Lista 1 - Topologia

Espaços Métricos

1 — Sejam X um conjunto e $d : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:

- $d(x, x) = 0$ qualquer que seja $x \in X$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ quaisquer que sejam $x, y \in X$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ quaisquer que sejam $x, y, z \in X$.

Mostre que $d(x, y) \geq 0$ quaisquer que sejam $x, y \in X$.

2 — Seja X um conjunto. Considere as seguintes propriedades referentes a uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$:

- $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- $d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x)$ quaisquer que sejam $x, y, z \in X$.

a) Mostre que qualquer métrica d sobre X satisfaz as duas propriedades acima.

b) Mostre que se d satisfaz tanto a primeira quanto a segunda propriedade, então d é uma métrica sobre X.

c) Seja $X = \mathbb{R}$. Mostre que:

1. $d(x, y) = x - y$ satisfaz a primeira propriedade, mas não a segunda;
2. $d(x, y) = |x - y| + 1$ satisfaz a segunda propriedade, mas não a primeira.

3 — Denotemos por $\mathcal{R}([a, b])$ o conjunto das funções Riemann-integráveis definidas em $[a, b]$.

a) Mostre que $d : \mathcal{R}([a, b]) \times \mathcal{R}([a, b]) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

satisfaz as três condições apresentadas no exercício 1.

b) d é uma métrica sobre $\mathcal{R}([a, b])$? Justifique sua resposta.

c) Considere a seguinte relação de equivalência sobre $\mathcal{R}([a, b])$:

$$f \sim g \Leftrightarrow d(f, g) = 0.$$

Denotemos por $\bar{f}$ a classe de equivalência de f e por X o conjunto das classes de equivalência dos elementos de $\mathcal{R}([a, b])$. Mostre que $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{d}(\bar{f}, \bar{g}) = d(f, g)$$

está bem definida e é uma métrica sobre X.

4 — Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja d_i uma métrica sobre um conjunto X e seja τ_{d_i} a família de todos os subconjuntos abertos de (X, d_i). Considere as afirmações a seguir:

(i) existe $c > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se $c \cdot d_1(x, y) \geq d_2(x, y)$;

(ii) para quaisquer $x \in X$ e $r > 0$, existe $r' > 0$ tal que $B_{d_1}(x, r') \subseteq B_{d_2}(x, r)$;

(iii) $\tau_{d_1} \supseteq \tau_{d_2}$.

a) Mostre que $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

b) Denote por d_2 a métrica usual sobre $\mathbb{R}$. Mostre que

$$d_1(x, y) = \frac{d_2(x, y)}{1 + d_2(x, y)}$$

define uma métrica sobre $\mathbb{R}$, tal que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

c) Mostre que não existe $c > 0$ de modo que $c \cdot d_1(x, y) \geq d_2(x, y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

5 — Considere d e ρ as métricas Euclidiana e quadrada respectivamente em $\mathbb{R}^n$. Prove que para quaiquer em x, y em $\mathbb{R}^n$ vale $\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y)$ e conclua que $\tau_d = \tau_\rho$.

6 — Seja (M, d) um espaço métrico. Defina (a métrica limitada padrão) $\overline{d} : M \times M \to \mathbb{R}$ por $\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Mostre que:

a) $\overline{d}$ é uma métrica em M;

b) d e $\overline{d}$ são equivalentes

c) Todo $A \subset M$ é limitado em $(M, \overline{d})$, mas não necessariamente limitado em (M, d).

7 — Sejam $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos.

a) Mostre que

$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}$

$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$

$d''(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}$

definem métricas sobre $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$.

b) Mostre que, para $x, y \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ arbitrários, tem-se

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$$

e conclua que d, d' e d'' são *equivalentes* (isto é, $\tau_d = \tau_{d'} = \tau_{d''}$).

8 — Denotemos por $\mathcal{C}([a, b])$ o conjunto das funções contínuas definidas em $[a, b]$ a valores reais. Mostre que

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

e

$$d'(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

definem métricas sobre $\mathcal{C}([a, b])$ e que τ_d é *mais fina* que τ_d' (isto é, que $\tau_d \supseteq \tau_{d'}$).

