualdade triangular. É precisamente esse pequeno conjunto de propriedades que queremos conservar.

Neste capítulo

- ▶ Da distância na reta à métrica (p. 144)
- ▶ Bolas e a geometria produzida pela métrica (p. 146)
- ▶ Dos pontos próximos aos conjuntos abertos (p. 148)
- ▶ Topologia relativa (p. 151)
- ▶ Sequências, Cauchy e completude (p. 152)
- ▶ Compacidade (p. 157)
- ▶ Conjuntos perfeitos e o conjunto de Cantor (p. 166)
- ▶ Conexidade (p. 170)
- ▶ Exercícios (p. 172)

Ideia central

A métrica abstrai distância. Bolas, abertos, convergência e completude deixam de pertencer apenas à reta e passam a ser conceitos estruturais.

6.1 Definição. Um conjunto X é um **espaço métrico** quando está equipado com uma função

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para quaisquer $p, q, r \in X$,

- (a) $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0$ se, e somente se, $p = q$;
- (b) $d(p, q) = d(q, p)$;
- (c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

A função d é chamada **métrica** em X , e escrevemos (X, d) . Quando não houver risco de ambiguidade, diremos simplesmente que X é um espaço métrico.

6.2 Observação. Os axiomas não dizem como os pontos de X são; dizem apenas como medir a proximidade entre eles. Por isso chamaremos os elementos de X de “pontos”, mesmo quando forem funções, sequências ou outros objetos.

6.3 Observação. A desigualdade triangular exprime a única restrição geométrica realmente substantiva: passar por um ponto intermediário não pode encurtar o caminho entre dois pontos.

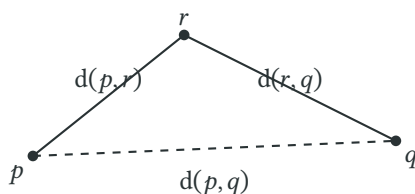


Figura 6.1

A desigualdade triangular: o caminho direto não é maior que um caminho que passa por um ponto intermediário.

6.4 Exemplo. A reta real. Em $\mathbb{R}$,

$$d(x, y) = |x - y|$$

é a métrica usual. É o modelo que motivou a definição.

6.5 Lema (Desigualdade de Cauchy–Schwarz). Para $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.

Não interromperemos a construção dos espaços métricos para demonstrar agora essa desigualdade. Ela será usada apenas para justificar a desigualdade triangular da distância euclidiana, e a demonstração fica como exercício logo abaixo.

6.6 Proposição. Em $\mathbb{R}^n$,

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}$$

define uma métrica.

A positividade, a separação e a simetria são imediatas. O único ponto que merece argumento é a desigualdade triangular

$$\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2,$$

que decorre de Cauchy–Schwarz.

Ex. 6.1 — Cauchy–Schwarz e a desigualdade triangular euclidiana. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, considere

$$q(t) = \|x - ty\|_2^2.$$

Use o fato de que $q(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ para provar a desigualdade de Cauchy–Schwarz. Em seguida, aplique-a a

$$\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|_2^2$$

para obter a desigualdade triangular e concluir diretamente que $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

6.7 Exemplo. Métrica discreta. Seja X um conjunto qualquer. A função

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica em X . Esse exemplo é importante porque mostra que uma métrica não precisa nascer de uma geometria euclidiana previamente existente.

6.8 Exemplo. Métrica induzida. Se (X, d_X) é um espaço métrico e $Y \subset X$, então

$$d_Y(p, q) = d_X(p, q), \quad p, q \in Y,$$

define uma métrica em Y . Dizemos que Y possui a métrica induzida, ou restrita, de X .

6.9 Exemplo. O intervalo $[0, 1]$, com

$$d(x, y) = |x - y|,$$

é um subespaço métrico de $\mathbb{R}$.

6.10 Exemplo. Por que a separação é necessária. Seja X o conjunto das funções $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e defina

$$d_0(f, g) = |f(0) - g(0)|.$$

Essa função é não negativa, simétrica e satisfaz a desigualdade triangular, mas não é uma métrica. Por exemplo, $f(x) = 0$ e $g(x) = x^2$ são funções distintas e, no entanto, $d_0(f, g) = 0$.

6.2 Bolas e a geometria produzida pela métrica

Uma métrica começa a produzir geometria quando fixamos um ponto e perguntamos quais pontos estão a uma distância menor que um número dado.

6.11 Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Para $p \in X$ e $r > 0$, a **bola aberta** de centro p e raio r é

$$B(p, r) = \{q \in X : d(p, q) < r\}.$$

Na reta usual,

$$B(p, r) = (p - r, p + r).$$

Em $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana, as bolas são discos. A mesma coleção de pontos, porém, pode produzir figuras bastante diferentes quando mudamos a métrica.

6.12 Exemplo. Em $\mathbb{R}^n$, além da distância euclidiana, duas métricas particularmente úteis são

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

e

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

A primeira é frequentemente chamada **métrica do taxista**. Mais geralmente, para $p \geq 1$,

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

é uma métrica; a desigualdade triangular nesse caso é a desigualdade de Minkowski.

6.13 Exemplo. Em $\mathbb{R}^2$, a bola de raio r para d_2 é um disco; para d_1 , é um losango; e para d_∞ , é um quadrado.

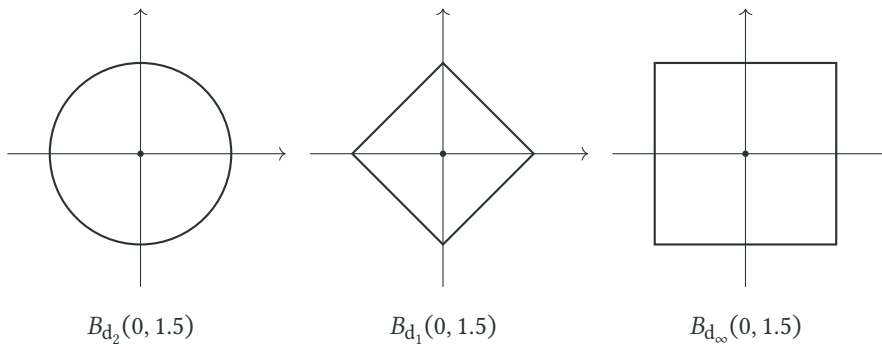


Figura 6.2

O mesmo centro e o mesmo raio produzem bolas diferentes em métricas diferentes.

6.14 Exemplo. Na métrica discreta, se $0 < r \leq 1$, então

$$B(p, r) = \{p\}.$$

Se $r > 1$, então $B(p, r) = X$. Assim, a geometria da métrica discreta é radicalmente diferente da geometria usual da reta.

6.15 Exemplo (Métrica do carteiro). Fixe a origem $O = (0, 0)$ em $\mathbb{R}^2$. Defina

$$d_c(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2, & \text{se } x \text{ e } y \text{ pertencem à mesma reta que passa por } O, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Essa é uma métrica. A interpretação é simples: em direções diferentes, para ir de x a y é preciso passar pela origem. O exemplo mostra que a métrica, e não o desenho subjacente do conjunto, determina a geometria que será usada.

6.3 Dos pontos próximos aos conjuntos abertos

As bolas permitem passar da comparação entre dois pontos à descrição local de conjuntos inteiros.

6.16 Definição. Seja $p \in X$. Um conjunto $V \subset X$ é uma **vizinhança** de p se existe $r > 0$ tal que

$$B(p, r) \subset V.$$

As bolas abertas são, portanto, as vizinhanças básicas de um ponto.

6.17 Definição. Um conjunto $G \subset X$ é **aberto** se, para todo $p \in G$, existe $r > 0$ tal que

$$B(p, r) \subset G.$$

6.18 Teorema. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

Demonstração. Seja $q \in B(p, r)$. Como $d(p, q) < r$, o número

$$h = r - d(p, q)$$

é positivo. Se $s \in B(q, h)$, então, pela desigualdade triangular,

$$d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, s) < d(p, q) + h = r.$$

Logo $B(q, h) \subset B(p, r)$. Portanto cada ponto de $B(p, r)$ possui uma bola centrada nele e contida em $B(p, r)$, e a bola é aberta. $\square$

6.19 Teorema (Unões e interseções de abertos). (a) uma união arbitrária de conjuntos abertos é aberta;
(b) uma interseção finita de conjuntos abertos é aberta.

Demonstração. Se x pertence a uma união de abertos, pertence a algum deles e, portanto, contém uma bola centrada em x inteiramente dentro da união.

Se $x \in G_1 \cap \dots \cap G_n$ e cada G_i é aberto, escolha $r_i > 0$ com $B(x, r_i) \subset G_i$. Para

$$r = \min\{r_1, \dots, r_n\},$$

temos $B(x, r) \subset G_1 \cap \dots \cap G_n$. $\square$

6.20 Definição. Um conjunto $F \subset X$ é **fechado** quando seu complementar $X \setminus F$ é aberto.

6.21 Teorema. Um conjunto é aberto se, e somente se, seu complementar é fechado.

Demonstração. É uma consequência imediata da definição de conjunto fechado, aplicada ao complementar. $\square$

6.22 Teorema. Para qualquer família $\{E_\alpha\}$, valem as leis de De Morgan

$$\left(\bigcup_{\alpha} E_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha} E_{\alpha}^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha} E_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha} E_{\alpha}^c. \quad (6.1)$$

6.23 Corolário. Uma interseção arbitrária de conjuntos fechados é fechada, e uma união finita de conjuntos fechados é fechada.

6.24 Definição. Seja $E \subset X$. Um ponto $p \in E$ é um **ponto interior** de E se existe $r > 0$ tal que

$$B(p, r) \subset E.$$

O conjunto de todos os pontos interiores de E é chamado **interior** de E e será denotado por $\text{int } E$.

Assim, E é aberto se, e somente se, $E = \text{int } E$.

6.25 Definição. O **fecho** de $E \subset X$, denotado por $\overline{E}$, é a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm E :

$$\overline{E} = \bigcap \{F \subset X : E \subset F \text{ e } F \text{ é fechado}\}.$$

Equivalentemente, $\overline{E}$ é o menor conjunto fechado que contém E .

Da definição seguem imediatamente

$$E \subset \overline{E}, \quad \overline{E} \text{ é fechado},$$

e, se F é fechado e $E \subset F$, então $\overline{E} \subset F$.

6.26 Definição. Seja $E \subset X$. Um ponto $p \in X$ é um **ponto de acumulação** de E se, para todo $r > 0$,

$$(B(p, r) \setminus \{p\}) \cap E \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de E será denotado por E' .

6.27 Definição. Um ponto $p \in E$ é **isolado** em E quando não é ponto de acumulação de E .

6.28 Proposição. Para todo $E \subset X$,

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

Consequentemente, E é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

Demonstração. Se $x \notin E \cup E'$, então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap E = \emptyset$. Logo $B(x, r) \subset X \setminus E$, e existe um aberto contendo x e disjunto de E . Portanto $x \notin \overline{E}$.

Reciprocamente, se $x \notin \overline{E}$, como $X \setminus \overline{E}$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset X \setminus \overline{E}$. Como $E \subset \overline{E}$, essa bola não encontra E . Assim $x \notin E \cup E'$. Isso prova $\overline{E} = E \cup E'$. A caracterização dos fechados segue de E ser fechado se, e somente se, $E = \overline{E}$. $\square$

6.29 Teorema. Se p é ponto de acumulação de E , então toda vizinhança de p contém infinitos pontos de E .

Demonstração. Se alguma bola $B(p, r)$ contivesse apenas finitos pontos de E distintos de p , poderíamos tomar a menor das distâncias positivas desses pontos a p e diminuir o raio. Obteríamos uma bola centrada em p sem nenhum ponto de $E \setminus \{p\}$, contradizendo a definição de ponto de acumulação. $\square$

6.30 Exemplo. Na reta com a métrica usual:

- (a) $(0, 1)$ é aberto;
- (b) $[0, 1]$ é fechado;
- (c) 0 é ponto de acumulação de $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$;
- (d) 1 é ponto isolado de $\{1\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

6.31 Definição. Um conjunto $E \subset X$ é **limitado** se existem $q \in X$ e $M > 0$ tais que

$$d(p, q) < M \quad \text{para todo } p \in E.$$

6.32 Definição. Um conjunto $E \subset X$ é **denso** em X se

$$\overline{E} = X.$$

Equivalentemente, toda bola aberta de X encontra E .

6.33 Definição. Um conjunto $E \subset X$ é **perfeito** se é fechado e não possui pontos isolados; equivalentemente, se todo ponto de E é ponto de acumulação de E .

6.34 Teorema. Seja $E \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Se $y = \sup E$, então

$$y \in \overline{E}.$$

Em particular, se E é fechado, então $\sup E \in E$.

Demonstração. Se $y \in E$, não há o que provar. Se $y \notin E$, fixe $r > 0$. Como $y - r$ não é cota superior de E , existe $x \in E$ tal que

$$y - r < x \leq y < y + r.$$

Logo $B(y, r) \cap E \neq \emptyset$. Como isso vale para todo $r > 0$, temos $y \in E' \subset \overline{E}$. $\square$

6.35 Observação. Em $\mathbb{R}^n$, as métricas d_1 , d_2 e d_∞ produzem bolas geometricamente diferentes, mas os mesmos conjuntos abertos. Por exemplo,

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x, y),$$

e

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y).$$

Essas desigualdades mostram que toda bola de uma dessas métricas contém uma bola suficientemente pequena das outras. Portanto elas geram a mesma topologia em $\mathbb{R}^n$. Só agora essa afirmação faz sentido: “mesma topologia” quer dizer exatamente “mesmos conjuntos abertos”.

6.4 Topologia relativa

A métrica induzida permite estudar um subconjunto $Y \subset X$ como um espaço métrico por si só. A primeira identidade a guardar é simples: se $p \in Y$, então

$$B_Y(p, r) = Y \cap B_X(p, r).$$

Assim, o que é aberto dentro de Y depende apenas do que pode ser visto ao permanecer em Y .

6.36 Definição. Se $E \subset Y \subset X$, dizemos que E é **aberto relativamente a Y** quando é aberto no espaço métrico Y com a métrica induzida. Equivalentemente, para cada $p \in E$ existe $r > 0$ tal que

$$B_X(p, r) \cap Y \subset E.$$

6.37 Exemplo. O intervalo $[0, 1]$ não é aberto em $\mathbb{R}$, mas é aberto relativamente a $[0, 1]$, pois

$$[0, 1] = [0, 1] \cap (-1, 1).$$

6.38 Teorema. Se $Y \subset X$, um conjunto $E \subset Y$ é aberto relativamente a Y se, e somente se, existe um aberto $G \subset X$ tal que

$$E = Y \cap G.$$

Demonstração. Se $E = Y \cap G$ com G aberto em X , então, para cada $p \in E$, existe $r > 0$ com $B_X(p, r) \subset G$. Logo

$$B_Y(p, r) = Y \cap B_X(p, r) \subset E,$$

e E é aberto em Y .

Reciprocamente, suponha E aberto em Y . Para cada $p \in E$, escolha $r_p > 0$ tal que

$$B_X(p, r_p) \cap Y \subset E.$$

Defina

$$G = \bigcup_{p \in E} B_X(p, r_p).$$

Então G é aberto em X e $E = Y \cap G$. □

6.39 Teorema. Se $Y \subset X$, um conjunto $F \subset Y$ é fechado relativamente a Y se, e somente se, existe um fechado $C \subset X$ tal que

$$F = Y \cap C.$$

Demonstração. Basta tomar complementares na caracterização anterior. Com efeito, F é fechado em Y se, e somente se, $Y \setminus F$ é aberto em Y , isto é, se existe um aberto $G \subset X$ com

$$Y \setminus F = Y \cap G.$$

Tomando $C = X \setminus G$, obtemos $F = Y \cap C$, com C fechado. □

6.5 Sequências, Cauchy e completude

Nesta seção, introduzimos duas noções centrais no estudo de sequências em espaços métricos: convergência e condição de Cauchy. A primeira descreve quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto do espaço. A segunda descreve quando os termos da sequência passam a ficar próximos entre si. A noção de completude aparece justamente na relação entre essas duas ideias.

Convergência de sequências

6.40 Definição. Seja (X, d) um espaço métrico e seja $\{p_n\}$ uma sequência em X . Dizemos que $\{p_n\}$ **converge** para um ponto $p \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon.$$

Nesse caso, escrevemos

$$p_n \rightarrow p \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p.$$

Em outras palavras, a partir de certo índice, todos os termos da sequência ficam tão próximos de p quanto quisermos.

6.41 Teorema. Se uma sequência em um espaço métrico converge, então seu limite é único.

Demonstração. Suponha que $p_n \rightarrow p$ e também $p_n \rightarrow q$. Mostremos que $p = q$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $p_n \rightarrow p$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_1 \Rightarrow d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $p_n \rightarrow q$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \Rightarrow d(p_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, a desigualdade triangular dá

$$d(p, q) \leq d(p, p_n) + d(p_n, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $d(p, q) = 0$. Pela propriedade de separação da métrica, concluímos que $p = q$. $\square$

6.42 Teorema. Seja $F \subset X$. Então F é fechado se, e somente se, para toda sequência $\{x_n\} \subset F$ que converge em X para algum ponto x , tem-se $x \in F$.

Demonstração. Suponha primeiro que F seja fechado e que $\{x_n\} \subset F$ converja para $x \in X$. Se $x \notin F$, então $x \in X \setminus F$. Como F é fechado, $X \setminus F$ é aberto. Logo existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subset X \setminus F.$$

Mas, como $x_n \rightarrow x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, r).$$

Isso contradiz o fato de que $x_n \in F$ para todo n .

Reciprocamente, suponha que toda sequência em F convergente em X tenha limite em F . Mostremos que F é fechado. Seja x um ponto de acumulação de F . Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $B(x, 1/n)$ contém um ponto de F distinto de x , podemos escolher

$$x_n \in F \cap B(x, 1/n).$$

Então

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n},$$

e portanto $x_n \rightarrow x$. Pela hipótese, segue que $x \in F$. Logo todo ponto de acumulação de F pertence a F , e assim F é fechado. $\square$

6.43 Definição. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico X . Uma **sub-sequência** de (x_n) é uma sequência da forma (x_{n_k}) , onde (n_k) é uma sequência estritamente crescente de números naturais, isto é,

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

6.44 Observação. A convergência de uma sequência depende do espaço em que ela está sendo considerada. Por exemplo, a sequência $p_n = 1/n$ converge para 0 em $\mathbb{R}$, mas não converge em $(0, 1)$, pois esse limite não pertence ao espaço $(0, 1)$.

Sequências de Cauchy

Na definição de convergência, o ponto limite aparece desde o início. A condição de Cauchy, por outro lado, é formulada apenas em termos da própria sequência: ela exige que, para índices suficientemente grandes, os termos fiquem arbitrariamente próximos entre si.

6.45 Definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência $\{p_n\}$ em X é denominada **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow d(p_m, p_n) < \varepsilon.$$

6.46 Teorema. Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Suponha que $p_n \rightarrow p$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela convergência, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $m, n \geq N$, então, pela desigualdade triangular,

$$d(p_m, p_n) \leq d(p_m, p) + d(p, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $\{p_n\}$ é uma sequência de Cauchy. $\square$

A recíproca não vale em todo espaço métrico. Pode acontecer que uma sequência de Cauchy não converja no espaço considerado. É justamente para excluir esse tipo de situação que introduzimos a noção de completude.

Completude

A condição de Cauchy descreve uma sequência sem mencionar um candidato a limite. Isso leva à pergunta natural: quando essa informação interna basta para garantir que a sequência realmente converge no próprio espaço?

6.47 Definição. Um espaço métrico (X, d) é dito **completo** se toda sequência de Cauchy em X converge para algum ponto de X .

A diferença entre ser de Cauchy e convergir dentro do espaço já aparece no exemplo mais simples de um subespaço aberto da reta.

6.48 Exemplo. Considere o espaço métrico $(0, 1)$ munido da métrica usual de $\mathbb{R}$ e a sequência $p_n = \frac{1}{n}$. Como $p_n \rightarrow 0$ em $\mathbb{R}$, segue pelo Teorema 6.46 que (p_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como a métrica em $(0, 1)$ é simplesmente a restrição da métrica usual de $\mathbb{R}$, conclui-se que (p_n) também é de Cauchy em $(0, 1)$.

Entretanto, essa sequência não converge em $(0, 1)$, pois seu limite em $\mathbb{R}$ é 0, e $0 \notin (0, 1)$. Portanto, $(0, 1)$ não é completo.

6.49 Teorema. Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico é limitada.

Demonstração. Seja $\{p_n\}$ uma sequência de Cauchy em (X, d) . Tomando $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow d(p_m, p_n) < 1.$$

Em particular, para todo $n \geq N$,

$$d(p_n, p_N) < 1.$$

Logo os termos $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \dots$ pertencem à bola $B(p_N, 1)$.

Os termos iniciais $p_1, \dots, p_{N-1}$ formam um conjunto finito. Escolhendo

$$M > \max\{1, d(p_1, p_N), \dots, d(p_{N-1}, p_N)\},$$

obtemos

$$d(p_n, p_N) < M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{p_n\}$ é limitada. □

Em um espaço completo, toda sequência de Cauchy converge, e seu limite pertence ao próprio espaço.

6.50 Observação. A completude é uma propriedade do espaço métrico, e não apenas do conjunto subjacente. Um mesmo conjunto pode ser completo com uma métrica e não completo com outra.

6.51 Teorema. A reta real $\mathbb{R}$, com a métrica usual, é completa.

Demonstração. Seja (p_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 6.49, (p_n) é limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$A_n = \{p_k : k \geq n\}.$$

Cada A_n é não vazio e limitado, de modo que podemos definir

$$s_n = \sup A_n.$$

Como $A_{n+1} \subset A_n$, temos $s_{n+1} \leq s_n$. Assim, (s_n) é decrescente. Além disso, como A_1 é limitado inferiormente, a sequência (s_n) também é limitada inferiormente. Pela propriedade do supremo, existe

$$s = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Como (s_n) é decrescente e limitada inferiormente por s , segue que $s_n \rightarrow s$.

Mostremos que $p_n \rightarrow s$. Seja $\varepsilon > 0$. Como (p_n) é de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq N_1$, então $|p_m - p_n| < \varepsilon$. Fixado $n \geq N_1$, obtemos

$$p_k < p_n + \varepsilon \quad \text{para todo } k \geq n.$$

Tomando o supremo em A_n , segue que $s_n \leq p_n + \varepsilon$. Como $p_n \in A_n$, também temos $p_n \leq s_n$. Logo

$$0 \leq s_n - p_n \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N_1.$$

Como $s_n \rightarrow s$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon.$$

Portanto, se $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, então

$$|p_n - s| \leq |p_n - s_n| + |s_n - s| < 2\varepsilon.$$

Logo $p_n \rightarrow s$. Concluimos que $\mathbb{R}$ é completa. $\square$

6.52 Teorema. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ é completo.

Demonstração. Seja $\{p_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^k$, onde

$$p_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}).$$

Fixe $j \in \{1, \dots, k\}$. Como

$$|x_{mj} - x_{nj}| \leq \|p_m - p_n\|,$$

segue da condição de Cauchy para $\{p_n\}$ que a sequência real $\{x_{nj}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Pelo Teorema 6.51, cada uma dessas sequências converge em $\mathbb{R}$. Assim, para cada j , existe $a_j \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{nj} \rightarrow a_j.$$

Definamos

$$p = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Mostremos que $p_n \rightarrow p$. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $j = 1, \dots, k$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_j \Rightarrow |x_{nj} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

Se $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$, então, para $n \geq N$,

$$\|p_n - p\| = \left(\sum_{j=1}^k |x_{nj} - a_j|^2 \right)^{1/2} < \left(\sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Logo $p_n \rightarrow p$. Portanto, toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^k$ converge em $\mathbb{R}^k$, e assim $\mathbb{R}^k$ é completo. $\square$

6.53 Corolário. Todo produto de intervalos fechados

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k,$$

com a métrica induzida de $\mathbb{R}^k$, é completo.

Demonstração. Esse produto é fechado em $\mathbb{R}^k$. Pelo Teorema 6.52, o espaço $\mathbb{R}^k$ é completo. Logo o resultado segue do teorema seguinte. $\square$

6.54 Teorema. Todo subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo, quando munido da métrica induzida.

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico completo e seja $A \subset X$ um subconjunto fechado. Considere uma sequência de Cauchy $\{p_n\}$ em A .

Como a métrica em A é a induzida por X , a sequência $\{p_n\}$ também é de Cauchy em X . Pela completude de X , existe $p \in X$ tal que

$$p_n \rightarrow p.$$

Como todos os termos da sequência pertencem a A e A é fechado, o Teorema 6.42 implica que $p \in A$.

Portanto, $\{p_n\}$ converge em A . Logo A é completo. $\square$

6.55 Exemplo. O intervalo fechado $[0, 1]$, com a métrica usual, é completo. De fato, ele é fechado em $\mathbb{R}$, e $\mathbb{R}$ é completo. Em contraste, o intervalo aberto $(0, 1)$ não é completo, como vimos no Exemplo 6.48.

6.6 Compacidade

A completude responde a uma pergunta sobre sequências de Cauchy: quando uma aproximação interna ao espaço possui um limite que permanece no próprio espaço? A compacidade expressa um controle global mais forte. Em um espaço compacto, toda

sequência possui uma subsequência convergente e toda cobertura por abertos pode ser reduzida a uma quantidade finita de conjuntos.

Essas duas descrições — uma sequencial, outra por coberturas — são duas formas de uma mesma ideia de finitude topológica.

A noção de compacidade formaliza, em linguagem topológica, a ideia de que um conjunto pode ser controlado por uma quantidade finita de informação local.

6.56 Definição. Uma **cobertura aberta** de um conjunto E em um espaço métrico X é uma coleção $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abertos de X tal que

$$E \subset \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}.$$

6.57 Observação. Dizer que $\{G_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de E significa simplesmente que cada ponto de E pertence a pelo menos um dos conjuntos G_α . Observamos que a família pode conter conjuntos que também tenham pontos fora de E .

6.58 Exemplo (Cobertura de um conjunto finito). Considere o conjunto

$$E = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{R}.$$

Para cada $k \in E$, considere a bola aberta

$$B_k = B(k, 1/4).$$

Essas bolas são duas a duas disjuntas e formam uma cobertura aberta de E , pois cada ponto $k \in E$ pertence à bola B_k .

6.59 Exemplo (Uma cobertura aberta simples de um intervalo). Considere o intervalo fechado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Então a família

$$\left\{ \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

é uma cobertura aberta de $[0, 1]$, pois cada um desses intervalos contém $[0, 1]$. Nesse caso, qualquer um dos intervalos da família já constitui, sozinho, uma subcobertura finita.

6.60 Definição. Um subconjunto K de um espaço métrico X é dito **compacto** se toda cobertura aberta de K contém uma subcobertura finita.

Mais explicitamente, isso significa que, se $\{G_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de K , então existem finitamente muitos índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

6.61 Observação. A definição não afirma que toda cobertura aberta de K é finita, mas apenas que, mesmo quando a cobertura original é infinita, podemos extrair dela uma subfamília finita que ainda cubra K .

6.62 Exemplo. Todo conjunto finito é compacto. De fato, se

$$K = \{x_1, \dots, x_n\}$$

e $\{G_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de K , então, para cada x_i , escolhemos um conjunto G_{α_i} que contenha x_i . A família finita

$$G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}$$

já cobre K .

6.63 Exemplo (Cobertura do conjunto $\mathbb{N}$ por bolas disjuntas). Considere o conjunto

$$E = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a bola aberta

$$B_n = B(n, 1/4).$$

As bolas B_n são duas a duas disjuntas e formam uma cobertura aberta de $\mathbb{N}$.

No entanto, nenhuma subcoleção finita dessas bolas cobre $\mathbb{N}$. De fato, uma subcoleção finita cobre apenas um número finito de pontos do conjunto.

Portanto, essa cobertura não admite subcobertura finita.

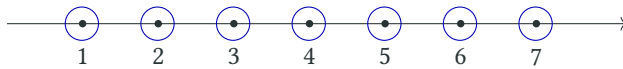


Figura 6.3

A cobertura de $\mathbb{N}$ pelas bolas $B(n, 1/4)$. Cada bola cobre apenas um ponto de $\mathbb{N}$.

6.64 Exemplo ($\mathbb{R}$ não é compacto). Considere o espaço métrico $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Para mostrar que $\mathbb{R}$ não é compacto, exibiremos uma cobertura aberta que não possui subcobertura finita.

Seja $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a coleção de intervalos abertos definida por

$$V_n = (-n, n).$$

Dado qualquer número real x , pela Propriedade Arquimediana, existe um inteiro positivo n tal que $n > |x|$. Isso implica que $-n < x < n$, ou seja, $x \in V_n$. Logo,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Portanto, $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista uma subcoleção finita $\{V_{n_1}, V_{n_2}, \dots, V_{n_k}\}$ que cubra $\mathbb{R}$. Seja

$$N = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}.$$

Como os intervalos são encaixantes, temos

$$V_{n_1} \cup V_{n_2} \cup \dots \cup V_{n_k} = V_N = (-N, N).$$

Mas o ponto $x = N$ pertence a $\mathbb{R}$ e não pertence a $(-N, N)$, o que contradiz o fato de que essa subcoleção cobre $\mathbb{R}$. Concluímos que $\mathbb{R}$ não é compacto.

6.65 Exemplo (Intervalo aberto não é compacto). Considere o conjunto limitado

$$E = B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}.$$

Mostraremos que E não é compacto exibindo uma cobertura aberta que não admite subcobertura finita.

Para cada $p \in E$, definimos a vizinhança aberta

$$G_p = B\left(p, \frac{1 - |p|}{2}\right).$$

Note que o raio de G_p é exatamente metade da distância de p até a fronteira de E . Como cada ponto $p \in E$ pertence à bola G_p , a coleção $\{G_p\}_{p \in E}$ cobre E . Além disso, cada G_p está contida em E , pois, se $x \in G_p$, então

$$|x| \leq |x - p| + |p| < \frac{1 - |p|}{2} + |p| = \frac{1 + |p|}{2} < 1.$$

Suponha agora, por absurdo, que exista uma subcoleção finita de abertos $\{G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_k}\}$ que cubra E . Para cada bola G_{p_i} , o ponto mais à direita que pertence a essa bola é $p_i + \frac{1 - |p_i|}{2}$, e esse número é sempre estritamente menor que 1. Definimos

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq k} \left(p_i + \frac{1 - |p_i|}{2} \right).$$

Então $\alpha < 1$. Escolhendo agora x de modo que

$$\alpha < x < 1,$$

temos $x \in E$, mas x não pertence a nenhuma das bolas escolhidas, contradizendo o fato de que essa subcoleção cobre E . Portanto, o intervalo aberto $(-1, 1)$ não é compacto.

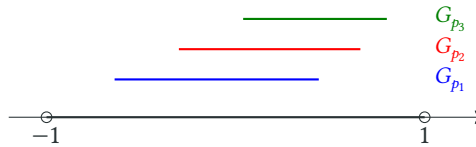


Figura 6.4

Uma subcoleção finita dos conjuntos G_p nunca alcança pontos arbitrariamente próximos de 1.

A existência de uma classe ampla de conjuntos compactos infinitos em $\mathbb{R}^k$ seguirá do Teorema 6.80.

6.66 Teorema. Suponha $K \subset Y \subset X$. Então K é compacto relativamente a X se e somente se K é compacto relativamente a Y .

Demonstração. Suponha primeiro que K seja compacto relativamente a X , e seja $\{V_\alpha\}$ uma coleção de conjuntos abertos relativamente a Y tal que

$$K \subset \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}.$$

Pelo Teorema 6.38, para cada α existe um aberto G_α de X tal que

$$V_\alpha = Y \cap G_\alpha.$$

Como $K \subset Y$, os conjuntos G_α também cobrem K . Pela compacidade de K em X , existem índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Intersectando ambos os lados com Y e usando que $K \subset Y$, obtemos

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

Logo K é compacto relativamente a Y .

Reciprocamente, suponha que K seja compacto relativamente a Y , e seja $\{G_\alpha\}$ uma cobertura aberta de K por abertos de X . Defina

$$V_\alpha = Y \cap G_\alpha.$$

Cada V_α é aberto relativamente a Y , e os conjuntos V_α cobrem K . Pela compacidade de K em Y , existem índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

Como $V_\alpha \subset G_\alpha$ para todo α , segue que

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Portanto, K é compacto relativamente a X . □

6.67 Teorema. Subconjuntos compactos de espaços métricos são fechados.

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico X . Mostraremos que o complementar de K é aberto.

Fixe um ponto $p \in X \setminus K$. Para cada $q \in K$, escolhemos vizinhanças V_q de p e W_q de q , ambas com raio menor que $\frac{1}{2} d(p, q)$. Com essa escolha, $V_q \cap W_q = \emptyset$. De fato, se existisse um ponto $x \in V_q \cap W_q$, então, pela desigualdade triangular,

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < \frac{1}{2} d(p, q) + \frac{1}{2} d(p, q) = d(p, q),$$

o que é impossível.

Os conjuntos W_q , com $q \in K$, formam uma cobertura aberta de K . Como K é compacto, existem pontos $q_1, \dots, q_n \in K$ tais que $K \subset W_{q_1} \cup \dots \cup W_{q_n}$. Agora definimos $V = V_{q_1} \cap \dots \cap V_{q_n}$. Então V é uma vizinhança de p . Além disso, como cada V_{q_i} é disjunta de W_{q_i} , segue que V é disjunta de $W = W_{q_1} \cup \dots \cup W_{q_n}$, e, em particular, de K . Portanto, $V \subset X \setminus K$. Isso mostra que p é ponto interior de $X \setminus K$. Como p foi arbitrário, concluímos que $X \setminus K$ é aberto. Logo K é fechado. □

6.68 Teorema. Subconjuntos compactos de espaços métricos são limitados.

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico (X, d) e fixe um ponto $p \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a bola aberta

$$B(p, n) = \{x \in X : d(x, p) < n\}.$$

A família $\{B(p, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de K , pois, para cada $x \in K$, existe $n > d(x, p)$ e então $x \in B(p, n)$.

Pela compacidade, existe uma subcobertura finita

$$K \subset B(p, n_1) \cup \dots \cup B(p, n_m).$$

Se $N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$, então

$$K \subset B(p, N).$$

Logo K é limitado. □

6.69 Teorema. Subconjuntos fechados de conjuntos compactos são compactos.

Demonstração. Suponha $F \subset K \subset X$, com F fechado em X e K compacto. Seja $\{V_\alpha\}$ uma cobertura aberta de F . Como F é fechado, seu complementar F^c é aberto. Acrescentando F^c à família $\{V_\alpha\}$, obtemos uma cobertura aberta de K .

Como K é compacto, essa cobertura admite uma subcobertura finita. Se F^c estiver entre os conjuntos escolhidos, podemos removê-lo sem afetar a cobertura de F , já que F^c não contém pontos de F . Resta, assim, uma subcoleção finita da família original $\{V_\alpha\}$ que cobre F . Portanto, F é compacto. □

6.70 Corolário. Se F é fechado e K é compacto, então $F \cap K$ é compacto.

6.71 Teorema. Se $\{K_\alpha\}$ é uma coleção de subconjuntos compactos de um espaço métrico X tal que a interseção de toda subcoleção finita de $\{K_\alpha\}$ é não vazia, então $\bigcap K_\alpha$ é não vazia.

Demonstração. Fixe um membro K_1 da coleção e ponha $G_\alpha = K_\alpha^c$. Suponha, por absurdo, que nenhum ponto de K_1 pertença a todos os conjuntos K_α . Então os conjuntos G_α formam uma cobertura aberta de K_1 . Como K_1 é compacto, existem índices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Mas isso equivale a dizer que

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_n} = \emptyset,$$

o que contradiz a hipótese de que toda interseção finita é não vazia. Logo

$$\bigcap_{\alpha} K_\alpha \neq \emptyset.$$

□

6.72 Corolário. Se $\{K_n\}$ é uma sequência de conjuntos compactos não vazios tais que $K_n \supset K_{n+1}$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não vazio.

6.73 Teorema. Se E é um subconjunto infinito de um conjunto compacto K , então E tem um ponto de acumulação em K .

Demonstração. Suponha, por absurdo, que nenhum ponto de K seja ponto de acumulação de E . Então, para cada $q \in K$, existe uma vizinhança V_q que contém no máximo um ponto de E , a saber, o próprio q , no caso em que $q \in E$.

A família $\{V_q\}_{q \in K}$ é uma cobertura aberta de K . No entanto, nenhuma subcoleção finita dessa família pode cobrir o conjunto infinito E , pois cada um de seus membros contém no máximo um ponto de E . Como $E \subset K$, isso mostra que nenhuma subcoleção finita pode cobrir K , em contradição com a compacidade de K .

Portanto, algum ponto de K é ponto de acumulação de E . $\square$

6.74 Teorema. Seja X um espaço métrico compacto. Então toda sequência em X possui uma subsequência convergente para algum ponto de X .

Demonstração. Considere o conjunto $E = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Se E é finito, então algum ponto $x \in E$ aparece infinitas vezes na sequência. Nesse caso, basta tomar uma subsequência constante igual a x , que evidentemente converge para x .

Suponha agora que E seja infinito. Como X é compacto, todo subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação. Seja x um ponto de acumulação de E . Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $E \cap B(x, 1/k)$ é infinito; em particular, podemos escolher $n_1 < n_2 < \dots$ de modo que $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$ para todo k . Assim, $d(x_{n_k}, x) < 1/k$ para todo k , e portanto $x_{n_k} \rightarrow x$. $\square$

6.75 Teorema. Se $\{I_n\}$ é uma sequência de intervalos fechados não vazios de $\mathbb{R}$ tal que

$$I_n \supset I_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Demonstração. Escreva $I_n = [a_n, b_n]$. Seja $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $a_n \leq b_1$ para todo n , o conjunto E é não vazio e limitado superiormente. Seja $x = \sup E$.

Da inclusão $I_{m+n} \subset I_m$ segue que

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m \quad \text{para todos } m, n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, $x \leq b_m$ para todo m . Por outro lado, como $a_m \in E$, temos $a_m \leq x$. Logo

$$a_m \leq x \leq b_m \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim, $x \in I_m$ para todo m , e portanto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. $\square$

6.76 Definição. Uma k -célula em $\mathbb{R}^k$ é um conjunto da forma

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : a_j \leq x_j \leq b_j, 1 \leq j \leq k\},$$

onde $a_j \leq b_j$ para todo $j = 1, \dots, k$.

6.77 Teorema. Seja k um inteiro positivo. Se $\{I_n\}$ é uma sequência de k -células tal que $I_n \supset I_{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ é não vazio.

Demonstração. Escreva cada I_n como o conjunto dos pontos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ tais que

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \dots),$$

e ponha

$$I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}].$$

Para cada j , a sequência $\{I_{n,j}\}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 6.75. Portanto, existe $x_j^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \dots).$$

Definindo

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_k^*),$$

vemos que $\mathbf{x}^* \in I_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Logo

$$\mathbf{x}^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n. \quad \square$$

6.78 Observação. O resultado anterior generaliza para $\mathbb{R}^k$ a propriedade de interseção de intervalos encaixantes na reta. Ele será o ingrediente central na prova da compacidade das k -células.

6.79 Teorema. Toda k -célula é compacta.

Demonstração. A ideia da prova é a seguinte: supondo que exista uma cobertura aberta sem subcobertura finita, subdividimos sucessivamente a k -célula em partes menores e escolhemos sempre uma subcélula que ainda não admita subcobertura finita. Isso produz uma sequência encaixante de células cada vez menores. O ponto pertencente à interseção de todas elas levará a uma contradição.

Seja I uma k -célula, formada pelos pontos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ tais que

$$a_j \leq x_j \leq b_j \quad (1 \leq j \leq k).$$

Ponha

$$\delta = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \left(\sum_{j=1}^k (b_j - a_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Então, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$, temos $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \delta$.

Suponha, por absurdo, que exista uma cobertura aberta $\{G_\alpha\}$ de I que não admita subcobertura finita. Dividimos cada intervalo $[a_j, b_j]$ ao meio, no ponto

$$c_j = \frac{a_j + b_j}{2}.$$

Isso decompõe I em 2^k subcélulas. Pelo menos uma dessas subcélulas, que chamaremos de I_1 , não pode ser coberta por nenhuma subcoleção finita de $\{G_\alpha\}$; caso contrário, reunindo subcoberturas finitas para cada uma das subcélulas, obteríamos uma subcobertura finita de I .

Repetindo o mesmo processo com I_1 , depois com a subcélula escolhida no passo seguinte, e assim sucessivamente, construímos por indução uma sequência de k -células

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

com as propriedades:

- (a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$;
- (b) cada I_n não é coberta por nenhuma subcoleção finita de $\{G_\alpha\}$;
- (c) se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_n$, então $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 2^{-n}\delta$.

Pelo teorema das interseções encaixantes de k -células, existe um ponto

$$\mathbf{x}^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Como $\{G_\alpha\}$ cobre I , existe algum índice α tal que $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. Como G_α é aberto, existe $r > 0$ tal que

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r \Rightarrow \mathbf{y} \in G_\alpha.$$

Escolha agora n suficientemente grande para que

$$2^{-n}\delta < r.$$

Então, pela propriedade (c), todo ponto de I_n está a distância menor que r de $\mathbf{x}^*$, e portanto pertence a G_α . Assim,

$$I_n \subset G_\alpha.$$

Isso contradiz a propriedade (b), segundo a qual I_n não é coberta por nenhuma subcoleção finita de $\{G_\alpha\}$.

A contradição mostra que toda cobertura aberta de I admite uma subcobertura finita. Portanto, I é compacto. $\square$

6.80 Teorema (Heine–Borel). Um subconjunto de $\mathbb{R}^k$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Demonstração. Seja $E \subset \mathbb{R}^k$.

Suponha primeiro que E seja compacto. Pelo Teorema 6.67, E é fechado, e pelo Teorema 6.68, E é limitado.

Reciprocamente, suponha que E seja fechado e limitado. Como E é limitado, existe uma k -célula I tal que $E \subset I$. Pelo Teorema 6.79, I é compacto. Como E é fechado em $\mathbb{R}^k$, em particular é fechado relativamente a I . Pelo Teorema 6.69, concluímos que E é compacto. $\square$

6.81 Observação. Completude e compacidade respondem a perguntas diferentes. A reta $\mathbb{R}$ é completa, mas não é compacta; o intervalo fechado $[0, 1]$ é completo e compacto; já $(0, 1)$ não possui nenhuma dessas propriedades. Em $\mathbb{R}^k$, o Teorema de Heine–Borel torna a compacidade particularmente concreta: ela equivale a ser fechado e limitado. Completude, por si só, não impõe qualquer condição de limitação.

6.7 Conjuntos perfeitos e o conjunto de Cantor

A compacidade fornece um mecanismo poderoso: famílias encaixantes de compactos não vazios não podem desaparecer no limite. Vamos usá-lo agora para estudar conjuntos sem pontos isolados. A combinação entre ser fechado e não possuir pontos isolados é muito mais rígida do que parece e força, em $\mathbb{R}^k$, a não enumerabilidade.

Assim, a não enumerabilidade reaparece aqui por uma razão completamente diferente da diagonalização de Cantor: ela será consequência de estrutura topológica.

Recordemos que um conjunto E é dito **perfeito** se E é fechado e todo ponto de E é ponto de acumulação de E . Em outras palavras, um conjunto perfeito é um conjunto fechado que não possui pontos isolados.

6.82 Exemplo. O conjunto $\mathbb{R}$ é perfeito.

6.83 Exemplo. O conjunto $\mathbb{Q}$ não é perfeito como subconjunto de $\mathbb{R}$. Embora todo racional seja ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é fechado em $\mathbb{R}$, pois possui números irracionais como pontos de acumulação.

6.84 Exemplo. Nenhum conjunto finito é perfeito. De fato, conjuntos finitos são fechados, mas nenhum de seus pontos é ponto de acumulação.

6.85 Observação. A definição de conjunto perfeito combina duas exigências diferentes: uma condição global, que é ser fechado, e uma condição local, que é não ter pontos isolados.

6.86 Teorema. Seja P um conjunto perfeito não vazio em $\mathbb{R}^k$. Então P é não enumerável.

Demonstração. Como P é perfeito, ele é infinito. Suponha, por contradição, que

$$P = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}.$$

Construiremos bolas abertas $V_n = B(\mathbf{c}_n, r_n)$ tais que, para todo n ,

- (i) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$;
- (ii) $\mathbf{x}_n \notin \overline{V}_{n+1}$;
- (iii) $V_n \cap P \neq \emptyset$.

Começemos tomando $V_1 = B(\mathbf{x}_1, 1)$. Suponha construído V_n . Como $V_n \cap P \neq \emptyset$ e P não possui pontos isolados, podemos escolher

$$\mathbf{z} \in (V_n \cap P) \setminus \{\mathbf{x}_n\}.$$

Como V_n é aberto, existe $\rho > 0$ tal que

$$\overline{B}(\mathbf{z}, \rho) \subset V_n.$$

Defina

$$r_{n+1} := \min\{\rho, \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_n\|/2\}, \quad V_{n+1} := B(\mathbf{z}, r_{n+1}).$$

Com essa escolha, as condições (i), (ii) e (iii) ficam satisfeitas.

Agora definimos

$$K_n := \overline{V}_n \cap P.$$

Como P é fechado e $\overline{V}_n$ é compacto, cada K_n é compacto. Além disso, cada K_n é não vazio pela condição (iii), e da condição (i) segue que

$$K_{n+1} \subset K_n.$$

Pelo corolário do Teorema 6.71, existe

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{n \geq 1} K_n \subset P.$$

Como $P = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$, temos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m$ para algum m .

Por outro lado, como $\mathbf{x} \in K_{m+1}$, segue que

$$\mathbf{x} \in \overline{V}_{m+1},$$

o que contradiz a condição (ii), segundo a qual $\mathbf{x}_m \notin \overline{V}_{m+1}$. Essa contradição mostra que P não pode ser enumerável. Portanto, P é não enumerável. $\square$

6.87 Corolário. Todo intervalo $[a, b]$ com $a < b$ é não enumerável. Em particular, o conjunto de todos os números reais é não enumerável.

Demonstração. O intervalo $[a, b]$ é fechado em $\mathbb{R}$ e todo ponto de $[a, b]$ é ponto de acumulação de $[a, b]$. Logo $[a, b]$ é perfeito. Pelo teorema anterior, segue que $[a, b]$ é não enumerável. Em particular, como $\mathbb{R}$ contém intervalos fechados não degenerados, conclui-se que $\mathbb{R}$ é não enumerável. $\square$

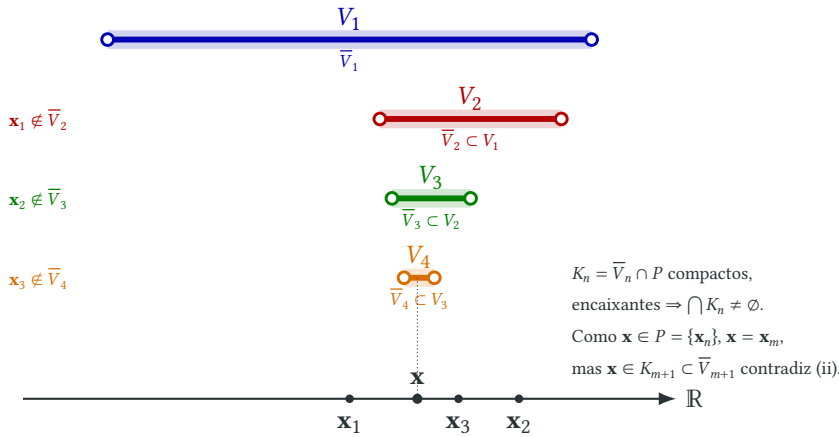


Figura 6.5

Ilustração, na reta, da construção usada na prova de que um conjunto perfeito não vazio é não enumerável.

