Lista 8 - Topologia

Espaços Conexos, Espaços Métricos Completos

1 — Sejam τ_1 e τ_2 topologias sobre um conjunto X tais que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

a) Se (X, τ_1) é conexo, então (X, τ_2) é conexo?
b) Se (X, τ_2) é conexo, então (X, τ_1) é conexo?

2 — Sejam X um espaço topológico e $\{A_i : i \in I\}$ uma família de subconjuntos conexos de X tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, quaisquer que sejam $i, j \in I$. Mostre que $\bigcup_{i \in I} A_i$ é conexo.

3 — Sejam X um espaço topológico, $C \subseteq X$ conexo e $A \subseteq X$. Mostre que se $C \cap A \neq \emptyset$ e $C \cap (X - A) \neq \emptyset$, então $C \cap \partial(A) \neq \emptyset$.

4 — Mostre que um conjunto infinito munido da topologia cofinita é conexo.

5 — Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ é contínua, então f é constante.

6 — Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto aberto e fechado de X. Mostre que se A é conexo e não-vazio, então A é uma componente conexa de X.

7 — Sejam X e Y espaços topológicos.

a) Mostre que se X é conexo por caminhos e $f : X \to Y$ é sobrejetora e contínua, então Y também é conexo por caminhos.
b) Mostre que se $\{A_i : i \in I\}$ é uma família de subconjuntos conexos por caminhos de X tal que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é conexo por caminhos.

8 — Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Mostre que X é conexo por caminhos se, e somente se, para cada $x \in X$, existe um caminho em X unindo x a x_0.

9 — Mostre que o fecho de um subconjunto conexo por caminhos de um espaço topológico não é, necessariamente, conexo por caminhos.

10 — Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos (não-vazios). Mostre que $\prod_{i \in I} X_i$ é conexo por caminhos se, e somente se, cada X_i é conexo por caminhos.

11 — Seja $n > 1$. Mostre que se A é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}^n$, então $\mathbb{R}^n - A$ é conexo por caminhos.

12 — Mostre que:

a) $]0, 1[$ e $]0, 1]$ não são homeomorfos.
b) Nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a S^1.
c) Se $n > 1$, então $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ não são homeomorfos.

13 — Mostre que se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é contínua, então f possui um ponto fixo.

14 — Mostre que se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

15 — Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é totalmente limitado se, e somente se, é limitado.

16 — Mostre que se um espaço métrico é totalmente limitado, então ele é separável.

17 — (Lema do refinamento de Lebesgue) Seja (M, d) um espaço métrico compacto. Mostre que dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha,\ \alpha \in A\}$ de M existe $r > 0$ tal que, para cada $x \in M$, é possível encontrar $\alpha \in A$ de modo que $B_d(x, r) \subset U_\alpha$.

18 — Sejam $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, d_1 a métrica discreta sobre X e d_2 a métrica sobre X induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}$.

a) Mostre que (X, d_1) é completo.
b) Mostre que (X, d_2) não é completo.