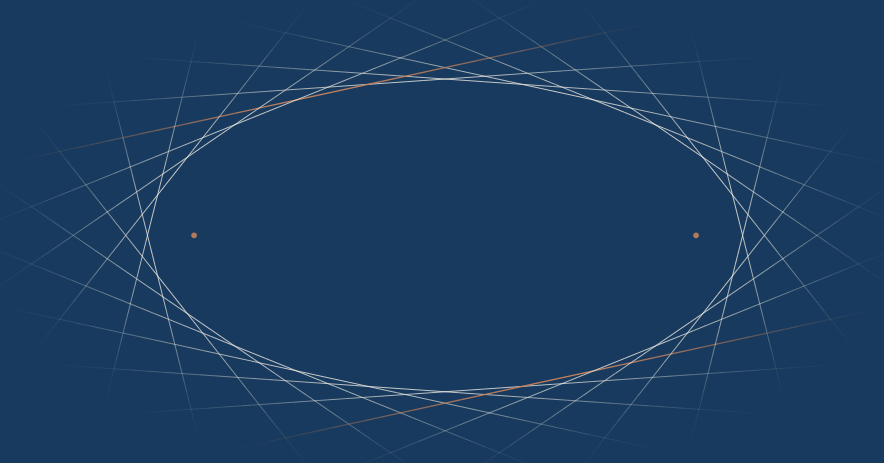


GEOMETRIA, VETORES E COORDENADAS

Geometria Analítica e Vetorial

Notas de aula • Versão 0.99



Daniel Miranda, Rafael Grisi e Sinuê Lodovici

Texto: Daniel Miranda, Rafael Grisi e Sinuê Lodovici.
Universidade Federal do ABC.
Composição em formato 17×24 cm.

Licença e atribuições

© 2026 Daniel Miranda, Rafael Grisi e Sinuê Lodovici.

Esta obra é disponibilizada sob a licença Creative Commons Atribuição–NãoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). É permitido compartilhar e adaptar o material, desde que a autoria seja devidamente atribuída e que o uso não tenha finalidade comercial, nos termos da licença.

O texto integral da licença está disponível em https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.pt_BR. Salvo quando indicado de outra forma, materiais de terceiros permanecem sujeitos às respectivas condições de uso.

Sumário

Símbolos e notações gerais	v
Agradecimentos	vi
Introdução	vii
1. Estrutura Vetorial do Plano e do Espaço	1
1.1. Definições Elementares	1
1.2. Soma de Ponto com Vetor	20
2. Combinações Lineares	27
2.1. Dependência e Independência Linear de Vetores	27
2.2. Bases	42
3. Vetores em Coordenadas	52
3.1. Coordenadas de Vetores e Pontos	52
3.2. Sistemas de Coordenadas	54
3.3. Operações em Coordenadas	57
3.4. Independência Linear e Mudança de Base	59
3.5. Bases Ortonormais e Coordenadas Cartesianas	62
3.6. Produto Escalar: Ângulo entre dois Vetores	65
3.7. Produto Vetorial: Vetor Perpendicular a dois Vetores Dados	73
3.8. Produto Misto	77
3.9. Escolha do Sistema de Coordenadas (*)	81
3.10. O Problema do Lugar Geométrico (*)	84
3.11. Coordenadas Polares (*)	89

4. Retas e Planos	102
4.1. Equações da Reta	102
4.2. Equações do Plano	110
5. Posições Relativas	118
5.1. Posições Relativas entre Retas	118
5.2. Posições Relativas entre Retas e Planos	123
5.3. Posições Relativas entre Planos	125
6. Ângulos e Distâncias	131
6.1. Ângulos	131
6.2. Distâncias	137
6.3. Retas em Coordenadas Polares	141
6.4. Exercícios	143
7. Círculos e Esferas	147
7.1. Equações Canônicas de Círculos e Esferas	147
7.2. Retas Tangentes e Planos Tangentes	154
7.3. Circunferência em coordenadas polares	160
7.4. Exercícios complementares	162
8. Cônicas	164
8.1. Introdução	164
8.2. Elipse	166
8.3. Hipérbole	175
8.4. Parábola	183
8.5. Excentricidade	192
8.6. Construções de Dandelin	196
8.7. Cônicas em Coordenadas Polares	200
8.8. Cônicas e a Trajetória dos Planetas	201
8.9. Exercícios complementares	203
9. Curvas Parametrizadas e Regiões do Plano	207
9.1. Parametrização de Curvas	207
9.2. Curvas em Coordenadas Polares	214
9.3. Coordenadas Esféricas e Cilíndricas	218
9.4. Comprimento de uma Curva	223
9.5. Regiões planas limitadas por curvas	225
9.6. Exercícios	230

10. Superfícies e quádricas	234
10.1. Da descrição vetorial à parametrização	234
10.2. Cilindros: transportar uma curva numa direção fixa	236
10.3. Cones: ligar uma curva a um vértice	238
10.4. Superfícies de rotação	240
10.5. Entender uma superfície por seus cortes	242
10.6. Superfícies quádricas em posição canônica	244
10.7. Um catálogo guiado pelos cortes	248
10.8. Translações: quádricas fora da origem	249
10.9. Um procedimento para reconhecer superfícies	250
10.10. Quádricas degeneradas	251
10.11. Além da posição canônica	252
10.12. Exemplos resolvidos adicionais	256
10.13. Reconhecimento por cortes	261
11. Classificação das Cônicas	267
11.1. Translação	267
11.2. Translação de uma Equação Quadrática	268
11.3. Rotação	271
11.4. Equações Gerais do Segundo Grau no Plano	275
12. Mudanças de Coordenadas no Espaço	281
12.1. Mudança de Base	281
12.2. Composição e Inversa	284
12.3. Mudança de Sistemas de Coordenadas	285
12.4. Retas e Planos em Novas Coordenadas	286
12.5. Sistemas Cartesianos e Mudanças Ortogonais	288
12.6. Resumo	289
13. Classificação das Quádricas	292
13.1. Eixos principais no espaço	293
13.2. Depois da rotação: completar quadrados	293
13.3. Três termos quadráticos	294
13.4. Dois termos quadráticos	295
13.5. Um único termo quadrático	296
13.6. A tabela de classificação	297
13.7. Exemplos completos	297
13.8. O que significa classificar	300

A. Funções Trigonométricas	302
A.1. Do triângulo retângulo ao círculo trigonométrico	302
A.2. Simetrias e periodicidade	304
A.3. Identidades trigonométricas	304
A.4. Aspecto dos gráficos	306
A.5. Funções trigonométricas inversas	306
A.6. Exercícios	307
B. Matrizes e Sistemas Lineares	309
B.1. Matrizes	309
B.2. Determinantes	311
B.3. Matrizes Invertíveis	312
B.4. Sistemas Lineares	314
B.5. Regra de Cramer	314
B.6. Eliminação de Gauss	316
B.7. Exercícios	318
Respostas dos Exercícios	322
Referências Bibliográficas	393

Símbolos e notações gerais

$\exists$	: existe
$\forall$	: para todo ou qualquer que seja
$\Rightarrow$	: implica
$\Leftrightarrow$	: se e somente se
$\therefore$	: portanto
$:=$	: é definido como
i.e.	: isto é (do latim <i>id est</i>)
$\square$	: fim de uma demonstração
$\overleftrightarrow{AB}$	: reta que passa pelos pontos A e B
AB	: segmento de reta com extremidades A e B
$\overrightarrow{AB}$	: segmento orientado com ponto inicial A e ponto final B
$\vec{AB}$	: vetor que tem $\overrightarrow{AB}$ como representante
$\mathbf{v}$	: vetor $\mathbf{v}$
$ \overrightarrow{AB} $	: comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$
$\ \mathbf{v}\ $	: norma do vetor $\mathbf{v}$
$\ \vec{AB}\ $	: norma do vetor $\vec{AB}$
$ A $	: determinante da matriz A
$\sum_{i=1}^n a_i$	: soma dos termos a_i , para $i = 1, \dots, n$

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à prof^a. Mariana Rodrigues da Silveira e ao prof. Alexei Magalhães Veneziani pelas inúmeras sugestões e correções. Também gostaríamos de agradecer aos alunos André Peric Tavares e Rafael Romano pelas correções.

Introdução

A geometria analítica nasce de uma ideia simples e poderosa: problemas geométricos podem ser traduzidos para a linguagem da álgebra. Ao escolher coordenadas, pontos passam a ser descritos por números, vetores por listas ordenadas, retas e planos por equações, e muitas propriedades espaciais podem ser estudadas por meio de cálculos. O movimento também ocorre no sentido inverso: expressões algébricas ganham interpretação geométrica e, com ela, uma forma visual de compreender relações que poderiam permanecer escondidas na notação.

Este livro é organizado em torno dessa passagem contínua entre geometria e álgebra. Coordenadas são importantes, mas não são o ponto de partida de toda a teoria nem um fim em si mesmas. Antes de escrever equações, é útil compreender os objetos geométricos e as estruturas que permanecem quando mudamos de sistema de coordenadas. Por essa razão, começamos pela linguagem vetorial e só depois introduzimos, de maneira sistemática, suas representações coordenadas.

O texto foi pensado para um primeiro curso universitário de geometria analítica e vetorial. Procuramos combinar três aspectos que, quando aparecem separados, tornam o assunto mais difícil do que precisa ser: a interpretação geométrica, o desenvolvimento algébrico e a prática de resolução de problemas. As definições e os resultados principais são acompanhados por exemplos e figuras; os exercícios foram concebidos como parte do desenvolvimento do conteúdo, e não apenas como verificação ao final de cada capítulo.

Nos capítulos iniciais estudamos a estrutura vetorial do plano e do espaço. Introduzimos vetores a partir de sua interpretação geométrica, definimos as operações fundamentais e discutimos paralelismo, coplanaridade e combinações lineares. Em seguida aparecem dependência e independência linear, bases e a ideia de que um mesmo vetor pode admitir diferentes descrições numéricas conforme a base escolhida. Essa transição conduz naturalmente ao estudo de vetores em coordenadas.

Com essa linguagem disponível, passamos às retas e aos planos. As diferentes

formas de suas equações não são tratadas como fórmulas isoladas, mas como maneiras de codificar informações geométricas: um ponto e uma direção, um ponto e um vetor normal, uma interseção ou uma condição de paralelismo. O estudo de posições relativas organiza, então, problemas de incidência, interseção e paralelismo, enquanto o produto escalar permite incorporar medidas de ângulos, distâncias e ortogonalidade.

Círculos e esferas fornecem um primeiro exemplo importante de como uma condição métrica se transforma em uma equação. A partir daí, o estudo das cônicas amplia essa ideia. Elipses, parábolas e hipérboles são apresentadas tanto por suas propriedades geométricas quanto por suas equações cartesianas. O objetivo é reconhecer que a forma de uma equação quadrática depende do sistema de coordenadas escolhido e que escolhas adequadas podem revelar a geometria que a expressão algébrica contém.

As curvas parametrizadas introduzem outra maneira de descrever objetos geométricos: em vez de impor uma relação entre as coordenadas, especificamos como elas variam com um parâmetro. Essa linguagem permite representar trajetórias e curvas que não se deixam descrever convenientemente como gráficos de funções, além de preparar a passagem para temas posteriores de cálculo e geometria.

Os capítulos finais retomam explicitamente o problema da escolha de coordenadas. Mudanças ortogonais de coordenadas, rotações e translações mostram como simplificar descrições sem alterar a geometria essencial. Nesse ponto, vários temas anteriores se reencontram: vetores, matrizes, produto escalar, cônicas e equações quadráticas tornam-se aspectos diferentes de uma mesma ideia — escolher uma representação que torne visível a estrutura do problema.

Os apêndices reúnem resultados e técnicas auxiliares de álgebra, trigonometria, somatórios, matrizes e sistemas lineares. Eles podem ser consultados conforme a necessidade e permitem que o corpo principal do texto permaneça concentrado nas ideias geométricas.

Há duas maneiras especialmente úteis de ler este livro. A primeira é sequencial, acompanhando a construção da linguagem vetorial até as mudanças de coordenadas. A segunda é usar os capítulos como referência durante um curso, retornando aos conceitos anteriores quando uma nova situação geométrica exigir outra descrição do mesmo objeto. Em ambos os casos, vale manter em mente a ideia que atravessa todo o texto: a geometria analítica não consiste apenas em transformar figuras em equações, mas em aprender a escolher, entre várias descrições possíveis, aquela que torna a geometria mais clara.

Estrutura Vetorial do Plano e do Espaço

"Meça o que for mensurável, e torne mensurável o que não o for."

Galileu Galilei

1.1. Definições Elementares

A linguagem vetorial permite descrever de forma unificada muitos dos principais resultados da geometria euclidiana e, ao mesmo tempo, estabelece uma ponte natural entre a geometria sintética e sua descrição em coordenadas.

Neste capítulo introduziremos os elementos básicos dessa linguagem. Antes de formalizar o conceito de vetor, vale observar por que objetos desse tipo aparecem de maneira tão natural nas ciências.

Algumas grandezas físicas ficam completamente determinadas por um único número real, uma vez fixada a unidade de medida. É o caso, por exemplo, da massa, da temperatura, do volume, da carga elétrica e da energia. Essas grandezas são chamadas de **grandezas escalares**.

Outras grandezas exigem, além de uma magnitude, uma direção e um sentido. É o caso do deslocamento, da velocidade, da aceleração, da força e da quantidade de movimento. Grandezas desse tipo são chamadas de **grandezas vetoriais**.

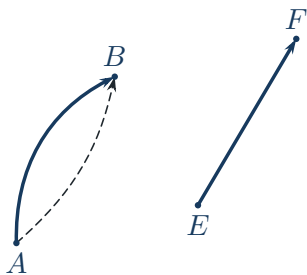


Figura 1.1.: Os caminhos ligando dois pontos correspondem, todos, ao mesmo vetor deslocamento.

O deslocamento é o exemplo mais simples. Se um corpo se move de um ponto A para um ponto B , não basta saber apenas quanto ele se deslocou: é necessário conhecer também a direção e o sentido do movimento. O vetor deslocamento registra precisamente essas informações, independentemente do caminho percorrido entre A e B .

Uma parte importante da utilidade das grandezas escalares vem das operações disponíveis para os números reais: podemos somá-los, subtraí-los, compará-los e multiplicá-los. Para que a linguagem vetorial seja igualmente útil, precisamos introduzir operações compatíveis com sua interpretação geométrica. É isso que faremos neste capítulo e no seguinte.

Como boa parte da construção dos vetores e de suas operações que faremos neste texto será de natureza primordialmente geométrica, assumiremos que o leitor conhece os principais conceitos e resultados da geometria euclidiana plana e espacial. Em particular suporemos conhecidos os conceitos de ângulos, retas, planos, comprimento de segmentos, distância de dois pontos, etc.

Notação 1.1

Ao longo deste texto, $\mathbb{E}^2$ denotará o plano euclidiano e $\mathbb{E}^3$ o espaço euclidiano tridimensional. Usaremos letras latinas maiúsculas, como A e B , para pontos; letras latinas minúsculas, como r e s , para retas; e letras gregas minúsculas, como π , para planos. Letras latinas ou gregas minúsculas também poderão representar escalares ou parâmetros; o significado ficará claro pelo contexto.

Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados.

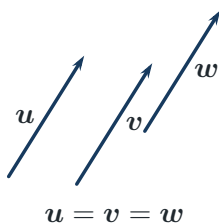
Definição 1.2

Um **vetor aplicado** ou **segmento orientado** é um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos A , como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo B do segmento será denominado ponto final e o vetor aplicado com ponto inicial A e final B será denotado por $\overrightarrow{AB}$. Para nossas considerações

um ponto A é considerado um segmento que denominaremos **segmento nulo**. Esse segmento será denotado por $\overline{AA}$ ou por $\bar{0}$.

O comprimento de um segmento $\overline{AB}$ será denotado por $|\overline{AB}|$ e será denominado também tamanho, intensidade, magnitude ou norma do vetor.

Os vetores aplicados servem apenas parcialmente ao propósito de representar grandezas que possuem intensidade, direção e sentido, pois embora possamos representar grandezas com esses atributos como vetores aplicados, essa representação não é única. Ou seja, existem vários vetores aplicados com pontos iniciais e finais distintos, mas que possuem intensidade, direção e sentido iguais. Para eliminarmos esse problema, identificaremos, isto é, diremos que são iguais, todos esses vetores. Assim diremos que dois **vetores aplicados** são **equivalentes** (ou **equipolentes**) se e somente se possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido ou ainda se ambos são nulos.



Uma identificação análoga, ocorre com as frações: duas frações podem ter numeradores e denominadores diferentes e mesmo assim diremos que elas são iguais (ou equivalentes) pois representam a mesma grandeza. Observe:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{23}{46}.$$

As frações acima são representações de um mesmo número. O número que, em notação decimal, denotaríamos por 0,5. Mesmo em notação decimal, 0,5 e 0,50 são representações de um mesmo número.

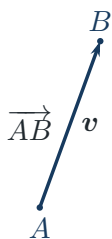
Quando identificamos os vetores aplicados equivalentes obtemos **vetores livres** ou simplesmente **vetores**.

Definição 1.3

Um **vetor** é uma classe de equivalência de vetores aplicados equipolentes, isto é, de segmentos orientados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. Os vetores aplicados pertencentes a essa classe são chamados de **representantes** do vetor.

Uma consequência importante dessa definição é que um vetor livre não possui posição fixa no espaço. Dado um vetor v e um ponto A , podemos escolher o representante de v que começa em A . Assim, segmentos orientados distintos podem representar o mesmo vetor sempre que tiverem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

O vetor cujos representantes são segmentos orientados nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes será denominado **vetor nulo**. O vetor nulo será denotado por $\overrightarrow{AA}$ ou por $\mathbf{0}$.



Denotaremos os vetores utilizando fontes minúsculas em negrito $\mathbf{a}$, através de uma flecha superior: $\vec{a}$ ou ainda no caso em que tivermos dois pontos A e B , denotaremos por $\overrightarrow{AB}$ o vetor que tem como representante o vetor aplicado $\overline{AB}$. Graficamente vetores são representados como flechas, nos quais a ponta da flecha aponta no sentido do vetor.

Dado um vetor e um segmento que o representa, teremos que a direção do vetor é a direção desse segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o representa.

Como consequência dos axiomas de congruência da geometria euclidiana, temos que dado um segmento (ou um representante de um vetor) e um ponto podemos construir um segmento paralelo e de mesmo comprimento iniciando em A . Se denotarmos por B o ponto final desse segmento, então teremos provado o seguinte resultado.

Proposição 1.4

Dados um vetor v e um ponto A , existe um único ponto B tal que o vetor aplicado $\overrightarrow{AB}$ é representante de v , ou seja, tal que $v = \overrightarrow{AB}$.

O comprimento de um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ será também denominado **norma** do vetor

e será denotado por $\|v\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Notação 1.5

O conjunto de todos os vetores de $\mathbb{E}^3$ será denotado por $\mathbb{V}^3$. De modo análogo, denotaremos por $\mathbb{V}^2$ o conjunto de vetores associados a $\mathbb{E}^2$, isto é, classe de equivalência de segmentos de retas no plano.

De modo geral, conceitos envolvendo vetores são definidos utilizando seus representantes. Nesse espírito temos as seguintes definições:

Diremos que dois vetores são **paralelos** quando seus representantes tiverem a mesma direção ou quando um desses vetores for o vetor nulo $\mathbf{0}$. O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Como consequência da definição anterior temos que o vetor nulo é paralelo a todo vetor e também que todo vetor é paralelo a si mesmo.

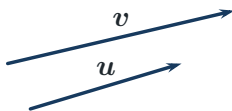


Figura 1.2.: Vetores paralelos.

Diremos que um conjunto de vetores são **coplanares** se esses vetores possuem representantes contidos no mesmo plano.

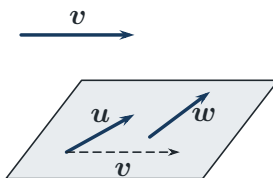


Figura 1.3.: u , v e w são coplanares.

Se u e v são não nulos, definimos o **ângulo entre os vetores** como o único ângulo θ , com $0 \leq \theta \leq \pi$, formado por representantes de u e v com a mesma origem. Essa definição independe dos representantes escolhidos.

Finalmente, dois vetores u e v são ditos **ortogonais**, se um dos vetores for o vetor nulo, ou se ao escolhermos dois representantes para esses vetores que iniciam no mesmo ponto, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ esses segmentos forem ortogonais, ou seja, se o ângulo determinado por esses segmentos for um ângulo reto ($\pi/2$ radianos ou 90°).

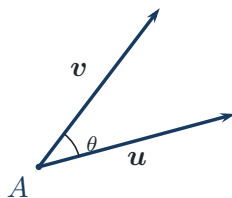


Figura 1.4.: Ângulo entre vetores

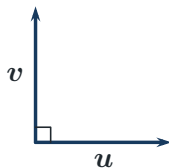


Figura 1.5.: Vetores ortogonais

Observação 1.6

Note que, segundo nossa definição, o vetor nulo $\mathbf{0}$ é o único vetor paralelo e ortogonal a qualquer outro vetor, e coplanar a qualquer par de vetores.

1.1.1. Operações com Vetores

Por tradição, grandezas que possuem apenas magnitude, ou seja, grandezas que são representadas por números reais são denominadas grandezas escalares. Seguindo essa tradição denominamos um número real λ de **escalar**.

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

1.1.1.1. Multiplicação por Escalar**Definição 1.7**

Multiplicação por Escalar: Dado um vetor v e um escalar λ podemos realizar a multiplicação de λ e v obtendo o vetor λv definido do seguinte modo:

- Se o vetor v é nulo ou o escalar λ é zero então $\lambda v = \mathbf{0}$
- Se $\lambda > 0$, o vetor λv é o vetor com o mesmo sentido, mesma direção e

com comprimento $|\lambda| \|v\|$.

- Se $\lambda < 0$ então vetor λv tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor v e comprimento $|\lambda| \|v\|$.

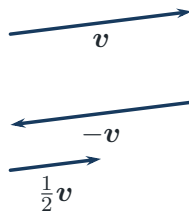


Figura 1.6.: Multiplicação de um vetor por um escalar.

Observação 1.8

Dados um vetor v e um escalar não nulo λ denotaremos usualmente o vetor $\left(\frac{1}{\lambda}\right) v$ por $\left(\frac{v}{\lambda}\right)$. A equação anterior pode ser vista como uma definição da divisão de um vetor por um escalar.

Um vetor de comprimento 1 é denominado **vetor unitário**. Dado um vetor $v \neq \mathbf{0}$, temos que o vetor:

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{v}{\|v\|}$$

é unitário e possui a mesma direção e sentido que v e é denominado **versor** associado a v . Para maiores detalhes veja exercício 2.11.

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de **vetor direcional** ou **vetor diretor**. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto P e um vetor v . Nesse caso o tamanho de v não é importante e podemos multiplicá-lo livremente por um escalar.

Através da multiplicação de vetores por escalares podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

Teorema 1.9

Se dois vetores u, v são paralelos e $v \neq \mathbf{0}$ então $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Iremos considerar primeiramente o caso em que u e v têm mesmo sentido. Neste caso, visto que $\|v\| \neq 0$, podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|u\|}{\|v\|}$$

Com essa escolha, provaremos que $u = \lambda v$.

Como u e v são paralelos, u e λv possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que u e v possuem o mesmo sentido e como λ é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares u e λv possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda v\| = \lambda \|v\| = \frac{\|u\|}{\|v\|} \|v\| = \|u\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento. Logo, como os vetores u e λv possuem mesma direção, sentido e comprimento eles são iguais.

Se u e v têm sentidos opostos, o argumento é análogo: escolhemos $\lambda = -\frac{\|u\|}{\|v\|}$, de modo que λv tenha o mesmo sentido e a mesma norma de u .

■

Proposição 1.10

Dois vetores u, v são paralelos se e somente se $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $v = \theta u$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que u, v são paralelos.

Caso $v \neq \mathbf{0}$, pelo teorema acima, temos que $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso contrário, isto é, se $v = \mathbf{0}$ então $v = \theta u$ para $\theta = 0$.

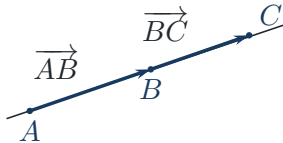
A implicação contrária segue da definição de multiplicação por escalar. Se $u = \lambda v$ ou $v = \theta u$, então um vetor é múltiplo do outro; portanto são paralelos. Isso inclui os casos em que um deles é nulo.

■

Como consequência da proposição anterior, temos:

Teorema 1.11

Três pontos A, B, C pertencem à mesma reta se e somente se $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$.



Demonstração. Se A, B, C pertencem à mesma reta, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos. Pela Proposição 1.10, existe uma relação da forma

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}.$$

Reciprocamente, suponha que uma dessas relações seja válida. Se dois dos pontos coincidem, a colinearidade é imediata. Caso os três pontos sejam distintos, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos; como os segmentos correspondentes têm o ponto B em comum, as retas que os contêm coincidem. Logo A, B, C são colineares. ■

1.1.1.2. Soma de Vetores**Definição 1.12**

Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $v + u$, de dois vetores v e u é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, representante arbitrário de v , tome um segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ que representa u , isto é, tome um representante de u com origem na extremidade final do representante de v , desta forma o vetor $v + u$ é definido como vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de v até a extremidade final do representante de u .

A soma de vetores também pode ser feita através da **regra do paralelogramo**. Para somar dois vetores v e u através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum O , como na figura 1.8. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se

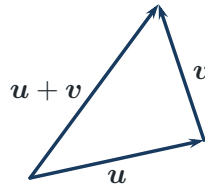


Figura 1.7.: Soma de Vetores

interceptam no ponto P . E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal $\overrightarrow{OP}$ é a soma dos vetores v e u . O vetor $v + u$ obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois o segmento $\overline{OP}$ divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores v e u .

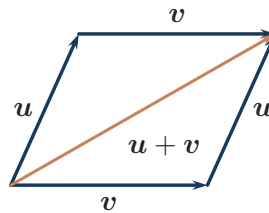


Figura 1.8.: Regra do paralelogramo.

Existe ainda um terceiro modo de se realizar a soma de dois vetores, a chamada **soma em coordenadas**, que ilustraremos no exemplo a seguir e que discutiremos em maior detalhes no Capítulo 3.

Exemplo 1.13.

Suponha que sobre um corpo material agem duas forças, u e v , de módulos 2,00N e 4,00N respectivamente, nas direções indicadas na Figura 1.9. Qual o módulo da força resultante, ou seja, qual o comprimento de $(u + v)$?

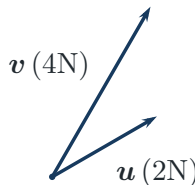


Figura 1.9.: Exemplo 1.13

Solução.**1. Soma pela lei do paralelogramo:**

Como acabamos de ver, uma forma de encontrar $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ é usar a regra do paralelogramo. Considere então o paralelogramo $ABCD$ conforme a Figura 1.10. Como ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° obtemos que o ângulo $\angle ADC$ é de 150° . Como $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, podemos aplicar a lei dos cossenos no triângulo ADC para obter o comprimento de AC , ou seja, o módulo de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = |AC|^2 &= |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD||DC|\cos(150^\circ) \\ &= 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{3}/2) = 20 + 8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Logo } \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} \approx 5,82\text{N}.$$

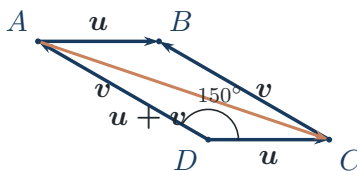


Figura 1.10.: Exemplo 1.13: Paralelogramo

2. Soma em coordenadas cartesianas:

Uma segunda abordagem seria decompor as forças em componentes horizontais e verticais e fazer, então, a soma dessas componentes. A vantagem desse modo de resolução está na não necessidade do estudo de ângulos (como fizemos para encontrar o ângulo $\angle ADC$ na resolução anterior), e na troca da lei dos cossenos pelas definições de seno e cosseno de um ângulo junto com o teorema de Pitágoras.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y$, onde $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ são as componentes horizontal e vertical de $\mathbf{u}$ respectivamente, e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$ (adotando a mesma notação) vemos que:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) + (\mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y) = (\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x) + (\mathbf{u}_y + \mathbf{v}_y).$$

Daí, por Pitágoras:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}_x + \mathbf{v}_x\|^2 + \|\mathbf{u}_y + \mathbf{v}_y\|^2$$

(ver Figura 1.11).

Desse modo obtemos $\|\mathbf{u}_x\| = 2 \cos(30^\circ) = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{u}_y\| = 2 \sin(30^\circ) = 1$, $\|\mathbf{v}_x\| = 4 \cos(60^\circ) = 2$ e $\|\mathbf{v}_y\| = 4 \sin(60^\circ) = 2\sqrt{3}$. Daí:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\sqrt{3} + 2)^2 + (1 + 2\sqrt{3})^2 = (3 + 4\sqrt{3} + 4) + (1 + 4\sqrt{3} + 12) \\ &= 20 + 8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

E, da mesma forma que na resolução anterior, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} = 5,82\text{N}$.

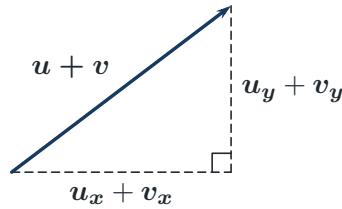


Figura 1.11.: Exemplo 1.13: Coordenadas cartesianas

Essa última resolução, conforme veremos mais adiante, é essencialmente o cálculo da soma de dois vetores num sistema de coordenadas cartesiano.



1.1.1.3. Propriedades Vetoriais

Pela definição da soma de vetores, temos que em geral o comprimento de $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ é diferente da soma dos comprimentos dos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, isto é,

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

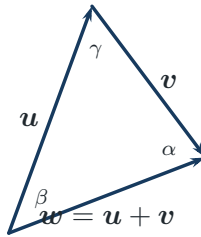


Figura 1.12.: comprimento e direção de $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

Para determinarmos o comprimento de $w = u + v$ podemos utilizar a lei dos cossenos para o triângulo da figura:

Considerando γ o ângulo indicado na Figura 1.12, pela Lei dos Cossenos temos:

$$\|w\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\gamma} \quad (1.1)$$

Considerando, α , β e γ os ângulos indicados na Figura 1.12, pela Lei dos Senos segue:

$$\frac{|w|}{\sin\gamma} = \frac{|u|}{\sin\alpha} = \frac{|v|}{\sin\beta} \quad (1.2)$$

As equações 1.1 e 1.2 são a formulação vetorial das Leis dos Cossenos e dos Senos respectivamente.

Observação 1.14

Note que o ângulo γ representado na Figura 1.12 é na verdade o suplementar do ângulo entre u e v .

Notamos que, como $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$, um resultado imediato de (1.1) é:

Teorema 1.15 Desigualdade Triangular

Dados dois vetores u e v temos que:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (1.3)$$

Além disso, vale a igualdade em (1.3) se e somente se um dos vetores é um múltiplo não negativo do outro. Em particular, para vetores não nulos, isso equivale a terem a mesma direção e o mesmo sentido.

Observamos também que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$, ou seja, o vetor nulo é um elemento neutro para a adição. Mais, podemos definir o vetor oposto a um vetor dado. Para isso consideremos a seguinte propriedade, cuja demonstração deixamos como exercício (2.7):

Para cada vetor u existe um único vetor $-u$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$.

O vetor $-u$ é denominado como o **vetor oposto** de u e é o vetor com o mesmo comprimento e direção de u , mas com sentido oposto.

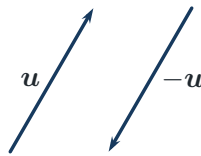


Figura 1.13.: Vetor oposto.

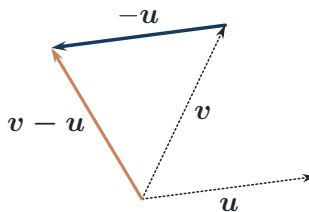
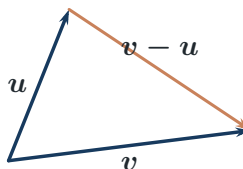


Figura 1.14.: Subtração de Vetores

A partir do vetor oposto podemos definir **subtração de vetores**: , definimos a subtração $v - u$ como a soma do vetor v com o vetor $-u$.

De modo equivalente podemos definir o vetor $v - u$ como o vetor que adicionado a u dá o vetor v . Consequentemente, se representarmos os vetores v e u começando no mesmo ponto, o vetor $v - u$ será o vetor que liga a extremidade final de u a extremidade final de v (vide figura 1.14).



Uma observação importante é que, sempre que representantes consecutivos de vetores formam um polígono fechado, sua soma é nula. Como caso particular dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, isto é, $v + (-v) = \mathbf{0}$.

As propriedades a seguir resultam das definições geométricas de soma e multiplicação por escalar. Elas caracterizam os espaços de vetores $\mathbb{V}^2$ e $\mathbb{V}^3$ como **espaços vetoriais**, que, como eles, são conjuntos munidos de duas operações (multiplicação por escalar e soma). O estudo desses e outros espaços vetoriais (como o espaço de polinômios de grau n , por exemplo), bem como de transformações lineares, é conteúdo de cursos de Álgebra Linear na maioria das universidades.

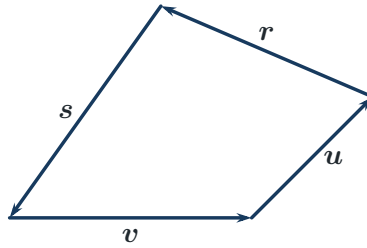


Figura 1.15.: A soma de vetores que formam um polígono fechado é nula:

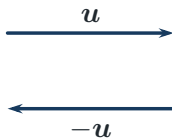
$$v + u + r + s = \mathbf{0}$$

Proposição 1.16

Sejam u, v, w vetores e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ escalares. As operações com vetores possuem as seguintes propriedades:

Propriedades da soma:

- [S1.] Propriedade Comutativa: $v + u = u + v$
- [S2.] Propriedade associativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$
- [S3.] Elemento Neutro: $\mathbf{0} + u = u$
- [S4.] Elemento oposto: Para cada vetor u existe um único vetor $-u$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$



Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:

- [M1.] Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- [M2.] Multiplicação por zero $0u = \mathbf{0}$
- [M3.] Associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1 \lambda_2)u = \lambda_1(\lambda_2 u)$
- [M4.] Distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u$
- [M5.] Elemento neutro multiplicativo $1u = u$

Demonstração. Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores u e v , veja a figura 1.16. A diagonal representa simultaneamente $u + v$ e $v + u$.

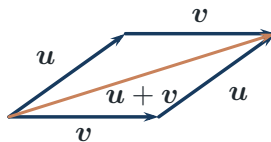


Figura 1.16.: Propriedade Comutativa da Soma

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.17.

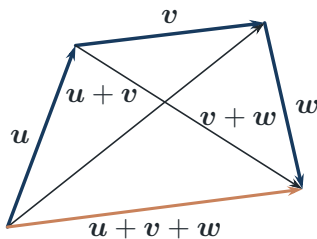


Figura 1.17.: Propriedade Associativa da Soma

As propriedades S3 e S4 são deixadas como exercício ao leitor.

A propriedade M1 segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M2 e M5 são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M3, isto é, a associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1 \lambda_2)u = \lambda_1(\lambda_2 u)$ observamos inicialmente que os vetores $(\lambda_1 \lambda_2)u$ e $\lambda_1(\lambda_2 u)$ possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de λ_1 e λ_2 (terão o mesmo sentido de u se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a u se λ_1 e λ_2 tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de $(\lambda_1 \lambda_2)u$ e $\lambda_1(\lambda_2 u)$ são os mesmos pois:

$$\|\lambda_1(\lambda_2 u)\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2 u\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2| \|u\|) = |\lambda_1 \lambda_2| \cdot \|u\| = \|(\lambda_1 \lambda_2)u\|.$$

A propriedade M4, isto é, a distributiva dos vetores em relação aos escalares

$$(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u,$$

segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}$ é a mesma. Esse fato é claro se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, ou se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Se o sinal de λ_1 e λ_2 forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)| \|\mathbf{u}\| = (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\|\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de λ_1 e λ_2 sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)| \|\mathbf{u}\| = ||\lambda_1| - |\lambda_2|| \|\mathbf{u}\| = \left| \|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\| \right|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\left| \|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\| \right| = \|\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}\|.$$

■

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação $+$ e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

Exemplo 1.17.

$$\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$$

◀

Demonstração. Pela propriedade $M5$ temos que $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 1\mathbf{v} + 1\mathbf{v}$ e pela propriedade $M4$ temos que $1\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (1 + 1)\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$.

■

Exemplo 1.18.

$v + (-1v) = \mathbf{0}$, ou seja o vetor oposto a v é $-1v$.



Demonstração. Pela propriedade $M5$ temos que $v + (-1v) = 1v + (-1v)$ e pela propriedade $M4$ temos que $1v + (-1v) = (1 - 1)v = 0v$. Finalmente a propriedade $M2$ nos diz que $0v = \mathbf{0}$

Como vetor oposto é único temos que o vetor oposto a v é $-1v$.

**Exemplo 1.19.**

$u + v = w$ se, e somente se, $u = w - v$.



Demonstração. Se $u + v = w$, somamos $-v$ aos dois lados e usamos a associatividade:

$$u + (v - v) = w - v.$$

Como $v - v = \mathbf{0}$, obtemos $u = w - v$.

Reciprocamente, se $u = w - v$, então

$$u + v = w - v + v = w.$$



O seguinte exemplo ilustra como podemos atacar um problema geométrico utilizando a linguagem vetorial.

Exemplo 1.20.

Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.

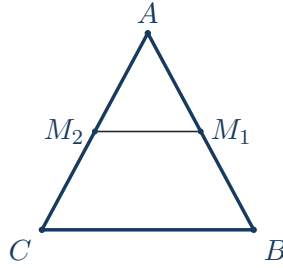


Solução. Seja o triângulo $\triangle ABC$ e seja M_1 o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e M_2 o ponto médio do lado $\overline{AC}$.

Como M_1 é ponto médio do lado $\overline{AB}$ temos que vetor $\overrightarrow{AM_1}$ é igual a metade do vetor $\overrightarrow{AB}$. Analogamente, temos que $\overrightarrow{AM_2}$ é metade do vetor $\overrightarrow{AC}$, isto é,

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \tag{1.4}$$

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \tag{1.5}$$



e conseqüentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \quad (1.6)$$

$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{M_2A} \quad (1.7)$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \quad (1.8)$$

substituindo 1.6 e 1.7 em 1.8 temos:

$$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{M_2A} + 2\overrightarrow{AM_1} \quad (1.9)$$

$$\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{AM_1}) = 2\overrightarrow{M_2M_1} \quad (1.10)$$

e conseqüentemente:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

E assim o segmento $\overline{M_2M_1}$ é paralelo ao segmento $\overline{CB}$ e seu comprimento é metade do último.

◀

Exemplo 1.21.

Dado um triângulo de vértices A, B, C . Dado P o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\hat{C}$ com o lado $\overline{AB}$ Então vetor $\overrightarrow{CP}$ é paralelo ao vetor $\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$, ou seja,

$$\overrightarrow{CP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \right) \quad (1.11)$$

◀

Solução.

Note primeiramente que, para provarmos a equação (1.11), basta mostrarmos que, se F é tal que:

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|},$$

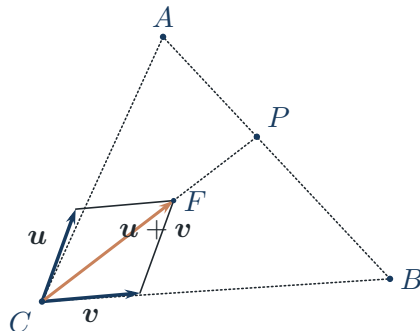
então F está sob a bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

Faremos isso observando que a diagonal CF de um losango $CEFD$ divide os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$ em ângulos iguais, ou seja é bissetriz de $\hat{C}$ e $\hat{F}$. Isso segue do caso LLL de congruência de triângulos ($\triangle CFD \cong \triangle CEF$).

Considere agora os vetores $u = \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|}$ e $v = \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$. Como os vetores u e v possuem o mesmo comprimento, pois são unitários, o paralelogramo determinado por estes vetores é um losango. Consequentemente, como u e v são paralelos aos lados CA e CB do triângulo $\triangle ABC$, e a regra do paralelogramo nos diz que a soma de dois vetores é a diagonal do paralelogramo por eles formado, temos que, se $\overrightarrow{CF} = (u + v)$, então o segmento CF divide o ângulo $\hat{C}$ em ângulos iguais.

Finalmente, se P é um ponto qualquer da bissetriz de $\hat{C}$, o vetor $\overrightarrow{CP}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CF}$, isto é,

$$\overrightarrow{CP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} \right)$$



◀

1.2. Soma de Ponto com Vetor

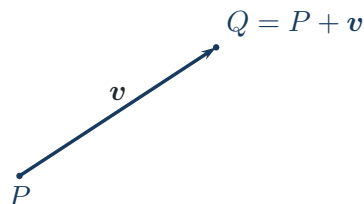
A soma do ponto com o vetor v nos retorna a translação do ponto P ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de v .

Definição 1.22

Dado um ponto P e um vetor $\vec{v}$ podemos definir a **soma de ponto com vetor** do seguinte modo.

Seja um representante de $\vec{v}$ que começa em P e seja Q o ponto final desse representante. Definimos então:

$$P + v := Q$$



Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que $P + v = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = v$.

Se escolhermos um ponto fixo no espaço O que chamaremos de **origem**, cada ponto P do espaço (ou plano) pode ser escrito como

$$P = O + \overrightarrow{OP}$$

Nesse caso vetor $\overrightarrow{OP}$ é dito **vetor posição** de P .

