Lista 3 - Topologia

Lista 3 - Espaços de Hausdorff, Bases, Continuidade

1 — Sejam τ e σ topologias sobre um conjunto X tais que $\tau \subseteq \sigma$. Seja, também, $i \in \{1, 2\}$.

a) Se (X, τ) é T_i, então (X, σ) também o é?

b) Se (X, σ) é T_i, então (X, τ) também o é?

2 — Seja X um conjunto infinito.

a) Seja τ a topologia cofinita sobre X. Mostre que τ é a menor (no sentido da inclusão) topologia T_1 sobre X — ou seja, mostre que (X, τ) é T_1 e que se σ é uma outra topologia sobre X tal que (X, σ) é T_1, então $\tau \subseteq \sigma$).

b) Mostre que não existe uma topologia sobre X que é a menor topologia T_2 sobre X. [Sugestão: Fixe $x_1, x_2 \in X$ distintos e sejam τ_1 e τ_2, respectivamente, as topologias apresentadas no Exercício 4 da Lista 2. Mostre que (X, τ_1) e (X, τ_2) são T_2, mas que $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ não é T_2.]

3 — Sejam (X, τ) um espaço topológico, (Y, τ_Y) subespaço de X e U um subconjunto de Y.

a) Mostre que o fecho de U em (Y, τ_Y) é a intersecção de Y com o fecho de U em (X, τ).

b) Mostre que $U \subset Y$ é denso em Y se e só se $\overline{U} = \overline{Y}$ em X.

4 — Sejam (X, τ) um espaço topológico, (Y, τ_Y) subespaço de X e U um subconjunto de Y.

a) Mostre que um ponto $y \in Y$ é ponto de acumulação de U em (Y, τ_Y) se e somente se y é ponto de acumulação de U em (X, τ).

b) A propriedade análoga para pontos interiores é verdadeira? Justifique.

5 — Mostre que a metrizabilidade é uma propriedade hereditária.

6 — Sejam $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos dois a dois disjuntos e $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

a) Mostre que $\tau = \{A \subseteq X : A \cap X_i \in \tau_i$ para todo $i \in I\}$ é uma topologia sobre X. O espaço topológico (X, τ) é denominado a *soma topológica* de $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$.

b) Mostre que $A \subseteq X$ é fechado em (X, τ) se, e somente se, $A \cap X_i$ é fechado em (X_i, τ_i) para todo $i \in I$.

c) Conclua que X_i é aberto e fechado em (X, τ), qualquer que seja $i \in I$.

d) Suponha que (X_i, τ_i) seja T_1 (respectivamente, T_2), qualquer que seja $i \in I$. Mostre que (X, τ) é T_1 (respectivamente, T_2).

e) Mostre $\mathbb{R}$ não pode ser escrito como a soma topológica de dois subespaços (disjuntos) não-vazios.

7 — Sejam τ_1 e τ_2 topologias sobre um conjunto X e sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases para τ_1 e τ_2, respectivamente. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) para quaisquer $x \in X$ e $B \in \mathcal{B}_2$ tais que $x \in B$, existe $C \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in C \subseteq B$;

b) $\tau_1 \supseteq \tau_2$.

8 — Sejam X um conjunto infinito e $x_0 \in X$. Mostre que

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X \text{ e}$$

$$x \neq x_0\} \cup \{A \subseteq X : x_0 \in A \text{ e } X \setminus A \text{ é finito}\}$$

é base para a topologia

$$\tau = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}$$

sobre X.

9 — Considere as topologias

$$\tau_1 = \{\{m \in \mathbb{N} : m < n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$$

e

$$\tau_2 = \{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$$

sobre $\mathbb{N}$.

a) Mostre que se $\mathcal{B}_1$ é uma base para τ_1 então $\mathcal{B}_1 \supseteq \tau_1 \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.
b) Encontre uma base $\mathcal{B}_2$ para τ_2 que esteja contida em qualquer base para τ_2.

