Lista 4 - Topologia

Topologia Inicial e Final - Espaços Produtos

1 — Seja $f_\lambda : X \to (Y_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ uma família de aplicações. Mostre que

$$\tau = \mathcal{T}\langle \mathcal{T}_{f_\lambda}, \lambda \in \Lambda \rangle$$

é, de fato, a menor topologia tal que todas as f_λ são contínuas.

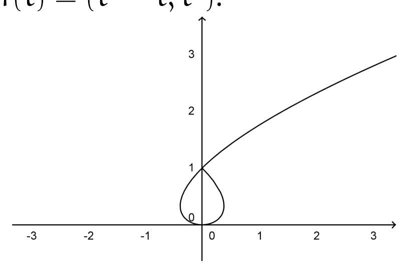
2 — Considere um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Seja S o espaço de Sierpinski. Seja

$$F = \{\text{funções contínuas } f : X \to S\}.$$

Seja $\mathcal{T}'$ a topologia inicial em X para a família de funções F. Então, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

3 — Sejam $\mathcal{U}$ um conjunto qualquer, $\{(X_j, \tau_j) : j \in J\}$ uma família de espaços topológicos e, para cada $j \in J$, seja $\mathcal{B}_j$ uma base para τ_j. Se $\{f_j : \mathcal{U} \to X_j : j \in J\}$ é uma familia de aplicações, mostre que $\tilde{\mathcal{B}} = \{\cap_{i=1}^{n} f_{j_i}^{-1}(B_{j_i}), B_{j_i} \in \mathcal{B}_{j_i},\ j_i \in J\}$ é uma base para a topologia induzida pelas aplicações f_j.

4 — Seja $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t^3 - t, t^2)$.



a) Mostre f é injetora e contínua.

b) Mostre que a topologia induzida pela aplicação f sobre $\operatorname{Im} f$ não coincide com a topologia de subespaço τ induzida pelo $\mathbb{R}^2$ e conclua que $f :]-1, +\infty[\to (\operatorname{Im} f, \tau)$ não é um homeomorfismo.

* **5 —** Se τ é uma topologia em $\mathbb{R}$ que tem as mesmas funções contínuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a topologia usual, então τ é a topologia usual.

6 — Seja $\{X_j : j \in J\}$ uma família de espaços topológicos e, para cada $j \in J$, seja $A_j \subset X_j$. Considerando $\Pi_{j\in J} X_j$ com a topologia produto, mostre que:

a) $\overline{\Pi_{i\in I} A_i} = \Pi_{i\in I} \overline{A_i}$.

b) Considerando $A_j \neq \emptyset$ qualquer que seja $j \in J$, $\Pi_{j\in J} A_j$ é fechado em $\Pi_{j\in J} X_j$ se, e somente se, A_j é fechado em X_j para todo $j \in J$.

c) Supondo $X_j \neq \emptyset$ qualquer que seja $j \in J$, $\Pi_{j\in J} A_i$ é denso em $\Pi_{j\in J} X_j$ se, e somente se, A_j é denso em X_j para todo $j \in J$.

7 — Idem ao Exercicio 6 agora considerando $\Pi_{j\in J}X_i$ com a topologia box.

8 — Mostre que se $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de espaços topológicos T_1 (respectivamente, T_2), então $\Pi_{i\in I}X_i$ também é T_1 (respectivamente, T_2) considerando $\Pi_{j\in J}X_i$ com a topologia produto ou com a topologia box.

9 — Seja $\{(M_i, d_i) : i \in I\}$ uma família de espaços métricos, cada um dos quais com pelo menos dois pontos. Mostre que $\prod_{i\in I} M_i$ é metrizável se, e somente se, I é enumerável. [Sugestão: se I é enumerável, podemos supor $I = \mathbb{N}$; neste caso, considere $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{d}_i(x_i, y_i)/2^i$ onde $\tilde{d}_i(x_i, y_i) = \min\{1, d_i(x_i, y_i)\}$.]

10 — O *conjunto de Cantor* é o que resta do intervalo $[0, 1]$ depois dos seguintes procedimentos: retira-se primeiramente o terço médio aberto $]1/3, 2/3[$ do intervalo $[0, 1]$; retira-se, depois, o terço médio aberto de cada um dos intervalos $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ restantes; em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um dos intervalos que sobraram do passo anterior, e assim por diante. O conjunto K dos pontos não retirados de $[0, 1]$ é denominado o *conjunto de Cantor*. Mostre que K munido da topologia de subespaço induzida por $[0, 1]$ é homeomorfo a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, onde $\{0, 2\}$ está munido da topologia discreta e $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ está munido da topologia produto.

11 — Sejam X e Y espaço topológicos e $f : X \to Y$ contínua. O *gráfico* de f é o conjunto $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$.

a) Mostre que se Y é T_2 então $Gr(f)$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

b) Mostre que X é homeomorfo a $Gr(f)$ (onde $Gr(f)$ está munido da topologia induzida por $X \times Y$).