Proposição 1.23

A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:

1. $P + \mathbf{0} = P$
2. $P + u = P + v$ se e somente se $u = v$
3. $(P + u) + v = P + (u + v)$
4. $(P + u) - u = P$
5. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Demonstração. Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

1. É imediata pois $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$
2. Se $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, seja $Q = P + \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ e assim $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A recíproca é imediata.
3. Seja $Q_1 = P + \mathbf{u}$, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Para demonstrar que $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ basta mostrarmos que $Q_2 = Q_3$.

Por definição $Q_1 = P + \mathbf{u}$ implica que $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ_1}$. De modo análogo, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$, implica que $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ implica que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_3}$.

Logo

$$\overrightarrow{PQ_3} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \quad (1.14)$$

■

Exemplo 1.24.

Dado $\triangle ABC$ um triângulo e P um ponto sobre BC . Se $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ demonstre que $ABQC$ é um paralelogramo e assim Q não depende da escolha de P .

◁

Solução. Como $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ então

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

e logo

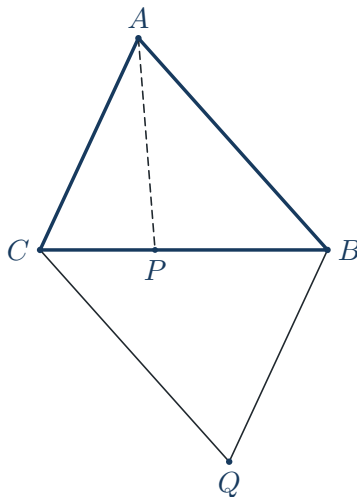
$$\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$$

e logo

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

E assim $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. De modo análogo podemos provar que $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC}$ e assim $ABQC$ é um paralelogramo.

◁



Exercícios

Ex. 2.1 Considere um paralelepípedo $ABCDEFGH$ em que $ABCD$ e $EFGH$ são faces opostas e AE , BF , CG , DH são arestas paralelas. Expresse, em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AF}$:

- $\overrightarrow{BF}$;
- $\overrightarrow{AG}$;
- $\overrightarrow{AE}$;
- $\overrightarrow{BG}$;
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$;
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG}$;
- $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH}$.

Ex. 2.2 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular, com os vértices nessa ordem, e seja O seu centro. Defina

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{DC}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{DE}.$$

Expresse em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

- $\overrightarrow{DF}$;
- $\overrightarrow{DA}$;
- $\overrightarrow{DB}$;

- d) $\overrightarrow{DO}$;
- e) $\overrightarrow{EC}$;
- f) $\overrightarrow{EB}$;
- g) $\overrightarrow{OB}$.

Ex. 2.3 No mesmo hexágono regular, simplifique:

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$;
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$;
- c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$;
- d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$;
- e) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF}$.

Ex. 2.4 Se $\|\mathbf{a}\| = 3$ e $\|\mathbf{b}\| = 2$, determine o menor e o maior valor possíveis de $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$. Diga quando cada extremo ocorre.

Ex. 2.5 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular. A partir do vértice A , defina

$$\mathbf{f}_1 = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{f}_2 = \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{f}_3 = \overrightarrow{AD}, \quad \mathbf{f}_4 = \overrightarrow{AE}, \quad \mathbf{f}_5 = \overrightarrow{AF}.$$

Determine $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5$ em função de $\mathbf{f}_3$.

Ex. 2.6 No triângulo ABC , sejam M, N, P os pontos médios de AB, BC, CA , respectivamente. Expresse $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Ex. 2.7 Prove que, para cada vetor $\mathbf{u}$, existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Ex. 2.8 No triângulo ABC , seja $M \in AB$ tal que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}, \quad \lambda \geq 0.$$

Expresse $\overrightarrow{CM}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Ex. 2.9 Num quadrilátero $ABCD$, suponha

$$\overrightarrow{AD} = 5\mathbf{u}, \quad \overrightarrow{BC} = 3\mathbf{u}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{v}.$$

- Determine $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{CA}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
- Prove que $ABCD$ é um trapézio.

Ex. 2.10 Mostre que a soma de vetores cujos representantes, colocados sucessivamente, formam um polígono fechado é $\mathbf{0}$.

Ex. 2.11 Seja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Prove que

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

é unitário e tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\mathbf{v}$.

Ex. 2.12 Resolva as equações vetoriais, escrevendo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

a)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \mathbf{u}, \\ 3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}; \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \mathbf{x} + 2\mathbf{y} = \mathbf{u}, \\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}. \end{cases}$$

Ex. 2.13 Se $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{z}$, prove que $\mathbf{w}$ é paralelo a $\mathbf{z}$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é paralelo a $\mathbf{z}$.

Ex. 2.14 Usando as propriedades da soma e da multiplicação por escalares, prove:

- $(-\alpha)\mathbf{v} = -(\alpha\mathbf{v})$;
- $\alpha(-\mathbf{v}) = -(\alpha\mathbf{v})$;
- $(-\alpha)(-\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$.

Ex. 2.15 Prove que, se $\alpha \mathbf{v} = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ex. 2.16 Prove que, se $\alpha \mathbf{v} = \beta \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então $\alpha = \beta$.

Ex. 2.17 Seja $ABCDE$ um pentágono regular e O seu centro. Mostre que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \mathbf{0}.$$

Ex. 2.18 Prove que, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não são paralelos e

$$\lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

então $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ex. 2.19 Seja EFG um triângulo e sejam P, Q, R os pontos médios de EF, FG, GE , respectivamente. Prove que $EPQR$ é um paralelogramo.

Ex. 2.20 Prove as propriedades da soma de ponto com vetor deixadas ao leitor no texto:

- a) $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P$;
- b) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$;
- c) se $P + \mathbf{u} = Q + \mathbf{v}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} + \mathbf{v}$.

Ex. 2.21 Sejam $P' = P + \mathbf{u}$ e $Q' = Q + \mathbf{u}$. Prove que

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}.$$

Conclua que a mesma translação aplicada aos vértices de um triângulo equilátero produz outro triângulo equilátero.

Combinações Lineares

2.1. Dependência e Independência Linear de Vetores

No plano há infinitas direções, mas duas direções não paralelas bastam para descrever qualquer vetor; no espaço, três direções adequadamente escolhidas desempenham o mesmo papel. Para tornar essa ideia precisa, estudaremos combinações lineares, dependência e independência linear e, em seguida, bases.

Como vimos no capítulo anterior, a adição de vetores e a multiplicação por escalares permitem construir novos vetores a partir de vetores dados. Esses vetores são chamados de **combinações lineares** dos vetores iniciais.

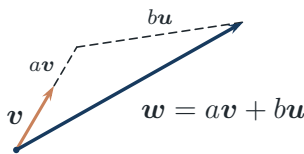


Figura 2.1.: O vetor w pode ser escrito como soma de múltiplos dos vetores u e v .

Definição 2.1

Um vetor w é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, \dots, v_n$ se existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Nesse caso, dizemos simplesmente que w pode ser expresso em função de $v_1, \dots, v_n$.

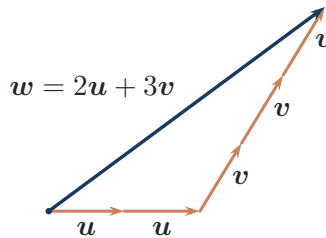


Figura 2.2.: $w = 2u + 3v$

Exemplo 2.2.

O vetor w ilustrado na Figura 2.2 é uma combinação linear de u e v , pois

$$w = 2u + 3v.$$

**Exemplo 2.3.**

Na Figura 2.3, o vetor f_1 é combinação linear de f_2, f_3, f_4, f_5 . Como esses cinco vetores formam um polígono fechado,

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = \mathbf{0},$$

e portanto

$$f_1 = -f_2 - f_3 - f_4 - f_5.$$



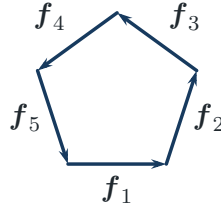
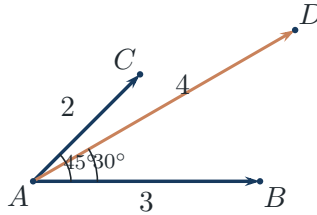


Figura 2.3.: O vetor f_1 é combinação linear dos vetores f_2, f_3, f_4, f_5 .

Exemplo 2.4.

Escreva o vetor $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Solução. Queremos encontrar λ_1 e λ_2 tais que:

$$\overrightarrow{AD} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}. \quad (2.1)$$

Escolhamos dois vetores i, j ortogonais e unitários e escrevamos os demais vetores nessa base (Figura 3.2). Tomemos $i = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ e j como a rotação de i de um ângulo de 90° no sentido anti-horário.

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$, temos $\overrightarrow{AB} = 3i$.

Pela Figura 2.5,

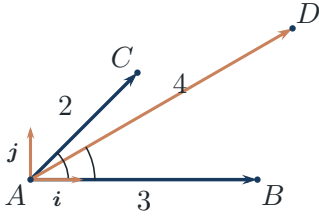
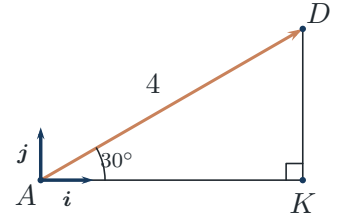
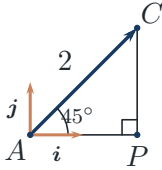
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD}.$$

Pela trigonometria do triângulo retângulo,

$$\overrightarrow{AK} = 4(\cos 30^\circ)i \quad \text{e} \quad \overrightarrow{KD} = 4(\sin 30^\circ)j.$$

Logo $\overrightarrow{AD} = 2\sqrt{3}i + 2j$.

De modo análogo, pela Figura 2.6, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}$. Novamente pela trigonometria, $\overrightarrow{AP} = 2(\cos 45^\circ)i$ e $\overrightarrow{PC} = 2(\sin 45^\circ)j$. Logo $\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}i + \sqrt{2}j$.

Figura 2.4.: Vetores i, j Figura 2.5.: Vetor $\overrightarrow{AD}$ Figura 2.6.: Vetor $\overrightarrow{AC}$

Substituindo essas expressões em (2.1), obtemos

$$2\sqrt{3}i + 2j = \lambda_1(3i) + \lambda_2(\sqrt{2}i + \sqrt{2}j).$$

Reunindo os coeficientes de i e j ,

$$(2\sqrt{3} - 3\lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_2)i + (2 - \sqrt{2}\lambda_2)j = \mathbf{0}$$

Como os vetores i, j são linearmente independentes, segue que:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} - 3\lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_2 = 0 \\ 2 - \sqrt{2}\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Daí $\lambda_1 = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$, de modo que

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}\overrightarrow{AB} + \sqrt{2}\overrightarrow{AC}.$$

Definição 2.5

- Um vetor v é dito **linearmente dependente (LD)** se $v = 0$.
- Os vetores $v_1, \dots, v_n$ ($n \geq 2$) são ditos **linearmente dependentes (LD)** se existe um $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que o vetor v_i seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j,$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Definição 2.6

Dizemos que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

Para dois vetores, a independência linear admite uma caracterização geométrica imediata. Mais adiante, na Seção 2.1.1, estenderemos essa ideia a conjuntos maiores.

Proposição 2.7

Quaisquer dois vetores não nulos e não paralelos e_1 e e_2 são linearmente independentes.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que e_1 e e_2 sejam linearmente dependentes. Pela definição, um deles é múltiplo escalar do outro:

$$e_1 = \lambda e_2 \quad \text{ou} \quad e_2 = \theta e_1.$$

Pela Proposição 1.10, isso implica que e_1 e e_2 são paralelos, contradizendo a hipótese. Portanto são linearmente independentes.

■

A partir da definição anterior podemos provar a seguinte caracterização:

Proposição 2.8

Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente dependentes se e somente se existem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \mathbf{0}.$$

Demonstração. Para $n = 1$, a afirmação diz simplesmente que v é linearmente dependente se e somente se $v = \mathbf{0}$, o que é exatamente a definição.

Considere agora $n \geq 2$. Se $v_1, \dots, v_n$ são linearmente dependentes, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$v_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i.$$

Passando v_1 para o primeiro membro,

$$(-1)v_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i = \mathbf{0},$$

obtemos uma relação linear não trivial, pois o coeficiente de v_1 é -1 .

Reciprocamente, suponha que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \mathbf{0}$$

com coeficientes não todos nulos. Escolhendo, sem perda de generalidade, $\lambda_1 \neq 0$ e isolando v_1 , obtemos

$$v_1 = - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i.$$

Assim, v_1 é combinação linear dos demais, e o conjunto é linearmente dependente. ■

A proposição anterior fornece imediatamente a seguinte caracterização equivalente:

Teorema 2.9

Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes se e somente se

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \mathbf{0} \right) \implies (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$$

Em outras palavras, a única relação linear entre os vetores é a relação trivial. Equivalentemente, $\mathbf{0}$ possui uma única representação como combinação linear de $v_1, \dots, v_n$.

Desse teorema é imediata a unicidade da representação de um vetor como combinação linear de vetores linearmente independentes:

Proposição 2.10

Seja u um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto linearmente independente de vetores $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

então essa representação é única.

Demonstração. Suponha que u admita duas representações:

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \tag{2.2}$$

e

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i. \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.3) de (2.2), obtemos

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda'_i) v_i = \mathbf{0}.$$

Como $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes, todos os coeficientes dessa relação são nulos. Logo

$$\lambda_i - \lambda'_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

e portanto $\lambda_i = \lambda'_i$ para todo i .



Observação 2.11

O Teorema 2.9 fornece um procedimento direto para testar independência linear: estudamos a equação

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Se a única solução for $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, os vetores são linearmente independentes; caso exista uma solução não trivial, são linearmente dependentes.

Exemplo 2.12.

Suponha que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente independentes. Mostre que os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ também são linearmente independentes.



Solução. Considere uma relação linear nula entre os três vetores:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + c(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

Expandindo e agrupando os coeficientes de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$,

$$(a + b + c)\mathbf{u} + (a - b + c)\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente independentes,

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

O sistema tem apenas a solução $a = b = c = 0$. Portanto $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ são linearmente independentes.



2.1.1. Caracterização Geométrica de Dependência e Independência Linear

Até aqui tratamos dependência e independência linear sobretudo de forma algébrica. Em $\mathbb{V}^2$ e $\mathbb{V}^3$, porém, essas noções admitem uma interpretação geométrica particularmente simples:

Teorema 2.13

(Caracterização Geométrica da Dependência e Independência Linear)

Para vetores em $\mathbb{V}^2$ e $\mathbb{V}^3$ temos:

1. Um vetor v é linearmente dependente se e somente se $v = \mathbf{0}$.
2. Dois vetores u, v são linearmente dependentes se e somente se u e v são paralelos.
3. Três vetores u, v, w são linearmente dependentes se e somente se são coplanares.
4. Quatro ou mais vetores são sempre linearmente dependentes.

Demonstraremos o teorema na próxima seção, depois de introduzir o conceito de base. Antes disso, veremos como a caracterização geométrica pode ser usada em alguns problemas.

Exemplo 2.14.

Mostre que as diagonais de um paralelogramo se intersectam nos seus pontos médios.

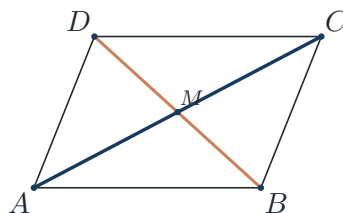


Solução.

Considere um paralelogramo $ABCD$ de diagonais AC e BD . Seja M o ponto de interseção de AC e BD (ponto que, *a priori*, não é necessariamente ponto médio das diagonais).

Queremos mostrar que:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$



Como A , M e C são colineares temos:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC}. \quad (2.4)$$

Da mesma forma, como B , M e D são colineares:

$$\overrightarrow{BM} = \theta \overrightarrow{BD}. \quad (2.5)$$

Como ABM é um triângulo, temos:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}.$$

Usando então as equações (2.4) e (2.5) na equação acima segue que:

$$\lambda \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \theta \overrightarrow{BD}.$$

Escrevendo todos os vetores da equação acima em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ (dois vetores não paralelos) obtemos:

$$\lambda (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \theta (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

Ou, reescrevendo convenientemente:

$$\lambda \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AD} = (1 - \theta) \overrightarrow{AB} + \theta \overrightarrow{AD}.$$

Usando então que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ são linearmente independentes, segue da Proposição 2.10 que:

$$\begin{cases} \lambda = 1 - \theta \\ \lambda = \theta \end{cases}$$

donde temos $\lambda = \theta = \frac{1}{2}$ como queríamos.

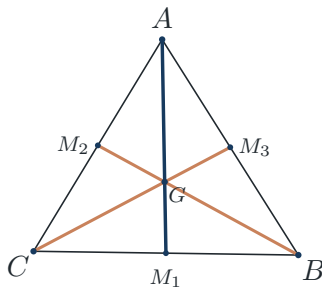


Observação 2.15

Note que nas equações (2.4) e (2.5) usamos letras distintas para os escalares que multiplicam $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$, pois, a princípio, não sabíamos se a proporção que AM guardava em relação a AC é a mesma que BM guardava em relação a BD .

Exemplo 2.16.

Sejam M_1, M_2, M_3 os pontos médios dos lados BC, CA e AB , respectivamente, do triângulo $\triangle ABC$. Seja G o ponto de interseção das medianas AM_1 e BM_2 . Mostre que G divide AM_1 e BM_2 na razão 2 para 1.



Solução. Queremos provar que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1}, \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

Denotemos $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Como $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não são paralelos, são linearmente independentes. Escreveremos os demais vetores em função dessa dupla.

Como $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_1} &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \\ \overrightarrow{BM_2} &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Como os pontos A, G e M_1 são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AM_1} = \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \alpha \overrightarrow{BM_2} = \alpha \left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right).$$

Como ainda não sabemos que G divide as duas medianas na mesma proporção, usamos parâmetros distintos, λ e α .

Além disso,

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Substituindo as expressões anteriores,

$$\alpha \left(-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \right) = -\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Reunindo os coeficientes de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} \left(-\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} \right) + \mathbf{b} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes, segue que:

$$\begin{cases} -\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

O sistema fornece

$$\alpha = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Ou seja, G divide tanto o segmento AM_1 quanto o segmento BM_2 na razão 2 para 1.

◁

Exemplo 2.17.

Usando a mesma nomenclatura do exemplo anterior, prove que as três medianas do triângulo $\triangle ABC$ têm um único ponto comum, G , que divide as três medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 na razão 2 para 1.

G é conhecido como baricentro do triângulo.

◁

Solução. Pelo exemplo anterior, resta mostrar que C, G, M_3 são colineares e que

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}.$$

Mantendo a notação $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}, \\ \overrightarrow{CM_3} &= \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Procuremos $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{CG} = \beta \overrightarrow{CM_3}$. Substituindo as expressões acima,

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} \right) = \beta \left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} \right),$$

ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right) \mathbf{a} + \left(-\frac{2}{3} + \beta\right) \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes,

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0, \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0. \end{cases}$$

Logo

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Portanto C, G, M_3 são colineares e G divide CM_3 na razão 2 para 1.

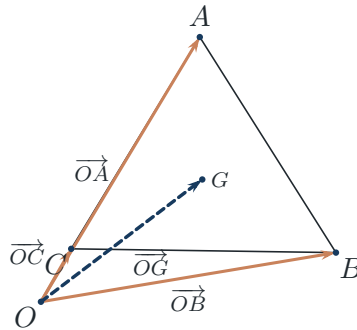
◁

Exemplo 2.18.

Dado um triângulo $\triangle ABC$ e O um ponto qualquer. Então o baricentro G do triângulo $\triangle ABC$ é dado por:

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

◁



Solução. Defina

$$P = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Como

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC},$$

segue que

$$P = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}}{3},$$

e portanto

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = A + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}.$$

No Exemplo 2.17 provamos que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3},$$

isto é,

$$G = A + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}.$$

Logo $G = P$ e, consequentemente,

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

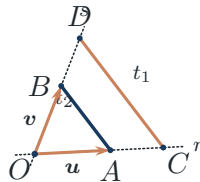
◀

Exemplo 2.19.

Sejam r e s duas retas distintas que se interceptam em O . Considere pontos $A, C \in r$ e $B, D \in s$, com A entre O e C e B entre O e D , como na figura. Mostre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos se e somente se

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$

◀



Solução. Como r e s são distintas, os vetores

$$u = \overrightarrow{OA}, \quad v = \overrightarrow{OB}$$

não são paralelos e, portanto, são linearmente independentes.

Suponha primeiro que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Então existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}.$$

Como O, A, C são colineares e O, B, D são colineares, existem $x, y > 1$ tais que

$$\overrightarrow{OC} = xu, \quad \overrightarrow{OD} = yv.$$

Logo

$$\overrightarrow{CD} = yv - xu,$$

e, como $\overrightarrow{AB} = v - u$,

$$v - u = \lambda(yv - xu).$$

Portanto

$$(\lambda x - 1)u + (1 - \lambda y)v = \mathbf{0}.$$

A independência linear de u, v implica

$$\lambda x = 1, \quad \lambda y = 1,$$

e assim $x = y$. Como A está entre O e C e B entre O e D ,

$$\|AC\| = (x - 1)\|OA\|, \quad \|BD\| = (y - 1)\|OB\|.$$

Consequentemente,

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{y - 1} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$

Invertendo as razões e somando 1 aos dois membros,

$$\frac{\|OC\|}{\|OA\|} = \frac{\|OD\|}{\|OB\|}.$$

Denote esse valor comum por k . Como os pontos pertencem às mesmas semirretas de origem O ,

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}.$$

Assim,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Logo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são paralelos, e portanto também os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



2.2. Bases

Dizemos que os vetores $v_1, \dots, v_n$ **geram** o plano ou o espaço quando todo vetor w desse ambiente pode ser escrito como combinação linear deles, isto é,

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

para escalares adequados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Proposição 2.20

Dois vetores não paralelos de $\mathbb{V}^2$ geram $\mathbb{V}^2$.

Equivalentemente, dados um vetor $f \in \mathbb{V}^2$ e dois vetores não nulos e não paralelos e_1 e e_2 de $\mathbb{V}^2$ existem $m, n \in \mathbb{R}$ tais que

$$f = me_1 + ne_2.$$

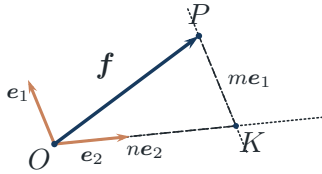


Figura 2.7.: Dois vetores não paralelos geram o plano

Demonstração. Escolha um ponto O do plano e o representante $f = \overrightarrow{OP}$. Pela extremidade P , trace a reta paralela a e_1 ; por O , trace a reta paralela a e_2 . Como e_1 e e_2 não são paralelos, essas retas se encontram em um único ponto K .

Pela construção, $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a e_1 e $\overrightarrow{OK}$ é paralelo a e_2 . Portanto existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{KP} = \lambda_1 e_1, \quad \overrightarrow{OK} = \lambda_2 e_2.$$

Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$, concluímos que

$$f = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

■

Proposição 2.21

Dados $\mathbf{f}$, um vetor qualquer de $\mathbb{V}^3$, e $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ três vetores não coplanares, temos que existem $l, m, n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3.$$

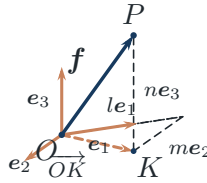


Figura 2.8.: Três vetores não coplanares geram espaço

Demonstração. A ideia é decompor $\mathbf{f}$ em uma componente paralela ao plano gerado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e uma componente paralela a $\mathbf{e}_3$. Escolhemos representantes de $\mathbf{f}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ com origem comum O e escrevemos $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$ (veja a Figura 2.8). Como $\mathbf{e}_3$ não é paralelo ao plano gerado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, a reta que passa por P e é paralela a $\mathbf{e}_3$ encontra esse plano em um único ponto K .

Como $\overrightarrow{OK}$ pertence ao plano gerado por $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, existem $l, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{OK} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2$$

Como $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{e}_3$, existe $n \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{KP} = n\mathbf{e}_3$. Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$, segue que

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3.$$

■

Proposição 2.22

Quaisquer três vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ não coplanares são linearmente independentes.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que e_1, e_2, e_3 sejam linearmente dependentes. Então um deles é combinação linear dos outros dois. Sem perda de generalidade,

$$e_1 = \lambda e_2 + \theta e_3.$$

Logo e_1 pertence ao plano gerado por e_2 e e_3 , de modo que os três vetores são coplanares, contradizendo a hipótese. ■

Definição 2.23

Uma **base** do plano ou do espaço é um conjunto ordenado de vetores que é, ao mesmo tempo, linearmente independente e gerador.

Teorema 2.24 Teorema da Base para o Plano

Qualquer vetor $f \in \mathbb{V}^2$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores não nulos e não paralelos e_1 e e_2 de $\mathbb{V}^2$, isto é:

$$f = me_1 + ne_2$$

com m e $n \in \mathbb{R}$ únicos.

Assim, dois vetores não nulos e não paralelos de $\mathbb{V}^2$ formam uma base de $\mathbb{V}^2$.

Demonstração. Consequência imediata das Proposições 2.20, 2.10 e 2.7. ■

Corolário 2.25

Toda base para o plano tem exatamente dois vetores. Em particular, o plano tem dimensão 2.

Demonstração. Uma única direção não gera o plano, portanto uma base de $\mathbb{V}^2$ não pode ter apenas um vetor. Se uma base tivesse três ou mais vetores, quaisquer dois deles seriam não paralelos, pois o conjunto é linearmente independente. Pelo teorema anterior, esses dois vetores já gerariam $\mathbb{V}^2$; qualquer vetor adicional seria combinação linear deles, contrariando a independência linear da base. Logo toda base tem exatamente dois vetores. ■

Teorema 2.26 Teorema da Base para o Espaço

No espaço tridimensional, sejam três vetores não coplanares e_1, e_2, e_3 . Então qualquer vetor f no espaço pode ser escrito como combinação linear única de e_1, e_2, e_3 , isto é:

$$f = le_1 + me_2 + ne_3$$

com $l, m, n \in \mathbb{R}$.

Assim, três vetores não coplanares formam uma base de $\mathbb{V}^3$.

Demonstração. A demonstração do Teorema segue diretamente das Proposições 2.21, 2.10 e 2.22. ■

Corolário 2.27

Toda base para o espaço tem exatamente três vetores. Em particular, $\mathbb{V}^3$ tem dimensão 3.

Demonstração. Uma base de $\mathbb{V}^3$ precisa conter ao menos três vetores: um único vetor gera apenas uma direção, e dois vetores geram no máximo um plano. Como a base gera todo o espaço, entre seus vetores existem três não coplanares; pelo teorema anterior, esses três já geram $\mathbb{V}^3$. Se houvesse um quarto vetor na base, ele seria combinação linear dos três primeiros, contradizendo a independência linear. Portanto toda base tem exatamente três vetores. ■

A **dimensão** de um espaço vetorial é o número de vetores de uma base. Os resultados anteriores mostram, em particular, que $\mathbb{V}^2$ tem dimensão 2 e $\mathbb{V}^3$ tem dimensão 3.

Podemos agora demonstrar a caracterização geométrica anunciada na seção anterior.

Teorema 2.28

(Caracterização Geométrica da Dependência e Independência Linear)

Para vetores em $\mathbb{V}^2$ e $\mathbb{V}^3$ temos:

1. Um vetor v é linearmente dependente se e somente se $v = \mathbf{0}$.
2. Dois vetores u, v são linearmente dependentes se e somente se u e v são paralelos.
3. Três vetores u, v, w são linearmente dependentes se e somente se são coplanares.
4. Quatro ou mais vetores são sempre linearmente dependentes.

Demonstração.

1. A afirmação é exatamente a Definição 2.5.
2. Se u é paralelo a v , pela Proposição 1.10, ou $u = \lambda v$ ou $v = \theta u$ ($\lambda, \theta \in \mathbb{R}$). Logo, como um dos vetores é necessariamente combinação linear do outro, segue que u, v são linearmente dependentes.

A recíproca é a contrapositiva da Proposição 2.7.

3. Suponha que u, v, w sejam coplanares. Há dois casos: u e v são paralelos ou não são.

Se u, v são paralelos, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $u = \lambda v$. Temos então que:

$$u = \lambda v + 0w.$$

Logo u é combinação linear dos demais vetores e, portanto, u, v, w são linearmente dependentes.

Se u, v, w são coplanares e u, v não são paralelos, pelo Teorema 2.24 temos que

$$w = \lambda_1 u + \lambda_2 v,$$

para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Assim, os vetores u, v, w são linearmente dependentes.

A recíproca segue da Proposição 2.22.

4. Considere n vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, com $n \geq 4$. Novamente há dois casos, conforme $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sejam coplanares ou não.

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são coplanares, um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 + \theta \mathbf{v}_3$. Segue que:

$$\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 + \theta \mathbf{v}_3 + \sum_{i=4}^n 0 \mathbf{v}_i.$$

Logo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes.

Caso $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ não sejam coplanares, pelo Teorema 2.26,

$$\mathbf{v}_4 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3,$$

para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Daí temos:

$$\mathbf{v}_4 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \sum_{i=5}^n 0 \mathbf{v}_i.$$

Logo, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes.



Exercícios

Ex. 2.1 Se $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, suponha

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{BE} = \frac{5}{6}\mathbf{a}.$$

Escreva $\overrightarrow{DE}$ em função de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Ex. 2.2 No triângulo ABC , o ponto M pertence a BC e satisfaz

$$3\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MC}.$$

Escreva $\overrightarrow{AM}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Ex. 2.3 Se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$, prove que $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ são linearmente dependentes para qualquer ponto O .

Ex. 2.4 Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sejam linearmente independentes. Determine se os vetores

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad -\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

são linearmente independentes.

Ex. 2.5 Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sejam linearmente independentes e seja

$$\mathbf{t} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

Mostre que $\mathbf{u} + \mathbf{t}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{w} + \mathbf{t}$ são linearmente independentes se, e somente se,

$$1 + a - b + c \neq 0.$$

Ex. 2.6 Prove:

- se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são linearmente dependentes, então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente dependentes para qualquer $\mathbf{w}$;
- se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente independentes, então $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são linearmente independentes.

Ex. 2.7 Se $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ são linearmente independentes e

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OB} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = 5\mathbf{a} + x\mathbf{b},$$

determine x para que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam linearmente dependentes.

Ex. 2.8 No tetraedro $OABC$, ponha

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}.$$

Se M, N, Q são os pontos médios de AB, BC, AC , respectivamente, e P satisfaz

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\mathbf{c},$$

calcule:

- $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$;
- $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ}$.

Ex. 2.9 Prove que três vetores de $\mathbb{V}^3$ são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

Ex. 2.10 Se $\{u, v\}$ é uma base do plano, prove que

$$\{u + v, u - v\}$$

também é uma base.

Ex. 2.11 Se $\{u, v, w\}$ é uma base do espaço, prove que

$$\{u + v, u - v, w - 2u\}$$

também é uma base.

Ex. 2.12 Seja $ABCD$ um tetraedro não degenerado. Explique por que

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$$

formam uma base de $\mathbb{V}^3$.

Ex. 2.13 Chama-se diagonal espacial de um paralelepípedo um segmento que une dois vértices opostos. Prove que as quatro diagonais espaciais se encontram num mesmo ponto e se dividem mutuamente ao meio.

Ex. 2.14 No triângulo OAB , os pontos C, D dividem AB em três partes congruentes, na ordem A, C, D, B . Pela reta por B paralela a OA , sejam X e Y as interseções com as retas OC e OD , respectivamente.

- Expresse $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ em função de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.
- Determine as razões $OC : CX$, $OD : DY$ e $BX : XY$.

Ex. 2.15 Num quadrilátero $ABCD$, as diagonais AC e BD se encontram em Q e satisfazem

$$AQ : QC = 4 : 3, \quad BQ : QD = 2 : 3.$$

As retas AB e CD se encontram em P . Determine as razões $AP : PB$ e $CP : PD$.

Ex. 2.16 No triângulo ABC , seja E o ponto médio de BC e D o ponto médio da mediana AE . A reta BD encontra AC em F . Determine a razão $AF : FC$.

Ex. 2.17 Seja $ABCD$ um paralelogramo. Uma reta ℓ encontra as retas AB, AC, AD nos pontos B_1, C_1, D_1 . Suponha

$$\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \overrightarrow{AC},$$

com $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Prove que

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}.$$

Ex. 2.18 No triângulo ABC , seja I um ponto interior. Por I traçam-se segmentos paralelos a cada um dos três lados, com extremidades nos outros dois lados. Denote seus comprimentos por p, q, r , correspondentes aos lados AB, BC, CA . Prove que

$$\frac{p}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{q}{\|\overrightarrow{BC}\|} + \frac{r}{\|\overrightarrow{CA}\|} = 2.$$

Ex. 2.19 Seja G o baricentro do triângulo ABC . Prove que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}.$$

Mostre também que, para qualquer origem O ,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Ex. 2.20 No tetraedro $ABCD$, seja M o baricentro da face ABC . Expresse $\overrightarrow{DM}$ em função de $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

Ex. 2.21 Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio de AB e F o ponto médio de DC , prove que

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Ex. 2.22 Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual à semissoma dos comprimentos das bases.

Ex. 2.23 Prove que existe um único ponto comum às três bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto é interior ao triângulo.

Ex. 2.24 Seja $ABCD$ um quadrilátero, O um ponto qualquer, M e N os pontos médios das diagonais AC e BD , e P o ponto médio de MN . Prove que

$$P = O + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Ex. 2.25 Em um triângulo ABC , escolha em AB, BC, CA pontos P, Q, R que dividam os três lados na mesma razão orientada, isto é, para algum $t \in \mathbb{R}$,

$$P = (1 - t)A + tB, \quad Q = (1 - t)B + tC, \quad R = (1 - t)C + tA.$$

Prove que ABC e PQR têm o mesmo baricentro.

Ex. 2.26 Sejam $m, n > 0$ e

$$R = O + m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}.$$

A reta OR encontra o segmento AB em P . Prove que

$$(m + n)\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$$

e determine a razão $AP : PB$.

Ex. 2.27 Seja O o circuncentro e H o ortocentro do triângulo ABC . Prove:

- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$;
- $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

Vetores em Coordenadas

Nos capítulos anteriores tratamos os vetores principalmente de forma geométrica. Essa abordagem esclarece os conceitos, mas cálculos mais elaborados tornam-se muito mais simples quando escolhemos coordenadas. Neste capítulo construiremos essa representação algébrica e veremos como ela permite traduzir problemas geométricos em equações e operações com números reais.

O ponto de partida é o conceito de base, introduzido no capítulo anterior. Uma base fornece coordenadas para vetores; escolhendo também uma origem, obtemos coordenadas para os pontos do plano ou do espaço.

Mais precisamente, escolher coordenadas no espaço euclidiano significa escolher uma origem O e uma base ordenada de vetores. Essa escolha fornece uma bijeção entre os pontos do espaço e $\mathbb{R}^3$: a cada ponto associamos as coordenadas de seu vetor posição na base escolhida. No plano, o procedimento é análogo, com uma base de dois vetores.

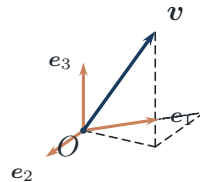
3.1. Coordenadas de Vetores e Pontos

A construção será feita em duas etapas. Primeiro, uma base ordenada fornece coordenadas para os vetores. Depois, escolhendo uma origem, usamos o vetor posição para atribuir coordenadas aos pontos.

3.1.1. Coordenadas de vetores

Se considerarmos $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{V}^3$, pelo teorema da base para o espaço, temos que qualquer vetor v pode ser representado como:

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3,$$



onde os coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são únicos.

Tal igualdade nos permite construir a seguinte bijeção entre $\mathbb{V}^3$ e $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathbb{V}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \end{aligned}$$

A existência e a unicidade dos coeficientes mostram que essa aplicação é uma bijeção: cada vetor determina uma única tripla e toda tripla de números reais determina um único vetor. Escreveremos, portanto,

$$v : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}.$$

E denominamos a tripla $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de **coordenadas** do vetor v na base $\mathcal{B}$.

3.1.2. Coordenadas de pontos

Considere agora o espaço euclidiano $(\mathbb{E}^3)$. O primeiro passo necessário para encontrarmos um sistema de coordenadas é “localizar” os pontos no espaço. Observe que para isso não basta uma base de vetores, pois, como já dissemos anteriormente, vetores não são localizados no espaço. Assim torna-se necessária a escolha de um ponto qualquer para nos servir de referência. Fixemos então um ponto $O \in \mathbb{E}^3$ a que chamaremos de *origem* do sistema de coordenadas. A partir de tal ponto as posições de todos os pontos de $\mathbb{E}^3$ serão determinadas.

Observe que, fixado O , um ponto P qualquer em $\mathbb{E}^3$ pode ser escrito como $P = O + \overrightarrow{OP}$. Tal igualdade nos permite identificar univocamente pontos de $\mathbb{E}^3$ com vetores de $\mathbb{V}^3$:

$$\begin{aligned} \iota_2 : \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{V}^3 \\ P &\longmapsto \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

O vetor $\overrightarrow{OP}$ é denominado **vetor posição** de P .

Tomando a função composta $\iota := \iota_1 \circ \iota_2$ obtemos uma bijeção entre os pontos de $\mathbb{E}^3$ e os elementos de $\mathbb{R}^3$: a cada ponto P podemos associar a tripla $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

3.2. Sistemas de Coordenadas

Motivado pelo exposto acima, definimos

Definição 3.1

Um **sistema de coordenadas no espaço** é um par $\Sigma = (O, \mathcal{B})$, em que O é um ponto, chamado de **origem**, e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ é uma base ordenada de $\mathbb{V}^3$. A base determina as coordenadas dos vetores; a origem é necessária para determinar as coordenadas dos pontos.

A escolha de Σ determina uma bijeção entre $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{R}^3$. Escreveremos

$$P : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_\Sigma,$$

onde $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são as coordenadas do vetor posição $\overrightarrow{OP}$ na base $\mathcal{B}$. Chamamos, nesse caso, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de **coordenadas** do ponto P no sistema de coordenadas Σ .

Observação 3.2

Fixado um sistema de coordenadas Σ , é usual representar as coordenadas de um vetor v na base $\mathcal{B}$ associada a Σ também por $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_\Sigma$.

Muitas vezes quando o sistema de coordenadas Σ e a base $\mathcal{B}$ estão claros pelo contexto é comum, também, denotar tanto o ponto P quanto seu vetor posição $\overrightarrow{OP}$ indistintamente por suas coordenadas: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (sem indicar os sub-índices Σ ou $\mathcal{B}$). Nesse caso cabe ao leitor entender pelo contexto a quem se referem as coordenadas descritas, a um ponto ou a um vetor.

Finalmente, observamos que podemos de forma totalmente análoga à descrita acima identificar pontos do plano euclidiano $\mathbb{E}^2$ com vetores de $\mathbb{V}^2$ e com elementos de $\mathbb{R}^2$. Para isso tudo que precisamos é de um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ onde $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{V}^2$, ou seja, um conjunto formado por dois vetores linearmente independentes.

Quando escrevermos as fórmulas em $\mathbb{V}^3$, a versão planar será obtida simplesmente omitindo a terceira coordenada.

Até aqui não foi necessário supor que a base fosse ortogonal ou que seus vetores tivessem norma 1. Uma base qualquer permite atribuir coordenadas e efetuar as operações algébricas deste capítulo. Bases ortonormais se tornarão especiais apenas quando quisermos traduzir diretamente para coordenadas noções métricas, como comprimento, distância e ângulo; voltaremos a esse ponto na Seção 3.5.

Exemplo 3.3.

Dado um retângulo $ABCD$ conforme a figura abaixo, vamos encontrar as coordenadas dos pontos A, B, C, D e dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

1. $\Sigma_1 = (A, \mathcal{B}_1)$ onde $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$.
2. $\Sigma_2 = (B, \mathcal{B}_2)$ onde $\mathcal{B}_2 = (e_3, \frac{1}{2}e_1)$.

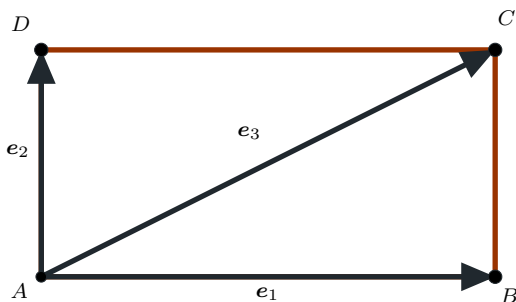


Figura 3.1.: Retângulo $ABCD$ e vetores e_1, e_2, e_3 .

Solução. (1) Vamos primeiro escrever as coordenadas de A, B, C, D no sistema Σ_1 . Para isso devemos escrever os vetores $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de e_1 e e_2 . Por definição

$$\overrightarrow{AB} = e_1 \text{ e } \overrightarrow{AD} = e_2.$$

Temos também que

$$\overrightarrow{AC} = e_1 + e_2$$

e que $\overrightarrow{AA}$, sendo o vetor nulo, é igual a $0e_1 + 0e_2$. Assim as coordenadas são

$$A : (0, 0)_{\Sigma_1} \text{ pois } \overrightarrow{AA} = 0e_1 + 0e_2$$

$$B : (1, 0)_{\Sigma_1} \text{ pois } \overrightarrow{AB} = 1e_1 + 0e_2$$

$$C : (1, 1)_{\Sigma_1} \text{ pois } \overrightarrow{AC} = 1e_1 + 1e_2$$

$$D : (0, 1)_{\Sigma_1} \text{ pois } \overrightarrow{AD} = 0e_1 + 1e_2.$$

Para encontrar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$ basta observar que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \text{ e } \overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

e portanto temos

$$\overrightarrow{BD} : (-1, 1)_{\Sigma_1}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 1)_{\Sigma_1}$$

(2) Vamos agora escrever as coordenadas dos pontos A, B, C, D no sistema $\Sigma_2 = \left(B, (\mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1) \right)$.

Para tanto devemos escrever os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ como combinação de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sendo $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$.

