

Lista 1 - Probabilidade

Álgebras, σ -álgebras, etc

Espaço Amostral

1 — Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja E_n o evento em que n lançamentos são necessários para completar o experimento. Que evento representa $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$?

2 — (Distribuição de objetos em cubículos.) Considere a estrutura do espaço amostral decorrente de alocar k objetos (bolas, etc.) em n cubículos (caixas, etc.) enumerados de 1 a n . Esta classe de problemas aparece, por exemplo, na Física Estatística que o é estudada a distribuição de k partículas (prótons, elétrons, etc.) entre n estados (que podem ser níveis de energia). Na física estatística dizemos que:

- as partículas distinguíveis e que não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Maxwell-Boltzmann
- as partículas indistinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Bose-Einstein.
- as partículas indistinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão, dizemos que

obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac.

Descreva o espaço amostral para estes modelos de alocação de partículas.

3 — (Passeio Aleatório I) Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros n movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo $1, 2, 3, \dots$ a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

4 — (Passeio Aleatório II) Descreva o espaço amostral que o o experimento consiste em observar a trajetória completa do passeio aleatório. Isto é, se observarmos seus movimentos em todos instante de tempo n , $n \in \mathbb{N}$.

5 — Considere uma urna que contém M bolas enumeradas $1, 2, \dots, M$ onde M_1 bolas tem a cor b_1, \dots, M_r tem a cor b_r , e $M_1 + \dots + M_r = M$. Suponha que retiramos uma amostra de tamanho $n < M$ sem substituição. Descreva o espaço amostral do experimento.

Álgebras

6 — Mostre que se \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 são álgebras de subconjuntos de Ω , então $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ é álgebra.

7 — Considere $\Omega = (0, 1]$. Prove que

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i], \\ (a_i, b_i] \subset (0, 1] \text{ e a união é disjunta}\} \text{ é álgebra.}$$

8 — Prove que a coleção

$$\{A = \{A \subset \Omega : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$$

é álgebra sobre Ω .

9 — Mostre que a coleção

$$\{A = \{A \subset \Omega : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$$

não é uma σ -álgebra sobre Ω .

10 — Considere Ω infinito, não enumerável. Mostre que a coleção

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ -álgebra sobre Ω .

11 — Mostre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é gerado pelos conjuntos da forma $[-\infty, a]$ para $-\infty < a < \infty$, e também pelos conjuntos da forma $[-\infty, a)$ para $-\infty < a < \infty$.

12 — Considere as seguintes propriedades

$$(\lambda_1) \Omega \in \mathcal{L},$$

$$(\lambda_2) A \in \mathcal{L} \text{ implica que } A^c \in \mathcal{L}, \text{ e}$$

(λ_3) Para toda sequência de conjuntos disjuntos

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ em } \mathcal{L}, \text{ temos } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}.$$

(λ'_2) Para todo $A, B \in \mathcal{L}, A \subseteq B$ então $B - A \in \mathcal{L}$;

(λ_4) Para todo $A, B \in \mathcal{L}, A \cap B = \emptyset$ então $A \cup B \in \mathcal{L}$;

(λ_5) Para toda sequência não decrescente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\text{em } \mathcal{L}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L};$$

(λ_6) Para toda sequência não crescente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ em

$$\mathcal{L}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}.$$

Mostre que

a) \mathcal{L} é λ -sistema se \mathcal{L} satisfaz $(\lambda_1), (\lambda'_2)$, e (λ_3) .

b) Todo λ -sistema satisfaz também $(\lambda_4), (\lambda_5)$, e (λ_6) .

c) \mathcal{L} é um λ -sistema se satisfaz $(\lambda_1), (\lambda'_2)$, e (λ_6) .

d) Se a família \mathcal{L} é não vazia e satisfaz (λ_2) e (λ_3) , então \mathcal{L} é um λ -sistema.