6.88 Exemplo (O conjunto de Cantor). O conjunto que vamos construir agora mostra que existem conjuntos perfeitos em $\mathbb{R}$ que não contêm nenhum intervalo.

Seja E_0 o intervalo $[0, 1]$. Remova o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, e seja E_1 a união dos intervalos

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Remova agora os terços médios desses dois intervalos, e seja E_2 a união dos intervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Prosseguindo desse modo, obtemos uma sequência de conjuntos compactos E_n tais que

- (a) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$;
- (b) E_n é a união de 2^n intervalos, cada um deles de comprimento 3^{-n} .

O conjunto

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

é denominado conjunto de Cantor. Como cada E_n é compacto e a família é encaixante, o Teorema 6.71 mostra que P não é vazio. Além disso, P é compacto, por ser interseção de fechados contidos no compacto E_1 .



Figura 6.6

Primeiras etapas da construção do conjunto de Cantor.

Os intervalos removidos ao longo da construção são intervalos abertos cujos extremos têm a forma

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \quad (6.2)$$

para inteiros $m \geq 1$ e valores adequados de k . Nenhum desses intervalos tem ponto em comum com P .

Além disso, P não contém nenhum intervalo. De fato, se $(\alpha, \beta) \subset P$, escolhendo m suficientemente grande para que $3^{-m} < \beta - \alpha$, teríamos $(\alpha, \beta) \subset E_m$. Mas E_m é a união de 2^m intervalos fechados disjuntos, cada um de comprimento 3^{-m} , separados por lacunas abertas. Um intervalo aberto de comprimento maior que 3^{-m} não pode estar contido em E_m . Essa contradição mostra que P não contém intervalos.

6.89 Proposição. O conjunto de Cantor é perfeito.

Demonstração. Como o conjunto de Cantor P é a interseção de uma família decrescente de conjuntos fechados,

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

segue que P é fechado. Resta mostrar que P não tem pontos isolados.

Fixe $x \in P$ e seja S um intervalo aberto que contém x . Como S é aberto, existe $\eta > 0$ tal que

$$(x - \eta, x + \eta) \subset S.$$

Escolha n suficientemente grande para que

$$3^{-n} < \eta.$$

Então cada intervalo componente de E_n tem comprimento menor que η . Seja I_n o único intervalo componente de E_n que contém x . Pela escolha de n , temos

$$I_n \subset (x - \eta, x + \eta) \subset S.$$

Sejam $a_n < b_n$ as extremidades de I_n . Como $x \in I_n$, pelo menos uma dessas extremidades é diferente de x . Escolha

$$x_n \in \{a_n, b_n\} \quad \text{com} \quad x_n \neq x.$$

Pela construção do conjunto de Cantor, as extremidades dos intervalos que permanecem em cada etapa nunca são removidas. Em particular, as extremidades de todo intervalo componente de E_n pertencem a P . Logo $x_n \in P$.

Assim,

$$x_n \in P \cap (S \setminus \{x\}).$$

Como S foi um intervalo aberto arbitrário contendo x , concluímos que toda vizinhança de x contém um ponto de P distinto de x . Portanto, x é ponto de acumulação de P .

Como $x \in P$ foi arbitrário, todo ponto de P é ponto de acumulação de P . Como já vimos que P é fechado, segue que P é perfeito. $\square$

O interesse do conjunto de Cantor neste ponto é inteiramente topológico: ele é perfeito e não enumerável, mas não contém intervalo algum. É um exemplo fundamental de como um conjunto pode ser extremamente rico em pontos sem se parecer localmente com um intervalo.

6.8 Conexidade

Depois de estudar propriedades ligadas à aproximação, completude e compacidade, mudamos de pergunta. Agora queremos formalizar quando um espaço é, em sentido topológico, “feito de uma só peça”. Essa é a função da conexidade.

A noção de conexidade procura capturar matematicamente a ideia de que um conjunto é “feito de uma só peça”. Em geral, essa noção é definida em termos da impossibilidade de decompor o conjunto em duas partes disjuntas e suficientemente separadas entre si.

6.90 Definição. Dois subconjuntos A e B de um espaço métrico X são ditos **separados** se ambos $A \cap \overline{B}$ e $\overline{A} \cap B$ são vazios; isto é, se nenhum ponto de A pertence ao fecho de B e nenhum ponto de B pertence ao fecho de A . Um conjunto $E \subset X$ é dito **conexo** se E não é a união de dois conjuntos separados não vazios.

6.91 Observação. Conjuntos separados são necessariamente disjuntos, mas conjuntos disjuntos não precisam ser separados. Por exemplo, os intervalos $(0, 1)$ e $(1, 2)$ são separados, enquanto $[0, 1]$ e $(1, 2)$ são disjuntos mas não são separados, pois o ponto 1 pertence ao fecho de $(1, 2)$.

6.92 Exemplo. O intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ é conexo. Intuitivamente, isso ocorre porque, dados dois pontos do intervalo, todos os pontos entre eles também pertencem ao intervalo.

6.93 Exemplo. O conjunto

$$(0, 1) \cup (2, 3)$$

não é conexo, pois ele se decompõe naturalmente em duas partes abertas disjuntas e separadas.

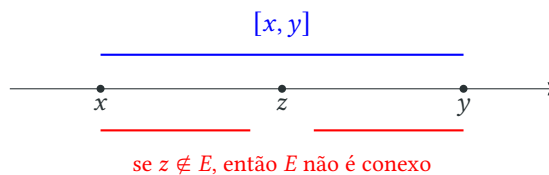


Figura 6.7

Na reta, um conjunto conexo não pode “pular” pontos entre dois de seus elementos.

6.94 Teorema. Um subconjunto E da reta real $\mathbb{R}$ é conexo se e somente se possui a seguinte propriedade: sempre que $x, y \in E$ e $x < z < y$, então $z \in E$. Ou seja, os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são exatamente os intervalos.

Demonstração. Suponha primeiro que existam $x, y \in E$ e algum $z \in (x, y)$ tal que $z \notin E$. Definimos

$$A_z := E \cap (-\infty, z) \quad \text{e} \quad B_z := E \cap (z, \infty).$$

Como $x \in A_z$ e $y \in B_z$, ambos os conjuntos são não vazios. Além disso, as inclusões

$$\overline{A_z} \subset (-\infty, z] \quad \text{e} \quad \overline{B_z} \subset [z, \infty)$$

implicam

$$\overline{A_z} \cap B_z = \emptyset \quad \text{e} \quad A_z \cap \overline{B_z} = \emptyset.$$

Logo A_z e B_z são separados. Como

$$E = A_z \cup B_z,$$

isso mostra que E não é conexo.

Reciprocamente, suponha que E não seja conexo. Então

$$E = A \cup B,$$

onde A e B são separados e não vazios. Escolha $x \in A$ e $y \in B$ e suponha, sem perda de generalidade, que $x < y$. Considere

$$z = \sup(A \cap [x, y]).$$

Como $x \in A \cap [x, y]$, esse conjunto é não vazio, e o supremo está bem definido. Além disso,

$$z \in \overline{A \cap [x, y]} \subset \overline{A}.$$

Como $\overline{A} \cap B = \emptyset$, segue que $z \notin B$. Em particular, $z \neq y$, pois $y \in B$. Logo

$$z < y.$$

Se $z \notin A$, então $z \notin A \cup B = E$. Como $x \in A$, temos $x \neq z$, e portanto

$$x < z < y.$$

Assim, encontramos um ponto de (x, y) que não pertence a E .

Suponha agora que $z \in A$. Como $A \cap \overline{B} = \emptyset$, segue que $z \notin \overline{B}$. Portanto, existe $\eta > 0$ tal que

$$(z, z + \eta) \cap B = \emptyset.$$

Escolha então um ponto

$$t \quad \text{com} \quad z < t < \min\{y, z + \eta\}.$$

Pelo fato de $t > z = \sup(A \cap [x, y])$, concluímos que $t \notin A$. Pela escolha de t , também temos $t \notin B$. Assim,

$$t \notin E.$$

Além disso,

$$x < z < t < y,$$

de modo que $t \in (x, y)$.

Em qualquer caso, encontramos um ponto entre x e y que não pertence a E . Isso prova a recíproca. $\square$

6.95 Corolário. Os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são exatamente os intervalos.

Demonstração. Pelo teorema anterior, um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ é conexo se e somente se, sempre que contém dois pontos $x < y$, contém também todo ponto z entre eles. Mas essa é precisamente a propriedade característica dos intervalos. $\square$

6.96 Exemplo. O conjunto

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

não é conexo. De fato, se $x < y$ são racionais, então existe um irracional z tal que $x < z < y$, e portanto $\mathbb{Q}$ não satisfaz a caracterização de conexidade na reta.

6.97 Teorema. O fecho de um conjunto conexo é conexo.

Demonstração. Seja E conexo e suponha, por absurdo, que

$$\overline{E} = A \cup B,$$

onde A e B são separados e não vazios. Como $E \subset \overline{E}$,

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap B).$$

Essas duas partes são separadas em E ; pela conexidade, uma delas deve ser vazia. Suponha $E \cap B = \emptyset$. Então $E \subset A$, logo

$$\overline{E} \subset \overline{A}.$$

Mas A e B são separados, de modo que $\overline{A} \cap B = \emptyset$, contradizendo $B \subset \overline{E}$ e $B \neq \emptyset$. Portanto $\overline{E}$ é conexo. $\square$

A conexidade encerra o capítulo no nível puramente métrico e topológico. Uma noção mais forte — ligar dois pontos por uma curva contínua — depende explicitamente da teoria de aplicações contínuas e será retomada ao final do capítulo seguinte.

6.9 Exercícios

1. Métricas e exemplos

Ex. 6.2 — Seja X um conjunto infinito. Para $p, q \in X$, defina

$$d(p, q) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \neq q, \\ 0, & \text{se } p = q. \end{cases}$$

Prove que d é uma métrica. Quais subconjuntos do espaço métrico resultante são abertos? Quais são fechados? Quais são compactos?

Ex. 6.3 — Para $x, y \in \mathbb{R}$, defina

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= (x - y)^2, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{|x - y|}, \\ d_3(x, y) &= |x^2 - y^2|, \\ d_4(x, y) &= |x - 2y|, \\ d_5(x, y) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}. \end{aligned}$$

Determine, em cada caso, se se trata ou não de uma métrica.

Ex. 6.4 — Em qualquer espaço métrico (M, d) , defina

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Prove que d' também é uma métrica em M .

Ex. 6.5 — Considere, em $\mathbb{R}^n$, as métricas

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Em cada um dos casos abaixo, descreva geometricamente a bola aberta $B(\mathbf{a}; r)$:

- (a) em $(\mathbb{R}^2, d_1)$;
- (b) em $(\mathbb{R}^2, d_2)$;
- (c) em $(\mathbb{R}^3, d_1)$;
- (d) em $(\mathbb{R}^3, d_2)$.

Ex. 6.6 — Com as notações do exercício anterior, prove que, para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

e

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq n d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ex. 6.7 — Sejam (S_1, d_1) e (S_2, d_2) espaços métricos. Defina, em $S_1 \times S_2$,

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2).$$

Prove que ρ é uma métrica em $S_1 \times S_2$. Construa outras métricas naturais em $S_1 \times S_2$.

2. Topologia dos espaços métricos

Ex. 6.8 — Prove que um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto e que um intervalo fechado é um conjunto fechado.

Ex. 6.9 — Determine todos os pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ e decida, em cada caso, se o conjunto é aberto, fechado, ambos ou nenhum dos dois:

- (a) o conjunto dos inteiros;
- (b) o intervalo $(a, b]$;
- (c) o conjunto $\{1/n : n = 1, 2, 3, \dots\}$;
- (d) o conjunto dos números racionais;
- (e) o conjunto dos números da forma $2^{-n} + 5^{-m}$, com $m, n = 1, 2, \dots$;

(f) o conjunto dos números da forma $(-1)^n + (1/m)$, com $m, n = 1, 2, \dots$;

(g) o conjunto dos números da forma $(1/n) + (1/m)$, com $m, n = 1, 2, \dots$;

(h) o conjunto dos números da forma

$$\frac{(-1)^n}{1 + (1/n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ex. 6.10 — Repita o exercício anterior para os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$;

(c) o conjunto dos números complexos da forma $(1/n) + (i/m)$, com $m, n = 1, 2, \dots$;

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$;

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$;

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.

Ex. 6.11 — Todo ponto de todo conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}^2$ é ponto de acumulação de E ? Responda à mesma pergunta para conjuntos fechados em $\mathbb{R}^2$.

Ex. 6.12 — Construa um conjunto limitado de números reais com exatamente três pontos de acumulação.

Ex. 6.13 — Seja E' o conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto E . Prove que E' é fechado. Prove que E e $\bar{E}$ têm os mesmos pontos de acumulação. E e E' sempre têm os mesmos pontos de acumulação?

Ex. 6.14 — Seja E° o conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto E .

(a) Prove que E° é sempre aberto.

(b) Prove que E é aberto se, e somente se, $E^\circ = E$.

(c) Se $G \subset E$ e G é aberto, prove que $G \subset E^\circ$.

(d) Prove que o complementar de E° é o fecho do complementar de E .

(e) E e $\bar{E}$ sempre têm os mesmos interiores?

(f) E e E° sempre têm os mesmos fechos?

Ex. 6.15 — Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots$ subconjuntos de um espaço métrico.

(a) Se $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$, prove que

$$\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(b) Se $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, prove que

$$\overline{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

Mostre, por meio de um exemplo, que essa inclusão pode ser própria.

Ex. 6.16 — Prove que todo conjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}$ contém números racionais e irracionais.

Ex. 6.17 — Prove que os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. O mesmo vale em $\mathbb{R}^2$?

Ex. 6.18 — Prove que todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ é a interseção de uma coleção enumerável de abertos.

Ex. 6.19 — Prove que um subconjunto não vazio, limitado e fechado de $\mathbb{R}$ é ou um intervalo fechado, ou pode ser obtido de um intervalo fechado pela remoção de uma coleção enumerável de intervalos abertos disjuntos cujas extremidades pertencem ao conjunto original.

Ex. 6.20 — Prove que bolas abertas e intervalos abertos em $\mathbb{R}^n$ são abertos.

Ex. 6.21 — Prove que o interior de um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é aberto.

Ex. 6.22 — Se $S \subset \mathbb{R}^n$, prove que $\text{int } S$ é a união de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ contidos em S .

Ex. 6.23 — Se $S, T \subset \mathbb{R}^n$, prove que

$$(\text{int } S) \cap (\text{int } T) = \text{int}(S \cap T),$$

e

$$(\text{int } S) \cup (\text{int } T) \subseteq \text{int}(S \cup T).$$

Ex. 6.24 — Seja S' o conjunto derivado e $\bar{S}$ o fecho de S em $\mathbb{R}^n$. Prove que:

- (a) S' é fechado;
- (b) se $S \subseteq T$, então $S' \subseteq T'$;
- (c) $(S \cup T)' = S' \cup T'$;
- (d) $(\bar{S})' = S'$;
- (e) $\bar{S}$ é fechado;
- (f) $\bar{S}$ é a interseção de todos os fechados que contêm S .

Ex. 6.25 — Se $S, T \subset \mathbb{R}^n$, prove que

$$\overline{S \cap T} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T},$$

e que

$$S \cap \bar{T} \subseteq \overline{S \cap T}$$

sempre que S for aberto.

Ex. 6.26 — As afirmações dos exercícios anteriores sobre interior, conjunto derivado e fecho permanecem verdadeiras em qualquer espaço métrico? Justifique.

Ex. 6.27 — Prove as seguintes identidades em um espaço métrico M , para todo subconjunto $A \subset M$:

$$\text{int } A = M - \overline{M - A}, \quad \text{int}(M - A) = M - \overline{A}, \quad \text{int}(\text{int } A) = \text{int } A.$$

Ex. 6.28 — Se $A_1, \dots, A_n \subset M$, prove que

$$\text{int} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = \bigcap_{i=1}^n \text{int}(A_i).$$

Se F é uma família infinita de subconjuntos de M , prove que

$$\text{int} \left(\bigcap_{A \in F} A \right) \subseteq \bigcap_{A \in F} \text{int}(A),$$

e dê um exemplo em que a inclusão seja própria.

Ex. 6.29 — Prove que

$$\bigcup_{A \in F} \text{int}(A) \subseteq \text{int} \left(\bigcup_{A \in F} A \right).$$

Dê um exemplo de uma família finita para a qual a inclusão seja própria.

Ex. 6.30 — Se ∂A denota a fronteira de A , prove que

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{M - A} \quad \text{e} \quad \partial A = \partial(M - A).$$

Ex. 6.31 — Prove que $\text{int}(\partial A) = \emptyset$ se A é aberto ou se A é fechado. Dê um exemplo em que $\text{int}(\partial A) = M$.

Ex. 6.32 — Suponha que $\text{int } A = \text{int } B = \emptyset$ e que A seja fechado em M . Prove que $\text{int}(A \cup B) = \emptyset$. Dê um exemplo em que $\text{int } A = \text{int } B = \emptyset$, mas $\text{int}(A \cup B) = M$.

3. Topologia relativa

Ex. 6.33 — Seja $Y \subset X$ um subespaço métrico. Prove diretamente, a partir das definições, que um subconjunto $E \subset Y$ é aberto relativamente a Y se, e somente se, $E = Y \cap G$ para algum aberto $G \subset X$.

Ex. 6.34 — Descreva todos os subconjuntos abertos relativamente ao subespaço

$$Y = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Compare com os abertos de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 6.35 — Dê um exemplo de um conjunto que seja fechado relativamente a um subespaço Y , mas não seja fechado no espaço ambiente X .

4. Conjuntos compactos

Ex. 6.36 — Dê um exemplo de uma cobertura aberta do intervalo $(0, 1)$ que não admita subcobertura finita.

Ex. 6.37 — A família dos intervalos abertos

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad n = 2, 3, \dots,$$

é uma cobertura aberta de $(0, 1)$. Prove, sem usar o Teorema de Heine–Borel, que nenhuma subfamília finita dessa coleção cobre $(0, 1)$.

Ex. 6.38 — Dê um exemplo de um conjunto fechado não limitado e exiba uma cobertura aberta enumerável que não admita subcobertura finita.

Ex. 6.39 — Seja

$$K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Prove diretamente da definição que K é compacto, sem usar o teorema de Heine–Borel.

Ex. 6.40 — Construa um conjunto compacto de números reais cujos pontos de acumulação formem um conjunto enumerável.

Ex. 6.41 — Mostre que o Teorema 6.71 e seu corolário tornam-se falsos, em $\mathbb{R}$, se a palavra “compacto” for substituída por “fechado” ou por “limitado”.

Ex. 6.42 — Considere $\mathbb{Q}$ com a métrica usual. Seja E o conjunto de todos os racionais p tais que

$$2 < p^2 < 3.$$

Mostre que E é fechado e limitado em $\mathbb{Q}$, mas não é compacto. Determine também se E é aberto em $\mathbb{Q}$.

Ex. 6.43 — Prove que, em um espaço métrico (M, d) , a bola fechada

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$$

é um conjunto fechado.

Ex. 6.44 — Dê um exemplo de um espaço métrico em que $\overline{B}(a; r)$ não coincida com o fecho de $B(a; r)$.

Ex. 6.45 — Prove que todo subconjunto finito de um espaço métrico é fechado.

Ex. 6.46 — Prove que, se $S \subseteq T \subseteq M$, então S é compacto em M se, e somente se, é compacto no subespaço T .

Ex. 6.47 — Prove que, se S é fechado e T é compacto, então $S \cap T$ é compacto.

Ex. 6.48 — Prove que a interseção de uma coleção arbitrária de subconjuntos compactos de um espaço métrico é compacta.

Ex. 6.49 — Prove que a união de um número finito de subconjuntos compactos de um espaço métrico é compacta.

5. Conjuntos perfeitos e pontos de condensação

Ex. 6.50 — Seja E o conjunto de todos os números em $[0, 1]$ cuja expansão decimal contém apenas os dígitos 4 e 7. Determine se E é enumerável, denso em $[0, 1]$, compacto e perfeito.

Ex. 6.51 — Existe um conjunto perfeito não vazio de $\mathbb{R}$ que não contenha nenhum número racional? Justifique.

Ex. 6.52 — Defina um ponto p em um espaço métrico X como *ponto de condensação* de um conjunto $E \subset X$ se toda vizinhança de p contém não enumeravelmente muitos pontos de E .

Suponha $E \subset \mathbb{R}^k$ não enumerável, e seja P o conjunto de todos os pontos de condensação de E . Prove que P é perfeito e que $P^c \cap E$ é no máximo enumerável.

Ex. 6.53 — Prove que todo conjunto aberto em $\mathbb{R}$ é a união de uma coleção no máximo enumerável de intervalos abertos disjuntos.

Ex. 6.54 — Prove que toda coleção de abertos disjuntos em $\mathbb{R}^n$ é no máximo enumerável. Dê um exemplo de uma coleção não enumerável de fechados disjuntos.

Ex. 6.55 — Prove que, se $S \subset \mathbb{R}^n$ é não enumerável, então existe um ponto $\mathbf{x} \in S$ que é ponto de condensação de S .

Ex. 6.56 — Seja T o conjunto dos pontos de condensação de um conjunto não enumerável $S \subset \mathbb{R}^n$. Prove que:

(a) $S - T$ é enumerável;

(b) $S \cap T$ é não enumerável;

- (c) T é fechado;
 (d) T não possui pontos isolados.

6. Conjuntos conexos

Ex. 6.57 — Se A e B são subconjuntos fechados disjuntos de um espaço métrico X , prove que A e B são separados.

Ex. 6.58 — Prove o mesmo resultado do exercício anterior quando A e B são abertos disjuntos.

Ex. 6.59 — Fixe $p \in X$ e $\delta > 0$. Defina A como o conjunto de todos os $q \in X$ tais que $d(p, q) < \delta$, e B como o conjunto de todos os $q \in X$ tais que $d(p, q) > \delta$. Prove que A e B são separados.

Ex. 6.60 — Prove que todo espaço métrico conexo com pelo menos dois pontos é não enumerável.

Ex. 6.61 — Fechos e interiores de conjuntos conexos são sempre conexos? Analise a questão em $\mathbb{R}^2$.

Ex. 6.62 — Sejam A e B subconjuntos separados de $\mathbb{R}^k$, com $\mathbf{a} \in A$ e $\mathbf{b} \in B$. Defina

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ponha

$$A_0 = \mathbf{p}^{-1}(A), \quad B_0 = \mathbf{p}^{-1}(B).$$

Prove que:

- (a) A_0 e B_0 são separados em $\mathbb{R}$;
 (b) existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\mathbf{p}(t_0) \notin A \cup B$;
 (c) todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^k$ é conexo.

7

Continuidade em espaços métricos

Até aqui, a métrica nos permitiu falar de proximidade entre pontos, de convergência de sequências e da estrutura de conjuntos. Agora passamos a uma pergunta diferente: como uma função transforma essa proximidade?

Há duas escalas no capítulo. A primeira é local. Queremos compreender o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto e , em particular, quando esse comportamento é compatível com o valor da própria função. A segunda é global: sob hipóteses como compacidade e conexidade, a continuidade passa a impor restrições fortes à imagem da função.

Esse percurso começa com limites, chega à continuidade e termina mostrando que uma hipótese local pode preservar estruturas globais inteiras.

7.1 Limites

O limite descreve o comportamento de uma função *ao redor* de um ponto. Se x se aproxima de p , perguntamos se $f(x)$ se aproxima de algum q . O valor de f no próprio ponto p não participa dessa pergunta; por isso p nem sequer precisa pertencer ao domínio.

7.1 Definição. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$ e seja $p \in X$ um ponto de acumulação de E . Dizemos que o limite de $f : E \rightarrow Y$ quando x tende a p é $q \in Y$, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < d_X(x, p) < \delta \text{ e } x \in E.$$

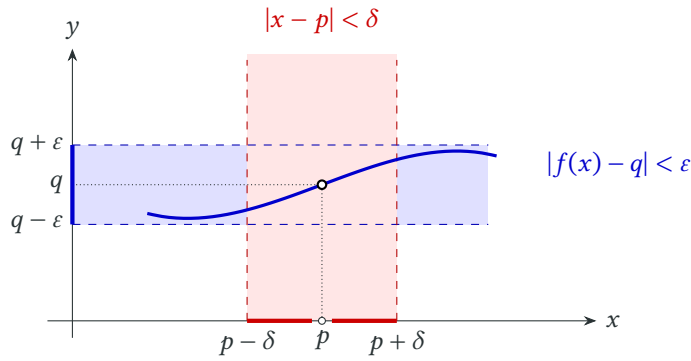
A hipótese de que p seja ponto de acumulação de E é indispensável, pois o limite descreve o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de p por pontos de E

Neste capítulo

- ▶ Limites (p. 180)
- ▶ Continuidade (p. 187)
- ▶ Continuidade e compacidade (p. 191)
- ▶ Continuidade e conexidade (p. 197)
- ▶ Conexidade por caminhos (p. 199)
- ▶ Exercícios (p. 201)

Ideia central

Continuidade traduz proximidade: pontos suficientemente próximos têm imagens próximas. A linguagem métrica torna essa ideia independente de fórmulas particulares.



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - q| < \varepsilon.$$

Figura 7.1

Interpretação geométrica da definição de limite. Se $0 < |x - p| < \delta$, então $f(x)$ permanece na faixa horizontal $|f(x) - q| < \varepsilon$.

distintos de p . Em particular, não é necessário que $p \in E$; e, mesmo quando $p \in E$, o valor de $f(p)$ não intervém na definição do limite.

7.2 Proposição. Se o limite de uma função em um ponto existe, então ele é único.

Demonstração. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q_1$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q_2$. Vamos mostrar que $q_1 = q_2$.

Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de limite, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < d_X(x, p) < \delta_1 \implies d_Y(f(x), q_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$0 < d_X(x, p) < \delta_2 \implies d_Y(f(x), q_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e usando que p é ponto de acumulação de E , existe $x \in E$ com $0 < d_X(x, p) < \delta$. Para esse ponto, temos simultaneamente

$$d_Y(f(x), q_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d_Y(f(x), q_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela desigualdade triangular,

$$d_Y(q_1, q_2) \leq d_Y(q_1, f(x)) + d_Y(f(x), q_2) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $d_Y(q_1, q_2) = 0$, e portanto $q_1 = q_2$. $\square$

7.3 Exemplo. Considere $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Para $x \neq 1$, temos $f(x) = x + 1$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Embora f não esteja definida em 1, o limite existe; portanto, o ponto em torno do qual se toma o limite não precisa pertencer ao domínio.

Em espaços métricos, essa noção admite uma caracterização sequencial particularmente útil.

7.4 Teorema. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$, seja $f : E \rightarrow Y$ e seja p um ponto de acumulação de E . Então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$$

se, e somente se, para toda sequência $\{p_n\}$ em E tal que $p_n \neq p$ para todo n e $p_n \rightarrow p$, vale

$$f(p_n) \rightarrow q.$$

Demonstração. Suponha primeiro que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$, e seja $\{p_n\}$ uma sequência em E tal que $p_n \neq p$ para todo n e $p_n \rightarrow p$. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição de limite existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $x \in E$ e $0 < d_X(x, p) < \delta$, temos $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$. Como $p_n \rightarrow p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, vale $d_X(p_n, p) < \delta$. Como, além disso, $p_n \neq p$, segue que $0 < d_X(p_n, p) < \delta$ para todo $n \geq N$. Portanto, $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, e assim $f(p_n) \rightarrow q$.

Reciprocamente, suponha que a condição sequencial seja verdadeira e que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq q$. Negando a definição de limite, obtemos a existência de $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in E$ com

$$0 < d_X(x, p) < \delta \quad \text{e} \quad d_Y(f(x), q) \geq \varepsilon_0.$$

Aplicando isso a $\delta = 1/n$, escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $p_n \in E$ tal que

$$0 < d_X(p_n, p) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d_Y(f(p_n), q) \geq \varepsilon_0.$$

Então $p_n \neq p$ para todo n e $p_n \rightarrow p$. Pela hipótese sequencial, deveríamos ter $f(p_n) \rightarrow q$, o que é impossível, já que $d_Y(f(p_n), q) \geq \varepsilon_0$ para todo n . Essa contradição mostra que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$. $\square$

7.5 Exemplo. Defina $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então, para todo $a \in \mathbb{R}$, o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

De fato, podemos escolher uma sequência $\{x_n\}$ de números racionais com $x_n \rightarrow a$. Então $f(x_n) = 0$ para todo n , de modo que $f(x_n) \rightarrow 0$. Por outro lado, podemos escolher uma sequência $\{y_n\}$ de números irracionais com $y_n \rightarrow a$. Então $f(y_n) = 1$ para todo n , de modo que $f(y_n) \rightarrow 1$. Como os limites ao longo dessas duas sequências são diferentes, o limite de f em a não existe.

Entretanto, se definirmos $g(x) = (x-a)f(x)$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, pois $|g(x)| \leq |x-a|$ para todo x .

7.6 Exemplo. Defina $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo: para cada número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, escrito em forma irredutível com $q > 0$, ponha

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}.$$

Então, para todo número irracional $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vale

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$$

onde x percorre apenas valores racionais.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ com $1/N < \varepsilon$. Em qualquer intervalo limitado, há apenas finitos racionais, em forma irredutível, com denominador menor que N . Como a é irracional, podemos tomar $x \in \mathbb{Q}$ arbitrariamente próximo de a sem coincidir com nenhum deles. Se $x = \frac{p}{q}$ está em forma irredutível, então $q \geq N$, e por isso

$$f(x) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Logo, $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$ com $x \in \mathbb{Q}$.

7.7 Exemplo. Um exemplo clássico de função sem limite em um ponto é a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Tomando $x_n = \frac{1}{n\pi}$, temos $x_n \rightarrow 0$ e $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$. Por outro lado, tomando $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, temos $y_n \rightarrow 0$ e

$$f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

não existe.

Apesar disso, a função é limitada por 1 em módulo. Portanto, se $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

pois $\left|g(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |g(x)|$ para todo $x \neq 0$. Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Álgebra de limites

No caso de funções reais, os limites são compatíveis com as operações algébricas usuais. Para enunciar esse fato com precisão, fixemos antes a notação.

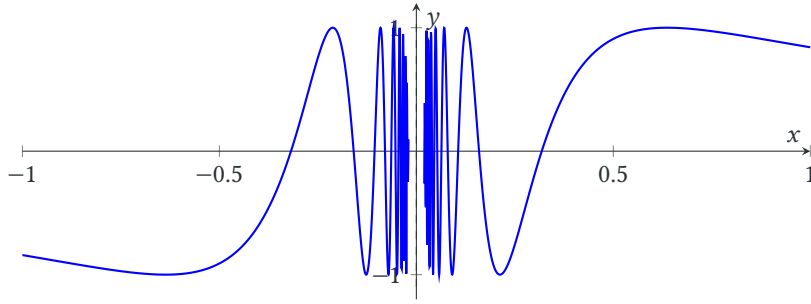


Figura 7.2 Gráfico de $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7.8 Definição. Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais. Definimos, ponto a ponto,

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x),$$

e, nos pontos em que $g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Além disso, para uma constante $c \in \mathbb{R}$, denotamos por $f = c$ a função constante dada por $f(x) = c$ para todo $x \in E$.

7.9 Teorema. Seja p um ponto de acumulação de $E \subset X$. Se $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ e $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = B$, então:

- (a) $\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = A + B$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = AB$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$, desde que $B \neq 0$.

Demonstração. Provamos cada item separadamente.

(a) Seja $\varepsilon > 0$. Como $f(x) \rightarrow A$ e $g(x) \rightarrow B$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < d_X(x, p) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$0 < d_X(x, p) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então, para $x \in E$ com $0 < d_X(x, p) < \delta$,

$$|(f + g)(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon.$$

Assim, $(f + g)(x) \rightarrow A + B$.

(b) Seja $\varepsilon > 0$. Como $f(x) \rightarrow A$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < d_X(x, p) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < 1.$$

Para esses pontos, segue que $|f(x)| \leq |A| + 1$. Além disso, existem $\delta_2, \delta_3 > 0$ tais que

$$0 < d_X(x, p) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)},$$

e

$$0 < d_X(x, p) < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, para $0 < d_X(x, p) < \delta$ temos

$$f(x)g(x) - AB = f(x)(g(x) - B) + B(f(x) - A),$$

e, portanto,

$$|f(x)g(x) - AB| \leq |f(x)| |g(x) - B| + |B| |f(x) - A|.$$

Usando as estimativas acima, obtemos

$$|f(x)g(x) - AB| < (|A| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)} + |B| \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)} \leq \varepsilon.$$

Concluimos que $f(x)g(x) \rightarrow AB$.

(c) Suponha agora que $B \neq 0$. Como $g(x) \rightarrow B$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < d_X(x, p) < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Então, para tais x , temos $|g(x)| \geq |B| - |g(x) - B| > \frac{|B|}{2}$, de modo que $g(x) \neq 0$ em uma vizinhança de p dentro de E , exceto talvez no próprio ponto p .

Mostremos primeiro que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}.$$

De fato, para $0 < d_X(x, p) < \delta_1$,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|B| |g(x)|} \leq \frac{2}{|B|^2} |g(x) - B|.$$

Como $g(x) \rightarrow B$, o lado direito tende a 0, e portanto $\frac{1}{g(x)} \rightarrow \frac{1}{B}$.

Aplicando agora o item (b) às funções f e $1/g$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

□

7.10 Exemplo. Considere a função identidade $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$. Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades algébricas dos limites, obtemos $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ e, por indução,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Daí segue que todo polinômio

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Do mesmo modo, se

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é uma função racional e $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$.

Quando trabalhamos com funções com valores em $\mathbb{R}^k$, os limites podem ser estudados coordenada a coordenada.

7.11 Teorema. Seja $E \subset X$, seja p um ponto de acumulação de E e seja

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) : E \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} f_j(x) = a_j \quad \text{para todo } j = 1, \dots, k.$$

Demonstração. Suponha primeiro que $\mathbf{f}(x) \rightarrow \mathbf{a}$. Fixe $j \in \{1, \dots, k\}$. Como

$$|f_j(x) - a_j| \leq \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|,$$

segue imediatamente que $f_j(x) \rightarrow a_j$.

Reciprocamente, suponha que $f_j(x) \rightarrow a_j$ para todo $j = 1, \dots, k$. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada j , existe $\delta_j > 0$ tal que

$$0 < d_X(x, p) < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, se $x \in E$ e $0 < d_X(x, p) < \delta$, então

$$\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|^2 = \sum_{j=1}^k |f_j(x) - a_j|^2 < k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} = \varepsilon^2.$$

Logo $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$, e isso mostra que $\mathbf{f}(x) \rightarrow \mathbf{a}$. □

7.12 Teorema (Critério de comparação para limites). Seja X um espaço métrico, $E \subset X$ e a um ponto de acumulação de E . Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in E \setminus \{a\}.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

então $L \leq M$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $L > M$. Então o número $\frac{L+M}{2}$ satisfaz

$$M < \frac{L+M}{2} < L.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para todo $x \in E$, se $0 < d(x, a) < \delta_1$, então

$$f(x) > \frac{L+M}{2}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para todo $x \in E$, se $0 < d(x, a) < \delta_2$, então

$$g(x) < \frac{L+M}{2}.$$

Logo, se $0 < d(x, a) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $f(x) > g(x)$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $L \leq M$. $\square$

A caracterização sequencial torna a ideia particularmente concreta: todas as maneiras de se aproximar de p devem produzir a mesma aproximação no contradomínio. As regras algébricas que aparecem depois mostram que, uma vez estabelecidos limites básicos, podemos combiná-los sem retornar a cada vez à definição ε - δ .

Mas limite e valor da função ainda são informações independentes. A continuidade nasce exatamente quando exigimos que elas coincidam.

7.2 Continuidade

Se $p \in E$, uma função $f : E \rightarrow Y$ é contínua em p quando seu comportamento próximo de p é compatível com o valor $f(p)$. Em termos informais: pontos próximos de p devem ter imagens próximas de $f(p)$.

Essa formulação parece apenas uma pequena modificação da definição de limite, mas é a propriedade que permite transportar estrutura de um espaço para outro.

7.13 Definição. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$, seja $f : E \rightarrow Y$ e seja $p \in E$. Dizemos que f é **contínua em p** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in E \text{ e } d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

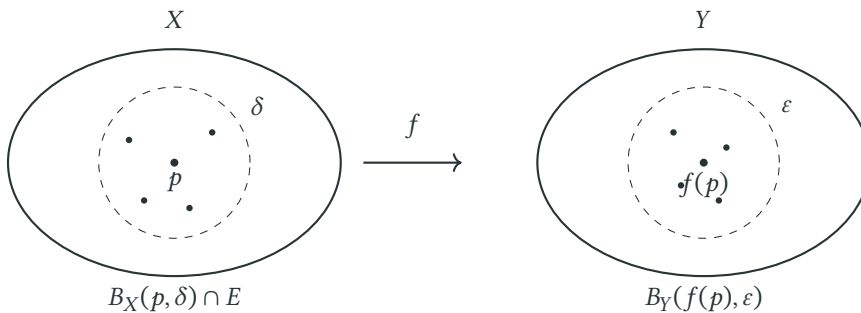


Figura 7.3

Interpretação geométrica da continuidade em p : pontos de E suficientemente próximos de p têm imagens suficientemente próximas de $f(p)$.

Ao contrário do que ocorre com limites, não é necessário supor que p seja ponto de acumulação de E . Se p é isolado em E , então f é automaticamente contínua em p , pois existe $r > 0$ tal que $B_X(p, r) \cap E = \{p\}$; nesse caso, basta tomar $\delta = r$.

A noção de limite depende apenas do comportamento de $f(x)$ em pontos de E próximos de p e distintos de p ; por isso, independe do valor de $f(p)$, quando este existe. Já a continuidade em p exige que esse comportamento local seja compatível com o valor assumido pela função no ponto. Assim, se p é ponto de acumulação de E , f é contínua em p se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

7.14 Proposição. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$, seja $f : E \rightarrow Y$ e seja $p \in E$ um ponto de acumulação de E . Então f é contínua em p se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Demonstração. Suponha primeiro que f seja contínua em p . Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in E$ e $d_X(x, p) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Em particular, isso vale quando $x \in E$ e $0 < d_X(x, p) < \delta$. Assim, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Reciprocamente, suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in E$ e $0 < d_X(x, p) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Como também temos $d_Y(f(p), f(p)) = 0 < \varepsilon$, segue que a mesma condição vale para todo $x \in E$ com $d_X(x, p) < \delta$. Portanto, f é contínua em p . $\square$

7.15 Definição. Dizemos que $f : E \rightarrow Y$ é **contínua em E** se for contínua em todo ponto de E .

A caracterização sequencial dos limites conduz imediatamente ao critério sequencial de continuidade.

7.16 Teorema. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$, seja $f : E \rightarrow Y$ e seja $p \in E$. Então f é contínua em p se, e somente se, para toda sequência $\{p_n\}$ em E tal que $p_n \rightarrow p$, tem-se $f(p_n) \rightarrow f(p)$.

Demonstração. Se p não é ponto de acumulação de E , a continuidade em p é automática, e a condição sequencial também é trivial. Suponhamos, então, que p seja ponto de acumulação de E .

Pela Proposição 7.14, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$. Pelo Teorema 7.4, isso equivale a dizer que, para toda sequência $\{p_n\}$ em E com $p_n \neq p$ para todo n e $p_n \rightarrow p$, vale $f(p_n) \rightarrow f(p)$. Isso equivale à formulação usual com sequências arbitrárias $\{p_n\} \subset E$ tais que $p_n \rightarrow p$, já que termos eventualmente iguais a p não alteram o limite. $\square$

7.17 Teorema. Seja

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k) : E \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Então $\mathbf{f}$ é contínua em $p \in E$ se, e somente se, cada função coordenada $f_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em p .

Demonstração. Pela Proposição 7.14 e pelo Teorema 7.11, temos que $\mathbf{f}$ é contínua em p se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(p),$$

o que equivale a

$$\lim_{x \rightarrow p} f_j(x) = f_j(p) \quad \text{para todo } j = 1, \dots, k.$$

Aplicando novamente a Proposição 7.14 a cada coordenada, obtemos o resultado. $\square$

7.18 Exemplo. Toda função constante é contínua. De fato, se $f(x) = c$ para todo $x \in E$, então $d_Y(f(x), f(p)) = d_Y(c, c) = 0$ para todos $x, p \in E$.

7.19 Exemplo. A função identidade

$$\text{id} : X \rightarrow X, \quad \text{id}(x) = x,$$

é contínua em todo ponto de X . Com efeito, para todo $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

7.20 Exemplo. Toda aplicação Lipschitz é contínua. Mais precisamente, se $f : X \rightarrow Y$ satisfaz

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \text{para todos } x, y \in X,$$

com alguma constante $L \geq 0$, então f é contínua em todo ponto de X .

Demonstração. Fixe $p \in X$ e seja $\varepsilon > 0$. Se $L = 0$, então f é constante. Se $L > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Então, sempre que $d_X(x, p) < \delta$, temos

$$d_Y(f(x), f(p)) \leq L d_X(x, p) < L\delta = \varepsilon.$$

Logo f é contínua em p . $\square$

As propriedades algébricas dos limites se traduzem imediatamente em propriedades análogas para funções contínuas.

7.21 Proposição. Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $p \in E$. Então:

- (a) $f + g$ é contínua em p ;
- (b) fg é contínua em p ;
- (c) $\frac{f}{g}$ é contínua em p , desde que $g(p) \neq 0$.

Demonstração. Como f e g são contínuas em p , temos $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ e $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = g(p)$. Pelo Teorema 7.9,

$$\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = f(p) + g(p) = (f + g)(p),$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = f(p)g(p) = (fg)(p),$$

e, se $g(p) \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(p)}{g(p)} = \left(\frac{f}{g} \right)(p).$$

Logo, pela Proposição 7.14, as funções indicadas são contínuas em p . $\square$

Outra operação fundamental é a composição de funções.

7.22 Teorema. Sejam $f : E \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ aplicações entre espaços métricos. Se f é contínua em $p \in E$ e g é contínua em $f(p)$, então a composição

$$g \circ f : E \rightarrow Z$$

é contínua em p .

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em $f(p)$, existe $\eta > 0$ tal que

$$d_Y(y, f(p)) < \eta \Rightarrow d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon.$$

Como f é contínua em p , existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in E$ e $d_X(x, p) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(p)) < \eta$. Portanto, para todo $x \in E$ com $d_X(x, p) < \delta$, temos

$$d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon.$$

Isso mostra que $g \circ f$ é contínua em p . $\square$

7.23 Observação. A continuidade também pode ser caracterizada em termos de imagens inversas de conjuntos abertos ou fechados. Essas caracterizações serão particularmente úteis nas seções seguintes.

7.24 Teorema. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$ e seja $f : E \rightarrow Y$. Então f é contínua em E se, e somente se, para todo aberto $V \subset Y$, o conjunto

$$f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\}$$

é aberto em E , com a topologia induzida por X .

Demonstração. Suponha primeiro que f seja contínua em E , e seja $V \subset Y$ aberto. Queremos mostrar que $f^{-1}(V)$ é aberto em E .

Se $p \in f^{-1}(V)$, então $f(p) \in V$. Como V é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(f(p), \varepsilon) \subset V$. Como f é contínua em p , existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in E$ e $d_X(x, p) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Portanto, se $x \in E \cap B_X(p, \delta)$, então $f(x) \in V$, isto é,

$$E \cap B_X(p, \delta) \subset f^{-1}(V).$$

Assim, $f^{-1}(V)$ é aberto em E .

Reciprocamente, suponha que a imagem inversa de todo aberto de Y seja aberta em E . Fixe $p \in E$ e seja $\varepsilon > 0$. A bola $B_Y(f(p), \varepsilon)$ é aberta em Y , logo

$$U = f^{-1}(B_Y(f(p), \varepsilon))$$

é aberta em E . Como $p \in U$, existe $\delta > 0$ tal que

$$E \cap B_X(p, \delta) \subset U.$$

Assim, se $x \in E$ e $d_X(x, p) < \delta$, então $f(x) \in B_Y(f(p), \varepsilon)$, ou seja, $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Isso mostra que f é contínua em p . Como p é arbitrário, concluímos que f é contínua em E . $\square$

7.25 Corolário. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos, seja $E \subset X$ e seja $f : E \rightarrow Y$. Então f é contínua em E se, e somente se, para todo fechado $F \subset Y$, o conjunto

$$f^{-1}(F)$$

é fechado em E .

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 7.24 aos complementares, usando que

$$f^{-1}(Y \setminus F) = E \setminus f^{-1}(F).$$

□

As caracterizações sequencial e topológica mostram duas faces da mesma noção. A primeira diz que funções contínuas preservam limites de sequências; a segunda, que a pré-imagem de um aberto é aberta. Esta última será especialmente importante agora, porque permite combinar continuidade com propriedades globais do domínio.

7.3 Continuidade e compacidade

Continuidade é uma condição local: em cada ponto escolhemos um controle adequado. A compacidade transforma esse controle local em conclusões globais. É isso que explica por que funções contínuas em conjuntos compactos se comportam tão melhor que funções contínuas em domínios arbitrários.

A primeira manifestação desse princípio é simples e poderosa: imagens contínuas de compactos continuam compactas. Dela surgirão, em seguida, limitação, existência de extremos e continuidade da inversa.

O primeiro resultado mostra que a imagem contínua de um conjunto compacto continua sendo compacta.

7.26 Teorema. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e X é compacto, então $f(X)$ é compacto.

Demonstração. Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de $f(X)$. Como f é contínua, pelo Teorema 7.24 cada conjunto $f^{-1}(V_\alpha)$ é aberto em X . Além disso, essa família cobre X , pois, dado $x \in X$, temos $f(x) \in f(X)$ e, portanto, $f(x) \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$. Em outras palavras,

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha).$$

Como X é compacto, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ tais que

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}).$$

Agora, se $y \in f(X)$, então $y = f(x)$ para algum $x \in X$. Pela inclusão acima, esse ponto x pertence a algum dos conjuntos $f^{-1}(V_{\alpha_j})$, e portanto $y = f(x) \in V_{\alpha_j}$. Logo,

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}.$$

Assim, toda cobertura aberta de $f(X)$ admite uma subcobertura finita. Portanto, $f(X)$ é compacto. $\square$

7.27 Observação. A hipótese de continuidade é essencial. De fato, considere

$$X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

e a função

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Então X é compacto, mas

$$f(X) = \{0\} \cup [1, +\infty)$$

não é compacto.

