Lista 2 - Topologia

Espaços Topológicos

1 — Dado o intervalo $[-1,1]$, considere τ a coleção de seus subconjuntos que ou não contêm $\{0\}$ ou contêm $(-1,1)$. Mostre que τ é uma topologia sobre $[-1,1]$.

2 — Em cada um dos itens abaixo, mostre que τ é uma topologia sobre X:

a) $X = \{0,1\}$
$\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$

b) X conjunto não-enumerável
$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é enumerável}\}$

c) $X = \mathbb{N}$
$\tau = \{\{m \in \mathbb{N} : m < n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$

d) $X = \mathbb{N}$
$\tau = \{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$

3 — Sejam X um conjunto infinito e $x_1, x_2 \in X$ distintos. Mostre que

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{A \subseteq X : x_1 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}\\ \tau_2 &= \{A \subseteq X : x_2 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ é finito}\}\end{aligned}$$

são topologias incomparáveis sobre X (isto é, τ_1 e τ_2 são topologias sobre X, mas nem τ_1 é mais fina que τ_2 nem τ_2 é mais fina que τ_1).

4 — Sejam X um conjunto não vazio e $\{\tau_i\}_{i\in I}$ uma coleção de topologias sobre X. Mostre que $\cap_{i\in I}\tau_i$ é uma topologia em X, mas $\cup_{i\in I}\tau_i$ não é necessariamente uma topologia em X.

5 — Seja X um espaço topológico. Dizemos que $A \subseteq X$ é G_δ em X se existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de subconjuntos abertos de X tal que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Mostre que se X é metrizável então todo subconjunto fechado de X é G_δ.

6 — Sejam (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r > 0$. Mostre que $B_d[a, r]$ e $\{x \in X : d(x, a) = r\}$ são fechados em (X, τ_d).

7 — Para cada um dos espaços topológicos apresentados nos Exercícios 3 e 4, determine o interior e o fecho de um subconjunto arbitrário A de X.

8 — Seja X um conjunto infinito. Considere τ uma topologia sobre X para a qual todos os subconjuntos infinitos de X são abertos. Mostre que τ é a topologia discreta sobre X.

9 — Seja $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ o conjunto dos polinômios em várias varíaveis sobre $\mathbb{R}$. Para cada conjunto de polinômios $I \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, seja $V(I)$ o conjunto dos zeros comuns a todos os polinômios de I ou seja,

$$V(I) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (\forall P \in I) :$$
$$P(x_1 \ldots x_n) = 0\}.$$

a) Mostre que o conjunto $\mathcal{Z} = \{V(I)^C | I \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]\}$ forma uma topologia em $\mathbb{R}^n$. Essa topologia é denominada topologia de Zariski.
b) Supondo que $n = 1$, mostre que a topologia assim obtida é a topologia cofinita.
c) Mostre que a topologia usual é mais fina do que a topologia $\mathcal{Z}$.

10 — Sejam X um espaço topológico, $A, B \subseteq X$ e $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Complete com $\subseteq$, $\supseteq$ ou, se for o caso, =:

$$\begin{array}{rcl}
(A \cup B)^\circ & \underline{\qquad} & A^\circ \cup B^\circ \\
\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^\circ & \underline{\qquad} & \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \\
(A \cap B)^\circ & \underline{\qquad} & A^\circ \cap B^\circ \\
\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)^\circ & \underline{\qquad} & \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^\circ \\
\overline{A \cup B} & \underline{\qquad} & \overline{A} \cup \overline{B} \\
\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} & \underline{\qquad} & \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \\
\overline{A \cap B} & \underline{\qquad} & \overline{A} \cap \overline{B} \\
\overline{\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A} & \underline{\qquad} & \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}
\end{array}$$

11 — Sejam τ_1 e τ_2 topologias sobre um conjunto X tais que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ e seja $A \subseteq X$. Mostre que $\mathrm{int}_{\tau_1}(A) \subseteq \mathrm{int}_{\tau_2}(A)$ e $\overline{A}^{\tau_1} \supseteq \overline{A}^{\tau_2}$.

12 — a) Sejam X um espaço topológico, S um subespaço de X e $A \subseteq S$. Mostre que $\mathrm{int}_S(A) \supseteq S \cap \mathrm{int}_X(A)$.
b) Considere $X = \mathbb{R}^2$ munido da topologia usual e $S = A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Mostre que $\mathrm{int}_S(A) = S$ e que $\mathrm{int}_X(A) = \emptyset$.

13 — Sejam X um conjunto não-vazio e d uma métrica sobre X.
a) Para $a \in X$ e $r > 0$ arbitrários, mostre que $\overline{B_d(a, r)} \subseteq B_d[a, r]$.
b) Mostre, através de um exemplo, que a igualdade $\overline{B_d(a, r)} = B_d[a, r]$ não é necessariamente verdadeira.