13 — Prove que

a) Se $A_n \nearrow$, então A_n converge, e

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

b) Se $A_n \searrow$, então A_n converge, e

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B.$$

14 — (**Conjunto de Vitali**) Suponha uma medida μ não nula, sigma aditiva e invariante por translações nos reais. Prove detalhadamente que existe um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ que não é μ mensurável.

15 — Explique por que esse exemplo leva a necessidade de σ -álgebra na definição de espaço de medida.

16 — (**Conjunto de Vitali II**) Suponha uma medida μ não nula, sigma aditiva e invariante por translações no plano. Prove detalhadamente que existe um subconjunto do quadrado $[0, 1]^2$ que não é μ mensurável.

17 — (**Conjunto de Cantor**) Mostre que o conjunto de Cantor é não enumerável em $\mathcal{B}((0, 1])$ (uma boa maneira de ver que ele é não enumerável é trabalhar com uma caracterização do conjunto de Cantor na base 3).

18 — (**σ -álgebra induzida**) Suponha que \mathcal{F} é uma σ -álgebra em Ω e seja Ω_0 um subconjunto de Ω (não necessariamente em \mathcal{F}). Prove que $\mathcal{F} \cap \Omega_0 := \{F \cap \Omega_0 : F \in \mathcal{F}\}$ é σ -álgebra em Ω_0 .

19 — Dado (X, \mathcal{F}, μ) um espaço de medida. Sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. então

$$\mu \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \right) \leq \liminf \mu(A_n)$$

20 — Prove que uma álgebra \mathcal{A} é σ -álgebra, e somente se, \mathcal{A} é uma classe monótona.

21 — Mostre que se \mathcal{A} é álgebra, então $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

22 — Prove o Princípio dos Bons Conjuntos: Dado \mathcal{C} e \mathcal{G} duas coleção de subconjuntos de Ω . Se

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$;
- \mathcal{G} é uma σ -álgebra

Então $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$.

23 — Prove o Teorema da Classe Monótona de Halmos

24 — Para qualquer família não vazia $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, se

$\mathcal{C} :=$ a coleção de conjuntos de \mathcal{A} e seus complementos

$\mathcal{J} :=$ a coleção de intersecções finitas de \mathcal{C}

$\mathcal{U} :=$ a coleção de uniões finitas de \mathcal{J} .

então $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$.

25 — Usando o resultado anterior mostre que um subconjunto da álgebra de Borel de $[0, 1]$ pode ser escrito como união finita de intervalos

Probabilidade

26 — (**Inclusão-exclusão**) Prove o princípio de inclusão-exclusão. Dados A_1, \dots, A_n eventos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, prove que

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \dots \tag{1}$$

$$\dots + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \tag{2}$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n). \tag{3}$$

27 — (**Urna de Polya**) Uma urna contém inicialmente uma bola branca e uma bola negra. Em cada etapa do experimento, uma bola é retirada aleatoriamente da urna, essa bola é colocada de

volta na urna e outra bola da mesma cor é adicionada. Prove que o número de bolas brancas que estão na urna depois de N etapas é um número aleatório uniforme em $\{1, 2, \dots, N + 1\}$. Ou seja, o evento em que o número de bolas brancas após o passo N é igual a k tem probabilidade $\frac{1}{N+1}$ para cada todo $1 \leq k \leq N + 1$.

28 — (Passeio Aleatório) Suponha que que uma partícula está inicialmente na origem e se move para a esquerda ou para a direita um passo de cada

vez, aleatoriamente, com a probabilidade p de ir para a esquerda e q de ir para a direita (com $p+q = 1$). Deixe S_n denotar a posição do passeio aleatório após n passos.

- a) Determine a probabilidade da partícula estar na posição x após n etapas.
- b) Calcule $\mathbf{E}(S_n)$
- c) Calcule $\mathbf{Var}(S_n)$
- d) Analise detalhadamente o caso $p = q = 1/2$.