Lista 3

Análise Real I

Topologia da Reta

Exercícios.

1 — Mostre que:

a) Um intervalo (a,b) é aberto.

b) Um intervalo $[a,b]$ é fechado.

c) Um ponto p é um conjunto fechado.

d) Um conjunto finito de pontos é fechado.

e) $\mathbb{N}$ é fechado em $\mathbb{R}$.

f) O conjunto $A = \dfrac{n}{n+1}$ não é aberto nem fechado.

2 — Mostre que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se e somente se cumpre a seguinte condição "se uma sequência x_n converge para todo ponto $a \in A$ então $x_n \in A$ para todo n suficientemente grande".

3 — Mostre que $\lim a_n = a$ se e somente se para toda ϵ-vizinhança de A ($V_\epsilon(A)$), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ $a_n \in A$.

4 — Mostre que se A, B são abertos então $A + B$ e $A \cdot B$ são abertos.

5 — Mostre que se A é aberto então $A - \{a\}$ é aberto.

6 — Mostre que para todo $A \subset \mathbb{R}$, A' é fechado.

7 — Mostre que se $A \subset B$ e B é fechado então $\overline{A} \subset B$.

8 — Mostre que se A é aberto e B é fechado então $B - A$ é fechado.

9 — Dado E^o o conjunto dos pontos interiores de E.

a) Mostre que E^o é aberto.

b) Mostre que E é aberto se e somente se $E = E^o$.

c) Se $D \subset E$ e D é aberto então $D \subset E^o$.

d) Mostre que $S^o = \overline{(S^c)}^c$

e) Mostre que $(S \cap T)^o = S^o \cap T^o$

10 — Construa um conjunto limitado de números reais com exatamente três pontos de acumulação.

11 — Prove que para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$ tem se:

a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

b) $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$

12 — Dados $x, y \in \mathbb{R}$ defina:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$$
$$d_3(x,y) = |x-3y|$$
$$d_2(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$$

Determine se cada uma dessas funções é uma distância.

13 — Um ponto p é dito ponto na fronteira de um conjunto S se toda ϵ-vizinhança de p intersepta simultaneamente S e S^C. A fronteira de S é denotada por δS.

a) Prove que um conjunto é aberto se e somente se $\delta S = \emptyset$

b) $\delta S = \delta S^C$

c) $\delta\delta S \subset \delta S$

d) $\delta S \cup T \subset \delta S \cup \delta T$

e) Mostre um exemplo que a inclusão em c) é estrita.
Exercise Mostre que se K é compacto e F é fechado então $K \cap F$ é compacto.

14 — Mostre que se $K_1, \ldots, K_n$ são conjuntos compactos então $\bigcup_{i=1}^n K_i$ é Compacto.

15 — Mostre que se A, B são compactos então:

a) $A + B$ é compacto;

b) $A \cdot B$ é compacto;

16 — Mostre que:

a) $\mathbb{N}$ não é compacto;

b) $\mathbb{Q}$ não é compacto, obtendo uma subcobertura aberta que não admite subcobertura finita ;

c) $\mathbb{R}$ não é compacto;

d) um ponto p é compacto;

e) um conjunto finito de pontos é compacto;

f) O intervalo $[0, 1]$ é compacto;

17 — (Teorema de Baire) Se $F_1, \dots, F_n, \dots$ são fechados com interior vazio. Então

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

tem interior vazio.

18 — Mostre que todo aberto na reta é união enumerável de segmentos disjuntos.

19 — (Teorema de Lindelof) Dado $X \subset \mathbb{R}$, mostre que toda cobertura de X por abertos possui uma subcobertura enumerável.