9 — A topologia p-adica em $\mathbb{Q}$

Seja p um número primo e $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Escreva

$$\frac{a}{b} = p^r \frac{c}{d}$$

de modo que nem c nem d seja divísivel por p. Definimos o valor absoluto p-adico de $\frac{a}{b}$ como

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{-r},$$

com a definição adicional de que $|0|_p = 0$.

a) Mostre que $|\,|_p$ é uma norma.
b) Mostre que $d_p(a, b) = |a - b|_p$ define uma métrica on $\mathbb{Q}$.
c) O que acontece se trocarmos p por um numero composto? d_p ainda seria uma função distância? ainda seria uma função distância?

10 — Mostre que $|\,|_p$ satisfaz uma desigualdade triangular mais forte:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, \ |y|_p\}.$$

Mostre que a igualdade é válida sempre que $|x|_p \neq |y|_p$.

11 — Dados (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos, mostre que $f : M \to N$ é contínua se e somente se para todo aberto V de N, $f^{-1}(V)$ é um aberto de M.

12 — (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos. Mostre que qualquer função constante de E_1 em E_2 é contínua.

13 — Sejam (E_1, d_1) e (E_2, d_2) dois espaços métricos, sendo d_1 a métrica discreta. Mostre que qualquer função $f : E_1 \to E_2$ é contínua.

14 — Sejam d_1 a métrica usual em $\mathbb{R}$ e d_2 a métrica discreta em R. Mostre que a função identidade $f(x) = x : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_2)$ é descontínua em todos os pontos do domínio.

15 — Considere o espaço métrico $(C([0, 1]), d_1)$, sendo d_1 a métrica do integral.

a) A função: $F : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definida como $F(f) = f(0)$ é contínua?
b) Se a métrica d_1 for substituída pela métrica do supremo d_∞ , a resposta à pergunta da alínea anterior é a mesma?

16 — Considere as distâncias usuais em $\mathbb{Q}$ e em $\{0, 1\}$. Existe alguma função contínua e sobrejectiva $f : \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$?

17 — Seja X um conjunto não-vazio. Mostre que

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

define uma norma sobre $\mathcal{B}(X)$. Descreva o conjunto $\mathcal{B}(X)$?

18 — Seja $||\,||$ uma norma sobre V.

a) Mostre que

$$\begin{array}{rccc} d: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & ||x - y|| \end{array}$$

é uma métrica sobre V, denominada a *métrica proveniente da norma* $||\,||$.

b) Mostre que se d é uma métrica sobre V proveniente de uma norma, então

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \text{e} \quad d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

para quaisquer $x, y, z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Dê exemplo de uma métrica sobre um espaço vetorial real que não provém de uma norma.

d) Mostre que se d é uma métrica sobre V tal que

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad \text{e} \quad d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

para quaisquer $x, y, z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então d provém de uma norma.

7 Para o item a você precisará da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

10 Provaremos $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$

$q_1 = p^m r, q_2 = p^n s$ em que $r, s \in \mathbb{Q}$ tem numerador e denominador coprimo com p e $m, n \in \mathbb{Z}$

Então

$$|q_1 q_2|_p = p^{-(n+m)} = p^{-n}p^{-m} = |q_1|_p \cdot |q_2|_p$$

Agora provaremos a desigualdade triangular.

☐ Assuma que $n > m$, então

$$|q_1+q_2|_p = p^{-m}|p^{n-m}s+r|_p = p^{-m} \le p^{-m}+p^{-n}$$

pois se

$$p|(p^{n-m}s+r) \implies p\Big|\{(p^{n-m}s+r)-p^{n-m}s\} = r$$

uma contradição, provando assim a desigualdade triangular.

☐ Assuma que $n = m$, então

$$|q_1+q_2|_p = p^{-n}|r+s|_p$$

Então, como o denominador comum de r, s ainda é primo de p, podemos reduzir para o caso $r, s \in \mathbb{Z}$. Nesse caso nós só precisamos mostrar, para inteiros, r, s que

$$|r+s|_p \le |r|_p + |s|_p.$$

Para isso, notamos que se $r = p^n r', \ s = p^n s'$ com $\mathrm{mdc}(p, r') = \mathrm{mdc}(p, s') = 1$ então $r+s = p^n(r'+s')$ e se $p|(r'+s')$ então

$$|r+s|_p \le p^{-n-1} \le 2p^{-n} = |r|_p + |s|_p$$

se $p \not| (r'+s')$ então

$$|r+s|_p = |p^n|_p \cdot |r'+s'| = p^{-n} \le 2p^{-n} = |r|_p + |s|_p.$$

16 Sim existe.