Observe que

$$\overrightarrow{BA} = -\mathbf{e}_1 = -2 \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \right) = -2\mathbf{f}_2,$$

$$\overrightarrow{BB} = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 \text{ (vetor nulo),}$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2.$$

E assim as coordenadas dos pontos são

$$A : (0, -2)_{\Sigma_2}$$

$$B : (0, 0)_{\Sigma_2}$$

$$C : (1, -2)_{\Sigma_2}$$

$$D : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

Calculando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$, usando que $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$ obtemos que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1,$$

e portanto vale

$$\overrightarrow{BD} : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 0)_{\Sigma_2}.$$

3.3. Operações em Coordenadas

Escolher coordenadas não modifica as operações vetoriais; apenas as traduz em operações com números reais. A proposição seguinte torna essa correspondência explícita.

Proposição 3.4

Se $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$ e $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$ então:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_\Sigma$
2. $\lambda \mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_\Sigma$
3. $P + \mathbf{u} : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$

Demonstração.

1. Dado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

E logo

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \\ &= (a_1 + b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

E desta forma as coordenadas de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ no sistema de coordenadas Σ são

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

2. Como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

Desta forma temos que

$$\lambda \mathbf{u} = \lambda (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \tag{3.1}$$

$$= \lambda a_1 \mathbf{e}_1 + \lambda a_2 \mathbf{e}_2 + \lambda a_3 \mathbf{e}_3 \tag{3.2}$$

E conseqüentemente:

$$\lambda \mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3. Deixaremos como exercício para o leitor.



Considere fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$. Observadas as operações com pontos e vetores em coordenadas, uma pergunta que resta ser respondida é: dados os pontos $A : (a_1, a_2, a_3)$ e $B : (b_1, b_2, b_3)$, como podemos encontrar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$?

Observe que, pela definição de subtração de vetores, vale que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Então, como $\overrightarrow{OA} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\overrightarrow{OB} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, temos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - a_2)\mathbf{e}_2 + (b_3 - a_3)\mathbf{e}_3 \\ \overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)\end{aligned}$$

Tal igualdade dá origem a **notação de Grassmann** que diz:

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Observe que a igualdade acima é, no entanto, apenas uma notação já que em nenhum momento foi definida soma ou subtração de pontos.

Exemplo 3.5.

Dados os pontos $A : (1, 3, 2)$, $B : (1, 1, 1)$ e $C : (1, 1, 0)$ determine as coordenadas

1. dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$
2. do vetor $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
3. do ponto $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



Solução.

1. $\overrightarrow{AB} : (1 - 1, 1 - 3, 1 - 2) = (0, -2, -1)$
 $\overrightarrow{BC} : (1 - 1, 1 - 1, 0 - 1) = (0, 0, -1)$
2. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (0, -2, -1) + \frac{1}{3}(0, 0, -1) = (0, -2, -1 - \frac{1}{3}) = (0, -2, -\frac{4}{3})$
3. $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, -2, -1) = (1, 0, -\frac{1}{2})$



Exemplo 3.6.

Determine o ponto médio $M = (m_1, m_2, m_3)$ de um segmento com ponto inicial $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, num sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.



Solução. Primeiro observamos que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ pois os vetores possuem o mesmo sentido e o comprimento $\|\overrightarrow{AB}\|$ é duas vezes o comprimento $\|\overrightarrow{AM}\|$.

Assim,

$$(b_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - a_2)\mathbf{e}_2 + (b_3 - a_3)\mathbf{e}_3 = 2(m_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + 2(m_2 - a_2)\mathbf{e}_2 + 2(m_3 - a_3)\mathbf{e}_3.$$

Como $\mathcal{B}$ é uma base, os coeficientes correspondentes são iguais. Portanto,

$$b_i - a_i = 2(m_i - a_i),$$

para $i = 1, 2, 3$, e assim

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Logo,

$$M : \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right).$$



3.4. Independência Linear e Mudança de Base

Uma vez escolhida uma base, questões de dependência linear podem ser decididas por meio de sistemas lineares e determinantes. Essa é a primeira situação em que a representação em coordenadas não apenas codifica os vetores, mas simplifica de fato um problema geométrico.

3.4.1. Critério por determinantes

Teorema 3.7*Sejam*

$$\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3), \quad \mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$$

as coordenadas de três vetores numa mesma base. Então $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente independentes se e somente se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. Os vetores são linearmente independentes se e somente se a relação

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

possui apenas a solução $x = y = z = 0$. Em coordenadas, essa relação equivale ao sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um sistema homogêneo quadrado possui apenas a solução trivial exatamente quando sua matriz de coeficientes é invertível, isto é, quando seu determinante é não nulo.

**Exemplo 3.8.**

Determine m de modo que os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sejam linearmente dependentes, onde:

$$\mathbf{u} = (1, m+1, m+2), \quad \mathbf{v} = (1, 0, m), \quad \mathbf{w} = (0, 2, 3).$$



Solução. Para que os vetores sejam linearmente dependentes, pelo Teorema 3.7 o determinante da matriz cujas colunas são suas coordenadas deve se anular:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2+m & m & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Calculando o determinante temos que:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2+m & m & 3 \end{pmatrix} = 1 - 3m$$

Logo $1 - 3m = 0$, e portanto $m = \frac{1}{3}$.



3.4.2. Um primeiro exemplo de mudança de base

Uma mesma base pode ser usada para descrever as coordenadas de outros vetores que, por sua vez, formam uma nova base. O vetor geométrico não muda quando trocamos de base; mudam apenas os números usados para representá-lo.

Exemplo 3.9.

Considere uma base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ e os vetores

$$\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{f}_2 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{f}_3 = (0, -1, 1)_{\mathcal{B}}.$$

1. Mostre que $\mathcal{C} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ é uma base de $\mathbb{V}^3$.
2. Encontre as coordenadas de $\mathbf{u} = (1, 2, 3)_{\mathcal{C}}$ na base $\mathcal{B}$.
3. Encontre as coordenadas de $\mathbf{v} = (1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$ na base $\mathcal{C}$.



Solução.

1. A matriz cujas colunas são as coordenadas de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ na base $\mathcal{B}$ é

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det M = -1 \neq 0$, os três vetores são linearmente independentes. Como estamos em $\mathbb{V}^3$, eles formam uma base.

2. Aqui conhecemos as coordenadas de $\mathbf{u}$ na base $\mathcal{C}$. Basta expandir a combinação linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 3\mathbf{f}_3 \\ &= (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} + 2(1, 0, 1)_{\mathcal{B}} + 3(0, -1, 1)_{\mathcal{B}} \\ &= (3, -2, 6)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

3. Agora o sentido da conversão é o contrário. Procuramos escalares a, b, c tais que

$$\mathbf{v} = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2 + c\mathbf{f}_3.$$

Escrevendo tudo na base $\mathcal{B}$, obtemos

$$a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, -1, 1) = (1, 2, 3),$$

ou seja,

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a - c = 2, \\ a + b + c = 3. \end{cases}$$

Da primeira e da terceira equações, $c = 2$; então $a = 4$ e $b = -3$. Portanto

$$\mathbf{v} = (4, -3, 2)_{\mathcal{C}}.$$



Observação 3.10

O exemplo mostra as duas direções de uma mudança de base. Quando conhecemos as novas coordenadas, voltar à base antiga é uma combinação linear direta. No sentido inverso, precisamos resolver um sistema linear. No Capítulo 12 organizaremos esse procedimento por meio de matrizes de mudança de base.

3.5. Bases Ortonormais e Coordenadas Cartesianas

Até este ponto trabalhamos com bases arbitrárias. Isso é suficiente para representar vetores, somá-los, multiplicá-los por escalares e estudar independência linear. Entretanto, numa base qualquer, as coordenadas de um vetor não fornecem imediatamente seu comprimento, e as fórmulas usuais de distância e ângulo deixam de ter a forma elementar que conhecemos.

É exatamente essa dificuldade que torna as bases ortonormais especiais.

Definição 3.11

Uma base é dita **ortonormal** quando seus vetores são ortogonais dois a dois e todos têm norma 1. Um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ é chamado **cartesiano** quando a base $\mathcal{B}$ é ortonormal.

Quando a base não é ortogonal, diremos que o sistema é **oblíquo**.

Observe que “cartesiano” e “oblíquo” não são categorias complementares: uma base pode ser ortogonal sem ser ortonormal, se seus vetores forem perpendiculares mas não tiverem todos norma 1.

Usaremos (i, j) para uma base ortonormal do plano e (i, j, k) para uma base ortonormal do espaço. A figura abaixo contrasta um sistema cartesiano com um sistema oblíquo.

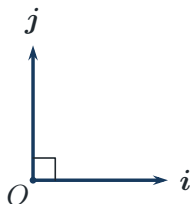


Figura 3.2.: Sistema cartesiano no plano.

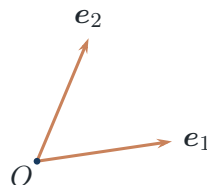


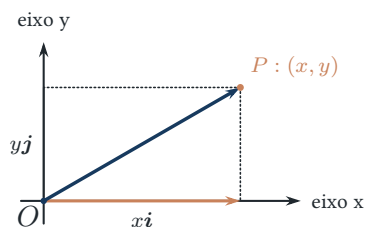
Figura 3.3.: Sistema oblíquo no plano.

3.5.1. Norma e distância em coordenadas cartesianas

Seja $\mathcal{B} = (i, j)$ uma base ortonormal de $\mathbb{V}^2$ e seja O um ponto do plano. O par $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ determina um sistema cartesiano. Dado um ponto P , considere o vetor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ e sua representação no sistema Σ dada por $\mathbf{r} : (x, y)$, ou seja:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Como $x\mathbf{i}$ e $y\mathbf{j}$ são ortogonais, o Teorema de Pitágoras fornece



$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \|x\mathbf{i}\|^2 + \|y\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 \|\mathbf{i}\|^2 + y^2 \|\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Assim, se denotarmos por r o tamanho do vetor $\mathbf{r}$ temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A mesma ideia pode ser generalizada para o espaço, onde obtemos que se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então

$$r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A fórmula da distância é uma consequência imediata. Como $\overrightarrow{PQ} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, temos

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

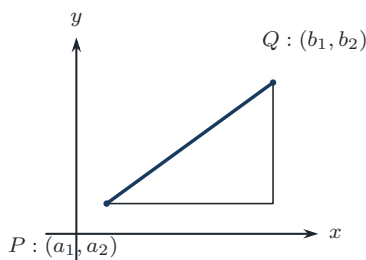
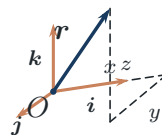


Figura 3.4.: Distância entre dois pontos no plano.

No espaço tridimensional, a distância entre os pontos $P : (a_1, a_2, a_3)$ e $Q : (b_1, b_2, b_3)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Observação 3.12

As fórmulas simples para norma e distância dependem da ortonormalidade da base. Em uma base geral, ainda podemos calcular essas quantidades, mas aparecem fatores que registram os comprimentos e os ângulos entre os vetores da base. Essa diferença é precisamente o motivo para privilegiarmos sistemas cartesianos quando o problema envolve geometria métrica.

Exemplo 3.13.

Suponha fixado um sistema de coordenadas cartesiano. Calcule a distância dos pontos $A : (1, 0, 2)$ e $B : (3, 2, 1)$.

Solução. Temos que $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$. Como $\vec{AB} = B - A = (2, 2, -1)$, segue que:

$$d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

3.6. Produto Escalar: Ângulo entre dois Vetores

É de fundamental importância em toda geometria a determinação de medidas angulares. Veremos mais adiante que, além de diversas outras aplicações, ângulos entre vetores (ou entre vetores e retas) podem ser usados na definição de uma nova forma de representar pontos do espaço euclidiano (coordenadas polares). Surge então a pergunta: como podemos utilizar os sistemas de coordenadas para determinar o ângulo entre dois vetores u e v ?

Conforme vimos no Capítulo 1, se u e v são não nulos, o ângulo entre eles é o ângulo θ , com $0 \leq \theta \leq \pi$, formado por representantes com a mesma origem.

Para determinarmos uma expressão para ângulo entre dois vetores u e v o primeiro passo é escolher um sistema de coordenadas cartesiano $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ com $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e escrever os vetores neste sistema:

$$u = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$v = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

Utilizando a lei dos cossenos temos que:

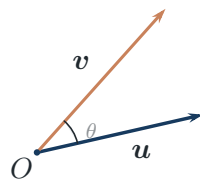
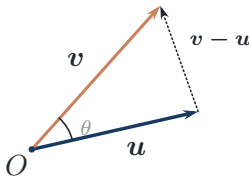


Figura 3.5.: Ângulo entre u e v



$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta),$$

e consequentemente

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta).$$

Assim

$$\cos(\theta) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}. \quad (3.3)$$

Ao termo $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ daremos o nome de produto escalar de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{v}$ e denotaremos por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Resumindo:

Definição 3.14

Se $\Sigma = (O, \mathcal{B})$, com $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, é um sistema cartesiano, e se $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, definimos o **produto escalar** (ou **produto interno**) por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Assim, o produto escalar associa a dois vetores um número real. Se ambos são não nulos e θ é o ângulo entre eles, a dedução anterior fornece a interpretação geométrica

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

Observação 3.15

É importante observar que a expressão:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta)$$

independe da escolha do sistema de coordenadas, ou seja, tal igualdade é válida também em sistemas de coordenadas não cartesianos. No entanto, a igualdade:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

só é válida em sistemas de coordenadas cartesianos (ortonormais).

Além disso, os argumentos apresentados anteriormente provam que:

Proposição 3.16

Dados dois vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o ângulo θ entre eles satisfaz:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta,$$

e, portanto,

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right).$$

Como consequência imediata da definição de produto escalar temos:

Proposição 3.17

Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são perpendiculares se e somente se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Observação 3.18

Dado um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$ num sistema cartesiano no plano, é interessante notar que o vetor $\mathbf{n} = (-y, x)$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e tem mesma norma de $\mathbf{v}$. Note:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= -xy + xy = 0 \\ \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

De fato, veremos no Capítulo 11, Seção 11.3 que $\mathbf{n}_1 = (-y, x)$ é obtido rotacionado de 90° o vetor $\mathbf{v}$ no sentido anti-horário, e $\mathbf{n}_2 = (y, -x)$ é obtido rotacionado de 90° o vetor $\mathbf{v}$ no sentido horário.

Exemplo 3.19.

Determine o ângulo entre $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

**Solução.**

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \end{aligned}$$

Exemplo 3.20.

Mostre que os vetores $u = 3i + 4j + k$ e $v = 2i - 3j + 6k$ são ortogonais.

Solução.

$$u \cdot v = (3, 4, 1) \cdot (2, -3, 6) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = 6 - 12 + 6 = 0.$$

Logo u e v são ortogonais.

Proposição 3.21

O produto escalar possui as seguintes propriedades:

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. $u \cdot u = \|u\|^2 \geq 0$
4. $u \cdot u = 0$ se e somente se $u = 0$
5. $u \cdot (\lambda v) = \lambda u \cdot v$

Observação 3.22

De modo geral, fixado um espaço vetorial V , qualquer função binária $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades descritas acima é dita ser um **produto interno** de V .

Demonstração. Se $u : (a_1, a_2, a_3)$ e $v : (b_1, b_2, b_3)$ e $w : (c_1, c_2, c_3)$

1.

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = v \cdot u$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\
 &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\
 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}
 \end{aligned}$$

3.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

4. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ então $\|\mathbf{u}\| = 0$ e consequentemente $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Reciprocamente, se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ temos $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, e então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$.

5. A demonstração desse item é deixada como exercício ao leitor.



Exemplo 3.23.

Num quadrado ABCD tem-se $A = (3, -4)$ e $B = (5, 6)$. Quais são as coordenadas dos pontos C e D ?



Solução 1. Denotando as coordenadas de C e D por $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$, $\overrightarrow{BC} = (c_1 - 5, c_2 - 6)$, $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$ e $\overrightarrow{DA} = (3 - d_1, -4 - d_2)$.

O vetor $\overrightarrow{BC}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ logo o produto escalar entre eles é nulo, ou seja,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Isto implica que $2(c_1 - 5) + 10(c_2 - 6) = 0$, que simplificando resulta em

$$2c_1 + 10c_2 = 70 \quad (3.4)$$

Temos ainda que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{104}$, logo

$$(c_1 - 5)^2 + (c_2 - 6)^2 = 104 \quad (3.5)$$

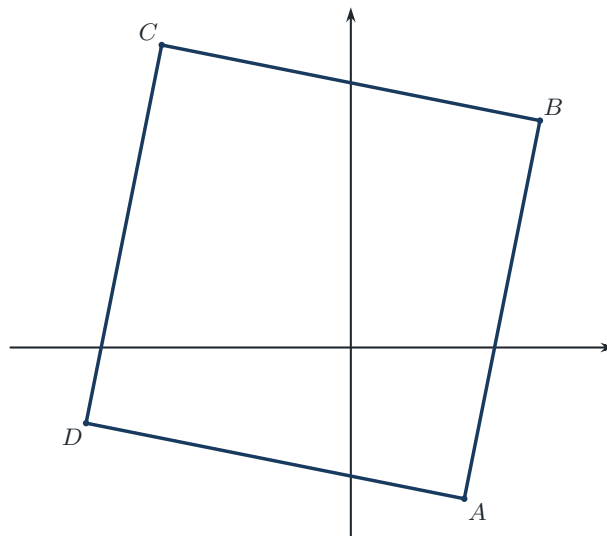


Figura 3.6.: Quadrados de lado AB

Substituindo (3.4) em (3.5) teremos que $(c_2 - 6)^2 = 4$ e logo $c_2 = 8$ ou $c_2 = 4$

Quando $c_2 = 8$ por (3.4) $c_1 = -5$ e quando $c_2 = 4$ então $c_1 = 15$, ou seja, $C = (-5, 8)$ ou $C = (15, 4)$.

O cálculo de D é análogo.



Solução 2. Uma segunda solução para o exemplo acima faz uso da Observação 3.18. Temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$ e daí, rotacionando $\overrightarrow{AB}$ de 90° no sentido anti-horário, temos $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-10, 2)$. Logo:

$$\begin{aligned} C &= B + \overrightarrow{BC} = (-5, 8) \\ D &= A + \overrightarrow{AD} = (-7, -2). \end{aligned}$$

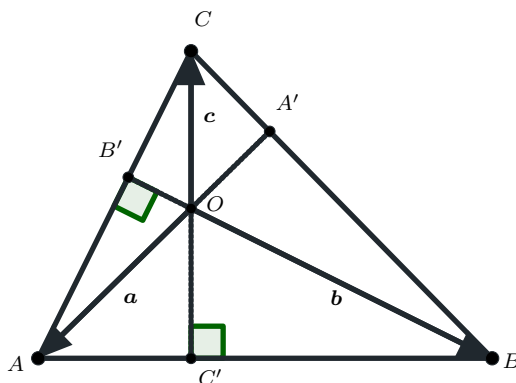
Finalmente, se rotacionamos $\overrightarrow{AB}$ de 90° no sentido horário, temos $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (10, -2)$. Assim:

$$\begin{aligned} C &= B + \overrightarrow{BC} = (15, 4) \\ D &= A + \overrightarrow{AD} = (13, -6). \end{aligned}$$



Exemplo 3.24.

Mostre que as três alturas de um triângulo são concorrentes em único ponto.



Solução. Dado um triângulo $\triangle ABC$, então as alturas BB' e CC' se interceptam num ponto O . O problema fica resolvido se mostrarmos que AA' é a altura relativa ao lado BC . Sejam então os vetores: $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Como as retas OB e CA são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

De modo análogo, como as retas OC e AB são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

E logo $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$, ou seja,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Desta forma a reta OA é perpendicular ao lado BC , sendo assim a altura relativa ao vértice A . Essa reta intercepta as outras alturas no ponto O , e assim as três retas se interceptam num único ponto, que é denominado **ortocentro** do triângulo $\triangle ABC$.

◁

3.6.1. Projeção Ortogonal

Passemos agora a um novo problema. Dados dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, com $\mathbf{u}$ não nulo, queremos decompor o vetor $\mathbf{v}$ em dois vetores $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ tais que $\mathbf{p}$ é paralelo a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{q}$ é perpendicular a $\mathbf{u}$, ou seja, queremos encontrar $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} = \lambda \mathbf{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Reescrevendo as condições acima temos que

$$(\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

e logo

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \lambda \|\mathbf{u}\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

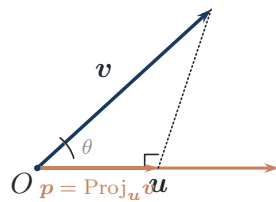


Figura 3.7.: Projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$

Desta forma

$$\lambda = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

e

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}$$

Do mesmo modo podemos ver que o vetor $\mathbf{p}$ assim determinado é único. Tal vetor é chamado de projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ e é denotado por $\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$.

Demonstramos assim o seguinte resultado.

Proposição 3.25

Dado $\mathbf{u}$ um vetor não nulo, e $\mathbf{v}$ um vetor qualquer, então a projeção ortogonal $\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$ em $\mathbf{u}$ existe e é única:

$$\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u} \quad (3.6)$$

Observação 3.26

Uma forma útil de interpretar a fórmula é separar a componente escalar da direção. O número

$$\text{comp}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}$$

é a componente escalar orientada de $\mathbf{v}$ na direção de $\mathbf{u}$. Multiplicando-a pelo versor $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ obtemos

$$\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} \right) \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right) = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}.$$

A projeção tem a mesma direção de $\mathbf{u}$, mas seu sentido depende do sinal de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Sua norma é $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|/\|\mathbf{u}\|$.

Note também que a projeção não depende do comprimento escolhido para representar a direção de $\mathbf{u}$: substituir $\mathbf{u}$ por qualquer múltiplo não nulo não altera o vetor projetado.

Exemplo 3.27.

Determine a área do triângulo $\triangle ABC$ cujos vértices num sistema de coordenadas cartesiano são $A = (1, 2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (2, 5)$

Solução. Temos que $\vec{AB} = (2, -1)$ e $\vec{AC} = (1, 3)$. Além disso, $\mathbf{n} = (1, 2)$ é um vetor ortogonal a $\vec{AB}$.

A área do triângulo $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| h,$$

onde $h = \|\text{Proj}_{\mathbf{n}} \vec{AC}\| = \frac{|\vec{AC} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$, é a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado AB .

Como $\|\mathbf{n}\| = \|\vec{AB}\|$, temos que $S = \frac{1}{2} |\vec{AC} \cdot \mathbf{n}|$. Logo:

$$S = \left(\frac{1}{2}\right) |1 + 6| = \frac{7}{2}.$$

3.7. Produto Vetorial: Vetor Perpendicular a dois Vetores Dados

Voltemos nossa atenção agora para um novo problema: dado dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como podemos encontrar um novo vetor $\mathbf{w}$ perpendicular aos dois vetores dados? Note que, ao contrário do que ocorre com a projeção, este problema não possui uma única solução. De fato, se encontrarmos um vetor $\mathbf{w}$ satisfazendo as condições acima, qualquer vetor $\lambda \mathbf{w}$ também satisfará.

Passemos à solução. Como sempre, tomemos primeiro uma base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e façamos $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$. Vamos denotar por $\mathbf{w} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ o vetor que queremos determinar. Como queremos que o vetor $\mathbf{w}$ seja perpendicular aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, precisamos então que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ e que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Temos assim o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z \\ b_1x + b_2y = -b_3z \end{cases}$$

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não são paralelos, pelo exercício 11.10 podemos supor sem perda de generalidade que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

e, usando a regra de Cramer, concluímos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3z & a_2 \\ -b_3z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3z \\ b_1 & -b_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Escolhendo

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

temos que

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Motivados pelos cálculos acima, definimos:

Definição 3.28

O produto vetorial de $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ (num sistema de coordenadas cartesiano), denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, é o vetor obtido pelo seguinte determinante formal:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Observação 3.29

Note que, diferentemente do produto escalar que associa a dois vetores um número real, o produto vetorial associa a dois vetores um terceiro vetor. O seja, dados vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de V^3 temos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, mas $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \in V^3$.

Antes de continuar apresentaremos algumas propriedades do produto vetorial.

Teorema 3.30

Dados os vetores $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$ o produto vetorial possui as seguintes propriedades:

1. *Anti-simetria:* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. *Distributiva:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
3. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2$
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Demonstração. A demonstração dos dois primeiros itens é direta e será deixada como exercícios:

Para demonstrarmos a terceira propriedade, basta observar que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

A quarta propriedade decorre facilmente da anterior, bastando para isso lembrar que

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$



Vamos agora explorar algumas consequências geométricas do produto vetorial.

3.7.1. Área de um Paralelogramo e de um Triângulo

Primeiro considere o paralelogramo determinado por dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como na figura abaixo

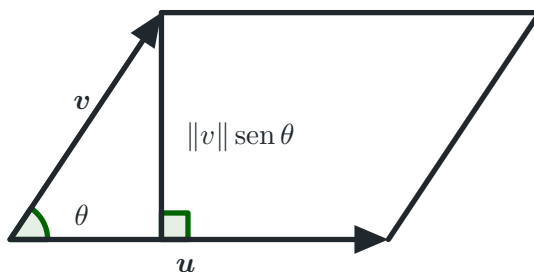


Figura 3.8.: Paralelogramo gerado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

A altura do paralelogramo é dada por $\|\mathbf{v}\| \sin(\theta)$ e portanto, da propriedade 4 do produto vetorial, concluímos facilmente que sua área é dada por $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Em resumo, mostramos que a área do paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é igual ao comprimento do produto vetorial destes vetores.

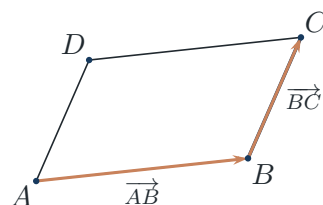
$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Observação 3.31

Para vetores não paralelos, o produto vetorial também pode ser caracterizado geometricamente: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é o vetor cuja norma é a área do paralelogramo gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, cuja direção é perpendicular a ambos e cujo sentido é determinado pela regra da mão direita. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, então $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A partir da expressão anterior obtemos imediatamente a área de um triângulo $\triangle ABC$. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam um paralelogramo que se decompõe em dois triângulos de mesma área. Portanto,

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$



3.8. Produto Misto

O **produto misto** é uma operação que associa a três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ o número real obtido pelo produto escalar de $\mathbf{u}$ com o produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Denotamos o produto misto entre $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

É importante salientar que, como o produto escalar entre dois vetores é um número real e o produto vetorial é uma operação entre dois vetores, no cálculo do produto misto realizamos sempre o produto vetorial antes do produto escalar, ou seja, mesmo sem a utilização de parênteses, temos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. A operação $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ não é bem definida!

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são descritos numa base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ o cálculo do produto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ é simples conforme podemos observar no teorema a seguir:

Teorema 3.32

Dados os vetores $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$ descritos numa base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, temos:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração. Calculando $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ temos:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1).$$

Fazendo então o produto escalar segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Calculando de maneira análoga o produto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ é fácil ver que vale a igualdade $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. ■

A partir do Teorema acima e das propriedades de determinantes, são praticamente imediatas as propriedades de produto misto descritas na próxima proposição:

Proposição 3.33

Dados vetores u, v, w, m e $\lambda \in \mathbb{R}$ valem:

1. *Permutação de dois vetores inverte sinal:*

$$u \cdot v \times w = -u \cdot w \times v = -v \cdot u \times w = -w \cdot v \times u;$$

2. *Igualdade por permutação circular:*

$$u \cdot v \times w = v \cdot w \times u = w \cdot u \times v;$$

3. *Se dois vetores são iguais o produto é zero:*

$$u \cdot u \times v = u \cdot v \times u = v \cdot u \times u.$$

4. *Escalares comutam:*

$$(\lambda u) \cdot v \times w = u \cdot (\lambda v) \times w = u \cdot v \times (\lambda w) = \lambda (u \cdot v \times w)$$

5. *Vale a distributiva:*

$$\begin{aligned}(u + m) \cdot v \times w &= u \cdot v \times w + m \cdot v \times w \\ u \cdot (v + m) \times w &= u \cdot v \times w + u \cdot m \times w \\ u \cdot v \times (w + m) &= u \cdot v \times w + u \cdot v \times m\end{aligned}$$

Veja um exemplo de aplicação de tais propriedades:

Exemplo 3.34.

Sabendo que $u \cdot v \times w = 2$ calcule $v \cdot (2u + v) \times (3w)$.



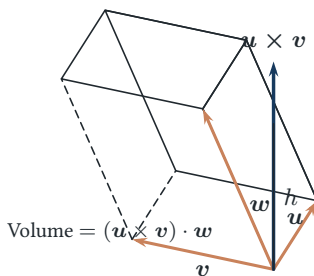
Solução.

$$\begin{aligned}v \cdot (2u + v) \times (3w) &= v \cdot (2u) \times (3w) + v \cdot v \times (3w) \\ &= (2 \cdot 3)v \cdot u \times w + 0 \\ &= -6(u \cdot v \times w) = -12.\end{aligned}$$



3.8.1. Volume de um Paralelepípedo

A seguir vamos calcular o volume de um paralelepípedo, em função dos vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$.



$$\text{Área da base} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto $V = A_b h$ da área A_b da base pela altura h . Como já vimos a área da base pode ser calculada por $A_b = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Já a altura é dada pela norma da projeção do vetor $\mathbf{w}$ sobre o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Como

$$\text{Proj}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\text{Proj}_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\| &= \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \\ &= \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}. \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$V = A_b h = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|.$$

Observação 3.35

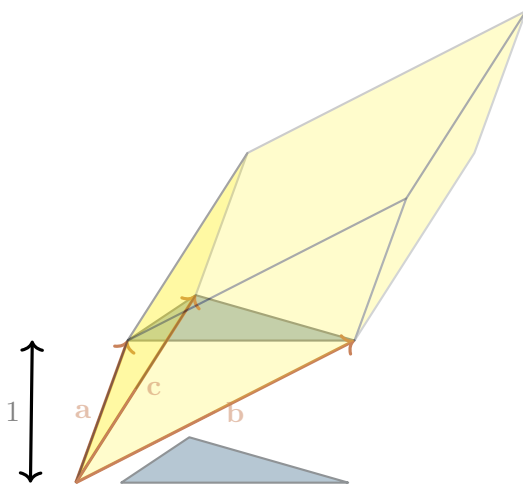
Esse resultado nos dá (para bases ortonormais) uma interpretação geométrica para a propriedade de que três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD se e somente se o determinante da matriz com suas coordenadas é nulo. Os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são LD se e somente se são coplanares, o que “colapsaria” o paralelepípedo num plano, gerando um “sólido” de volume zero.

Exemplo 3.36.

Sejam $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ pontos no plano. Então a área do $\triangle ABC$ é dada por

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

◀



Solução. Considere os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ de coordenadas $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 1)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 1)$ e $\mathbf{c} = (c_1, c_2, 1)$.

É fácil ver que eles são arestas de um tetraedro de altura 1 formado pela origem O do sistema de coordenadas e pelos pontos $A' = (O + \mathbf{a})$, $B' = (O + \mathbf{b})$ e $C' = (O + \mathbf{c})$, que tem como base o triângulo $\triangle A'B'C'$, congruente ao triângulo $\triangle ABC$. Se $S_{\triangle ABC}$ é a área do triângulo $\triangle ABC$, o volume V_T desse tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}. \quad (3.7)$$

Por outro lado, temos que, se V_P é o volume do paralelepípedo de arestas $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, também vale:

$$V_T = \frac{1}{6}V_P. \quad (3.8)$$

Igualando as equações (3.7) e (3.8) segue:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}V_P = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$



O resultado anterior nos dá um critério simples para que três pontos no plano sejam colineares.

Proposição 3.37

Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ pontos no plano. Então eles são colineares se e somente se a área do triângulo formado por eles for zero, ou seja, se e somente se:

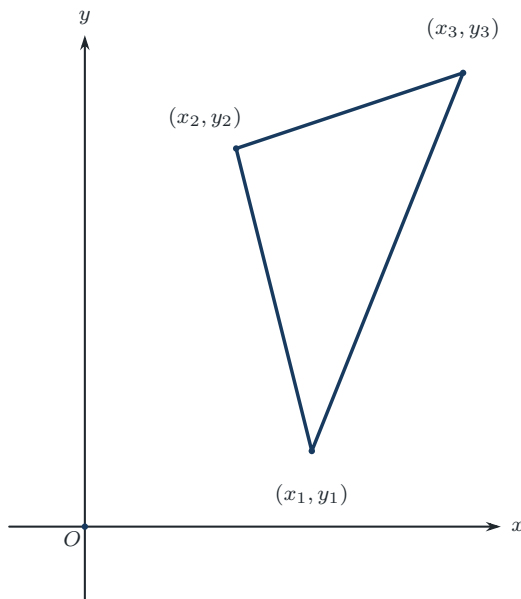
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.9. Escolha do Sistema de Coordenadas (*)

Um sistema de coordenadas cartesianas do plano pode ser escolhido tomando qualquer ponto O como origem e qualquer duas retas perpendiculares como os eixos. Em geral resultados geométricos não dependem de como escolhemos nosso sistema de coordenadas, mas ao fazermos a escolha correta podemos simplificar significativamente a resolução de um problema. É possível, por exemplo, fazer com que as coordenadas dos vértices de certas figuras geométricas fiquem mais simples, aumentando a quantidade zeros em suas coordenadas, simplificando assim a manipulação algébrica.

Considere, por exemplo, um triângulo $\triangle ABC$. Vamos descrever esse triângulo através de coordenadas $A : (x_1, y_1)$, $B : (x_2, y_2)$ e $C : (x_3, y_3)$ em um sistema de coordenadas Σ .

Consideraremos o seguinte sistema de coordenadas: escolha como eixo x a reta AB , e como eixo y a reta perpendicular a AB passando por C . Determine o sistema de coordenadas colocando a origem no ponto O dado pela intersecção dos dois eixos,



e escolhendo uma base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ formada por vetores unitários paralelos a estes eixos. Neste sistema o vértice A tem então coordenadas do tipo $(a, 0)$ e o ponto B coordenadas do tipo $(b, 0)$, já que ambos estão sobre o eixo x . Já o ponto C , que está posicionado sobre o eixo y , tem coordenadas do tipo $(0, c)$.

Veja que com a escolha adequada do sistema de coordenadas conseguimos reduzir o número de variáveis de 6 para apenas 3.

A seguir apresentamos exemplos onde a escolha de um sistema de coordenadas adequado facilita a demonstração de propriedades geométricas. Você consegue demonstrar estas propriedades usando um sistema de coordenadas arbitrário?

Exemplo 3.38.

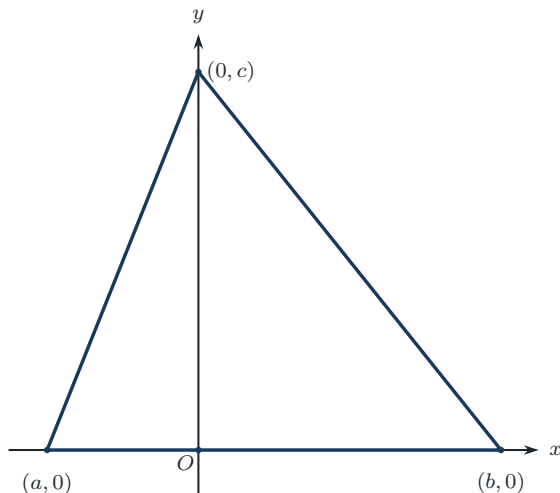
Se um triângulo é isósceles, as medianas dos dois lados de mesmo comprimento possuem o mesmo tamanho.



Solução. Consideremos o mesmo sistema de coordenadas descrito acima. Neste sistema temos $A : (a, 0)$, $B : (b, 0)$ e $C : (0, c)$.

Supondo que segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ possuem o mesmo comprimento, concluímos que

$$\sqrt{a^2 + c^2} = |\overline{CA}| = |\overline{CB}| = \sqrt{b^2 + c^2}$$



e logo $a^2 = b^2$. Segue que $a = b$ ou $a = -b$. Se $a = b$ não temos um triângulo já que dois vértices coincidem, de onde segue que $a = -b$.

Seja M_1 o ponto médio de $\overline{AC}$. Pelo exemplo 3.6 temos que as coordenadas de $M_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right) = \left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Analogamente, o ponto médio M_2 de $\overline{BC}$ tem coordenadas $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Como a mediana de $\overline{CA}$ é dada pelo segmento $\overline{BM_1}$ e a de $\overline{CB}$ é dada pelo segmento $\overline{AM_2}$, segue que

$$|\overline{BM_1}| = \left\| \left(-\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) - (b, 0) \right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

e

$$|\overline{AM_2}| = \left\| \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) - (-b, 0) \right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

e as medianas relativas aos vértices A e B possuem o mesmo tamanho.



Exemplo 3.39.

Num triângulo retângulo o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices.



Solução. Para um triângulo retângulo $\triangle ABC$ com hipotenusa AB um sistema de coordenadas adequado é o que toma como origem o vértice $C = O$ e como eixos as retas que ligam C a A e C a B .

Neste Sistema de coordenadas temos que $A : (a, 0)$, $B : (0, b)$ e $C : (0, 0)$. O comprimento da hipotenusa é

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

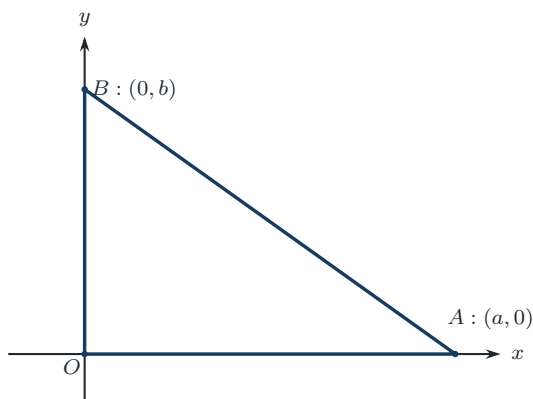
Já o ponto médio M da hipotenusa tem coordenadas

$$M : \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right),$$

e, portanto,

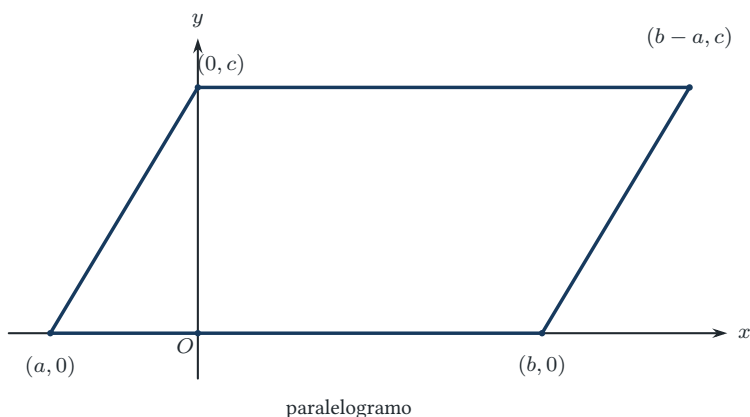
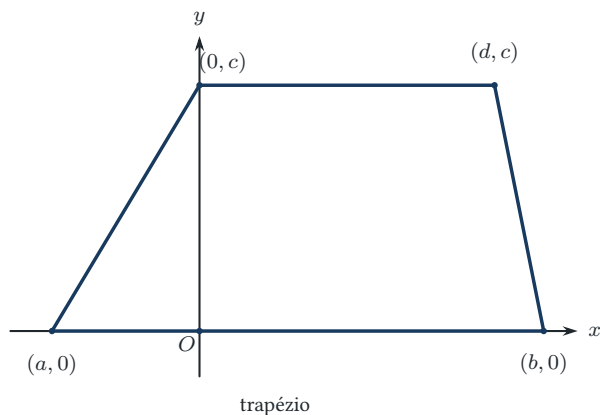
$$|CM| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} |AB|.$$

Como M é o ponto médio de AB , também $|AM| = |BM| = \frac{1}{2} |AB|$. Assim $|AM| = |BM| = |CM|$, e M é equidistante dos três vértices.



3.10. O Problema do Lugar Geométrico (*)

Até este ponto estudamos como representar algebricamente o espaço euclidiano, e como podemos usar tais representações na resolução de alguns problemas geométricos. Nesta seção vamos dar um passo além, e iniciar os estudos sobre um dos problemas fundamentais da geometria analítica: o problema do lugar geométrico. Em poucas palavras, dada uma figura ou condição geométrica queremos determinar uma equação ou condições algébrica que a represente. Ou ainda, de modo contrário, dada uma equação ou condição algébrica determinar sua representação geométrica.



3.10.1. O lugar geométrico de uma equação

Dada uma equação (por simplicidade, em duas x, y ou três variáveis x, y, z)

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad g(x, y, z) = 0 \quad (3.9)$$

cada par ou tripla de números reais que satisfizer a equação acima é dito solução da equação e o conjunto de pontos cujas coordenadas satisfazem a equação (3.9) acima é chamado de **lugar geométrico da equação**.

É importante ressaltar que o lugar geométrico, como definido acima, depende do sistema de coordenados escolhidos. Em outras palavras, uma certa figura ou condição geométrica pode ser descrita algebricamente de várias formas distintas, dependendo, dentre outros fatores, do sistema de coordenadas escolhido. Por esta razão, buscaremos dentre as possíveis representações aquela que proporcione a maior simplicidade algébrica.

Durante esse processo (e em vários outros) podemos substituir uma certa equação por outra que possua as mesmas soluções, ou seja, que defina o mesmo lugar geométrico. Neste sentido, duas **equações algébricas** são ditas **equivalentes** se definem o mesmo lugar geométrico.

Exemplo 3.40.

Analisemos a equação

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Observe que tomando $C = (2, 3)$ a distância r de um ponto qualquer (x, y) no plano euclidiano até C é dada por

$$r = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2},$$

ou de modo equivalente

$$r^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2.$$

Deste modo vemos que um ponto (x, y) no plano satisfaz a equação acima se, e somente se, sua distância para o ponto $C : (2, 3)$ for igual a 5.