14 — Sejam X um espaço topológico, $U \subseteq X$ e A um aberto de X. Mostre que se $A \cap \bar{U} \neq \emptyset$ então $A \cap U \neq \emptyset$

15 — Sejam X um espaço topológico e $U \subseteq X$. Mostre que:
a) $\overline{U}^c = (U^c)^\circ$
b) $(U^\circ)^c = \overline{U^c}$
c) U é denso em X se e somente se U^c possui interior vazio.

16 — Considere, sobre um conjunto não-enumerável X, a topologia coenumerável. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? Justifique.
a) $D \subseteq X$ é denso em X se, e somente se, D é não-enumerável.
b) Todos os abertos não-vazios de X são densos em X.
c) Se $D \subseteq X$ é denso em X, então D é aberto em X.

17 — Sejam X um espaço topológico e $D_1, D_2 \subseteq X$ densos em X. Pode-se afirmar que $D_1 \cap D_2$ é denso em X? E se D_1, além de denso, for aberto em X?

18 — Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Mostre que x é ponto isolado de X se, e somente se, $\{x\}$ é aberto em X.

19 — Sejam X um espaço topológico e A contido em X. Mostre que $A^\circ = \emptyset$ se e somente se A^c é denso em X.

20 — Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que $x \in X$ é *ponto de fronteira* de A se toda vizinhança V de x em X satisfaz $V \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos de fronteira de A é denominado a *fronteira* de A em X e é denotado por $\partial(A)$. Mostre que:

a) $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
b) $A^\circ = A \setminus \partial(A)$
c) $\overline{A} = A \cup \partial(A)$
d) A é aberto em X se, e somente se, $\partial(A) = \overline{A} \setminus A$
e) A é fechado em X se, e somente se, $\partial(A) = A \setminus \operatorname{int}(A)$

21 — Seja X um espaço topológico. Mostre que X é T_1 se, e somente se, $\{x\}$ é a intersecção de todas as vizinhanças de x, qualquer que seja $x \in X$.

22 — Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Mostre que A é um subespaço fechado e discreto de X se, e somente se, $A' = \emptyset$.

8 A ideia é mostrar que cada conjunto unitário está na topologia e, portanto, a topologia é discreta. Escolha um conjunto infinito $A \subset X$ de tal forma que A^c também é infinito.

□ Se X é um conjunto infinito enumerável, podemos enumerar e definir A como o conjunto que contém os elementos ímpares. Isso garante que os conjuntos A e A^c sejam infinitos.

□Se X é não enumerável, escolhemos subconjunto enumerável infinito A.

Desta forma A e A^c pertencem a τ, pois são conjuntos infinitos. Agora considere qualquer $x \in X$. Note que $A \cup \{x\}$ e $A^c \cup \{x\}$ pertencem a τ uma vez que são conjuntos infinitos. Daí, sua interseção, que é $\{x\} \in \tau$ para todo $x \in X$.

9 Mostraremos diretamente que $Z(I) = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall f \in I : f(x) = 0\}$, onde I é qualquer conjunto de polinômios em n variáveis obedece aos axiomas para conjuntos fechados:

□ $\emptyset$ é fechado, porque $\emptyset = Z(\{1\})$, onde 1 é o polinômio constante com valor 1.

□ $\mathbb{R}^n$ é fechado, porque $\mathbb{R}^n = Z(\{0\})$, com 0 o polinômio constante com valor 0, então todos os x são zeros trivialmente.

□ Se $Z(I), Z(J)$ são dois conjuntos fechados, então seja $IJ = \{fg : f \in I, g \in J\}$, que é um conjunto bem definido de polinômios n-dimensionais em $\mathbb{R}^n$. Se $x \in Z(I)$, x anula para todos os $f \in$, assim também para todos os $fg \in IJ$. O mesmo vale para $x \in Z(J)$, então $Z(I) \cup Z(J) \subseteq Z(IJ)$. Se $x \notin z(I) \cup Z(J)$ isto significa que existe algum $f \in I$ tal que $f(x) \neq 0$ e algum $g \in J$ tal que $g(x) \neq 0$. Segue-se que $(fg)(x) \neq 0$ e assim $x \notin Z(IJ)$. Isso mostra

$$Z(IJ) = Z(I) \cup Z(J)$$

e consequentemente os conjuntos da forma $Z(I)$ são fechados sob uniões finitas.

□ Se $Z(I_\alpha), \alpha \in A$ é qualquer coleção de tais conjuntos, então pelas definições fica claro que

$$\bigcap_{\alpha \in A} Z(I_\alpha) = Z(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha)$$

e assim esta coleção é fechada sob interseções arbitrárias.