10 — Plano de Moore Se Γ for o semi-plano superior (fechado) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$, então uma topologia pode ser definida em Γdefinindo uma base $\mathcal{B}(p, q)$ como segue:

- Elementos da base em pontos (x, y) com $y > 0$ são os discos abertos no plano que são pequenos o suficiente para estarem dentro de Γ
- Elementos da base em pontos $p = (x, 0)$ são conjuntos $\{p\} \cup A$ onde A é um disco aberto no semi-plano superior tangente ao eixo x em p.

a) Prove que os conjuntos acima formam uma base de vizinhanças para uma topologia na reta.
b) Prove que a topologia em $\Gamma \setminus \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$ é a topologia de subespaço herdada da topologia padrão do plano euclidiano.
c) Determine o fecho dos seguintes conjuntos $A = \mathbb{Q} \times \{1\}$ e $B = \mathbb{Q} \times \{0\}$

11 — Prove que os intervalos semiabertos $[a, b)$ formam uma base de vizinhanças para uma topologia na reta.

a) Quais os intervalos na reta são abertos e fechados na topologia de Sorgenfrey.
b) Descreva os fechos dos seguintes conjuntos na reta de Sorgenfrey: os racionais, o conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$, os inteiros.

12 — Reta de Michael Denote por τ a topologia usual sobre $\mathbb{R}$ e considere

$$\mathcal{B} = \tau \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $\mathcal{B}$ é base para uma topologia sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}$, munido desta topologia, é denominado a *reta de Michael*.
b) Mostre que as topologias da reta de Sorgenfrey e da reta de Michael são incomparáveis.
c) Verifique que a topologia da reta de Michael é mais fina que a topologia usual de $\mathbb{R}$ e conclua que a reta de Michael é T_2.

13 — Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{S} \subseteq \tau$ é uma *subbase* para (X, τ) se a coleção de todas as intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base para (X, τ). Seja X um conjunto não-vazio. Mostre que qualquer família $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup \mathcal{S}$ é subbase para alguma topologia sobre X, a qual é denominada a *topologia gerada pela subbase* $\mathcal{S}$.

14 — Seja $I = [0, 1]$ e considere $I \times I$ munido da *ordem lexicográfica*: $(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$ se, e somente se, $x_1 < x_2$ ou, ainda, $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$. Descreva as vizinhanças dos seguintes pontos (em relação à topologia associada à ordem lexicográfica sobre $I \times I$):

- $(x, 0)$, com particular atenção ao ponto $(0, 0)$.
- $(x, 1)$, com particular atenção ao ponto $(1, 1)$.
- (x, y), onde $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$.

Funções Contínuas

15 — Sejam X um conjunto e d uma métrica sobre X.

a) Mostre que, para todo $A \subseteq X$, a função

$$\begin{array}{rccc} d(\,\cdot\,, A): & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$$

é contínua.

b) Considere $A, B \subseteq X$ fechados disjuntos. Mostre que a função $f : X \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

é contínua.

16 — Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$.

a) Seja $\mathcal{U}$ uma família de subconjuntos abertos de X tal que $X = \bigcup \mathcal{U}$. Mostre que se $f \restriction_U$ é contínua para todo $U \in \mathcal{U}$ então f é contínua.

b) Sejam A e B subconjuntos fechados de X tais que $X = A \cup B$. Mostre que se $f \restriction_A$ e $f \restriction_B$ são contínuas então f é contínua.

c) Conclua que se $\mathcal{F}$ é uma família finita subconjuntos de fechados de X tal que $X = \bigcup \mathcal{F}$ e $f \restriction_F$ é contínua para todo $F \in \mathcal{F}$ então f é contínua.

d) Mostre, através de um contraexemplo, que a palavra “finita" não pode ser omitida no enunciado do item anterior.

e) Mostre, através de um contraexemplo, que a palavra “fechados" não pode ser omitida no enunciado do item (b).

17 — Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para X.

a) Sejam Y um espaço topológico e $f : Y \to X$. Mostre que f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[B]$ é aberto em Y para todo $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$.

b) Sejam Y um espaço topológico e $f : X \to Y$. Mostre que f é aberta se, e somente se, $f[B]$ é aberto em Y para todo $B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$.

18 — Mostre que se considerarmos $\{0, 1\}$ munido da topologia caótica então $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é sobrejetora, contínua e aberta. Portanto, a imagem de um espaço topológico metrizável por uma aplicação contínua e aberta não precisa sequer ser T_0. O que ocorre se substituirmos "aberta"por "fechada"?

19 — Mostre que toda bola aberta de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

a) Mostre que quaisquer dois intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$ com mais de um ponto são homeomorfos.

b) Mostre, através um contraexemplo, que a palavra “limitados” não pode ser omitida no enunciado do item (a).