Em outras palavras, escolhido o sistema de coordenadas descrito acima, o lugar geométrico da equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

é um círculo de raio r e centro no ponto de coordenadas (a, b) .



Exemplo 3.41.

Generalizando o exemplo anterior, um círculo de centro C e raio r é definido como o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é igual a r . Esta é a condição geométrica que descreve o círculo. Busquemos agora uma representação algébrica. Se escolhermos um sistema de coordenadas cartesiano no qual $C : (a, b)$, então todo ponto $P : (x, y)$ no círculo deve satisfazer

$$|CP| = r,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r,$$

ou ainda a equação algébrica equivalente

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



É importante observar que um ponto pertence ao círculo (ou seja esse ponto dista r do centro) se e somente se satisfizer a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Em geral, sempre que tivermos este tipo de relação entre uma curva e uma equação diremos que esta é a *equação da curva*.

Definição 3.42

Diremos que uma equação $f(x, y) = 0$ é a equação de um dado lugar geométrico se todo ponto que satisfaz a equação pertence ao lugar geométrico e todo ponto que pertence ao lugar geométrico satisfaz a equação.

Exemplo 3.43.

Dado um sistema de coordenadas cartesiano, lugar geométrico conhecido descrito pelo eixo x é formado por todos os pontos cuja segunda coordenada (y) é zero, ou seja, a equação do eixo x é $y = 0$.



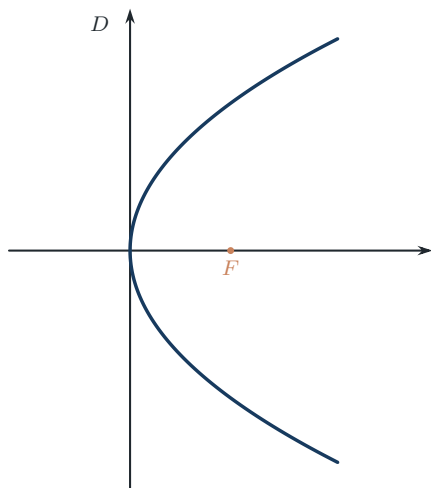
Exemplo 3.44.

Como vimos $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação do círculo de raio r e centro em $P : (a, b)$.



Exemplo 3.45.

Determinar a equação do lugar geométrico formado por todos os pontos cuja a distância a um ponto fixo F é igual a distância a uma reta fixa d .



Solução. Dados uma reta fixa d , chamada **diretriz**, e um ponto fixo F chamado **foco**, a **parábola** é o conjunto dos pontos P equidistantes do foco e da diretriz, ou seja, o ponto P tal que

$$\|\vec{PD}\| = \|\vec{PF}\|,$$

onde D é o ponto de d mais próximo de P .

A reta passando por F perpendicular a d é chamada **eixo da parábola**. O ponto de intersecção entre o eixo da parábola e a parábola é chamado **vértice** da parábola. Observe que o vértice está localizado na metade da distância do foco a diretriz.

Escolheremos como sistema de coordenadas os eixos formados pelo eixo da parábola e a reta passando pelo vértice da parábola, perpendicular ao eixo. Essa última reta é paralela a diretriz da parábola.

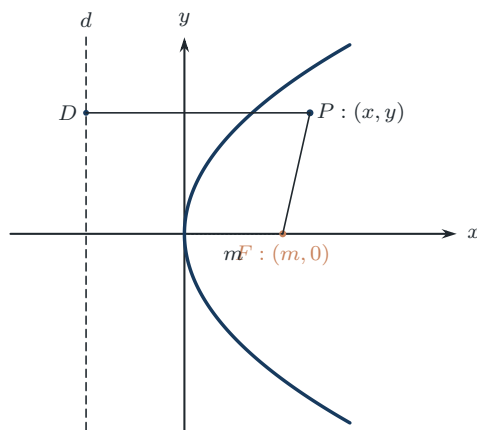
Seja $2m$ a distância entre o foco e a diretriz d . No sistema de coordenadas que adotamos F tem coordenadas $(m, 0)$ e a equação da diretriz é $x = -m$. Como P satisfaz $\|\vec{PD}\| = \|\vec{PF}\|$ temos que

$$\sqrt{(x - m)^2 + y^2} = |x + m|.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade concluímos que

$$\begin{aligned}(x - m)^2 + y^2 &= (x + m)^2 \\ m^2 - 2mx + x^2 + y^2 &= (m^2 + 2mx + x^2) \\ y^2 &= 4mx\end{aligned}$$

é a equação satisfeita pelos pontos da parábola neste sistema de coordenadas.



Intersecção Dadas duas equações

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

os pontos que pertencem ao lugar geométrico de ambas as equações é chamados de pontos de intersecção. Analiticamente as coordenadas de tal ponto satisfazem ambas as equações.

A intersecção de duas equações pode ser vazia, neste caso diremos que os seus lugares geométrico não se interceptam.

Exemplo 3.46.

Determinar analítica e graficamente os pontos de intersecção de

$$\begin{aligned}x - 12 &= 0 \\ y^2 - 3x &= 0\end{aligned}$$



Solução. Primeiro observemos que $x - 12 = 0$ é a equação de uma reta paralela ao eixo y , enquanto $y^2 - 3x = 0$ é a equação de uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo y . Assim o conjunto dos pontos de intersecção dos dois lugares geométricos é formado de no máximo dois pontos.

Analiticamente, concluímos da primeira equação que todo ponto de intersecção (x, y) deve ter $x = 12$. Substituindo na equação da parábola encontramos que

$$y^2 = 36,$$

e portanto

$$y = \pm 6.$$

De modo que os pontos de intersecção são $(12, 6)$ e $(12, -6)$.



3.11. Coordenadas Polares (*)

Nesta seção estudaremos uma nova forma de descrever a localização de pontos no plano euclidiano $\mathbb{E}^2$: as coordenadas polares. A principal motivação para a utilização desse sistema de coordenadas é que, neste sistema, curvas com algum tipo de simetria em relação a origem O do plano, como por exemplo o círculo e a elipse, podem ser descritas de maneira mais simples que nos sistemas de coordenadas vetoriais.

Num sistema de coordenadas polares um ponto P é localizado no plano em relação a uma semi-reta $\overrightarrow{OA}$. A origem O dessa semi reta é denominada origem do sistema de coordenadas polares ou **polo** e a semi-reta $\overrightarrow{OA}$ é dito **eixo polar**.

As coordenadas de um ponto P num sistema de coordenadas polares é um par (r, θ) , onde r é a distância do ponto ao polo, isto é, $r = d(O, P)$ e θ é o ângulo orientado que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ faz com a semi-reta $\overrightarrow{OA}$. Claramente a posição do ponto fica bem determinada se conhecemos r e θ . O par (r, θ) é denominado

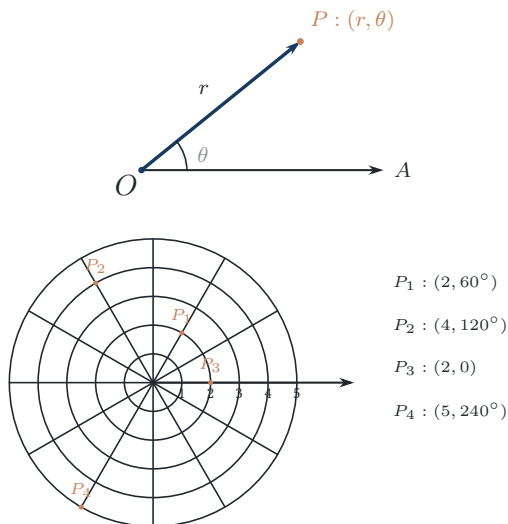
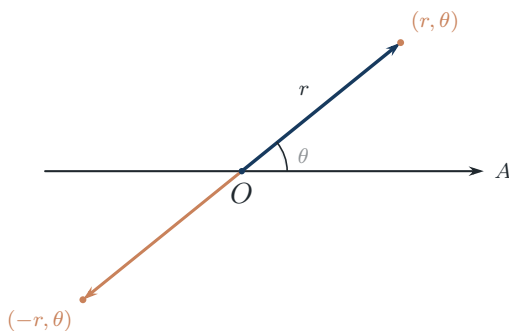


Figura 3.9.: Coordenadas polares

coordenadas polares do ponto P , e neste caso escreveremos simplesmente $P : (r, \theta)$

Como θ é o ângulo orientado entre o eixo OA e a reta OP seus valores podem ser positivo ou negativo conforme a orientação no sentido anti-horário ou horário do ângulo.



Por outro lado, o raio r , sendo a distância de P a origem, é naturalmente um número real positivo, porém podemos estender seu significado de modo a termos raios negativos. Para isso convencionamos que o ponto $(-r, \theta)$ com $r > 0$ deve ser construído do seguinte modo: construímos uma semi-reta faz uma ângulo θ com o eixo polar e estendemos essa semi-reta. marcamos o ponto $(-r, \theta)$ como sendo o

ponto sobre a extensão da semi reta que dista r do polo O .

Uma diferença fundamental entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares é que em coordenadas polares um ponto P pode ser descrito por uma infinidade de coordenadas. Por exemplo, a origem O é descrita por todas as coordenadas da forma $(0, \theta)$., enquanto que um ponto $P : (r, \theta)$ distinto da origem é descrito por todas as coordenadas da forma $(r, \theta + 2\pi n)$ e $(-r, \theta + \pi(2n + 1))$.

Todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo e o ângulo θ esteja entre $0 \leq \theta < 2\pi$. Denominamos esse par como o **conjunto principal de coordenadas polares** do ponto em questão.

3.11.1. Relação entre Coordenadas Cartesianas e Polares

A cada sistema de coordenadas polares podemos associar um sistema cartesiano escolhendo como a origem o polo, o eixo x como o eixo polar e o eixo y como a reta perpendicular ao eixo polar passando pela origem. Esse sistema de coordenadas é chamado **sistema cartesiano associado**. Quando, ao tratarmos de coordenadas polares, nos referirmos as coordenadas x, y , eixos x ou y , etc. de um sistema cartesiano este sempre será o sistema cartesiano associado.

Observe a Figura 3.10:

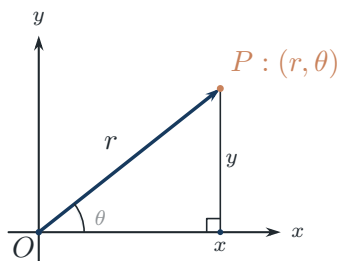


Figura 3.10.: Coordenadas polares

É fácil ver que:

$$x_0 = r \cos(\theta)$$

$$y_0 = r \sin(\theta)$$

$$r = \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_0}{x_0}$$

Assim temos que as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas do sistemas associado se relacionam segundo a seguinte tabela:

<i>Coordenadas Cartesianas</i>	<i>Coordenadas Polares</i>
$(r \cos \theta, r \sin \theta)$ (x, y)	(r, θ) $(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(\frac{y}{x}))$

Exemplo 3.47.

Determinar as coordenadas retangulares do ponto P cujas coordenadas polares são $(3, 120^\circ)$



Solução. Neste caso $r = 3$ e $\theta = 120^\circ$ logo as coordenadas são:

$$x = r \cos(\theta) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \quad (3.10)$$

$$y = r \sin(\theta) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3.11)$$

Ou seja, $P : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



Exemplo 3.48.

Determinar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares são $(1, -1)$.



Solução. Temos que $r = \pm\sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2}$ e que $\theta = \arctg(-1)$. Para $0 \leq \theta < 2\pi$, temos que $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Logo o conjunto principal de coordenadas do ponto é $\left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Outras coordenadas possíveis para o ponto são $\left(1, \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right)$ e $\left(-1, \frac{7}{4}\pi + \pi(2\pi n + 1)\right)$.



Exemplo 3.49.

Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

◀

Solução. A equação dada é equivalente a $r - r \cos \theta = 2$. Substituindo r e $r \cos \theta$ temos:

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

Transpondo x e elevando ao quadrado temos

$$x^2 + y^2 = (2 + x)^2$$

que simplifica para $y^2 = 4(x + 1)$ (uma parábola).

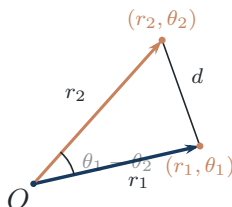
◀

Exemplo 3.50.

Mostre que a distância d entre os pontos (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2) em coordenadas polares é

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

◀



Solução. Usando a lei dos cossenos temos:

$$\|PQ\|^2 = \|OP\|^2 + \|OQ\|^2 - 2\|OP\|\|OQ\| \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.12)$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.13)$$

E consequentemente a distância do ponto P ao ponto Q é:

$$\|PQ\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

◀

Exercícios

Ex. 11.1 Os pontos médios dos lados AB , BC e CA de um triângulo são, respectivamente,

$$M = (2, 5), \quad N = (4, 2), \quad P = (1, 1).$$

Determine os vértices A , B , C .

Ex. 11.2 Dados $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$, determine o ponto R do segmento PQ tal que

$$d(R, Q) = \lambda d(R, P), \quad \lambda \geq 0.$$

Ex. 11.3 Prove por coordenadas que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual à média aritmética dos comprimentos das bases.

Ex. 11.4 Se $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $P = (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$, prove que

$$P + \mathbf{u} = (p_1 + a_1, p_2 + a_2, p_3 + a_3)_\Sigma.$$

Ex. 11.5 Determine quais conjuntos são linearmente independentes.

- a) $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$.
- b) $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$.
- c) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$.

Ex. 11.6 Escreva $\mathbf{w} = (1, 1)$ como combinação linear de $\mathbf{u} = (2, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1)$.

Ex. 11.7 Sejam $\mathbf{u} = (2, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 3)$. Mostre que todo vetor (c_1, c_2) é combinação linear de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e encontre os coeficientes.

Ex. 11.8 Considere a base

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 1), \quad \mathbf{w} = (1, 1, 0).$$

- a) Determine as coordenadas de $\mathbf{z} = (a, b, c)$ nessa base.
- b) Verifique diretamente que o vetor nulo tem coordenadas $(0, 0, 0)$.
- c) Determine as coordenadas de $(1, 2, 3)$.

Ex. 11.9 Prove que dois vetores não nulos $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são LD se e somente se existe λ tal que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Use o critério para classificar:

- a) $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$;
- b) $(1, 0, 3)$ e $(-2, 0, -6)$;
- c) $(1, 2, 5)$ e $(1/2, 1, 5/4)$.

Ex. 11.10 Mostre que dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ são LI se e somente se pelo menos um dos menores

$$a_1b_2 - a_2b_1, \quad a_2b_3 - a_3b_2, \quad a_1b_3 - a_3b_1$$

é não nulo.

Ex. 11.11 Determine m, n para que os pares sejam linearmente dependentes.

- a) $(1, m, n+1)$ e $(m, n, 2)$.
- b) $(1, m-1, m)$ e $(m, n, 4)$.

Ex. 11.12 Para

$$\mathbf{u} = (m, -1, m^2 + 1), \quad \mathbf{v} = (m^2 + 1, m, 0), \quad \mathbf{w} = (m, 1, 1),$$

mostre que os três vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$ para todo $m \in \mathbb{R}$.

Ex. 11.13 Seja $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base. Determine condições sobre a, b para que os três vetores indicados sejam LI.

- a) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
- b) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + (b^2 + 2a)\mathbf{e}_3$.

Ex. 11.14 Num tetraedro $ABCD$, use o sistema de coordenadas com origem A e base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Determine as coordenadas dos pontos médios de AB , CD , BD e BC .

Ex. 11.15 Dados $A = (-3, 2)$, $B = (3, 5)$ e $C = (0, 3)$, determine:

- $d(A, B)$ e $d(B, C)$;
- $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ e sua soma;
- o ponto médio de AC ;
- os pontos da reta AB cuja distância a A é três vezes a distância a B .

Ex. 11.16 Dados $A = (4, 8, 11)$, $B = (-3, 1, 4)$ e $C = (2, 3, -3)$, determine os comprimentos dos lados, os pontos médios, os vetores dos lados, os ângulos internos, a área e todos os pontos D que completam um paralelogramo usando A, B, C como três vértices.

Ex. 11.17 Determine o ponto do eixo x equidistante de $A = (1, -3)$ e $B = (3, -1)$.

Ex. 11.18 O triângulo com $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, y)$ é equilátero, com $a \neq 0$. Determine y .

Ex. 11.19 Três vértices de um retângulo são $(2, -1)$, $(7, -1)$ e $(7, 3)$. Determine o quarto vértice e a área.

Ex. 11.20 Determine os ângulos do triângulo de vértices $(2, -1)$, $(7, -1)$ e $(7, 3)$ e do triângulo de vértices $(4, 7, 11)$, $(-3, 1, 4)$ e $(2, 3, -3)$.

Ex. 11.21 Para $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -1, 2)$, encontre um vetor não nulo ortogonal a ambos.

Ex. 11.22 Para $u = (2, -1, 2)$ e $v = (1, 2, -2)$, encontre uma combinação não nula $w = au + bv$ que seja ortogonal a v .

Ex. 11.23 Verifique que os vetores

$$(7, -3, 6), \quad (3, 3, -2), \quad (6, -16, -15)$$

são dois a dois ortogonais.

Ex. 11.24 Determine os ângulos e a área do triângulo de vértices $(3, 1)$, $(5, -2)$ e $(6, 3)$.

Ex. 11.25 Se $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, com $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 5$ e $\|\mathbf{c}\| = 7$, determine o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Ex. 11.26 Prove a identidade de polarização

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{4} (\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2).$$

Ex. 11.27 Mostre que, se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares, então ele é um losango.

Ex. 11.28 Decomponha $\mathbf{u} = (-1, -3, 2)$ como $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, com $\mathbf{v}_1$ paralelo a $(0, 1, 3)$ e $\mathbf{v}_2$ ortogonal a esse vetor.

Ex. 11.29 Se AB é um diâmetro de uma circunferência e C é outro ponto da circunferência, prove que $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.

Ex. 11.30 Para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, prove as propriedades da projeção ortogonal:

- a) $\text{Proj}_{\mathbf{u}}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$;
- b) $\text{Proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w}$;
- c) $\text{Proj}_{\mathbf{u}}(\text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$;
- d) $\mathbf{v} \cdot \text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w} = \text{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

Ex. 11.31 Calcule o cosseno do menor ângulo entre duas diagonais espaciais distintas de um cubo.

Ex. 11.32 Prove a desigualdade de Cauchy–Schwarz

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|,$$

e caracterize a igualdade.

Ex. 11.33 Prove a desigualdade triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Ex. 11.34 Mostre que

$$\|u + v\| = \|u - v\|$$

se e somente se $u \cdot v = 0$.

Ex. 11.35 Prove que, se $u \cdot v = 0$ para todo vetor v , então $u = 0$.

Ex. 11.36 Num triângulo retângulo, prove que a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Ex. 11.37 Decida se é verdadeira a afirmação: “o ângulo entre $\text{Proj}_w u$ e $\text{Proj}_w v$ é igual ao ângulo entre u e v ”. Em caso negativo, determine o que se pode afirmar quando as duas projeções são não nulas.

Ex. 11.38 Calcule os produtos vetoriais:

- a) $(7, -3, 6) \times (5, -15, -13)$;
- b) $(6, -16, -15) \times (3, 3, -2)$;
- c) $(3, 3, 0) \times (5, 4, 0)$.

Ex. 11.39 Se $u = (3, 4, 1)$, $v = (2, 3, 2)$ e $w = (4, 2, 3)$, calcule $2u + 3v - 7w$, os três produtos escalares, $u \times v$, $v \times u$ e $w \cdot (v \times u)$.

Ex. 11.40 Para $u = (1, 2, -1)$ e $v = (2, 1, 0)$, expresse $a = (2, 2, 3)$ na base $(u, v, u \times v)$.

Ex. 11.41 Dado $b = (1, 2, 1)$, determine um vetor a ortogonal ao eixo z tal que

$$a \times b = (1, -1, 1).$$

Ex. 11.42 Determine $v = (x, y, z)$ tal que

$$v \times (1, 2, -1) = (1, 1, 3), \quad v \cdot (3, 1, 1) = 3.$$

Ex. 11.43 Os pontos $P = (1, 1, 2)$, $Q = (1, 2, 0)$ e $R = (3, 1, 2)$ são pontos médios dos lados de um triângulo ABC . Calcule a área de ABC .

Ex. 11.44 Prove $u \times v = -v \times u$ e $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Ex. 11.45 Prove que

$$u \cdot (u \times v) = v \cdot (u \times v) = 0$$

de duas maneiras: por cálculo direto e geometricamente.

Ex. 11.46 Mostre que u e v são paralelos se e somente se $u \times v = 0$.

Ex. 11.47 Prove que o produto misto é o determinante

$$u \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

e deduza sua invariância por permutações cíclicas.

Ex. 11.48 Usando produto vetorial, prove a lei dos senos para um triângulo de lados a, b, c opostos aos ângulos α, β, γ :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Ex. 11.49 Se $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$ e $c = \overrightarrow{OC}$, prove que a área do triângulo ABC é

$$\frac{1}{2} \|a \times b + b \times c + c \times a\|.$$

Ex. 11.50 Mostre que $(-5, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$ formam um triângulo isósceles e calcule sua área.

Ex. 11.51 Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, a)$, $a \neq 0$. Determine x para que $C = (x, x)$ complete um triângulo equilátero.

Ex. 11.52 Prove a lei do paralelogramo

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Ex. 11.53 Se, em um triângulo, as medianas que partem de A e B têm o mesmo comprimento, prove que $AC = BC$.

Ex. 11.54 Enuncie e prove a recíproca do teorema de Pitágoras usando produto escalar.

Ex. 11.55 Prove que, se as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento, então ele é um retângulo.

Ex. 11.56 Se os lados de um triângulo medem a, b, c , mostre que a soma dos quadrados das três medianas é

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ex. 11.57 Determine os lugares geométricos no plano:

- pontos duas unidades à esquerda do eixo y ;
- pontos a distância 2 do eixo x ;

- c) pontos cuja abscissa é o inverso da ordenada;
- d) pontos equidistantes dos eixos coordenados.

Ex. 11.58 Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ é $2a$, com $a > c > 0$.

Ex. 11.59 No espaço, determine o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a $(c, 0, 0)$ e $(-c, 0, 0)$ é $2a$, com $a > c > 0$.

Ex. 11.60 No espaço, determine o lugar geométrico dos pontos para os quais a diferença absoluta das distâncias a $(c, 0, 0)$ e $(-c, 0, 0)$ é $2a$, com $c > a > 0$.

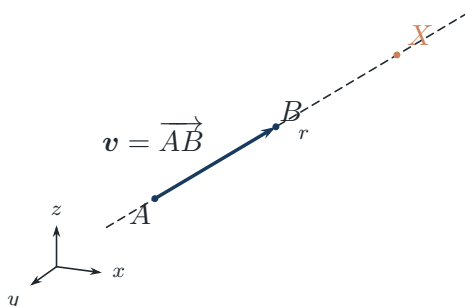
Ex. 11.61 Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância a $(1, 0, 0)$ é igual à distância ao plano YZ .

Retas e Planos

Dando continuidade ao estudo de lugares geométricos e de suas equações, trataremos agora de dois objetos fundamentais: retas e planos. Nosso objetivo será passar, de maneira sistemática, de descrições geométricas para equações vetoriais, paramétricas e cartesianas.

Ao longo de todo o capítulo fixaremos um sistema cartesiano de coordenadas $\Sigma = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.

4.1. Equações da Reta



Um dos postulados da geometria euclidiana afirma que por dois pontos distintos passa uma única reta. Dados, portanto, dois pontos distintos A e B , queremos determinar equações que descrevam a reta r que passa por eles.

Para isso, observe que dado um ponto X em r , o vetor $\overrightarrow{AX}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$, e portanto existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$. Assim, temos que

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + t\overrightarrow{AB},$$

e considerando $A : (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, vemos que um ponto $X : (x, y, z)$ pertence à reta r se e somente se $\overrightarrow{AX} = \mathbf{v}t$, ou ainda

$$r : X = A + \mathbf{v}t. \quad (4.1)$$

Expandindo obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t, \quad (4.2)$$

ou de forma mais simplificada:

$$r : \begin{cases} x = a + v_1t \\ y = b + v_2t \\ z = c + v_3t \end{cases} \quad (4.3)$$

A equação 4.1 é conhecida como **equação vetorial da reta** r , e nestas condições o ponto A é chamado **ponto inicial** e o vetor $\mathbf{v}$ é dito **vetor diretor** da reta r . As equações em 4.3 são chamadas as **equações paramétricas da reta** r .

Se interpretarmos o parâmetro t como tempo, podemos ler essa equação como a trajetória de um ponto que se move no espaço ao longo da reta r tendo o ponto A como o ponto inicial e o vetor $\mathbf{v}$ como a velocidade, e assim para cada valor de t obtemos um ponto no espaço.

Outra forma de representar a reta r pode ser obtida ao isolarmos o parâmetro t nas equações paramétricas. Assim, se em 4.3 tivermos $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro t e obter

$$\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2} = \frac{z - c}{v_3},$$

que constituem a **forma simétrica** das equações da reta r .

É importante observar que a equação de uma reta, em qualquer uma de suas formas, não é única. De fato, as equações dependem fundamentalmente da escolha do ponto inicial e do vetor diretor, gerando assim uma infinidade de equações para representar uma mesma reta. Para entender esta afirmativa, consideremos uma reta $r : X = A + \mathbf{v}t$. Escolhendo um ponto B em r , podemos trocar o ponto inicial por B e assim representar r por $r : X = B + \mathbf{v}t$. Do mesmo modo, trocando o vetor diretor $\mathbf{v}$ por outro vetor não nulo $\mathbf{v}'$ paralelo, obtemos que $X = A + \mathbf{v}'t$ é também uma equação vetorial para r (veja exercício 2.1).

Exemplo 4.1.

Encontre as equações da reta que passa pelos pontos $A : (0, 1, 1)$ e $B : (1, 3, 0)$.



Solução. Escolhendo $v = \overrightarrow{AB} : (1, 2, -1)$ como vetor diretor e A como ponto inicial obtemos a equação vetorial

$$r : X = A + vt$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

As equações paramétricas ficam então $x = t, y = 1 + 2t, z = 1 - t$.

As equações simétricas para essa reta são obtidas isolando o parâmetro t nas equações anteriores, ou seja,

$$x = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}.$$

**Exemplo 4.2.**

Dada a reta r de equações paramétricas $r : X = (1, 3, 2) + (1, 1, 2)t$.

1. Encontre três pontos pertencentes a essa reta.
2. Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o ponto inicial seja distinto.
3. Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o vetor diretor seja distinto

**Solução.**

1. Claramente o ponto $(1, 3, 2)$ pertence a essa reta. Para obter outros pontos desta reta basta escolhermos valores distintos para o parâmetro t . Assim, se $t = 1$ temos que $(1, 3, 2) + (1, 1, 2) = (2, 4, 4)$ pertence à reta. Tomando $t = -2$ temos que $(1, 3, 2) - 2(1, 1, 2) = (-1, 1, -2)$ pertence à reta.

2. Substituindo o ponto inicial por outro ponto pertencente à reta obtemos equações com as propriedades exigidas. Escolhendo, por exemplo, o ponto $(-1, 1, -2)$ obtemos a equação vetorial

$$r : X = (-1, 1, -2) + (1, 1, 2)t.$$

3. Substituindo o vetor diretor por um de seus múltiplos não nulos obtemos equações com as propriedades exigidas. Se, por exemplo, multiplicarmos o vetor diretor por $\frac{1}{2}$ encontramos a equação vetorial

$$r : X = (-1, 1, -2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)t.$$



Exemplo 4.3.

Verifique se os pontos $A : (4, 1, 5)$ e $B : (0, 0, 0)$ pertencem à reta $r : (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t$.



Solução. Para que o ponto A pertença à reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(4, 1, 5) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t$$

Ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 4 = 1 + t \\ 1 = 1 + 0t \\ 5 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

O sistema acima possui solução, $t = 3$, e logo o ponto A pertence à reta r .

De modo análogo, para que o ponto B pertença à reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0, 0, 0) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t,$$

ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 1 + 0t \\ 0 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

Como sistema acima não possui solução, o ponto B não pertence à reta r .



Exemplo 4.4.

Identifique o lugar geométrico dado pelas equações

$$\frac{2-3x}{7} = \frac{2y-2}{3} = \frac{5z-1}{2}$$



Solução. Dividindo os numeradores e os denominadores de cada fração pelo coeficiente das variáveis, obtemos

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}} = \frac{y - 1}{\frac{3}{2}} = \frac{z - \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}.$$

Estas são as equações na forma simétrica de uma reta. E portanto o lugar geométrico é uma reta passando pelo ponto $(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{5})$ com vetor diretor $(-\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5})$.

**Exemplo 4.5.**

Verifique se as retas $r : X = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t$ e $s : X = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t$ se interceptam.



Solução. Para que um ponto P pertença simultaneamente às retas r e s , devem existir números reais t_1 e t_2 tais que

$$P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 \quad \text{e} \quad P = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2.$$

De onde encontramos que

$$(1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2$$

Resolvendo o sistema acima encontramos $t_1 = 2, t_2 = -3$. Como o sistema possui solução, concluímos que as retas r e s se interceptam.

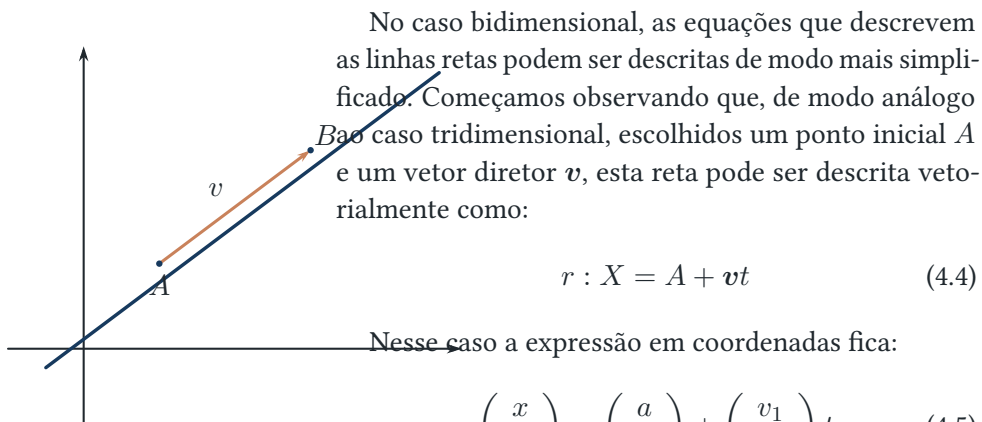
Para determinar o ponto de intersecção substituímos $t \rightarrow t_1$ na equação $P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1$ e obtemos

$$P : (3, 1, 3).$$

É importante observar que para determinarmos se as retas interceptam, usamos parâmetros distintos para cada reta. Isso é fundamental, pois o ponto P apesar de pertencer a ambas as retas, é descrito em cada conjunto de equações por um valor distinto de t .



4.1.1. Equações da reta no plano



Se $v_1, v_2 \neq 0$ podemos escrever a forma simétrica das equações da reta no plano

$$\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2},$$

ou ainda,

$$y - b = \frac{v_2}{v_1}(x - a).$$

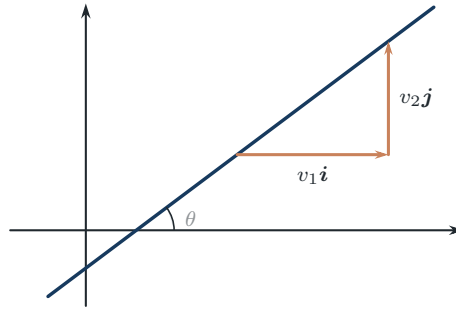
O número real $m = \frac{v_2}{v_1}$ é denominado **coeficiente angular** da reta r , e admite uma interpretação geométrica muito simples: o coeficiente angular é a tangente do ângulo entre a reta e o eixo x . Com essa definição é fácil ver que, para as retas não paralelas ao eixo y , podemos escolher o vetor diretor como $\mathbf{i} + m\mathbf{j}$, e assim obter **equação afim** ou **reduzida** da reta bidimensional

$$y = mx + n,$$

onde $n = b - ma$.

As retas paralelas aos eixos coordenados ($v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$) são especiais. Para as retas paralelas ao eixo y , ou seja, retas com vetor diretor $\mathbf{j}$, o coeficiente angular não está definido já que $m = \frac{v_2}{v_1}$. Para obter uma equação para este tipo de reta, basta observar que todos os pontos possuem a primeira coordenada (coordenada x) igual. Ou seja, se a reta passa pelo ponto $A : (a, b)$ então todo ponto (x, y) em r é do tipo (a, y) , e portanto sua equação será dada por $x = a$.

Do mesmo modo, se a reta é paralela ao eixo x e passa por um ponto $A : (a, b)$, então sua equação é dada por $y = b$.



Observação 4.6

É fácil ver que a equação de toda reta no plano pode ser escrita na forma:

$$ax + by + c = 0,$$

com a, b, c constantes reais. Tal forma é conhecida como **forma canônica** ou **equação cartesiana** da reta no plano.

A equação na forma canônica é única a menos de um fator multiplicativo não nulo: se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$, então $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ representam a mesma reta se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ e $c = \lambda c'$.

Exemplo 4.7.

Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 1)$ e que faz ângulo de 60° com o eixo x .



Solução. O coeficiente angular da reta é $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Usando a forma ponto-inclinação,

$$y - 1 = \sqrt{3}(x - 1).$$

Equivalentemente, uma equação cartesiana é

$$\sqrt{3}x - y + 1 - \sqrt{3} = 0.$$



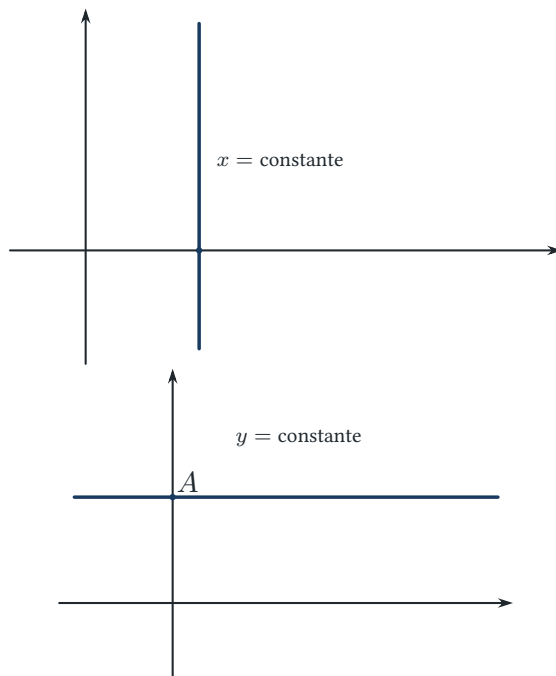


Figura 4.1.: Retas paralelas aos eixos coordenados

Exemplo 4.8.

Seja r a reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Mostre que o coeficiente angular da reta r é:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

◁

Solução. O vetor diretor dessa reta é:

$$(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

E consequentemente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

◁

Exemplo 4.9.

Mostre que a equação da reta passando pelos pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

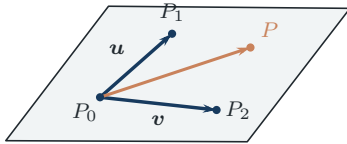
◀

Solução. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer. O ponto P pertence à reta determinada pelos pontos A e B se e somente se A, B, P forem colineares, e o resultado segue do critério da proposição 3.37.

◀

4.2. Equações do Plano

Três pontos não colineares P_0, P_1, P_2 determinam um único plano π . Fixemos $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$. Como esses vetores são linearmente independentes, eles geram todas as direções paralelas ao plano.



Tome agora um ponto P qualquer deste plano, e observe que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao plano π , e portanto coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Como os pontos P_0, P_1 e P_2 são não colineares, concluímos que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes,

e assim, pelo Teorema da Base, podemos escrever o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, existem escalares $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t,$$

e portanto

$$P = P_0 + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t. \quad (4.6)$$

Assim como no caso das retas, a equação (4.6) é chamada de **equação vetorial do plano**.

Escrevendo $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1s + v_1t \\ y &= y_0 + u_2s + v_2t \\ z &= z_0 + u_3s + v_3t, \end{aligned}$$

encontrando assim **equações paramétricas do plano**. Vale comentar que, assim como no caso das retas, as equações apresentadas acima não são únicas pois dependem do ponto e dos vetores considerados.

Exemplo 4.10.

Encontre as equações vetorial e paramétricas do plano π determinado pelos pontos $P_0 : (1, 0, 1)$, $P_1 : (-1, 2, 3)$ e $P_2 : (3, 1, 0)$.

Solução. Definindo $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} : (-2, 2, 2)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} : (2, 1, -1)$, a equação vetorial de π fica

$$\pi : P = (1, 0, 1) + (-2, 2, 2)s + (2, 1, -1)t.$$

A forma paramétrica é encontrada ao olharmos coordenada por coordenada, ou seja,

$$x = 1 - 2s + 2t$$

$$y = 2s + t$$

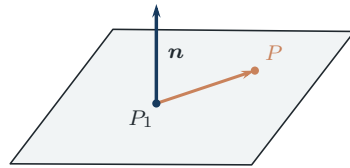
$$z = 1 + 2s - t.$$

Na seção anterior vimos como encontrar a equação de um plano a partir das coordenadas de três pontos não colineares neste plano. Mas a geometria euclidiana nos dá uma outra forma de encontrarmos a equação de um plano. Para isso vamos primeiro lembrar que, dada uma reta e um

ponto P_1 podemos encontrar um único plano π que contenha o ponto P_1 e que seja ortogonal a reta dada. Observe que, neste resultado, a reta serve apenas para determinar uma direção. Isso nos permite portanto substituir esta reta por um vetor paralelo a ela. Neste sentido, dado um plano π , dizemos que um vetor $\mathbf{n}$ não nulo é normal a π se $\mathbf{n}$ é ortogonal a todos os vetores paralelos a π . É fundamental notar que todo plano possui uma infinidade de vetores normais (veja o exercício 2.2).

Sejam dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P = (x, y, z)$ no plano π . Como o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é perpendicular a $\mathbf{n} : (a, b, c)$, seu produto escalar com $\mathbf{n}$ é zero:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$



Definindo $d = ax_1 + by_1 + cz_1$, encontramos que $ax + by + cz = d$ para qualquer ponto $P : (x, y, z)$ pertencente ao plano. Em resumo, determinamos que se um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π , então suas coordenadas satisfazem $ax + by + cz = d$.

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ satisfazem a relação $ax + by + cz = d$ tomando $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ teremos, pela definição de d , que $d = ax_1 + by_1 + cz_1$ e subtraindo obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Ou seja o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$ e consequentemente paralelo a π .

Observe que, para que o plano fique bem determinado, o vetor $\mathbf{n} : (a, b, c)$ deve ser não nulo, ou seja, é necessário que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

A equação $ax + by + cz = d$ é chamada de **equação geral do plano**. Reciprocamente, toda equação desse tipo com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ descreve um plano cujo vetor normal pode ser tomado como $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

Assim, dispomos de duas descrições complementares de um plano: um ponto acompanhado de duas direções linearmente independentes, ou um ponto acompanhado de uma direção normal não nula.

Exercícios

Ex. 2.1 Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ são vetores não nulos paralelos, com $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}'$ e $\lambda \neq 0$, prove que

$$r : X = A + t\mathbf{v} \quad \text{e} \quad s : X = A + u\mathbf{v}'$$

descrevem a mesma reta.

Ex. 2.2 Mostre que se $\mathbf{n}$ é normal a um plano π , então $\lambda \mathbf{n}$ também é normal a π para todo $\lambda \neq 0$. Conclua que todo plano possui infinitos vetores normais.

Ex. 2.3 Determine equações paramétricas e, quando possível, simétricas das retas indicadas.

- Passando por $A = (1, 4, -2)$ e $B = (0, 1, 1)$.
- Passando por $A = (1, 0, -2)$ e $B = (3, 1, 1)$.
- Os três eixos coordenados.
- Paralela ao eixo z por $(1, 2, 1)$.
- Paralela ao eixo x por $(1, 2, 1)$.

- f) Paralela a $\frac{1-2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{2z+1}{4}$ por $(2, 1, 0)$.
g) Paralela a $x = 1 - 3t, y = 5t, z = -1 - t$ por $(2, 1, 0)$.

Ex. 2.4 Desenhe a reta que passa por $(-1, 3)$ e $(3, 0)$, determine sua equação cartesiana e os pontos onde intercepta os eixos.

Ex. 2.5 Determine equações paramétricas e cartesianas das retas do plano.

- a) Por $A = (3, 5)$ e $B = (-2, 3)$.
b) Por $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$.

Ex. 2.6 Determine equações paramétricas e uma descrição sem parâmetro das retas espaciais.

- a) $A = (3, 5, 1), B = (-2, 3, 2)$.
b) $A = (0, 1, 0), B = (1, 0, 0)$.
c) $A = (0, 1, 1), B = (0, 0, 0)$.
d) $A = (3, 2, 1), B = (6, 1, 4)$.

Ex. 2.7 Um ponto parte de $(3, -1, -5)$ e move-se retilínea e uniformemente na direção de $(-2, 6, 3)$ com velocidade escalar 14. Escreva sua posição em função do tempo, tomando $t = 0$ no ponto inicial.

Ex. 2.8 Um ponto em movimento retilíneo uniforme ocupa $A = (-7, 12, 5)$ no instante $t = 1$ e $B = (9, -4, -3)$ no instante $t = 4$. Determine sua equação de movimento.

Ex. 2.9 Duas partículas partem de $A = (-5, 4, -5)$ e $B = (-5, 16, -6)$. A primeira move-se na direção $(3, -6, 3)$ com velocidade escalar 14; a segunda, com velocidade escalar 13, move-se na direção oposta a $(-4, 12, -3)$. Determine as equações de movimento e decida se as partículas podem se encontrar.