7.28 Definição. Uma aplicação $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ é dita **limitada** se existe $M > 0$ tal que

$$\|\mathbf{f}(x)\| \leq M \quad \text{para todo } x \in E.$$

Quando $k = 1$, isso coincide com a noção usual de função real limitada.

No caso de aplicações com valores em $\mathbb{R}^k$, obtemos a seguinte consequência.

7.29 Teorema. Se $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua e X é compacto, então $\mathbf{f}(X)$ é fechado e limitado. Em particular, $\mathbf{f}$ é limitada.

Demonstração. Pelo Teorema 7.26, o conjunto $\mathbf{f}(X)$ é compacto. Como estamos em $\mathbb{R}^k$, segue do teorema de Heine–Borel que $\mathbf{f}(X)$ é fechado e limitado. Assim, existe $M > 0$ tal que

$$\|\mathbf{y}\| \leq M \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbf{f}(X).$$

Em particular,

$$\|\mathbf{f}(x)\| \leq M \quad \text{para todo } x \in X,$$

isto é, $\mathbf{f}$ é limitada. $\square$

No caso de funções reais, a compacidade garante a existência de máximos e mínimos absolutos.

7.30 Teorema. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com X compacto e não vazio. Então existem pontos $p, q \in X$ tais que

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Em outras palavras, f atinge seu máximo e seu mínimo em X .

Demonstração. Pelo Teorema 7.26, o conjunto $f(X) \subset \mathbb{R}$ é compacto. Em particular, é não vazio, fechado e limitado. Sendo não vazio e limitado, o conjunto $f(X)$ admite supremo e ínfimo. Como é fechado em $\mathbb{R}$, contém esses dois valores. Logo existem $p, q \in X$ tais que

$$f(p) = \sup f(X) \quad \text{e} \quad f(q) = \inf f(X).$$

Assim,

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p) \quad \text{para todo } x \in X.$$

□

A compacidade também permite obter continuidade da inversa em uma situação muito importante.

7.31 Teorema. Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação contínua e bijetora, com X compacto. Então a inversa

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

é contínua.

Demonstração. Seja $F \subset X$ fechado. Como X é compacto, F também é compacto. Pela continuidade de f , o conjunto $f(F)$ é compacto em Y , e portanto fechado. Como

$$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F),$$

segue que a imagem inversa de todo fechado de X por f^{-1} é fechada em Y . Logo, f^{-1} é contínua. □

Outra consequência importante é que, em conjuntos compactos, a continuidade implica continuidade uniforme.

7.32 Definição. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços métricos. Dizemos que f é **uniformemente contínua** em X se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(p, q) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

para todos $p, q \in X$.

A diferença em relação à continuidade usual está no fato de que, na continuidade uniforme, δ depende apenas de ε , e não do ponto do domínio. Na continuidade em um ponto, o controle é local; na continuidade uniforme, o mesmo δ deve funcionar simultaneamente para todos os pares de pontos do domínio.

7.33 Exemplo. A função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, é uniformemente contínua em $[0, 1]$, mas não em $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Com efeito, se $x, y \in [0, 1]$, então $|x + y| \leq 2$, e portanto

$$|x^2 - y^2| = |x - y| |x + y| \leq 2|x - y|.$$

Segue que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/2$ para garantir que $|x - y| < \delta$ implique $|x^2 - y^2| < \varepsilon$. Logo, f é uniformemente contínua em $[0, 1]$.

Mostremos agora que f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}_+$. Para isso, considere as sequências $x_n = n$ e $y_n = n + \frac{1}{n}$. Então $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mas

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2},$$

que não converge para 0. Portanto, não pode existir um único $\delta > 0$ que funcione para todos os pontos de $\mathbb{R}_+$. Conclui-se que $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}_+$.

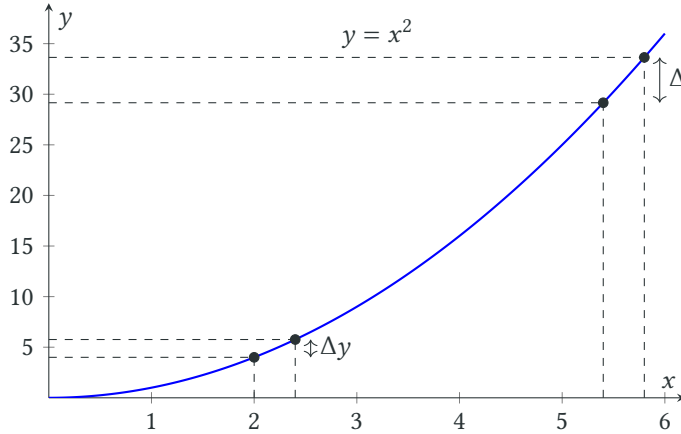


Figura 7.4

Dois pares de pontos do gráfico de $f(x) = x^2$ separados pela mesma distância horizontal δ . Em uma região mais próxima do início do intervalo, a variação vertical é Δy ; já perto do fim do intervalo, a mesma separação horizontal produz uma variação maior, $\Delta y'$. Isso ilustra por que f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}_+$.

7.34 Teorema. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e X é compacto, então f é uniformemente contínua em X .

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em cada ponto $p \in X$, existe um número $\delta(p) > 0$ tal que

$$d_X(p, q) < \delta(p) \Rightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $p \in X$, consideremos a bola aberta

$$J(p) = B\left(p, \frac{\delta(p)}{2}\right).$$

Essas bolas formam uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita

$$X \subset J(p_1) \cup \dots \cup J(p_n).$$

Definamos

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta(p_1), \dots, \delta(p_n)\}.$$

Como o mínimo acima é tomado sobre um conjunto finito de números positivos, temos $\delta > 0$.

Tomemos agora $p, q \in X$ tais que $d_X(p, q) < \delta$. Como os conjuntos $J(p_1), \dots, J(p_n)$ recobrem X , existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p \in J(p_m)$. Portanto,

$$d_X(p, p_m) < \frac{\delta(p_m)}{2}.$$

Além disso, pela desigualdade triangular,

$$d_X(q, p_m) \leq d_X(q, p) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{\delta(p_m)}{2} \leq \delta(p_m).$$

Da definição de $\delta(p_m)$ segue então que

$$d_Y(f(p), f(p_m)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d_Y(f(q), f(p_m)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando novamente a desigualdade triangular, obtemos

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(p_m), f(q)) < \varepsilon.$$

Como δ depende apenas de ε , concluímos que f é uniformemente contínua em X . $\square$

A hipótese de compacidade é essencial: sem ela, várias das conclusões anteriores deixam de valer.

7.35 Teorema. Seja $E \subset \mathbb{R}$ não compacto. Então:

- (a) existe uma função contínua em E que não é limitada;
- (b) existe uma função contínua e limitada em E que não atinge seu máximo.

Se, além disso, E for limitado, então:

- (c) existe uma função contínua em E que não é uniformemente contínua.

Demonstração. Dividimos a prova em dois casos.

Suponha primeiro que E seja limitado. Como E não é compacto, pelo teorema de Heine–Borel ele não é fechado. Logo existe $x_0 \in \overline{E} \setminus E$.

Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0}, \quad x \in E.$$

Ela é contínua em E e não é limitada, pois x_0 é ponto de acumulação de E : existe uma sequência $\{x_n\}$ em E tal que $x_n \rightarrow x_0$, e então

$$|f(x_n)| = \frac{1}{|x_n - x_0|} \rightarrow \infty.$$

Isso prova (a) nesse caso.

Considere agora

$$g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2}, \quad x \in E.$$

Essa função é contínua e limitada em E , pois

$$0 < g(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in E.$$

Além disso, seu maior valor possível é 1, atingido apenas em $x = x_0$. Como $x_0 \notin E$, a função não atinge esse valor em E . Por outro lado, como existe uma sequência $\{x_n\}$ em E com $x_n \rightarrow x_0$, temos $g(x_n) \rightarrow 1$. Logo

$$\sup g(E) = 1,$$

mas esse supremo não é atingido. Isso prova (b) quando E é limitado.

Mostremos agora (c). Como $x_0 \in \bar{E} \setminus E$, pelo menos um dos conjuntos

$$E \cap (x_0, x_0 + 1) \quad \text{ou} \quad E \cap (x_0 - 1, x_0)$$

acumula em x_0 . Fixemos um desses lados. Podemos então escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos $p_n, q_n \in E$ desse mesmo lado de x_0 tais que

$$0 < |p_n - x_0| < \frac{1}{2n} \quad \text{e} \quad 0 < |q_n - x_0| < \frac{1}{4n}.$$

Então

$$|p_n - q_n| \leq |p_n - x_0| + |q_n - x_0| < \frac{3}{4n} \rightarrow 0.$$

Por outro lado,

$$|f(p_n) - f(q_n)| = \left| \frac{1}{p_n - x_0} - \frac{1}{q_n - x_0} \right|.$$

Como p_n e q_n estão do mesmo lado de x_0 , segue que

$$|f(p_n) - f(q_n)| = \left| \frac{1}{|p_n - x_0|} - \frac{1}{|q_n - x_0|} \right|.$$

Escolhendo-os de modo que, por exemplo,

$$\frac{1}{8n} < |p_n - x_0| < \frac{1}{2n} \quad \text{e} \quad 0 < |q_n - x_0| < \frac{1}{16n},$$

obtemos

$$|f(p_n) - f(q_n)| \geq 6n$$

para todo n . Em particular, essa diferença não tende a 0. Logo f não é uniformemente contínua em E .

Suponha agora que E seja ilimitado. Então a função identidade

$$h(x) = x$$

é contínua e não limitada em E , o que prova (a).

Para provar (b), considere

$$u(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Essa função é contínua em $\mathbb{R}$ e satisfaz

$$0 \leq u(x) < 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como E é ilimitado, existe uma sequência $\{x_n\}$ em E tal que $|x_n| \rightarrow \infty$. Então

$$u(x_n) = \frac{x_n^2}{1 + x_n^2} \rightarrow 1.$$

Logo

$$\sup u(E) = 1.$$

Como $u(x) < 1$ para todo $x \in E$, esse supremo não é atingido. Portanto, u é contínua e limitada em E , mas não atinge seu máximo. $\square$

7.36 Exemplo. Seja $X = [0, 2\pi]$ e seja $Y \subset \mathbb{R}^2$ o círculo unitário. A aplicação

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

é contínua e bijetora de X sobre Y . No entanto, sua inversa não é contínua no ponto $(1, 0) \in Y$. De fato, se definirmos

$$y_n = \mathbf{f}\left(2\pi - \frac{1}{n}\right),$$

então $y_n \rightarrow (1, 0)$ em Y , mas

$$\mathbf{f}^{-1}(y_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \rightarrow 2\pi \neq 0 = \mathbf{f}^{-1}(1, 0).$$

Logo $\mathbf{f}^{-1}$ não é contínua em $(1, 0)$. Isso mostra que a compacidade do domínio é essencial no Teorema 7.31.

A continuidade uniforme é talvez a expressão mais clara dessa passagem do local ao global: o mesmo δ deve funcionar em todo o domínio. O Teorema de Heine–Cantor mostra que a compacidade é precisamente a hipótese que permite obter esse controle uniforme a partir da continuidade ponto a ponto.

Os contraexemplos ao fim da seção têm, portanto, uma função conceitual: eles mostram o que pode falhar quando retiramos a compacidade.

7.4 Continuidade e conexidade

A compacidade controla a extensão global de um espaço; a conexidade responde a outra pergunta: ele pode ser separado em partes independentes? A continuidade também respeita essa estrutura. Uma função contínua não pode transformar um conjunto conexo em uma imagem desconexa.

No caso real, essa afirmação abstrata é exatamente o mecanismo por trás do teorema do valor intermediário.

7.37 Teorema. Se $f: X \rightarrow Y$ é contínua e $E \subset X$ é conexo, então $f(E)$ é conexo.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f(E)$ não seja conexo. Então existem subconjuntos não vazios e separados $A, B \subset f(E)$ tais que

$$f(E) = A \cup B.$$

Defina

$$G = E \cap f^{-1}(A) \quad \text{e} \quad H = E \cap f^{-1}(B).$$

Então $E = G \cup H$, e ambos os conjuntos são não vazios.

Mostremos que G e H são separados. Como A e B são separados, temos

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Além disso, pelo Corolário 7.25, a imagem inversa de um fechado por f é fechada. Assim, $f^{-1}(\overline{A})$ é fechado em X e contém G , logo

$$\overline{G} \subset f^{-1}(\overline{A}).$$

Se existisse $x \in \overline{G} \cap H$, então teríamos $f(x) \in B$ porque $x \in H$, e também $f(x) \in \overline{A}$ porque $x \in \overline{G} \subset f^{-1}(\overline{A})$. Isso contradiz a igualdade $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Portanto,

$$\overline{G} \cap H = \emptyset.$$

De modo análogo,

$$G \cap \overline{H} = \emptyset.$$

Logo G e H são separados, o que contradiz a conexidade de E . Portanto, $f(E)$ é conexo. $\square$

7.38 Observação. O resultado anterior não admite recíproca, e a hipótese de continuidade é essencial.

De fato, a recíproca falha mesmo em $\mathbb{R}$: se

$$f(x) = x^2 \quad \text{e} \quad E = \{-1, 1\},$$

então E não é conexo, mas

$$f(E) = \{1\}$$

é conexo. Por outro lado, sem continuidade a conclusão também pode falhar: se

$$E = [0, 1]$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

então E é conexo, mas

$$f(E) = \{0, 1\}$$

não é conexo.

No caso de funções reais definidas em intervalos, o teorema anterior se traduz na propriedade do valor intermediário. Como os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são exatamente os intervalos, obtemos o seguinte resultado.

7.39 Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se c está estritamente entre $f(a)$ e $f(b)$, isto é,

$$\min\{f(a), f(b)\} < c < \max\{f(a), f(b)\},$$

então existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

Demonstração. O intervalo $[a, b]$ é conexo. Pelo Teorema 7.37, o conjunto $f([a, b])$ é conexo em $\mathbb{R}$. Como $f(a), f(b) \in f([a, b])$ e c está estritamente entre esses dois valores, o Corolário 6.95 implica que $c \in f([a, b])$. Portanto, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Como $f(a) \neq c$ e $f(b) \neq c$, segue que esse ponto pertence, na verdade, a (a, b) . $\square$

7.40 Observação. O Teorema 7.39 afirma que uma função contínua em um intervalo não pode “pular” valores intermediários. A recíproca é falsa: existem funções com a propriedade do valor intermediário que não são contínuas.

Até aqui, conexidade foi tratada sem exigir que soubéssemos construir uma curva entre dois pontos. Agora que a continuidade já está disponível, podemos introduzir uma noção mais geométrica.

7.5 Conexidade por caminhos

Um conjunto pode ser conexo sem que tenhamos descrito como passar de um ponto a outro dentro dele. A conexidade por caminhos exige mais: quaisquer dois pontos devem poder ser ligados por uma curva contínua que permaneça no conjunto.

7.41 Definição. Seja E um subconjunto de um espaço métrico X . Um **caminho** de p a q em E é uma aplicação contínua

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$$

tal que

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(1) = q.$$

Dizemos que E é **conexo por caminhos** se quaisquer dois pontos de E podem ser ligados por um caminho em E .

A diferença entre as duas ideias é importante. Conexidade é uma propriedade de separação por abertos; conexidade por caminhos pede a existência efetiva de uma família contínua de pontos ligando os extremos.

7.42 Exemplo. Todo subconjunto convexo $E \subset \mathbb{R}^k$ é conexo por caminhos. Se $p, q \in E$, basta considerar

$$\gamma(t) = (1 - t)p + tq, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

A aplicação γ é contínua e, pela convexidade, sua imagem permanece em E .

7.43 Teorema. Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.

Demonstração. Suponha que E seja conexo por caminhos e escolha $p, q \in E$. Existe um caminho

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow E$$

ligando p a q . Como $[0, 1]$ é conexo e imagens contínuas de conjuntos conexos são conexas, $\gamma([0, 1])$ é um subconjunto conexo de E contendo p e q .

Se E fosse a união de dois conjuntos separados não vazios A e B , poderíamos escolher $p \in A$ e $q \in B$. Mas então o conjunto conexo $\gamma([0, 1])$ encontraria as duas partes separadas, o que é impossível. Logo E é conexo. $\square$

A recíproca é falsa em geral. Antes do exemplo clássico, há uma situação importante em que as duas noções coincidem.

7.44 Teorema. Se $E \subset \mathbb{R}^k$ é aberto e conexo, então E é conexo por caminhos.

Demonstração. Fixe $p \in E$ e seja

$$A = \{q \in E : \text{existe um caminho em } E \text{ ligando } p \text{ a } q\}.$$

Temos $p \in A$, logo $A \neq \emptyset$.

Mostremos que A é aberto relativamente a E . Se $q \in A$, como E é aberto existe $r > 0$ tal que $B(q, r) \subset E$. Para qualquer $z \in B(q, r)$, o segmento

$$t \mapsto (1-t)q + tz$$

permanece na bola $B(q, r)$, que é convexa. Concatenando esse segmento com um caminho de p a q , obtemos um caminho de p a z . Portanto $B(q, r) \subset A$.

O mesmo argumento mostra que $E \setminus A$ é aberto relativamente a E . Se $q \notin A$ e $B(q, r) \subset E$, nenhum ponto dessa bola pode pertencer a A ; caso contrário, um segmento dentro da bola ligaria tal ponto a q , e a concatenação produziria um caminho de p a q .

Assim, A e $E \setminus A$ são abertos relativamente a E . Como E é conexo e $A \neq \emptyset$, necessariamente $E \setminus A = \emptyset$. Logo todo ponto de E pode ser ligado a p por um caminho. $\square$

7.45 Exemplo (A curva do seno do topólogo). Considere

$$G = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \right\}, \quad V = \{0\} \times [-1, 1],$$

e

$$S = G \cup V.$$

O conjunto G é a imagem contínua do intervalo conexo $(0, 1]$ pela aplicação

$$x \mapsto \left(x, \sin \frac{1}{x} \right),$$

logo é conexo. Além disso,

$$S = \overline{G}.$$

Como o fecho de um conjunto conexo é conexo, S é conexo.

Entretanto, S não é conexo por caminhos. Assim,

$$\text{conexo por caminhos} \implies \text{conexo}$$

é uma implicação estrita.

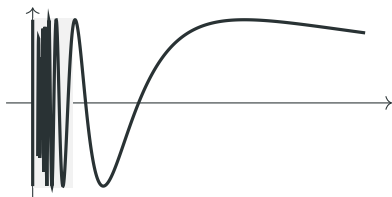


Figura 7.5

Curva do seno do topólogo.

Exercício: Prove que a curva do seno do topólogo não é conexa por caminhos. Mais precisamente, mostre que não existe caminho em S ligando um ponto de $\{0\} \times [-1, 1]$ a um ponto de G . $\square$

O capítulo termina, assim, com duas formas de preservar estrutura: continuidade preserva conexidade, e a existência de caminhos transforma essa propriedade qualitativa em uma ligação geométrica explícita entre pontos.

7.6 Exercícios

Ex. 7.1 — Suponha que f seja uma função real definida em $\mathbb{R}$ e que

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Verifique se essa condição implica que f é contínua em $\mathbb{R}$.

Ex. 7.2 — Seja (X, d) um espaço métrico e seja $p \in X$. Prove que a função

$$f(x) = d(x, p)$$

é contínua em X .

Ex. 7.3 — Prove que a aplicação

$$x \mapsto \|x\|$$

é contínua em $\mathbb{R}^k$. Deduza que, para cada $a \in \mathbb{R}^k$, a função

$$x \mapsto \|x - a\|$$

também é contínua.

Ex. 7.4 — Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, prove que as funções

$$\max\{f, g\} \quad \text{e} \quad \min\{f, g\}$$

também são contínuas.

Ex. 7.5 — Seja A um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d) e defina

$$\varphi(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Prove que φ é contínua em X .

Ex. 7.6 — Dê um exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $f(U)$ não seja aberto.

Ex. 7.7 — Considere a aplicação

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos t, \sin t),$$

onde

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Prove que f é contínua e bijetora, mas que f^{-1} não é contínua.

Ex. 7.8 — Se f é uma aplicação contínua de um espaço métrico X em um espaço métrico Y , prove que

$$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$$

para todo conjunto $E \subset X$. Apresente um exemplo em que $f(\overline{E})$ seja um subconjunto próprio de $\overline{f(E)}$.

Ex. 7.9 — Seja f uma função real contínua em um espaço métrico X . Defina

$$Z(f) = \{p \in X : f(p) = 0\}.$$

Prove que $Z(f)$ é um conjunto fechado.

Ex. 7.10 — Sejam f e g aplicações contínuas de um espaço métrico X em um espaço métrico Y , e seja E um subconjunto denso de X . Prove que $f(E)$ é denso em $f(X)$. Se $g(p) = f(p)$ para todo $p \in E$, prove que $g(p) = f(p)$ para todo $p \in X$, mostrando que uma aplicação contínua é determinada por seus valores em um subconjunto denso.

Ex. 7.11 — Se f é uma função real contínua definida em um conjunto fechado $E \subset \mathbb{R}$, prove que existe uma extensão contínua g de f para $\mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Mostre que o resultado pode ser falso se E não for fechado.

Ex. 7.12 — Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços métricos. Suponha que exista $L \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y) \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Prove que f é uniformemente contínua.

Ex. 7.13 — Seja f uma função definida em um conjunto E . O gráfico de f é o conjunto

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times \mathbb{R}.$$

Suponha que E seja compacto. Prove que f é contínua em E se, e somente se, o seu gráfico é compacto.

Ex. 7.14 — Seja f uma função real uniformemente contínua em um conjunto limitado $E \subset \mathbb{R}$. Prove que f é limitada em E . Mostre que a conclusão pode falhar se E não for limitado.

Ex. 7.15 — Mostre que a definição de continuidade uniforme pode ser reformulada em termos de diâmetros de conjuntos: uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uniformemente contínua se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{diam } f(E) < \varepsilon$$

para todo $E \subset X$ com

$$\text{diam } E < \delta.$$

Ex. 7.16 — Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, onde X é compacto. Prove que f é uniformemente contínua em X pelo seguinte argumento por contradição: suponha que f não seja uniformemente contínua. Mostre então que existe $\varepsilon > 0$ e existem sequências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ em X tais que

$$d_X(p_n, q_n) \rightarrow 0, \quad \text{mas} \quad d_Y(f(p_n), f(q_n)) \geq \varepsilon \quad \text{para todo } n.$$

Use a compacidade de X e a continuidade de f para obter uma contradição.

Ex. 7.17 — Se f é uma aplicação uniformemente contínua de um espaço métrico X em um espaço métrico Y , prove que $\{f(x_n)\}$ é uma sequência de Cauchy em Y sempre que $\{x_n\}$ for uma sequência de Cauchy em X .

Ex. 7.18 — Prove que a composição de duas funções uniformemente contínuas é uniformemente contínua. Enuncie esse fato com precisão antes de demonstrá-lo.

Ex. 7.19 — Seja E um subconjunto denso de um espaço métrico X e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Prove que f possui uma extensão contínua única para todo o espaço X .

Ex. 7.20 — Seja $I = [0, 1]$ o intervalo unitário fechado e $f : I \rightarrow I$ uma aplicação contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe pelo menos um $x \in I$ tal que $f(x) = x$.

Ex. 7.21 — Defina as funções f e g em $\mathbb{R}^2$ por $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ e, para $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^6}.$$

Prove que f é limitada em $\mathbb{R}^2$, que g é ilimitada em qualquer vizinhança de $(0, 0)$ e que f não é contínua em $(0, 0)$. No entanto, mostre que as restrições de f e g a qualquer reta em $\mathbb{R}^2$ são contínuas.

Ex. 7.22 — Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita aberta se $f(V)$ é aberto em Y sempre que V for aberto em X . Prove que toda aplicação contínua e aberta de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ deve ser monótona.

Ex. 7.23 — Dado um subconjunto não vazio E de um espaço métrico X , defina a distância de $x \in X$ a E como $\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z)$.

- (a) Prove que $\rho_E(x) = 0$ se, e somente se, x pertence ao fecho $\overline{E}$.
- (b) Prove que ρ_E é uma função uniformemente contínua em X .

Ex. 7.24 — Sejam K e F subconjuntos disjuntos de um espaço métrico X , onde K é compacto e F é fechado. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) > \delta$ para quaisquer $p \in K$ e $q \in F$.

Ex. 7.25 — Sejam A e B conjuntos fechados, não vazios e disjuntos em um espaço métrico X . Mostre que a função $f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)}$ é contínua em X , possui imagem em $[0, 1]$ e satisfaz $f(p) = 0$ se $p \in A$ e $f(p) = 1$ se $p \in B$.

Ex. 7.26 — Uma função real f definida em (a, b) é dita convexa se $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ para quaisquer $x, y \in (a, b)$ e $0 < \lambda < 1$. Prove que toda função convexa é contínua.

Ex. 7.27 — Suponha que f seja uma função real contínua em (a, b) que satisfaz $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ para todos $x, y \in (a, b)$. Prove que f é convexa.

Ex. 7.28 — Para subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^k$, defina a soma de Minkowski $A + B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$.

- (a) Se K é compacto e C é fechado em $\mathbb{R}^k$, prove que $K + C$ é fechado.
- (b) Demonstre, por meio de um contraexemplo em $\mathbb{R}$, que a soma de dois conjuntos fechados não é necessariamente fechada.

Ex. 7.29 — Sejam X, Y, Z espaços métricos, com Y compacto. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação, $g : Y \rightarrow Z$ é contínua e injetiva, e a composição $h = g \circ f$ é uniformemente contínua, prove que f também é uniformemente contínua.

8

Limites de funções reais

A noção de limite em espaços métricos depende da distância entre pontos. Na reta real, a ordem permite distinguir a aproximação pela direita da aproximação pela esquerda e estudar o comportamento de uma função quando a variável tende a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Neste capítulo, estudaremos limites laterais, limites no infinito e limites infinitos. Os limites laterais serão usados para classificar descontinuidades e descrever as restrições impostas pela monotonicidade. Essas propriedades da ordem de $\mathbb{R}$ também serão utilizadas no estudo das derivadas.

8.1 Limites laterais

A ordem da reta permite restringir a aproximação de x a um ponto a aos valores que satisfazem $x > a$ ou aos que satisfazem $x < a$. Essas duas possibilidades dão origem aos limites pela direita e pela esquerda.

8.1 Definição. Seja $E \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é um **ponto de acumulação à direita** de E se, para todo $\delta > 0$, vale

$$E \cap (a, a + \delta) \neq \emptyset.$$

De modo análogo, dizemos que a é um **ponto de acumulação à esquerda** de E se, para todo $\delta > 0$, vale

$$E \cap (a - \delta, a) \neq \emptyset.$$



Figura 8.1

Pontos de acumulação à esquerda e à direita.

Neste capítulo

- ▶ Limites laterais (p. 205)
- ▶ Descontinuidades e funções monótonas (p. 207)
- ▶ Limites no infinito (p. 210)
- ▶ Limites infinitos de funções (p. 211)
- ▶ Exercícios (p. 212)

Ideia central

Na reta, a ordem refina a noção geral de limite: surgem limites laterais, infinitos, comportamento no infinito e uma classificação natural das descontinuidades.

8.2 Definição. Seja $E \subset \mathbb{R}$, seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Suponha que a seja ponto de acumulação à direita de E . Dizemos que $f(x)$ converge para $L \in \mathbb{R}$ quando $x \rightarrow a^+$, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in E$, da condição $0 < x - a < \delta$ decorre $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- (b) Suponha que a seja ponto de acumulação à esquerda de E . Dizemos que $f(x)$ converge para $L \in \mathbb{R}$ quando $x \rightarrow a^-$, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in E$, da condição $0 < a - x < \delta$ decorre $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Os limites laterais são versões unilaterais do limite usual: restringimos a aproximação de x a a aos pontos de E situados de um dos lados de a .

8.3 Proposição. Seja $E \subset \mathbb{R}$, seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$. Suponha que a seja ponto de acumulação à direita e à esquerda de E . Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Demonstração. Suponha primeiro que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in E$, de $0 < |x - a| < \delta$ segue $|f(x) - L| < \varepsilon$. Em particular, isso vale quando $0 < x - a < \delta$, e portanto $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$. Pelo mesmo motivo, também vale quando $0 < a - x < \delta$, de modo que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Reciprocamente, suponha que os dois limites laterais existam e sejam iguais a L . Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < a - x < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

e

$$0 < x - a < \delta_2 \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $x \in E$ satisfaz $0 < |x - a| < \delta$, então ou $0 < a - x < \delta$ ou $0 < x - a < \delta$. Em ambos os casos, obtemos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Logo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. $\square$

8.4 Exemplo. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}.$$

Como

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0, \\ x - 1, & x < 0, \end{cases}$$

temos $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. Como os limites laterais existem, mas são distintos, o limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

8.5 Proposição. Seja $E \subset \mathbb{R}$, seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $a \in E$. Suponha que a seja ponto de acumulação à direita e à esquerda de E . Então f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Demonstração. Pela definição de continuidade em a , a função f é contínua em a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. A conclusão segue então da proposição anterior. $\square$

Os limites laterais também permitem classificar as descontinuidades de uma função, como veremos a seguir.

8.2 Descontinuidades e funções monótonas

Uma descontinuidade pode ocorrer porque os dois lados se aproximam de valores diferentes, porque o valor da função não coincide com um limite comum, ou porque algum dos limites laterais não existe como número real. A classificação seguinte distingue esses casos.

8.6 Definição. Seja f definida em um intervalo (a, b) e seja $x \in (a, b)$ um ponto de descontinuidade de f . Se os limites laterais

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$$

existem e são finitos, dizemos que f tem uma **descontinuidade da primeira espécie** em x . Caso contrário, dizemos que f tem uma **descontinuidade da segunda espécie** em x .

8.7 Observação. Entre as descontinuidades da primeira espécie, distinguem-se dois casos fundamentais:

- **Descontinuidade removível:** ocorre quando

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

mas $f(a) \neq L$. Nesse caso, bastaria redefinir $f(a) = L$ para tornar a função contínua em a .

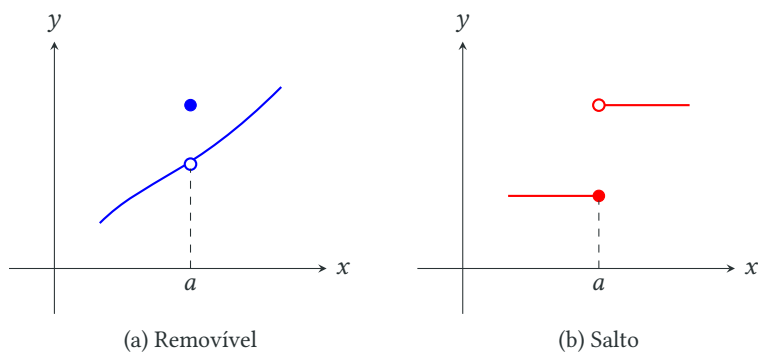
- **Descontinuidade por salto:** ocorre quando os limites laterais existem, mas são distintos, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

A quantidade

$$\left| \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right|$$

é chamada *salto* da função no ponto a .

**Figura 8.2**

Classificação das descontinuidades de primeira espécie: em (a), os limites laterais coincidem, mas o valor da função no ponto é diferente do limite comum; em (b), os limites laterais existem, porém são distintos.

8.8 Exemplo. A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

tem uma descontinuidade removível em $x = 1$. Com efeito, para $x \neq 1$, vale $f(x) = x+1$, de modo que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Como, porém, $f(1) = 0 \neq 2$, a função não é contínua em 1.

8.9 Exemplo. A função degrau

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

tem uma descontinuidade da primeira espécie em 0, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

8.10 Exemplo. (a) A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é descontínua em todo ponto de $\mathbb{R}$. De fato, toda vizinhança de qualquer ponto contém números racionais e irracionais, e o mesmo vale para qualquer intervalo lateral. Assim, a função assume nessas vizinhanças os valores 0 e 1, de modo que não admite limite, nem bilateral nem lateral, em nenhum ponto. Logo, f tem descontinuidade da segunda espécie em todo ponto.

(b) A função

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

é contínua em 0 e descontínua em todo ponto $x \neq 0$. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|f(x)| \leq |x|$, e portanto $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Por outro lado, se $x \neq 0$, ao longo de uma sequência de racionais que converge para x , os valores de f convergem para x , enquanto, ao longo de uma sequência de irracionais que converge para x , os valores de f convergem para 0. Como esses limites são distintos, f é descontínua em todo ponto $x \neq 0$; trata-se, mais precisamente, de uma descontinuidade da segunda espécie.

(c) A função

$$f(x) = \sin(1/x), \quad x \neq 0,$$

não admite limite quando $x \rightarrow 0$, nem pela direita nem pela esquerda. Assim, qualquer extensão dessa função em $x = 0$ terá uma descontinuidade da segunda espécie nesse ponto.

Funções monótonas

Para funções monótonas, os limites laterais nos pontos interiores de um intervalo podem ser descritos por supremos e ínfimos. Essa descrição permite determinar o tipo de descontinuidade que pode ocorrer e mostrar que o conjunto desses pontos é no máximo enumerável.

8.11 Teorema. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Então, para todo $x \in (a, b)$, existem os limites laterais

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow x^+} f(t),$$

e vale

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \leq f(x) \leq \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Além disso, se $x < y$, então

$$\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \leq \lim_{t \rightarrow y^-} f(t).$$

Demonstração. Fixe $x \in (a, b)$. Como f é crescente, o conjunto

$$A = \{f(t) : a < t < x\}$$

é não vazio e é limitado superiormente por $f(x)$. Logo, existe $\alpha = \sup A$. Mostremos que $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) = \alpha$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de supremo, existe $t_0 \in (a, x)$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(t_0) \leq \alpha$. Se $t_0 < t < x$, então, pela monotonicidade de f ,

$$\alpha - \varepsilon < f(t_0) \leq f(t) \leq \alpha.$$

Daí segue que $|f(t) - \alpha| < \varepsilon$ para todo t suficientemente próximo de x pela esquerda. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) = \alpha.$$

De modo análogo, o conjunto

$$B = \{f(t) : x < t < b\}$$

é não vazio e é limitado inferiormente por $f(x)$. Existe, então, $\beta = \inf B$, e o mesmo raciocínio mostra que

$$\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) = \beta.$$

Como $f(t) \leq f(x)$ para todo $t < x$, concluímos que $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \leq f(x)$. Analogamente, de $f(x) \leq f(t)$ para todo $t > x$ obtemos $f(x) \leq \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$. Por fim, se $x < y$, então, para todo t com $x < t < y$, temos

$$\lim_{u \rightarrow x^+} f(u) \leq f(t) \leq \lim_{u \rightarrow y^-} f(u).$$

Como isso vale para todo $t \in (x, y)$, segue que

$$\lim_{u \rightarrow x^+} f(u) \leq \lim_{u \rightarrow y^-} f(u).$$

□

8.12 Corolário. Toda função monótona definida em um intervalo possui apenas descontinuidades da primeira espécie.

Demonstração. Se f é monótona, então ela é crescente ou decrescente. No caso crescente, o resultado decorre imediatamente do teorema anterior. No caso decrescente, basta aplicar esse mesmo resultado à função $-f$. $\square$

8.13 Teorema. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Então o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é no máximo enumerável.

Demonstração. Podemos supor que f seja crescente. Seja $x \in (a, b)$ um ponto de descontinuidade. Pelo corolário anterior, os limites laterais em x existem e são finitos; além disso, como f não é contínua em x , necessariamente

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) < \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

Assim, o intervalo aberto

$$I_x = \left(\lim_{t \rightarrow x^-} f(t), \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \right)$$

é não vazio. Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, podemos escolher um racional $r_x \in I_x$. Se $x < y$, então, pelo teorema anterior,

$$\lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \leq \lim_{t \rightarrow y^-} f(t).$$

Logo, os intervalos I_x e I_y são disjuntos. Em particular, se $x \neq y$, então $r_x \neq r_y$. Obtivemos, assim, uma aplicação injetiva do conjunto dos pontos de descontinuidade de f em $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue que esse conjunto é no máximo enumerável. $\square$

Assim, no interior do intervalo, as descontinuidades de uma função monótona são saltos e formam um conjunto no máximo enumerável.

Consideraremos agora o comportamento de uma função quando a variável se afasta indefinidamente, em vez de se aproximar de um ponto real.

8.3 Limites no infinito

A notação $x \rightarrow +\infty$ indica que x ultrapassa qualquer cota previamente fixada; não pressupõe que $+\infty$ seja um número real. Como no limite em um ponto finito, exigiremos que o erro seja menor que cada $\varepsilon > 0$, mas agora para valores suficientemente grandes da variável.

8.14 Definição. Seja $E \subset \mathbb{R}$ não limitado superiormente e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in E$, da condição $x > M$ decorre $|f(x) - L| < \varepsilon$.

8.15 Teorema. Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente, com $E \subset \mathbb{R}$. Suponha que E seja ilimitado superiormente e que f seja limitada superiormente. Então existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Como $f(E)$ é não vazio e limitado superiormente, existe $L = \sup f(E)$. Mostremos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de supremo, existe $x_0 \in E$ tal que $L - \varepsilon < f(x_0) \leq L$. Como f é crescente, para todo $x \in E$ com $x > x_0$ temos

$$L - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq L.$$

Daí resulta que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $x > x_0$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$. $\square$

O teorema retoma uma relação já observada nos limites laterais: a monotonicidade, acompanhada da limitação adequada, garante a convergência. No caso crescente, o limite é o supremo da imagem da função.

Passaremos agora a outra situação: a variável se aproxima de um ponto finito, enquanto os valores da função crescem sem limite.

8.4 Limites infinitos de funções

Quando escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

não estamos afirmando a existência de um limite real. Essa notação indica que, para qualquer cota M , os valores de $f(x)$ são maiores que M quando x está suficientemente próximo de a , com $x \neq a$.

8.16 Definição. Seja $E \subset \mathbb{R}$, seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de E e seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in E$, da condição $0 < |x - a| < \delta$ decorre $f(x) > M$.

8.17 Exemplo. Seja

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}, \quad x \neq a.$$

Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

De fato, dado $M > 0$, escolha $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < 1/\sqrt{M}$. Se $0 < |x-a| < \delta$, então

$$(x-a)^2 < \delta^2 < \frac{1}{M},$$

e, portanto,

$$\frac{1}{(x-a)^2} > M.$$

Isso mostra que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty.$$

As noções de limite no infinito e de limite infinito podem ser combinadas. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

significa que, para todo $M > 0$, existe $A > 0$ tal que

$$x > A \implies f(x) > M$$

para todo x do domínio. As outras combinações de sinais são definidas de modo análogo.

Com essas definições, podemos precisar a observação sobre monotonicidade: nos pontos interiores de um intervalo, uma função real monótona possui limites laterais finitos; em extremidades do domínio ou quando a variável tende a $\pm\infty$, os limites correspondentes podem ser infinitos.

As noções estudadas descrevem aproximações laterais, o comportamento no infinito e a divergência dos valores de uma função. No capítulo seguinte, essas formas de aproximação serão utilizadas no estudo da derivada.

8.5 Exercícios

Ex. 8.1 — Considere a função “maior inteiro” $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, e a função “parte fracionária” $\{x\} = x - [x]$. Determine a natureza das descontinuidades de ambas as funções.

Ex. 8.2 — Seja f uma função real definida em (a, b) . Prove que o conjunto de pontos onde f possui uma descontinuidade da primeira espécie é, no máximo, enumerável.

Ex. 8.3 — Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{se } x = m/n \text{ com } m, n \text{ coprimos e } n > 0, \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Prove que f é contínua em todos os pontos irracionais e possui descontinuidades da primeira espécie em todos os pontos racionais.

Ex. 8.4 — Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possua a propriedade do valor intermediário e que, para cada número racional r , o conjunto $\{x : f(x) = r\}$ seja fechado. Prove que f é contínua.

Ex. 8.5 — Sejam $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais. Estude, no caso de funções reais de variável real, como as propriedades de limite no infinito e de limite infinito se comportam em relação às operações algébricas usuais.

Ex. 8.6 — Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, com $E \subset \mathbb{R}$, e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de E . Suponha que f seja limitada numa vizinhança de a . Defina a **oscilação** de f em a por

$$\omega_f(a) = \inf_{\delta > 0} \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in E, 0 < |x - a| < \delta, 0 < |y - a| < \delta\}.$$

Prove que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, e somente se,

$$\omega_f(a) = 0.$$

Mostre ainda que, se $a \in E$ e a é ponto de acumulação de E , então

$$f \text{ é contínua em } a \iff \omega_f(a) = 0.$$

Ex. 8.7 — Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, com $E \subset \mathbb{R}$, e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de E . Prove que, se f é monótona numa vizinhança de a , então os limites laterais em a existem, podendo ser finitos ou infinitos.

Ex. 8.8 — Dê um exemplo de uma função definida em um intervalo que tenha exatamente um conjunto enumerável prescrito de pontos de descontinuidade da primeira espécie.

Ex. 8.9 — Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de E e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Prove o critério sequencial correspondente: para toda sequência $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$ com $x_n \rightarrow a$, tem-se $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Ex. 8.10 — Mostre que, se f é monótona em um intervalo, então o conjunto de seus pontos de continuidade é denso nesse intervalo.

Ex. 8.11 — Seja f uma função real definida em (a, b) . Suponha que, para todo $x \in (a, b)$, os limites laterais $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$ e $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ existam e sejam finitos. Prove que o conjunto de pontos de descontinuidade de f é no máximo enumerável.

9

Derivadas

Nos capítulos anteriores, limites descreviam o comportamento de uma função quando a variável se aproximava de um ponto. A derivada acrescenta uma pergunta mais precisa: *com que velocidade* a função varia nessa aproximação?

O quociente incremental compara a variação de f com a variação da própria variável. Quando esse quociente possui limite, o comportamento de primeira ordem da função deixa de ser apenas contínuo e passa a ser essencialmente linear. Essa é a ideia que organiza o capítulo.

Partiremos da derivada em um ponto e de sua interpretação como aproximação linear. Depois veremos como derivadas se combinam, o que dizem sobre extremos e como os teoremas do valor médio transformam informação local em conclusões globais. L'Hôpital, convexidade e a fórmula de Taylor aparecerão então como consequências e refinamentos dessa mesma estrutura.

9.1 Derivada e aproximação linear

A inclinação de uma secante mede uma taxa média de variação. Fazer o segundo ponto da secante aproximar-se do primeiro leva à taxa instantânea. Analiticamente, essa passagem é um limite; geometricamente, produz a reta tangente.

9.1 Definição. Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$. Suponha que a seja ponto de acumulação de E . Dizemos que f é *diferenciável no ponto a* quando existe o limite

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in E, x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quando esse limite existe, ele é chamado de *derivada de f no ponto a* .

Neste capítulo

- ▶ Derivada e aproximação linear (p. 214)
- ▶ Regras de derivação (p. 220)
- ▶ Derivada e extremos locais (p. 223)
- ▶ Teoremas do valor médio e consequências (p. 224)
- ▶ Regra de L'Hôpital (p. 232)
- ▶ Convexidade (p. 234)
- ▶ Fórmula de Taylor (p. 236)

Ideia central

A derivada mede variação local. Sua força vem de transformar informação infinitesimal em conclusões globais sobre crescimento, extremos e forma.

9.2 Observação. Com essa definição, se $a \in \text{int}(E)$, a derivada coincide com a noção usual. Se E é um intervalo e a é uma de suas extremidades, a derivada, no sentido relativo a E , coincide com a derivada lateral pertinente.

A expressão $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é o quociente incremental de f em torno de a . Geometricamente, ela representa o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Quando o limite acima existe, a reta que passa por $(a, f(a))$ e tem coeficiente angular $f'(a)$ é chamada reta tangente ao gráfico de f nesse ponto. Em outras palavras, a derivada é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando o segundo ponto se aproxima do primeiro.

Escrevendo $h = x - a$, isto é, $x = a + h$, a definição assume a forma equivalente

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nesse caso, a função $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ fica definida no conjunto

$$Y = \{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; a+h \in E\},$$

e 0 é ponto de acumulação de Y .

Nesta seção, denotaremos por E' o conjunto dos pontos de acumulação de E ; analogamente, E'_+ e E'_- denotam, respectivamente, os conjuntos dos pontos de acumulação à direita e à esquerda de E .

Quando $a \in E \cap E'_+$, isto é, quando a pertence a E e é ponto de acumulação à direita de E , definimos a derivada à direita de f em a por

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se esse limite existir.

De modo análogo, se $a \in E \cap E'_-$, definimos a derivada à esquerda de f em a por

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

quando esse limite existir.

Assim, se a é ponto de acumulação de E à direita e à esquerda, por exemplo se $a \in \text{int}(E)$, então $f'(a)$ existe se, e somente se, existem as duas derivadas laterais e elas coincidem.

Assim, em intervalos fechados, a noção adotada coincide com a derivada usual no interior e com a derivada lateral pertinente nas extremidades.

Uma caracterização útil, que seguiremos empregando várias vezes, é a sequencial: f é diferenciável em a se, e somente se, para toda sequência (x_n) em $E \setminus \{a\}$ com $x_n \rightarrow a$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a).$$

Mais geralmente, se $Y \subset \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $g(Y) \subset E$, $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = a$, com $b \in Y'$, e ainda $g(y) \neq a$ para $y \neq b$, então a existência de $f'(a)$ implica

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} = f'(a).$$

Trata-se apenas da estabilidade da definição de derivada por mudança de variável ou por passagem a seqüências.

Da definição segue imediatamente que diferenciabilidade é uma hipótese mais forte do que continuidade.

9.3 Teorema. Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$ um ponto de acumulação de E . Se f é diferenciável em a , então f é contínua em a .

Demonstração. Para $x \neq a$, escrevemos

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a).$$

Quando $x \rightarrow a$, o primeiro fator tende a $f'(a)$ e o segundo tende a 0. Portanto, o produto tende a 0, isto é, $f(x) \rightarrow f(a)$. Logo, f é contínua em a . $\square$

9.4 Observação. A existência de apenas uma derivada lateral não garante continuidade no ponto. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

satisfaz $f'_+(0) = 0$, mas não é contínua em 0.

O mesmo argumento do teorema mostra que, se $f'_+(a)$ existe, então f é contínua à direita em a , e, se $f'_-(a)$ existe, então f é contínua à esquerda em a .

Em particular, se ambas as derivadas laterais existem, então f é contínua no ponto, ainda que elas sejam diferentes, pois a existência de cada derivada lateral já implica a continuidade lateral correspondente.

Convém registrar outra formulação equivalente: uma função é diferenciável em um ponto precisamente quando sua variação, em relação a esse ponto, admite uma fatoração por $(x - a)$ com quociente contínuo.

9.5 Teorema. Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$ um ponto de acumulação de E . Então f é diferenciável em a se, e somente se, existe uma função $f^* : E \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em a , tal que

$$f(x) - f(a) = (x - a)f^*(x) \quad \text{para todo } x \in E.$$

Nesse caso, $f^*(a) = f'(a)$.

