Lista 5

Análise Real I

Continuidade

Exercícios.

1 — Determine e prove em quais pontos as seguintes funções são contínuas:

a)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ \sin|x| & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

c)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ com p,q coprimos} \end{cases}$$

2 — Mostre que se $f(x), g(x)$ são funções definidas numa vizinhança de a e contínuas em a então:

a) $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ é continua em a

b) $h'(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ é continua em a

c) $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ é continua em a

3 — Dê um exemplo de uma função limitada em $[0, 1]$ que não atinge nem o supremo nem o ínfimo.

4 — Dê um exemplo de uma função limitada em $[0, 1]$ que não atinge seu ínfimo em nenhum intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$.

5 — A oscilação de uma função $f : X \to R$ num conjunto bola aberta em x_o de raio δ é definido como:

$$\omega_f(x_0), \delta) := \sup|f(x_1) - f(x_2)| : x \in \mathbb{R}\, |x - x_0| < \delta$$

e a oscilação num ponto como

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(x_0).$$

Mostre o critério de Cauchy para a continuidade de funções:
Uma função é contínua se e somente se $w_f(x_0) = 0$.

6 — Mostre que se f, g são funções contínuas em $[a, b]$ então

a) $m(x) = \inf\{f(\xi), \xi \in [a, x]\}$ é uma função contínua em $[a, b]$

b) $M(x) = \sup\{f(\xi), \xi \in [a, x]\}$ é uma função contínua em $[a, b]$

7 — Mostre que as funções definidas no exercício anterior são monótonas.

8 — Mostre que se f é contínua em $[a, \infty)$ e $\lim\limits_{x\to\infty}$ existe e é finito então f é limitada em $[a, \infty]$

9 — Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica e contínua atinge seu máximo e mínimo.

10 — Prove que uma função estritamente crescente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e que tem a propriedade do valor intermediário é continua em $[a, b]$.

11 — Diga quais são todos os subintervalos conexos dos reais.

12 — Dado uma função $f : [0, 1] \to [0, 1]$ contínua. Mostre que f tem ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$

13 — Prove que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injetora e continua é estritamente crescente ou decrescente.

14 — Dados (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \to X_2$. Prove que são equivalentes:

a) A função f é contínua.

b) Para todo fechado $F \subset X_2$ o conjunto $f^{-1}(F)$ é fechado em X_1

c) Para todo $A \subset X$ o conjunto $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

d) Para todo $B \subset X_2$ o conjunto $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$

15 — Dados (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e X compacto e $f : X_1 \to X_2$. Mostre que f é uniformemente contínua.

16 — Prove que um espaço métrico (X, d) é compacto se e somente se toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada.

17 — Dados (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \to X_2$.
Suponha X_1 compacto e prove que f é continua em X_1 se e somente se o gráfico de f é compacta, sendo

$$\underset{f}{\text{grafico}} = \{(x, f(x)), x \in X_1$$

18 — Dados (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos e $f : X_1 \to X_2$.
Mostre que f é contínua se e somente se para todo compacto A em X. A função $f|_A$ é contínua