Ex. 2.10 Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$, determine a reta AB e os pontos onde ela corta os planos XY, XZ e YZ .

Ex. 2.11 Os lados de um triângulo estão contidos nas retas

$$y = 2x + 1, \quad y = 3x - 2, \quad y = 1 - x.$$

Determine seus vértices.

Ex. 2.12 Dado $O = (0, 0)$ e $A = (1, 2)$, determine os dois pontos B para os quais OAB é equilátero.

Ex. 2.13 Para o triângulo de vértices $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$, escreva equações paramétricas das três medianas.

Ex. 2.14 Os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (14, 1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine uma equação cartesiana e uma paramétrica dessa reta.

Ex. 2.15 Determine o baricentro do triângulo ABC .

- a) $A = (1, 5)$, $B = (3, 2)$, $C = (2, 4)$.
- b) $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$.

Ex. 2.16 Prove que o ponto situado a $2/3$ do caminho de cada vértice ao ponto médio do lado oposto é o mesmo para as três medianas.

Ex. 2.17 Determine o ponto de interseção das retas

$$3x - 4y = 1, \quad 4x + 6y = 14.$$

Ex. 2.18 Para cada lugar geométrico, identifique se é uma reta ou uma união de retas. Quando for uma reta não vertical, determine sua inclinação e a interseção com o eixo y .

- a) $3x - 4y = 6$.
- b) $2x + 3y = 6$.
- c) $7y + 9 = 0$.
- d) $x/a + y/b = 1$, com $ab \neq 0$.

- e) $y = mx + b$.
- f) $bx + ay = 0$, com $(a, b) \neq (0, 0)$.
- g) $4x^2 = 9$.
- h) $xy(2x - 3y + 4) = 0$.
- i) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = h$.
- j) $x = 3 + 2t, y = -1 - 3t$.

Ex. 2.19 Determine a reta que passa por $(-5, 7)$ e é perpendicular a $4x - 5y = 10$.

Ex. 2.20 Pelo ponto $(-2, 3)$, determine uma reta paralela e outra perpendicular a $3x + 2y + 5 = 0$.

Ex. 2.21 Determine a reta que passa por $(a, 0)$ e é perpendicular a $x/a + y/b = 1$, supondo $ab \neq 0$.

Ex. 2.22 No triângulo de vértices $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$, com $a \neq b$ e $c \neq 0$:

- a) determine as três alturas e o ortocentro;
- b) determine as três medianas e o baricentro.

Ex. 2.23 Encontre as duas retas de inclinação $2/3$ que, juntamente com os eixos coordenados, delimitam um triângulo de área $4/3$.

Ex. 2.24 Mostre que, para quaisquer s, t não simultaneamente nulos, as retas

$$(2s + 3t)x + (3s - 2t)y = 5s + 4t$$

passam por um ponto fixo. Determine esse ponto e mostre que toda reta por ele pertence a essa família.

Ex. 2.25 Determine a, b para que

$$x = at + 1, \quad y = bt + 5$$

seja uma parametrização da reta $y = 2x + 3$.

Ex. 2.26 Identifique a reta

$$2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5.$$

Determine um vetor diretor e três pontos nela.

Ex. 2.27 Identifique a reta definida por

$$2x = 3, \quad 4y = 5.$$

Ex. 2.28 A reta é dada como interseção dos planos

$$3x - 2y + 5z = 6, \quad 2x + y - 3z = 0.$$

Escreva uma parametrização.

Ex. 2.29 Determine a reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano determinado pelos pontos

$$(3, 4, 2), \quad (-1, 5, 3), \quad (2, 1, 4).$$

Ex. 2.30 Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada caso, determine se existe C na reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $1/2$; quando existir, encontre todos os pontos.

- a) $A = (1, 2, 1), B = (1, 2, 3)$.
- b) $A = (1, 3, 2), B = (2, 2, 2)$.
- c) $A = (3, 0, 2), B = (2, 1, 2)$.
- d) $A = (3, -2, 1), B = (0, 0, 1)$.

Ex. 2.31 Uma reta intercepta os eixos nos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$, com $ab \neq 0$. Mostre que sua equação pode ser escrita como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ex. 2.32 Considere a reta $r : ax + by + c = 0$, com $(a, b) \neq (0, 0)$.

- a) Mostre que (a, b) é normal a todo vetor diretor de r .
- b) Suponha que (a, b) seja unitário e escreva $(a, b) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Interprete geometricamente a equação

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = h.$$

Posições Relativas

Neste capítulo estudaremos como retas e planos podem se posicionar uns em relação aos outros. Em cada caso, queremos decidir algebricamente se os objetos são coincidentes, paralelos, concorrentes ou, no espaço, reversos.

5.1. Posições Relativas entre Retas

5.1.1. Posições Relativas entre Retas no Plano

Começaremos com o estudo da posição relativa de duas retas no plano. Lembremos primeiro que duas retas **em um mesmo plano** podem ser:

- coincidentes, i.e., são a mesma reta;
- paralelas;
- concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto.

Tomemos então duas retas dadas em forma vetorial como $r : A + vt$ e $s : B + ut$.

Como a direção de uma reta é dada pelo seu vetor direcional, temos que as retas r e s são paralelas se seus vetores diretores v e u são paralelos, ou seja, se um é múltiplo do outro.

Duas retas coincidentes r e s são coincidentes se possuem o mesmo lugar geométrico, isto é, o mesmos pontos. Assim, um primeiro requisito para coincidência é, claramente, paralelismo. Uma vez estabelecido o paralelismo basta agora que

localizemos um ponto comum as duas retas. Podemos, por exemplo, verificar se o ponto inicial de r (ponto A) pertence à reta s . Caso as retas não possuam pontos em comum, então elas serão paralelas não coincidentes.

Como as retas estão em um mesmo plano, uma vez que não sejam paralelas e ou coincidentes elas claramente só podem possuir um ponto em comum.

Resumindo,

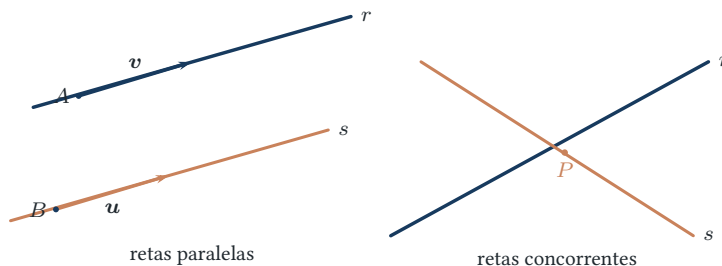
Proposição 5.1

Duas retas em um mesmo plano são:

- *Paralelas se e somente se seus vetores diretores são múltiplos um do outro.*

Neste caso elas podem ser:

- *Coincidentes: se o lugar geométrico de r e de s são o mesmo. Neste casos as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto. Para verificar se suas retas paralelas são coincidentes é suficiente verificar se elas possuem um ponto em comum. Por exemplo se o ponto B pertence a reta r .*
- *Paralelas não coincidentes, se não possuem pontos em comum.*
- *Concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto. Neste caso os vetores diretores não são paralelos.*



Exemplo 5.2.

Determine a posição relativa entre as retas:

1. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (4, 1) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})t$

2. $r : (1, 2) + (3, -1)t$ e $s : (2, 2) + (1, -\frac{1}{3})t$

$$3. \quad r : (1, 2) + (3, -1)t \text{ e } s : (2, 2) + (0, 1)t$$



Solução.

1. Os vetores diretores são paralelos, pois

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(3, -1).$$

Além disso, $(4, 1) = (1, 2) + (3, -1)$ pertence a r . Portanto as retas são coincidentes.

2. Os vetores diretores são paralelos, pois

$$\left(1, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(3, -1).$$

Entretanto $(2, 2)$ não pertence a r : a primeira coordenada exigiria $t = 1/3$, que produziria $y = 5/3$. Logo as retas são paralelas distintas.

3. Os vetores diretores $(3, -1)$ e $(0, 1)$ não são paralelos. Portanto as retas são concorrentes.



No plano, também é conveniente comparar retas dadas por equações cartesianas. Considere

$$r : ax + by + c = 0, \quad s : a'x + b'y + c' = 0,$$

com $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$. Os vetores (a, b) e (a', b') são normais às retas.

Teorema 5.3

Com a notação acima:

1. r e s são coincidentes se e somente se existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$(a', b', c') = \lambda(a, b, c).$$

2. r e s são paralelas distintas se e somente se $(a', b') = \lambda(a, b)$ para algum $\lambda \neq 0$, mas $c' \neq \lambda c$.

3. r e s são concorrentes se e somente se (a, b) e (a', b') não são proporcionais.

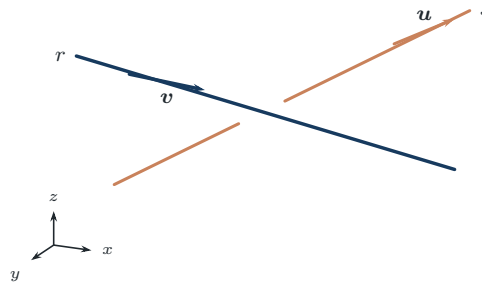


Figura 5.1.: Retas reversas no espaço.

5.1.2. Posições Relativas entre Retas no Espaço

Passemos agora para a análise do caso espacial. Quando consideramos duas retas no espaço elas podem estar ou não num mesmo plano. Caso elas estejam num mesmo plano serão ditas **retas coplanares**, e podemos para essas retas aplicar a análise de posição relativa que fizemos na seção anterior. Ressaltamos que se duas retas são paralelas elas são necessariamente coplanares. Por outro lado, retas não coplanares recebem o nome de **reversas**. Em resumo, duas retas no espaço podem ser

- Reversas, se as duas retas não estiverem contidas num mesmo plano.
- Coplanares, se as duas retas estiverem contidas num mesmo plano. Neste caso, valem as classificações vistas até agora, e as retas podem ser:
 - Coincidentes;
 - Paralelas;
 - Concorrentes.

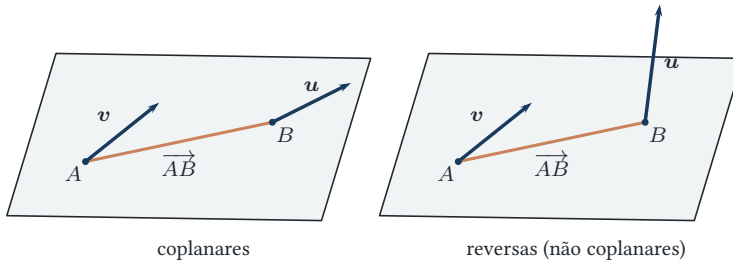
Precisamos então encontrar um critério para determinar se duas retas são ou não coplanares. Para tanto, considere duas retas $r : A + vt$ e $s : B + us$, com $A \neq B$. Se r e s forem coplanares, então necessariamente o vetor $\overrightarrow{AB}$ deve ser coplanar aos vetores u e v , ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}$, u e v são linearmente dependentes. Do mesmo modo, se $\overrightarrow{AB}$, u e v forem coplanares então a reta s está contida no mesmo plano determinado pela reta r e pelo ponto B . Isso nos dá o seguinte resultado.

Teorema 5.4

Duas retas $r : X = A + tv$ e $s : X = B + uw$ são coplanares se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$, v , w são linearmente dependentes. Equivalentemente,

$$(v \times w) \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Se esse produto misto é não nulo, as retas são reversas.

**Exemplo 5.5.**

Determine a posição relativa entre as seguintes retas:

- a) $r : (1, 2, 0) + t(2, 2, 2)$ e $s : (1, 3, 3) + t(2, 2, 3)$
- b) $r : (1, 0, 0) + t(2, 2, 2)$ e $s : (2, 3, 0) + t(1, -1, 2)$
- c) $r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ e $s : (2, 3, 0) + t(1, 1, 1)$
- d) $r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ e $s : (2, 1, 1) + t(1, 1, 1)$

**Solução.**

- a) Para determinar se r e s são coplanares precisamos estudar a dependência linear dos vetores $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$ e $(0, 1, 3) = (1, 3, 3) - (1, 2, 0)$. Como o determinante formado pelas coordenadas destes vetores vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concluimos que as retas não são coplanares, sendo portanto reversas.

- b) Como o determinante formado pelas coordenadas dos vetores $(2, 2, 2)$, $(1, -1, 2)$ e $(1, 3, 0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

as retas são coplanares. Como os vetores diretores não são múltiplos, as retas são concorrentes.

- c) As retas acima possuem o mesmo vetor diretor, de onde concluímos que são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1, 0, 0)$ não pertence a s , as retas são paralelas e não coincidentes.
- d) Assim como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto $(1, 0, 0)$ pertence a reta s (basta fazer $t = -1$ na equação de s) obtemos que r e s são de fato coincidentes.



5.2. Posições Relativas entre Retas e Planos

Sejam $r : X = P + tv$ uma reta e π um plano de vetor normal $\mathbf{n}$. Há três possibilidades: r pode estar contida em π , ser paralela e disjunta de π , ou intersectar π em um único ponto.

A quantidade decisiva é o produto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.

- Se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, a reta é transversal ao plano e existe exatamente um ponto de interseção.
- Se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, a direção da reta é paralela ao plano. Nesse caso, se $P \in \pi$, toda a reta está contida em π ; se $P \notin \pi$, reta e plano são paralelos e disjuntos.

Em coordenadas, se

$$\pi : ax + by + cz = d$$

e

$$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3),$$

então

$$\mathbf{n} = (a, b, c), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = av_1 + bv_2 + cv_3.$$

Proposição 5.6

A reta $r : X = P + tv$ é transversal ao plano π se e somente se

$$v \cdot n \neq 0.$$

Se $v \cdot n = 0$, basta testar se $P \in \pi$ para distinguir entre reta contida e reta paralela disjunta.

Exemplo 5.7.

Determine a posição relativa entre o plano

$$\pi : X = (1, 2, 1) + (1, -1, 1)t_1 + (0, 1, 2)t_2$$

e a reta

$$r : X = (1, 3, 4) + (1, 1, 1)s.$$



Solução. Um vetor normal ao plano é

$$n = (1, -1, 1) \times (0, 1, 2) = (-3, -2, 1).$$

Como

$$n \cdot (1, 1, 1) = -4 \neq 0,$$

a reta é transversal ao plano.

Para determinar o ponto de interseção, resolvemos

$$(1, 2, 1) + t_1(1, -1, 1) + t_2(0, 1, 2) = (1, 3, 4) + s(1, 1, 1).$$

O sistema fornece

$$s = \frac{1}{4}, \quad t_1 = \frac{1}{4}, \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Logo

$$P = \left(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4} \right).$$



5.3. Posições Relativas entre Planos

Considere

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

com vetores normais

$$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad \mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2).$$

Proposição 5.8

- π_1 e π_2 são transversais se e somente se $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ não são paralelos.
- São coincidentes se e somente se existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$(a_2, b_2, c_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1, d_1).$$

- São paralelos distintos se e somente se

$$(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$$

para algum $\lambda \neq 0$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$.

Se os planos são transversais e $P \in \pi_1 \cap \pi_2$, então

$$r : X = P + t(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$$

é uma equação vetorial da reta de interseção.

Exemplos 5.9.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$ e $\pi_2 : 6x + 2y + 2z = 3$ são transversais. E assim a sua interseção, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

determina uma reta.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8z = 2$ são paralelos distintos. Portanto o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5, \\ 4x + 6y + 8z = 2 \end{cases}$$

não possui solução.

- Os planos $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$ e $\pi_2 : 4x + 6y + 8z = 10$ são coincidentes. E assim a sua interseção é o plano $\pi_1 = \pi_2$. Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 6y + 8z = 10 \end{cases}$$

tem como solução um plano.



Exemplo 5.10.

A reta r é dada como interseção de dois planos

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}. \quad (5.1)$$

Escreva as equações paramétricas para essa reta.



Solução. Tomemos $z = t$. Da equação $x - z = 1$ obtemos

$$x = 1 + t.$$

Substituindo em $x + y + 2z = 0$,

$$1 + t + y + 2t = 0,$$

e portanto

$$y = -1 - 3t.$$

Logo

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = t. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$r : X = (1, -1, 0) + t(1, -3, 1).$$

Como verificação, para $z = 0$ obtemos $(1, -1, 0)$ e, para $z = -1$, obtemos $(0, 2, -1)$. O vetor entre esses pontos é $(-1, 3, -1)$, múltiplo de $(1, -3, 1)$.



Exercícios

Ex. 3.1 Considere a reta do plano

$$r : \quad x = at + b, \quad y = kt + d,$$

e a reta

$$s : \quad \alpha x + \beta y = \gamma, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

- Determine quando r e s se interceptam em um único ponto.
- Discuta também os casos em que r está contida em s ou é paralela distinta de s .

Ex. 3.2 Verifique a posição relativa das retas r e s e, quando forem concorrentes, determine o ponto de interseção.

- $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ e $s : X = (2, 3, 3) + \mu(3, 2, 1)$.
- $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ e $s : X = (-1, -1, -2) + \mu(4, 2, 6)$.
- $r : X = (2, 4, 11) + \lambda(-4, 5, 0)$ e $s : X = (0, 1, 0) + \mu(2, -2, 1)$.
- $r : X = (2, -2, 0) + \lambda(3, 4, 1)$ e $s : X = (0, 0, 3) + \mu(4, 2, 2)$.

Ex. 3.3 A altura e a mediana relativas ao vértice B de um triângulo ABC estão contidas, respectivamente, nas retas

$$r : X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0), \quad s : X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0).$$

Sabendo que $C = (4, -1, 3)$, determine A e B .

Ex. 3.4 Suponha $(m, n) \neq (m', n')$. Mostre que as retas

$$r : \begin{cases} x = mz + a, \\ y = nz + b, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = m'z + a', \\ y = n'z + b' \end{cases}$$

se interceptam se e somente se

$$(a - a')(n - n') = (b - b')(m - m').$$

Ex. 3.5 Estude a posição relativa das retas r e s .

- a) $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$ e $s : (2, 5, 1) + (2, 4, 6)u$.
 b) $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$ e $s : (2, 5, 1) + (1, 4, 1)u$.
 c) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ e $s : X = u(1, 2, 0)$.
 d) $r : X = (8, 1, 9) + t(2, -1, 3)$ e $s : X = (3, -4, 4) + u(1, -2, 2)$.
 e) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ e $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$.
 f) $r : x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ e $s : X = (0, 2, 2) + u(1, 1, -1)$.

Ex. 3.6 Sejam

$$r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3), \quad s : X = (0, 1, -1) + \mu(1, m, 2m).$$

Estude, segundo os valores de m , a posição relativa de r e s .

Ex. 3.7 Dadas

$$r : X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0), \quad s : X = (-1, 2, -7) + \mu(2, 1, -3),$$

encontre uma reta t concorrente com r e s e paralela a $(1, -5, -1)$.

Ex. 3.8 Considere a reta que passa por $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ e a reta que passa por $(2, 1, 1)$ e $(1, 2, 1)$. Determine se elas se interceptam.

Ex. 3.9 Considere os conjuntos

$$r : \begin{cases} ax + 3y - 7z - 1 = 0, \\ 5x + 6y - bz = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} ax + by = 5, \\ 2x - 3y = 8. \end{cases}$$

Existem valores de a, b para os quais ambos sejam retas e sejam paralelas? Justifique.

Ex. 3.10 Mostre que a reta

$$x = 3t - 2, \quad y = -4t + 1, \quad z = 4t - 5$$

é paralela ao plano $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Ex. 3.11 Determine a equação do plano que contém a reta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ 2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

e é paralelo à reta $x = -y/6 = z/7$.

Ex. 3.12 Mostre que a reta

$$\frac{x-7}{3} = -(y+3) = \frac{z-4}{2}$$

intersecta os planos

$$\pi_1 : 6x + 4y - 5z = 4, \quad \pi_2 : x - 5y + 2z = 12$$

no mesmo ponto. Conclua que essa reta é coplanar com a reta $\pi_1 \cap \pi_2$.

Ex. 3.13 Determine a interseção da reta com o plano ou conclua que não há ponto comum.

- a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ e $2x + 3y + z - 1 = 0$.
 b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ e $x - 2y + z - 15 = 0$.
 c) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ e $x + 2y + 2z + 6 = 0$.

Ex. 3.14 Escreva a equação do plano que passa por $(1, 2, -3)$ e é paralelo às retas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Ex. 3.15 Mostre que o plano que passa por (x_0, y_0, z_0) e é paralelo às retas de vetores diretores (l_1, l_2, l_3) e (m_1, m_2, m_3) pode ser escrito como

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ex. 3.16 Mostre que o plano que passa pelos pontos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e é paralelo à reta de vetor diretor (l_1, l_2, l_3) tem equação

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ex. 3.17 As retas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (3t-7, 2t+2, -2t+1)$$

são coplanares? Justifique.

Ex. 3.18 Mostre que os planos

$$bx - ay = n, \quad cy - bz = 1, \quad az - cx = m$$

têm interseção comum contendo uma reta se e somente se

$$a + bm + cn = 0.$$

Ex. 3.19 Mostre que a reta definida por

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

está contida no plano

$$7x - 4y + z - 6 = 0.$$

Ex. 3.20 Determine os valores de a, b para que os planos

$$x + 2y + z = b, \quad 3x - 5y + 3z = 1, \quad 2x + 7y + az = 8$$

satisfizem cada condição.

- A interseção comum é um único ponto.
- A interseção comum é uma reta.
- As interseções dois a dois são três retas distintas e paralelas.

Ângulos e Distâncias

6.1. Ângulos

No capítulo anterior classificamos as possíveis posições relativas entre retas e planos. Agora acrescentaremos informação métrica: primeiro estudaremos ângulos entre esses objetos e, em seguida, distâncias. Ao longo do capítulo trabalharemos em sistemas cartesianos de coordenadas.

6.1.1. Ângulo entre duas Retas

Como uma reta não possui orientação preferencial, trocar um vetor diretor v por $-v$ não deve alterar o ângulo entre duas retas. Definimos, portanto, o **ângulo entre duas retas** como o menor ângulo formado por suas direções.

Se

$$r : X = A + tv, \quad s : X = B + uw,$$

com $v, w \neq 0$, definimos $\theta \in [0, \pi/2]$ por

$$\cos \theta = \frac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|}. \quad (6.1)$$

Logo

$$\theta = \arccos \left(\frac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|} \right).$$

Assim, retas paralelas têm ângulo 0 e retas com direções ortogonais têm ângulo $\pi/2$.

Exemplo 6.1.

Encontre o ângulo entre as retas $r : X = (1, 2, 1) + (1, 1, 0)t$ e $s : \frac{x-2}{1/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z+7}{1/\sqrt{2}}$.

◁

Solução. A reta r tem vetor diretor $(1, 1, 0)$ e a reta s tem vetor diretor $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$. E assim

$$\cos \theta = \frac{(1, 1, 0) \cdot (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})}{\|(1, 1, 0)\| \|(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{e logo } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

◁

É importante observar que para medir o ângulo entre duas retas não é necessário que estas se interceptem, já que a nossa definição de ângulos entre retas é, na verdade, o ângulo entre os vetores diretores das retas. Observamos também que o ângulo entre duas retas paralelas (coincidentes ou não) é sempre 0.

Também neste sentido, duas retas são ditas **ortogonais** se seus vetores diretores são perpendiculares. E duas retas são ditas **perpendiculares** se elas se interceptam e são ortogonais.

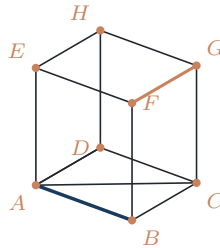


Figura 6.1.: As retas AB e FG são ortogonais mas não perpendiculares.

Exemplo 6.2.

Verifique se as retas $r : (1, 2, 1) + (1, 1, 0)t$ e $s : (1, 3, 4) + (1, -1, 3)t$ são ortogonais e/ou se são perpendiculares.

◁

Solução. Como $(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 3) = 0$ elas são ortogonais.

Para verificar se elas se intersectam, resolvemos o sistema linear:

$$(1, 2, 1) + (1, 1, 0)t_1 = (1, 3, 4) + (1, -1, 3)t_2$$

Como o sistema acima não possui solução, as retas não se interceptam e assim elas não são perpendiculares.



No plano, quando as retas não são verticais, escreva

$$r : y = m_1x + b_1, \quad s : y = m_2x + b_2.$$

Para o ângulo geométrico $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\cos \theta = \frac{|1 + m_1m_2|}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2}\sqrt{1 + m_2^2}}.$$

Se $1 + m_1m_2 \neq 0$,

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} \right|.$$

Quando $1 + m_1m_2 = 0$, temos $\theta = \pi/2$.

Se escolhermos orientações para as direções, podemos definir separadamente o ângulo orientado δ , módulo π , e então

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}.$$

O sinal dessa expressão pertence à informação de orientação; ele não aparece no ângulo geométrico.

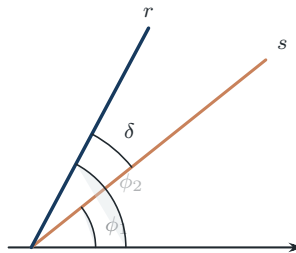


Figura 6.2.: Ângulo orientado entre duas direções no plano.

Para o ângulo geométrico $\theta \in [0, \pi/2]$ entre duas retas não verticais,

$$\cos \theta = \frac{|1 + m_1 m_2|}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}}, \quad \sin \theta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}}.$$

Se $1 + m_1 m_2 \neq 0$,

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|.$$

Exemplo 6.3.

Ache o ângulo entre as retas $2x - y = 3$ e $x + 3y = 4$.



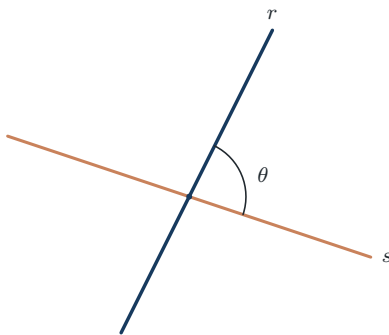
Solução. Os coeficientes angulares são $m_1 = 2$ e $m_2 = -1/3$. Portanto

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + 2(-\frac{1}{3})} \right| = 7.$$

Logo

$$\theta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81,87^\circ.$$

Para o ângulo orientado de r para s , a tangente vale -7 .



Exemplo 6.4.

Ache duas retas que passem pelo ponto $(2, 2)$ e façam um ângulo de 45° com a reta $2x - 3y = 4$



Solução. Inicialmente vamos encontrar o coeficiente angular dessas retas. Para isso, observamos que:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma $1 + \frac{2}{3}m = \frac{2}{3} - m$ e logo $\frac{5}{3}m = -\frac{1}{3}$ e assim $m = -\frac{1}{5}$. Logo a equação da reta é $y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 2)$

No caso

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma $m = 5$. Logo a equação da reta é $y - 2 = 5(x - 2)$

**6.1.2. Ângulo entre uma Reta e um Plano**

O ângulo θ entre uma reta r e um plano π é o menor ângulo entre a reta e as direções contidas no plano; portanto $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Se $\mathbf{v}$ é diretor de r e $\mathbf{n}$ é normal a π , então

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\|}.$$

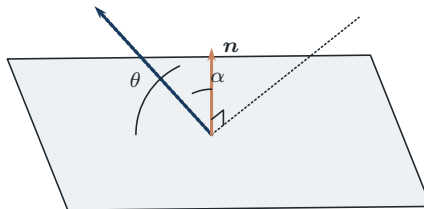


Figura 6.3.: Ângulo θ entre uma reta e um plano.

Dizemos que um plano π com vetor normal $\mathbf{n}$ e uma reta r com vetor diretor $\mathbf{v}$, são ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$, ou equivalentemente se os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ são paralelos.

Exemplo 6.5.

Determine o ângulo entre a reta $X = (6, 7, 0) + (1, 1, 0)t$ e o plano de equação vetorial $X = (8, -4, 2) + (-1, 0, 2)t + (1, -2, 0)s$.

◁

Solução. Vamos encontrar inicialmente um vetor normal a esse plano:

$$\mathbf{n} = (-1, 0, 2) \times (1, -2, 0) = (4, 2, 2)$$

Logo o ângulo entre a reta e o plano é dado por:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{(1, 1, 0) \cdot (4, 2, 2)}{\sqrt{2}\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e assim $\theta = \frac{\pi}{3}$

◁

Exemplo 6.6.

Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$ e que é perpendicular a reta $X = (1, 0, 0) + (1, 3, -1)t$

◁

Solução. O vetor normal ao plano pode ser escolhido como $(1, 3, -1)$ e, assim, a equação geral desse plano é: $x + 3y - z = d$. Como o ponto $(1, 2, 1)$ pertence ao plano, ele satisfaz a equação do plano, i.e, $1 + 3 \cdot 2 - 1 = d$. Logo $d = 6$ e a equação geral do plano é $x + 3y - z = 6$.

◁

6.1.3. Ângulo entre dois Planos

O ângulo entre dois planos π_1 e π_2 é definido como o menor ângulo entre seus vetores normais; portanto $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}$$

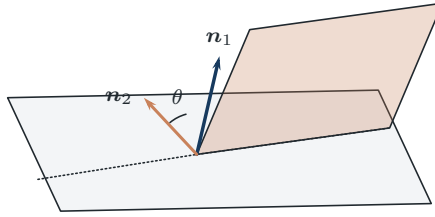


Figura 6.4.

Dois planos π_1 e π_2 com vetores normais $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ respectivamente, são ditos ortogonais se o ângulo entre eles é $\frac{\pi}{2}$, o que equivale a dizer que seus vetores normais são perpendiculares, i.e.,

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

Exemplo 6.7.

Determine a equação do plano que contém o ponto $(1, 0, 1)$ e que é perpendicular aos planos $2x + y + z = 2$ e $-x + z = 7$.



Solução. O vetor $\mathbf{n}$ normal ao plano, será ortogonal aos vetores $(2, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1)$. E assim

$$\mathbf{n} = (2, 1, 1) \times (-1, 0, 1) = (1, -3, 1)$$

Logo a equação geral do plano é da forma $x - 3y + z = d$. Como o ponto $(1, 0, 1)$ pertence ao plano:

$$d = 1 + 3 \cdot 0 + 1 = 2$$

E a equação geral é $x - 3y + z = 2$.



6.2. Distâncias

Passemos agora a um novo problema: definir e determinar a distância entre dois objetos (ponto, reta ou plano) no espaço.

Sabemos facilmente como determinar a distância entre dois pontos no espaço. Bastando para isso medir o tamanho do vetor determinado por estes pontos. Mas como medir a distância entres outros dois objetos? Este será nosso objetivo nesta seção.

6.2.1. Distância de um ponto a uma reta

Seja

$$r : X = A + tv, \quad v \neq \mathbf{0},$$

e seja P um ponto. A distância de P à reta é o comprimento do segmento perpendicular que liga P a r .

A área do paralelogramo gerado por $\overrightarrow{AP}$ e v é $\|\overrightarrow{AP} \times v\|$. Tomando $\|v\|$ como base e $d(P, r)$ como altura, obtemos

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times v\|}{\|v\|}.$$

Exemplo 6.8.

Calcule a distância do ponto $P = (1, 0, 2)$ a reta $r : (1, 0, 1) + (2, 0, 1)t$.



Solução. Tomamos $A = (1, 0, 1)$ e $v = (2, 0, 1)$. Então

$$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$$

e

$$d(P, r) = \frac{\|(0, 0, 1) \times (2, 0, 1)\|}{\|(2, 0, 1)\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$



6.2.1.1. Distância de um ponto a uma reta no plano: o caso bidimensional

Considere $P = (p, q)$ e a reta

$$r : Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0).$$

Um vetor diretor é $v = (B, -A)$. Se $A \neq 0$, escolha

$$R = \left(-\frac{C}{A}, 0\right) \in r.$$

Então

$$\overrightarrow{RP} = \left(p + \frac{C}{A}, q\right)$$

e, em $\mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{RP} \times v = (0, 0, -Ap - Bq - C).$$

Logo

$$d(P, r) = \frac{|Ap + Bq + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

A fórmula permanece válida se $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemplo 6.9.

Calcule a distância do ponto $(1, 3)$ a reta $4x - 2y - 3 = 0$.



Solução.

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$$



Exemplo 6.10.

Existem dois pontos cujas coordenadas x são iguais a -3 e que distam 6 da reta $r : 5x - 12y - 3 = 0$. Ache as coordenadas y desses pontos.



Solução. Ambos os pontos podem ser representados como $(-3, s)$. Para esses pontos temos que:

$$d = \frac{|5(-3) - 12s - 3|}{12} = 6$$

e logo $|18 + 12s| = 78$ e logo $s = 5$ ou $s = -8$. E os pontos são $(-3, 5)$ e $(-3, -8)$



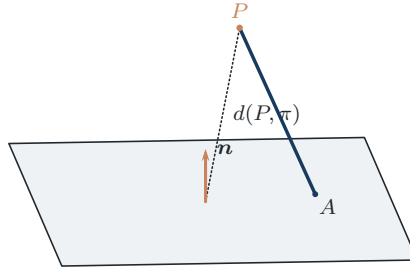
6.2.2. Distância de um ponto a um plano

A distância entre um ponto P e um plano π é o comprimento do segmento perpendicular que liga P ao plano. Se $\mathbf{n}$ é normal a π e $A \in \pi$,

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Se

$$P = (x_0, y_0, z_0), \quad \pi : ax + by + cz = d,$$



e $A = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$, então

$$\begin{aligned} d(P, \pi) &= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Como $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$,

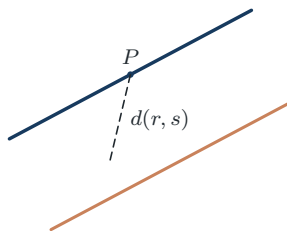
$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6.2.3. Distância entre Duas Retas

Seguindo as ideias utilizadas nos casos anteriores, a distância entre duas retas r e s será definida como a menor distância entre um ponto de r e um ponto de s .

Sejam então r, s duas retas no espaço tais que $r : A + \mathbf{u}t$ e $s : B + \mathbf{v}t$.

Se as retas forem coincidentes ou concorrentes, claramente a distância entre elas é nula. Se as retas forem paralelas e não coincidentes a distância entre elas é igual a distância de um ponto P qualquer de r a s , e assim essa distância pode ser calculada usando os conhecimentos obtidos na seção anterior.



Se as retas r e s forem reversas começamos escolhendo um ponto P sobre r e um ponto Q sobre s . Projetamos então o vetor $\overrightarrow{PQ}$ sobre o vetor $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ que é ortogonal às retas r e s . A norma dessa projeção é a distância entre as retas.

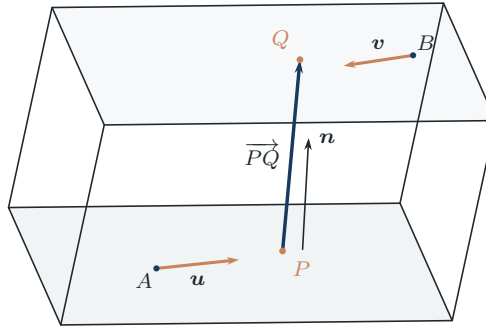


Figura 6.5.: Distância entre retas reversas.

A projeção vetorial de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\mathbf{n}$ é

$$\text{Proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}.$$

Tomando a norma e usando $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}.$$

6.3. Retas em Coordenadas Polares

Considere um sistema polar cujo polo coincide com a origem e cujo eixo polar coincide com o semieixo positivo de x . Para um ponto de coordenadas polares (r, θ) , com $r \geq 0$,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (6.2)$$

Reciprocamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r},$$

quando $r > 0$. O ângulo θ deve ser escolhido de acordo com o quadrante de (x, y) ; computacionalmente, isso corresponde a $\text{atan2}(y, x)$, módulo 2π .

Para a reta cartesiana

$$Ax + By = C, \quad (A, B) \neq (0, 0),$$

substituindo (6.2) obtemos

$$r(A \cos \theta + B \sin \theta) = C. \quad (6.3)$$

Exemplo 6.11.

A reta $3x + 2y = 7$ tem equação polar

$$r(3 \cos \theta + 2 \sin \theta) = 7.$$



Defina $\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$. Trocando simultaneamente os sinais de A, B, C , se necessário, podemos supor $C \geq 0$. Escolha α tal que

$$\cos \alpha = \frac{A}{\rho}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\rho}.$$

Dividindo (6.3) por ρ e usando

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha,$$

obtemos

$$r \cos(\theta - \alpha) = h, \quad h = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Essa é a **forma normal da reta em coordenadas polares**. O número h é a distância da origem à reta e α é a direção do segmento perpendicular que parte da origem e encontra a reta.

Exemplo 6.12.

Determine o comprimento e a direção do segmento perpendicular que liga a origem à reta

$$\frac{1}{r} = 8 \cos \theta + 6 \sin \theta.$$



Solução. A equação equivale a

$$r(8 \cos \theta + 6 \sin \theta) = 1.$$

Como $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, escrevemos

$$8 \cos \theta + 6 \sin \theta = 10 \left(\frac{4}{5} \cos \theta + \frac{3}{5} \sin \theta \right) = 10 \cos(\theta - \alpha),$$

onde

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Logo

$$r \cos(\theta - \alpha) = \frac{1}{10}.$$

Portanto

$$h = \frac{1}{10}, \quad \alpha = \arctg\left(\frac{3}{4}\right)$$

com α no primeiro quadrante.



6.4. Exercícios

A lista foi organizada para alternar cálculo direto, interpretação geométrica e problemas de construção. Nos exercícios de demonstração, o gabarito registra apenas a ideia central.

Exercícios

Ex. 4.1 Determine o ângulo agudo entre as retas

$$3x - 4y + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 2x + 3y = 7.$$

Ex. 4.2 Encontre as duas retas que passam por $(1, -1)$ e fazem ângulo de 45° com a reta

$$3x - 4y = 7.$$

Ex. 4.3 Calcule os três ângulos do triângulo de vértices

$$A = (2, 1), \quad B = (-1, 2), \quad C = (3, -2).$$

Verifique a soma dos ângulos.

Ex. 4.4 Considere as retas

$$r : (1, 2, 1) + t(1, 1, 0), \quad s : (1, 3, 4) + u(1, -1, 3).$$

Decida se elas são ortogonais, perpendiculares, ambas ou nenhuma das duas coisas.

Ex. 4.5 Determine uma reta que passe pelo ponto $P = (1, -2, 1)$ e seja ortogonal às retas

$$r : (1, -3, 0) + t(1, 2, 1), \quad s : (-2, 1, 0) + u(1, -1, 1).$$

Ex. 4.6 Determine o ângulo entre a reta

$$r : (1, -1, 2) + t(2, -1, 2)$$

e o plano

$$\pi : x + 2y + 2z = 4.$$

Ex. 4.7 Considere

$$r : (0, 0, 1) + t(1, 1, -1)$$

e o plano

$$\pi : x + y + 2z = 0.$$

Determine o ângulo entre a reta e o plano e decida se a reta é paralela ao plano, está contida nele ou o intercepta.

Ex. 4.8 Determine os ângulos entre os pares de planos:

- a) $3x - y + z = 2$ e $x - y = 6$;
- b) $x + 2y - 3z = 8$ e $2x + 4y - 6z + 31 = 0$;
- c) $x = 0$ e $y = 0$;
- d) $x = 1$ e $x + y = 1$.

Ex. 4.9 Determine a equação do plano que passa por $(1, 0, 1)$ e é perpendicular aos planos

$$2x + y + z = 2 \quad \text{e} \quad -x + z = 7.$$

Ex. 4.10 Determine os planos que passam por $P = (1, 2, 3)$, são perpendiculares ao plano xz e fazem ângulo $\pi/4$ com o plano

$$3x + 2y + z = 1.$$

Ex. 4.11 Para o ponto $A = (3, 1)$ e a reta

$$r : x + 2y = 3,$$

determine o pé da perpendicular traçada de A a r e a distância de A a r .

Ex. 4.12 Prove que a distância entre as retas paralelas

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{e} \quad Ax + By + C' = 0$$

é

$$\frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ex. 4.13 Calcule a distância do ponto $P = (2, -1, 3)$ ao plano

$$2x - y + 2z = 7$$

e determine o pé da perpendicular traçada de P ao plano.

Ex. 4.14 Um plano intercepta os eixos coordenados em

$$(a, 0, 0), \quad (0, b, 0), \quad (0, 0, c),$$

com $abc \neq 0$. Se sua distância à origem é d , prove que

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ex. 4.15 Determine as distâncias entre os seguintes pares de planos paralelos:

- a) $4x + 8y + z = 9$ e $4x + 8y + z + 18 = 0$;
- b) $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ e $6x - 4y + 12z + 12 = 0$.

Ex. 4.16 Determine a distância do ponto $P = (2, 2, 2)$ à reta

$$r : (1, 2, 1) + t(2, 3, 5).$$

Ex. 4.17 Considere as retas

$$r : (1, 2, 1) + t(2, 3, 5), \quad s : (1, 2, 5) + u(4, 2, 1).$$

Verifique que são reversas e calcule a distância entre elas.

Ex. 4.18 Considere as retas reversas

$$r : (-7, 4, 4) + t(3, -2, 3), \quad s : (1, -9, -12) + u(1, 2, -1).$$

Determine a *perpendicular comum*, isto é, a reta que intercepta ambas e é perpendicular às duas.

Ex. 4.19 A reta, em coordenadas polares, é dada por

$$\frac{6}{r} = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta.$$

Coloque-a na forma normal polar e determine sua distância à origem.

Ex. 4.20 Converta para coordenadas cartesianas e identifique as retas:

- a) $r \cos \theta = 3$;
- b) $r \sin \theta = 3$;
- c) $r(5 \cos \theta + \sin \theta) = 3\sqrt{2}$;
- d) $r(5 \cos \theta - 12 \sin \theta) = 39$.