Demonstração. Suponha primeiro que f seja diferenciável em a e defina

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \neq a, \\ f'(a), & x = a. \end{cases}$$

Então $f(x) - f(a) = (x - a)f^*(x)$ para todo $x \in E$, e a própria definição de derivada mostra que f^* é contínua em a .

Reciprocamente, suponha que exista uma função $f^* : E \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em a , tal que $f(x) - f(a) = (x - a)f^*(x)$ para todo $x \in E$. Para $x \neq a$, segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f^*(x).$$

Passando ao limite quando $x \rightarrow a$, obtemos $f'(a) = f^*(a)$. Portanto, f é diferenciável em a . $\square$

A fatoração anterior contém uma formulação ainda mais reveladora. Se f é diferenciável em a , então, para $h \rightarrow 0$,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h), \quad \frac{r(h)}{h} \rightarrow 0.$$

Assim, a função afim

$$h \mapsto f(a) + f'(a)h$$

é a aproximação de primeira ordem de $f(a + h)$. O erro é pequeno não apenas em valor absoluto: ele é de ordem estritamente menor que $|h|$. É nesse sentido preciso que diferenciabilidade significa existência de uma aproximação linear.

Reciprocamente, uma decomposição dessa forma implica imediatamente a existência da derivada e identifica seu coeficiente linear com $f'(a)$.

Os exemplos seguintes ilustram essa caracterização e fixam procedimentos de cálculo que reaparecerão ao longo do capítulo.

9.6 Exemplo. Seja $n \geq 1$ um inteiro e considere $f(x) = x^n$. Então f é diferenciável em todo ponto $a \in \mathbb{R}$, com

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

De fato, para $h \neq 0$, pelo binômio de Newton,

$$\frac{(a + h)^n - a^n}{h} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^{n-j} h^{j-1}.$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, todos os termos com $j \geq 2$ tendem a 0, restando

$$f'(a) = na^{n-1}.$$

Para $n = 0$, a função é constante e sua derivada é identicamente nula.

9.7 Exemplo. A função $f(x) = |x|$ é contínua em toda a reta, mas não é diferenciável em 0. Com efeito,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x},$$

que vale 1 para $x > 0$ e -1 para $x < 0$. Assim,

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'_-(0) = -1.$$

Como as derivadas laterais são distintas, $f'(0)$ não existe.

Nos demais pontos a função coincide localmente com uma função afim: $f(x) = x$ em uma vizinhança de cada $a > 0$, e $f(x) = -x$ em uma vizinhança de cada $a < 0$. Portanto,

$$f'(a) = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

9.8 Exemplo. Considere $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Para $a > 0$ e $h \neq 0$, com $a + h > 0$, temos

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}},$$

após racionalizar o numerador. Logo,

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Se a mesma expressão for considerada como função em $[0, +\infty)$, o ponto 0 passa a exigir a derivada lateral à direita. Nesse caso, para $h > 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

que não possui limite real finito quando $h \rightarrow 0^+$. Assim, $\sqrt{x}$ não é diferenciável em 0, no sentido adotado neste capítulo.

9.9 Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

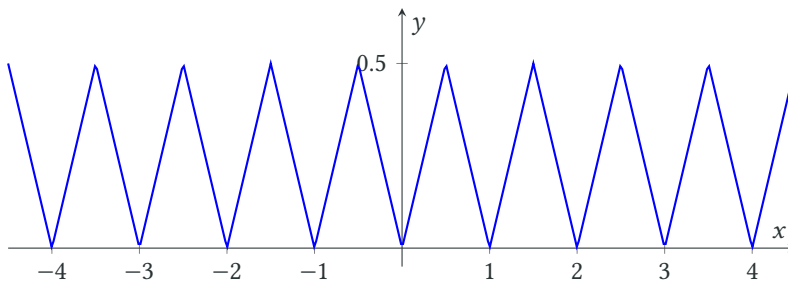
$$f(x) = \inf\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Assim, $f(x)$ é a distância de x ao inteiro mais próximo. Em cada intervalo $[n, n+1]$, o gráfico é formado por dois segmentos de reta:

$$f(x) = x - n \quad \text{em} \quad \left[n, n + \frac{1}{2}\right],$$

e

$$f(x) = n + 1 - x \quad \text{em} \quad \left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right].$$



Portanto, f é diferenciável nos intervalos abertos

$$\left(n, n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(n + \frac{1}{2}, n + 1\right),$$

com derivada igual a 1 no primeiro caso e igual a -1 no segundo.

Nos pontos n e $n + \frac{1}{2}$, as derivadas laterais existem, mas não coincidem. Em particular, f não é diferenciável nesses pontos. Esse exemplo mostra que a não diferenciabilidade pode ocorrer não por descontinuidade da função, mas pela presença de uma mudança brusca de inclinação.

9.10 Observação. Como a derivada é definida por um limite, ela é uma noção local. Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em um ponto de acumulação $a \in E$ e $Y \subset E$ é tal que a também é ponto de acumulação de Y , então a restrição $g = f|_Y$ é diferenciável em a , com $g'(a) = f'(a)$.

Reciprocamente, se $Y = I \cap E$, onde I é um intervalo aberto contendo a , então a existência de $g'(a)$ implica a de $f'(a)$, pois, em uma vizinhança de a , as duas funções coincidem.

Diremos que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em E quando $f'(a)$ existe em todo ponto $a \in E$ que seja ponto de acumulação de E .

9.11 Teorema (Caracterização da derivada por aproximação linear).

Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$ um ponto de acumulação de E . Então são equivalentes:

- (i) f é diferenciável em a ;
- (ii) existe uma constante $L \in \mathbb{R}$ e uma função r , definida para h suficientemente próximo de 0 com $a + h \in E$, tais que

$$f(a + h) = f(a) + Lh + r(h) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Quando essas condições se verificam, tem-se necessariamente $L = f'(a)$.

Demonstração. Suponha primeiro que f seja diferenciável em a . Definindo

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a)h,$$

para h suficientemente próximo de 0, com $h \neq 0$ e $a + h \in E$, obtemos a decomposição

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h).$$

Além disso,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

e o segundo membro tende a 0 quando $h \rightarrow 0$. Logo, $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$, o que prova (i) $\Rightarrow$ (ii).

Reciprocamente, suponha que exista $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(a + h) = f(a) + Lh + r(h)$, com $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$. Então, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L + \frac{r(h)}{h}.$$

Passando ao limite quando $h \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = L.$$

Portanto, f é diferenciável em a e $f'(a) = L$. Isso prova (ii) $\Rightarrow$ (i).

A unicidade de L é imediata: se

$$f(a + h) = f(a) + Lh + r(h) = f(a) + Mh + s(h),$$

com $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ e $\frac{s(h)}{h} \rightarrow 0$, então, para $h \neq 0$,

$$L - M = \frac{s(h)}{h} - \frac{r(h)}{h}.$$

Passando ao limite quando $h \rightarrow 0$, concluímos que $L = M$. $\square$

9.12 Observação. Equivalentemente, se f é diferenciável em a , então

$$f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho(h)]h, \quad \rho(h) \rightarrow 0.$$

Observações inteiramente análogas valem para as derivadas laterais: basta considerar $h > 0$ no caso da derivada à direita e $h < 0$ no caso da derivada à esquerda.

9.13 Exemplo. A caracterização por aproximação linear aplicada a $f(x) = \sin x$ fornece uma forma precisa da aproximação usual do seno perto de um ponto. Como $f'(a) = \cos a$, temos

$$\sin(a+h) = \sin a + h \cos a + r(h), \quad \frac{r(h)}{h} \rightarrow 0.$$

Assim, em primeira ordem, a variação de $\sin x$ perto de a é dada por $h \cos a$. O termo $r(h)$ mede o erro dessa aproximação linear e é desprezível em comparação com h .

9.14 Observação. Os exemplos anteriores mostram que uma função pode ser contínua e, ainda assim, não ser diferenciável em alguns pontos. Mais do que isso, existem funções contínuas em toda a reta que não são diferenciáveis em ponto algum.

A definição fornece a estrutura local. Para que o cálculo diferencial seja útil, porém, precisamos saber como essa estrutura se comporta quando somamos, multiplicamos ou compomos funções.

9.2 Regras de derivação

As regras de derivação mostram que diferenciabilidade é estável sob as operações usuais. Em particular, a regra da cadeia traduz a ideia de que taxas de variação sucessivas se multiplicam, enquanto a fórmula da inversa permite recuperar a variação de uma função a partir da variação de sua bijeção inversa.

9.15 Teorema (Regras de derivação). Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$ um ponto de acumulação de E e $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em a . Então $f + g$, $f - g$ e fg são diferenciáveis em a , e

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Se, além disso, $g(a) \neq 0$, então, em uma vizinhança relativa de a na qual g não se anula, o quociente f/g é diferenciável em a , e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demonstração. A fórmula da soma segue imediatamente da linearidade do limite.

Para o produto, escrevemos

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)).$$

Dividindo por $x - a$ e passando ao limite quando $x \rightarrow a$, obtemos

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a),$$

pois f é contínua em a .

Para o quociente, basta observar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{g(x)g(a)}.$$

Novamente dividimos por $x - a$ e passamos ao limite. Como $g(x) \rightarrow g(a) \neq 0$, segue que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

□

9.16 Corolário. Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $a \in E$ um ponto de acumulação de E , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em a e $c \in \mathbb{R}$. Então

$$(cf)'(a) = c f'(a).$$

Se, além disso, $f(a) \neq 0$, então, em uma vizinhança relativa de a na qual f não se anula,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.$$

Resta analisar o comportamento da derivada sob composição. A regra da cadeia mostra como se combinam aproximações lineares sucessivas.

9.17 Teorema (Regra da cadeia). Sejam $E, Y \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$ um ponto de acumulação de E . Ponha $b = f(a)$. Suponha que b seja ponto de acumulação de Y , que f seja diferenciável em a e que g seja diferenciável em b . Então $g \circ f$ é diferenciável em a , e

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a).$$

Demonstração. Como g é diferenciável em b , pela caracterização por fatoração existe uma função $g^* : Y \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em b , tal que

$$g(y) - g(b) = (y - b)g^*(y) \quad \text{para todo } y \in Y,$$

com $g^*(b) = g'(b)$. Aplicando essa identidade a $y = f(x)$, obtemos, para $x \in E$,

$$g(f(x)) - g(f(a)) = (f(x) - f(a))g^*(f(x)).$$

Se $x \neq a$, então

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g^*(f(x)).$$

Como f é diferenciável em a , ela é contínua em a ; logo, $f(x) \rightarrow f(a) = b$ quando $x \rightarrow a$. Pela continuidade de g^* em b , temos $g^*(f(x)) \rightarrow g^*(b) = g'(b)$. Passando ao limite, concluímos que

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

□

9.18 Corolário (Derivada da função inversa). Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos, $f : I \rightarrow J$ uma função bijetiva, contínua e estritamente monótona, e seja $g : J \rightarrow I$ a inversa de f . Sejam $a \in I$ e $b = f(a)$. Suponha que f seja diferenciável em a e que $f'(a) \neq 0$. Então g é diferenciável em b , e

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demonstração. Como f é contínua e estritamente monótona no intervalo I , sua inversa $g : J \rightarrow I$ é contínua. Além disso, para $y \in J$ com $y \neq b$, temos $g(y) \neq a$ e $f(g(y)) = y$. Portanto,

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{g(y) - a}{f(g(y)) - f(a)} = \left(\frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} \right)^{-1}.$$

Como g é contínua em b , segue que $g(y) \rightarrow a$ quando $y \rightarrow b$ em J . Como o quociente incremental de f tende a $f'(a) \neq 0$, ele permanece não nulo para u suficientemente próximo de a , com $u \neq a$. Logo,

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \left(\lim_{u \rightarrow a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Assim, g é diferenciável em b e $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. □

9.19 Exemplo. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, é uma bijeção contínua e estritamente crescente. Sua inversa é

$$g(y) = \sqrt[3]{y}.$$

Como $f'(a) = 3a^2$, o corolário sobre a derivada da inversa se aplica em todo ponto $a \neq 0$. Se $b = a^3$, então

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{3a^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}.$$

No ponto $b = 0$, entretanto, o corolário não se aplica, pois $f'(0) = 0$. De fato,

$$\frac{g(y) - g(0)}{y - 0} = \frac{\sqrt[3]{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}},$$

e esse quociente não admite limite real finito quando $y \rightarrow 0$. Logo, g não é diferenciável em 0.

Calcular derivadas é apenas metade da teoria. A outra metade consiste em interpretar o que o valor e o sinal da derivada dizem sobre a função original.

9.3 Derivada e extremos locais

Em um extremo local interior, a função não pode continuar variando na mesma direção dos dois lados. Quando a derivada existe, essa observação elementar leva ao Teorema de Fermat e ao primeiro critério necessário para localizar extremos.

9.20 Definição. Dizemos que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo local em $a \in E$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in E \cap (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) \leq f(a).$$

Se, além disso,

$$x \in (E \setminus \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) < f(a),$$

dizemos que f tem um máximo local estrito em a .

Definições análogas valem para mínimo local e mínimo local estrito.

9.21 Teorema. Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E \cap E'_+$. Suponha que f seja diferenciável à direita em a . Se $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta, x \in E \implies f(a) < f(x).$$

Demonstração. Como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) > 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in E$ com $a < x < a + \delta$, vale

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Como $x - a > 0$, concluímos que $f(x) - f(a) > 0$, isto é, $f(x) > f(a)$. $\square$

9.22 Observação. 1. se $f'_+(a) > 0$, então $f(x) > f(a)$ para todo $x > a$ suficientemente próximo de a ;

2. se $f'_+(a) < 0$, então $f(x) < f(a)$ para todo $x > a$ suficientemente próximo de a ;

3. se $f'_-(a) > 0$, então $f(x) < f(a)$ para todo $x < a$ suficientemente próximo de a ;

4. se $f'_-(a) < 0$, então $f(x) > f(a)$ para todo $x < a$ suficientemente próximo de a .

Em particular, se $f'(a) > 0$, então $f(x) < f(a) < f(y)$ para $x < a < y$ suficientemente próximos de a . Analogamente, se $f'(a) < 0$, então $f(x) > f(a) > f(y)$ para $x < a < y$ suficientemente próximos de a .

9.23 Teorema (Teorema de Fermat). Sejam $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in E$ ponto de acumulação de E tanto à direita quanto à esquerda. Suponha que f seja diferenciável em a . Se f possui um máximo local ou um mínimo local em a , então

$$f'(a) = 0.$$

Demonstração. Suponha que f tenha um máximo local em a . Então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in E \cap (a - \delta, a + \delta)$. Se $x < a$, então $f(x) - f(a) \leq 0$ e $x - a < 0$, de modo que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Passando ao limite quando $x \rightarrow a^-$, obtemos $f'(a) \geq 0$. Se $x > a$, temos $f(x) - f(a) \leq 0$ e $x - a > 0$, logo

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Fazendo $x \rightarrow a^+$, segue que $f'(a) \leq 0$. Portanto, $f'(a) = 0$.

O caso de mínimo local é análogo. □

O Teorema de Fermat é local. Para relacionar o sinal da derivada ao comportamento da função em um intervalo inteiro precisamos de um mecanismo que compare dois pontos afastados. Esse mecanismo é fornecido pelos teoremas do valor médio.

9.4 Teoremas do valor médio e consequências

A partir daqui o domínio será, em geral, um intervalo. Essa hipótese não é um detalhe técnico: ela garante que todos os pontos entre dois valores do domínio continuam disponíveis. É exatamente isso que permite converter informação sobre derivadas em conclusões globais sobre crescimento, estimativas e monotonicidade.

Rolle é o caso fundamental. O Teorema de Cauchy organiza a comparação entre duas funções, e o Teorema do Valor Médio aparece como o caso particular $g(x) = x$. Darboux completa o quadro mostrando uma propriedade surpreendente: mesmo quando f' não é contínua, ela ainda não pode saltar valores.

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto de um intervalo I , podemos então considerar sua derivada como uma nova função, $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto f'(x)$.

Fixaremos agora, para todo o capítulo, a convenção que será usada para as classes C^n . Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo com interior não vazio, diremos que $f \in C^n(I)$ quando f é contínua em I , as derivadas $f^{(k)}$ existem em $\text{int}(I)$, para $1 \leq k \leq n$, e cada uma delas admite extensão contínua a I . Quando I é aberto, essa definição coincide com a usual.

Quando I possui extremidades, os valores de $f^{(k)}$ nas extremidades serão sempre entendidos como os valores desses prolongamentos contínuos. Em particular, dizer que f é de classe C^1 em I , ou continuamente diferenciável em I , significa que f é diferenciável no interior de I , que f' é contínua no interior e que f' se prolonga continuamente às extremidades de I , caso elas existam. Para $n = 0$, escrevemos $C(I)$ para a classe das funções contínuas em I . Finalmente, $f \in C^\infty(I)$ significa que $f \in C^n(I)$ para todo $n \geq 0$.

Nem toda função diferenciável em um intervalo tem derivada contínua.

9.24 Exemplo. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ela é diferenciável em toda a reta. De fato, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

e, em $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$

A derivada f' não é contínua em 0, pois $\cos(1/x)$ não admite limite quando $x \rightarrow 0$. Retomaremos esse exemplo depois do Teorema de Darboux, para distinguir esse tipo de descontinuidade das descontinuidades de primeira espécie.

Quando f' é contínua, podemos aplicar diretamente a ela o Teorema do Valor Intermediário. Mesmo sem continuidade, porém, as derivadas ainda satisfazem uma propriedade análoga, expressa pelo Teorema de Darboux. Antes disso, veremos os teoremas do valor médio, que permitem transformar informações locais sobre a derivada em conclusões globais sobre a função.

9.25 Teorema (Rolle). Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que f seja contínua em I , diferenciável em (a, b) , e que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Se f for constante, o resultado é imediato. Suponhamos, então, que f não seja constante. Como f é contínua em $[a, b]$, ela atinge nesse intervalo um máximo e um mínimo.

Se ambos esses extremos fossem atingidos nas extremidades, então, como $f(a) = f(b)$, os valores máximo e mínimo coincidiriam. Isso implicaria que f é constante em $[a, b]$, em contradição com a hipótese.

Logo, pelo menos um desses extremos é atingido em algum ponto interior $c \in (a, b)$. Como c é ponto de máximo ou de mínimo local e f é diferenciável em c , o Teorema de Fermat fornece $f'(c) = 0$. $\square$

9.26 Exemplo. As hipóteses de continuidade em $[a, b]$ e de diferenciabilidade em (a, b) são ambas essenciais.

1. Defina $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x \quad \text{se } x \in [0, 1), \quad f(1) = 0.$$

Então $f(0) = f(1)$ e f é diferenciável em $(0, 1)$, com $f'(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Portanto, não existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. O que falha aqui é a continuidade em $x = 1$.

2. Se $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = |x|$, então g é contínua em $[-1, 1]$ e satisfaz $g(-1) = g(1)$, mas não é diferenciável em 0.

9.27 Teorema (Teorema de Cauchy). Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em I e diferenciáveis em (a, b) . Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c).$$

Demonstração. Considere

$$h(x) = [f(b) - f(a)] g(x) - [g(b) - g(a)] f(x).$$

A função h é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Além disso, uma conta direta mostra que $h(a) = h(b)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Como

$$h'(x) = [f(b) - f(a)] g'(x) - [g(b) - g(a)] f'(x),$$

obtemos

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c).$$

□

9.28 Teorema (Teorema do Valor Médio). Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que f seja contínua em I e diferenciável em (a, b) . Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Cauchy à função $g(x) = x$. □

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio afirma que existe um ponto do intervalo em que a tangente ao gráfico de f é paralela à secante que liga os extremos do arco considerado.

Esse resultado permite obter propriedades globais da função a partir de hipóteses sobre sua derivada. Os corolários seguintes ilustram esse princípio.

9.29 Corolário. Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que f seja contínua em I , diferenciável em (a, b) , e que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então f é constante em I .

Demonstração. Sejam $x, y \in [a, b]$ com $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Como $f'(c) = 0$, segue que $f(y) = f(x)$. Logo, f é constante em $[a, b]$. □

9.30 Corolário. Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em I e diferenciáveis em (a, b) . Suponha que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Então existe uma constante C tal que

$$g(x) = f(x) + C \quad \text{para todo } x \in I.$$

Demonstração. Basta aplicar o corolário anterior à função $g - f$. $\square$

9.31 Corolário. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que exista $k \geq 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$. Então

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{para quaisquer } x, y \in I.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in I$ com $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Tomando módulo, obtemos

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| |y - x| \leq k|y - x|.$$

$\square$

Em particular, toda função com derivada limitada em um intervalo aberto é Lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua.

9.32 Corolário. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então:

1. $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ se, e somente se, f é não decrescente em I ;
2. se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I .

Demonstração. Suponha primeiro que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $a < b$ pertencem a I , o Teorema do Valor Médio fornece um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \geq 0.$$

Assim, $f(a) \leq f(b)$, e f é não decrescente em I .

Reciprocamente, suponha que f seja não decrescente. Fixe $x \in I$ e tome $h \neq 0$ com $x + h \in I$. Se $h > 0$, então $f(x + h) \geq f(x)$, e portanto

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Se $h < 0$, como $f(x + h) \leq f(x)$, o numerador é não positivo e o denominador é negativo, de modo que novamente

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Passando ao limite quando $h \rightarrow 0$, obtemos $f'(x) \geq 0$.

Se agora $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ e $a < b$, o Teorema do Valor Médio fornece $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) > 0.$$

Logo $f(a) < f(b)$, isto é, f é crescente em I . $\square$

9.33 Exemplo. A hipótese $f'(x) \geq 0$ em todo ponto de um intervalo garante que f seja não decrescente, mas não exige que a derivada seja estritamente positiva em todos os pontos para que a função seja estritamente crescente.

Um exemplo simples é $f(x) = x^3$. Temos

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0$$

em toda a reta, e $f'(0) = 0$. Ainda assim, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, pois $x < y$ implica $x^3 < y^3$. Portanto, a condição $f'(x) > 0$ é suficiente para crescimento estrito, mas não é necessária.

9.34 Observação. As conclusões globais obtidas por meio do Teorema do Valor Médio dependem essencialmente do fato de o domínio ser um intervalo.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x/|x|$, satisfaz $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$, mas não é constante. O que falha aqui é justamente o fato de o domínio não ser um intervalo.

9.35 Exemplo. A função exponencial permite ilustrar como o Teorema do Valor Médio transforma uma informação local sobre a derivada em uma desigualdade global. Como $f(x) = e^x$ satisfaz $f'(x) = e^x$, aplicando o Teorema do Valor Médio em $[0, x]$, com $x > 0$, obtemos $c \in (0, x)$ tal que

$$e^x - 1 = e^c x.$$

Como $e^c > 1$, segue que

$$e^x > 1 + x \quad (x > 0).$$

Iterações dessa estimativa, ou formas mais refinadas dela, permitem comparar o crescimento da exponencial com o de potências. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

9.36 Exemplo. Considere

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Essa função é o exemplo prototípico de função suave que se anula em 0 com ordem maior do que qualquer potência. Ela é contínua em 0, pois $e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$.

Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}.$$

No ponto 0,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = 0,$$

pois, escrevendo $t = 1/|x|$, essa expressão é dominada por um múltiplo de $t^3 e^{-t^2}$, que tende a 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Assim, f' é contínua em 0.

O próximo corolário refina o Teorema do Valor Médio: se a derivada admite limite ao nos aproximarmos de uma extremidade, então a derivada lateral correspondente existe e coincide com esse limite.

9.37 Corolário. Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que f seja contínua em I , diferenciável em (a, b) , e que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = L.$$

Então existe a derivada à direita de f em a , e $f'_+(a) = L$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência com $x_n > a$ e $x_n \rightarrow a$. Pelo Teorema do Valor Médio, para cada n existe $y_n \in (a, x_n)$ tal que

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(y_n).$$

Como $a < y_n < x_n$ e $x_n \rightarrow a$, segue que $y_n \rightarrow a$. Pela hipótese, $f'(y_n) \rightarrow L$. Portanto,

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \rightarrow L.$$

Como isso vale para toda sequência (x_n) com $x_n > a$ e $x_n \rightarrow a$, o critério sequencial para limites laterais mostra que $f'_+(a)$ existe e é igual a L . $\square$

Embora a derivada possa deixar de ser contínua, ela não pode apresentar saltos. Essa é a propriedade expressa pelo Teorema de Darboux.

9.38 Teorema (Teorema de Darboux). Sejam $a < b$, $I = (a, b)$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então f' tem a propriedade do valor intermediário em I : se $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, e d está entre $f'(x_1)$ e $f'(x_2)$, então existe $c \in [x_1, x_2]$ tal que $f'(c) = d$. Se d está estritamente entre esses dois valores, então podemos tomar $c \in (x_1, x_2)$.

Demonstração. Os casos em que $d = f'(x_1)$ ou $d = f'(x_2)$ são imediatos, tomando respectivamente $c = x_1$ ou $c = x_2$. Basta considerar, portanto, o caso em que

$$f'(x_1) < d < f'(x_2),$$

pois o caso $f'(x_2) < d < f'(x_1)$ é análogo.

Definamos $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - dx$. Então g é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2) , com

$$g'(x) = f'(x) - d.$$

Como $x_1, x_2 \in I$ e I é aberto, as derivadas $g'(x_1)$ e $g'(x_2)$ estão bem definidas. Como $g'(x_1) = f'(x_1) - d < 0$, segue da definição de derivada que existe $\eta_1 > 0$ tal que, para todo $x \in (x_1, x_1 + \eta_1)$,

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} < 0.$$

Como $x - x_1 > 0$, isso implica $g(x) < g(x_1)$. Logo, x_1 não pode ser ponto de mínimo de g em $[x_1, x_2]$.

De modo análogo, como $g'(x_2) = f'(x_2) - d > 0$, existe $\eta_2 > 0$ tal que, para todo $x \in (x_2 - \eta_2, x_2)$,

$$\frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} > 0.$$

Como agora $x - x_2 < 0$, segue novamente que $g(x) < g(x_2)$. Portanto, x_2 também não pode ser ponto de mínimo de g em $[x_1, x_2]$.

Como g é contínua no compacto $[x_1, x_2]$, ela atinge seu mínimo nesse intervalo. Como esse mínimo não ocorre em nenhuma das extremidades, ele é atingido em algum ponto $c \in (x_1, x_2)$.

Pelo Teorema de Fermat, temos $g'(c) = 0$. Como $g'(c) = f'(c) - d$, concluímos que $f'(c) = d$. $\square$

9.39 Corolário. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente monótona em I .

Demonstração. Pelo Teorema de Darboux, a derivada não pode mudar de sinal sem assumir o valor 0 em algum ponto intermediário. Como $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, segue que f' é sempre positiva ou sempre negativa em I .

Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o corolário anterior mostra que f é crescente em I . Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, aplicamos esse mesmo resultado à função $-f$, cuja derivada é positiva em todo ponto. Concluimos, portanto, que f é estritamente monótona em I . $\square$

9.40 Corolário. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então f' não pode ter descontinuidade de primeira espécie em nenhum ponto de I .

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f' tenha uma descontinuidade de primeira espécie em algum ponto $c \in I$. Então os limites laterais de f' em c existem e são finitos, mas a continuidade falha em c . Em particular, pelo menos um desses limites é diferente de $f'(c)$, ou os dois limites laterais são distintos entre si. Tratemos, por exemplo, o caso em que

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = L \quad \text{com} \quad L \neq f'(c).$$

Se $L > f'(c)$, escolha d tal que

$$f'(c) < d < L.$$

Pela definição de limite lateral, existe $\delta > 0$ tal que

$$f'(x) > d \quad \text{para todo } x \in (c, c + \delta).$$

Fixado $x \in (c, c + \delta)$, temos

$$f'(c) < d < f'(x).$$

Aplicando o Teorema de Darboux ao intervalo (c, x) , obtemos um ponto $u \in (c, x)$ tal que $f'(u) = d$, o que contradiz a desigualdade anterior.

O caso $L < f'(c)$ é análogo, e o mesmo raciocínio vale para o limite pela esquerda. Logo, f' não pode ter descontinuidade de primeira espécie em nenhum ponto de I . $\square$

9.41 Exemplo. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, não contradiz o corolário segundo o qual derivadas não têm descontinuidades de primeira espécie. De fato, f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

No entanto, $f'(0)$ não existe. Portanto, não há uma descontinuidade de f' em 0; o que ocorre é que 0 nem sequer pertence ao domínio da função derivada.

9.42 Exemplo. Retomemos a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ela já apareceu como exemplo de função diferenciável cuja derivada não é contínua. À luz do Teorema de Darboux, podemos agora entender melhor o tipo de descontinuidade que ocorre. Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x),$$

enquanto

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(1/h) = 0.$$

A derivada não é contínua em 0, pois o termo $\cos(1/x)$ oscila sem limite quando $x \rightarrow 0$. Essa descontinuidade, porém, não é de primeira espécie: os limites laterais de f' em 0 não existem. Assim, o exemplo é compatível com o corolário anterior.

9.43 Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **uniformemente diferenciável** em I quando f é diferenciável em todo ponto de I e, além disso, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ com $x + h \in I$,

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, f é uniformemente diferenciável em I se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ com $x + h \in I$,

$$0 < |h| < \delta \implies |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| < \varepsilon|h|.$$

9.44 Teorema. Sejam $a < b$, $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em I . Então f é uniformemente diferenciável em I se, e somente se, f' é contínua em I .

Demonstração. Suponha primeiro que f' seja contínua em $[a, b]$. Como $[a, b]$ é compacto, f' é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|u - v| < \delta \implies |f'(u) - f'(v)| < \varepsilon$$

para quaisquer $u, v \in [a, b]$.

Fixemos $x \in [a, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ com $x + h \in [a, b]$ e $0 < |h| < \delta$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe y entre x e $x + h$ tal que $f(x+h) - f(x) = f'(y)h$. Portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = f'(y) - f'(x).$$

Como $|y - x| \leq |h| < \delta$, segue que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

Logo, f é uniformemente diferenciável em $[a, b]$.

Reciprocamente, suponha que f seja uniformemente diferenciável em $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $u, u+t \in [a, b]$ e $0 < |t| < \delta$, vale

$$\left| \frac{f(u+t) - f(u)}{t} - f'(u) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $x, y \in [a, b]$ satisfazem $0 < |y - x| < \delta$, aplicamos essa estimativa primeiro a $(u, t) = (x, y - x)$ e depois a $(u, t) = (y, x - y)$. Como os dois quocientes incrementais coincidem, obtemos

$$|f'(y) - f'(x)| < \varepsilon.$$

Assim, f' é uniformemente contínua em $[a, b]$ e, em particular, contínua em $[a, b]$. $\square$

O Teorema de Cauchy também permite comparar dois quocientes que tendem a uma forma indeterminada. Essa observação conduz à regra de L'Hôpital.

9.5 Regra de L'Hôpital

L'Hôpital não é uma regra algébrica de cancelamento. Sua justificativa é o Teorema de Cauchy: o quociente entre duas funções próximas de uma forma indeterminada é controlado, em pontos intermediários, pelo quociente entre suas derivadas. Por isso as hipóteses sobre diferenciabilidade e sobre g' são parte essencial do resultado.

O Teorema de Cauchy pode ser visto como a forma estrutural do Teorema do Valor Médio. O caso usual corresponde à escolha $g(x) = x$. Uma de suas aplicações mais importantes é a regra de L'Hôpital, que permite calcular certos limites de quocientes a partir da razão entre as derivadas.

Apresentaremos aqui a forma mais básica do resultado, correspondente à indeterminação $0/0$ com limite finito. Os demais casos, análogos em espírito, serão propostos nos exercícios.

9.45 Teorema (Regra de L'Hôpital na forma $0/0$). Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $a \in I$ e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em a e diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$. Suponha que

$$f(a) = g(a) = 0$$

e que exista $\delta > 0$, com $(a - \delta, a + \delta) \subset I$, tal que

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}.$$

Se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demonstração. Provaremos primeiro o caso $x \rightarrow a^+$; o caso $x \rightarrow a^-$ é análogo.

Mostremos inicialmente que

$$g(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in (a, a + \delta).$$

Com efeito, se existisse $x \in (a, a + \delta)$ tal que $g(x) = 0$, então teríamos $g(a) = g(x) = 0$, e o Teorema de Rolle aplicado a g em $[a, x]$ forneceria um ponto $c \in (a, x)$ com $g'(c) = 0$, o que contradiz a hipótese.

Fixe agora $x \in (a, a + \delta)$. Como f e g são contínuas em $[a, x]$ e diferenciáveis em (a, x) , o Teorema de Cauchy fornece um ponto $c \in (a, x)$ tal que

$$[f(x) - f(a)] g'(c) = [g(x) - g(a)] f'(c).$$

Usando $f(a) = g(a) = 0$, obtemos

$$f(x) g'(c) = g(x) f'(c).$$

Como $g(x) \neq 0$ e $g'(c) \neq 0$, segue que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Quando $x \rightarrow a^+$, temos também $c \rightarrow a^+$, pois $a < c < x$. Como

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L,$$

concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O mesmo argumento à esquerda mostra que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Como os limites laterais coincidem, segue que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

□

9.46 Observação. A hipótese $f(a) = g(a) = 0$ não é realmente restritiva. De fato, se f e g estiverem definidas apenas em $I \setminus \{a\}$ e satisfizerem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

basta prolongá-las em a definindo $f(a) = g(a) = 0$. As funções assim obtidas continuam diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$, tornam-se contínuas em a e satisfazem as hipóteses do teorema.

Os casos em que $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tende a $\pm\infty$, bem como a forma correspondente à indeterminação ∞/∞ , podem ser obtidos por argumentos semelhantes e ficam como exercícios.

Até aqui, a derivada primeira controlou crescimento e taxas de variação. Quando essa própria taxa é monótona, surge uma informação geométrica adicional sobre o formato do gráfico.

9.6 Convexidade

Convexidade pode ser lida de duas maneiras complementares: geometricamente, o gráfico fica abaixo de suas cordas; diferencialmente, as inclinações das secantes e, quando existe, a derivada, crescem da esquerda para a direita. Essa ponte transforma uma propriedade geométrica global numa condição diferencial.

9.47 Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dizemos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é **convexa** quando, para quaisquer $a < x < b$ em I ,

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

A convexidade relaciona de modo particularmente claro uma propriedade geométrica do gráfico com uma propriedade analítica da função. A desigualdade acima diz que, na abscissa x , o ponto $(x, f(x))$ do gráfico fica abaixo, ou sobre, a secante que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, como mostra a Figura 9.1. Analiticamente, essa mesma condição se traduz no comportamento das inclinações das secantes e, no caso diferenciável, na monotonicidade da derivada.

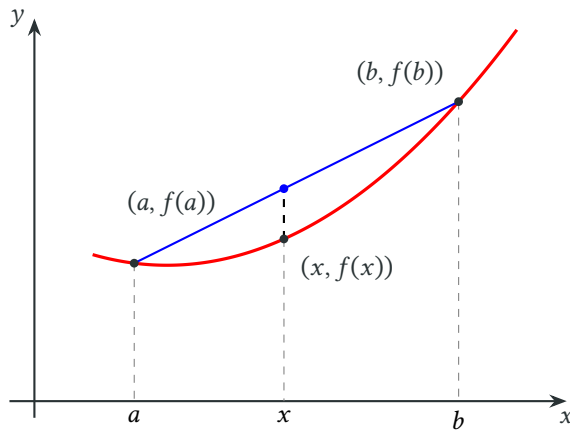


Figura 9.1

Em uma função convexa, o ponto intermediário $(x, f(x))$ do gráfico fica abaixo, ou sobre, a secante que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

A definição admite uma caracterização equivalente em termos das inclinações das secantes.

9.48 Proposição. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é convexa se, e somente se, para quaisquer $a < x < b$ em I ,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Demonstração. Como $a < x < b$, todos os denominadores são positivos. Pela definição, a convexidade equivale a

$$(b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Subtraindo $(b-a)f(a)$ de ambos os lados e rearranjando, obtemos

$$(b-a)(f(x) - f(a)) \leq (x-a)(f(b) - f(a)),$$

isto é,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Do mesmo modo, subtraindo $(b - a)f(b)$ de ambos os lados e rearranjando, a mesma desigualdade equivale a

$$(b - x)(f(b) - f(a)) \leq (b - a)(f(b) - f(x)),$$

ou seja,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Logo, a convexidade implica a cadeia de desigualdades das inclinações. A recíproca segue refazendo os mesmos passos em sentido inverso. $\square$

A proposição mostra que, para funções convexas, as inclinações das secantes crescem da esquerda para a direita. Quando a função é diferenciável, isso se reflete na monotonicidade da derivada.

9.49 Teorema. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, f' é não decrescente em I .

Demonstração. Suponha primeiro que f seja convexa. Dados $a < b$ em I , a Proposição 9.48 mostra que, para todo $x \in (a, b)$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Fazendo $x \rightarrow a^+$ na primeira desigualdade e usando a diferenciabilidade de f em a , obtemos

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Fazendo $x \rightarrow b^-$ na segunda, segue que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Portanto,

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b),$$

e, em particular, $f'(a) \leq f'(b)$ sempre que $a < b$. Logo, f' é não decrescente em I .

Reciprocamente, suponha que f' seja não decrescente em I e tomemos $a < x < b$ em I . Pelo Teorema do Valor Médio, existem $u \in (a, x)$ e $v \in (x, b)$ tais que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(u) \quad \text{e} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(v).$$

Como $u < v$ e f' é não decrescente, temos $f'(u) \leq f'(v)$. Assim,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Multiplicando pelos denominadores positivos e rearranjando os termos, chegamos a

$$(b - a)f(x) \leq (b - x)f(a) + (x - a)f(b).$$

Pela definição de convexidade, concluímos que f é convexa. $\square$

No caso em que existe segunda derivada, obtém-se uma caracterização ainda mais simples.

9.50 Teorema. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, f é convexa se, e somente se, f' é não decrescente em I . Como f' é diferenciável, o critério de monotonicidade aplicado a f' mostra que isso equivale a exigir $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. $\square$

Substituindo o sinal $\leq$ por $<$ na desigualdade que define convexidade, obtemos o conceito de **função estritamente convexa**. Mais precisamente, f é estritamente convexa quando, para quaisquer $a < x < b$ em I ,

$$f(x) < \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Além disso, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é estritamente convexa. De fato, nesse caso f' é estritamente crescente e, por conseguinte, as inclinações das secantes crescem estritamente da esquerda para a direita. A recíproca, porém, é falsa. Por exemplo, a função $f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$, mas satisfaz $f''(0) = 0$.

Convexidade já usa a variação da derivada. O passo seguinte é sistematizar derivadas sucessivas para obter aproximações locais de ordem cada vez maior.

9.7 Fórmula de Taylor

As derivadas de ordem superior permitem descrever com mais precisão o comportamento local de uma função. A derivada primeira fornece a melhor aproximação linear; derivadas de ordens mais altas conduzem a aproximações polinomiais progressivamente mais refinadas.

Usaremos aqui a convenção já fixada para derivadas de ordem superior em intervalos com extremidades.

9.51 Exemplo. Todo polinômio é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$. Mais geralmente, funções racionais são C^∞ em qualquer intervalo no qual o denominador não se anule. O mesmo vale para as funções trigonométricas, para a exponencial e para o logaritmo em seus respectivos domínios.

Esse exemplo fornece uma primeira classe ampla de funções suaves: nesses casos, a derivação sucessiva não introduz singularidades novas dentro do domínio natural considerado.

9.52 Exemplo. Para cada inteiro $n \geq 0$, defina

$$\varphi_n(x) = x^n |x|.$$

Então φ_n é de classe C^n , mas não é de classe C^{n+1} .

Para $n = 0$, temos $\varphi_0(x) = |x|$, que é contínua, mas não diferenciável em 0. Suponha agora $n \geq 1$. Para $x \neq 0$,

$$\varphi'_n(x) = (n+1)x^{n-1}|x| = (n+1)\varphi_{n-1}(x).$$

Além disso,

$$\varphi'_n(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^n |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{n-1} |h| = 0.$$

Por indução, as derivadas até a ordem n existem e são contínuas. Em particular,

$$\varphi_n^{(n)}(x) = (n+1)!|x|.$$

Essa função ainda é contínua, mas não é diferenciável em 0. Logo, $\varphi_n \in C^n$, mas $\varphi_n \notin C^{n+1}$.

Antes dos resultados principais, observemos que, se

$$q(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n,$$

então os coeficientes de q são determinados pelas derivadas em 0:

$$b_i = \frac{q^{(i)}(0)}{i!}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

9.53 Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, seja $a \in I$ e seja $n \geq 0$ um inteiro. Suponha que as derivadas $f^{(k)}(a)$ estejam definidas para $0 \leq k \leq n$. Chamamos de **polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a** o polinômio

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Na variável $h = x - a$, o mesmo polinômio é escrito como

$$P_{n,a}(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

9.54 Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange). Sejam $n \geq 1$, $a < b$, $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $f \in C^{n-1}(I)$ e que $f^{(n)}$ exista em (a, b) . Então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n.$$

Demonstração. Considere

$$\phi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{K}{n!} (b-x)^n,$$

onde a constante K será escolhida de modo que $\phi(a) = 0$.

Com essa escolha, também temos $\phi(b) = 0$, pois, em $x = b$, o termo correspondente a $k = 0$ na soma é $f(b)$, e todos os demais termos contêm alguma potência positiva de $b - x$. Pelas hipóteses, ϕ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $\phi'(c) = 0$.

Derivando termo a termo, obtemos, para $x \in (a, b)$,

$$\phi'(x) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + \frac{K}{(n-1)!} (b-x)^{n-1}.$$

Reindexando a segunda soma, ocorre cancelamento termo a termo, e resta

$$\phi'(x) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Como $c \in (a, b)$, temos $b - c \neq 0$. Portanto, da igualdade $\phi'(c) = 0$, segue que $K = f^{(n)}(c)$.

Por fim, a condição $\phi(a) = 0$ afirma que

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{K}{n!}(b-a)^n = 0.$$

Substituindo $K = f^{(n)}(c)$, obtemos a fórmula desejada. $\square$

9.55 Corolário. Nas hipóteses do teorema anterior, seja $h \neq 0$ tal que o intervalo de extremos a e $a+h$ esteja contido no domínio de f . Então existe um ponto c_h entre a e $a+h$ tal que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(c_h)}{n!}h^n.$$

Para $h > 0$, basta aplicar o teorema anterior com $b = a+h$. Para $h < 0$, escreva $H = -h > 0$ e considere $\psi(t) = f(a-t)$ em $[0, H]$. Aplicando o teorema anterior a ψ , entre 0 e H , obtemos um ponto $\xi \in (0, H)$ tal que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(a-\xi)}{n!}h^n.$$

Como $a - \xi$ está entre $a+h$ e a , basta tomar $c_h = a - \xi$.

9.56 Teorema (Fórmula de Taylor infinitesimal). Sejam $n \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo a e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $f^{(n)}$ exista em uma vizinhança de a e seja contínua em a . Então

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + r(h),$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Além disso, o polinômio em h ,

$$h \mapsto P_{n,a}(a+h),$$

é o único polinômio de grau menor ou igual a n com essa propriedade.

Demonstração. Para h suficientemente pequeno e não nulo, o intervalo de extremos a e $a+h$ está contido em I . Pelo corolário anterior, existe um ponto c_h entre a e $a+h$ tal que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(c_h)}{n!}h^n.$$

Escrevendo $c_h = a + \theta_h h$, com $0 < \theta_h < 1$, obtemos

$$f(a+h) = P_{n,a}(a+h) + r(h), \quad r(h) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_h h) - f^{(n)}(a)}{n!} h^n.$$

Assim,

$$\frac{r(h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a + \theta_h h) - f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Como $\theta_h h \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, a continuidade de $f^{(n)}$ em a implica $r(h)/h^n \rightarrow 0$.

Para provar a unicidade, suponha que Q seja um polinômio de grau menor ou igual a n tal que

$$f(a+h) = Q(h) + s(h), \quad \frac{s(h)}{h^n} \rightarrow 0.$$

Subtraindo essa expressão da expansão anterior, segue que

$$\frac{P_{n,a}(a+h) - Q(h)}{h^n} \rightarrow 0.$$

Se

$$R(h) = P_{n,a}(a+h) - Q(h),$$

então R é um polinômio em h de grau menor ou igual a n . Se $R \not\equiv 0$, existe $m \in \{0, \dots, n\}$ e existe um polinômio T , com $T(0) \neq 0$, tais que $R(h) = h^m T(h)$. Nesse caso,

$$\frac{R(h)}{h^n} = h^{m-n} T(h).$$

Essa expressão não tende a 0: se $m < n$, ela não permanece limitada em módulo ao longo de alguma sequência $h \rightarrow 0$; se $m = n$, ela tende a $T(0) \neq 0$. Logo, $R \equiv 0$, e portanto $Q(h) = P_{n,a}(a+h)$. $\square$

Em outras palavras, o polinômio de Taylor de ordem n , escrito na variável h , é o único polinômio de grau menor ou igual a n que aproxima $f(a+h)$ com erro desprezível diante de h^n .

9.57 Proposição (Critério de máximos e mínimos locais). Sejam $n \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $a \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável em uma vizinhança de a . Suponha que

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

e que $f^{(n)}$ seja contínua em a . Então:

1. se n é par, a é ponto de mínimo local quando $f^{(n)}(a) > 0$, e ponto de máximo local quando $f^{(n)}(a) < 0$;
2. se n é ímpar, a não é ponto de máximo nem de mínimo local.

Demonstração. Pela fórmula de Taylor infinitesimal e pela hipótese de anulação das derivadas até a ordem $n-1$,

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Logo,

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} \rightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Como $f^{(n)}(a) \neq 0$, para x suficientemente próximo de a , com $x \neq a$, o sinal de $f(x) - f(a)$ coincide com o sinal de $f^{(n)}(a)(x - a)^n$.

Se n é par, então $(x - a)^n > 0$ para todo $x \neq a$, e o sinal de $f(x) - f(a)$ é o sinal de $f^{(n)}(a)$. Isso dá a caracterização de mínimo local quando $f^{(n)}(a) > 0$ e de máximo local quando $f^{(n)}(a) < 0$.

Se n é ímpar, então $(x - a)^n$ muda de sinal quando x atravessa a . Portanto, $f(x) - f(a)$ assume sinais opostos à esquerda e à direita de a , e a não pode ser ponto de máximo nem de mínimo local. $\square$

9.58 Proposição (Indeterminações do tipo 0/0). Sejam $n \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo a e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções n vezes diferenciáveis em uma vizinhança de a . Suponha que

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0,$$

que $g^{(n)}(a) \neq 0$, e que $f^{(n)}$ e $g^{(n)}$ sejam contínuas em a . Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Demonstração. Aplicando a fórmula de Taylor infinitesimal a f e a g , obtemos

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

e

$$g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n),$$

quando $x \rightarrow a$. Dividindo numerador e denominador por $(x - a)^n/n!$, segue que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a) + \varepsilon(x)}{g^{(n)}(a) + \delta(x)},$$

onde $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ e $\delta(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$.

Como $g^{(n)}(a) \neq 0$, o denominador permanece não nulo para x suficientemente próximo de a . Passando ao limite, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

$\square$

O polinômio de Taylor é, neste capítulo, um objeto essencialmente finito: derivadas sucessivas determinam a aproximação polinomial local e o resto mede quanto dessa informação ainda falta para recuperar a função.

