# Lista 2

## Análise Real I

### Números Reais II e Sequências Reais

**Exercícios.**

## Reais

Usando os axiomas de corpo ordenado completo

**1** — Usando a caracterização dos reais como (o único) corpo ordenado completo, demonstre que:

a) $1^{-1} = 1$

b) $-(a+b) = -a-b$

c) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $(\mathrm{ab})^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

d) Se $a < b$ e $c > 0$ então $\mathrm{ac} < \mathrm{bc}$

e) $1 > 0$

f) Se $a < c$ e $c < d$ então $a + b < c + d$

g) Se $a > 0$ então $1/a > 0$

h) Se $a < 0$ então $1/a < 0$

i) Se $x$ tem a propriedade que $0 \leqslant x < b$ para todo número real positivo $b$ então $x = 0$

j) Dados $x, y$ números reais tais que $x < y$ prove que existe um racional $z$ tal que $x < z < y$.

k) Dados $x, y \in \mathbb{R}\text{com}x > 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

**2** — Prove que o supremo do conjunto $A = (a, b)$ é $b$.

## Sequências Reais

**3** — Mostre que

a) Se a sequência $a_n$ é monotonicamente crescente então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

b) Se a sequência $a_n$ é monotonicamente decrescente então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

**4** — Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ é estritamente decrescente e ache seu limite.

**5** — Mostre que a convergência da sequência $a_n$ implica na convergência da sequência $|a_n|$. A reciproca é verdadeira?

**6** — Dada a sequência $a_n$ cujas subsequência $a_{2k}$, $a_{2k+1}$ e $a_{3k}$ são convergentes.

a) Mostre que a sequência $a_n$ é convergente.

b) A convergência de qualquer duas das subsequências implica na convergência da sequência $a_n$?

**7** — Se $\lim x_n = a$ e $\lim(x_n - y_n) = 0$ então $\lim y_n = a$.

**8** — Seja $x_n \neq 0$. Se existirem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$0 < \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq c < 1$$

para todo $n > n_0$. Então $\lim x_n = 0$.

**9** — Prove que se $\lim a_n = 0$ então $\lim(a_n)^2 = 0$.

**10** — Mostre que uma sequência monótona decrescente limitada inferiormente converge nos reais.

**11** — Prove a partir da definição de limite que se $\lim a_n = A$ então $\lim(ca_n) = cA$.

**12** — Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.

**13** — Mostre que se uma sequência $a_n$ converge a $L$ então toda subsequência converge a $L$