Ex. 4.21 Se uma reta tem equação polar

$$r \cos(\theta - \alpha) = h, \quad h > 0,$$

mostre diretamente que h é sua distância à origem e que α é a direção de um vetor normal à reta.

Círculos e Esferas

7.1. Equações Canônicas de Círculos e Esferas

Um círculo de centro $C = (a, b)$ e raio $r > 0$ é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a C é igual a r . Assim, $P = (x, y)$ pertence ao círculo se e somente se

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

ou equivalentemente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

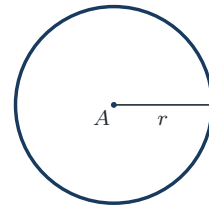


Figura 7.1.: Círculo de centro A e raio r .

De modo análogo, a equação reduzida de uma esfera de centro (a, b, c) e raio r é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Exemplo 7.1.

Determine a equação do círculo de centro $(-3, 1)$ que é tangente a reta $3x - 4y - 2 = 0$



Solução. Já conhecemos o centro e precisamos determinar o raio. Nesse caso o raio é a distância entre a reta e o ponto, já que a tangente a um círculo é perpendicular

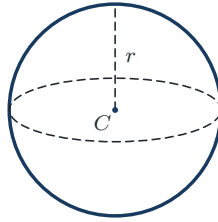


Figura 7.2.: Esfera de Centro C e raio r .

ao raio que liga o centro ao ponto de tangência. Logo:

$$r = \frac{|3(-3) - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

e assim a equação do círculo é:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \text{ ou } x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

◀

Exemplo 7.2.

Determine a equação da esfera cujo diâmetro é o segmento que liga $(3, -1, 2)$ a $(5, 3, 4)$.

◀

Solução. Nesse caso aparentemente não conhecemos nem o centro nem o raio. Mas temos que o centro é o ponto médio do segmento e que o raio é metade do diâmetro. Logo:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{6}$$

O ponto médio é $(4, 1, 3)$ e logo a equação da esfera é:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

◀

Exemplo 7.3.

Identifique a curva cuja equação é:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

◁

Solução. Identificaremos a curva completando quadrados. O termo $x^2 - 6x$ pode ser convertido num quadrado, se somarmos 9 e $y^2 - 4y$ pode ser convertido num quadrado somando 4. Desta forma, somaremos $4 + 9$ em cada lado da equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$. Logo temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \quad (7.1)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 4 + 9 \quad (7.2)$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \quad (7.3)$$

Logo a curva é um círculo de raio 5 e centro $(3, 2)$.

◁

Podemos generalizar o exemplo anterior:

Exemplo 7.4.

Identifique a curva cuja equação é:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

◁

Solução. Como no exemplo anterior, identificaremos a curva completando quadrados. O termo $x^2 + Ax$ pode ser convertido num quadrado, se somarmos $\frac{A^2}{4}$ e $y^2 + By$ pode ser convertido num quadrado somando $\frac{B^2}{4}$. Desta forma, somaremos $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$ em cada lado da equação:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (7.4)$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \quad (7.5)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \quad (7.6)$$

A equação representa um círculo não degenerado exatamente quando $r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$, e assim temos que ter $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$.

Se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$, o lugar geométrico é vazio, pois uma soma de quadrados não pode ser negativa.

Se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$, o lugar geométrico reduz-se ao ponto $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, pois se a soma de quadrados perfeitos é 0 cada termo da soma é zero.



De modo análogo, podemos demonstrar que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

descreve uma esfera se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D > 0$, um ponto se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D = 0$ e o conjunto vazio se $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D < 0$.

Exemplo 7.5.

A superfície cuja equação é:

$$12 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 8z + z^2 = 0$$

é uma esfera. Encontre seu centro e raio.



Solução. Completando os quadrados temos

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) - 1 - 4 - 16 + 12 = 0.$$

Daí segue que:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 9$$

E logo o centro dessa esfera é $(1, -2, -4)$ e o raio é 3.



7.1.1. Círculo por três pontos

É conhecido que três pontos não colineares determinam um único círculo. Assim sendo, fixados P_1, P_2 e P_3 não colineares podemos facilmente encontrar a equação

do círculo que passa por tais pontos. Tal equação pode ser encontrada observando que a equação geral de um círculo é da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

e que um ponto pertence ao círculo se e somente se suas coordenadas satisfazem tal equação. A substituição de cada ponto resulta assim numa equação linear nas variáveis A, B, C e assim o fato dos três pontos pertencerem ao círculo nos fornecem um sistema linear em três equações e três variáveis A, B, C . Resolvendo tal sistema encontramos, então, a equação do círculo.

Exemplo 7.6.

Determine a equação do círculo que passa pelos pontos $(-1, 2)$, $(0, 1)$ e $(-3, 2)$.



Solução. Escreva a equação procurada na forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Substituindo os três pontos, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} 5 - A + 2B + C = 0, \\ 1 + B + C = 0, \\ 13 - 3A + 2B + C = 0. \end{cases}$$

Sua solução é $A = 4$, $B = 0$ e $C = -1$. Portanto

$$x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0,$$

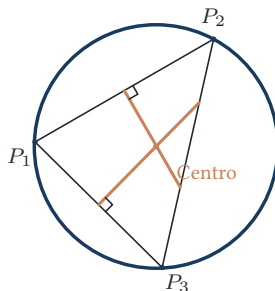
ou, completando quadrados,

$$(x + 2)^2 + y^2 = 5.$$

Assim, o círculo tem centro $(-2, 0)$ e raio $\sqrt{5}$.



É possível encontrar a equação de um círculo por três pontos não colineares de uma outra maneira. Para esse fim consideramos o triângulo determinado pelos pontos P_1, P_2, P_3 e esse circunscrito na circunferência. Assim o seu centro é o circuncentro desse triângulo, isto é, o encontro das mediatrizes.

**Exemplo 7.7.**

Determine a equação do círculo que passa pelos pontos $(-1, 2)$, $(0, 1)$ e $(-3, 2)$.



Solução. A equação da reta passando pelos pontos $(-1, 2)$, $(0, 1)$ é $y - 1 = -x$, e como o ponto médio desses pontos é: $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ temos que a mediatriz relativa a esse lado é: $y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2}$ (lembrando que como a mediatriz é perpendicular ao lado seu coeficiente angular é igual a menos o inverso do coeficiente da reta).

De modo análogo a equação da reta passando pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 2)$ é $y = -\frac{x}{3} + 1$ e a equação da mediatriz é: $3x = -6 + y$

temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x = -6 + y \\ y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

cujas solução é $x = -2, y = 0$, ou seja o centro da circunferência é $(-2, 0)$. O raio pode ser calculado observando que este será a distância do centro $(-2, 0)$ a um dos vértices do triângulo, por exemplo $(0, 1)$. Assim $r^2 = 5$, e logo a equação é:

$$(x + 2)^2 + y^2 = 5.$$

**Exemplo 7.8.**

Obtenha a equação da esfera que passa pelos pontos $(0, 0, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$



Solução. Impondo que os pontos pertençam a esfera temos o seguinte sistema

linear:

$$1 + C + D = 0$$

$$4 + 2A + D = 0$$

$$3 + A + B + C + D = 0$$

$$1 + B + D = 0$$

cujas soluções são $A = -\frac{5}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$, $D = -\frac{2}{3}$ e assim a equação da esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Completando quadrado obtemos:

$$\begin{aligned} &\left(x^2 - \frac{5x}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) + \left(y^2 - \frac{y}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) + \\ &+ \left(z^2 - \frac{z}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{24}{36} = 0. \end{aligned}$$

Donde segue:

$$\left(x^2 - \frac{5x}{6}\right)^2 + \left(y^2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(z^2 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{51}{36}.$$



Exercícios

Ex. 1.1 Determine as equações dos círculos descritos a seguir:

- Centro $(-2, 5)$ e raio $r = 3$.
- Centro $(1, 3)$ e raio $r = 2$
- Centro na origem e raio $r = a$
- Centro $(5, 2)$ e que passa pelo ponto $(2, 3)$
- Tangente ao eixo y na origem e raio a
- Extremos de um diâmetro em $(5, 2)$ e $(-2, 10)$
- Centro $(3, -2)$ e tangente à reta $2x - y = 0$
- Tangente à reta $2x - 5y + 1 = 0$ no ponto $(2, 1)$ e de raio 3 (duas respostas)

Ex. 1.2 Identifique as figuras descritas pelas equações a seguir e determine, quando aplicável, o centro e o raio.

- a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$
- b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
- c) $x^2 + y^2 = 2ax$
- d) $4x^2 - 4x = 5y - 4y^2$
- e) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

Ex. 1.3 Determine a equação do círculo que passa pelos pontos $(4, 0)$, $(0, 3)$ e a origem.

Ex. 1.4 Determine os círculos descritos a seguir.

- a) Tangente aos eixos coordenados no segundo quadrante e com raio $r = 4$.
- b) Todos os círculos tangentes às três retas que contêm os lados do triângulo limitado pelos eixos coordenados e pela reta que intercepta os eixos x e y em 3 e 2, respectivamente.

Ex. 1.5 Verifique se as equações a seguir descrevem esferas. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$
- b) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 14z + 58 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 6y + z^2 + 4z + 16 = 0$
- d) $x^2 + 2x + y^2 + 4y - z^2 + 6z - 29 = 0$

Ex. 1.6 Prove que, dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, a equação da esfera que tem P_1P_2 como diâmetro é

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

7.2. Retas Tangentes e Planos Tangentes

Uma reta é tangente a um círculo quando possui exatamente um ponto em comum com ele. Se T é o ponto de tangência e C é o centro, então o raio $\overrightarrow{CT}$ é

perpendicular à reta tangente. Equivalentemente, a distância de C à reta tangente é igual ao raio do círculo.

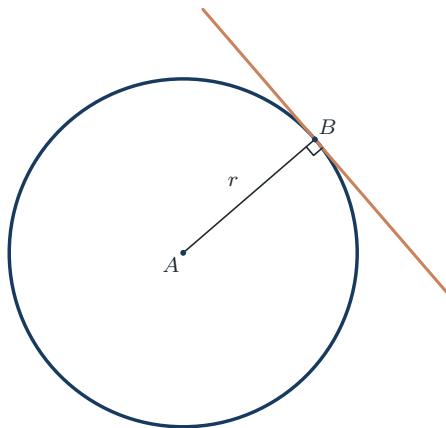


Figura 7.3.: Reta tangente a um círculo

De modo análogo, um plano é tangente a uma esfera quando a intersecta em um único ponto T . Nesse caso, o vetor radial que liga o centro da esfera a T é normal ao plano tangente. Equivalentemente, a distância do centro da esfera ao plano é igual ao raio.

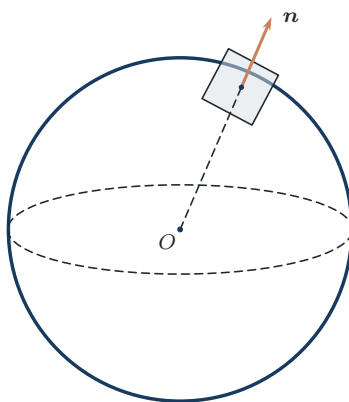


Figura 7.4.: Plano tangente a uma esfera

Exemplo 7.9.

Encontre a reta tangente ao círculo de equação $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$ no ponto $(3, 3)$



Solução. Completando quadrados,

$$x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0 \iff (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5.$$

Logo o centro é $C = (2, 1)$. Como $T = (3, 3)$ pertence ao círculo,

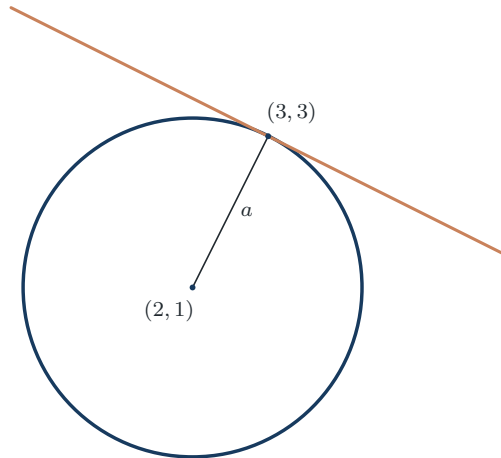
$$\overrightarrow{CT} = (1, 2)$$

é normal à reta tangente. Portanto a tangente em T satisfaz

$$(1, 2) \cdot ((x, y) - (3, 3)) = 0,$$

isto é,

$$x + 2y = 9.$$



Podemos generalizar o argumento sem recorrer a coeficientes angulares. Considere o círculo

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

e um ponto $T = (x_1, y_1)$ do círculo. O vetor radial

$$\mathbf{n} = (x_1 - a, y_1 - b)$$

é normal à reta tangente em T . Assim, sua equação é

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0.$$

Como T pertence ao círculo,

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2,$$

e a equação também pode ser escrita na forma

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2.$$

Exemplo 7.10.

Obtenha as equações dos planos tangentes à esfera $-3 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 2z + z^2 = 0$ que são paralelos ao plano $x - 2y + 2z = 3$.



Solução. Completando quadrados temos que a equação da esfera pode ser escrita como:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Logo o centro dessa esfera é $(1, -2, -1)$ e o raio é 3.

A equação geral de um plano paralelo a $x - 2y + 2z = 3$ tem equação da forma: $x - 2y + 2z = d$

Como o plano é tangente à esfera, sua distância ao centro $C = (1, -2, -1)$ deve ser igual ao raio 3. Portanto:

$$d(C, \pi) = \frac{|1 - 2(-2) + 2(-1) - d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|3 - d|}{3} = 3$$

Logo $d = -6$ ou $d = 12$. Os planos tangentes são $x - 2y + 2z = -6$ e $x - 2y + 2z = 12$.



Exercícios

Ex. 2.1 Resolva os itens a seguir.

- a) Determine a equação da reta tangente a $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(-3, 4)$.
- b) Determine a equação da reta tangente a $x^2 + y^2 = 2x - 4y$ na origem.
- c) Determine as retas tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 4x$ que passam pelo ponto $(3, 2)$.
- d) Uma corda da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ está sobre a reta $x - 7y + 25 = 0$. Determine o comprimento dessa corda.

Ex. 2.2 Para um triângulo qualquer, determine:

- a) a equação da circunferência circunscrita ao triângulo;
- b) a equação da circunferência inscrita no triângulo;
- c) a equação da circunferência que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo.

Ex. 2.3 As equações dos lados de um triângulo são $9x + 2y + 13 = 0$, $3x + 8y - 47 = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Determine a equação da circunferência circunscrita.

Ex. 2.4 Mostre que as tangentes de inclinação m à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ são $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$.

Ex. 2.5 Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $(1, 2)$, $(3, 4)$ e que tem centro sobre o eixo y .

Ex. 2.6 Fixado a , determine os dois valores de b para que a reta $y = ax + b$ seja tangente ao círculo de centro na origem e raio r .

Ex. 2.7 Uma circunferência de raio 5 é tangente à reta $3x - 4y - 1 = 0$ no ponto $(3, 2)$. Determine sua equação (duas soluções).

Ex. 2.8 Mostre analiticamente que nenhuma reta que passa pelo ponto $(-1, 5)$ pode ser tangente à circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$. Interprete o resultado

geometricamente.

Ex. 2.9 Determine a equação dos círculos que passam pelos seguintes conjuntos de pontos. Em cada caso, determine o centro e o raio e esboce o círculo.

- a) $(3, 4), (-1, 2), (-2, 4)$
- b) $(4, 2), (-2, 3), (-1, 6)$
- c) $(a, 0), (b, 0), (0, c)$

Ex. 2.10 Mostre que o plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ no ponto (a, b, c) tem equação $ax + by + cz = r^2$.

Ex. 2.11 Determine a equação da esfera que passa pelos pontos $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e cujo centro está no plano $x + y - z = 0$.

Ex. 2.12 Determine a esfera que tem centro na reta

$$r : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

e passa pelos pontos $(6, -1, 3)$ e $(0, 7, 5)$.

Ex. 2.13 Calcule a distância do ponto $(2, 3, 4)$ à esfera $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 + 4 = 0$.

Ex. 2.14 Determine a equação da esfera de centro $(3, 2, -2)$ que é tangente ao plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Ex. 2.15 Determine a equação da esfera cujo centro se encontra sobre o eixo X e que passa pelos pontos $(3, -4, 2)$ e $(6, 2, -1)$.

Ex. 2.16 A equação de uma esfera é $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$. Determine a equação da esfera concêntrica que é tangente ao plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Ex. 2.17 Determine os planos tangentes à esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ que são paralelos ao plano $4x - y + 3z = 2$.

Ex. 2.18 Determine as equações dos planos que contêm a reta r e são tangentes à esfera S :

$$r : \frac{x + 6}{2} = y + 3 = z + 1$$

$$\text{e } S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0.$$

7.3. Circunferência em coordenadas polares

Centrada na Origem O caso mais simples ocorre quando a circunferência está centrada na origem nesse caso a circunferência é o conjunto de pontos que distam uma constante a da origem ou seja a equação em coordenadas polares é

$$r = a.$$

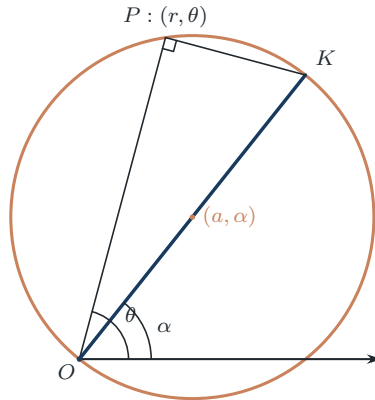
É fácil de ver que essa equação coincide com a em equação em coordenadas cartesianas. Observe que, em coordenadas cartesianas, $P = (x, y)$ pertence a tal círculo se e somente se: $x = a \cos \theta$ e $y = a \sin \theta$. Daí segue que:

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2.$$

Passando pela Origem Dada uma circunferência de raio a e passando pela origem. As coordenadas polares do centro dessa circunferência são (a, α) .

Considere o triângulo $\triangle OKP$. Como $\overline{OK}$ é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo vemos que $\triangle OKP$ é retângulo em P . Da definição de cosseno segue então:

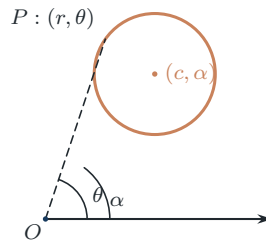
$$r = 2a \cos(\theta - \alpha).$$



Forma Geral Dado uma circunferência de centro (c, α) e raio a , usando a lei dos cossenos temos que:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha)$$

que é a equação da circunferência na forma geral.



Exercícios

Ex. 3.1 Mostre que, supondo $A > 0$, o centro do círculo de equação $r = A \cos \theta + B \sin \theta$ é

$$\left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2}, \arctg \frac{B}{A} \right)$$

Ex. 3.2 Mostre que a reta $r \sin \theta = 4$ é tangente ao círculo $r = 8 \cos \theta$.

Ex. 3.3 Mostre que a equação da tangente ao círculo

$$r = 2a \cos \theta$$

no ponto (r_1, θ_1) é:

$$r \cos(\theta - 2\theta_1) = 2a \cos^2 \theta_1$$

Ex. 3.4 Mostre que, para todos os valores de a , a reta

$$r \cos(\theta - \alpha) = a + r_1 \cos \alpha$$

é tangente ao círculo

$$r^2 - 2rr_1 \cos \theta + r_1^2 - a^2 = 0$$

7.4. Exercícios complementares

Para o exercício do triângulo. *Uma escolha conveniente de coordenadas para um triângulo genérico é*

$$A = (0, 0), \quad B = (0, a), \quad C = (b, c),$$

com $ab \neq 0$. Esta dica aparecia comentada na versão anterior e foi recuperada aqui.

Exercícios

Ex. 4.1 Considere o círculo

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

e a reta $3x - 4y = 20$. Determine se a reta é secante, tangente ou exterior ao círculo. No caso secante, determine o comprimento da corda.

Ex. 4.2 Determine o plano tangente à esfera

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

no ponto $P = (4, 2, 3)$.

Ex. 4.3 Escreva em coordenadas cartesianas o círculo polar

$$r = 6 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta$$

e determine o centro e o raio.

Ex. 4.4 O círculo de centro $(2, -1)$ e raio $\sqrt{5}$ passa pela origem. Encontre sua equação polar.

Cônicas

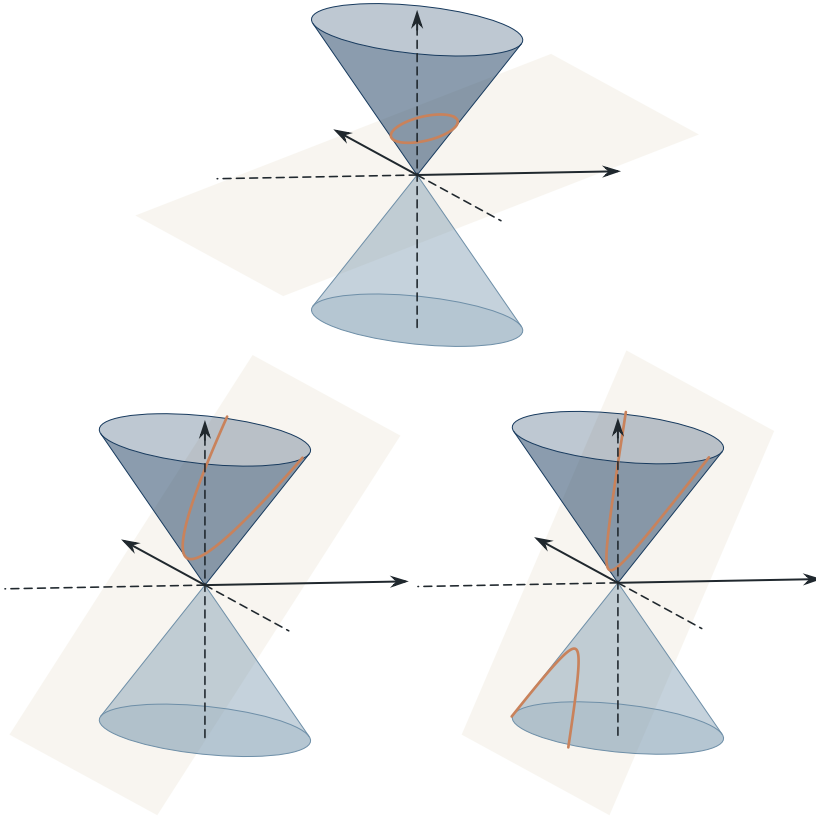
8.1. Introdução

As **curvas cônicas** ou **seções cônicas** são as curvas obtidas pela interseção de um cone com planos que não contenham o vértice desse cone.

Existem essencialmente três tipos de cônicas que podem ser obtidas a partir de um cone cuja reta geratriz faz ângulo α com o eixo desse cone:

- *parábola*: obtida pela interseção do cone com um plano que forma ângulo α com o eixo do cone;
- *elipse*: obtida pela interseção do cone com um plano que forma um ângulo $\theta > \alpha$ com o eixo do cone;
- *hipérbole*: obtida pela interseção do cone com um plano que forma um ângulo $\theta < \alpha$ com o eixo do cone.

Pode-se mostrar que o lugar geométrico de tais curvas num plano pode ser caracterizado por relações envolvendo a distância de seus pontos a seus focos e retas diretrizes como descrito a seguir (ver Seção 8.6). Assim, definimos:



Definição 8.1

Uma **elipse** $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 de eixo maior medindo $2a > \|\overrightarrow{F_1 F_2}\|$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual a $2a$. Ou seja, dados F_1 e F_2 , com $\|\overrightarrow{F_1 F_2}\| = 2c$, e um número $a > c$, dizemos que P é um ponto da elipse $\mathcal{E}$ se e somente se:

$$\|\overrightarrow{F_1 P}\| + \|\overrightarrow{F_2 P}\| = 2a. \quad (8.1)$$

Definição 8.2

Uma **hipérbole** $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 de eixo transversal medindo $2a < \|\overrightarrow{F_1 F_2}\|$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual a $2a$. Ou seja, dados F_1 e

F_2 , com $\|\overrightarrow{F_1 F_2}\| = 2c$, e um número $a < c$, dizemos que P é um ponto da hipérbole $\mathcal{H}$ se somente se:

$$\left| \|\overrightarrow{F_1 P}\| - \|\overrightarrow{F_2 P}\| \right| = 2a. \quad (8.2)$$

Definição 8.3

Uma **parábola** $\mathcal{P}$ de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias ao ponto F e a reta d são iguais. Ou seja, dados F e d , dizemos que P é um ponto da parábola $\mathcal{P}$ se somente se:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d). \quad (8.3)$$

8.2. Elipse

Conforme descrito na Definição 8.1, uma elipse $\mathcal{E}$ é o lugar geométrico formado por pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , é constante.

Nesta seção estudaremos a equação chamada **forma canônica da elipse**, que representa uma elipse alinhada com plano cartesiano e centrada em sua origem. Antes, porém, fixemos a terminologia básica envolvida no estudo de elipses.

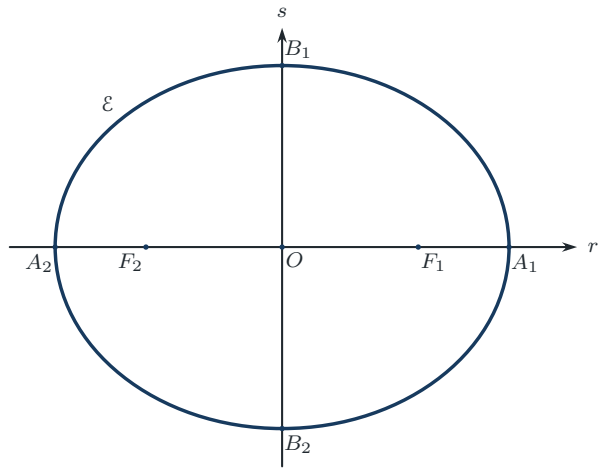


Figura 8.1.: Elipse

8.2.1. Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 descritos na Definição 8.1 são denominados **focos da elipse**. O segmento $\overline{F_1 F_2}$ de comprimento $2c$ é o **segmento focal da elipse** e $2c$ é a **distância focal da elipse**.
- A reta r contendo F_1 e F_2

é denominada **reta focal da elipse**.

- A interseção de $\mathcal{E}$ com r consiste de dois pontos A_1 e A_2 que são os **vértices da elipse sobre a reta focal**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ é o chamado **eixo focal da elipse** (ou **eixo maior da elipse**).
- O ponto médio $O \in r$ do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o **centro da elipse**;
- A reta s perpendicular a r por O é a **reta não focal da elipse**.
- A interseção de $\mathcal{E}$ com s consiste de dois pontos B_1 e B_2 que são os **vértices da elipse sobre a reta não focal**. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é o chamado **eixo não focal da elipse** (ou **eixo menor da elipse**).
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre $\mathcal{E}$ é denominado **corda da elipse**;
- Chamamos de **amplitude focal** o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da elipse e que seja perpendicular ao eixo focal desta. Notamos que existem duas dessas cordas, usualmente denominadas individualmente por *latus rectum*.

- A menor região retangular que contém a elipse é chamada **retângulo fundamental da elipse**.
- A menor coroa circular que contém a elipse é denominada **coroa fundamental da elipse**.

8.2.2. Equação da Elipse

Começemos nosso estudo da equação da elipse observando os dois exemplos abaixo descritos.

Exemplo 8.4.

Usando a mesma notação descrita na Subseção 8.2.1, consideremos num sistema de coordenadas cartesiano uma elipse de focos $F_1 = (0, 0)$ e $F_2 = (2, 1)$ e eixo focal medindo $2a = 4$.

Tomando $P = (x, y)$ a equação (8.1) fica:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = 4.$$

Vamos então manipular tal equação de modo a eliminar suas raízes quadradas.

Isolando o termo $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$ e elevando ao quadrado, obtemos:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 16 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2).$$

Simplificando e isolando $8\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$4x + 2y + 11 = 8\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Finalmente, elevando ao quadrado e simplificando a expressão obtida, chegamos a:

$$48x^2 + 60y^2 - 16xy - 88x - 44y - 121 = 0. \quad (8.4)$$

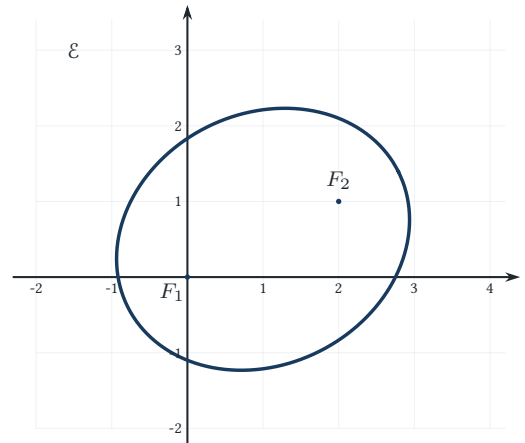


Figura 8.2.: Exemplo 8.4

Essa equação quadrática é, então, a representação cartesiana procurada da elipse $\mathcal{E}$.

Exemplo 8.5.

Considere agora, num sistema de coordenadas cartesiano, $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$ de modo que o eixo focal r fica alinhado com o eixo Ox e o centro O da elipse fica sobre a origem do sistema de coordenadas. Estudemos uma elipse de eixo focal medindo $2a = 10$. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}$.

Em coordenadas cartesianas, a equação (8.1) fica:

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10.$$

Vamos simplificar essa equação eliminando as raízes quadradas por manipulações algébricas.

Inicialmente, isolemos a raiz $\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$ e elevemos a igualdade obtida ao quadrado:

$$(x+4)^2 + y^2 = 100 + [(x-4)^2 + y^2] - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Simplificando tal equação chegamos e manipulando-a de modo a isolar o termo $20\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ ficamos com:

$$100 - 16x = 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2},$$

ou ainda:

$$5 - \frac{4}{5}x = \sqrt{(x-4)^2 + y^2},$$

Elevando esta igualdade ao quadrado chegamos a:

$$25 + \frac{16}{25}x^2 - 8x = x^2 + 16 - 8x + y^2.$$

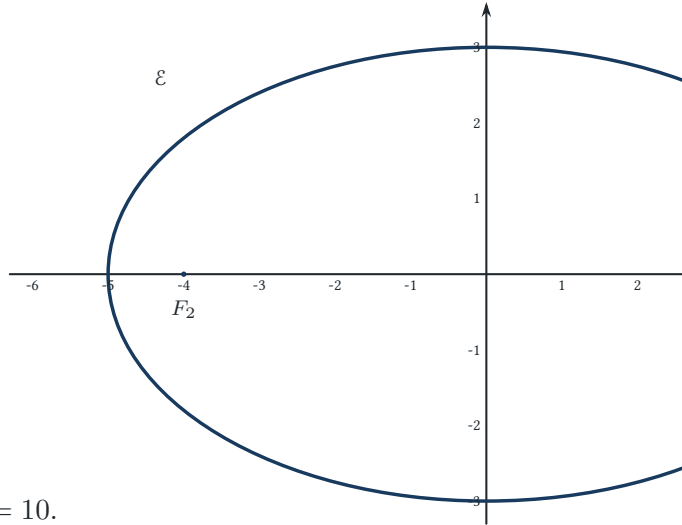


Figura 8.3.: Exemplo 8.5

Portanto temos:

$$\frac{9}{25}x^2 + y^2 = 9.$$

Finalmente, dividindo-a por 9, segue:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad (8.5)$$

que é a forma canônica da elipse $\mathcal{E}$.



Esses exemplos e os cálculos neles envolvidos sugerem que toda elipse pode ser representada no plano cartesiano por um **equação quadrática** da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes (que dependem da elipse a ser representada). Tal suposição prova-se de fato verdadeira (deixamos ao leitor interessado sua demonstração).

No entanto, é visível que a Equação (8.5) obtida no segundo exemplo é muito mais simples que a Equação (8.4) obtida no primeiro. Isso ocorre devido a uma melhor escolha, no Exemplo 8.5, do sistema de coordenadas usado.

Encontremos, então, a equação da elipse $\mathcal{E}$ num sistema de coordenadas adequado a $\mathcal{E}$.

Assuma que os focos F_1 e F_2 possuem coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ respectivamente. Tomando $P = (x, y)$. Da Equação (8.1) obtemos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

e logo $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados dessa expressão obtemos:

$$c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} + c^2 + x^2 + y^2$$

Simplificando temos que

$$a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrando ambos os lados da equação obtemos

$$\begin{aligned} a^2 (c^2 - 2cx + x^2 + y^2) &= (a^2 - cx)^2 \\ a^2 (c^2 - 2cx + x^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2 (c^2 - 2cx + x^2 + y^2) - (a^4 - 2a^2cx + c^2x^2) &= 0 \\ -a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 &= 0 \\ a^2 (a^2 - c^2) &= (a^2 - c^2) x^2 + a^2y^2 \end{aligned}$$

Substituindo $b^2 = (a^2 - c^2)$ temos

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2 chegamos finalmente a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Chegamos assim à seguinte proposição:

Proposição 8.6

Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e eixo maior medindo $2a$ tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.6)$$

onde b é tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

Tal equação é usualmente conhecida como a **forma canônica da elipse** (ou **equação reduzida da elipse**).

Os números a , b e c são conhecidos como **parâmetros geométricos da elipse**.

Observação 8.7

Se na dedução da equação da elipse tivéssemos adotado o sistema de coordenadas com os focos sobre o eixo y e a origem entre os focos, isto é o sistema com o eixo maior $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ sobre o eixo y e o eixo menor $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ sobre o eixo x , teríamos, no final, a equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Observação 8.8

Para uma elipse de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a > b$, é fácil ver que:

- O retângulo fundamental da elipse é a região retangular $R = \{(x, y) \in$

$$\mathbb{E}^2; x \in [-a, a], y \in [-b, b] \}.$$

- A coroa fundamental da elipse é a região $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

8.2.3. Esboço da Elipse

Considere uma elipse $\mathcal{E}$ de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a, b > 0$.

Observe inicialmente que, se um ponto $P = (x, y)$ está na elipse $\mathcal{E}$, também a ela pertencem os pontos $P' = (-x, y)$, $P'' = (x, -y)$ e $P''' = (-x, -y)$. Desse modo, basta para esboçarmos $\mathcal{E}$ basta estudarmos a elipse no primeiro quadrante do sistema de coordenadas e refletirmos tal esboço ao longo dos eixos Ox e Oy (que são eixos de simetria da elipse).

Além disso, isolando-se o parâmetro y da equação de $\mathcal{E}$ obtemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

donde observamos que para esboçarmos $\mathcal{E}$ no primeiro quadrante basta estudarmos o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : [0, a] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Observação 8.9

Note que para $x > a$, temos $(a^2 - x^2) < 0$ e, portanto, f não fica bem definida.

Como $f(0) = b$ e $f(a) = 0$ temos que dois dos vértices da elipse têm coordenadas $(0, b)$ e $(a, 0)$.

Além disso, temos que f é *decrecente*, já que, para $x_0, x_1 \in [0, a]$, temos:

$$\begin{aligned} x_0 < x_1 &\iff x_0^2 < x_1^2 \iff a^2 - x_0^2 > a^2 - x_1^2 \\ &\iff \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} > \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} \iff f(x_0) > f(x_1). \end{aligned}$$

O uso de cálculo diferencial nos permite concluir que o gráfico de f é *côncavo*, isto é fixos dois pontos P_0 e P_1 quaisquer sobre o gráfico de f , temos que o gráfico de f fica acima do segmento $\overline{P_0P_1}$.

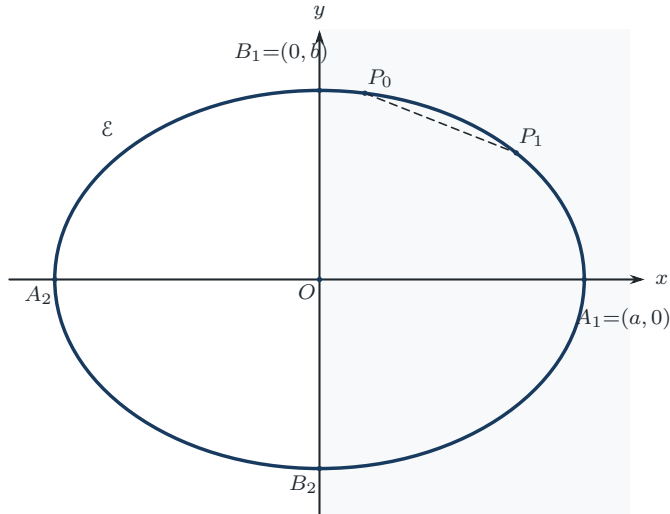


Figura 8.4.: Esboço da Elipse

A concavidade do gráfico de f decorre do fato de que a segunda derivada de f é dada por:

$$f''(x) = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}},$$

que é negativa para todo $x \in (-a, a)$.

Observação 8.10

Uma elipse pode ser facilmente desenhada com o auxílio de um barbante de comprimento $2a$. Basta para isso fixarmos as extremidades do barbante nos focos e traçarmos uma curva com o lápis apoiado (porém não preso) no barbante de modo a manter este sempre esticado.

8.2.4. Exemplos

Exemplo 8.11.

Determine a equação da elipse de focos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ e vértices $(0, 4)$ e $(0, -4)$.



Solução. Primeiramente notamos que temos uma elipse de focos no eixo Ox (pois a segunda coordenada dos focos é 0). Então, usando a mesma notação da Proposição 8.6, temos $c = 3$ e $b = 4$, e, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $a = 5$. Desse modo a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

que é uma elipse com vértices $A_1 = (5, 0)$, $A_2 = (-5, 0)$, $B_1 = (0, 4)$, $B_2 = (0, -4)$ e focos $F_1 = (3, 0)$ e $F_2 = (-3, 0)$.

**Exemplo 8.12.**

Determine a equação da elipse de focos $(0, 4)$ e $(0, -4)$ e eixo maior medindo 12.



Solução. Nesse exemplo temos uma elipse de focos no eixo Oy (pois a primeira coordenada dos focos é 0). Assim, usando a notação da Observação 8.15, temos $c = 4$ e $2a = 12$ e, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $b = 2\sqrt{5}$. Desse modo a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

que é uma elipse com vértices $A_1 = (0, 6)$, $A_2 = (0, -6)$, $B_1 = (2\sqrt{5}, 0)$, $B_2 = (-2\sqrt{5}, 0)$ e focos $F_1 = (0, 4)$ e $F_2 = (0, -4)$.

**Exemplo 8.13.**

Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de centro na origem e tal que um de seus vértices sobre a reta focal é $(0, 5)$. Sabendo que $\mathcal{E}$ passa pelo ponto $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$, determine a equação da elipse.



Solução. Nesse exemplo temos novamente uma elipse de focos no eixo Oy (nesse caso porque nos é informado que o centro da elipse está na origem e o ponto $(0, 5)$

sobre a reta focal). Assim, usando a notação da Observação 8.15, temos $a = 5$. Desse modo a equação procurada é do tipo:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

com $0 < b < 5$.

Usando agora que o ponto $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$ pertence a $\mathcal{E}$ temos que:

$$\frac{(6\sqrt{5}/5)^2}{b^2} + \frac{(\sqrt{5})^2}{25} = 1.$$

Resolvento tal equação (de incógnita b) obtemos $b = 3$. Logo a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

◁

8.3. Hipérbole

De acordo com a Definição 8.2, uma hipérbole $\mathcal{H}$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$ (onde $2a < \|\overrightarrow{F_1 F_2}\|$).

Desenvolveremos nesta seção a equação tida como a **forma canônica da hipérbole**, que descreve uma hipérbole cujos focos estão em um dos eixos coordenados simetricamente dispostos em relação à origem. Assim como fizemos para a elipse, fixemos primeiramente a terminologia básica envolvida no estudo de hipérboles.

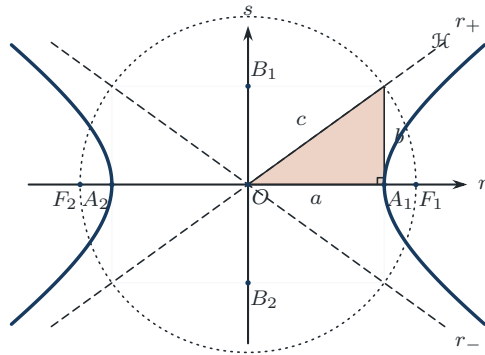


Figura 8.5.: Hipérbole

8.3.1. Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 descritos na Definição 8.2 são denominados **focos da hipérbole**. O segmento $\overline{F_1 F_2}$ de comprimento $2c$ é o **segmento focal da**

hipérbole e $2c$ é a **distância focal da hipérbole**.

- A reta r contendo F_1 e F_2 é denominada **reta focal da hipérbole**.
- A interseção de $\mathcal{H}$ com r consiste de dois pontos A_1 e A_2 que são os **vértices da hipérbole sobre a reta focal**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ é o chamado **eixo transverso da hipérbole**.
- O ponto médio $O \in r$ do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o **centro da hipérbole**;
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ (onde $c^2 = a^2 + b^2$), cujos extremos B_1 e B_2 estão simetricamente localizados em relação ao centro O da hipérbole sobre a reta s perpendicular a r por O , é denominado **eixo conjugado da hipérbole**;
- Os números a, b e c são conhecidos como **parâmetros geométricos da hipérbole**.
- As retas r_- e r_+ pelo centro O de inclinação $-b/a$ e b/a respectivamente são as **assíntotas da hipérbole** (ver Subseção 8.3.3);
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre $\mathcal{H}$ é denominado **corda da hipérbole**;
- Chamamos de **amplitude focal da hipérbole** o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da hipérbole e que seja perpendicular à reta focal desta.
- O **retângulo fundamental da hipérbole** é a região retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; x \in [-a, a], y \in [-b, b]\}$.
- Uma hipérbole é dita **equilátera** quando os parâmetros geométricos a e b dessa hipérbole são iguais.