Perguntar o que acontece quando a ordem tende a infinito é uma questão de outra natureza. É preciso estudar convergência de séries de funções e séries de potências antes de decidir quando os polinômios de Taylor convergem para a própria função. Essa

passagem, bem como a definição de função analítica, será feita no capítulo *Sequências, séries e aproximação de funções*.

O percurso do capítulo pode agora ser visto como uma única ideia em escalas sucessivas. A derivada produz a melhor aproximação linear; os teoremas do valor médio transformam essa informação local em controle global; convexidade lê a variação das inclinações; e Taylor usa derivadas sucessivas para produzir aproximações polinomiais locais de ordem cada vez maior.

Lista de exercícios

Ex. 9.1 — Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, com a ponto interior de I .

a) Prove que, se f é diferenciável em a , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

b) Mostre, por meio de um exemplo, que a existência desse limite não implica, em geral, a existência de $f'(a)$.

Ex. 9.2 — Seja $X \subset \mathbb{R}$, seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e seja $a \in X \cap X'$. Defina

$$\xi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \neq a), \quad \xi(a) = L.$$

Prove que ξ é contínua em a se, e somente se, $f'(a)$ existe, no sentido relativo a X , e $f'(a) = L$.

Ex. 9.3 — Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, seja $a \in I$ e seja $f \in C^1(I)$. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em I tais que $x_n \neq y_n$ para todo n e

$$x_n \rightarrow a, \quad y_n \rightarrow a.$$

Prove que

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \rightarrow f'(a).$$

Ex. 9.4 — Suponha que f esteja definida numa vizinhança de x e que $f''(x)$ exista. Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Exiba também um exemplo em que esse limite exista, mas $f''(x)$ não exista.

Ex. 9.5 — O resultado sobre diferenciabilidade uniforme em compactos depende da compacidade. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

a) Mostre que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

b) Prove que f não é uniformemente diferenciável em $\mathbb{R}$. Mais precisamente, mostre que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existem $x \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$, com $0 < |h| < \delta$, satisfazendo

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \geq \varepsilon_0.$$

Ex. 9.6 — Considere as funções

$$f(x) = \sin(1/x), \quad g(x) = x \sin(1/x), \quad h(x) = x^2 \sin(1/x) \quad (x \neq 0),$$

com valor 0 em $x = 0$.

- Estude a diferenciabilidade em 0 de f , g e h .
- Mostre que $h'(0)$ existe, mas h' não tem limite em 0.
- Encontre seqüências (x_n) e (y_n) convergindo para 0 tais que as inclinações das secantes de h não converjam.

Ex. 9.7 — Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(|x|^{-c}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, \quad c > 0.$$

Determine, em função de a e c :

- quando f é contínua em 0;
- quando $f'(0)$ existe;
- quando f' é limitada;
- quando f' é contínua em 0.

Ex. 9.8 — Dizemos que f satisfaz uma condição de Lipschitz de ordem α em c se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| \leq M|x - c|^\alpha$$

para todo x suficientemente próximo de c .

- Prove que, se $\alpha > 0$, então f é contínua em c .
- Prove que, se $\alpha > 1$, então $f'(c) = 0$.
- Mostre que, se essa condição vale em todo ponto de um intervalo I com $\alpha > 1$, então f é constante em I .
- Dê um exemplo com $\alpha = 1$ em que a derivada no ponto não exista.

Ex. 9.9 — Suponha que f seja contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e satisfaça

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Prove que, para todo $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = k f(c).$$

Ex. 9.10 — Reescreva o Teorema do Valor Médio na forma

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Determine $\theta = \theta(x, h)$ nos casos

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = \log x,$$

e, com x fixo, calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(x, h)$ em cada caso.

Ex. 9.11 — Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) .

a) Prove que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

b) Considere

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1, \quad g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$$

em $[0, 1]$. Mostre que, nos pontos em que o quociente está definido,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nunca é igual a

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}$$

para $0 < x \leq 1$, e explique por que isso não contradiz o resultado anterior.

Ex. 9.12 — Suponha que f e g sejam diferenciáveis numa vizinhança de a , que

$$f(a) = g(a) = 0$$

e que

$$g'(a) \neq 0.$$

Prove que

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Ex. 9.13 — Seja $X \subset \mathbb{R}$ e sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Suponha que $a \in X \cap X'$, que $f(a) = h(a)$ e que $f'(a)$ e $h'(a)$ existam e sejam iguais. Prove que $g'(a)$ existe e coincide com esse valor.

Ex. 9.14 — Determine os intervalos de crescimento e decrescimento, bem como os máximos e mínimos, quando existirem, das funções seguintes:

a) $f(x) = x^3 + ax + b$;

b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$, em seu domínio;

c) $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^4$, em $[0, 1]$;

d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ para $x \neq 0$, com $f(0) = 1$, em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ex. 9.15 — Seja a um ponto de máximo local de uma função f .

a) Mostre que, se existe a derivada à direita em a , então

$$f'_+(a) \leq 0.$$

b) Mostre que, se existe a derivada à esquerda em a , então

$$f'_-(a) \geq 0.$$

c) Dê um exemplo em que ambas existam, mas sejam diferentes.

Ex. 9.16 — Suponha que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenha derivada limitada:

$$|g'(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Fixado $\varepsilon > 0$, defina

$$f(x) = x + \varepsilon g(x).$$

Prove que, se $\varepsilon M < 1$, então f é injetiva e sua inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Ex. 9.17 — Prove a versão lateral da regra de L'Hôpital: sejam f e g funções definidas em uma vizinhança à direita perfurada de a , diferenciáveis em $(a, a + \delta)$ para algum $\delta > 0$, com

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{para todo } x \in (a, a + \delta).$$

Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$$

e que

$$f(x) \rightarrow 0, \quad g(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow a^+.$$

Mostre que, para $x > a$ suficientemente próximo de a , tem-se $g(x) \neq 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ex. 9.18 — Na situação da regra de L'Hôpital na forma $0/0$, suponha agora que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty,$$

mantendo as hipóteses de continuidade em a , diferenciabilidade em uma vizinhança perfurada de a e $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$ suficientemente próximo de a . Mostre que, respectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Ex. 9.19 — Prove a seguinte versão da regra de L'Hôpital para a indeterminação ∞/∞ : suponha que f e g sejam diferenciáveis em uma vizinhança perfurada de a , que $g'(x) \neq 0$ para $x \neq a$ suficientemente próximo de a , que $|g(x)| \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow a$ e que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Mostre que, se também $|f(x)| \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow a$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ex. 9.20 — Prove a fórmula de Leibniz:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Ex. 9.21 — Sejam I e J intervalos abertos, e sejam $f : I \rightarrow J$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^n .

- a) Prove que $g \circ f$ é de classe C^n .
- b) Seja agora $f : I \rightarrow J$ bijetiva, de classe C^2 , com $f'(x) \neq 0$ em todo ponto de I . Se $a \in I$ e $b = f(a)$, calcule $(f^{-1})''(b)$ em termos de $f'(a)$ e $f''(a)$.

Ex. 9.22 — Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^n .

- a) Se f possui $n + 1$ raízes distintas em $[a, b]$, prove que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f^{(n)}(c) = 0.$$

- b) Utilize o item anterior para demonstrar que um polinômio de grau n não pode possuir mais do que n raízes reais.

Ex. 9.23 — Suponha que f seja contínua em $[a, b]$ e duas vezes diferenciável em (a, b) . Se a reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ encontra o gráfico de f em um terceiro ponto distinto, prove que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f''(c) = 0.$$

Ex. 9.24 — **Exercício avançado.** Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = 0.$$

Prove que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$f(x) = (x - a)^k \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ex. 9.25 — **Exercício avançado.** Suponha que f seja de classe C^{n+2} em uma vizinhança de a e que $f^{(n+2)}(a) \neq 0$. Na fórmula de Taylor com resto de Lagrange,

$$f(a + h) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_n(h)h)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad 0 < \theta_n(h) < 1,$$

prove que, para h suficientemente pequeno, o parâmetro $\theta_n(h)$ é determinado de modo único e satisfaz

$$\theta_n(h) \rightarrow \frac{1}{n+2} \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

Ex. 9.26 — Sejam f e g funções analíticas em um intervalo I .

- a) Prove que, se todas as derivadas de f e g coincidem em um ponto $a \in I$, então

$$f = g$$

em todo o intervalo. *Sugestão:* considere o conjunto dos pontos $x \in I$ para os quais todas as derivadas de $f - g$ se anulam em x , e mostre que esse conjunto é não vazio, aberto e fechado em I .

- b) Mostre também que basta que f e g coincidam num subconjunto de I com ponto de acumulação.
- c) Explique por que isso falha, em geral, para funções apenas de classe C^∞ .

Ex. 9.27 — Prove a caracterização usual de convexidade: uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se,

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

para todos $a, b \in I$ e todo $t \in [0, 1]$.

- a) Verifique que $f(x) = e^x$ é convexa e deduza a desigualdade

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$$

quando $a, b > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

- b) Prove a desigualdade de Jensen para combinações convexas finitas.
- c) Deduza daí a desigualdade entre média aritmética e média geométrica ponderadas.

Ex. 9.28 — Exercício avançado. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Não suponha que f seja diferenciável nem contínua.

- a) Prove que, para todo $x \in (a, b)$, existem as derivadas laterais

$$f'_-(x) \quad \text{e} \quad f'_+(x),$$

e que

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

- b) Mostre que o conjunto dos pontos em que f não é diferenciável é, no máximo, enumerável.
- c) Prove que f é localmente Lipschitziana em (a, b) e, conseqüentemente, contínua em todo o intervalo.

Ex. 9.29 — Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e não vazio, munido da métrica usual, e seja $f : I \rightarrow I$ diferenciável. Suponha que exista $A < 1$ tal que

$$|f'(x)| \leq A$$

para todo $x \in I$.

- a) Prove que f tem um único ponto fixo.
- b) Prove que, para qualquer $x_0 \in I$, a sequência definida por

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge para esse ponto fixo.

- c) Dê um exemplo de função C^∞ em $\mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| < 1$ para todo x , mas que não possua ponto fixo.

Ex. 9.30 — Seja f diferenciável em $[a, b]$, com $f(a) = 0$, e suponha que exista $A > 0$ tal que

$$|f'(x)| \leq A|f(x)| \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Prove que

$$f \equiv 0$$

em $[a, b]$.

Ex. 9.31 — Considere o problema de valor inicial

$$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c.$$

Suponha que ϕ satisfaça uma condição de Lipschitz na variável y , isto é, que exista $A > 0$ tal que

$$|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)| \leq A|y_2 - y_1|$$

para todos os pontos considerados.

1. Prove, usando o exercício anterior, que esse problema admite no máximo uma solução em qualquer intervalo comum de definição.
2. Mostre que a unicidade falha para

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Ex. 9.32 — Reescreva uma equação diferencial linear de ordem n como um sistema de primeira ordem e deduza, a partir disso, um teorema de unicidade para o problema de valor inicial de equações lineares de ordem superior.

10

Integração

A derivada descreve a variação local de uma função. A integral responde a uma pergunta complementar: como acumular essas variações ao longo de um intervalo?

Em Cálculo, essa pergunta costuma aparecer primeiro como área. Para a Análise, porém, é mais útil começar de outra forma. Dividimos o intervalo em partes, aproximamos a função por baixo e por cima em cada uma delas e perguntamos se essas aproximações podem ser forçadas a concordar. Essa é a ideia de Darboux.

O ponto de vista tem duas vantagens. Primeiro, a definição da integral não depende da existência prévia de primitivas; o Teorema Fundamental do Cálculo aparecerá depois como um resultado profundo que liga integração e derivação. Segundo, a construção admite uma extensão natural: em vez de medir cada subintervalo pelo seu comprimento, podemos medi-lo pela variação de uma outra função. Essa é a integral de Riemann–Stieltjes.

O percurso do capítulo será, portanto,

$$\text{partições} \longrightarrow \text{somas de Darboux} \longrightarrow \text{integrabilidade} \longrightarrow \text{caracterizações},$$

$$\text{TFC} \longrightarrow \text{Riemann–Stieltjes}.$$

10.1 Partições e somas de Darboux

Sejam $a < b$. Uma **partição** de $[a, b]$ é um conjunto finito

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Escreveremos

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

e chamaremos

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

de **malha** da partição.

Neste capítulo

- ▶ Partições e somas de Darboux (p. 248)
- ▶ Integral inferior, integral superior e integral de Darboux (p. 250)
- ▶ Somas de Riemann e uma segunda caracterização (p. 252)
- ▶ Classes de funções integráveis (p. 255)
- ▶ Aditividade em intervalos (p. 259)
- ▶ Descontinuidades e o critério de Lebesgue (p. 260)
- ▶ A função integral e o Teorema Fundamental do Cálculo (p. 265)
- ▶ Integral de Riemann–Stieltjes (p. 268)
- ▶ Caracterizações da integrabilidade de Stieltjes (p. 270)
- ▶ Funções Stieltjes-integráveis (p. 274)
- ▶ Saltos e pesos concentrados (p. 278)
- ▶ Quando dx se reduz a um peso dx (p. 279)
- ▶ Integradores de variação limitada (p. 280)
- ▶ O que as duas integrais estão medindo (p. 285)
- ▶ Exercícios (p. 285)

Se P e Q são partições de $[a, b]$, dizemos que Q é um **refinamento** de P quando $P \subset Q$.

A definição da integral começa com uma função limitada. Para uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, usaremos a notação

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

10.1 Definição. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Para cada i , defina

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

A **soma inferior de Darboux** e a **soma superior de Darboux** associadas a P são

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

e

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Em cada subintervalo, m_i é a melhor constante que aproxima f por baixo e M_i a melhor constante que a aproxima por cima. Consequentemente,

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

O ponto essencial é que o refinamento de uma partição melhora simultaneamente as duas aproximações.

10.2 Teorema (Monotonicidade por refinamento). Se Q refina P , então

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

Demonstração. Basta analisar a inserção de um único ponto. Suponha que $Q = P \cup \{c\}$, com $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Escreva

$$m = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f, \quad m' = \inf_{[x_{k-1}, c]} f, \quad m'' = \inf_{[c, x_k]} f.$$

Como $m \leq m'$ e $m \leq m''$,

$$m(x_k - x_{k-1}) \leq m'(c - x_{k-1}) + m''(x_k - c).$$

Todos os demais termos da soma inferior permanecem inalterados; portanto $L(f, P) \leq L(f, Q)$.

O mesmo argumento, com supremos, fornece $U(f, Q) \leq U(f, P)$. A inserção sucessiva dos pontos de $Q \setminus P$ prova o resultado geral. A desigualdade $L(f, Q) \leq U(f, Q)$ é imediata. $\square$

Dois partições quaisquer P e Q possuem um refinamento comum: $P \cup Q$. Esse fato permite comparar somas construídas a partir de partições completamente diferentes.

10.3 Corolário. Para quaisquer partições P, Q de $[a, b]$,

$$L(f, P) \leq U(f, Q).$$

Demonstração. Se $R = P \cup Q$, então

$$L(f, P) \leq L(f, R) \leq U(f, R) \leq U(f, Q).$$

□

10.2 Integral inferior, integral superior e integral de Darboux

As somas inferiores formam um conjunto limitado superiormente por qualquer soma superior. Analogamente, as somas superiores são limitadas inferiormente por qualquer soma inferior. A completude de $\mathbb{R}$ permite, portanto, fazer as melhores aproximações possíveis.

10.4 Definição. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, definimos a **integral inferior** de f por

$$\int_a^b f = \sup_P L(f, P),$$

e a **integral superior** de f por

$$\overline{\int_a^b f} = \inf_P U(f, P),$$

onde o supremo e o ínfimo são tomados sobre todas as partições de $[a, b]$.

Pelo Corolário 10.3,

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}.$$

10.5 Definição. Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é **integrável no sentido de Darboux**, ou simplesmente **Riemann-integrável**, quando

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

O valor comum é denotado por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Escreveremos $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

A definição diz exatamente que as melhores aproximações por baixo e por cima se encontram. A forma operacional dessa ideia é o critério seguinte.

10.6 Teorema (Critério de Darboux). Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Demonstração. Suponha primeiro que f seja integrável e escreva

$$I = \int_a^b f.$$

Pela definição de supremo, existe uma partição P_1 tal que

$$L(f, P_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela definição de ínfimo, existe uma partição P_2 tal que

$$U(f, P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para o refinamento comum $P = P_1 \cup P_2$,

$$L(f, P) \geq L(f, P_1), \quad U(f, P) \leq U(f, P_2),$$

e portanto

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que, para todo $\varepsilon > 0$, exista P com $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Como

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq U(f, P),$$

temos

$$0 \leq \overline{\int_a^b f} - \int_a^b f < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, as duas integrais coincidem. □

O critério de oscilação

Para um intervalo $I \subset [a, b]$, defina a oscilação de f em I por

$$\omega(f; I) = \sup_I f - \inf_I f.$$

A ideia é a análoga, para funções, da oscilação de uma sequência: em lugar de medir a diferença entre $\limsup$ e $\liminf$ das caudas, medimos a diferença entre o supremo e o ínfimo dos valores de f em um intervalo. Mais adiante, ao encolher esses intervalos em torno de um ponto, essa analogia ficará ainda mais direta. Se $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, escrevemos

$$\omega_i = \omega(f; I_i).$$

Então

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i.$$

Temos, portanto, uma versão particularmente geométrica do critério de Darboux.

10.7 Corolário (Critério de oscilação). Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P tal que

$$\sum_{i=1}^n \omega(f; I_i) \Delta x_i < \varepsilon.$$

Demonstração. Basta observar que, para toda partição P ,

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_i \omega(f; I_i) \Delta x_i$$

e aplicar o Critério de Darboux. $\square$

10.3 Sombras de Riemann e uma segunda caracterização

As somas de Darboux escolhem, em cada intervalo, os valores extremos possíveis. Podemos também escolher um ponto qualquer.

10.8 Definição. Uma **partição marcada** de $[a, b]$ é um par (P, ξ) , onde

$$P = \{x_0, \dots, x_n\}$$

é uma partição e

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

é uma marca em cada subintervalo. A correspondente **soma de Riemann** é

$$S(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Para toda escolha das marcas,

$$L(f, P) \leq S(f; P, \xi) \leq U(f, P).$$

Assim, se uma única partição torna pequena a diferença entre as somas superior e inferior, todas as somas marcadas de seus refinamentos ficam presas em um intervalo pequeno.

10.9 Teorema (Caracterização por refinamentos). Para uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, são equivalentes:

1. $f \in \mathcal{R}[a, b]$;
2. existe $I \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_0 com a seguinte propriedade: para toda partição marcada (P, ξ) cujo P refina P_0 ,

$$|S(f; P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Nesse caso,

$$I = \int_a^b f.$$

Demonstração. Suponha primeiro que f seja integrável e escreva

$$J = \int_a^b f.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha P_0 pelo Critério de Darboux de modo que

$$U(f, P_0) - L(f, P_0) < \varepsilon.$$

Se P refina P_0 , então

$$L(f, P_0) \leq L(f, P) \leq S(f; P, \xi) \leq U(f, P) \leq U(f, P_0).$$

Como $J \in [L(f, P_0), U(f, P_0)]$, segue que

$$|S(f; P, \xi) - J| < \varepsilon.$$

Logo o item 2 vale com $I = J$.

Reciprocamente, suponha que exista I com a propriedade do item 2. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $P_0 = \{x_0, \dots, x_n\}$ de modo que toda soma marcada de todo refinamento de P_0 esteja a menos de $\varepsilon/4$ de I .

Para cada i , escolha pontos $\xi_i^+, \xi_i^- \in I_i$ tais que

$$M_i - f(\xi_i^+) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

e

$$f(\xi_i^-) - m_i < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Isso é possível pelas definições de supremo e ínfimo. Assim,

$$0 \leq U(f, P_0) - S(f; P_0, \xi^+) < \frac{\varepsilon}{4}$$

e

$$0 \leq S(f; P_0, \xi^-) - L(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como ambas as somas marcadas estão a menos de $\varepsilon/4$ de I , obtemos

$$U(f, P_0) - L(f, P_0) < \varepsilon.$$

Pelo Critério de Darboux, f é integrável.

Resta identificar o valor da integral. Pela primeira parte da prova, uma função integrável satisfaz a propriedade do item 2 com

$$J = \int_a^b f.$$

Dado $\eta > 0$, escolha uma partição que refine simultaneamente as partições associadas a I e a J , e tome qualquer sistema de marcas. A soma correspondente fica a menos de η de ambos os números; logo

$$|I - J| < 2\eta.$$

Como η é arbitrário, $I = J$. □

Para a integral de Riemann, a linguagem usual em termos da malha também é equivalente.

10.10 Teorema (Caracterização pela malha). Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável com integral I se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|P\| < \delta \implies |S(f; P, \xi) - I| < \varepsilon$$

para toda partição marcada (P, ξ) .

Demonstração. Suponha primeiro que f seja integrável e escreva

$$I = \int_a^b f.$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 10.9, existe uma partição

$$P_0 = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

tal que toda soma marcada associada a um refinamento de P_0 fica a menos de $\varepsilon/2$ de I .

Escolha $M \geq \|f\|_\infty$. Se $m = 1$, qualquer partição já refina P_0 . Suponha $m \geq 2$. Tome $\delta > 0$ tão pequeno que

$$2M(m-1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se P é uma partição com $\|P\| < \delta$, considere

$$R = P \cup P_0.$$

A passagem de P para R altera apenas os subintervalos de P que contêm algum dos pontos $t_1, \dots, t_{m-1}$. Há no máximo $m-1$ desses subintervalos, e a soma de seus comprimentos é menor que $(m-1)\delta$.

Dado um sistema de marcas ξ para P , escolha marcas para R arbitrariamente nos subintervalos novos e mantenha as antigas onde não houve subdivisão. As duas somas diferem apenas na parte afetada; como $|f| \leq M$,

$$|S(f; P, \xi) - S(f; R, \eta)| \leq 2M(m-1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como R refina P_0 ,

$$|S(f; R, \eta) - I| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e portanto

$$|S(f; P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que exista I com a propriedade da malha. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $\delta > 0$ de modo que toda soma marcada associada a uma partição de malha menor que δ fique a menos de $\varepsilon/4$ de I . Tome uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ com $\|P\| < \delta$.

Como na prova do Teorema 10.9, podemos escolher marcas ξ^+ e ξ^- tais que

$$U(f, P) - S(f; P, \xi^+) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad S(f; P, \xi^-) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

As duas somas marcadas estão a menos de $\varepsilon/4$ de I . Logo

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon,$$

e o Critério de Darboux mostra que f é integrável. A identificação de I com $\int_a^b f$ segue da unicidade já provada no Teorema 10.9. $\square$

10.4 Classes de funções integráveis

O critério de oscilação torna muito simples provar a integrabilidade de várias classes fundamentais.

10.11 Teorema. Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável.

Demonstração. Como $[a, b]$ é compacto, f é uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Escolha uma partição P com $\|P\| < \delta$. Então

$$\omega(f; I_i) < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

para todo i , e

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_i \omega(f; I_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon.$$

□

10.12 Teorema. Toda função monótona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann-integrável.

Demonstração. Suponha primeiro que f seja não decrescente. Para a partição uniforme

$$x_i = a + i \frac{b - a}{n},$$

temos

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}).$$

Logo

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b - a}{n} (f(b) - f(a)),$$

que tende a 0.

Se f é não crescente, então

$$M_i = f(x_{i-1}), \quad m_i = f(x_i),$$

e o mesmo cálculo fornece

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{b - a}{n} (f(a) - f(b)) \longrightarrow 0.$$

Em ambos os casos, o Critério de Darboux conclui a prova.

□

10.13 Corolário. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e contínua exceto, possivelmente, em um número finito de pontos, então f é Riemann-integrável.

Demonstração. Se $\|f\|_\infty = 0$, não há o que provar. Suponha $|f| \leq M$ com $M > 0$, e sejam $c_1, \dots, c_r$ os possíveis pontos de descontinuidade.

Fixe $\varepsilon > 0$. Escolha intervalos abertos relativos $J_1, \dots, J_r$ de $[a, b]$, cada um contendo c_j , de modo que a soma de seus comprimentos seja menor que

$$\frac{\varepsilon}{4M}.$$

Podemos substituir esses intervalos por sua união escrita como união finita de intervalos abertos disjuntos. Insira na partição todos os extremos desses intervalos.

O complemento dessa união em $[a, b]$ é uma união finita de intervalos fechados. Em cada um deles f é contínua e, portanto, uniformemente contínua. Refinando a partição dentro desses componentes, podemos garantir que todo subintervalo que não esteja contido na união dos J_j tenha oscilação menor que

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Nos subintervalos contidos na região dos J_j , usamos apenas $\omega(f; I) \leq 2M$. Assim,

$$U(f, P) - L(f, P) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

O Critério de Darboux conclui a prova. □

10.14 Exemplo. A função de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é Riemann-integrável em nenhum intervalo não degenerado. De fato, em todo subintervalo existem racionais e irracionais; portanto $m_i = 0$ e $M_i = 1$. Assim,

$$L(f, P) = 0, \quad U(f, P) = b - a$$

para toda partição.

Operações com funções integráveis

10.15 Teorema. Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

1. $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ e

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g;$$

2. $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ e

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f;$$

3. $fg \in \mathcal{R}[a, b]$;
4. $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$;
5. $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são Riemann-integráveis.

Demonstração. Usaremos a caracterização pela malha.

Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, então, para uma mesma partição marcada,

$$S(f + g; P, \xi) = S(f; P, \xi) + S(g; P, \xi).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha δ que funcione simultaneamente para f e g , com erro $\varepsilon/2$. Segue que

$$S(f + g; P, \xi) \longrightarrow \int_a^b f + \int_a^b g,$$

uniformemente nas marcas quando $\|P\| \rightarrow 0$. Pelo Teorema 10.10, $f + g$ é integrável e

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Do mesmo modo,

$$S(\lambda f; P, \xi) = \lambda S(f; P, \xi),$$

o que prova a segunda afirmação para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para o produto, ponha

$$A = \|f\|_\infty, \quad B = \|g\|_\infty.$$

Se $x, y \in I$, então

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq A|g(x) - g(y)| + B|f(x) - f(y)|.$$

Logo

$$\omega(fg; I) \leq A\omega(g; I) + B\omega(f; I).$$

Escolha uma partição comum para a qual as somas ponderadas das oscilações de f e g sejam tão pequenas quanto desejado. O critério de oscilação mostra que fg é integrável.

Como

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|,$$

temos

$$\omega(|f|; I) \leq \omega(f; I),$$

e portanto $|f|$ é integrável. Finalmente,

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2},$$

e as duas últimas afirmações seguem das anteriores. $\square$

10.16 Teorema (Monotonicidade da integral). Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ para todo x , então

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Em particular, se $f \geq 0$, então

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Demonstração. Para toda partição marcada,

$$S(f; P, \xi) \leq S(g; P, \xi).$$

Passe ao limite quando a malha tende a zero. □

10.17 Corolário. Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$, então

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$

Demonstração. Como

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

a monotonicidade e a linearidade da integral fornecem

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

e portanto

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Além disso,

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

para todo x , logo

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a) \|f\|_\infty.$$

□

10.18 Teorema (Alteração em finitíssimos pontos). Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas e coincidem exceto, possivelmente, em um conjunto finito, então f é Riemann-integrável se, e somente se, g é Riemann-integrável. Nesse caso,

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

Demonstração. Ponha $h = f - g$. Então h é limitada e é nula fora de um conjunto finito

$$E = \{c_1, \dots, c_r\}.$$

Se $h \equiv 0$, o resultado é imediato. Escolha $M > 0$ com $|h| \leq M$. Dado $\varepsilon > 0$, cubra os pontos c_j por finitíssimos intervalos abertos relativos de $[a, b]$, de comprimento total menor que $\varepsilon/(2M)$, e escolha uma partição P_0 contendo os extremos desses intervalos.

Para qualquer refinamento marcado (P, ξ) de P_0 , os termos da soma de Riemann só podem ser não nulos nos subintervalos contidos nessa cobertura. Logo

$$|S(h; P, \xi)| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon.$$

Pelo Teorema 10.9, h é integrável e

$$\int_a^b h = 0.$$

Como $f = g + h$, a linearidade da integral mostra que f é integrável se, e somente se, g é, e que suas integrais coincidem. $\square$

10.5 Aditividade em intervalos

A integral é local no intervalo: dividir o domínio e integrar as partes produz o mesmo resultado que integrar tudo de uma vez.

10.19 Teorema. Se $a < c < b$, então f é Riemann-integrável em $[a, b]$ se, e somente se, é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Nesse caso,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Suponha primeiro que f seja integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha partições P_1 e P_2 desses intervalos tais que

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a, b]$ e

$$U(f, P) - L(f, P) = (U(f, P_1) - L(f, P_1)) + (U(f, P_2) - L(f, P_2)) < \varepsilon.$$

Logo f é integrável em $[a, b]$.

Reciprocamente, suponha que f seja integrável em $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha uma partição P de $[a, b]$ contendo c e tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

As subpartições $P_1 = P \cap [a, c]$ e $P_2 = P \cap [c, b]$ satisfazem

$$0 \leq U(f, P_j) - L(f, P_j) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon,$$

e o Critério de Darboux mostra que as duas restrições são integráveis.

Por fim, escreva

$$I_1 = \int_a^c f, \quad I_2 = \int_c^b f, \quad I = \int_a^b f.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha partições P_1, P_2 tais que

$$L(f, P_1) > I_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad L(f, P_2) > I_2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$I \geq L(f, P_1 \cup P_2) = L(f, P_1) + L(f, P_2) > I_1 + I_2 - \varepsilon.$$

Analogamente, escolhendo partições cujas somas superiores estejam a menos de $\varepsilon/2$ de I_1 e I_2 , obtemos

$$I < I_1 + I_2 + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Adotamos as convenções

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Com elas, a aditividade

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

vale para quaisquer a, b, c para os quais as integrais estejam definidas.

10.6 Descontinuidades e o critério de Lebesgue

A integrabilidade de uma função limitada não exige continuidade em todos os pontos. O que importa é que suas descontinuidades sejam suficientemente esparsas.

10.20 Definição. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tem **medida zero** se, para todo $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $J_1, J_2, \dots$ tais que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon.$$

10.21 Proposição. Valem as seguintes propriedades:

1. todo subconjunto de um conjunto de medida zero tem medida zero;
2. toda união enumerável de conjuntos de medida zero tem medida zero;

3. todo conjunto enumerável tem medida zero.

Demonstração. O primeiro item é imediato.

Para o segundo, escreva

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

com cada E_n de medida zero. Dado $\varepsilon > 0$, cubra E_n por intervalos abertos cuja soma dos comprimentos seja menor que $\varepsilon/2^n$. A reunião de todas essas coberturas cobre E , e a soma total dos comprimentos é menor que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Para o terceiro, se

$$E = \{x_1, x_2, \dots\},$$

cubra x_n por um intervalo aberto de comprimento menor que $\varepsilon/2^n$. O caso finito é ainda mais simples. $\square$

Para uma função limitada f , defina a oscilação de f no ponto x por

$$\omega_f(x) = \inf_{\delta > 0} \omega(f; [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)).$$

10.22 Lema. Para $x \in [a, b]$,

$$f \text{ é contínua em } x \iff \omega_f(x) = 0.$$

Demonstração. Se f é contínua em x , então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $y \in [a, b]$ e $|y - x| < \delta$. Para quaisquer y, z nessa vizinhança,

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(z) - f(x)| < \varepsilon,$$

logo a oscilação nessa vizinhança é menor que ε , e $\omega_f(x) = 0$.

Reciprocamente, se $\omega_f(x) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\omega(f; [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)) < \varepsilon.$$

Como x pertence a esse conjunto, para todo y na mesma vizinhança,

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Portanto f é contínua em x . $\square$

10.23 Lema. Para todo $\eta > 0$, o conjunto

$$K_\eta = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \eta\}$$

é fechado.

Demonstração. Se $x \notin K_\eta$, então $\omega_f(x) < \eta$. Pela definição de oscilação pontual, existe $\delta > 0$ tal que

$$\omega(f; [a, b] \cap (x - \delta, x + \delta)) < \eta.$$

Se $|y - x| < \delta/2$, então uma vizinhança suficientemente pequena de y está contida em $(x - \delta, x + \delta)$. Logo

$$\omega_f(y) < \eta.$$

Portanto o complemento de K_η é aberto. $\square$

10.24 Lema (Número de Lebesgue em um intervalo). Se uma coleção finita de abertos relativos $V_1, \dots, V_N$ de $[a, b]$ cobre $[a, b]$, então existe $\delta > 0$ tal que todo subintervalo de $[a, b]$ de comprimento menor que δ está contido em algum V_j .

Demonstração. Para cada $x \in [a, b]$, escolha $r_x > 0$ e um índice $j(x)$ tais que

$$[a, b] \cap (x - r_x, x + r_x) \subset V_{j(x)}.$$

Os intervalos

$$(x - r_x/2, x + r_x/2)$$

cobrem $[a, b]$. Pela compacidade, basta uma subcobertura finita, associada a pontos $x_1, \dots, x_m$. Tome

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq m} r_{x_k}.$$

Se um subintervalo I tem comprimento menor que δ , escolha $y \in I$ e k tal que

$$|y - x_k| < r_{x_k}/2.$$

Para qualquer $z \in I$,

$$|z - x_k| \leq |z - y| + |y - x_k| < \delta + \frac{r_{x_k}}{2} \leq r_{x_k}.$$

Logo

$$I \subset V_{j(x_k)}.$$

$\square$

10.25 Teorema (Critério de Lebesgue para a integral de Riemann). Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff D_f \text{ tem medida zero,}$$

onde D_f é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f .

Demonstração. Para $m \in \mathbb{N}$, defina

$$D_m = \left\{ x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Pelo Lema 10.23, cada D_m é fechado. Além disso,

$$D_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m.$$

De fato, pelo Lema 10.22, f é descontínua em x exatamente quando $\omega_f(x) > 0$; pela propriedade arquimediana, nesse caso existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} \leq \omega_f(x).$$

Suponha primeiro que f seja integrável. Fixe m e $\varepsilon > 0$. Pelo critério de oscilação, escolha uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ tal que

$$\sum_i \omega(f; I_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4m}.$$

Considere os índices para os quais

$$\omega(f; I_i) \geq \frac{1}{m}.$$

A soma dos comprimentos desses intervalos é menor que $\varepsilon/4$. Todo ponto de D_m que não seja um ponto da partição pertence ao interior de algum desses intervalos. Alargando ligeiramente os finitíssimos intervalos selecionados, podemos cobri-los por intervalos abertos cuja soma dos comprimentos seja menor que $\varepsilon/2$. Os finitíssimos pontos de P podem ser cobertos por intervalos abertos com soma dos comprimentos menor que $\varepsilon/2$. Logo D_m tem medida zero.

Pela Proposição 10.21,

$$D_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$$

também tem medida zero.

Reciprocamente, suponha que D_f tenha medida zero. Se $f \equiv 0$, o resultado é imediato; suponha

$$|f| \leq M \quad \text{com } M > 0.$$

Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $\eta > 0$ tal que

$$\eta(b-a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

O conjunto

$$K_\eta = \{x : \omega_f(x) \geq \eta\}$$

é fechado pelo Lema 10.23; portanto é compacto. Como $K_\eta \subset D_f$, ele tem medida zero. Escolha intervalos abertos $G_1, G_2, \dots$ cobrindo K_η e satisfazendo

$$\sum_j |G_j| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Pela compacidade de K_η , uma subfamília finita $G_1, \dots, G_r$ já o cobre.

Se $x \notin K_\eta$, então $\omega_f(x) < \eta$. Logo existe um intervalo aberto V_x contendo x tal que

$$\omega(f; V_x \cap [a, b]) < \eta.$$

O conjunto compacto

$$[a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^r G_j$$

é coberto por finitíssimos desses intervalos, digamos $V_1, \dots, V_s$. Assim,

$$G_1, \dots, G_r, V_1, \dots, V_s$$

é uma cobertura aberta finita de $[a, b]$.

Pelo Lema 10.24, existe uma partição P de malha suficientemente pequena para que cada subintervalo I_i esteja contido em um dos conjuntos dessa cobertura. Se $I_i \subset V_k$, então

$$\omega(f; I_i) < \eta.$$

Nos demais subintervalos, contidos em algum G_j , usamos

$$\omega(f; I_i) \leq 2M.$$

Como os subintervalos de P têm interiores disjuntos, a soma dos comprimentos daqueles contidos na união dos G_j é no máximo

$$\sum_{j=1}^r |G_j|.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_i \omega(f; I_i) \Delta x_i \\ &< 2M \sum_{j=1}^r |G_j| + \eta(b-a) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

O Critério de Darboux conclui a prova. $\square$

10.26 Exemplo. A função de Thomae

$$t(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q}, \gcd(p, q) = 1, q > 0, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua em todo irracional e descontínua em todo racional.

De fato, fixe $x_0 \notin \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$. Escolha N tal que $1/N < \varepsilon$. No intervalo $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ há apenas finitíssimos racionais reduzidos p/q com $q \leq N$: para cada um dos finitíssimos denominadores $q \leq N$, apenas finitos inteiros p podem satisfazer $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$. Como x_0 não é nenhum desses racionais, existe $0 < \delta < 1$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ não contém nenhum desses finitíssimos pontos. Assim, se $|x - x_0| < \delta$, então

$$0 \leq t(x) < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

e t é contínua em x_0 .

Se $x_0 = p/q$ é racional na forma reduzida, toda vizinhança de x_0 contém irracionais y , para os quais $t(y) = 0$, enquanto $t(x_0) = 1/q > 0$. Logo t é descontínua em x_0 .

Portanto o conjunto de descontinuidades é

$$D_t = \mathbb{Q} \cap [a, b],$$

que é enumerável e, pela Proposição 10.21, tem medida zero. Pelo Critério de Lebesgue, t é Riemann-integrável.

Como todo subintervalo contém irracionais, o ínfimo de t em cada subintervalo é 0. Portanto

$$L(t, P) = 0$$

para toda partição P , e consequentemente

$$\int_a^b t(x) dx = 0.$$

10.7 A função integral e o Teorema Fundamental do Cálculo

A definição de Darboux não usa primitivas. Agora podemos perguntar quando a integral produz uma primitiva.

Fixe $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e defina

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

10.27 Teorema. Se $|f(x)| \leq M$ em $[a, b]$, então

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|$$

para todos $x, y \in [a, b]$. Em particular, F é Lipschitz e, portanto, contínua.

Demonstração. Suponha $x < y$. Pela aditividade,

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt.$$

Pelo Corolário 10.17,

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq M(y - x).$$

Se $y < x$, basta trocar os papéis de x e y ; para $x = y$, a desigualdade é trivial. $\square$

10.28 Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo I). Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ é contínua em $x_0 \in (a, b)$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é diferenciável em x_0 e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Em particular, se f é contínua em $[a, b]$, então $F' = f$ em (a, b) , com as derivadas laterais correspondentes nos extremos.

Demonstração. Para $h \neq 0$ suficientemente pequeno,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Subtraindo $f(x_0)$,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Logo

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \sup_{t \text{ entre } x_0 \text{ e } x_0+h} |f(t) - f(x_0)|.$$

O lado direito tende a 0 pela continuidade de f em x_0 .

Nos extremos a e b , o mesmo argumento é aplicado apenas para $h > 0$ ou $h < 0$, respectivamente, produzindo as derivadas laterais correspondentes. $\square$

A recíproca, no sentido adequado, é a segunda parte do teorema.

10.29 Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo II). Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) , e a derivada G' admite uma extensão $h \in \mathcal{R}[a, b]$, então

$$\int_a^b h(x) dx = G(b) - G(a).$$

Pelo Teorema 10.18, o valor da integral não depende dos valores escolhidos para a extensão nos extremos. Por isso escreveremos simplesmente

$$\int_a^b G'(x) dx.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ uma partição. Pelo Teorema do Valor Médio, para cada i existe $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(\xi_i) \Delta x_i = h(\xi_i) \Delta x_i.$$

Somando,

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta x_i.$$

O lado direito é uma soma de Riemann de h . Pelo Teorema 10.10, quando a malha tende a zero essas somas convergem para

$$\int_a^b h(x) dx.$$

Logo

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x) dx.$$

$\square$

10.30 Corolário (Fórmula de Newton–Leibniz). Se f é contínua em $[a, b]$ e G é qualquer primitiva de f , então

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração. No interior de $[a, b]$, temos $G' = f$. Como f é contínua, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e fornece uma extensão Riemann-integrável da derivada aos extremos. Aplique o Teorema Fundamental do Cálculo II. $\square$

Integração por partes e mudança de variável

10.31 Teorema (Integração por partes). Se f, g são contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em (a, b) , e as funções $f'g$ e fg' , definidas em (a, b) , admitem extensões Riemann-integráveis a $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Como no Teorema Fundamental do Cálculo II, os valores escolhidos para as extensões nos extremos não alteram as integrais.

Demonstração. A função fg é diferenciável em $[a, b]$, e

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Pelo Teorema 10.15, a derivada $(fg)'$ é Riemann-integrável, pois $f'g$ e fg' são integráveis por hipótese. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo II,

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx,$$

e basta rearranjar os termos. $\square$

10.32 Teorema (Mudança de variável). Se $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ é de classe C^1 e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

Demonstração. Defina

$$F(x) = \int_{\varphi(\alpha)}^x f(u) du.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo I, $F' = f$. Pela regra da cadeia,

$$(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Como $f \circ \varphi$ e φ' são contínuas, o produto é contínuo e, portanto, Riemann-integrável. O Teorema Fundamental do Cálculo II aplicado a $F \circ \varphi$ em $[\alpha, \beta]$ fornece

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)),$$

que é exatamente

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

□

10.8 Integral de Riemann–Stieltjes

Na integral de Riemann, cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ recebe o peso

$$x_i - x_{i-1}.$$

Nada obriga, porém, que a acumulação seja medida pelo comprimento. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Podemos medir o subintervalo pela variação

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}).$$

Quando $\alpha(x) = x$, recuperamos a teoria anterior. Quando α tem saltos, parte do peso fica concentrada em pontos. Essa possibilidade é a novidade essencial da integral de Stieltjes.

10.33 Definição. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é não decrescente e $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, definimos

$$L_{\alpha}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})),$$

$$U_{\alpha}(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})),$$

onde

$$m_i = \inf_{I_i} f, \quad M_i = \sup_{I_i} f.$$

Como α é não decrescente, todos os pesos $\Delta\alpha_i$ são não negativos. O argumento de refinamento usado para as somas de Darboux permanece válido sem mudança essencial.

10.34 Teorema. Se Q refina P , então

$$L_{\alpha}(f, P) \leq L_{\alpha}(f, Q) \leq U_{\alpha}(f, Q) \leq U_{\alpha}(f, P).$$

Demonstração. Como no caso de Darboux, basta inserir um único ponto $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Escreva

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}), \\ \Delta\alpha' &= \alpha(c) - \alpha(x_{k-1}), \quad \Delta\alpha'' = \alpha(x_k) - \alpha(c).\end{aligned}$$

Como α é não decrescente,

$$\Delta\alpha', \Delta\alpha'' \geq 0, \quad \Delta\alpha = \Delta\alpha' + \Delta\alpha''.$$

Se m, m', m'' são os ínfimos de f no intervalo original e nos dois subintervalos, então $m \leq m', m''$, e portanto

$$m\Delta\alpha \leq m'\Delta\alpha' + m''\Delta\alpha''.$$

Logo a soma inferior não diminui. O argumento com supremos mostra que a soma superior não aumenta. Inserindo sucessivamente os pontos de um refinamento, obtemos as desigualdades externas. A desigualdade

$$L_\alpha(f, Q) \leq U_\alpha(f, Q)$$

segue termo a termo de $m_i \leq M_i$ e $\Delta\alpha_i \geq 0$. □

10.35 Corolário. Para quaisquer partições P, Q de $[a, b]$,

$$L_\alpha(f, P) \leq U_\alpha(f, Q).$$

Demonstração. Para o refinamento comum $R = P \cup Q$,

$$L_\alpha(f, P) \leq L_\alpha(f, R) \leq U_\alpha(f, R) \leq U_\alpha(f, Q).$$

□

Se $|f| \leq M$, então, para toda partição P ,

$$-M(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq L_\alpha(f, P) \leq U_\alpha(f, P) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Assim, as famílias de somas inferiores e superiores são, respectivamente, limitadas superior e inferiormente. Além disso, pelo Corolário 10.35, toda soma inferior é menor que toda soma superior.

10.36 Definição. Definimos

$$\int_a^b f d\alpha = \sup_P L_\alpha(f, P), \quad \overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_P U_\alpha(f, P).$$

Dizemos que f é **Riemann–Stieltjes integrável em relação a α** quando as duas quantidades coincidem. Nesse caso escrevemos

$$\int_a^b f d\alpha$$

e denotamos $f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$.

Pelo Corolário 10.35,

$$\int_a^b f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha.$$

A integral de Riemann é o caso

$$\alpha(x) = x.$$

10.9 Caracterizações da integrabilidade de Stieltjes

A teoria de Darboux reaparece quase palavra por palavra, mas com os comprimentos Δx_i substituídos pelas variações $\Delta \alpha_i$.

10.37 Teorema (Critério de Darboux–Stieltjes). Uma função limitada f pertence a $\mathcal{R}(\alpha; [a, b])$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma partição P tal que

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) < \varepsilon.$$

Demonstração. Se

$$I = \int_a^b f d\alpha,$$

então, pela definição de supremo e ínfimo, existem partições P_1, P_2 tais que

$$L_\alpha(f, P_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}, \quad U_\alpha(f, P_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para o refinamento comum $P = P_1 \cup P_2$,

$$L_\alpha(f, P) \geq L_\alpha(f, P_1), \quad U_\alpha(f, P) \leq U_\alpha(f, P_2),$$

e assim

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que para todo $\varepsilon > 0$ exista P com

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) < \varepsilon.$$

Como

$$L_\alpha(f, P) \leq \int_a^b f d\alpha \leq \overline{\int_a^b f d\alpha} \leq U_\alpha(f, P),$$

a diferença entre as integrais superior e inferior é menor que ε para todo $\varepsilon > 0$. Logo elas coincidem. $\square$

Como

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) = \sum_{i=1}^n \omega(f; I_i) (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})),$$

obtemos imediatamente:

10.38 Corolário (Critério de oscilação ponderada). Temos $f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe P tal que

$$\sum_{i=1}^n \omega(f; I_i) \Delta \alpha_i < \varepsilon.$$

Demonstração. Para toda partição,

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) = \sum_i \omega(f; I_i) \Delta \alpha_i.$$

A conclusão é exatamente o Critério de Darboux–Stieltjes escrito nessa forma. $\square$

Somas de Riemann–Stieltjes

Para uma partição marcada (P, ξ) , defina

$$S_\alpha(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})).$$

10.39 Teorema (Caracterização por somas de Stieltjes). Para uma função limitada f , são equivalentes:

1. $f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$;
2. existe $I \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_0 para a qual toda partição marcada (P, ξ) com P refinando P_0 satisfaz

$$|S_\alpha(f; P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Nesse caso,

$$I = \int_a^b f d\alpha.$$

Demonstração. Suponha primeiro que

$$J = \int_a^b f d\alpha$$

exista. Pelo Critério de Darboux–Stieltjes, dado $\varepsilon > 0$, escolha P_0 tal que

$$U_\alpha(f, P_0) - L_\alpha(f, P_0) < \varepsilon.$$

Se P refina P_0 , então

$$L_\alpha(f, P_0) \leq L_\alpha(f, P) \leq S_\alpha(f; P, \xi) \leq U_\alpha(f, P) \leq U_\alpha(f, P_0).$$

Como J também pertence ao intervalo entre as somas inferior e superior,

$$|S_\alpha(f; P, \xi) - J| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que exista I com a propriedade do item 2. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $P_0 = \{x_0, \dots, x_n\}$ de modo que toda soma marcada associada a um refinamento de P_0 fique a menos de $\varepsilon/4$ de I .

