Lista 6 - Topologia

Espaços Compactos

Compactos

1 — Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em X com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Prove que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é um subconjunto compacto de X.

2 — Seja X um conjunto.

a) Mostre que se X está munido da topologia cofinita, então todo subconjunto de X é compacto.

b) Considere X munido da topologia co-enumerável. Mostre que $Y \subseteq X$ é compacto se, e somente se, Y é finito.

3 — Sejam X um espaço topológico compacto, U um subconjunto aberto de X e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos fechados de X tal que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \subseteq U$. Mostre que existe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ finito tal que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}'} F \subseteq U$.

4 — Considere $\{0, 1\}$ munido da topologia discreta. Mostre que o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ munido da topologia box não é compacto.

5 — Seja X um espaço topológico e sejam K_1 e K_2 subconjuntos compactos de X.

a) Mostre que $K_1 \cup K_2$ é compacto.

b) Mostre que se X é T_2, então $K_1 \cap K_2$ é compacto.

c) Mostre que não se pode omitir a hipótese de X ser T_2 no item anterior.
Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X. Prove que X é compacto se, e somente se, toda cobertura de X por elementos de $\mathcal{B}$ possui subcobertura finita.

6 — Seja X um conjunto e sejam τ_1 e τ_2 topologias sobre X. Mostre que se (X, τ_1) e (X, τ_2) são espaços topológicos compactos e T_2, então $\tau_1 = \tau_2$ ou τ_1 e τ_2 são incomparáveis.

7 — Seja X um espaço topológico T_2. Mostre que, se $H, K \subseteq X$ são compactos disjuntos, então existem abertos disjuntos $U, V \subseteq X$ tais que $H \subseteq U$ e $K \subseteq V$.

8 — Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X. Mostre que se para cada cobertura aberta $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ de X é possível obter $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ finito tal que $\bigcup \mathcal{C}' = X$, então X é compacto.

9 — Sem recorrer ao Teorema de Tychonoff, mostre que se X e Y são espaços topológicos compactos, então $X \times Y$ também o é.

10 — Considere o conjunto $\{0, 1\}$ munido da topologia discreta. Mostre que o conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ munido da topologia box não é compacto.

11 — Considere o subespaço X de $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ constituído dos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{R}}$ tais que $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ é enumerável.

a) Mostre que X é denso em $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$ e conclua que X não é compacto.

b) Mostre que todo subconjunto infinito enumerável de X tem ponto de acumulação em X e conclua que X é enumeravelmente compacto.

12 — Mostre que todo subespaço fechado de um espaço topológico sequencialmente compacto também é sequencialmente compacto.

13 — Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ sobrejetora e contínua. Mostre que se X é sequencialmente compacto, então Y também é.

14 — Seja $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma família de espaços topológicos sequencialmente compactos. Mostre que o conjunto $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ é sequencialmente compacto.

15 — Mostre que um espaço topológico T_1 X é enumeravelmente compacto se e somente se todo subconjunto infinito enumerável de X tem ponto de acumulação.

16 — Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Mostre que se $f : X \to X$ é uma isometria (isto é, se f é tal que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ para quaisquer $x, y \in X$), então f é um homeomorfismo.