8.3.2. Equação da Hipérbole

Escrevendo a equação (8.2), apresentada na Definição 8.2, e manipulando-a algébricamente de modo análogo ao que fizemos para a elipse chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 8.14

Uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e eixo transversal medindo $2a$ tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.7)$$

onde b é tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

Tal equação é usualmente conhecida como a **forma canônica da hipérbole** (ou **equação reduzida da hipérbole**).

Observação 8.15

Se na dedução da equação da hipérbole tivéssemos partido de focos localizados sobre o eixo Oy (ou seja $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$), teríamos chegado à equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

8.3.3. Assíntotas**Definição 8.16**

Uma reta r de equação $y = mx + n$ é dita ser uma **assíntota** de uma dada função $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ em $+\infty$ ($a \in \mathbb{R}$) se a distância entre o ponto $(x, f(x))$ do gráfico e a reta r tende a zero quando x vai para infinito, isto é se:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d(P, r) = 0, \quad (8.8)$$

onde $P = (x, f(x))$. Analogamente podemos definir assíntota de f em $-\infty$.

A proposição abaixo mostra que hipérboles admitem duas assíntotas.

Proposição 8.17

As retas r_+ e r_- de equações

$$r_+ : y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad r_- : y = -\frac{b}{a}x$$

são **assíntotas da hipérbole** $\mathcal{H}$ de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração. De fato, para uma tal hipérbole $\mathcal{H}$, temos que $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se e somente se $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Então temos:

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \\ &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|} \\ &= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|} \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm\infty, \pm\infty)} d(P, r_+) = 0.$$

Analogamente, temos também que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm\infty, \mp\infty)} d(P, r_-) = 0.$$

■

Observação 8.18

Escrevendo os dois ramos como

$$f_+(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad f_-(x) = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

temos: f_+ aproxima r_+ quando $x \rightarrow +\infty$ e r_- quando $x \rightarrow -\infty$; para f_-

ocorre o contrário. Essa formulação torna precisa a afirmação de que as duas retas são assíntotas da hipérbole.

8.3.4. Esboço da Hipérbole

Seja uma Hipérbole $\mathcal{H}$ de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a, b > 0$.

Como na elipse observamos que, se um ponto $P = (x, y)$ está na hipérbole $\mathcal{H}$, também a ela pertencem os pontos $P' = (-x, y)$, $P'' = (x, -y)$ e $P''' = (-x, -y)$. Assim, a hipérbole $\mathcal{H}$ é *simétrica* em relação aos eixos Ox e Oy .

Além disso, isolando-se o parâmetro y da equação de $\mathcal{H}$ obtemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Estudemos então o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : [a, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Observação 8.19

Observe que, no caso da hipérbole, para $x \in [0, a)$, temos $(x^2 - a^2) < 0$ e, portanto, f não fica bem definida.

Note agora que $f(a) = 0$ nos dá o vértice $A_1 = (a, 0)$ da hipérbole. Além disso, temos que f é *crescente*, já que, para $x_0, x_1 \in [a, +\infty)$, temos:

$$\begin{aligned} x_0 < x_1 &\iff x_0^2 < x_1^2 \iff x_0^2 - a^2 < x_1^2 - a^2 \\ &\iff \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2} < \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2} \iff f(x_0) < f(x_1). \end{aligned}$$

Cálculo diferencial nos permite concluir que o gráfico de f também é *côncavo* no caso da hipérbole.

A concavidade do gráfico de f decorre do fato de que a segunda derivada de f é dada por:

$$f''(x) = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}},$$

que é negativa para todo $x \in (a, +\infty)$.

Finalmente, sabemos que $f(x)$ tem a reta $r_+ : y = \frac{b}{a}x$ como *assíntota* e é tal que $f(x) < \frac{b}{a}x$ para todo $x \in [a, +\infty)$. Desse modo sabemos que $f(x)$ se aproxima assintoticamente de r_+ , por baixo dessa reta, quando x tende a $+\infty$.

8.3.5. Exemplos

Exemplo 8.20.

Uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem vértices nos pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$, e um foco no ponto $(0, -5)$. Obtenha a equação da hipérbole e de suas assíntotas.



Solução. Observamos que $\mathcal{H}$ é uma hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy . Assim sua equação é do tipo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

com $c^2 = a^2 + b^2$ e $2c$ a distância focal.

Como $\mathcal{H}$ tem vértices $(0, 4)$ e $(0, -4)$ segue que $a = 4$. Como um dos focos de $\mathcal{H}$ é $(0, -5)$, segue que $c = 5$. Logo, a partir da igualdade $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $b = 3$. Assim a equação de $\mathcal{H}$ é:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

As assíntotas de $\mathcal{H}$ são $r_+ : x = (b/a)y$ e $r_- : x = -(b/a)y$, ou seja:

$$r_+ : x = \left(\frac{3}{4}\right)y \quad r_- : x = -\left(\frac{3}{4}\right)y.$$



Exemplo 8.21.

Uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem os focos num dos eixos coordenados e centro na origem. Sabendo que uma das assíntotas de $\mathcal{H}$ é a reta $3x - 2y = 0$ e que $P = (4\sqrt{2}, 6) \in \mathcal{H}$, determine a equação de $\mathcal{H}$.

**Solução.**• **Focos no eixo Ox :**

Seja $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da hipérbole procurada. Como a reta $3x - 2y = 0$, que é também a reta de equação $y = \frac{3}{2}x$, é uma das assíntotas obtemos:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$

ou seja $b = \frac{3}{2}a$.

Usando que $P \in \mathcal{H}$ obtemos:

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{6^2}{b^2} = 1.$$

Usando que $b = \frac{3}{2}a$ e simplificando algebricamente a igualdade chegamos então a:

$$\frac{16}{a^2} = 1.$$

Portanto $a^2 = 16$, ou seja $a = 4$. Usando novamente que $b = \frac{3}{2}a$ obtemos então $b = 6$. Logo chegamos à equação:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

• **Focos no eixo Oy :**

Seja agora $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ a equação da hipérbole procurada. Como a reta $3x - 2y = 0$, que é também a reta de equação $x = \frac{2}{3}y$, é uma das assíntotas obtemos:

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3},$$

ou seja $b = \frac{2}{3}a$.

Usando que $P \in \mathcal{H}$ obtemos:

$$\frac{6^2}{a^2} - \frac{(4\sqrt{2})^2}{b^2} = 1.$$

Usando que $b = \frac{2}{3}a$ e simplificando a equação chegamos a:

$$-\frac{36}{a^2} = 1.$$

Como $a^2 > 0$ observamos que não existe a tal que a igualdade acima seja satisfeita, ou seja, não existe hipérbole com focos no eixo Oy contendo P e com assíntota $3x - 2y = 0$.

Conclusão: A única hipérbole cuja equação resolve o problema é:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1.$$



Exemplo 8.22.

Encontre o centro, os focos e vértices da hipérbole de equação:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0.$$



Solução. Tentaremos aqui manipular a equação dada de forma a obter uma equação da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

que representa uma hipérbole de centro $C = (x_0, y_0)$, focos $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 - c, y_0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, e vértices $V_1 = (x_0 + a, y_0)$ e $V_2 = (x_0 - a, y_0)$.

Começemos completando quadrados escrevendo:

$$(9x^2 - 18x + 9) - (4y^2 + 8y + 4) - 9 + 4 - 31 = 0.$$

Portanto temos:

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 36.$$

E, finalmente:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Tal equação representa uma hipérbole de centro $C = (1, -1)$ de parâmetros $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{13}$. Logo seus focos são $F_1 = (1 + \sqrt{13}, -1)$ e $F_2 = (1 - \sqrt{13}, -1)$, e seus vértices são $V_1 = (3, -1)$ e $V_2 = (-1, -1)$.



8.4. Parábola

Conforme descrito na Definição 8.3, uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias a F e d são iguais.

Nesta seção estudaremos **funções quadráticas de uma variável**, cujos gráficos representam parábolas com retas diretrizes paralelas aos eixos coordenados. Em particular veremos a chamada **forma canônica da parábola** que

é a equação que representa uma parábola com vértice na origem, foco sobre um dos eixos coordenados e reta diretriz paralela ao outro eixo coordenado.

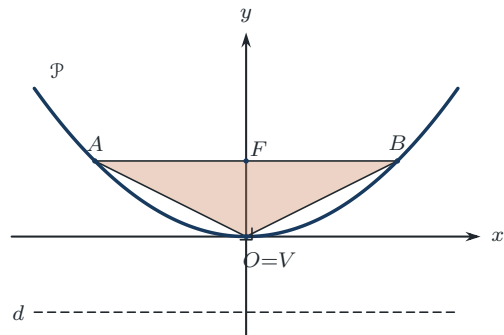


Figura 8.6.: Parábola

8.4.1. Terminologia

- O ponto F descrito na Definição 8.3 é denominado **foco da parábola**.
- A reta d , também descrita na Definição 8.3 é denominada **diretriz da parábola**.
- A distância $2p$ entre o foco F e a reta diretriz d da parábola é chamada **parâmetro da parábola**.
- O ponto V de interseção da perpendicular à d por F com a parábola é o **vértice da parábola**;
- A reta perpendicular a d por F é o **eixo de simetria da parábola**.

- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre $\mathcal{P}$ é denominado **corda da parábola**;
- Tomando A e B os extremos da corda que contém F e é paralela a diretriz d , obtemos o triângulo $\triangle VAB$ denominado **triângulo fundamental da parábola**.

8.4.2. Equação da Parábola

Para uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox e vértice na origem do sistema de coordenadas vale o seguinte resultado:

Proposição 8.23

Uma parábola $\mathcal{P}$ de foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $d : y = -p$ ($p \neq 0$) tem equação

$$y = \left(\frac{1}{4p} \right) x^2. \quad (8.9)$$

*Tal equação é usualmente conhecida como a **forma canônica da parábola** (ou **equação reduzida da parábola**).*

Demonstração. Seja $P = (x, y)$ um ponto da parábola. A partir da equação $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$ obtemos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Simplificando e isolando y chegamos então a:

$$y = \left(\frac{1}{4p} \right) x^2.$$



Observação 8.24

Para uma parábola de foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz vertical $d : x = -p$ uma demonstração análoga nos levaria a equação:

$$x = \left(\frac{1}{4p}\right)y^2, \quad (8.10)$$

a qual também é conhecida como forma canônica da parábola.

No caso particular da parábola, porém, é importante destacar sua descrição como gráfico de funções quadráticas de uma variável real.

Definição 8.25

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **quadrática** quando existem a, b, c reais com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sobre funções quadráticas vale o seguinte resultado:

Proposição 8.26

O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com:

- foco:

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta - 1}{4a}\right),$$

- diretriz:

$$d : y = -\frac{\Delta + 1}{4a},$$

- vértice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Observação 8.27

O gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o lugar geométrico dado pela equação $y = f(x)$. Logo, pela Proposição 8.26, $y = ax^2 + bx + c$ é a equação de uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox .

É análoga a demonstração da proposição acima o fato de que $x = ay^2 + by + c$ é equação de uma parábola com:

- foco:

$$F = \left(-\frac{\Delta - 1}{4a}, -\frac{b}{2a} \right),$$

- diretriz:

$$d : x = -\frac{\Delta + 1}{4a},$$

- vértice:

$$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right),$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Observação 8.28

É importante notar que as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, com $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$ para algum $\lambda \neq 0$, têm mesmas raízes, ou seja $f(x) = 0$ se e somente se $g(x) = 0$, no entanto seus gráficos são distintos e, portanto, representam parábolas diferentes.

A Proposição 8.26 segue imediatamente dos Lemas 8.29 e 8.30, abaixo demonstrados.

Lema 8.29

O gráfico de uma função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é uma parábola com:

- foco:

$$F = \left(m, k + \frac{1}{4a} \right),$$

- *diretriz*:

$$d : y = k - \frac{1}{4a},$$

- *vértice* $V = (m, k)$.

Demonstração. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do gráfico de f (de modo que $y = a(x - m)^2 + k$). Tome $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e $d : y = k - \frac{1}{4a}$. Mostremos que $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$ (ver Definição 8.3).

Por um lado temos:

$$\overrightarrow{FP} = \left(x - m, a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right).$$

Portanto segue:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{FP}\| &= \sqrt{(x - m)^2 + a^2(x - m)^4 - 2a(x - m)^2 \frac{1}{4a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2(x - m)^4 + 2a(x - m)^2 \frac{1}{4a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} \\ &= \left|a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right|. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$d(P, d) = \left|a(x - m)^2 + k - \left(k - \frac{1}{4a}\right)\right| = \left|a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Logo, vale $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$.

Como o vértice da parábola é o ponto médio do menor segmento que liga F à d é fácil ver que $V = (m, k)$.



Lema 8.30

Vale a igualdade:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

Essa forma de escrever a função quadrática é conhecida como **forma canônica** do trinômio de segundo grau.

Demonstração. De fato:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Completando quadrado de modo a obter $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ temos:

$$\begin{aligned} a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right). \end{aligned}$$

■

Observação 8.31

A recíproca também é verdadeira. Se $F = (m, n)$ e a diretriz é $d : y = p$, com $n \neq p$, então o vértice é

$$V = \left(m, \frac{n+p}{2} \right).$$

Comparando com o Lema 8.29, obtemos

$$a = \frac{1}{2(n-p)}.$$

Logo a parábola é o gráfico de

$$y = a(x - m)^2 + \frac{n + p}{2},$$

ou, na forma $y = ax^2 + bx + c$,

$$a = \frac{1}{2(n - p)}, \quad b = -\frac{m}{n - p}, \quad c = \frac{m^2}{2(n - p)} + \frac{n + p}{2}.$$

8.4.3. Esboço da Parábola

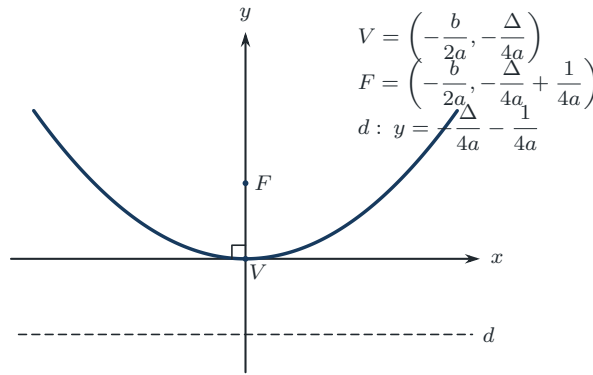


Figura 8.7.: Vértice, foco e diretriz de uma parábola com eixo vertical.

O esboço da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ (ou gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$) pode ser facilmente estudado a partir da forma canônica do trinômio (Lema 8.30):

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

Fixemos, para estudo, $a > 0$. Observamos que f tem seu *mínimo* no ponto onde $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, ou seja quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Além disso, para $-\frac{b}{2a} \leq x_1 < x_2$ temos que:

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a} \right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a} \right)^2,$$

donde segue que $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja f é *crescente* em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Analogamente vemos que f é *decrecente* em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Um pouco de cálculo diferencial nos permite concluir que, para $a > 0$, o gráfico de f é **convexo**, isto é fixos dois pontos P_0 e P_1 quaisquer sobre o gráfico de f , temos que o gráfico de f fica abaixo do segmento $\overline{P_0P_1}$.

A convexidade do gráfico de f decorre do fato de que a segunda derivada de f é dada por:

$$f''(x) = 2a > 0.$$

Finalmente, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, podemos obter as raízes de f facilmente igualando a forma canônica do trinômio e isolando o parâmetro x , obtendo assim a **Fórmula de Bhaskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observação 8.32

Se $a < 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem seu máximo em $x = -\frac{b}{2a}$, é decrescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ e crescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, tem gráfico côncavo e tem suas raízes dadas pela (mesma) Fórmula de Bhaskara (quando $\Delta > 0$).

8.4.4. Exemplos

Exemplo 8.33.

Determine a equação da parábola de foco $F = (1, 2)$ e reta diretriz $r : y = 4$.



Solução. Seja $P = (x, y)$ um ponto da parábola. A equação $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, r)$ em coordenadas fica:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = |y-4|.$$

Elevando essa igualdade ao quadrado obtemos:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = y^2 - 8y + 16.$$

Isolando então o parâmetro y chegamos à:

$$y = \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{11}{4}\right).$$

◀

Exemplo 8.34.

Considere uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem e com o eixo Ox como reta focal. Suponha que o ponto $(3, -6)$ pertença à $\mathcal{P}$. Determine a equação de $\mathcal{P}$, seu foco F e reta diretriz d .

◀

Solução. Sabemos que $\mathcal{P}$ é uma parábola de parâmetro $2p$ com equação da forma:

$$x = \pm \left(\frac{1}{4p}\right)y^2.$$

Como a primeira coordenada do ponto $(3, -6)$ é positiva temos:

$$\mathcal{P} : x = + \left(\frac{1}{4p}\right)y^2.$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(3, -6)$ na equação acima chegamos à $p = 3$. Logo temos:

$$\mathcal{P} : x = \left(\frac{1}{12}\right)y^2.$$

Tal parábola tem, assim, foco $F = (3, 0)$ e reta diretriz $d : x = -3$.

◀

Exemplo 8.35.

Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Escreva f na forma quadrática canônica e a partir de tal determine suas raízes. Determine as coordenadas do vértice, foco e a equação da reta diretriz da parábola que é gráfico de f .

◀

Solução. Completando quadrado obtemos $f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$ que é a forma canônica de f .

Igualando a forma canônica a zero chegamos a:

$$(x - 3)^2 = 1.$$

Portanto temos $x - 3 = \pm 1$ ou ainda $x = 3 \pm 1$. Logo $x = 2$ e $x = 4$ são as raízes de f .

O vértice da parábola que é gráfico de f , ocorre no ponto onde f é mínimo, ou seja em $x = 3$. Logo as coordenadas do vértice são $(3, -1)$.

Claramente o eixo de simetria da parábola em questão é paralelo ao eixo Oy . Suponhamos então que o foco da parábola tenha coordenadas $F = (3, -1 + c)$ e a diretriz tenha equação $d : y = -1 - c$ (Note que o vértice da parábola dista o mesmo do foco e da diretriz da parábola).

Considere um ponto P qualquer da parábola diferente do vértice. Tome por exemplo $P = (0, 8)$. Devemos ter $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$.

Por um lado, temos então $\overrightarrow{FP} = (-3, 9 - c)$ e:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \sqrt{9 + (9 - c)^2}.$$

Por outro lado:

$$d(P, d) = 8 - (-1 - c) = 9 + c.$$

Deve valer então:

$$9 + (9 - c)^2 = (9 + c)^2.$$

Portanto temos $c = (1/4)$.

Logo $F = (3, -3/4)$ e $d : y = -5/4$.



8.5. Excentricidade

Proposição 8.36

Sejam $\eta > 0$, $\eta \neq 1$ e $c > 0$. Tome $F = (c, 0)$. Tome r a reta de equação $x = c/\eta^2$ (logo paralela ao eixo Oy).

Então, se $P = (x, y)$ satisfaz a igualdade

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \eta d(P, r), \quad (8.11)$$

temos que:

- se $0 < \eta < 1$, então P pertence à elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $a = c/\eta$ e b tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

- se $\eta > 1$, então P pertence à hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $a = c/\eta$ e b tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

Demonstração. Escrevendo a equação (8.11) em coordenadas cartesianas temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \eta \left| x - \frac{c}{\eta^2} \right|.$$

Elevando essa equação ao quadrado e manipulando algebricamente o resultado facilmente chegamos na igualdade:

$$x^2 (1 - \eta^2) + y^2 = c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right).$$

Dividindo tal equação por $c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right)$ obtemos:

$$\frac{x^2}{c^2/\eta^2} + \frac{y^2}{c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right)} = 1.$$

Então, para $0 < \eta < 1$, observamos que $c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) > 0$. Tomando então $a^2 = c^2/\eta^2$ e $b^2 = c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right)$ (de modo que $a^2 = b^2 + c^2$) temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Caso $\eta > 1$ temos que $c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) < 0$. Tomando $a^2 = c^2/\eta^2$ e $b^2 = -c^2 \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right)$ (de modo que $c^2 = a^2 + b^2$) segue:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Proposição 8.37

Sejam $\eta = 1$ e $F = (c, 0)$. Tome r a reta de equação $x = -c$.
Então, se $P = (x, y)$ satisfaz a igualdade

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \eta d(P, r), \quad (8.12)$$

temos que:

$$y^2 = 4cx.$$

Demonstração. Escrevendo a equação (8.12) em coordenadas cartesianas temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = (c + x).$$

Elevando essa equação ao quadrado e manipulando algebricamente o resultado facilmente obtemos:

$$y^2 = 4cx.$$

■

Observação 8.38

A reta r e o ponto F descritos nas proposições 8.36 e 8.37 são denominados respectivamente **reta diretriz** e **foco** da cônica em questão.

O parâmetro η , que aparece em ambas as proposições, é denominado **excentricidade** da cônica.

Observação 8.39

É fácil mostrar que as recíprocas das proposições acima são válidas, ou seja:

- Se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

então, tomando $c > 0$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$, $\eta = c/a$ (note $0 < \eta < 1$), $F = (c, 0)$ e $r : x = c/\eta^2$ temos que P satisfaz a equação (8.11).

- Se $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

então, tomando $c > 0$ tal que $c^2 = a^2 + b^2$, $\eta = c/a$ (note $\eta > 1$), $F = (c, 0)$ e $r : x = c/\eta^2$ temos que P satisfaz a equação (8.11).

- Se $P = (x, y)$ é um ponto da parábola de equação:

$$y^2 = 4cx,$$

então, tomando $\eta = 1$, $F = (c, 0)$ e $r : x = -c$ temos que P satisfaz a equação (8.12) (que é a mesma que a equação (8.11)).

8.5.0.1. Excentricidade e a forma de uma cônica

A excentricidade η de uma cônica é usualmente usada para estudar o formato das cônicas.

No caso da elipse, quanto mais η for próximo à 0 maior a “semelhança” da elipse com um círculo. De fato, dividindo $a^2 = b^2 + c^2$ por a^2 , teríamos que $(b/a)^2 = 1 - \eta^2$. Logo para η pequeno (b/a) estaria próximo de 1. Assim, a e b seriam aproximadamente iguais. Tomando $b = a$ teríamos então a equação do círculo: $x^2 + y^2 = a^2$.

Para $\eta < 1$ próximo de 1 teríamos por outro lado que (b/a) seria próximo de 0, ou seja, b seria muito menor que a , o que nos levaria a uma elipse bem alongada ao longo do eixo Ox .

Na hipérbole, por sua vez, se $\eta > 0$ estiver perto de 1 teremos (b/a) próximo de 0, pois dividindo $c^2 = a^2 + b^2$ por a^2 obtemos $\eta^2 = 1 + (b/a)^2$. Isso implica que as assíntotas da hipérbole tem inclinação próxima a 0, ou seja, a medida que η fica mais perto de 1 as hipérboles ficam mais próximas do eixo Ox .

Por outro lado, a medida que η tende à $+\infty$ temos que (b/a) também tende a $+\infty$, ou seja, a inclinação das assíntotas da hipérbole crescem de modo que as hipérboles se aproximam do eixo Oy .

Em geometria, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se pode-se obter uma a partir da outra pela composição de isometrias (translação, rotação, reflexão) e homotetias (fixos centro O e razão k , uma homotetia leva P em P' pela relação $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$).

Sobre a semelhança das cônicas valem o seguinte resultado:

Proposição 8.40

Se duas cônicas têm mesma excentricidade então elas são semelhantes, em particular todas as parábolas são semelhantes entre si.

Demonstração. Consideraremos apenas as cônicas cujas equações estão na sua forma canônica (pois, como veremos no capítulo ??, todas as cônicas podem ser transformadas na forma canônica por rotações e translações).

Considere duas elipses $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ de equações:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\mathcal{E}' : \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Se ambas têm a mesma excentricidade, então $b/a = b'/a'$. Portanto

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} > 0.$$

Considere a homotetia $h(x, y) = (kx, ky)$. Se $P = (x, y) \in \mathcal{E}$, então

$$\frac{(kx)^2}{a'^2} + \frac{(ky)^2}{b'^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de modo que $h(P) \in \mathcal{E}'$.

A semelhança de hipérboles de mesma excentricidade segue de modo análogo.

No caso de duas parábolas $\mathcal{P} : y = ax^2$ e $\mathcal{P}' : y = a'x^2$, tome $k = (a/a')$. Daí se $P = (x, y)$ está em $\mathcal{P}$ temos que vale $y = ax^2$. Por outro lado tomando a homotetia $h(x, y) = (kx, ky)$ temos:

$$a'(kx)^2 = a' \left(\frac{a}{a'} \right)^2 x^2 = \left(\frac{a}{a'} \right) ax^2 = ky.$$

■

8.6. Construções de Dandelin

Elipse

equação:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com $\eta = 1$, onde F é o foco da parábola, r a sua diretriz e X um ponto qualquer da cônica.

Considere a esfera simultaneamente tangente interna ao cone e tangente ao plano π . Seja γ o plano que contém os pontos de tangência da esfera com o cone. Afirmamos que o ponto de tangência da esfera com o plano π é o foco da parábola e que a reta r obtida pela interseção de π e γ é a reta diretriz da parábola.

Seja X um ponto qualquer da parábola. Seja C a interseção da reta $\overrightarrow{OX}$ (uma geratriz no cone) com γ . Considere B a projeção ortogonal de X em γ e D o ponto na diretriz $r = \pi \cap \gamma$ tal que o triângulo $\triangle XBD$ se encontre num plano ortogonal a π . Afirmamos que qualquer que seja X , ponto da parábola, os triângulos $\triangle XBC$ e $\triangle XBD$ são congruentes.

Observação 8.41

Cuidado não confundir sua intuição com a Figura 8.9 que é apenas uma projeção no plano de uma figura tridimensional. O triângulo $\triangle XBC$ não está contido no plano da figura desenhada no papel (ele “entra no papel”).

A congruência dos triângulos segue do fato de que os ângulos α, β, θ e Φ são todos congruentes (por quê?), $\widehat{XBC} = \widehat{XBD} = \frac{\pi}{2}$ e $\overline{XB}$ é um lado comum a ambos os triângulos (Congruência “ALA”).

Observe assim que $\|\overrightarrow{XC}\| = \|\overrightarrow{XD}\|$. Mas $\|\overrightarrow{XD}\| = d(X, r)$ e $\|\overrightarrow{XC}\| = \|\overrightarrow{XF}\|$, onde F é o foco da parábola (pois $\overline{XC}$ e $\overline{XF}$ são tangentes a esfera em C e F). Logo:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com $\eta = 1$.

Exercícios

Ex. 6.1 Prove que a curva (elipse) formada pela interseção de um cone de ângulo de abertura 2α com um plano π que faz um ângulo $\theta > \alpha$ com o eixo do cone satisfaz a equação

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com $\eta < 1$, onde F é o foco da elipse e r a sua diretriz.

Considere, como no caso da parábola, a esfera simultaneamente tangente internamente ao cone e tangente ao plano π (esfera de Dandelin).

- Determine o foco F e a diretriz r da elipse por uma construção análoga à usada para a parábola;
- Considere X e X' dois pontos da elipse. Defina os pontos B, C e D como no caso da parábola e defina B', C' e D' analogamente a partir de X' ;
- Mostre que os seguintes triângulos são semelhantes:

$$\begin{aligned}\triangle XBD &\simeq \triangle X'B'D' \\ \triangle XBC &\simeq \triangle X'B'C'\end{aligned}$$

- Mostre que

$$\frac{\|\overrightarrow{XC}\|}{\|\overrightarrow{XD}\|} = \frac{\|\overrightarrow{X'C'}\|}{\|\overrightarrow{X'D'}\|} = \eta,$$

onde η é uma constante real;

- Conclua que

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com $\eta < 1$.

Ex. 6.2 Mostre que a curva (hipérbole) formada pela interseção de um cone de ângulo de abertura 2α com um plano π que faz um ângulo $\theta < \alpha$ com o eixo do cone satisfaz a equação

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com $\eta > 1$, onde F é o foco da hipérbole e r a sua diretriz.

Ex. 6.3 Mostre, usando as esferas de Dandelin, que os pontos X da hipérbole satisfazem a equação

$$\left| \|\overrightarrow{F_1X}\| - \|\overrightarrow{F_2X}\| \right| = k,$$

onde F_1 e F_2 são os focos da hipérbole e k uma constante real.

8.7. Cônicas em Coordenadas Polares

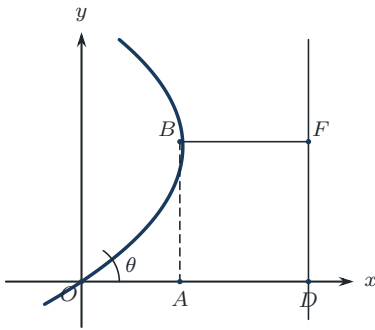


Figura 8.10.: Cônica: coordenadas polares

Considere a cônica de equação $\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, l)$. Consideremos agora coordenadas polares com a origem O localizada em F e com o eixo polar perpendicular a diretriz l da cônica.

Suponha que a distância entre a diretriz l e o foco F é uma dada constante p e que a cônica está localizada, em relação a l , no mesmo lado de F , como na Figura 8.10. É fácil ver que no sistema de coordenadas acima descrito $\|\overrightarrow{FX}\| = r$ e $d(X, l) = (p - r \cos \theta)$, donde temos:

$$r = \eta(p - r \cos \theta).$$

Isolando r segue que:

$$r = \frac{\eta p}{1 + \eta \cos \theta}$$

Suponha agora que a cônica está localizada, em relação a l , no lado oposto a F , como na Figura 8.11. A equação $\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, l)$, torna-se então:

$$r = \eta(r \cos \theta - p).$$

Portanto segue:

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \theta - 1}.$$

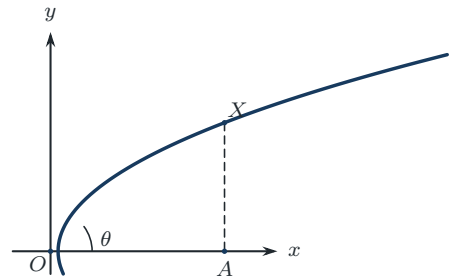


Figura 8.11.: Cônica: coordenadas polares

Observe no entanto que, como r é positivo, para que a equação acima represente um lugar geométrico não vazio devemos ter $\eta > 1$, ou seja, a cônica deve ser uma hipérbole.

Temos então:

Teorema 8.42

Considere uma cônica com excentricidade η , foco F na origem e com uma diretriz l distando p de F e perpendicular ao eixo polar Ox . Se $0 < \eta \leq 1$, a cônica é uma elipse ($\eta \in (0, 1)$) ou uma parábola ($\eta = 1$), e todo ponto da curva está localizado no mesmo semi-plano em relação a l que F . Nesse caso a cônica tem equação:

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \theta + 1}. \quad (8.13)$$

Se $\eta > 1$, a curva é uma hipérbole com ramos em ambos os lados de l . O ramo à esquerda de l satisfaz a Equação 8.13 e o ramo à direita de l satisfaz:

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \theta - 1}. \quad (8.14)$$

8.8. Cônicas e a Trajetória dos Planetas

Nesta seção mostraremos, a partir das leis de Newton, que a trajetória de planetas sujeitos apenas à força gravitacional exercida por um sol é uma cônica. Tal trajetória será uma elipse, parábola ou hipérbole dependendo da velocidade inicial do planeta. A prova que fazemos aqui foi fortemente inspirada na demonstração das leis de Kepler apresentada no livro *Calculus - Volume I* de Tom Apostol ([1]).

Assim, suponha um sol e um planeta de massas M e m , respectivamente.

A segunda lei de Newton relaciona a força resultante $\mathbf{F}$ e a aceleração $\mathbf{a}$ por:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (8.15)$$

Denotando por $\mathbf{r}$ o vetor que liga o sol ao planeta, por $\mathbf{u}_r$ o versor de $\mathbf{r}$ e por r a norma de $\mathbf{r}$, a lei universal da gravitação afirma que a força exercida pelo sol no planeta obedece:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}_r, \quad (8.16)$$

onde G é a constante gravitacional.

A partir das equações (8.15) e (8.16) temos:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{u}_r. \quad (8.17)$$

Mostremos inicialmente que a trajetória do planeta está contida num plano fixo. Esse plano contém os vetores posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v}$ e é perpendicular ao vetor

momento angular específico $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Observe, para isso, que o vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é constante:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Denotemos $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ por $\mathbf{c}$.

Como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$ segue que o vetor posição é sempre perpendicular a $\mathbf{c}$, logo a trajetória é de fato plana. Observe que se $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ temos que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos e a trajetória será uma reta (cônica degenerada). Suponhamos no que se segue que $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$.

Mostremos agora que a trajetória é de fato uma cônica.

Fixe um eixo polar passando pelo sol e seja θ o ângulo entre $\mathbf{r}$ e tal eixo. Seja $\mathbf{u}_\theta$ o vetor unitário perpendicular a $\mathbf{r}$ dado por $\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}$. Usando coordenadas polares temos que $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Disso segue:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta.$$

Portanto obtemos:

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (r\mathbf{u}_r) \times \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta.$$

Dessa expressão segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{c} &= \left(-\frac{GM}{r^2} \mathbf{u}_r \right) \times \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta \right) = \\ &= -GM \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta) = GM \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Observe agora que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{c} + \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \quad (8.19)$$

Por outro lado:

$$\frac{d}{dt}(GM\mathbf{u}_r) = GM \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = GM \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = GM \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \quad (8.20)$$

Das equações (8.18), (8.19) e (8.20) segue então que:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = \frac{d}{dt}(GM\mathbf{u}_r).$$

Portanto, por integração obtemos:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM\mathbf{u}_r + \mathbf{b},$$

onde $\mathbf{b}$ é um vetor constante.

Tomando $\mathbf{e}$ tal que $GM\mathbf{e} = \mathbf{b}$ segue que:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{c} = GM(\mathbf{u}_r + \mathbf{e}).$$

Tomando o produto escalar com $\mathbf{r}$ em ambos os lados, obtemos

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = GM(r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) = GMr(1 + \eta \cos \phi),$$

onde $\eta = \|\mathbf{e}\|$ e ϕ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{e}$. Como $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, a invariância cíclica do produto misto fornece

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = c^2,$$

onde $c = \|\mathbf{c}\|$.

Assim temos, finalmente,

$$GMr(1 + \eta \cos \phi) = c^2.$$

Se $\eta = 0$, segue que $r = c^2/(GM)$ é constante, e a órbita é circular. Se $\eta > 0$, definindo

$$p = \frac{c^2}{GM\eta},$$

obtemos

$$r = \frac{\eta p}{1 + \eta \cos \phi},$$

que é a equação polar de uma cônica com foco no sol e excentricidade η .

Observação 8.43

Como $\mathbf{e}$ é uma constante de integração e $\eta = \|\mathbf{e}\|$ temos que a excentricidade depende fundamentalmente das condições iniciais do movimento, isto é, da posição e velocidade iniciais do planeta (Verifique!).

8.9. Exercícios complementares

As listas históricas deste capítulo concentram-se nas construções de Dandelin. Os exercícios abaixo completam a prática com formas canônicas, elementos geométricos, translações, completar quadrados e excentricidade.

Exercícios

Ex. 9.1 Considere a elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36.$$

Determine centro, vértices, focos, comprimentos dos eixos e excentricidade.

Ex. 9.2 Determine a equação da elipse cujos focos são $(\pm 4, 0)$ e cujo eixo maior mede 10.

Ex. 9.3 Identifique a cônica

$$9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$$

e determine seus elementos geométricos principais.

Ex. 9.4 Para a hipérbole

$$9x^2 - 16y^2 = 144,$$

determine vértices, focos, assíntotas e excentricidade.

Ex. 9.5 Determine a equação da hipérbole de centro na origem, focos $(\pm 5, 0)$ e vértices $(\pm 3, 0)$.

Ex. 9.6 Identifique e esboce a cônica

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0.$$

Determine centro, vértices, focos e assíntotas.

Ex. 9.7 Para a parábola

$$y^2 = 12x,$$

determine vértice, foco, diretriz, eixo de simetria e comprimento da corda focal perpendicular ao eixo.

Ex. 9.8 Determine a equação da parábola de foco $(0, -2)$ e diretriz $y = 2$.

Ex. 9.9 Identifique a parábola

$$x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$$

e determine vértice, foco e diretriz.

Ex. 9.10 Determine focos, diretrizes e excentricidade das cônicas:

- a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;
- c) $y^2 = 12x$.

Ex. 9.11 Um ponto $P = (x, y)$ satisfaz

$$d(P, (4, 0)) = \frac{4}{5} d\left(P, x = \frac{25}{4}\right).$$

Sem usar uma tabela pronta, desenvolva a equação e identifique a cônica.

Ex. 9.12 Compare as elipses

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Mostre diretamente que são semelhantes e determine a razão da homotetia que leva a primeira na segunda.

Gabaritos dos exercícios de Dandelin já existentes

- 1. Elipse: foco–diretriz a partir de Dandelin.** Tome uma das esferas de Dandelin. O ponto em que ela toca o plano secante π é o foco F . O plano que contém o círculo de tangência da esfera com o cone intercepta π numa reta r , que é a diretriz. Para dois pontos X, X' da elipse, construa B, C, D e B', C', D' como no caso da parábola. Os pares de triângulos indicados são

semelhantes porque os ângulos envolvidos dependem apenas dos ângulos fixos do cone e do plano. Da semelhança segue que

$$\frac{XC}{XD} = \frac{X'C'}{X'D'} = \eta,$$

independente do ponto. Como os segmentos XC e XF são tangentes traçados de X à mesma esfera, $XC = XF$; analogamente para X' . Portanto

$$XF = \eta d(X, r).$$

No caso elíptico o plano secante é mais inclinado que a geratriz correspondente, o que produz $0 < \eta < 1$.

2. **Hipérbole: foco–diretriz.** Repita a construção com a esfera de Dandelin tangente à folha correspondente do cone. O ponto de tangência com π é o foco e a interseção de π com o plano do círculo de tangência é a diretriz. Os mesmos triângulos semelhantes fornecem uma razão constante

$$XF = \eta d(X, r).$$

Agora a geometria do corte hiperbólico produz $\eta > 1$.

3. **Diferença das distâncias aos focos.** Use as duas esferas de Dandelin associadas à hipérbole. Para X em uma das componentes, sejam H_1, H_2 os pontos em que a geratriz por X toca os círculos de contato das duas esferas com o cone. Pela igualdade dos segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto a uma esfera,

$$XF_1 = XH_1, \quad XF_2 = XH_2.$$

Ao longo de qualquer geratriz, a distância entre os dois círculos de tangência é constante. Portanto

$$|XF_1 - XF_2| = |XH_1 - XH_2| = H_1H_2 = k,$$

independente de X .

Curvas Parametrizadas e Regiões do Plano

Este capítulo reúne duas ideias complementares da geometria analítica: descrever curvas por meio de parâmetros e descrever regiões do plano por meio de suas fronteiras e de cortes coordenados. Em ambos os casos, a escolha da representação adequada permite transformar uma figura geométrica em equações que registram não apenas onde estão seus pontos, mas também como o objeto é percorrido ou organizado no plano.

Começaremos com curvas parametrizadas, estudando traço, orientação, regularidade, coordenadas polares, cilíndricas e esféricas e comprimento. Na parte final, voltaremos ao plano para descrever regiões limitadas por curvas, usando cortes verticais, horizontais e coordenadas polares. Essa passagem prepara a linguagem necessária para aplicações posteriores, sem exigir aqui uma teoria de cálculo multi-variável.

9.1. Parametrização de Curvas

Uma curva pode ser apresentada de maneiras muito diferentes. Uma equação cartesiana descreve os pontos que pertencem à curva; uma *parametrização* descreve, além disso, como esses pontos são percorridos quando um parâmetro varia.

Já conhecemos esse ponto de vista para retas. Se $S_0 = (a, b, c)$ pertence a uma

reta r e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \mathbf{0}$ é um vetor diretor, então

$$r : \begin{cases} x &= a + v_1 t, \\ y &= b + v_2 t, \\ z &= c + v_3 t. \end{cases} \quad (9.1)$$

Equivalentemente,

$$X(t) = S_0 + t\mathbf{v}.$$

Para cada valor de t obtemos um ponto da reta; quando t percorre $\mathbb{R}$, a imagem de X é toda a reta. A mesma ideia permitirá descrever círculos, parábolas, hélices e curvas muito mais gerais.

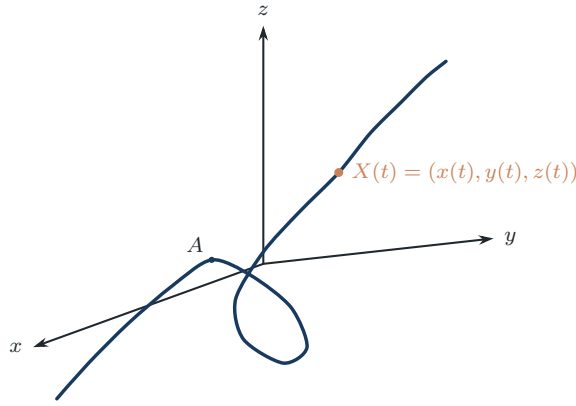


Figura 9.1.: Curva Parametrizada

A interpretação física de t como tempo é útil, mas não faz parte da definição: o parâmetro pode representar tempo, ângulo, comprimento, ou simplesmente servir para enumerar os pontos da curva.

Definição 9.1

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, uma **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$ é uma função contínua

$$X : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

O conjunto

$$X(I) = \{X(t) : t \in I\}$$

é chamado de **traço** ou **imagem geométrica** da parametrização.

Essa distinção é importante: a parametrização contém mais informação que o traço. Por exemplo,

$$X_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e

$$X_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

têm a mesma imagem geométrica — o círculo unitário — mas X_2 percorre esse círculo duas vezes. Trocar t por $-t$ conserva a imagem e inverte o sentido do percurso. Portanto, ao parametrizar uma curva, devemos sempre perguntar não apenas *quais pontos aparecem*, mas também *como eles são percorridos*.