Para cada i com $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) > 0$, escolha marcas $\xi_i^+, \xi_i^- \in I_i$ tais que

$$M_i - f(\xi_i^+) < \frac{\varepsilon}{4(\alpha(b) - \alpha(a) + 1)}$$

e

$$f(\xi_i^-) - m_i < \frac{\varepsilon}{4(\alpha(b) - \alpha(a) + 1)}.$$

Nos intervalos com $\Delta\alpha_i = 0$, as marcas são irrelevantes. Então

$$U_\alpha(f, P_0) - S_\alpha(f; P_0, \xi^+) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$S_\alpha(f; P_0, \xi^-) - L_\alpha(f, P_0) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como as duas somas marcadas estão a menos de $\varepsilon/4$ de I , segue que

$$U_\alpha(f, P_0) - L_\alpha(f, P_0) < \varepsilon.$$

Logo $f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$.

Para identificar I , aplique a primeira parte ao valor

$$J = \int_a^b f d\alpha.$$

Dado $\eta > 0$, escolha uma partição que refine simultaneamente as partições associadas a I e a J . Qualquer soma marcada desse refinamento fica a menos de η de ambos; portanto

$$|I - J| < 2\eta.$$

Como η é arbitrário, $I = J$. □

10.40 Teorema (Linearidade em relação ao integrando). Se $f, g \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$ e $r, s \in \mathbb{R}$, então

$$rf + sg \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$$

e

$$\int_a^b (rf + sg) d\alpha = r \int_a^b f d\alpha + s \int_a^b g d\alpha.$$

Demonstração. Para toda partição marcada,

$$S_\alpha(rf + sg; P, \xi) = rS_\alpha(f; P, \xi) + sS_\alpha(g; P, \xi).$$

Dados $\varepsilon > 0$, use o Teorema 10.39 para escolher partições-base para f e g , com erros suficientemente pequenos, e tome um refinamento comum. A identidade acima mostra que todas as somas do refinamento convergem para

$$r \int_a^b f d\alpha + s \int_a^b g d\alpha.$$

A caracterização por somas conclui a prova. □

10.41 Teorema (Linearidade em relação ao integrador). Se α, β são não decrescentes, $r, s \geq 0$, e f é Riemann–Stieltjes integrável em relação a α e a β , então f é integrável em relação a $r\alpha + s\beta$ e

$$\int_a^b f d(r\alpha + s\beta) = r \int_a^b f d\alpha + s \int_a^b f d\beta.$$

Adicionar uma constante ao integrador não altera a integral.

Demonstração. Para qualquer partição marcada,

$$S_{r\alpha+s\beta}(f; P, \xi) = rS_\alpha(f; P, \xi) + sS_\beta(f; P, \xi).$$

Escolha partições-base para as duas integrais e tome um refinamento comum. A caracterização por somas de Stieltjes fornece a fórmula. A última afirmação segue porque os incrementos de um integrador constante são todos nulos. $\square$

Para a integral de Stieltjes, a formulação por refinamentos é mais natural que a formulação puramente pela malha: uma função α pode concentrar uma quantidade positiva de variação em um único ponto.

10.42 Exemplo (Por que refinamentos são necessários). Em $[-1, 1]$, defina

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

A função f é Riemann–Stieltjes integrável em relação a α , com integral 0. De fato, tome

$$P_0 = \{-1, 0, 1\}.$$

Em qualquer refinamento de P_0 , o único incremento não nulo de α ocorre no subintervalo que termina em 0, e f é identicamente nula nesse subintervalo. Logo todas as somas marcadas de todos os refinamentos de P_0 valem 0.

Por outro lado, podemos escolher partições P_n com

$$\|P_n\| \rightarrow 0$$

e contendo um subintervalo

$$\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$$

que atravessa 0. Nesse subintervalo o incremento de α vale 1. Se a marca for escolhida à esquerda de 0, a contribuição é 0; se for escolhida à direita, a contribuição é 1. Portanto as somas marcadas não convergem uniformemente nas marcas quando apenas exigimos $\|P\| \rightarrow 0$.

Se α é contínua, essa dificuldade desaparece.

10.43 Corolário. Se α é contínua e não decrescente, então $f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$ com integral I se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|P\| < \delta \implies |S_\alpha(f; P, \xi) - I| < \varepsilon$$

para toda partição marcada.

Demonstração. Suponha primeiro que

$$I = \int_a^b f d\alpha.$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 10.39, escolha

$$P_0 = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

tal que toda soma marcada de todo refinamento de P_0 esteja a menos de $\varepsilon/2$ de I .

Se $m = 1$, qualquer partição refina P_0 . Suponha $m \geq 2$ e ponha $M = \|f\|_\infty$. Pela continuidade uniforme de α , existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $|u - v| < \delta$,

$$|\alpha(u) - \alpha(v)| < \frac{\varepsilon}{4M(m-1) + 1}.$$

Se P tem malha menor que δ , ponha $R = P \cup P_0$. A passagem de P para R altera apenas os subintervalos de P que contêm algum dos pontos $t_1, \dots, t_{m-1}$. Há no máximo $m - 1$ deles. Escolhendo marcas em R como no argumento do Teorema 10.10, obtemos

$$|S_\alpha(f; P, \xi) - S_\alpha(f; R, \eta)| \leq 2M \sum_{\text{intervalos afetados}} \Delta\alpha < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como R refina P_0 ,

$$|S_\alpha(f; R, \eta) - I| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e portanto

$$|S_\alpha(f; P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Reciprocamente, suponha que a condição da malha valha para algum I . Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ de modo que toda soma marcada associada a uma partição de malha menor que δ fique a menos de $\varepsilon/4$ de I . Escolha uma partição P com $\|P\| < \delta$. Aproximando, em cada subintervalo, o supremo e o ínfimo de f por valores de f , obtemos marcas ξ^+, ξ^- tais que

$$U_\alpha(f, P) - S_\alpha(f; P, \xi^+) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$S_\alpha(f; P, \xi^-) - L_\alpha(f, P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

As duas somas marcadas estão a menos de $\varepsilon/4$ de I . Logo

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) < \varepsilon.$$

O Critério de Darboux–Stieltjes prova a integrabilidade, e a unicidade no Teorema 10.39 mostra que o valor da integral é I . $\square$

10.10 Funções Stieltjes-integráveis

10.44 Teorema. Se f é contínua em $[a, b]$ e α é não decrescente, então

$$f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b]).$$

Demonstração. Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição P suficientemente fina para que

$$\omega(f; I_i) < \frac{\varepsilon}{1 + \alpha(b) - \alpha(a)}$$

para todo i . Então

$$U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) = \sum_i \omega(f; I_i) \Delta \alpha_i < \varepsilon.$$

□

O resultado complementar exige continuidade do integrador.

10.45 Teorema. Se f é monótona e α é contínua e não decrescente em $[a, b]$, então

$$f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b]).$$

Demonstração. Suponha primeiro que f seja não decrescente. Para uma partição P ,

$$\omega(f; I_i) = f(x_i) - f(x_{i-1}),$$

e portanto

$$\begin{aligned} U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) &= \sum_i (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta \alpha_i \\ &\leq \left(\max_i \Delta \alpha_i \right) \sum_i (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \left(\max_i \Delta \alpha_i \right) (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Como α é uniformemente contínua, podemos escolher uma partição de malha suficientemente pequena para tornar $\max_i \Delta \alpha_i$ arbitrariamente pequeno. O Critério de Darboux–Stieltjes conclui.

Se f é não crescente, então $-f$ é não decrescente. O caso anterior e a linearidade em relação ao integrando, Teorema 10.40, concluem a prova. □

Conjuntos α -nulos

Quando α é contínua e não decrescente, existe uma versão ponderada do critério de Lebesgue.

10.46 Definição. Se

$$J = (u, v) \cap [a, b]$$

é um intervalo aberto relativo de $[a, b]$, definimos seu α -**comprimento** por

$$|J|_\alpha = \alpha(\min\{v, b\}) - \alpha(\max\{u, a\}).$$

Um conjunto $E \subset [a, b]$ é α -**nulo** se, para todo $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos relativos $J_1, J_2, \dots$ tais que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k|_{\alpha} < \varepsilon.$$

Para $\alpha(x) = x$, recuperamos a noção usual de medida zero.

10.47 Proposição. Suponha que α seja contínua e não decrescente.

1. todo subconjunto de um conjunto α -nulo é α -nulo;
2. toda união enumerável de conjuntos α -nulos é α -nula;
3. todo conjunto enumerável é α -nulo.

Demonstração. O primeiro item é imediato. Para o segundo, se

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

e cada E_n é α -nulo, cubra E_n por intervalos cuja soma das variações de α seja menor que $\varepsilon/2^n$. A reunião dessas coberturas tem variação total menor que ε .

Para o terceiro, basta mostrar que um ponto é α -nulo. Fixe $x \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de α , podemos escolher um intervalo aberto relativo J contendo x de modo que

$$|J|_{\alpha} < \varepsilon.$$

Logo $\{x\}$ é α -nulo, e o item 2 conclui o caso enumerável. $\square$

10.48 Teorema (Critério de Lebesgue–Stieltjes). Suponha que α seja contínua e não decrescente e que f seja limitada em $[a, b]$. Então

$$f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b]) \iff D_f \text{ é } \alpha\text{-nulo}.$$

Demonstração. Para $m \in \mathbb{N}$, defina

$$D_m = \left\{ x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Pelo Lema 10.23, cada D_m é fechado. Além disso,

$$D_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m,$$

pela caracterização da continuidade pela oscilação e pela propriedade arquimediana, exatamente como na prova do Teorema 10.25.

Suponha primeiro que $f \in \mathcal{R}(\alpha; [a, b])$. Fixe m e $\varepsilon > 0$. Pelo critério de oscilação ponderada, escolha uma partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ tal que

$$\sum_i \omega(f; I_i) \Delta \alpha_i < \frac{\varepsilon}{4m}.$$

Nos subintervalos para os quais

$$\omega(f; I_i) \geq \frac{1}{m},$$

a soma das variações $\Delta\alpha_i$ é menor que $\varepsilon/4$. Todo ponto de D_m que não pertença à partição está no interior de um desses subintervalos.

Como α é contínua, podemos alargar ligeiramente os finitíssimos subintervalos selecionados para intervalos abertos de modo que a soma das variações de α fique menor que $\varepsilon/2$. Pela Proposição 10.47, os finitíssimos pontos da partição também podem ser cobertos por intervalos de variação total menor que $\varepsilon/2$. Logo D_m é α -nulo. Aplicando novamente a Proposição 10.47,

$$D_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$$

é α -nulo.

Reciprocamente, suponha que D_f seja α -nulo. Se $f \equiv 0$, o resultado é imediato. Suponha

$$|f| \leq M \quad \text{com } M > 0.$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Se $\alpha(b) = \alpha(a)$, todas as somas de Stieltjes são nulas e não há o que provar. Caso contrário, escolha $\eta > 0$ tal que

$$\eta(\alpha(b) - \alpha(a)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

O conjunto

$$K_\eta = \{x : \omega_f(x) \geq \eta\}$$

é compacto e está contido em D_f ; logo é α -nulo. Escolha intervalos abertos relativos $G_1, G_2, \dots$ cobrindo K_η e satisfazendo

$$\sum_j |G_j|_\alpha < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Pela compacidade de K_η , basta uma subfamília finita $G_1, \dots, G_r$.

No compacto

$$[a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^r G_j$$

temos $\omega_f(x) < \eta$. Para cada ponto desse compacto, escolha uma vizinhança aberta V_x na qual a oscilação de f seja menor que η . Uma subfamília finita $V_1, \dots, V_s$ já cobre o compacto. Portanto

$$G_1, \dots, G_r, V_1, \dots, V_s$$

é uma cobertura aberta finita de $[a, b]$. Pelo Lema 10.24, escolha uma partição P de malha tão pequena que cada subintervalo I_i esteja contido em um desses abertos.

Se $I_i \subset V_k$, então

$$\omega(f; I_i) < \eta.$$

Nos demais subintervalos usamos $\omega(f; I_i) \leq 2M$. Para os subintervalos contidos na união dos G_j , a soma dos incrementos de α é no máximo

$$\sum_{j=1}^r |G_j|_\alpha.$$

De fato, podemos atribuir cada subintervalo a um dos G_j que o contém; para um j fixo, a soma dos incrementos de α sobre subintervalos disjuntos contidos em G_j não excede $|G_j|_\alpha$, pela monotonicidade de α . Consequentemente,

$$\begin{aligned} U_\alpha(f, P) - L_\alpha(f, P) &= \sum_i \omega(f; I_i) \Delta\alpha_i \\ &< 2M \sum_{j=1}^r |G_j|_\alpha + \eta(\alpha(b) - \alpha(a)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

O Critério de Darboux–Stieltjes conclui a prova. $\square$

Esse teorema explica precisamente o papel dos saltos do integrador. Quando α possui um salto, um ponto isolado pode carregar peso positivo; nesse ponto, uma descontinuidade de f deixa de ser desprezível.

10.11 Saltos e pesos concentrados

Considere, para $c \in (a, b]$, a função

$$H_c(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

Ela é não decrescente e possui um único salto, de tamanho 1, em c .

10.49 Teorema. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e contínua em c , então

$$\int_a^b f dH_c = f(c).$$

Mais geralmente, se

$$\alpha(x) = C + \sum_{j=1}^m p_j H_{c_j}(x), \quad p_j \geq 0, \quad c_j \in (a, b],$$

e f é contínua em cada c_j , então

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{j=1}^m p_j f(c_j).$$

Demonstração. Começemos com um único salto. Fixe $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de f em c , existe $u < c$ tal que

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{para } u \leq x \leq c.$$

Escolha uma partição P_0 que contenha u e c . Em qualquer refinamento P de P_0 , todos os incrementos de H_c são nulos, exceto o incremento do único subintervalo cuja extremidade direita é c . Esse incremento vale 1, e tal subintervalo está contido em $[u, c]$.

Assim, para qualquer sistema de marcas,

$$S_{H_c}(f; P, \xi) = f(\xi_k)$$

para alguma $\xi_k \in [u, c]$. Consequentemente,

$$|S_{H_c}(f; P, \xi) - f(c)| < \varepsilon.$$

Pelo Teorema 10.39,

$$\int_a^b f dH_c = f(c).$$

Para

$$\alpha = C + \sum_{j=1}^m p_j H_{c_j},$$

a constante C não contribui para os incrementos. Aplicando a linearidade em relação ao integrador, Teorema 10.41, obtemos

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{j=1}^m p_j \int_a^b f dH_{c_j} = \sum_{j=1}^m p_j f(c_j).$$

□

10.50 Observação. A escolha

$$H_c(x) = 0 \quad (x < c), \quad H_c(x) = 1 \quad (x \geq c)$$

fixa uma convenção para o salto. Com essa convenção, o peso do salto aparece no subintervalo que termina em c . Por isso, no caso de um único salto, bastaria supor continuidade de f pela esquerda em c . Exigimos continuidade em c no enunciado para evitar carregar convenções laterais ao longo do capítulo.

Esse exemplo mostra a diferença conceitual entre Riemann e Stieltjes. A medida por comprimento ignora pontos isolados; um integrador com saltos pode atribuir peso positivo exatamente a esses pontos.

10.12 Quando $d\alpha$ se reduz a um peso dx

A outra situação fundamental ocorre quando a variação de α está distribuída continuamente.

10.51 Teorema. Suponha que $\alpha \in C^1[a, b]$ seja não decrescente e que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Então

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

Demonstração. Como α' é contínua, o Teorema 10.11 mostra que $\alpha' \in \mathcal{R}[a, b]$. Pelo Teorema 10.15, a função

$$x \mapsto f(x) \alpha'(x)$$

também é Riemann-integrável.

Seja (P, ξ) uma partição marcada. Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, o Teorema do Valor Médio aplicado a α fornece $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(\eta_i) \Delta x_i.$$

Logo

$$S_\alpha(f; P, \xi) = \sum_i f(\xi_i) \alpha'(\eta_i) \Delta x_i.$$

Por outro lado, a soma de Riemann de $f\alpha'$ com as mesmas marcas é

$$S(f\alpha'; P, \xi) = \sum_i f(\xi_i) \alpha'(\xi_i) \Delta x_i.$$

Se $M = \|f\|_\infty$, então

$$\begin{aligned} |S_\alpha(f; P, \xi) - S(f\alpha'; P, \xi)| &\leq M \sum_i |\alpha'(\eta_i) - \alpha'(\xi_i)| \Delta x_i \\ &\leq M(b-a) \omega_{\alpha'}(\|P\|), \end{aligned}$$

onde

$$\omega_{\alpha'}(\delta) = \sup\{|\alpha'(x) - \alpha'(y)| : |x - y| \leq \delta\}.$$

Como α' é uniformemente contínua,

$$\omega_{\alpha'}(\delta) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Pelo Teorema 10.10,

$$S(f\alpha'; P, \xi) \rightarrow \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx$$

uniformemente nas marcas quando $\|P\| \rightarrow 0$. Portanto as somas de Riemann–Stieltjes têm o mesmo limite. Como α é contínua, o Corolário 10.43 conclui que

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

□

Em particular, para $\alpha(x) = x$,

$$d\alpha = dx$$

no sentido da integral.

10.13 Integradores de variação limitada

A hipótese de que α seja não decrescente garante pesos não negativos. Podemos ir além permitindo que o integrador tenha variação total finita.

10.52 Definição. Para $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição P , defina

$$V(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})|.$$

Dizemos que α tem **variação limitada** em $[a, b]$ quando existe $M > 0$ tal que

$$V(\alpha, P) \leq M$$

para toda partição P de $[a, b]$.

Nesse caso, o conjunto

$$\{V(\alpha, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}$$

é não vazio e limitado superiormente. Pela completude de $\mathbb{R}$, possui supremo. Definimos então a **variação total** de α por

$$V_a^b(\alpha) = \sup_P V(\alpha, P).$$

Adotamos também a convenção

$$V_a^a(\alpha) = 0.$$

10.53 Proposição. Se α tem variação limitada em $[a, b]$ e

$$[a', b'] \subset [a, b],$$

então a restrição de α a $[a', b']$ também tem variação limitada. Além disso,

$$V_{a'}^{b'}(\alpha) \leq V_a^b(\alpha).$$

Demonstração. Se P é uma partição de $[a', b']$, acrescente a P os pontos a, a', b', b , quando distintos, obtendo uma partição Q de $[a, b]$. Todos os termos que aparecem em $V(\alpha, P)$ também aparecem em $V(\alpha, Q)$, possivelmente junto com termos adicionais não negativos. Logo

$$V(\alpha, P) \leq V(\alpha, Q) \leq V_a^b(\alpha).$$

Portanto as variações das partições de $[a', b']$ são uniformemente limitadas; tomando o supremo, obtemos a desigualdade desejada. $\square$

10.54 Proposição. Toda função monótona em $[a, b]$ tem variação limitada. Mais precisamente, se α é não decrescente,

$$V_a^b(\alpha) = \alpha(b) - \alpha(a),$$

e, se α é não crescente,

$$V_a^b(\alpha) = \alpha(a) - \alpha(b).$$

Demonstração. Se α é não decrescente, então, para toda partição,

$$V(\alpha, P) = \sum_i (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Logo o supremo dessas variações tem o mesmo valor. O caso não crescente é análogo, pois todos os incrementos têm sinal não positivo. $\square$

10.55 Proposição. Toda função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada é limitada. Mais precisamente,

$$|\alpha(x)| \leq |\alpha(a)| + V_a^b(\alpha) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Demonstração. Para qualquer $x \in [a, b]$,

$$|\alpha(x) - \alpha(a)| \leq V_a^x(\alpha) \leq V_a^b(\alpha).$$

Logo

$$|\alpha(x)| \leq |\alpha(a)| + |\alpha(x) - \alpha(a)| \leq |\alpha(a)| + V_a^b(\alpha).$$

$\square$

10.56 Teorema (Decomposição de Jordan). Uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada se, e somente se, pode ser escrita como diferença de duas funções não decrescentes.

Demonstração. Suponha primeiro que

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2,$$

com α_1, α_2 não decrescentes. Para qualquer partição $P = \{x_0, \dots, x_n\}$,

$$\begin{aligned} V(\alpha, P) &= \sum_i |\Delta\alpha_1(i) - \Delta\alpha_2(i)| \\ &\leq \sum_i \Delta\alpha_1(i) + \sum_i \Delta\alpha_2(i) \\ &= \alpha_1(b) - \alpha_1(a) + \alpha_2(b) - \alpha_2(a). \end{aligned}$$

Tomando o supremo em P , vemos que α tem variação limitada.

Reciprocamente, suponha

$$V_a^b(\alpha) < \infty$$

e defina

$$V(x) = V_a^x(\alpha), \quad a \leq x \leq b.$$

Essa quantidade é finita, pois

$$V_a^x(\alpha) \leq V_a^b(\alpha).$$

Se $x < y$, qualquer partição de $[a, x]$, acrescida dos pontos x, y , fornece

$$V(y) \geq V(x) + |\alpha(y) - \alpha(x)|.$$

Mais precisamente, tomando supremos sobre as partições de $[a, x]$,

$$V(y) - V(x) \geq |\alpha(y) - \alpha(x)|.$$

Defina

$$\alpha_1(x) = \frac{V(x) + \alpha(x)}{2}, \quad \alpha_2(x) = \frac{V(x) - \alpha(x)}{2}.$$

Para $x < y$,

$$\alpha_1(y) - \alpha_1(x) = \frac{V(y) - V(x) + \alpha(y) - \alpha(x)}{2} \geq 0,$$

pois

$$V(y) - V(x) \geq |\alpha(y) - \alpha(x)| \geq -(\alpha(y) - \alpha(x)).$$

Do mesmo modo,

$$\alpha_2(y) - \alpha_2(x) = \frac{V(y) - V(x) - (\alpha(y) - \alpha(x))}{2} \geq 0.$$

Logo α_1 e α_2 são não decrescentes e

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

□

A integral para integradores de variação limitada

Para uma função α de variação limitada, usaremos a decomposição canônica produzida na prova do Teorema 10.56:

$$\alpha = \alpha_+ - \alpha_-, \quad \alpha_+(x) = \frac{V(x) + \alpha(x)}{2}, \quad \alpha_-(x) = \frac{V(x) - \alpha(x)}{2}.$$

As duas funções α_+ e α_- são não decrescentes.

10.57 Definição. Dizemos que f é **Riemann–Stieltjes integrável em relação a uma função α de variação limitada** se f é integrável em relação a α_+ e a α_- . Nesse caso, definimos

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha_+ - \int_a^b f d\alpha_-.$$

10.58 Corolário (Convergência das somas para integradores de variação limitada). Se f é integrável em relação a uma função α de variação limitada, então, para toda partição marcada, continuaremos a escrever

$$S_\alpha(f; P, \xi) = \sum_i f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})).$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P_0 tal que, para todo refinamento marcado (P, ξ) de P_0 ,

$$\left| S_\alpha(f; P, \xi) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon.$$

Demonstração. Escreva

$$\alpha = \alpha_+ - \alpha_-.$$

Então

$$S_\alpha(f; P, \xi) = S_{\alpha_+}(f; P, \xi) - S_{\alpha_-}(f; P, \xi).$$

Aplique o Teorema 10.39 às duas integrais, com erro $\varepsilon/2$, e tome um refinamento comum das duas partições-base. $\square$

10.59 Corolário. Se f é contínua e α tem variação limitada, então

$$\int_a^b f d\alpha$$

existe.

Demonstração. As funções α_+ e α_- são não decrescentes. Pelo Teorema 10.44, uma função contínua f é integrável em relação a ambas. $\square$

A decomposição canônica torna a definição acima inequívoca. Além disso, se

$$\alpha = \beta_1 - \beta_2$$

é outra decomposição em funções não decrescentes e f também é integrável em relação a β_1 e β_2 , então o valor obtido por essa decomposição coincide com o valor canônico. De fato,

$$\alpha_+ + \beta_2 = \beta_1 + \alpha_-.$$

Pela linearidade em relação ao integrador, Teorema 10.41,

$$\int f d\alpha_+ + \int f d\beta_2 = \int f d\beta_1 + \int f d\alpha_-,$$

e as duas diferenças coincidem.

10.60 Teorema (Integração por partes de Stieltjes). Suponha que f e α tenham variação limitada e que as duas integrais de Stieltjes abaixo existam. Então

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Em particular, a fórmula vale quando f e α são contínuas e de variação limitada.

Demonstração. Escreva as decomposições canônicas

$$\alpha = \alpha_+ - \alpha_-, \quad f = f_+ - f_-.$$

A existência de

$$\int_a^b f d\alpha$$

significa que f é integrável em relação a α_+ e α_- ; analogamente, a existência de

$$\int_a^b \alpha df$$

significa que α é integrável em relação a f_+ e f_- .

Fixe $\varepsilon > 0$. Pela caracterização por somas de Stieltjes, podemos escolher uma única partição P_0 tal que, para todo refinamento $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ de P_0 , as somas com marcas nas extremidades satisfaçam

$$\left| \sum_i f(x_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

e

$$\left| \sum_i \alpha(x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) - \int_a^b \alpha df \right| < \varepsilon.$$

Isso segue do Corolário 10.58, aplicado às duas integrais, tomando depois um refinamento comum das partições-base.

Para toda partição P , vale a identidade algébrica exata

$$\begin{aligned} f(x_i)\alpha(x_i) - f(x_{i-1})\alpha(x_{i-1}) \\ = f(x_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) + \alpha(x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})). \end{aligned}$$

Somando em i , obtemos

$$f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \sum_i f(x_i)\Delta\alpha_i + \sum_i \alpha(x_{i-1})\Delta f_i.$$

As duas somas do lado direito ficam, para todo refinamento suficientemente fino no sentido de refinamento, a menos de ε das integrais correspondentes. Logo

$$\left| f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \left(\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df \right) \right| < 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue a fórmula desejada. $\square$

10.14 O que as duas integrais estão medindo

A integral de Riemann corresponde ao integrador identidade:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f d\alpha \quad \text{quando } \alpha(x) = x.$$

Se $\alpha \in C^1[a, b]$ é não decrescente,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx,$$

para toda $f \in \mathcal{R}[a, b]$; nesse caso, a variação de α atua como uma densidade.

Se α é uma função degrau com saltos p_j nos pontos c_j , e f é contínua nesses pontos,

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_j p_j f(c_j),$$

e a integral se torna uma soma ponderada.

Esses dois extremos revelam a ideia central:

Riemann acumula usando comprimento

e

Stieltjes acumula usando variação.

A integral de Stieltjes contém, numa mesma linguagem, integrais ponderadas e somas discretas. Essa flexibilidade será uma das pontes naturais entre Análise, Probabilidade e teoria da medida.

10.15 Exercícios

Ex. 10.1 — Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Prove diretamente, a partir das definições, que

$$\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}.$$

Ex. 10.2 — Calcule as integrais inferior e superior da função de Dirichlet em $[0, 1]$.

Ex. 10.3 — Seja f limitada em $[a, b]$ e suponha que f seja nula fora de um conjunto finito. Prove que f é Riemann-integrável e que

$$\int_a^b f = 0.$$

Ex. 10.4 — Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e suponha que o conjunto

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$$

seja enumerável. Suponha ainda que f seja contínua em todo ponto de $[a, b] \setminus E$. Prove que f é Riemann-integrável e que

$$\int_a^b f = 0.$$

Ex. 10.5 — Prove que uma função com um número finito de descontinuidades em $[a, b]$ é Riemann-integrável sempre que for limitada e contínua fora desses pontos.

Ex. 10.6 — Seja $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Prove que, se

$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo x , então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Ex. 10.7 — Prove que, se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e

$$\int_a^b |f(x)| dx = 0,$$

então $f(x) = 0$ em todo ponto de continuidade de f .

Ex. 10.8 — Seja f contínua e não negativa em $[a, b]$. Prove que

$$\int_a^b f = 0 \iff f \equiv 0.$$

Ex. 10.9 — Prove o teorema do valor médio para integrais: se f é contínua em $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Ex. 10.10 — Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ e $g \geq 0$, prove que existem m, M tais que

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g,$$

onde $m = \inf f$ e $M = \sup f$. Se f é contínua, deduza que existe $c \in [a, b]$ com

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Ex. 10.11 — Prove diretamente pelo critério de Darboux que a função de Thomae é Riemann-integrável em $[0, 1]$ e tem integral zero, sem usar o critério de Lebesgue.

Ex. 10.12 — Retome o conjunto de Cantor do Exemplo 6.88. Mostre que ele tem medida zero.

Ex. 10.13 — Use o critério de Lebesgue para mostrar que a função indicadora do conjunto de Cantor é Riemann-integrável.

Ex. 10.14 — Seja $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, com $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Prove que F é Lipschitz e determine uma constante de Lipschitz em termos de f .

Ex. 10.15 — Dê um exemplo de função Riemann-integrável f para a qual a função integral

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

não seja diferenciável em algum ponto.

Ex. 10.16 — Prove o Teorema Fundamental do Cálculo I usando apenas as somas superior e inferior, sem recorrer à estimativa do Teorema 10.27.

Ex. 10.17 — Seja G contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) . Suponha que G' admita uma extensão Riemann-integrável a $[a, b]$. Prove novamente

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a)$$

usando diretamente a caracterização por somas de Riemann.

Ex. 10.18 — Seja

$$\alpha(x) = x^2$$

em $[0, 1]$. Calcule

$$\int_0^1 x d\alpha(x)$$

de duas formas: pela definição de Stieltjes e pelo Teorema 10.51.

Ex. 10.19 — Seja H_c a função degrau definida no texto. Mostre que, se f não é contínua em c , então f pode deixar de ser Riemann-Stieltjes integrável em relação a H_c .

Ex. 10.20 — Para

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^m p_j H_{c_j}(x), \quad p_j > 0, \quad c_j \in (a, b],$$

prove diretamente pelas somas de Darboux-Stieltjes que

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{j=1}^m p_j f(c_j)$$

sempre que f seja contínua nos pontos c_j .

Ex. 10.21 — Suponha que α seja contínua e estritamente crescente. Mostre que um conjunto $E \subset [a, b]$ é α -nulo se, e somente se, $\alpha(E) \subset [\alpha(a), \alpha(b)]$ tem medida zero.

Ex. 10.22 — Em $[0, 1]$, defina

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Construa uma função limitada f que seja descontínua em todos os pontos de $[0, \frac{1}{2}]$, mas Riemann–Stieltjes integrável em relação a α . Use o Critério de Lebesgue–Stieltjes para justificar sua resposta.

Ex. 10.23 — Seja $\alpha \in C^1[a, b]$. Mostre que, se $\alpha' \geq 0$, então a definição de Riemann–Stieltjes fornece

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f \alpha'$$

para toda $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Ex. 10.24 — Calcule a variação total das funções:

1. $\alpha(x) = x$ em $[a, b]$;
2. $\alpha(x) = |x|$ em $[-1, 1]$;
3. $\alpha(x) = \sin x$ em $[0, 2\pi]$;
4. uma função degrau com finitíssimos saltos.

Ex. 10.25 — Se α tem variação limitada e $a < c < b$, prove a aditividade da variação total:

$$V_a^b(\alpha) = V_a^c(\alpha) + V_c^b(\alpha).$$

Deduza que a função

$$V(x) = V_a^x(\alpha)$$

é não decrescente.

Ex. 10.26 — Verifique a fórmula de integração por partes de Stieltjes quando f e α são funções degrau com conjuntos de pontos de salto disjuntos. Explique por que a ausência de saltos comuns garante a existência das duas integrais. Depois recupere a fórmula para funções contínuas de variação limitada usando o teorema do texto.

Ex. 10.27 — Seja F uma função de distribuição discreta com suporte finito $\{x_1, \dots, x_m\} \subset (a, b)$:

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} p_j, \quad p_j > 0, \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1.$$

Mostre que, para toda função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_a^b g dF = \sum_{j=1}^m p_j g(x_j).$$

**** Ex. 10.28** — Lema fundamental do cálculo das variações. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponha que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

para toda função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que

$$f \equiv 0.$$

Mostre que é suficiente supor a identidade apenas para funções contínuas $g \geq 0$.

***** Ex. 10.29** — Lema de Riemann–Lebesgue elementar. Seja $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

**** Ex. 10.30** — Mudança de variável. Seja $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ de classe C^1 , estritamente crescente, com

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Para f contínua em $[a, b]$, prove

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Formule e prove a versão correspondente quando φ é estritamente decrescente.

***** Ex. 10.31** — Decomposição de Jordan. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que α tem variação limitada se, e somente se, pode ser escrita na forma

$$\alpha = u - v,$$

onde u e v são funções não decrescentes.

Dê uma construção explícita de u e v em termos da função de variação

$$V(x) = V_a^x(\alpha).$$

***** Ex. 10.32** — Oscilação e critério de Lebesgue. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e defina

$$D_\eta = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geq \eta\}, \quad \eta > 0.$$

Prove que:

1. D_η é fechado;
2. se f é Riemann-integrável, então D_η tem medida zero;
3. conclua que o conjunto de pontos de descontinuidade de f tem medida zero.

11

Sequências, séries e aproximação de funções

Nos capítulos anteriores, estudamos sobretudo uma função de cada vez. Continuidade e derivação descreveram seu comportamento local; a integração reuniu esse comportamento ao longo de intervalos. Agora o objeto que varia passa a ser a própria função. Dada uma sequência (f_n) , queremos compreender não apenas se $f_n(x)$ se aproxima de algum valor para cada x , mas se essa aproximação é forte o bastante para preservar as operações e propriedades que nos interessam.

Essa mudança de perspectiva produz algumas das perguntas centrais da análise. Se cada f_n é contínua, o limite também é? Podemos trocar limite e integral? E limite e derivada? Quando uma série de funções define uma função contínua? Quando uma família inteira de funções contém uma subsequência convergente? E, por fim, quão grande é a classe das funções que podem ser aproximadas por funções simples, como polinômios?

A resposta não depende apenas da existência de um limite. Depende de *como* as funções convergem. A convergência pontual olha para um ponto de cada vez; a convergência uniforme controla todos os pontos simultaneamente. A partir dessa diferença surgirão duas ideias que atravessam boa parte da análise moderna: *compacidade* de famílias de funções, expressa pelo Teorema de Arzelà–Ascoli, e *densidade*, expressa pelo Teorema de Stone–Weierstrass.

Neste capítulo

- ▶ Convergência pontual (p. 290)
- ▶ Convergência uniforme (p. 293)
- ▶ Critério de Cauchy para convergência uniforme (p. 296)
- ▶ Séries de funções e o teste M de Weierstrass (p. 298)
- ▶ O que a convergência uniforme preserva (p. 301)
- ▶ Equicontinuidade e o Teorema de Arzelà–Ascoli (p. 305)
- ▶ Aproximação uniforme: Stone–Weierstrass (p. 308)
- ▶ Séries de potências (p. 311)
- ▶ Propriedades das séries de potências (p. 316)
- ▶ Série de Taylor (p. 320)
- ▶ Calculando a série de Taylor (p. 327)
- ▶ Funções trigonométricas (p. 330)
- ▶ Exemplo de uma função não representável por série de potência (p. 333)

11.1 Convergência pontual

Fixar x transforma uma sequência de funções numa sequência de números. Essa é a noção mais imediata de convergência, e também a mais fraca entre as que usaremos. Sua principal virtude é a simplicidade; sua principal limitação é que o instante a partir do qual $f_n(x)$ está perto do limite pode depender muito do ponto x .

11.1 Definição. Considere uma sequência de funções (f_n) todas definidas no mesmo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência (f_n) **converge pontualmente** para f em A se, para cada x em A , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Nesse caso escreveremos $f_n \xrightarrow{pt} f$ em A .

Simbolicamente, essa definição pode ser escrita como:

$$f_n \xrightarrow{pt} f \text{ em } A \quad \text{se} \quad \forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N} : \\ \forall n \geq N(\varepsilon, x_0), |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (11.1)$$

Observe que estamos utilizando a definição de convergência de uma sequência numérica $(f_n(x))$ para definir a convergência de uma sequência de funções (f_n) . Mais precisamente, se (f_n) converge pontualmente para f em A , isso significa que para cada x (fixo) em A e para cada $\varepsilon > 0$, existe N (que depende de ε e de x) tal que, para $n \geq N$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

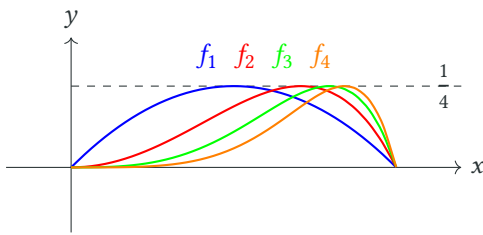


Figura 11.2

Gráficos de $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$.

11.2 Exemplo. Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela expressão $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$.

Como $x^n(1 - x^n) \leq x^n$ para $x \in [0, 1]$ e vale 0 em $x = 1$ temos que essa sequência converge pontualmente para a função identicamente nula em $[0, 1]$, ou seja, para a função $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Para entendermos melhor o comportamento dessas funções, é interessante observar que, para cada valor natural $n \in \mathbb{N}$, o valor máximo da função $f_n(x)$ é igual a $\frac{1}{4}$. Este valor máximo é alcançado no ponto dado por $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. É importante notar que, conforme n aumenta, o ponto $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ tende a 1.

Esses fatores nos permitem esboçar os gráficos das funções f_n . Ao observar esses gráficos, notamos que cada um deles apresenta uma elevação cuja altura permanece constante, igual a $\frac{1}{4}$. Isso implica que, mesmo à medida que n se torna muito grande, a forma do gráfico de f_n não se aproxima da forma do gráfico da função limite, que é a função identicamente nula.

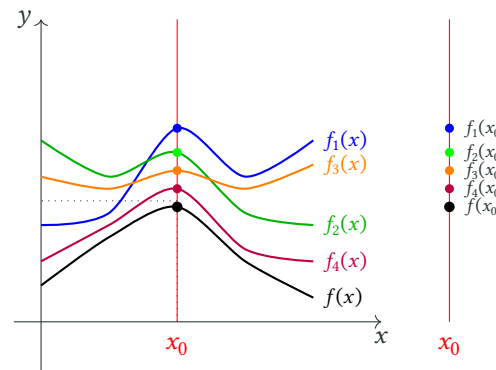
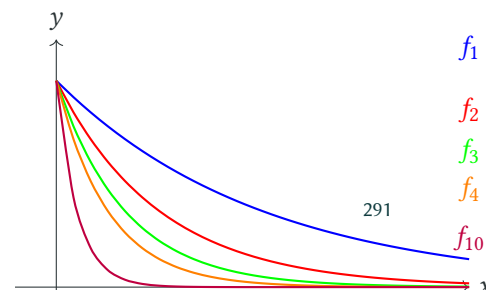


Figura 11.1

Convergência pontual. Intuitivamente, dizer que uma sequência de funções converge pontualmente significa olhar para cada ponto do domínio separadamente. Se, ao “fixar o olhar” em um ponto específico, os valores da sequência naquele ponto se aproximam cada vez mais de um certo número, então dizemos que há convergência pontual naquele ponto. Essa convergência pode acontecer de forma diferente em cada ponto, e a rapidez com que as funções se aproximam do limite pode variar de um lugar para outro.



11.3 Exemplo. Considere a sequência $f_n(x) = e^{-nx}$ e tome $A = [0, \infty)$. A sequência (f_n) converge?

Temos que

$$f_n(x) = e^{-nx} = (e^{-x})^n = r^n$$

onde $r = e^{-x}$. Existem dois casos. Se $x = 0$, então $r = 1$ e $r^n = 1$. Portanto, $f_n(0)$ converge para 1. Por outro lado, se $x > 0$, então $r < 1$, e r^n converge para 0. Ou seja, $f_n(x)$ converge para 0 para todo $x > 0$. Em resumo, provamos que (f_n) converge pontualmente para a função f em $[0, \infty)$ definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ para $x > 0$.

O exemplo 11.3 mostra que uma sequência de funções contínuas (f_n) pode convergir pontualmente para uma função f que não é contínua!

11.4 Exemplo. Considere a sequência (f_n) definida em $[0, 1]$ por

$$\begin{aligned} f_n(0) &= 0 \\ f_n(x) &= n \quad \text{para } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ f_n(x) &= 0 \quad \text{para } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{aligned}$$

Primeiro, mostramos que (f_n) converge pontualmente para 0 em $[0, 1]$. Se $x = 0$, então $f_n(0)$ é sempre 0 e, portanto, converge para 0. Se x está em $(0, 1]$, então existe N tal que $N > \frac{1}{x}$ (por exemplo, basta tomar $N > 1/x$) e, portanto, $x > \frac{1}{N}$. Assim, para todo $n \geq N$, temos $x > \frac{1}{n}$. Pela definição de f_n , temos que $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq N$. Isso implica que $f_n(x)$ converge para 0. Provamos que (f_n) converge pontualmente

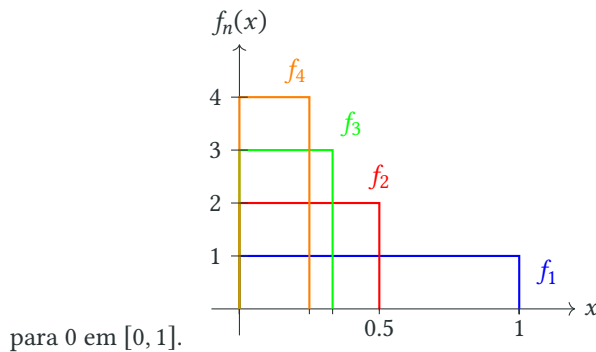


Figura 11.4

Gráficos da sequência de funções $f_n(x)$ do Exemplo 11.4 para $n =$

1, 2, 3, 4.

O mesmo exemplo também testa a troca entre limite e integral. É verdade que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx?$$

Mostraremos que isso não é verdade para este exemplo. Primeiro, note que cada f_n é integrável em Riemann em $[0, 1]$ e que

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} n dx = 1$$

Portanto, a sequência $\int_0^1 f_n(x) dx$ é sempre 1 e, portanto, converge para 1. Por outro

lado, sabemos que para todo x em $[0, 1]$, $f_n(x)$ converge para 0, logo

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

Este é um exemplo em que não podemos trocar o limite e a integral. Os Exemplos 11.3, 11.2 e 11.4 mostram que a convergência pontual não é suficiente para nossos propósitos. Uma sequência de funções contínuas não precisa convergir para uma função contínua, e a troca de limite e integral não precisa ser verdadeira. É por isso que recorremos a um tipo de convergência mais exigente.

Ex. 11.1 — Encontre os limites pontuais de cada uma das seguintes sequências de funções no conjunto dado.

- a) $\left(\frac{nx}{1+nx}\right), \quad x \in [0, \infty).$ c) $((\cos x)^{2n}), \quad x \in \mathbb{R}.$
- b) $\left(\frac{\sin nx}{1+nx}\right), \quad x \in [0, \infty).$ d) $(nxe^{-nx^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$

Ex. 11.2 — Determine os valores de x para os quais cada uma das seguintes séries converge.

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}.$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3nx}.$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n}, \quad x \neq 1.$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (\sin x)^n}{n}.$

Os exemplos anteriores mostram que olhar para cada ponto separadamente pode esconder fenômenos globais importantes: picos podem deslocar-se pelo domínio, a continuidade pode desaparecer no limite e a integral pode não acompanhar a convergência. Precisamos de uma forma de controlar a aproximação com um único índice para todo o domínio.

11.2 Convergência uniforme

Na convergência uniforme, dado um erro tolerável ε , escolhemos um mesmo N para todos os pontos do domínio. Geometricamente, a partir desse índice o gráfico de f_n inteiro deve permanecer dentro de uma faixa de largura 2ε em torno do gráfico de f .

No espaço $B(A)$ das funções limitadas $A \rightarrow \mathbb{R}$, essa ideia é exatamente convergência na norma do supremo,

$$\|g\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |g(x)|.$$

Para $f_n, f \in B(A)$,

$$f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente em } A \iff \|f_n - f\|_{\infty} \longrightarrow 0.$$

Essa formulação liga o capítulo diretamente à linguagem de espaços métricos: a distância uniforme entre duas funções é o maior erro cometido simultaneamente em todo o domínio.

No critério pelo supremo que aparece a seguir, não precisamos supor que $f_n - f$ seja limitada para todos os índices iniciais. Se necessário, interpretamos

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$$

como um valor em $[0, \infty]$. A convergência uniforme garante que esses supremos são finitos a partir de algum índice, e o critério afirma precisamente que eles tendem a zero.

11.5 Definição. Considere uma sequência de funções (f_n) todas definidas no mesmo conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que a sequência (f_n) **converge uniformemente** para f em A se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um natural N tal que, para todo $n \geq N$, temos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

Denotaremos tal convergência por $f_n \xrightarrow{u} f$.

Simbolicamente, temos:

$$f_n \xrightarrow{u} f \text{ em } A \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in A, \forall n \geq N(\varepsilon), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (11.2)$$

A diferença crítica entre convergência pontual e uniforme é a seguinte. No caso de convergência uniforme, pedimos o mesmo N para todos os x em A . Por isso é chamada de convergência uniforme. No caso de convergência pontual, para cada x em A , temos um N possivelmente diferente. A convergência uniforme implica que as funções convergem a uma taxa uniforme em todo o intervalo. Isso garante que a diferença entre $f_n(x)$ e $f(x)$ pode ser controlada para todos os x simultaneamente. Em particular quando uma sequência de funções converge uniformemente para uma função limite $f(x)$, os gráficos das funções $f_n(x)$ se aproximam de $f(x)$ de maneira que, a partir de um certo ponto n , todos os gráficos estarão próximos de $f(x)$ em todo o intervalo, vide Figura 11.5.

11.6 Exemplo. Considere a sequência de funções (f_n) , onde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Os gráficos das cinco primeiras funções dessa sequência são apresentados na Figura 11.6.

Esta sequência de funções converge pontualmente para a função constante 0, já que, para qualquer $x_0 \in [0, 1]$, temos

$$|f_n(x_0) - 0| = \left| \frac{x_0^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, note que no argumento acima, o limite obtido no final não depende explicitamente do ponto x_0 . De fato, se verificarmos a convergência em um ponto diferente $y_0 \in [0, 1]$, o argumento seria idêntico. Isso implica que essa convergência é mais forte que a pontual: ela é uniforme.

Vamos provar a convergência uniforme. Dado $\varepsilon > 0$. Afirmamos que $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$ pode ser usado para demonstrar a convergência uniforme em $[0, 1]$. De fato, para qualquer $n \geq N$, em qualquer $x \in [0, 1]$, temos:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \varepsilon.$$

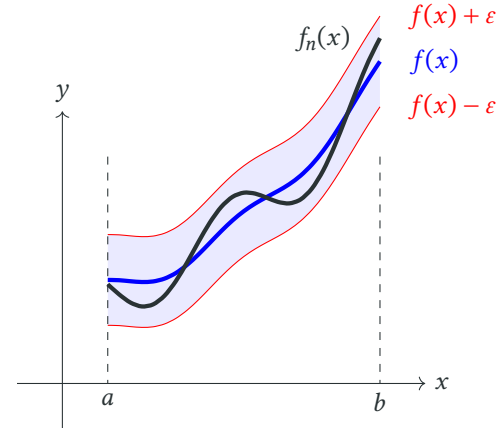


Figura 11.5 Gráfico ilustrando a convergência uniforme.

A convergência uniforme de uma sequência de funções (f_n) sobre um conjunto A acontece quando conseguimos controlar simultaneamente, e de forma uniforme, a aproximação de f_n a uma função limite f em todos os pontos de A . Intuitivamente, isso significa que não precisamos ajustar o critério de aproximação de acordo com cada ponto do domínio. Assim para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um N tal que, a diferença $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos os pontos do conjunto A , não importando em qual ponto se olhe. Veja que o mesmo N funciona para todos os pontos.

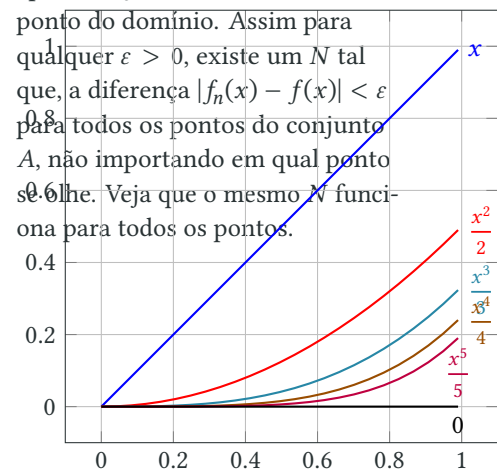


Figura 11.6 Gráficos das funções $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ para $n = 1, \dots, 5$.

Assim, concluímos que $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[0, 1]$.

11.7 Teorema (Critério de Convergência Uniforme). Considere uma sequência de funções (f_n) . Para cada $n \geq 1$, f_n é definida em A . Para uma função fixa f definida em A e $n \geq 1$, defina, permitindo o valor $+\infty$,

$$m_n = \sup_{x \in A} \{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$$

A sequência (f_n) converge uniformemente para f se, e somente se, m_n converge para 0.

Demonstração. Demonstramos as implicações separadamente.

($\Leftarrow$) Suponha que $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$. Pela definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Isso significa que, para todo $n \geq N$, e para todo $x \in A$, temos:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

o que demonstra a convergência uniforme.

($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, nosso objetivo é encontrar um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Como f_n converge uniformemente para f , existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in A$ e $n \geq N$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Isso significa que, para cada $n \geq N$, o conjunto $A_n = \{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente por $\frac{\varepsilon}{2}$ e, portanto, seu supremo também é limitado superiormente por $\frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $n \geq N$, temos:

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

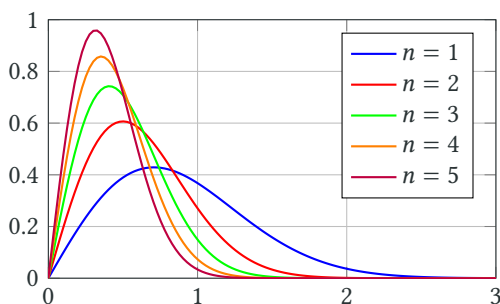
□

Portanto, simbolicamente, a convergência uniforme $f_n \xrightarrow{u} f$ sobre A também pode ser escrita como:

$$f_n \xrightarrow{u} f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Usar a definição de convergência uniforme por supremo pode tornar as coisas mais claras, porque deixa mais nítida a independência de N dos pontos do conjunto.

Gráfico de $n \cdot x \cdot e^{-n \cdot x^2}$ para $n = 1$ até $n = 5$



11.8 Exemplo. Para ilustrar o teorema anterior, consideramos a sequência

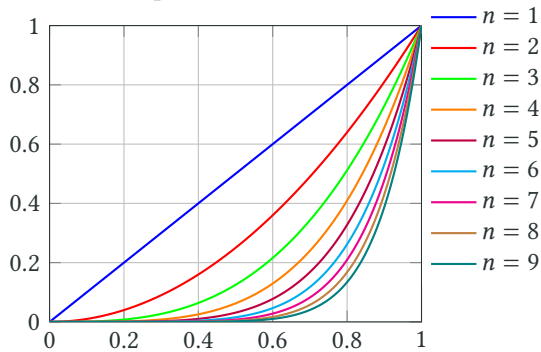
$$S_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esta sequência temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$ para todo $0 \leq x < \infty$. No entanto,

$$M_n = \sup_{x \in [0, \infty)} S_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2e}},$$

que diverge para ∞ . Assim, a convergência não é uniforme em $[0, \infty)$. No entanto, a sequência (S_n) converge uniformemente à função zero em $[a, \infty)$ para todo $a > 0$.

Gráfico de x^n para $n = 1$ até $n = 9$ em $[0, 1]$



11.9 Exemplo. Considere a sequência (f_n) dada por $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$. Esta sequência converge pontualmente à função $f(x) = 0$, para $0 \leq x < 1$, e $f(1) = 1$. Como

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

temos

$$M_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Assim, como (M_n) não converge a zero, a sequência (f_n) não converge uniformemente a f em $[0, 1]$. Por outro lado, se $0 < a < 1$ for fixo, então

$$M_n = \sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)| = a^n.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$, pelo Teorema 11.7, a sequência (f_n) converge uniformemente à função zero em $[0, a]$ para todo $a, 0 < a < 1$.

11.3 Critério de Cauchy para convergência uniforme

A definição de convergência uniforme pressupõe que já conhecemos a função limite. Como ocorre para sequências numéricas, há um critério intrínseco que permite reconhecer convergência comparando apenas os próprios termos da sequência.

11.10 Teorema (Critério de Cauchy). Uma sequência (f_n) de funções reais definidas em um conjunto não vazio A converge uniformemente em A se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (11.3)$$

para todo $x \in A$ e todo $n, m \geq n_0$.

Demonstração. Demonstramos as implicações separadamente.

($\Rightarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em A , existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$ e $x \in A$, temos $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Assim, se $m, n \geq N$, para todo $x \in A$, pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todos $x \in A$, obtemos:

$$\sup_{x \in A} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para quaisquer $m, n \geq N$, o que queríamos demonstrar.

($\Leftarrow$) Por hipótese, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todos $m, n \geq M$. Isso significa que, para todo $x \in A$, temos:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Portanto, para qualquer $x \in A$, a sequência real $(f_n(x))$ é de Cauchy e, consequentemente, convergente. Logo a sequência de funções (f_n) converge pontualmente para alguma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Agora, mostramos que a convergência $f_n \xrightarrow{pt} f$ é, de fato, uniforme. Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n \geq N$ e $x \in A$, temos:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixando n , tomamos o limite quando $m \rightarrow \infty$. Como a sequência de funções (f_m) converge pontualmente para f , para todo $x \in A$, temos $f_m(x) \rightarrow f(x)$ quando $m \rightarrow \infty$. Como limites preservam desigualdades fracas, temos:

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)|.$$

Para todo $x \in A$. Tomando o supremo sobre $x \in A$, obtemos:

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Para todo $n \geq N$. Assim, concluímos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em A . □

11.11 Corolário. A série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ de funções reais definidas num conjunto A não-vazio converge uniformemente em A se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon$$

para todo $x \in A$ e todos os inteiros $m > n \geq n_0$.

Demonstração. A prova do corolário segue aplicando o teorema anterior às somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. $\square$

11.4 Séries de funções e o teste M de Weierstrass

Uma série de funções

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

é estudada por meio de suas somas parciais. Portanto, tudo o que aprendemos sobre sequências de funções se aplica imediatamente às séries. A questão fundamental passa a ser encontrar condições verificáveis que garantam convergência uniforme das somas parciais.

O teste a seguir reduz esse problema funcional a uma série numérica: dominamos cada termo $|f_k(x)|$ por um número M_k , independentemente de x , e pedimos que $\sum M_k$ seja convergente. Esse princípio de dominação será reutilizado várias vezes adiante.

O seguinte teorema de Weierstrass fornece um teste muito útil para a convergência uniforme de uma série de funções.

11.12 Teorema (Teste M de Weierstrass). Suponha que (f_k) seja uma sequência de funções reais definidas em um conjunto não vazio A , e (M_k) seja uma sequência de números reais satisfazendo

$$|f_k(x)| \leq M_k, \quad \text{para todo } x \in A \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, então $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente e absolutamente em A .

Demonstração. Seja $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Então, para $n > m$,

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k.$$

A convergência uniforme segue então pelo Critério de Cauchy. A convergência de $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ também é clara das desigualdades anteriores. $\square$

11.13 Exemplo. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergir absolutamente, então, como $|a_k \cos kx| \leq |a_k|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo teste de Weierstrass, a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Da mesma forma para a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Em particular, as séries

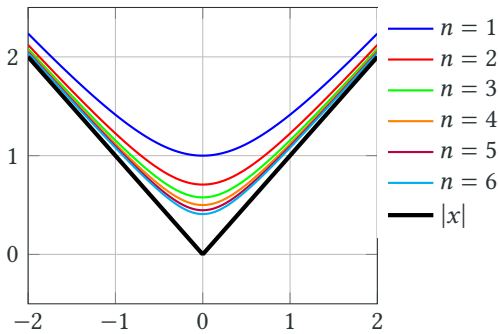
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^p}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^p}, \quad p > 1$$

convergem uniformemente em $\mathbb{R}$.

É fácil ver que a convergência uniforme implica convergência pontual. Veremos em breve que a recíproca não é verdadeira.

Observe que o critério uniforme não nos diz como encontrar a função limite f . Geralmente, procederemos em duas etapas. Primeiro, calcularemos o limite pontual f de (f_n) . Em seguida, usaremos o critério para decidir se a convergência para f é uniforme. A seguir, damos um exemplo do método.

Gráfico de $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ para $n = 1$ até $n = 6$



11.14 Exemplo. Considere a sequência de funções (f_n) definida para todos os reais por

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

A sequência (f_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$? Primeiro, calculamos o limite pontual (se houver). Seja x um número real fixo. À medida que n tende ao infinito, $x^2 + \frac{1}{n}$ converge para x^2 , que é um número positivo. Como a função raiz quadrada é contínua em $[0, \infty)$, obtemos que $f_n(x)$ converge para $\sqrt{x^2} = |x|$. Ou seja, a sequência (f_n) converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para a função f definida por $f(x) = |x|$.

Agora que temos uma função f , o segundo passo é estimar m_n . Calculamos

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}$$

Como $x^2 \geq 0$, temos, para todo x em $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$$

e o mínimo $\sqrt{\frac{1}{n}}$ é atingido em $x = 0$. Assim, para todo x em $\mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e o máximo é atingido em $x = 0$. Logo $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é o máximo (e, portanto, o supremo) do conjunto $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Assim, $m_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ para $n \geq 1$. A sequência m_n converge para 0 e, pelo critério de convergência uniforme, (f_n) converge uniformemente para f .

Ex. 11.3 —

- Se f_n e g_n convergem uniformemente em um conjunto não vazio A , prove que $f_n + g_n$ converge uniformemente em A .
- Se f_n e g_n convergem uniformemente em um conjunto não vazio A e, além disso, existem constantes M e N tais que $|f_n(x)| \leq M$ e $|g_n(x)| \leq N$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in A$, prove que $f_n g_n$ converge uniformemente em A .
- Encontre exemplos de sequências f_n e g_n que convergem uniformemente em um conjunto não vazio A , mas para as quais $f_n g_n$ não converge uniformemente em A .

Ex. 11.4 — Mostre que, se f_n converge uniformemente em (a, b) e $f_n(a)$ e $f_n(b)$ convergem, então f_n converge uniformemente em $[a, b]$.

Ex. 11.5 — Seja $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. Mostre que f_n não converge uniformemente para 0 em $[0, 1]$.

Ex. 11.6 — Seja $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $0 \leq x \leq 1$.

- Mostre que f_n converge uniformemente para 0 em $[0, a]$ para qualquer a , $0 < a < 1$.
- f_n converge uniformemente em $[0, 1]$?

Ex. 11.7 — Mostre que a sequência $nx e^{-nx^2}$ converge uniformemente para 0 em $[a, \infty)$ para todo $a > 0$.

Ex. 11.8 — Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n(x) = x + \frac{x}{n} \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que a sequência f_n converge uniformemente para $f(x) = x$ para todo $x \in [-a, a]$, $a > 0$. f_n converge uniformemente para $f(x)$ em $\mathbb{R}$?

Ex. 11.9 — Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções $A \rightarrow \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Prove que, se $f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para f e se g é uniformemente contínua, então $g \circ f_n)_{n=1}^\infty$ converge uniformemente para $g \circ f$.

11.5 O que a convergência uniforme preserva

A convergência uniforme foi introduzida justamente porque a convergência pontual é insuficiente para transportar propriedades analíticas ao limite. Os resultados desta seção tornam essa afirmação precisa. Continuidade e integração comportam-se particularmente bem; diferenciação exige uma hipótese adicional sobre a sequência das derivadas.

11.15 Teorema (Convergência uniforme preserva a continuidade). Suponha que a sequência (f_n) converge uniformemente para f num conjunto não-vazio A . Suponha que, para $n \geq 1$, a função f_n seja contínua em todo ponto de A . Então f é contínua em A .

Demonstração. Mostraremos que f é contínua em um ponto arbitrário $x_0 \in A$. Seja $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$ com $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Como $f_n \xrightarrow{u} f$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n \geq N$. Em particular, para qualquer $x \in A$ e $n = N$, temos:

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in A} |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Além disso, a função $f_N : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua por hipótese, então ela é contínua em x_0 , e, portanto, existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in A$ com $|x - x_0| < \delta$, temos $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Logo, para qualquer $x \in A$ com $|x - x_0| < \delta$, temos $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Portanto, para qualquer $x \in A$ com $|x - x_0| < \delta$, usando a desigualdade triangular e as desigualdades acima, temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e assim terminamos a demonstração. $\square$

11.16 Exemplo. Considere novamente a sequência $f_n(x) = e^{-nx}$ em $A = [0, \infty)$. Mostraremos que (f_n) converge para f pontualmente, onde f é definida por $f(0) = 1$ e $f(x) = 0$ para $x > 0$. A convergência é uniforme?

Cada f_n é claramente contínua em A , mas f não é. Portanto, a convergência não pode ser uniforme. Este exemplo mostra que a convergência pontual não implica convergência uniforme.

11.17 Teorema (Convergência uniforme e integração). Suponha que, para cada $n \geq 1$, a função f_n seja contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Suponha também que a sequência (f_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Ou seja, podemos trocar o limite e a integral quando temos convergência uniforme.

Demonstração. Dado que as funções f_n são contínuas por hipótese, elas são Riemann integráveis. Como a convergência uniforme preserva a continuidade, f é contínua e, portanto, também integrável.

Seja $\varepsilon > 0$. Aplicando o critério de convergência uniforme ao conjunto $A = [a, b]$ 11.7, existe um natural N tal que, se $n \geq N$, então

$$m_n = \sup_{x \in A} \{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$$

satisfaz $m_n < \varepsilon/(b-a)$. Agora consideremos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

Pela definição de m_n , temos, para cada x em $[a, b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq m_n$$

e, portanto,

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b m_n dx = m_n(b-a)$$

Para $n \geq N$, temos $m_n < \varepsilon/(b-a)$ e, portanto,

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq m_n(b-a) < \varepsilon$$

Isso prova que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, e terminamos. $\square$

A integração termo a termo será usada mais adiante nas séries de potências. Antes disso, resta entender o que ocorre com derivadas sob convergência uniforme.

11.18 Exemplo. Considere a sequência de funções (f_n) definida para todos os reais por

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Primeiro mostramos que, para cada $n \geq 1$, a função f_n é diferenciável em $x = 0$ (na verdade, um argumento muito semelhante mostra que f_n é diferenciável em toda parte). Seja g_n definida por $g_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$. A função g_n é um polinômio e, portanto, é

diferenciável em toda parte, incluindo em $x = 0$. Observe que $g_n(0) = \frac{1}{n}$ e que a função raiz quadrada é diferenciável em $\frac{1}{n}$. De fato, a função raiz quadrada é diferenciável em qualquer número estritamente positivo (mas não em 0). Assim, pelo teorema da cadeia, $f_n = \sqrt{\cdot} \circ g_n$ é diferenciável em $x = 0$.

Observe agora que, no Exemplo 11.14, provamos que (f_n) converge uniformemente para a função valor absoluto, que não é diferenciável em 0. Este exemplo mostra que a convergência uniforme não preserva a diferenciabilidade!

O próximo resultado fornece condições suficientes para que a função limite seja diferenciável. Primeiro, uma definição. Uma função g é dita ser C^1 em (a, b) se a função g é diferenciável em (a, b) e a função g' é contínua em (a, b) .

11.19 Teorema (Convergência uniforme e diferenciação). Suponha que, para $n \geq 1$, a função f_n seja C^1 em $(a, b)^a$. Suponha que a sequência (f_n) converge pontualmente em (a, b) para uma função f . Finalmente, suponha que a sequência das derivadas f'_n converge uniformemente em (a, b) para alguma função g . Então, a função f é C^1 e $f' = g$.

^aUma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde I é um aberto, é dita C^1 se a derivada de f , denotada por f' , existe em todos os pontos de I e é contínua em I .

Note que não exigimos que (f_n) convirja uniformemente.

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_c^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(c) \quad (11.4)$$

para qualquer x e c em (a, b) . Como f'_n converge uniformemente para g em (a, b) e, portanto, em $[c, x]$ (pois a restrição a um subintervalo preserva a convergência uniforme), o resultado sobre convergência uniforme e integração nos dá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f'_n(t) dt = \int_c^x g(t) dt$$

Por outro lado, como (f_n) converge pontualmente para f em (a, b) , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(c)) = f(x) - f(c)$$

Usando os dois limites acima e deixando n ir para o infinito em 11.4, obtemos

$$\int_c^x g(t) dt = f(x) - f(c) \quad (11.5)$$

Observe agora que as funções f'_n são por hipótese contínuas e a sequência f'_n converge uniformemente para g . Portanto, g é contínua. Isso implica, pelo teorema fundamental do cálculo, que $\int_c^x g(t) dt$ é diferenciável com respeito a x e que sua derivada é $g(x)$.

Por 11.5, $f(x) - f(c)$ é igual a uma função diferenciável. Portanto, $f(x) - f(c)$ também é diferenciável, e logo f é diferenciável. Ao derivar em relação a x de ambos os lados de 11.5, obtemos

$$g(x) = f'(x)$$

Como g é contínua, f' também é contínua, e, portanto, f é C^1 em (a, b) . Isso completa a prova do teorema. $\square$

Ex. 11.10 — Para $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0, 1]$. Prove que a sequência (f_n) não converge uniformemente em $[0, 1]$.

Ex. 11.11 — Dê um exemplo de uma sequência de funções que não é contínua em nenhum ponto, mas que converge uniformemente para uma função contínua.

Ex. 11.12 — Suponha que f seja uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Prove que a sequência (f_n) converge uniformemente para f em $\mathbb{R}$.

Ex. 11.13 — Seja (f_n) uma sequência de funções reais contínuas que converge uniformemente para uma função f em um conjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x),$$

para toda sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x \in A$.

Uma convergência monótona em compactos: o Teorema de Dini

Há uma situação importante em que a convergência uniforme aparece quase sem cálculo. A compacidade transforma convergência pontual monótona em convergência uniforme, desde que o limite continue sendo contínuo.

11.20 Teorema (Teorema de Dini). Seja K um espaço métrico compacto e seja (f_n) uma sequência de funções contínuas $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f(x) \quad (x \in K),$$

e que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in K$, onde f é contínua. Então $f_n \rightarrow f$ uniformemente em K .

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e considere

$$U_n = \{x \in K : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}.$$

Como $f - f_n$ é contínua, cada U_n é aberto. A monotonicidade de (f_n) implica $U_n \subset U_{n+1}$, e a convergência pontual implica $K = \bigcup_{n \geq 1} U_n$. Pela compacidade, existe uma subcobertura finita. Como os conjuntos U_n são encaixados, o de maior índice nessa subcobertura já cobre K ; assim, existe N tal que $K = U_N$. Para $n \geq N$, temos $U_N \subset U_n$, e portanto

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in K.$$

Isso é precisamente convergência uniforme. $\square$

A versão para uma sequência decrescente é imediata, aplicando o resultado a $(-f_n)$.

O Teorema de Dini é uma primeira amostra de um tema que agora se tornará central: em espaços compactos, condições locais podem adquirir consequências uniformes.

11.6 Equicontinuidade e o Teorema de Arzelà–Ascoli

Convergência uniforme descreve uma sequência já dada. Em muitos problemas, porém, recebemos uma família inteira de funções e queremos saber se dela podemos extrair alguma sequência uniformemente convergente. Para isso, controlar apenas os valores das funções não basta; precisamos controlar também a maneira como todas elas variam.

Daqui em diante, K será um espaço métrico compacto e $C(K)$ denotará o espaço das funções contínuas $K \rightarrow \mathbb{R}$. Como toda função contínua em um compacto é limitada, a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ está bem definida em $C(K)$. Há ainda uma propriedade estrutural que usaremos na prova de Arzelà–Ascoli.

11.21 Proposição (Completeness de $C(K)$). O espaço $C(K)$, munido da norma do supremo, é completo.

Demonstração. Seja (f_n) uma sequência de Cauchy na norma uniforme. Para cada $x \in K$, a sequência numérica $(f_n(x))$ é de Cauchy e, portanto, converge; defina $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha N tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (m, n \geq N).$$

Fixando $n \geq N$ e fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in K$. Logo $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Como o limite uniforme de funções contínuas é contínuo, $f \in C(K)$. $\square$

11.22 Definição (Equicontinuidade). Sejam K um espaço métrico e $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **equicontínua** em $x \in K$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

para todo $f \in \mathcal{F}$. A família é equicontínua em K se é equicontínua em cada ponto de K .

O ponto essencial é a ordem dos quantificadores: δ pode depender de x e de ε , mas não da função f . Uma família equicontínua varia de forma controlada por uma mesma escala local.

11.23 Proposição. Se K é compacto e $\mathcal{F} \subset C(K)$ é equicontínua, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

para todos $x, y \in K$ e todas as funções $f \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$, pela equicontinuidade existe $\eta_x > 0$ tal que

$$d(x, y) < \eta_x \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Os abertos $B(x, \eta_x/2)$ cobrem K . Escolha uma subcobertura finita

$$B(x_1, \eta_{x_1}/2), \dots, B(x_m, \eta_{x_m}/2)$$

e ponha $\delta = \frac{1}{2} \min_i \eta_{x_i}$.

Se $d(y, z) < \delta$, escolha i com $y \in B(x_i, \eta_{x_i}/2)$. Então também $z \in B(x_i, \eta_{x_i})$, e, para toda $f \in \mathcal{F}$,

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(z)| < \varepsilon.$$

□

11.24 Exemplo. A família $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 1]$, é uniformemente limitada, mas não é equicontínua. De fato, tomando $x_n = 0$ e $y_n = \pi/(2n)$, temos $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, enquanto

$$|f_n(y_n) - f_n(x_n)| = 1.$$

Assim, limitar apenas a altura dos gráficos não controla sua oscilação.

11.25 Exemplo. A família $g_n(x) = \sin(nx)/n$, $x \in [0, 1]$, é equicontínua, pois $|g'_n(x)| = |\cos(nx)| \leq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq |x - y|$$

para todo n . Além disso, $\|g_n\|_\infty \leq 1/n$, de modo que $g_n \rightarrow 0$ uniformemente.

11.26 Definição (Limitação pontual). Uma família $\mathcal{F} \subset C(K)$ é **pontualmente limitada** se, para cada $x \in K$, o conjunto

$$\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$$

é limitado em $\mathbb{R}$.

11.27 Teorema (Arzelà–Ascoli). Seja K um espaço métrico compacto. Uma família $\mathcal{F} \subset C(K)$ tem fecho compacto na norma uniforme se, e somente se, é equicontínua e pontualmente limitada.

Demonstração. Suponha primeiro que $\overline{\mathcal{F}}$ é compacta em $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Para cada $x \in K$, a aplicação de avaliação

$$E_x : C(K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_x(f) = f(x),$$

é contínua, pois $|E_x(f) - E_x(g)| \leq \|f - g\|_\infty$. Portanto $E_x(\overline{\mathcal{F}})$ é compacto em $\mathbb{R}$, logo limitado. Isso mostra a limitação pontual.

Para provar equicontinuidade, fixe $\varepsilon > 0$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é compacta, ela é totalmente limitada; existem $h_1, \dots, h_m \in C(K)$ tais que todo $f \in \mathcal{F}$ satisfaz $\|f - h_i\|_\infty < \varepsilon/3$ para algum i . Cada h_i é uniformemente contínua em K . Como há apenas um número finito delas, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies |h_i(x) - h_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo i . Escolhendo h_i a $\varepsilon/3$ de f , obtemos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - h_i(x)| + |h_i(x) - h_i(y)| + |h_i(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Logo $\mathcal{F}$ é equicontínua.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}$ seja equicontínua e pontualmente limitada. Como K é compacto métrico, existe um conjunto enumerável denso $D = \{x_1, x_2, \dots\} \subset K$: por exemplo, tome a união de uma rede finita de raio $1/r$ para cada $r \geq 1$.

Tome uma sequência (f_n) em $\mathcal{F}$. Pela limitação pontual, a sequência numérica $f_n(x_1)$ é limitada e, portanto, possui uma subsequência convergente. Dessa subsequência extraímos outra que converge em x_2 , e assim sucessivamente. O argumento diagonal fornece uma subsequência, que ainda denotaremos por (f_n) , tal que $f_n(x_j)$ converge para todo $x_j \in D$.

Mostremos que essa subsequência é de Cauchy na norma uniforme. Fixe $\varepsilon > 0$. Pela Proposição 11.23, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. As bolas de raio δ centradas nos pontos de D cobrem K . Pela compacidade, podemos escolher $x_{j_1}, \dots, x_{j_r} \in D$ tais que

$$K \subset \bigcup_{\ell=1}^r B(x_{j_\ell}, \delta).$$

A convergência nos pontos x_{j_ℓ} implica que existe N tal que, para $p, q \geq N$,

$$|f_p(x_{j_\ell}) - f_q(x_{j_\ell})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\ell = 1, \dots, r).$$

Dado $x \in K$, escolha ℓ com $d(x, x_{j_\ell}) < \delta$. Então

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &\leq |f_p(x) - f_p(x_{j_\ell})| + |f_p(x_{j_\ell}) - f_q(x_{j_\ell})| \\ &\quad + |f_q(x_{j_\ell}) - f_q(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo (f_n) é uniformemente de Cauchy. Como $C(K)$ é completo na norma uniforme, ela converge uniformemente para alguma função contínua em K .

Provamos que toda sequência em $\mathcal{F}$ possui subsequência uniformemente convergente. Para passar de $\mathcal{F}$ ao seu fecho, seja $(u_n) \subset \overline{\mathcal{F}}$ e escolha $f_n \in \mathcal{F}$ com $\|u_n - f_n\|_\infty < 1/n$. Uma subsequência (f_{n_k}) converge uniformemente para alguma $f \in C(K)$, e então $u_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente também. Assim $\overline{\mathcal{F}}$ é sequencialmente compacto; como estamos em um espaço métrico, ele é compacto. $\square$

11.28 Exemplo. A sequência $f_n(x) = x^n$ em $[0, 1]$ não é equicontínua. Tomando $x_n = 1$ e $y_n = 1 - 1/n$, temos $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, mas

$$|f_n(x_n) - f_n(y_n)| = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 1 - e^{-1} > 0.$$

Isso explica, em linguagem de famílias, o fenômeno já visto na convergência pontual: perto de 1, os gráficos tornam-se cada vez mais íngremes.

11.29 Corolário. Se K é compacto e $f_n \in C(K)$ é uniformemente limitada e existe $L > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq Ld(x, y)$$

para todos $x, y \in K$ e todo n , então f_n possui uma subsequência uniformemente convergente.

11.7 Aproximação uniforme: Stone–Weierstrass

Arzelà–Ascoli responde quando uma família é compacta, ou quase compacta, na norma uniforme. A pergunta agora é diferente: dadas funções elementares, quantas funções contínuas podemos aproximar por elas? O exemplo fundamental é a álgebra dos polinômios, mas o mecanismo é muito mais geral.

11.30 Definição (Separação de pontos). Seja K um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de funções reais em K . Dizemos que $\mathcal{A}$ **separa pontos** de K se, para quaisquer $x, y \in K$ distintos, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que

$$g(x) \neq g(y).$$

Essa hipótese é necessária. Por exemplo, a álgebra das funções contínuas pares em $[-1, 1]$ não separa x de $-x$; por isso não pode aproximar uniformemente a função $f(x) = x$.

Antes do teorema principal, precisamos de um pequeno fato sobre polinômios.

11.31 Lema. Existe uma sequência de polinômios q_n que converge uniformemente para $|t|$ em $[-1, 1]$.

Demonstração. Defina polinômios em $[0, 1]$ recursivamente por

$$p_0(t) = 0, \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2).$$

Mostraremos que $p_n \rightarrow \sqrt{t}$ uniformemente. Se $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$, então

$$p_{n+1}(t) - p_n(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{t} - p_n(t))(\sqrt{t} + p_n(t)) \geq 0$$

e

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t)) \left(1 - \frac{\sqrt{t} + p_n(t)}{2} \right) \geq 0,$$

pois $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t} \leq 1$. Por indução,

$$0 \leq p_0(t) \leq p_1(t) \leq \dots \leq \sqrt{t}.$$

Logo $p_n(t)$ possui limite $L(t)$. Passando ao limite na relação de recorrência, obtemos $t - L(t)^2 = 0$, e portanto $L(t) = \sqrt{t}$. Como a convergência é monótona e o limite é contínuo, o Teorema de Dini implica que a convergência é uniforme em $[0, 1]$.

Finalmente, ponha

$$q_n(s) = p_n(s^2).$$

Então q_n é polinômio e

$$q_n(s) \longrightarrow \sqrt{s^2} = |s|$$

uniformemente em $[-1, 1]$. $\square$

11.32 Teorema (Stone–Weierstrass, versão real). Seja K um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{R})$ uma subálgebra que contém as funções constantes e separa os pontos de K . Então

$$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K, \mathbb{R}).$$

Em outras palavras, toda função contínua em K pode ser aproximada uniformemente por funções de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Seja $\overline{\mathcal{A}}$ o fecho de $\mathcal{A}$ na norma uniforme. Como soma, multiplicação e multiplicação por escalares são contínuas nessa norma, o fecho ainda é uma subálgebra; ele contém as constantes e separa pontos.

Primeiro mostraremos que $\overline{\mathcal{A}}$ é fechada sob módulo. Seja $g \in \overline{\mathcal{A}}$ e tome $M = \max\{1, \|g\|_\infty\}$. Pelo Lema 11.31, existem polinômios q_n tais que $q_n \rightarrow |\cdot|$ uniformemente em $[-1, 1]$. Como $g/M \in \overline{\mathcal{A}}$ e $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra,

$$Mq_n(g/M) \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Além disso,

$$\|Mq_n(g/M) - |g|\|_\infty \leq M \sup_{|t| \leq 1} |q_n(t) - |t|| \longrightarrow 0.$$

Logo $|g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Consequentemente, se $g, h \in \overline{\mathcal{A}}$, também

$$g \vee h = \max\{g, h\} = \frac{g + h + |g - h|}{2}$$

e

$$g \wedge h = \min\{g, h\} = \frac{g + h - |g - h|}{2}$$

pertencem a $\overline{\mathcal{A}}$.

Agora fixe $f \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{A}$ separa pontos e contém as constantes, para quaisquer $x, y \in K$, $x \neq y$, existe $h \in \mathcal{A}$ com $h(x) \neq h(y)$. A transformação afim

$$g_{x,y}(z) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{h(y) - h(x)}(h(z) - h(x))$$

pertence a $\mathcal{A}$ e satisfaz $g_{x,y}(x) = f(x)$ e $g_{x,y}(y) = f(y)$. Para $y = x$, tome simplesmente a função constante $g_{x,x} = f(x)$.

Fixe agora $x \in K$. Para cada $y \in K$, o conjunto

$$U_{x,y} = \{z \in K : g_{x,y}(z) > f(x) - \varepsilon\}$$

é aberto e contém y . Pela compacidade, existem $y_1, \dots, y_r$ tais que os U_{x,y_i} cobrem K . Defina

$$g_x = g_{x,y_1} \vee \dots \vee g_{x,y_r}.$$

Então $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$,

$$g_x(z) > f(z) - \varepsilon \quad (z \in K),$$

e, como cada $g_{x,y_j}(x) = f(x)$, temos $g_x(x) = f(x)$.

Considere agora

$$V_x = \{z \in K : g_x(z) < f(z) + \varepsilon\}.$$

Esse aberto contém x , e os conjuntos V_x , $x \in K$, cobrem K . Escolha $x_1, \dots, x_m$ tais que $K = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$ e ponha

$$g = g_{x_1} \wedge \dots \wedge g_{x_m}.$$

Como cada $g_{x_i} > f - \varepsilon$, temos $g > f - \varepsilon$. Por outro lado, dado $z \in K$, existe i tal que $z \in V_{x_i}$, e então

$$g(z) \leq g_{x_i}(z) < f(z) + \varepsilon.$$

Logo

$$\|g - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $g \in \overline{\mathcal{A}}$ com $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$. Como $\overline{\mathcal{A}}$ é fechado, $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Como f era arbitrária, $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$. $\square$

11.33 Corolário (Teorema de Aproximação de Weierstrass). Para toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe um polinômio p tal que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Demonstração. As restrições dos polinômios a $[a, b]$ formam uma subálgebra de $C([a, b])$, contém as constantes e separam pontos, pois a própria função $x \mapsto x$ pertence à álgebra. A conclusão segue do Teorema 11.32. $\square$

11.34 Corolário. Se $K \subset \mathbb{R}^d$ é compacto, então as restrições a K dos polinômios em d variáveis são densas em $C(K)$ na norma uniforme.

Demonstração. Os polinômios formam uma álgebra que contém as constantes. Se $x \neq y$ em K , alguma coordenada satisfaz $x_j \neq y_j$; a função coordenada $z \mapsto z_j$ é um polinômio e separa esses dois pontos. Basta aplicar Stone–Weierstrass. $\square$

Ex. 11.14 — Prova dirigida do Teorema de Weierstrass por polinômios de Bernstein. Seja $f \in C([0, 1])$ e defina

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Mostre, seguindo os passos abaixo, que $B_n(f) \rightarrow f$ uniformemente em $[0, 1]$.

1. Prove que, para todo $x \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

2. Diferenciando a identidade binomial, ou usando identidades combinatórias, prove que

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

3. Dado $\varepsilon > 0$, use a continuidade uniforme de f para escolher $\delta > 0$ tal que $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/2$ sempre que $|u - v| < \delta$.

4. Na diferença $B_n(f)(x) - f(x)$, separe os índices em dois grupos:

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \quad \text{e} \quad \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta.$$

Use o item anterior, ponha $M = \|f\|_\infty$ e use também

$$|f(k/n) - f(x)| \leq 2M$$

no segundo grupo. A estimativa

$$\sum_{|k/n-x| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

permite então obter uma cota independente de x e concluir que $\|B_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0$.

5. Finalmente, deduza o Teorema de Weierstrass em um intervalo arbitrário $[a, b]$ por uma mudança afim de variável.

As duas conclusões desta parte são complementares. Arzelà–Ascoli identifica quando uma família tem compacidade na norma uniforme; Stone–Weierstrass identifica quando uma álgebra de funções é densa nessa mesma norma. O primeiro resultado produz subsequências convergentes; o segundo permite aproximar uma função contínua arbitrária.

11.8 Séries de potências

Séries de potências são agora vistas no contexto correto: são séries de funções com estrutura algébrica suficiente para que a convergência possa ser estudada com enorme precisão. Dentro do raio de convergência, a convergência é uniforme em todo subintervalo fechado estritamente interior. É essa uniformidade que justifica continuidade, integração e diferenciação termo a termo.

11.35 Definição. Seja $(a_k)_{k=0}^\infty$ uma sequência de números reais e $c \in \mathbb{R}$. Uma série da forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

é chamada de série de potência em $(x-c)$. Quando $c = 0$, a série é chamada de **série de potência** em x . Os números a_k são chamados de coeficientes da série de potência.

Podemos analisar a convergência de uma série de potência por meio do teste da raiz. Considere a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k.$$

Aplicando o teste da raiz, temos:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k(x-c)^k|} = |x-c| \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x-c|K,$$

onde definimos

$$K = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Dessa forma, a série converge absolutamente se

$$K|x-c| < 1,$$

e diverge se

$$K|x-c| > 1.$$

Note que, se $K = 0$, então para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos $K|x-c| < 1$, garantindo a convergência absoluta em todo o eixo real.

Por outro lado, se $0 < K < \infty$, a condição de convergência absoluta pode ser reescrita como

$$|x-c| < \frac{1}{K}.$$

Essa discussão motiva a seguinte definição

11.36 Definição. Dada uma série de potência $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-c)^k$, o **raio de convergência** R é definido por

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

se $0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, definimos $R = 0$, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, definimos $R = \infty$.

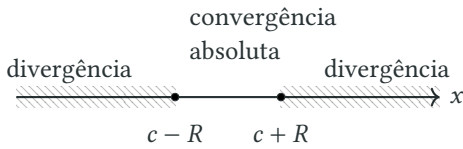
Observamos que quando $R = 0$, a série de potência $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-c)^k$ converge apenas para $x = c$. Por outro lado, se $R = \infty$, então a série de potência converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação. Se $a_k \neq 0$ para todo k e $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|/|a_k|$ existe, então pelo Teorema 4.37 o raio de convergência de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ também é dado por

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

11.37 Teorema. Dada uma série de potência $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ com raio de convergência $0 < R \leq \infty$, então a série:

1. converge absolutamente para todo x com $|x-c| < R$;
2. diverge para todo x com $|x-c| > R$;
3. além disso, se $0 < \rho < R$, então a série converge uniformemente para todo x com $|x-c| \leq \rho$.



Demonstração. As afirmações 1. e 2. foram provadas na discussão que precede o teorema. Suponha $0 < \rho < R$. Escolha β tal que $\rho < \beta < R$. Como

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\beta},$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{\beta} \quad \text{para todo } k \geq n_0.$$

Assim, para $k \geq n_0$ e $|x - c| \leq \rho$,

$$|a_k(x - c)^k| \leq |a_k|\rho^k < \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^k.$$

Mas $\left(\frac{\rho}{\beta}\right) < 1$ e, portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^k < \infty$. Assim, pelo teste M de Weierstrass, a série converge uniformemente em $|x - c| \leq \rho$. $\square$

O teorema anterior não sugere o que acontece quando $|x - c| = R$. Como os seguintes exemplos (com $c = 0$) ilustram, a série pode tanto convergir como divergir quando $|x| = R$. O que é notável é que, em todos os casos possíveis, o conjunto de números reais para os quais a série de potências converge é precisamente um intervalo, o que leva à seguinte definição.

11.38 Definição. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ uma série de potências em $\mathbb{R}$. O **intervalo de convergência** da série de potências é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n \text{ é convergente}\}.$$

Gráfico de $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ para $x \in (-1, 1)$

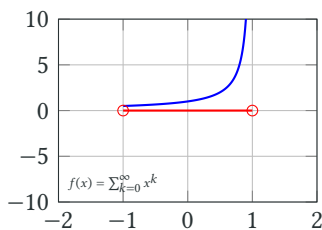
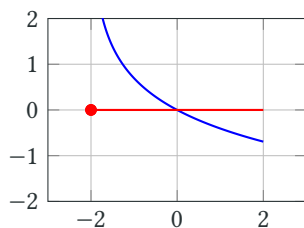


Gráfico de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n$ para $x \in (-2, 2)$.



11.39 Exemplo.

1. A série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ tem raio de convergência $R = 1$. Esta série diverge tanto em $x = 1$ quanto em $x = -1$.
2. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n$ a série de termo $a_n = \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n$. Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x|}{1} \rightarrow \frac{1}{2}|x| \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Pelo teste da razão, a série de potências converge se $\frac{|x|}{2} < 1$ e diverge se $\frac{|x|}{2} > 1$. Portanto, o raio de convergência dessa série é 2.

Agora examinamos os extremos. Substituindo $x = 2$ na série, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que converge pelo teorema da série alternada. Por outro lado, substituindo $x = -2$ na série de potências, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que diverge. Portanto, a série de potências converge em $(-2, 2]$.

3. A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ também tem raio de convergência $R = 1$. Neste caso, quando $x = 1$ a série diverge; enquanto que, para $x = -1$, a série é alternada e converge pelo Teorema 4.38.
4. Considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$. Novamente, o raio de convergência é $R = 1$. Neste exemplo, a série converge tanto em $x = 1$ quanto em $x = -1$.
5. Considere a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Nesse caso o raio de convergência é $R = \infty$ e a série converge em todos os reais. Essa série converge para e^x .
6. Considere a série

$$1 + 2x + 3^2x^2 + 2^3x^3 + 3^4x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

onde

$$a_k = \begin{cases} 3^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ 2^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 3$, e portanto $R = \frac{1}{3}$. A série diverge tanto em $x = \frac{1}{3}$ quanto em $x = -\frac{1}{3}$.

7. Finalmente, considere a série $\sum_{k=1}^{\infty} k!x^k$. Aqui, $a_k = k!$, e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty.$$

Assim, pelo Teorema 4.37, $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow \infty$, e $R = 0$. Portanto, a série de potência converge apenas para $x = 0$.

Ex. 11.15 — Nos itens a seguir determine o raio de convergência das séries de potências fornecidas. Teste a convergência nos pontos de fronteira, caso o raio de convergência seja finito.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)2^n}.$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z+1)^n}{n^2+1}.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}.$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 2^n z^n}{2n}.$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} z^n}{n}.$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] z^n.$

Ex. 11.16 — Suponha que a sequência a_n seja limitada, mas que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Prove que o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é igual a 1.

Ex. 11.17 — Se $A \subseteq \mathbb{R}$, defina $-A$ como sendo $\{-a : a \in A\}$. Seja A o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Prove que o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ é $-A$.

Ex. 11.18 — Nos itens a seguir determine o raio de convergência das séries de potências fornecidas.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh an) z^n, \quad a > 0.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh an) z^n, \quad a > 0.$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, b > 0.$

Ex. 11.19 — Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência em $\mathbb{R}$ para as seguintes séries de potências:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} j^{20} x^j.$

b) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{3^j j^4}.$

c) $\sum_{j=1}^{\infty} j x^j.$

f) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} x^j.$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{5^j} x^j.$

g) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{(2j)} j}{(j!)^2} x^j.$

e) $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j j^2 x^j.$

h) $\sum_{j=1}^{\infty} \ln(j) x^j.$

Ex. 11.20 — A função de Bessel de ordem $p \in \mathbb{N}_0$ é definida pela série de potências:

$$J_p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+p}.$$

Prove que essa série de potências converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

As funções de Bessel foram definidas pela primeira vez por Daniel Bernoulli (1700–1782) e generalizadas por Friedrich Bessel (1784–1846). Essas funções aparecem em muitos problemas aplicados em matemática, como condução de calor, vibrações e eletromagnetismo.

11.9 Propriedades das séries de potências

11.40 Teorema. Suponha que uma função f seja representada pela série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

em um intervalo aberto $(c - r, c + r)$. Então, f é contínua neste intervalo, e sua integral sobre qualquer subintervalo fechado pode ser computada integrando a série termo a termo. Em particular, para todo x em $(c - r, c + r)$, temos

$$\int_c^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^x (t - c)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - c)^{n+1}.$$

Demonstração. Como a série representa f em $(c - r, c + r)$, seu raio de convergência é pelo menos r . Portanto, a série converge absolutamente para todo x no intervalo aberto $(c - r, c + r)$ e converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado $[c - \rho, c + \rho]$, onde $0 < \rho < r$.

Cada termo da série de potências é uma função contínua em todo o eixo real. Aplicando o Teorema 11.15, que estabelece que a convergência uniforme de funções contínuas implica a continuidade da função soma, concluímos que a função f , dada pela soma da série, é contínua em todo o subintervalo fechado $[c - \rho, c + \rho]$. Consequentemente, f é contínua no intervalo aberto $(c - r, c + r)$.

Além disso, o Teorema 11.17 afirma que, se uma série de funções converge uniformemente e cada termo é integrável, então é possível integrar a série termo a termo. Como a série de potências satisfaz essas condições no subintervalo $[c - \rho, c + \rho]$, podemos integrar a série termo a termo nesse intervalo obtendo

$$\int_c^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^x (t-c)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}.$$

Portanto, reunindo esses resultados, concluímos que a função representada pela série de potências é contínua e integrável no intervalo de convergência, o que demonstra o teorema proposto.

□

O teorema anterior garante que o raio de convergência da série integrada é, no mínimo, igual ao da série original. A seguir, demonstraremos que, de fato, ambas as séries possuem o mesmo raio de convergência.

Suponha que a série de potência $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ tenha raio de convergência $R > 0$. Se diferenciarmos a série termo a termo, obtemos a nova série de potência

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1}(x-c)^k.$$

A questão óbvia é: qual é o raio de convergência da série derivada? Além disso, se f é definida por $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$, $|x-c| < R$, a série derivada converge para $f'(x)$? As respostas para ambas as perguntas são dadas pelo teorema a seguir.

11.41 Teorema (Derivação termo a termo). Seja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ uma série de potência com raio de convergência $R > 0$, e defina-se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k, \quad \text{para } |x-c| < R.$$

Então valem as seguintes afirmações:

1. A série $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1}$ possui o mesmo raio de convergência R .
2. A função f é diferenciável em todo intervalo $|x-c| < R$, e sua derivada pode ser obtida derivando termo a termo:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1}.$$

Demonstração. Para conveniência, tomemos $c = 0$. Considere a série derivada $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$. Temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$, e para $x \neq 0$,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Assim, o raio de convergência de $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ também é R .

Além disso, fixe $0 < \rho < R$ e considere as somas parciais $S_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$. Temos $S_N \rightarrow f$ pontualmente em $(-\rho, \rho)$, enquanto $S'_N(x) = \sum_{k=1}^N k a_k x^{k-1}$ converge uniformemente nesse intervalo. Aplicando o Teorema 11.19 às somas parciais, concluímos que f é diferenciável em $(-\rho, \rho)$ e que sua derivada é a soma da série derivada. Como $\rho < R$ é arbitrário,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \text{para todos } x, |x| < R.$$

□

11.42 Corolário. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências. Então, o raio de convergência da série $f(x)$ é o mesmo que o da série integrada

$$\int f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-c)^{n+1}}{n+1}.$$

Como toda série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n$ pode ser obtida diferenciando sua série integrada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x-c)^{n+1}}{n+1}$, o Teorema 11.41 garante que ambas as séries compartilham o mesmo raio de convergência.

11.43 Corolário. Suponha que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ tenha raio de convergência $R > 0$, e

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k, \quad |x-c| < R.$$

Então f possui derivadas de todas as ordens em $|x-c| < R$, e para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-c)^{k-n}. \quad (11.6)$$

Em particular,

$$f^{(n)}(c) = n!a_n.$$

11.44 Definição. Uma função real f definida em um intervalo aberto I é dita infinitamente diferenciável em I se $f^{(n)}(x)$ existir em I para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto de funções infinitamente diferenciáveis em um intervalo aberto I é denotado por $C^\infty(I)$.

Como consequência do Corolário 11.43, se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-c)^k$ tem raio de convergência $R > 0$ e se f é definida por $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ para $|x-c| < R$, então a função f é infinitamente diferenciável em $(c-R, c+R)$ e sua n -ésima derivada é dada por 11.6.

O seguinte resultado de unicidade para séries de potência é outra consequência do Corolário 11.43.

11.45 Corolário. Suponha que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$ sejam duas séries de potência que convergem para todos x , $|x-c| < R$, para algum $R > 0$. Então

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k, \quad |x-c| < R$$

se, e somente se, $a_k = b_k$ para todos $k = 0, 1, 2, \dots$

A demonstração do Corolário será deixada como exercício ao leitor.

11.46 Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ tem intervalo de convergência $(-1, 1)$, e que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para todo $x \in (-1, 1)$. Portanto, f é representada pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, que é centrada em 0.

Essa representação em série de potências de f pode parecer pouco satisfatória, porque o intervalo de convergência da série de potências é apenas uma pequena parte do domínio da função f , e o leitor pode se perguntar se existe alguma outra representação em série de potências de f , centrada em 0, que tenha um intervalo de convergência maior do que $(-1, 1)$. Infelizmente, não existe tal representação em série de potências, porque o Corolário 11.45 afirma que, se uma função tem uma representação em série de potências centrada em um número, essa representação é única.

Na verdade, não deveria ser tão surpreendente que a função f não possa ser representada por uma série de potências centrada em 0 que tenha um intervalo maior de convergência. A função f possui uma assíntota vertical em $x = 1$, e não há possibilidade de estender f para uma função contínua definida em toda $\mathbb{R}$.

11.47 Exemplo. Em $|x| < 1$, temos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Assim, pelos resultados anteriores, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k, \\ \frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k, \end{aligned}$$

e para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+n-1) \cdots (k+1)x^k.$$

11.48 Exemplo. Para todo x real, temos que $\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

De acordo com o Teste M de Weierstrass, a série geométrica

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots$$

converge uniformemente em qualquer intervalo fechado contido dentro do intervalo aberto $(-1, 1)$. Assim, podemos integrar essa série termo a termo, resultando, para $|x| < 1$, na seguinte expressão:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Como veremos, na seção seguinte, este resultado fornece o desenvolvimento da função $\arctg x$ em série de Taylor no intervalo $(-1, 1)$.

11.49 Exemplo. Para todo x real positivo, temos que $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$. De acordo com o Teste M de Weierstrass, a série

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

converge uniformemente em qualquer intervalo fechado contido dentro do intervalo aberto $(-1, 1)$. Assim, podemos integrar essa série termo a termo, resultando, para $|x| < 1$, na seguinte expressão:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

sempre que x pertence ao intervalo aberto $-1 < x < 1$.

Ex. 11.21 — Prove o Corolário 11.45.

11.10 Série de Taylor

Até agora, mostramos que se uma função f é definida por uma série de potência, isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k, \quad |x-c| < R$$

com raio de convergência $R > 0$, então pelo Corolário 11.43, f é infinitamente diferenciável em $(c-R, c+R)$ e os coeficientes a_k são dados por $a_k = f^{(k)}(c)/k!$.

A questão inversa é mais delicada: dada uma função infinitamente diferenciável em um intervalo aberto I e $c \in I$, quando sua série de Taylor representa f em uma vizinhança de c ?

Na seção 11.13 mostraremos que nem sempre existe tal representação. Nesta seção obteremos condições suficientes para que essa representação exista.

Newton derivou a expansão em série de potências de muitas das funções elementares por técnicas algébricas ou integração termo a termo. Maclaurin e Taylor foram alguns dos primeiros matemáticos a usar o cálculo de Newton para determinar os coeficientes na expansão em série de potências de uma função.

Isso leva à seguinte definição:

11.50 Definição. Seja f uma função de valor real definida em um intervalo aberto I , e seja $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $f^{(n)}(x)$ exista para todo $x \in I$. O polinômio

$$T_n(f, c)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

é chamado de **polinômio de Taylor** de ordem n de f no ponto c . Se f é infinita-

mente diferenciável em I , a série

$$T(f, c)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

é chamada de **série de Taylor** de f em c .

Para o caso especial em que $c = 0$, a série de Taylor de uma função f é frequentemente referida como a **série de Maclaurin**.

11.51 Definição (Função analítica). Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **analítica em** $c \in I$ se existe $r > 0$, com $(c - r, c + r) \subset I$, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (|x - c| < r).$$

A função é **analítica em** I se é analítica em cada ponto de I .

Toda função analítica é C^∞ . A recíproca é falsa: possuir derivadas de todas as ordens não obriga uma função a coincidir com a série determinada por essas derivadas. O contraexemplo da Seção 11.13 tornará essa distinção explícita.

Os exemplos elementares ajudam a fixar a definição. Polinômios são analíticos em toda a reta; funções racionais são analíticas em cada ponto de seu domínio. Além disso, para todo $c \in \mathbb{R}$,

$$e^x = e^c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - c)^n}{n!},$$

de modo que a exponencial é analítica em $\mathbb{R}$. Para o seno, as derivadas se repetem com período quatro e a expansão em torno de qualquer c é

$$\sin x = \sin c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - c)^{2n}}{(2n)!} + \cos c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - c)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

e ambas as séries têm raio de convergência infinito. Portanto $\sin$ também é analítica em toda a reta. Esses exemplos recuperam aqui, no capítulo de séries de potências, o material que não deve permanecer no capítulo de derivadas.

Os três primeiros polinômios de Taylor T_0, T_1, T_2 são dados especificamente por

$$\begin{aligned} T_0(f, c)(x) &= f(c) \\ T_1(f, c)(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) \\ T_2(f, c)(x) &= f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 \end{aligned}$$

No exercício 11.34 temos um exemplo no qual a série de Taylor de $f(x)$ não converge para $x \neq a$ e, pior ainda, se convergir, sua soma pode ou não ser igual a $f(x)$ como mostra o Exemplo 11.63.

Uma condição necessária e suficiente para que as respostas a ambas as perguntas sejam afirmativas pode ser obtida por meio da fórmula de Taylor com resto:

11.52 Teorema. Se f tem derivada contínua de ordem $n + 1$ em um certo intervalo contendo a , então, para todo x desse intervalo, tem-se a fórmula de Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + E_n(x),$$

com

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Claramente a soma finita representa o polinômio de Taylor de grau n gerado por f em a , e $E_n(x)$ é o erro cometido na aproximação de f pelo seu polinômio de Taylor. Ao considerarmos $n \rightarrow \infty$ na equação acima, observamos que a série de potências convergirá para $f(x)$ se, e somente se, o resto tender para zero. A seguir, apresentaremos uma condição suficiente para que o resto tenda a 0 em qualquer intervalo ao redor do ponto a .

Começamos observando que a integral pode ser expressa de uma maneira ligeiramente diferente e mais conveniente por meio de uma mudança de variável. Definamos

$$t = x + (a-x)u, \quad dt = -(x-a)du,$$

e notemos que u varia de 1 a 0 quando t varia de a a x . Assim, a integral torna-se

$$E_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (a-x)u] du. \quad (11.7)$$

Esta forma do erro permite-nos enunciar a seguinte condição suficiente de convergência da série de Taylor.

11.53 Teorema. Se f é infinitamente diferenciável num intervalo aberto $I = (a-r, a+r)$ e existe uma constante positiva A tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq A^n \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.8)$$

para todo x em I , então a série de Taylor de f em a converge para $f(x)$ para todo o x em I .

Demonstração. Substituindo a desigualdade 11.8 na fórmula integral 11.7 obtemos

$$0 \leq |E_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} A^{n+1} \int_0^1 u^n du = \frac{|x-a|^{n+1} A^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{B^{n+1}}{(n+1)!}$$

onde $B = A|x-a|$. Como $B^n/n! \rightarrow 0$ para todo B fixo, concluímos que $E_n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in I$. $\square$

Série de potências das funções exponencial e trigonométricas

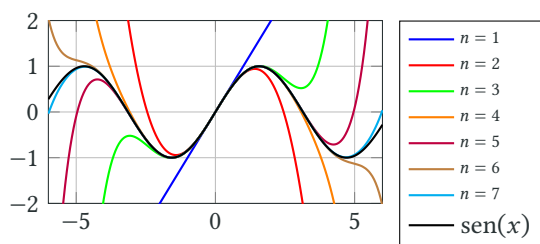
As funções seno e cosseno e todas as suas derivadas são limitadas por 1 em todo o eixo real. Portanto a desigualdade 11.8 é válida com $A = 1$ se $f(x) = \sin x$ ou se

$f(x) = \cos x$, e temos os desenvolvimentos em série

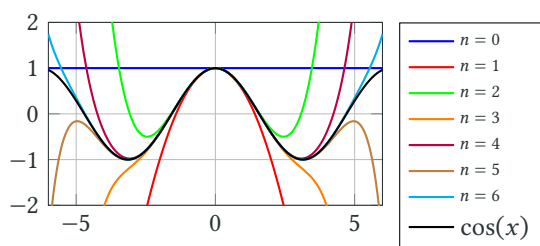
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\end{aligned}$$

válidos para todo x real.

$\operatorname{sen}(x)$ e os primeiros polinômios de Taylor no intervalo $[-6, 6]$



$\cos(x)$ e os primeiros polinômios de Taylor no intervalo $[-6, 6]$

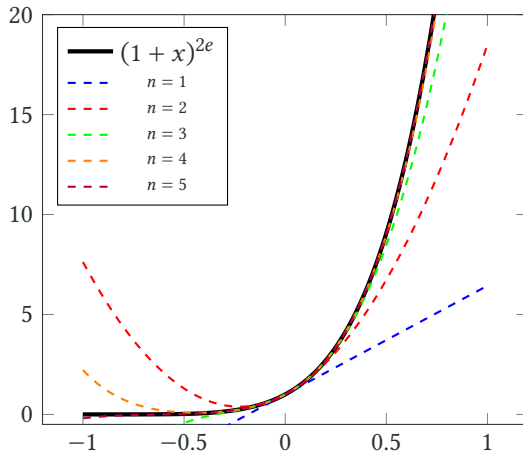


Para a função exponencial, $f(x) = e^x$, temos $f^{(n)}(x) = e^x$ qualquer que seja x , pelo que em qualquer intervalo finito $(-r, r)$ temos $e^x \leq e^r$. Deste modo 11.8 verifica-se com $A = e^r$. Uma vez que r é arbitrário, isto mostra que o seguinte desenvolvimento em série de potências é válido para todo o x real:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Série Binomial

Seja $r \in \mathbb{R}$, e seja $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x)^r$ para todo $x \in (-1, 1)$.



Calculamos a série de Maclaurin para f . Temos, que f é infinitamente diferenciável e que, para $x \in (-1, 1)$,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} r(r-1)\cdots(r-k+1)(1+x)^{r-k}, & \text{se } k \in \mathbb{N}, \\ (1+x)^r, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

e logo

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} r(r-1)\cdots(r-k+1), & \text{se } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Para conveniência, usamos a seguinte notação padrão. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O **coeficiente binomial** $\binom{a}{k}$ é definido por

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}, & \text{se } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Observamos que, se $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $k \in \{0, \dots, a\}$, então esta definição de $\binom{a}{k}$ coincide com a definição padrão de $\binom{a}{k}$.

Temos então que a série de Maclaurin de f é

$$Tf, 0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n.$$

Esta série de potências é chamada de **série binomial** para r . Determinaremos o intervalo de convergência desta série. Se r for um número natural, o coeficiente binomial

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}$$

é zero para $n > r$, de modo que a série binomial é um polinômio de grau r , que, pelo teorema binomial, é igual a $(1+x)^r$. No que segue, assumimos que r não é um número natural.

Se a_n é o n -ésimo termo da série binomial, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r-n}{n+1}x \rightarrow -x \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

de modo que o raio de convergência da série binomial é 1.

Nos casos em que o raio de convergência é 1, a convergência ou divergência da série binomial em $x = 1$ e $x = -1$ depende do valor de r ;

A função f é representada pela sua série de Maclaurin? A resposta é sim, e podemos provar esse fato agora. Seja $q : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(x) = (1+x)^{-r} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Temos que q é diferenciável. É deixado para o leitor verificar que $q'(x) = 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. É direto verificar que $q(0) = 1$, e logo $q(x) = 1$ para todo $x \in (-1, 1)$. Conclui-se que $f(x)$ é igual à sua série de Maclaurin para todo $x \in (-1, 1)$, e, portanto, f é representada pela sua série de Maclaurin.

11.54 Exemplo. Determinamos a série de Maclaurin para $\arcsen x$ da seguinte maneira. Usando a série binomial, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots \end{aligned}$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Como

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Temos que

$$\arcsen x = \int_0^x \arcsen' t \, dt = x + \frac{1}{2 \cdot 1! \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7}x^7 + \dots$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Finalmente como $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, e, portanto, $\frac{\pi}{6} = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$. Assim, temos

$$\pi = 6 \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1! \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7 \cdot 2^7} + \dots \right).$$

Ex. 11.22 — Para cada uma das séries de potências nos itens a seguir determine o conjunto de todos os valores reais de x para os quais a série converge e calcule a soma da série.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}.$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n nx^n.$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n.$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!}.$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}.$$

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}.$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

$$j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}.$$

Ex. 11.23 — Cada uma das funções nos itens a seguir admite uma representação em série de potências em termos de x . Suponha a existência da expansão, verifique que os coeficientes têm a forma indicada e mostre que a série converge para os valores de x indicados.

$$a) a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n, \quad a > 0 \quad (\text{todo } x). \quad \text{extbfDica: } a^x = e^{x \log a}.$$

$$b) \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{todo } x).$$

$$c) \sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (\text{todo } x). \quad \text{extbfDica: } \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$d) \frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} \quad (|x| < 2).$$

$$e) e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad (\text{todo } x).$$

Ex. 11.24 — Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Qual é a série de Maclaurin de p ?

Ex. 11.25 — Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja representada por uma série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Encontre uma condição na sequência $c_n)_{n=1}^{\infty}$ que seja equivalente à condição $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e prove a equivalência. Uma função que satisfaz essa condição é chamada de função **par**.

Ex. 11.26 — Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f seja representada por uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Seja R o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. Encontre uma condição na sequência $c_n)_{n=1}^{\infty}$ que seja equivalente a f ter um máximo local em a , e prove a equivalência.

11.11 Calculando a série de Taylor

Se f possui uma série de Taylor em torno de a , então a série é única. Se pudermos estabelecer por qualquer meio que uma série de potências da forma correta representa f em uma vizinhança de a , então essa série de potências deve ser a série de Taylor. Muitas vezes, substituições simples, identidades algébricas, diferenciação ou integração podem ser usadas para facilitar o cálculo de uma série de Taylor. Os exemplos que seguem ilustram como isso é feito.

11.55 Exemplo. Encontre a série de Maclaurin para $\cos x^3$.

Solução: Para cada $w \in \mathbb{R}$, a definição de $\cos w$ fornece

$$\cos w = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \dots$$

Seja $w = x^3$. Então

$$\begin{aligned}\cos x^3 &= 1 - \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^4}{4!} - \frac{(x^3)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{18}}{6!} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{6j}}{(2j)!}\end{aligned}$$

11.56 Exemplo. Encontre a série de Taylor para $\frac{1}{x}$ em torno de 3.

Solução: Para todo $x \neq 0$, temos

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3 + x - 3} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{x-3}{3}\right)}$$

Agora, para todo w tal que $|w| < 1$,

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - w^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n$$

Portanto, para todo x tal que

$$\left| \frac{x-3}{3} \right| < 1 \quad \text{ou seja,} \quad |x-3| < 3,$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-3}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{x-3}{3} \right) + \left(\frac{x-3}{3} \right)^2 - \left(\frac{x-3}{3} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n\end{aligned}$$

11.57 Exemplo. Encontre a série de Taylor para e^x em torno de 1.

Solução: Para todo $w \in \mathbb{R}$,

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$$

Seja $w = x - 1$. Então

$$e^{x-1} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} e^x &= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-1)^j}{j!} \end{aligned}$$

11.58 Exemplo. Encontre a série de Maclaurin para

$$\frac{x}{(1+x)^2}$$

Solução: Para todo w tal que $|w| < 1$, temos

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{j=0}^{\infty} w^j$$

e como as séries de potências podem ser diferenciadas termo a termo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} j w^{j-1} = \frac{1}{(1-w)^2}$$

Seja $w = -x$. Então

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j x^{j-1}$$

de modo que

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j x^j$$

11.59 Exemplo. Encontre a série de Maclaurin para

$$\log(1+x^2)$$

Solução: A série de Maclaurin pode ser obtida prontamente a partir da série de Maclaurin para $\log(1+w)$. Derivamos a série a partir da série geométrica para ilustrar o uso da integração.

A integração por substituição produz

$$\int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt = \log(1+x^2)$$

e para cada x tal que $|x| < 1$, uma simples substituição na série geométrica dá

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

de modo que

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j+1}$$

Sabemos que as séries de potências podem ser integradas termo a termo dentro do intervalo de convergência. Assim, temos

$$\begin{aligned} \log(1+x^2) &= \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^j t^{2j+1} dt \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+2} x^{2j+2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} x^{2j+2} \end{aligned}$$

11.60 Exemplo. Encontre a série de Maclaurin para $\cos^2 x$.

Solução: Sabemos a série de Maclaurin para $\cos x$, mas é claro que simplesmente elevar ao quadrado essa série envolve uma multiplicação de séries infinitas que, por si só, pode ser complicada. Em vez disso, exploramos a identidade trigonométrica

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

A série de Maclaurin para $\cos 2x$ pode ser derivada por uma simples substituição; portanto,

$$\cos 2x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2)^{2j}}{(2j)!} x^{2j}$$

Assim, temos

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^{2j-1}}{(2j)!} x^{2j} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^{2j-1}}{(2j)!} x^{2j}$$

Ex. 11.27 — Use a série geométrica para determinar a série de Taylor para as seguintes funções no ponto indicado a :

- a) $\frac{1}{2+x}$, $a = -1$;
- b) $\frac{1}{x(x+1)}$, $a = 1$;
- c) $\arctan x$, $a = 0$;
- d) $\frac{1}{(2+x)^3}$, $a = 0$.

Ex. 11.28 — Use as séries de Maclaurin para $\sin x$ e $\cos x$ juntamente com identidades trigonométricas para determinar a série de Taylor para as seguintes funções em torno de a :

a) $\sin x \sin 2x, \quad a = 0;$

b) $\frac{1 - \cos x}{x}, \quad a = 0;$

c) $\cos x, \quad a = \frac{\pi}{2};$

d) $\cos x \sin x, \quad a = 0.$

Ex. 11.29 — Mostre que $x^{1/3}$ é representável por uma série de Taylor em torno de 1 no intervalo $(0, 2)$.

Ex. 11.30 — Mostre que $\cos x$ é representável por uma série de Taylor em torno de qualquer número real.

Ex. 11.31 — Seja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ para todo $x \neq 0$ e seja $f(0) = 1$. Estime $\int_0^1 f$ usando cinco termos da série de Maclaurin para f , e encontre um limite superior para o erro.

Ex. 11.32 — Para as seguintes funções f , encontre a série de Maclaurin para $\int_0^x f(t) dt$ e dê os intervalos de convergência:

a) $\sin t^2;$

b) $e^{-t^2}.$

Ex. 11.33 — Encontre as séries de Maclaurin para $\sinh x$ e $\cosh x$ e dê os intervalos de convergência.

11.12 Funções trigonométricas

A diferenciabilidade termo a termo das séries de potências permite uma construção rigorosa das funções trigonométricas, sem recorrer à intuição geométrica. Vamos apresentar brevemente as funções seno e cosseno. As séries a seguir possuem raio de convergência infinito, o que significa que definem funções C^∞ em toda a reta. Para todo $x \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\operatorname{co}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{e} \quad \operatorname{si}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Estas são as funções que, na notação usual do Cálculo, denotamos por $\cos$ e $\sin$. Assim,

$$\cos x = \operatorname{co}(x) \quad \text{e} \quad \sin x = \operatorname{si}(x).$$

Nesta construção manteremos os símbolos co e si enquanto deduzimos suas propriedades diretamente das séries de potências.

Segue de imediato das definições que $\text{co}(0) = 1$, $\text{si}(0) = 0$, $\text{co}(-x) = \text{co}(x)$ e $\text{si}(-x) = -\text{si}(x)$.

11.61 Proposição (Propriedades do Seno e Cosseno).

1. $\text{si}^2(x) + \text{co}^2(x) = 1$ para todo real x .
2. $|\text{si}(x)| \leq 1$ e $|\text{co}(x)| \leq 1$.
3. $\text{si}(x + y) = \text{si}(x)\text{co}(y) + \text{si}(y)\text{co}(x)$ para todos os reais x, y .
4. $\text{co}(x + y) = \text{co}(x)\text{co}(y) - \text{si}(x)\text{si}(y)$ para todos os reais x, y .

Demonstração.

1. Derivando termo a termo, obtemos: $\text{si}'(x) = \text{co}(x)$ e $\text{co}'(x) = -\text{si}(x)$. Com isso, podemos concluir que $\text{si}(x)^2 + \text{co}(x)^2 = 1$ para todo x . De fato, a função $f(x) = \text{si}(x)^2 + \text{co}(x)^2$ possui derivada:

$$f'(x) = 2\text{si}(x)\text{si}'(x) + 2\text{co}(x)\text{co}'(x) = 2\text{si}(x)\text{co}(x) - 2\text{co}(x)\text{si}(x) = 0.$$

Como $f(0) = 1$, segue que $f(x) = 1$ para todo x .

2. Observe que

$$\text{si}^2(x) \leq \text{si}^2(x) + \text{co}^2(x) = 1$$

Assim,

$$\text{si}^2(x) \leq 1, \quad \text{e, portanto,} \quad |\text{si}(x)| \leq 1$$

O mesmo argumento mostra que $|\text{co}(x)| \leq 1$.

3. e 4. Provamos as fórmulas de adição:

$$\begin{cases} \text{si}(x + y) = \text{si}(x)\text{co}(y) + \text{co}(x)\text{si}(y), \\ \text{co}(x + y) = \text{co}(x)\text{co}(y) - \text{si}(x)\text{si}(y). \end{cases}$$

Para demonstrá-las, fixamos y e definimos as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{si}(x + y) - (\text{si}(x)\text{co}(y) + \text{co}(x)\text{si}(y)) \quad \text{e} \\ g(x) &= \text{co}(x + y) - (\text{co}(x)\text{co}(y) - \text{si}(x)\text{si}(y)). \end{aligned}$$

Temos que $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, o que implica que $(f(x)^2 + g(x)^2)' = 0$. Como $f(0) = g(0) = 0$, concluímos que $f(x) = g(x) = 0$ para todo x , provando as fórmulas de adição. $\square$

11.62 Proposição (Número π). A equação $\text{co}(x) = 0$ possui uma menor solução positiva. Esta solução é denotada por $\pi/2$.

Demonstração. Precisaremos de dois passos para provar que $\text{co}(x) = 0$ possui uma menor solução positiva.

No primeiro passo, mostraremos que existe pelo menos uma solução positiva da equação $\text{co}(x) = 0$. O Teorema do Valor Médio afirma que se f é diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, existe c em (a, b) tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Aplicamos o Teorema do Valor Médio à função seno. Existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$\text{si}(2) - \text{si}(0) = 2 \text{co}(c)$$

Logo,

$$2 \text{co}(c) = \text{si}(2)$$

Em particular,

$$|\text{co}(c)| = \frac{|\text{si}(2)|}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Note que se $|a| \leq \frac{1}{2}$, então $a^2 \leq \frac{1}{4}$. Portanto,

$$\text{co}^2(c) \leq \frac{1}{4} \quad (11.9)$$

Agora mostramos que $\text{co}(2c) < 0$. Temos

$$\text{co}(2c) = \text{co}^2(c) - \text{si}^2(c) = \text{co}^2(c) - (1 - \text{co}^2(c)) = 2 \text{co}^2(c) - 1$$

Usando 11.9, temos

$$2 \text{co}^2(c) - 1 \leq 2 \left(\frac{1}{4} \right) - 1 < 0.$$

Assim, a função co é estritamente negativa em $2c$. Mas $\text{co}(0) = 1$. Logo pelo Teorema do Valor Intermediário temos que existe d em $(0, 2c)$ tal que $\text{co} d = 0$. Isso completa nosso primeiro passo.

No segundo passo, mostramos que o conjunto de soluções positivas da equação $\text{co}(x) = 0$ tem um menor elemento. Seja

$$A = \{x \geq 0 : \text{co}(x) = 0\}$$

Como $\text{co}(0) = 1$ e co é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\text{co}(x) > 0$ para $0 \leq x < \delta$. Logo A não possui elementos em $[0, \delta)$. Como A é não vazio pelo primeiro passo, seu ínfimo satisfaz $p \geq \delta > 0$. Sabemos que existe uma sequência a_n em A que converge para p . Pela nossa definição de continuidade,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{co}(a_n) = \text{co}(p)$$

já que a função co é contínua em todo ponto. Mas $\text{co} a_n$ é 0 para todo $n \geq 0$, então $\text{co} p = 0$ também. Ou seja, o ínfimo de A está em A . Nenhuma solução positiva de $\text{co}(x) = 0$ pode ser menor que p (pela definição de p). Além disso, p é uma solução. Assim, encontramos um número p que é a menor solução positiva de $\text{co}(x) = 0$.

□

Como $p = \pi/2$ é o primeiro zero positivo de $\cos$, temos $\cos(x) > 0$ para $0 \leq x < p$. Assim $\sin' = \cos > 0$ em $(0, p)$, e $\sin(p) > 0$. Da identidade $\sin^2(p) + \cos^2(p) = 1$, segue $\sin(p) = 1$. As fórmulas de adição dão então $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(2\pi) = 1$ e $\sin(2\pi) = 0$. Aplicando novamente as fórmulas de adição, obtemos:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são periódicas, com período 2π .

Os resultados apresentados devem ser suficientes para mostrar ao leitor como é possível desenvolver a teoria das funções trigonométricas a partir de séries de potências.

11.13 Exemplo de uma função não representável por série de potência

Nesta seção retornamos à questão inversa: dada uma função infinitamente diferenciável em um intervalo aberto I e um ponto $c \in I$, pode f ser representada por uma série de potências em alguma vizinhança de c ? Especificamente, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

para todos x , $|x - c| < \varepsilon$, com $a_k = f^{(k)}(c)/k!$ para todos $k = 0, 1, 2, \dots$? O seguinte exemplo de Cauchy mostra que isso nem sempre é possível.

11.63 Exemplo. Seja f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t^2} = 0$, f é contínua em 0. Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}.$$

Quando $x = 0$, temos

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Por indução, segue como acima que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P(1/x) e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

onde P é um polinômio de grau $3n$. Esse detalhe é deixado como exercício ao leitor.

Assim, a função f é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Se existe $R > 0$ tal que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ para $|x| < R$, então $a_k = 0$ para todos k . Como consequência, f não pode ser representada por uma série de potência que convirja para f em uma vizinhança de 0.

Ex. 11.34 — Prove que a série de Taylor de $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(t^2 x) dt$ em 0 converge apenas nesse ponto, ou seja, seu raio de convergência é 0.

Fecho do capítulo

Há uma linha única por trás dos resultados deste capítulo. Convergência pontual é informação ponto a ponto; convergência uniforme transforma essa informação em controle global. Equicontinuidade impede oscilações cada vez mais rápidas e, com limitação, produz compacidade por Arzelà–Ascoli. Separação de pontos e estrutura algébrica, por outro lado, produzem densidade por Stone–Weierstrass. Séries de potências constituem o exemplo privilegiado em que essas ideias de convergência, aproximação e regularidade se encontram.

O capítulo termina, portanto, com uma distinção que será importante muitas vezes adiante: uma função pode ser extremamente regular e ainda assim não ser analítica. Ser C^{∞} é uma afirmação sobre a existência de derivadas de todas as ordens; ser analítica é a afirmação muito mais rígida de que a função é recuperada por sua série de Taylor.

Gabarito

2.9 (i) Limitada inferiormente por 2 e ilimitada superiormente. (ii) Limitada inferiormente por -12 e ilimitada superiormente. (iii) Limitada inferiormente por $1/2$ e ilimitada superiormente. (iv) Positiva e ilimitada superiormente; a razão entre termos sucessivos é $(n+1)/2$. (v) $0 < a_n \leq 1$. (vi) $-1 \leq a_n \leq 1/8$. (vii) Limitada inferiormente por 2 e ilimitada superiormente. (viii) $a_n = 1/(n-1)!$, logo $0 < a_n \leq 1$. (ix) Por indução, $\sqrt{2} \leq a_n < 2$.

2.32 Por indução, $|s_{n+1} - s_n| \leq q^{n-1}|s_2 - s_1|$. Se $m > n$,

$$|s_m - s_n| \leq |s_2 - s_1| \sum_{j=n}^{m-1} q^{j-1} \leq \frac{|s_2 - s_1|q^{n-1}}{1-q},$$

que tende a zero. Logo (s_n) é de Cauchy e converge pela completude.

2.33 Escolha, por exemplo, aproximações decimais racionais r_n de $\sqrt{2}$ com $|r_n^2 - 2| < 1/n$ e $r_n > 0$. A sequência é de Cauchy em $\mathbb{R}$, mas não pode convergir em $\mathbb{Q}$, pois qualquer limite racional r satisfaria $r^2 = 2$.

2.34 Completude fornece um ponto entre o supremo dos extremos esquerdos e o ínfimo dos direitos. Na recíproca, bissecte um intervalo entre um elemento do conjunto e uma cota superior; o ponto comum dos intervalos encaixantes é o supremo. A hipótese arquimediana garante que os comprimentos tendem a zero.

2.35 Em $\mathbb{R}((x))$, o elemento positivo x é menor que $1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; portanto o corpo não é arquimediano. Essa infinitesimalidade impede que a bissecção usual, baseada em 2^{-n} , controle toda distância positiva, precisamente o passo usado na recíproca do teorema.

2.36 (i) $\limsup = 1$ e $\liminf = -1$. (ii) $\limsup = 1$ e $\liminf = -1$. (iii) ambos valem 1. (iv) $\limsup = 1$ e $\liminf = -1$. (v) $\limsup = 1$ e $\liminf = 0$, pois toda cauda contém quadrados e não quadrados.

2.37 $\sup_{k \geq n} (-a_k) = -\inf_{k \geq n} a_k$, inclusive com valores estendidos. Tomando ínfimo em n , obtemos a primeira identidade; a segunda é análoga.

2.38 $\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq M_n + M'_n$. Tomando limites, obtemos a primeira desigualdade; a segunda é análoga. Para desigualdade estrita, tome $a_n = (-1)^n$ e $b_n = -(-1)^n$: o lado esquerdo vale 0 e o direito vale 2.

2.39 Da Prop. 2.53: $L = \limsup a_n$ sse infinitas vezes $a_n > L - \varepsilon$ mas eventualmente $a_n < L + \varepsilon$. Logo $L = \sup\{r : a_n > r \text{ infinitas vezes}\}$.

2.40 $\Rightarrow$: pelo Teorema 2.40, toda subsequência convergente tem o mesmo limite da sequência. Para a recíproca, se (a_n) não convergir a L , alguma subsequência permanece a distância pelo menos $\varepsilon > 0$ de L . Ela é limitada e, por Bolzano–Weierstrass, possui uma subsequência convergente cujo limite é diferente de L , contradição.

2.41 Como $1/(2\pi)$ é irracional, as partes fracionárias de $n/(2\pi)$ são densas em $[0, 1]$. Portanto, os restos de n módulo 2π aproximam arbitrariamente $\pi/2$ e $3\pi/2$; daí existem subsequências de $\sin n$ convergindo a 1 e a -1 . Como $-1 \leq \sin n \leq 1$, seguem os valores pedidos.

3.3 (2) implica (3), e (3) implica (1) pela definição. Se (1) vale, a Proposição 3.11 e a independência do representante dão (2). O afastamento uniforme é indispensável: a sequência $x_n = 1/n$ é positiva em todos os índices, mas é nula e representa 0.

3.4 Para subtração: $\varphi(p - q) = [\overline{p - q}] = [\overline{p} - \overline{q}] = \varphi(p) - \varphi(q)$ (verificação da boa-definição análoga às operações). Inverso: para $p \neq 0$, $\varphi(p)^{-1} = [\overline{1/p}] = \varphi(1/p)$. Como $|p| = p$ se $p \geq 0$ e $|p| = -p$ se $p < 0$, a preservação da ordem e dos opostos dá $\varphi(|p|) = |\varphi(p)|$.

3.7 Injetividade: $\iota(r) = \iota(s)$ implica $Q_r = Q_s$, logo $r = s$. Preserva ordem: $r < s \Rightarrow Q_r \not\subseteq Q_s$ (definição reversa de ordem em $\widehat{\mathbb{R}}$), logo $\iota(r) < \iota(s)$. Preserva soma: verificar que $Q_r + Q_s = Q_{r+s}$ pela definição da soma de cortes.

3.9 Seja $H = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$. Como $\mathcal{A}$ tem uma cota superior na ordem reversa, H é não vazio; ele é próprio e fechado para cima. Se H não tem mínimo, já é o supremo. Se tem mínimo h , substitua-o por $H \setminus \{h\}$. Em ambos os casos o corte obtido está contido em cada X e é o maior, na ordem reversa, entre os cortes com essa propriedade; portanto é $\sup \mathcal{A}$.

3.10 Pela prova do Teorema 3.26, $\varphi(r) = \sup_{\mathbb{R}}\{p \in \mathbb{Q} : p < r\}$. Para $r = [\overline{q}]$, esse conjunto é $\{p : p < q\}$; seu supremo na representação por cortes superiores é Q_q . Logo $\varphi([\overline{q}]) = Q_q$.

4.44 A identidade segue de $a_k = A_k - A_{k-1}$ e soma por partes:

$$\sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1})b_k = A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Se $|A_k| \leq M$, então, para $n \geq m$,

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq M|b_n| + M|b_m| + M \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|.$$

Como (b_n) é monótona, a última soma telescopa e o lado direito tende a zero quando $m, n \rightarrow \infty$. Aplique Cauchy para séries.

4.45 Separe os termos positivos p_j e os módulos dos negativos q_j . Convergência condicional implica

$$\sum p_j = +\infty, \quad \sum q_j = +\infty, \quad p_j, q_j \rightarrow 0.$$

Para obter soma L : some positivos até ultrapassar L ; some negativos até ficar abaixo de L ; repita. As ultrapassagens são limitadas pelo último termo utilizado, que tende a zero. Logo as somas parciais convergem para L . Para $+\infty$, na etapa k some positivos até ultrapassar k , depois acrescente apenas um próximo termo negativo. Como os termos negativos tendem a zero, os níveis alcançados tendem a infinito. O caso $-\infty$ é simétrico.

4.46 Para convergência absoluta,

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right).$$

Logo $\sum |c_n|$ converge. Para a soma, compare

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \right) \left(\sum_{j=0}^N b_j \right)$$

com a soma dos termos $a_k b_j$ no triângulo $k + j \leq N$. A contribuição da região complementar tende a zero por convergência absoluta. Portanto a soma é AB .

4.47 Use o critério da integral. Na primeira:

$$u = \log x, \quad du = \frac{dx}{x},$$

e

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^p} = \int u^{-p} du,$$

que converge se, e somente se, $p > 1$. Na segunda, use primeiro $u = \log x$ e depois $v = \log u$:

$$\int \frac{dx}{x \log x (\log \log x)^q} = \int v^{-q} dv.$$

Logo converge se, e somente se, $q > 1$.

4.48 Se a série é absolutamente convergente, toda sub-série também converge absolutamente. Reciprocamente, suponha que toda sub-série convirja. Considere os índices positivos

$$P = \{n : a_n \geq 0\}$$

e negativos

$$N = \{n : a_n < 0\}.$$

As sub-séries correspondentes convergem por hipótese. Logo

$$\sum_{n \in P} a_n < \infty, \quad \sum_{n \in N} (-a_n) < \infty.$$

Portanto

$$\sum |a_n| = \sum_{n \in P} a_n + \sum_{n \in N} (-a_n) < \infty.$$

5.1 $f(n) = 2n$ é bijeção de $\mathbb{N}$ para pares. Logo $\{2, 4, 6, \dots\} \sim \mathbb{N}$.

5.2 Cada subconjunto finito é enumerado listando seus elementos: escrever como função $\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{N}$ via $(a_1, \dots, a_n) \mapsto n + \text{posição na ordem}$. A quantidade de n -uplas em $\mathbb{N}^n$ é enumerável (Teorema 5.18). União sobre n é enumerável.

5.3 A função $f(x) = a + (b - a)x$ é bijeção de $(0, 1)$ em (a, b) . Como $(0, 1) \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}$ (Teorema 5.23), temos $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e portanto tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

5.4 A função $f(x) = a + (b - a)x$ é bijeção de $(0, 1)$ em (a, b) . Como $(0, 1) \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}$ (Teorema 5.23), temos $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e portanto tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

5.5 A função $f(x) = a + (b - a)x$ é bijeção de $(0, 1)$ em (a, b) . Como $(0, 1) \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}$ (Teorema 5.23), temos $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e portanto tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

5.6 A função $f(x) = a + (b - a)x$ é bijeção de $(0, 1)$ em (a, b) . Como $(0, 1) \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}$ (Teorema 5.23), temos $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e portanto tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

5.7 A função $f(x) = a + (b - a)x$ é bijeção de $(0, 1)$ em (a, b) . Como $(0, 1) \sim [0, 1] \sim \mathbb{R}$ (Teorema 5.23), temos $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e portanto tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

5.8 Os números algébricos são enumeráveis (Teorema 5.24). Se $[0, 1]$ fosse enumerável, todo subconjunto (em particular, os algébricos em $[0, 1]$) seria enumerável. Mas $[0, 1]$ é não enumerável, logo existem números reais que não são algébricos.

5.9 Os números algébricos são enumeráveis (Teorema 5.24). Se $[0, 1]$ fosse enumerável, todo subconjunto (em particular, os algébricos em $[0, 1]$) seria enumerável. Mas $[0, 1]$ é não enumerável, logo existem números reais que não são algébricos.

6.1 Considere $q(t) = \|x - ty\|_2^2 = \|x\|_2^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|_2^2 \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $y \neq 0$, o mínimo em t é negativo se $\langle x, y \rangle^2 > \|x\|_2^2\|y\|_2^2$, contradição. Logo $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2$. Para $\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \|v\|_2^2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$.

10.28 Se $f(x_0) > 0$, pela continuidade existe um intervalo I contendo x_0 e $c > 0$ tal que $f \geq c$ em I . Escolha $g \geq 0$, contínua, não identicamente nula e com suporte em I . Então

$$\int_a^b fg \geq c \int_I g > 0,$$

contradição. O caso $f(x_0) < 0$ é análogo.

10.29 Primeiro prove para uma função degrau s , constante em uma partição finita. Em cada intervalo,

$$\left| \int_u^v \sin(nx) dx \right| \leq \frac{2}{n}, \quad \left| \int_u^v \cos(nx) dx \right| \leq \frac{2}{n}.$$

Logo o resultado vale para s . Dado $\varepsilon > 0$, aproxime f em integral por uma função degrau s de modo que

$$\int_a^b |f - s| < \varepsilon.$$

Então

$$\left| \int (f - s) \operatorname{sen}(nx) \right| \leq \int |f - s| < \varepsilon.$$

Combine com o caso degrau e faça $n \rightarrow \infty$.

10.30 Para o caso crescente, aplique o teorema de mudança de variável já provado:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Se φ é decrescente, $\varphi(\alpha) = b$ e $\varphi(\beta) = a$, logo

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

10.31 Se $\alpha = u - v$, com u, v crescentes,

$$\sum |\Delta \alpha| \leq \sum \Delta u + \sum \Delta v = u(b) - u(a) + v(b) - v(a).$$

Logo α tem variação limitada. Reciprocamente, defina

$$V(x) = V_a^x(\alpha),$$

e use

$$V(y) - V(x) \geq |\alpha(y) - \alpha(x)| \quad (x < y).$$

Então

$$u(x) = \frac{V(x) + \alpha(x)}{2}, \quad v(x) = \frac{V(x) - \alpha(x)}{2}$$

são não decrescentes e $\alpha = u - v$.

10.32 a.) Se $\omega_f(x) < \eta$, existe uma vizinhança de x cuja oscilação é menor que η ; pontos suficientemente próximos herdam essa propriedade. Portanto o complemento de D_η é aberto.

b.) Escolha uma partição P com

$$\sum_i \omega(f; I_i) |I_i| < \varepsilon \eta.$$

A soma dos comprimentos dos intervalos de P com oscilação pelo menos η é menor que ε . Todo ponto de D_η fora dos pontos da partição pertence ao interior de um desses intervalos. Cubra separadamente os finitíssimos pontos da partição por intervalos de comprimento total arbitrariamente pequeno. Logo D_η tem medida zero.

c.) Como

$$D_f = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_{1/m},$$

o conjunto de descontinuidades é união enumerável de conjuntos de medida zero.

Bibliografia

- [Abbott et al.(2001)] Stephen Abbott et al. *Understanding analysis*, volume 2. Springer, 2001.
- [Akcoglu et al.(2011)] Akcoglu, Bartha, and Ha] Mustafa A Akcoglu, Paul FA Bartha, and Dzung Minh Ha. *Analysis in vector spaces*. John Wiley & Sons, 2011.
- [Apostol(2021)] Tom M Apostol. *Cálculo I: cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à álgebra linear*. Reverte, 2021.
- [Bloch(2011)] Ethan D Bloch. *The real numbers and real analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Howie(2012)] John M Howie. *Real analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Johar(2023)] Syafiq Johar. *The Big Book of Real Analysis*. Springer, 2023.
- [Lárusson(2012)] Finnur Lárusson. *Lectures on real analysis*, volume 21. Cambridge University Press, 2012.
- [Lay(2014)] Steven R Lay. *Analysis: An introduction to proof*. Pearson, 2014.
- [Lima()] Elon Lages Lima. *Análise real*, volume 1.
- [Little et al.(2015)] Little, Teo, and Van Brunt] Charles HC Little, Kee L Teo, and Bruce Van Brunt. *Real analysis via sequences and series*. Springer, 2015.
- [Magnus et al.(2020)] Robert Magnus et al. *Fundamental mathematical analysis*. Springer, 2020.
- [Schinazi(2011)] Rinaldo B Schinazi. *From calculus to analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [Tao(2006)] Terence Tao. *Analysis I*, volume 1. Springer, 2006.
- [Zorich and Paniagua(2016)] Vladimir Antonovich Zorich and Octavio Paniagua. *Mathematical analysis I*. Springer, 2016.

Índice

- e , 61
- k -célula, 164
- α -comprimento, 275
- α -nulo, 275

- A reta real., 145
- aberto, 148
- aberto relativamente a Y , 151
- analítica em $c \in I$, 321
- analítica em I , 321
- arquimediano, 24

- bijetora, 135
- bola aberta, 147

- caminho, 199
- cardinalidade do contínuo, 142
- cobertura aberta, 158
- compacto, 158
- completo, 155
- conexo, 170
- conexo por caminhos, 199
- conjunto
 - discreto, 36
- conjunto dos números inteiros, 14
- converge, 153
 - absolutamente, 118
- converge pontualmente, 291
- converge uniformemente, 294
- corpo, 5
- corpo ordenado, 10
- corpo ordenado completo, 23
- corte de Dedekind superior, 93
- cota inferior, 21
- cota superior, 21

- denso, 151
- divisores de zero, 7

- enumerável, 136
- equicontínua, 305
- equipotentes, 135
- espaço métrico, 145
- exponencial, 62

- fatorial, 17
- fechado, 149
- fecho, 37, 149
- finito, 136
- função, 134
 - exponencial, 62
- função exponencial, 62

- imagem, 134
- infinito, 136
- injetora, 135
- integral inferior, 250
- integral superior, 250
- integrável no sentido de Darboux, 250
- interior, 149
- intervalo de convergência, 313
- irracionais, 14
- isolado, 150
- isomorfismo de corpos ordenados, 92

- limitado, 150
 - superiormente, 21
- limitado inferiormente, 21
- limite, 103
 - infinitos, 62
 - sequência, 52
- logaritmo, 62
- logaritmo natural, 62

- majorante, 21
- malha, 248
- medida zero, 260
- minorante, 21
- máximo, 16
- métrica, 145
- Métrica discreta., 146
- métrica do taxista, 147
- Métrica induzida., 146
- módulo, 30

- natural, 14
- no máximo enumerável, 136
- não enumerável, 136
- não-crescente, 58
- número e , 61

- número de Euler, 62
- números racionais, 14
- parte inteira, 24
- partição, 248
- partição marcada, 252
- perfeito, 151, 166
- polinômio de Taylor, 320
- ponto
 - de acumulação, 36
- ponto de acumulação, 150
- ponto de fronteira, 34
- ponto interior, 34, 149
- pontualmente limitada, 306
- Por que a separação é necessária., 146
- princípio
 - da recursão, 18
- processo diagonal de Cantor, 141
- pré-imagem, 134
- raio de convergência, 312
- recursão
 - ver recursão 18
- refinamento, 249
- Riemann–Stieltjes integrável em relação
 - a α , 269
- Riemann–Stieltjes integrável em relação
 - a uma função α de variação limitada, 283
- Riemann-integrável, 250
- separa pontos, 308
- separados, 170
- sequência, 17, 50
 - convergente, 53
 - crescente, 58
 - de Cauchy, 73
 - decrecente, 58
 - divergente, 53
 - limitada, 55
 - limitadas inferiormente, 55
 - limitadas superiormente, 55
 - limite, 52
 - não-decrecente, 58
- sequência de Cauchy, 84, 154
- sequência nula, 84
- sequências
 - limite, 103
- sobrejetora, 135
- soma de Riemann, 252
- soma inferior de Darboux, 249
- soma superior de Darboux, 249
- somas parciais, 102
- somatório, 18
- subsequência, 71, 154
- supremo, 22
- série, 102
 - geométrica, 107
 - telescópica, 108
- série de Maclaurin, 321
- série de potência, 311
- série de Taylor, 321
- séries, 102
 - convergência, 103
- teorema
 - do confronto, 69
- valor
 - absoluto, 30
- variação limitada, 280
- variação total, 280
- vizinhança, 148
- ínfimo, 22