Quando X é diferenciável, sua derivada descreve a direção instantânea do percurso.

Definição 9.2

Se

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

é diferenciável, definimos o **vetor tangente** ou **vetor velocidade** por

$$X'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t)).$$

Dizemos que a parametrização é **regular** no instante t quando $X'(t) \neq \mathbf{0}$.

Em aplicações pediremos apenas a regularidade necessária para cada problema. Não é preciso supor, desde o início, que todas as derivadas de todas as ordens existam.

Exemplo 9.3.

A equação mais simples para uma parábola

$$y = x^2$$

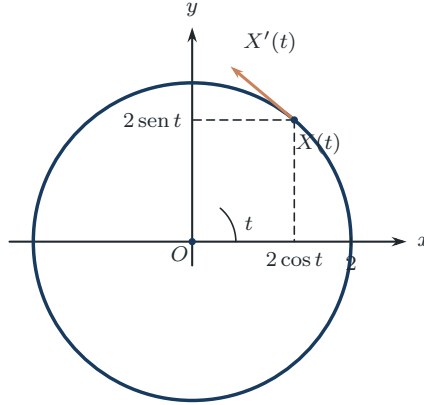
pode ser (trivialmente) transformada em uma parametrização utilizando um parâmetro livre t , e estabelecendo

$$x = t, y = t^2 \quad \text{para } -\infty < t < \infty$$



Exemplo 9.4.

Parametrize o círculo de raio 2 em $\mathbb{R}^2$ e descreva seu vetor tangente.



Solução. Para parametrizar o círculo, é natural usar o ângulo t como parâmetro. Com essa escolha, as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ são dadas por $x = 2 \cos t$ e que $y = 2 \sin t$. Fazendo t variar em $[0, 2\pi]$, percorremos uma volta completa.

Assim, a curva plana $X : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ descreve um círculo de raio 2 em $\mathbb{R}^2$.

O vetor tangente é obtido derivando a parametrização $X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ e é dado por $X'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$.

**Observação 9.5**

Uma curva $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, como por exemplo a curva descrita no Exemplo 9.4, para a qual o ponto inicial é igual ao ponto final $X(a) = X(b)$ é denominada *curva fechada*.

Exemplo 9.6.

Descreva a curva espacial cuja parametrização é $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$.



Solução. Para descrevermos a curva começamos observando que a projeção da curva $X(t)$ no plano xy é $(\cos t, \sin t)$ e consequentemente é um ponto do círculo de raio unitário. Logo a curva está contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

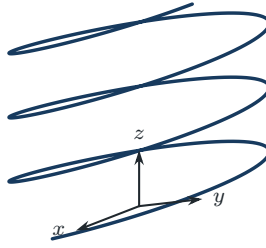


Figura 9.2.: Hélice

Na direção z a curva se move com velocidade constante.

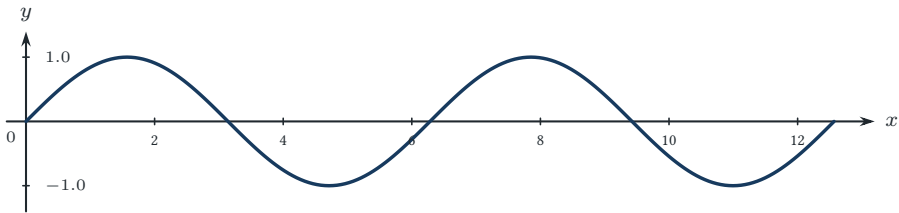
Assim, a curva espacial $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$ descreve uma hélice contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Tal curva caminha $\frac{2\pi}{10}$ na direção de z para completar uma volta em torno do cilindro. Observe a figura ao lado.



Exemplo 9.7 – Gráfico de Função.

O gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável é uma curva em $\mathbb{R}^2$. Tal curva pode ser representada pelas equações paramétricas $X(t) = (t, f(t))$. Observe que o vetor velocidade de tal curva é dado por $X'(t) = (1, f'(t))$.

Na figura 9.3 apresentamos a curva $(t, \sin t)$ dada pelo gráfico da função $\sin x$ em $\mathbb{R}^2$, cujo vetor velocidade no tempo t é $(1, \cos t)$.

Figura 9.3.: Gráfico de $\sin x$

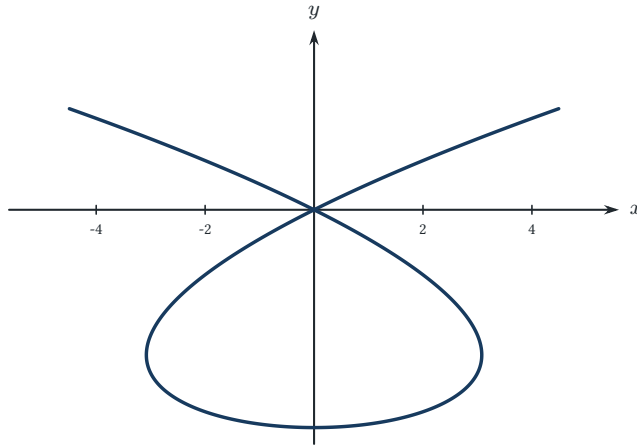


Figura 9.4.: Curva não injetora

Exemplo 9.8.

A curva $X(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ é uma curva parametrizada não injetora (ver Figura 9.4), pois $X(2) = X(-2) = (0, 0)$. Esse exemplo mostra que nem toda curva do plano pode ser descrita como gráfico de uma função.



Observação 9.9

Uma curva parametrizada injetora (sem auto-intersecções) é dita ser uma *curva simples*

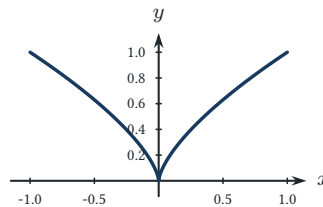


Figura 9.5.: Curva diferenciável com “bico”



Figura 9.6.: Ciclóide

Exemplo 9.10.

Observamos, por fim, um fato que pode parecer a princípio contradizer nossa intuição de diferenciabilidade propiciada pelo estudo de funções reais e seus gráficos em cursos de cálculo diferenciável. Uma curva parametrizada pode ser diferenciável e ter “bicos” ou “arestas” desde que o vetor velocidade se anule nesses pontos. Observe a curva $X(t) = (t^3, t^2)$ cujo vetor velocidade existe para todo t e é dado por $X'(t) = (3t^2, 2t)$.

**Observação 9.11**

Uma curva parametrizada diferenciável $X(t)$ tal que $X'(t) \neq 0$ para todo t é dita ser uma *curva regular*.

Pode-se mostrar que curvas regulares não admitem “bicos”.

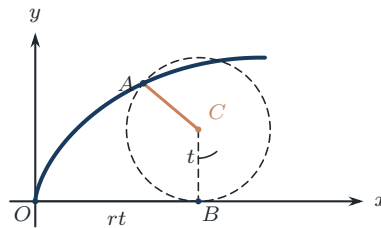


Figura 9.7.: Ciclóide parametrizada

Exemplo 9.12.

A *cicloide*, uma curva clássica estudada por Galileu (entre outros), consiste na curva traçada por um ponto fixado numa circunferência que rola ao longo de uma reta (ver Figura ??).

A cicloide está ligada, por exemplo, ao problema da *braquistócrona*, que descreve uma curva ligando dois pontos A e B , com B localizado a uma altura menor que A , e que tem a propriedade de ser a trajetória (“rampa”) capaz de minimizar o tempo para um corpo ir de A à B quando este está submetido apenas à gravidade.

Além disso, a cicloide (invertida) também é solução do problema da *tautócrona* que trata de uma curva onde não importa onde uma partícula seja colocada, ela leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo.

Obtenha as equações paramétricas da cicloide passando pela origem O do sistema de coordenadas e obtida a partir de um círculo de raio r “rolando” sobre o eixo x .

◀

Solução. Seja t o parâmetro que representa o ângulo de rotação do círculo. Quando o círculo girar de um ângulo t teremos que a distância percorrida ao longo do eixo será o comprimento do setor circular entre A e B (ver Figura 9.7), ou seja rt . Dessa forma é fácil concluir que as coordenadas de A são:

$$\begin{cases} x &= rt - r \sin t \\ y &= r - r \cos t \end{cases}$$

Logo a equação que representa tal curva é dada por $X(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$.

◀

9.2. Curvas em Coordenadas Polares

Coordenadas polares são muito úteis quando trabalhamos com curvas com algum tipo de simetria em relação à origem do sistema de coordenadas. Observe isso nos próximos exemplos.

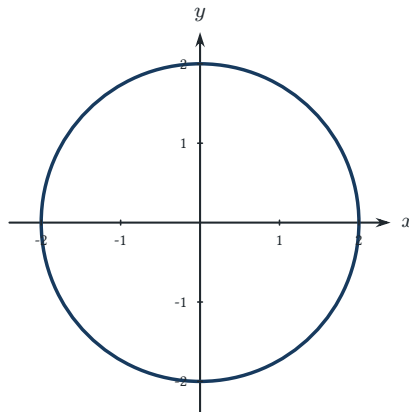


Figura 9.8.: Círculo de raio 2

Exemplo 9.13.

Um círculo de raio 2 pode ser descrito cartesianamente por

$$x^2 + y^2 = 4$$

e, em coordenadas polares, simplesmente por

$$r = 2.$$

Como curva parametrizada, uma escolha natural é

$$X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nas coordenadas polares correspondentes, essa mesma parametrização é

$$(r(t), \theta(t)) = (2, t),$$

com o ângulo entendido módulo 2π . Não precisamos calcular θ por $\arctg(y/x)$; essa expressão isolada não distingue corretamente os quadrantes.

**Exemplo 9.14.**

Considere a espiral de Arquimedes

$$r = 2\theta, \quad \theta \geq 0.$$

Usando o próprio ângulo como parâmetro,

$$r(t) = 2t, \quad \theta(t) = t, \quad t \geq 0.$$

Passando para coordenadas cartesianas,

$$\boxed{X(t) = (2t \cos t, 2t \sin t), \quad t \geq 0.}$$

Este é um bom exemplo de por que parametrizações são úteis. O ponto (x, y) determina seu ângulo polar apenas módulo 2π , enquanto a espiral precisa lembrar quantas voltas já foram percorridas para determinar o raio. Uma tentativa de escrever a curva usando apenas $\arctg(y/x)$ perde essa informação de enrolamento. A parametrização conserva naturalmente tanto a posição quanto o número de voltas.



Mais alguns exemplos de curvas classicamente representadas em coordenadas polares estão descritos abaixo. Tente verificar e comparar nesses exemplos as equações nos sistemas cartesiano e polar.

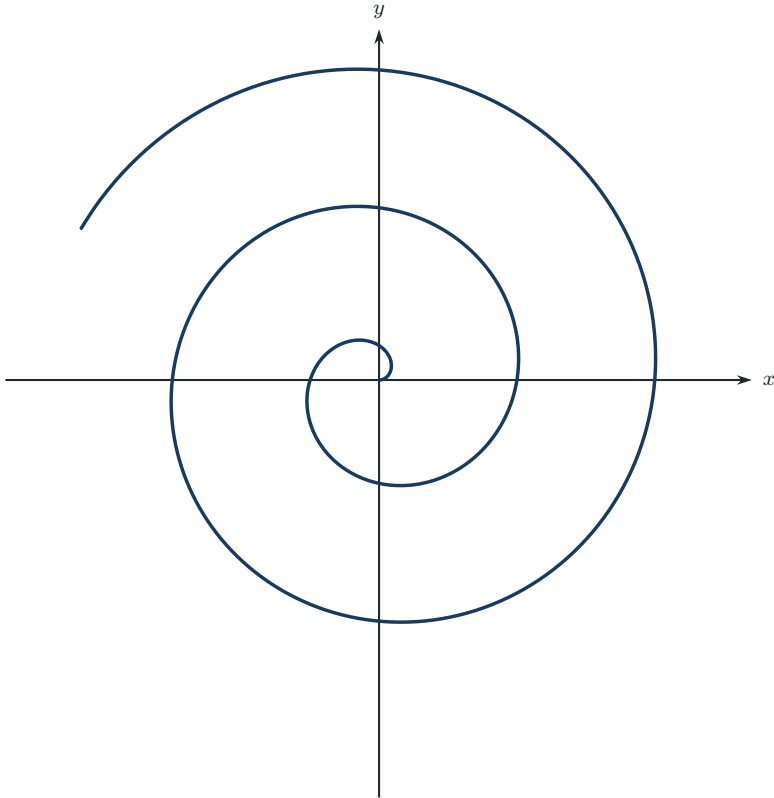


Figura 9.9.: Espiral

Exemplo 9.15.

O *cardioide* de equação polar

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0,$$

pode ser parametrizado diretamente pelo próprio ângulo polar:

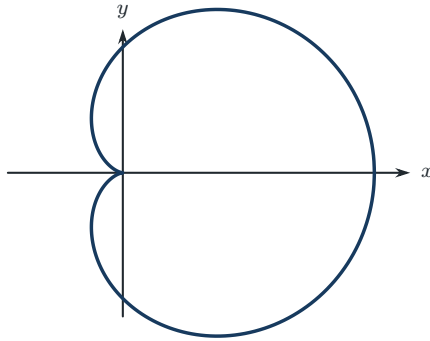
$$X(\theta) = (a(1 + \cos \theta) \cos \theta, a(1 + \cos \theta) \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Eliminando θ , obtemos a equação cartesiana

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Também existe uma parametrização racional. Fazendo

$$u = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

**Figura 9.10.:** Cardioide

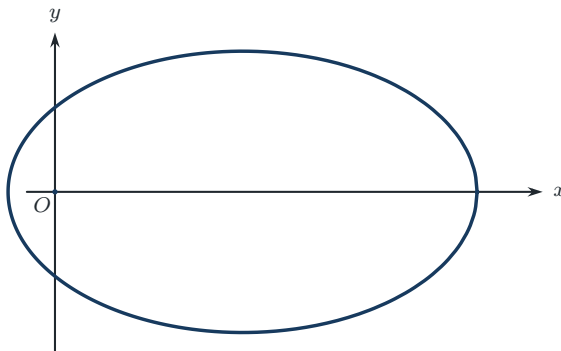
usamos

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}$$

e obtemos

$$X(u) = \left(2a \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}, 4a \frac{u}{(1 + u^2)^2} \right).$$

Aqui u é um novo parâmetro: ele não deve ser confundido com o ângulo polar θ .

**Figura 9.11.:** Elipse de eixos 10 e 6

Exemplo 9.16.

A elipse ao lado com eixo maior 10, eixo menor 6 e com um dos focos na origem pode ser representada em coordenadas polares pela equação:

$$r = \frac{9}{5 - 4 \cos t}.$$

Num sistema cartesiano tal curva seria descrita por:

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



9.3. Coordenadas Esféricas e Cilíndricas

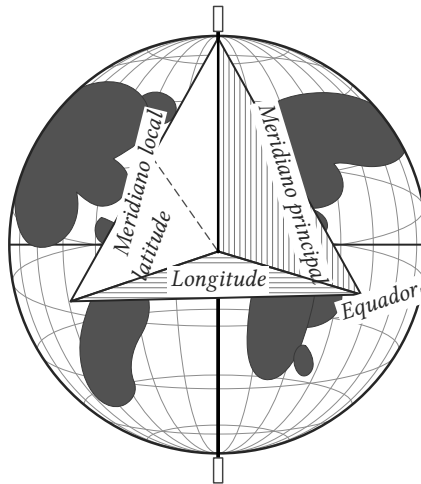


Figura 9.12.: Latitude e Longitude

Durante o século XV, quando a Europa vivenciava o período das grandes navegações, os navegadores, que sabiam caminhar sobre um globo aproximadamente esférico, começaram a usar um sistema de localização na Terra formado pela latitude e longitude de um ponto.

Nesse sistema a Terra fica dividida por paralelos, círculos centrados no eixo de rotação da Terra e localizados em planos perpendiculares a este mesmo eixo, e meridianos, círculos com centro localizado no centro do globo terrestre passando

pelos pólos norte e sul (determinados pela intersecção do eixo de rotação do planeta com o globo).

Como podemos observar na Figura 9.12, podemos localizar um ponto na Terra pela sua latitude, que mede o ângulo (entre -90° e 90°) com vértice no centro da Terra formado entre o ponto e a linha do Equador, e pela sua longitude, que mede o ângulo (entre -180° e 180°) entre o ponto e o meridiano de Greenwich, tido desde 1884 como o meridiano de referência para navegação.

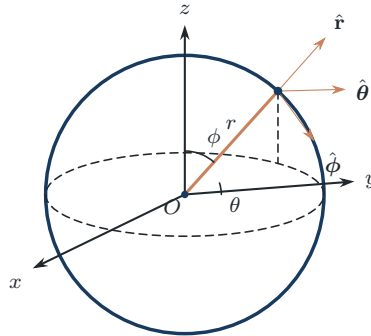


Figura 9.13.: Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esférico, de grande utilidade em problemas com simetrias em relação a origem do espaço, é semelhante ao sistema de latitudes e longitudes usado em navegação. A única diferença é que para localizar um ponto qualquer do espaço é necessária, além dos dois ângulos, a distância do ponto a origem do espaço. Observe que para localizar uma estrela qualquer no universo poderíamos dar a distância da mesma à Terra e a latitude e longitude do ponto onde aquela estrela estará exatamente em cima de nós.

Para definir um *sistema de coordenadas esférico* precisamos escolher um ponto de origem O e duas direções ortogonais, conhecidas como *zênite* e *referência de azimuth*.

No caso do exemplo descrito acima o zênite é dado pela direção do eixo de rotação da Terra e a referência de azimuth é dada pela reta que liga o centro da Terra ao meridiano de Greenwich.

As coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) de um ponto P são então dadas por:

- *raio* ou *distância radial* r que é a distância (Euclideana) entre O e P ;
- *ângulo polar* ou *colatitude* ϕ dado pelo ângulo (entre 0 e π) entre o zênite e a direção do segmento $\overline{OP}$;
- *azimute* ou *longitude* θ , ângulo (entre 0 e 2π) entre a referência de azimute e

a projeção ortogonal de $\overrightarrow{OP}$ sobre um plano ortogonal ao zênite (*plano de referência*).

Notamos que no exemplo dado pelos paralelos e meridianos da Terra, o ângulo de longitude é igual ao azimute θ , mas o ângulo dado pela latitude de um dado ponto é o ângulo complementar ao ângulo polar ϕ .

Note que no sistema de coordenadas esférico os pontos localizados sobre o zênite podem ser representados por mais de uma tripla (r, ϕ, θ) . De fato para tais pontos (com $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$) o ângulo θ não importa.

Observando a Figura 9.13 concluímos facilmente que as coordenadas esféricas se relacionam com as coordenadas cartesianas segundo as seguintes equações:



Figura 9.14.: *Sphere Spirals*, de M. C. Escher

$$\begin{aligned}x &= r \sin \phi \cos \theta \\y &= r \sin \phi \sin \theta \\z &= r \cos \phi\end{aligned}$$

e Reciprocamente, para $P \neq O$,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\phi = \text{atan2}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right), \quad \theta = \text{atan2}(y, x) \pmod{2\pi}.$$

A notação atan2 é importante: uma única expressão $\arctg(y/x)$ não distingue corretamente os quadrantes. Nos polos ($\phi = 0$ ou $\phi = \pi$), o azimute θ é indeterminado.

Exemplo 9.17.

Curva Loxodrômica:



Problemas com simetria esférica em geral tem uma representação mais simples em coordenadas esféricas. Observe a curva desenhada por M.C. Escher em sua obra “Sphere Spirals”. Tal curva é conhecida como *curva loxodrômica* e é a curva que cruza os meridianos sempre com o mesmo ângulo. Tal curva é representada por uma linha reta na *projeção de Mercator* (ver Wikipedia), isto é, se m é a inclinação da reta e t_0 é o instante onde a curva cruza o Equador, na projeção de Mercator teríamos:

$$\begin{aligned}x(t) &= t \\ y(t) &= m(t - t_0)\end{aligned}$$

Olhando para a curva numa esfera de raio 1 teríamos em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}r(t) &= 1 \\ \theta(t) &= t \\ \phi(t) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(\tanh(m(t - t_0)))\end{aligned}$$

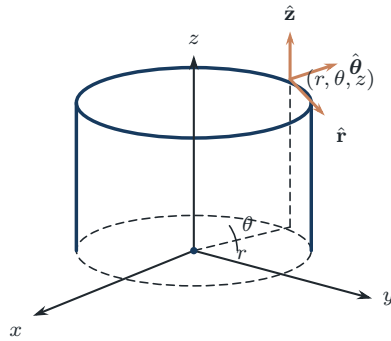
Em coordenadas cartesianas, no entanto, tal curva seria representada pelas equações:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{\cos t}{\cosh(m(t - t_0))} \\ y(t) &= \frac{\sin t}{\cosh(m(t - t_0))} \\ z(t) &= \tanh(m(t - t_0))\end{aligned}$$

Observe que no sistema cartesiano é difícil à primeira vista até mesmo saber que a curva se encontra numa esfera, fato que no sistema esférico é imediato.

O *sistema de coordenadas cilíndrico* é, simplificadaamente, o sistema de coordenadas polar do plano euclidiano complementado com uma terceira coordenada para descrever a altura z do ponto em relação ao plano Oxy . Para definir as coordenadas cilíndricas de um ponto é necessária a escolha de um ponto de origem O , eixo Oz para marcar a altura e uma referência de azimuth no plano perpendicular a Oz pela origem (plano de referência). As coordenadas (r, θ, z) do ponto P são definidas por:

- *distância radial* dada pela distância euclidiana de P ao eixo Oz ;
- *azimute* θ , ângulo entre a referência de azimuth e a projeção de $\overrightarrow{OP}$ sobre o plano de referência;

**Figura 9.15.:** Coordenadas Cilíndricas

- *altura* z , a coordenada orientada ao longo do eixo Oz ; ela é positiva de um lado do plano de referência e negativa do outro.

As coordenadas cilíndricas e cartesianas se relacionam de forma muito parecida com a a relação entre coordenadas polares e cartesianas:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

e, inversamente:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{atan2}(y, x) \pmod{2\pi} \\ z &= z\end{aligned}$$

Exemplo 9.18.

Hélice:



Voltemos ao Exemplo 9.6 que descrevia uma hélice que em coordenadas cartesianas possuía parametrização $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$. Em coordenadas cilíndricas as equações paramétricas se simplificariam a:

$$X(t) = (1, t, t/10).$$

Estude isso.

9.4. Comprimento de uma Curva

Provavelmente em cursos de física você já se deparou com a fórmula:

$$\Delta s = v \Delta t$$

que indica a distância percorrida Δs por um corpo que se move durante um período de tempo Δt com velocidade constante v (onde v é igual ao comprimento do vetor velocidade $\mathbf{v}$).

Como poderíamos generalizar o cálculo da distância percorrida para um corpo que se move com velocidade não constante entre os instantes t_0 e t ao longo de uma curva parametrizada $X(t) = (x(t), y(t))$?

Algo que talvez também já seja familiar a você é que tal fórmula se generaliza por:

$$\Delta s = \int_{t_0}^t v(t) dt,$$

onde $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$.

Para uma curva diferenciável $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, escreva

$$X(u) = (x(u), y(u), z(u)).$$

O comprimento percorrido entre os parâmetros t_0 e t é

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|X'(u)\| du,$$

ou, explicitamente,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2} du.$$

A variável u dentro da integral é muda; usar uma letra diferente evita confundir o limite superior t com a variável de integração.

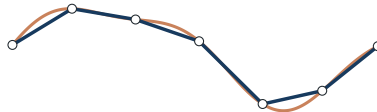


Figura 9.16.: Comprimento de uma curva

Intuitivamente a fórmula acima admite a seguinte interpretação. Dividamos o intervalo $[t_0, t]$ em partes de modo que $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t$. O

comprimento do segmento de reta que liga $X(t_i)$ à $X(t_{i+1})$, obtido pelo Teorema de Pitágoras, é dado por:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2},$$

onde $\Delta x_i = (x(t_{i+1}) - x(t_i))$, $\Delta y_i = (y(t_{i+1}) - y(t_i))$ e $\Delta z_i = (z(t_{i+1}) - z(t_i))$. Usaremos aqui apenas uma notação compacta para somas: se $a_0, \dots, a_n$ são números,

$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

O símbolo $\sum$ indica, portanto, que somamos os termos enquanto o índice i percorre os valores indicados. Assim, o comprimento Δs da curva parametrizada $X(t)$ de t_0 a t é dado aproximadamente por

$$\Delta s \approx \sum_{i=0}^n \Delta s_i.$$

Ver Figura 9.16.

Mas, se $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ temos:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sqrt{\left(\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}\right)^2\right) (\Delta t_i)^2} = \\ &= \left(\sqrt{(v_i^x)^2 + (v_i^y)^2 + (v_i^z)^2}\right) \Delta t_i, \end{aligned}$$

onde $v_i^x = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)$, $v_i^y = \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)$ e $v_i^z = \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}\right)$. Aumentando a partição e diminuindo os intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ temos que no limite a expressão

$$\Delta s \approx \sum_{i=0}^n \left(\sqrt{(v_i^x)^2 + (v_i^y)^2 + (v_i^z)^2}\right) \Delta t_i$$

torna-se

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2} du$$

Exemplo 9.19.

Qual o comprimento do círculo de raio 1?



Solução. O círculo de raio 1 pode ser representado como uma curva parametrizada por $X(t) = (\cos t, \sin t)$. Para obtermos o comprimento do círculo integramos a norma do vetor velocidade $X'(t) = (-\sin t, \cos t)$:

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

**Exemplo 9.20.**

Qual o comprimento da hélice dada por $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$ entre os instantes 0 e 4π ?



Solução. O vetor velocidade da curva é dado por $X'(t) = (-\sin t, \cos t, 1/10)$. Logo:

$$s(4\pi) = \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \left(\frac{1}{10}\right)^2} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{101}{100}} dt = \frac{4\pi\sqrt{101}}{10}$$



9.5. Regiões planas limitadas por curvas

Frequentemente em problemas de física e engenharia precisamos encontrar áreas de regiões do plano limitadas por curvas planas. Não é raro, também, problemas que envolvem densidades (de massa, por exemplo) variáveis numa placa plana, sobre a qual estamos interessados em entidades como o peso ou centro de massa. Para lidar com tais problemas utilizam-se ferramentas desenvolvidas em cálculo integral, um tema que vai muito além do escopo deste livro. No presente momento não nos é necessário entender quais são e como podemos utilizar tais ferramentas. No entanto a descrição de regiões do plano limitadas por curvas é um tema de grande interesse para a geometria analítica. Temos este que trataremos a seguir.

Um modo interessante de descrevermos regiões limitadas por curvas é nos utilizarmos de coordenadas cartesianas e “escanearmos” a região analisando a intersecção da região com retas verticais, ou seja, retas do tipo $x = k$, onde k é uma constante real.

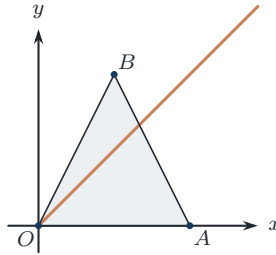


Figura 9.17.: Região limitada por 3 retas

Exemplo 9.21.

Considere o triângulo da Figura 9.17, com vértices

$$O = (0, 0), \quad A = (2, 0), \quad B = (1, 2).$$

Para descrevê-lo por cortes verticais, precisamos observar que a fronteira superior muda em $x = 1$. A reta OB tem equação $y = 2x$, enquanto a reta AB tem equação $y = -2x + 4$.

Assim,

$$0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq y \leq 2x,$$

e

$$1 \leq x \leq 2 \implies 0 \leq y \leq -2x + 4.$$

Portanto a região é descrita simbolicamente por

$$\int_0^1 \int_0^{2x} dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{-2x+4} dy \, dx.$$

O ponto importante não é calcular a integral, mas aprender a reconhecer quando um único par de limites não descreve toda a região.



Exemplo 9.22.

Considere agora o triângulo $\triangle OAB$ limitado pelos pontos $O = (0, 0)$, $A = (2, 4)$ e $B = (4, 2)$ (Figura 9.18). Nesse caso, x deve variar no intervalo $[0, 4]$ para cobrir todo o triângulo. No entanto, quando x pertence ao intervalo $[0, 2]$ a coordenada y fica limitada pelas retas $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OA}$, e quando x está no intervalo $[2, 4]$ a coordenada y fica limitada por $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. Assim sendo, para simplificar a descrição da região “escaneada” por retas verticais, descrevemos a área do triângulo $\triangle OAB$ como a soma dos triângulos $\triangle OAE$ e $\triangle EAB$.

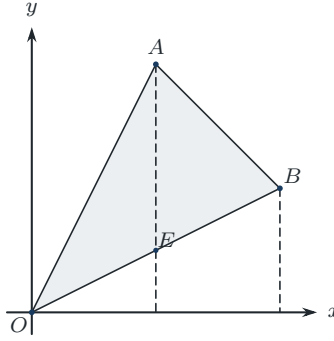


Figura 9.18.: Região limitada por 3 retas

Descrevendo o triângulo $\triangle OAE$ temos então que, para x entre 0 e 2, os pontos do triângulo ficam entre as retas $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OA}$, de equações $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$, respectivamente. Logo, para $x \in [0, 2]$ devemos ter $\frac{1}{2}x \leq y \leq 2x$, ou seja, $y \in [\frac{1}{2}x, 2x]$. Simbolicamente:

$$A_{\triangle OAE} = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=2x} 1 \, dydx.$$

Para o triângulo $\triangle EAB$ teríamos x variando entre 2 e 4. Nesse caso, os pontos do triângulo ficam entre as retas $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, de equações $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -x + 6$, respectivamente. Logo, para $x \in [2, 4]$ devemos ter $\frac{1}{2}x \leq y \leq -x + 6$, ou seja, $y \in [\frac{1}{2}x, -x + 6]$. O que simbolicamente ficaria:

$$A_{\triangle EAB} = \int_{x=2}^{x=4} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=-x+6} 1 \, dydx.$$

Finalmente, a área do triângulo $\triangle OAB$ seria representada por:

$$\begin{aligned} A_{\triangle OAB} &= A_{\triangle OAE} + A_{\triangle EAB} = \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=2x} 1 \, dydx + \int_{x=2}^{x=4} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=-x+6} 1 \, dydx. \end{aligned}$$

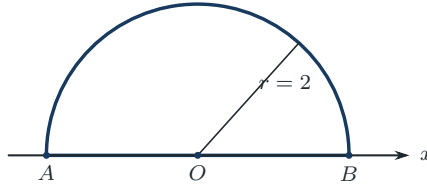


Figura 9.19.: Setor circular

Exemplo 9.23.

Considere agora a região do plano acima do eixo Ox e limitada pelo círculo de equação $x^2 + y^2 = 4$ (Figura 9.19). Podemos descrevê-la variando x no intervalo $[-2, 2]$ e, para cada x fixado, fazer y percorrer o intervalo de 0 (reta $y = 0$) até $y = \sqrt{4 - x^2}$ (parte da curva $x^2 + y^2 = 4$ sobre o eixo Ox). Desse modo, a área seria simbolicamente indicada por:

$$A_{AOB} = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx.$$

◀

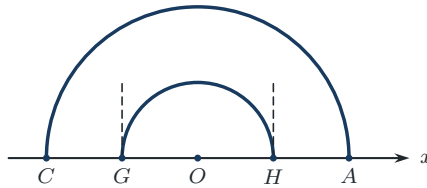


Figura 9.20.: Meio anel

Exemplo 9.24.

Suponha agora que queiramos descrever a região do plano acima do eixo Ox e limitada pelos círculos centrados em $0 = (0, 0)$ e de raios 1 e 2 (Figura 9.20). Novamente, podemos descrevê-la variando x no intervalo $[-2, 2]$. Mas agora, para $x \in [-2, -1]$ e $x \in [1, 2]$, y fica entre a reta $y = 0$ e a curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ e, para $x \in [-1, 1]$, y está limitado pelas curvas $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = \sqrt{4 - x^2}$. Desse modo, a área seria simbolicamente indicada por:

$$A_{CGHA} = \int_{x=-2}^{x=-1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx + \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx + \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx.$$

Alternativamente, poderíamos descrever a mesma área subtraindo a área entre o eixo Ox e o círculo de raio 1 da área entre Ox e o círculo de raio 2, ou seja:

$$A_{CGHA} = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx - \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy dx.$$



Quando as regiões a serem descritas têm certa simetria circular como nos Exemplos 9.23 e 9.24, um modo interessante de descrever as áreas é através do uso de coordenadas polares. Podemos descrever uma dada região variando a coordenada θ e olhando para a intersecção da região com a semi-reta de equação $\theta = k$ (em coordenadas polares).

Assim a área do Exemplo 9.23 poderia ser representada variando θ no intervalo $[0, \pi]$ e, fazendo, para cada θ fixado, r percorrer o intervalo $[0, 2]$. Simbolicamente representaríamos isso por:

$$A_{AOB} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=2} r dr d\theta.$$

Observação 9.25

Em coordenadas cartesianas usualmente escrevemos $dydx$ na descrição da área motivados pelo fato de que a área de um retângulo de base Δx e altura Δy é $\Delta y \Delta x$.

Em coordenadas polares escrevemos $r dr d\theta$ ao invés de apenas $dr d\theta$, pois a área de um setor circular definido por um dado $\Delta \theta$ e com raio variando entre r e $r + \Delta r$ é aproximadamente dada por $r \Delta r \Delta \theta$ se Δr é pequeno.

Mais detalhes podem ser encontrados em referências clássicas de cálculo.

A região do Exemplo 9.24, por sua vez, poderia ser representada variando θ no intervalo $[0, \pi]$ e, fazendo, para cada θ fixado, r percorrer o intervalo $[1, 2]$. Simbolicamente representaríamos isso por:

$$A_{AOB} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=1}^{r=2} r dr d\theta.$$

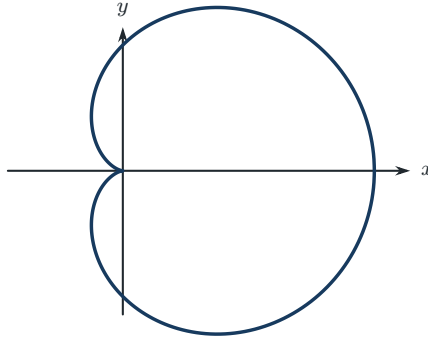


Figura 9.21.: Cardiode

Exemplo 9.26.

Imagine que queiramos usar coordenadas polares para descrever a região do plano limitada pelo cardióide de equação $r = 1 + \cos \theta$. Para isso, fazemos θ variar no intervalo $[0, 2\pi]$ e, para cada θ fixado, fazemos r variar entre 0 e $1 + \cos \theta$. Assim tal região seria descrita por:

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1+\cos \theta} r dr d\theta.$$

**9.6. Exercícios**

Os exercícios abaixo seguem o percurso do capítulo: traço e orientação, parametrizações, curvas polares, coordenadas cilíndricas e esféricas, comprimento e descrição de regiões por cortes.

Exercícios

Ex. 6.1 Considere as parametrizações

$$X_1(t) = (\cos t, \sin t), \quad X_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Compare os traços, o número de voltas e o sentido do percurso.

Ex. 6.2 Parametrize o segmento orientado que vai de

$$A = (1, -1, 2) \quad \text{a} \quad B = (3, 2, 0)$$

com $0 \leq t \leq 1$. Determine o vetor tangente e o comprimento do segmento.

Ex. 6.3 Para cada parametrização, elimine o parâmetro, descreva o traço e determine onde ela é regular:

- a) $X(t) = (t, t^2), t \in \mathbb{R};$
- b) $Y(t) = (t^2, t^3), t \in \mathbb{R}.$

Ex. 6.4 Seja

$$X(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e defina

$$Y(s) = X(2\pi - s).$$

Mostre que as duas parametrizações têm o mesmo traço e explique o que muda no percurso.

Ex. 6.5 Considere a hélice

$$X(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Determine o vetor tangente, a rapidez e o comprimento do arco percorrido.

Ex. 6.6 Um círculo de raio r rola sem deslizar sobre o eixo x . Um ponto marcado na circunferência começa na origem. Usando como parâmetro o ângulo t girado pelo círculo, obtenha uma parametrização da cicloide.

Ex. 6.7 A espiral de Arquimedes é dada em coordenadas polares por

$$r = 2\theta, \quad \theta \geq 0.$$

Obtenha uma parametrização cartesiana usando o próprio ângulo como parâmetro. Quanto o raio aumenta após uma volta completa?

Ex. 6.8 O cardioide

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0,$$

pode ser parametrizado pelo ângulo polar. Escreva essa parametrização e elimine o parâmetro para obter uma equação cartesiana.

Ex. 6.9 Use as convenções do capítulo para converter coordenadas:

- escreva $(1, 1, \sqrt{2})$ em coordenadas cilíndricas e esféricas principais;
- converta

$$(r, \phi, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Ex. 6.10 Uma curva tem coordenadas cilíndricas

$$r = 2, \quad \theta = t, \quad z = 3t.$$

Escreva sua parametrização cartesiana, identifique a superfície cilíndrica que a contém e determine quanto ela sobe em uma volta completa.

Ex. 6.11 A loxodromia apresentada no capítulo possui parametrização cartesiana

$$x(t) = \frac{\cos t}{\cosh(m(t - t_0))}, \quad y(t) = \frac{\sin t}{\cosh(m(t - t_0))}, \quad z(t) = \tanh(m(t - t_0)).$$

Verifique diretamente que seu traço está contido na esfera unitária.

Ex. 6.12 Descreva a região interior à elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

de duas maneiras:

- por cortes verticais, indicando o intervalo de x e os limites de y ;
- por cortes horizontais, indicando o intervalo de y e os limites de x .

Ex. 6.13 Considere a parte, no primeiro quadrante, do anel centrado na origem com raio interno 1 e raio externo 2.

- descreva a região por desigualdades cartesianas;
- descreva-a em coordenadas polares.

Ex. 6.14 Considere o triângulo de vértices

$$O = (0, 0), \quad A = (2, 4), \quad B = (4, 2).$$

Descreva-o por cortes verticais, sem usar integrais. Indique por que é necessário separar a descrição em dois intervalos de x .

Superfícies e quádricas

Até aqui, grande parte da geometria foi descrita por pontos, retas, planos e curvas. Neste capítulo passamos às *superfícies*. Em geral, enquanto uma curva é percorrida fazendo variar um parâmetro, para percorrer uma superfície serão necessários dois parâmetros independentes.

Nosso objetivo não é memorizar uma lista de equações. Queremos aprender a reconhecer uma superfície a partir de diferentes descrições: uma construção vetorial, equações paramétricas, uma equação cartesiana e, sobretudo, seus cortes por planos.

Uma equação como

$$z = x^2 - y^2$$

contém toda a informação sobre um parabolóide hiperbólico, mas sua geometria se torna muito mais clara quando observamos as curvas obtidas ao fixar x , y ou z . Do mesmo modo, cilindros e cones deixam de ser figuras isoladas quando são vistos como superfícies geradas a partir de curvas.

Começaremos, portanto, construindo superfícies. Só depois organizaremos as quádricas em posição canônica.

10.1. Da descrição vetorial à parametrização

O exemplo mais simples de superfície no espaço é um plano. Se P_0 é um ponto e $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ são vetores não paralelos, o plano que passa por P_0 e é paralelo a esses vetores

pode ser descrito por

$$X(u, v) = P_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Cada escolha do par (u, v) determina um ponto do plano. Reciprocamente, todo ponto do plano é obtido por alguma escolha desses dois parâmetros.

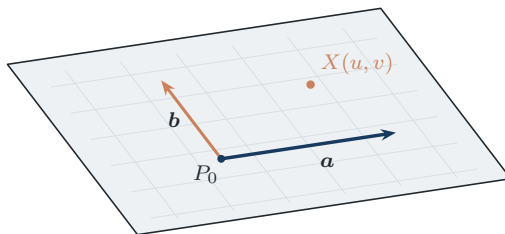


Figura 10.1: Um plano descrito por dois parâmetros e duas direções independentes.

Esse exemplo sugere a linguagem que usaremos no restante do capítulo.

Definição 10.1 Parametrização de uma superfície

Uma **parametrização de uma superfície** é um conjunto de três equações

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

em que u e v variam num conjunto de valores permitido, de modo que os pontos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

percorram a superfície considerada.

Não desenvolveremos aqui uma teoria geral das expressões $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$. Para nossos objetivos elas são simplesmente fórmulas que, a cada par de parâmetros, associam um ponto do espaço. Em todos os exemplos será geometricamente claro que os dois parâmetros fazem o ponto percorrer uma superfície e não apenas uma curva ou um ponto.

Uma mesma superfície pode admitir muitas parametrizações. Também é possível que dois pares de parâmetros diferentes produzam o mesmo ponto; isso acontece, por exemplo, nas parametrizações usuais da esfera.

Além de parametrizações, usaremos **equações cartesianas em três variáveis**. A esfera de raio R e centro na origem pode ser descrita pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ou pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta, \\ y = R \sin \varphi \sin \theta, \\ z = R \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

As duas descrições determinam os mesmos pontos, mas cada uma favorece perguntas diferentes. A parametrização explica como gerar a superfície; a equação cartesiana costuma tornar mais simples reconhecer simetrias e estudar interseções.

10.2. Cilindros: transportar uma curva numa direção fixa

A ideia geométrica de cilindro é muito mais geral que a imagem de um tubo circular. Tome uma curva γ no espaço e um vetor não nulo w . Por cada ponto de γ , trace uma reta paralela a w . A união dessas retas forma uma superfície cilíndrica.

Definição 10.2 Cilindro generalizado

Se $\gamma(u)$ descreve uma curva e $w \neq 0$, a superfície parametrizada por

$$X(u, v) = \gamma(u) + vw, \quad v \in \mathbb{R},$$

é chamada **cilindro generalizado** de diretriz γ . As retas obtidas mantendo u fixo e variando v são suas **geratrizes**.

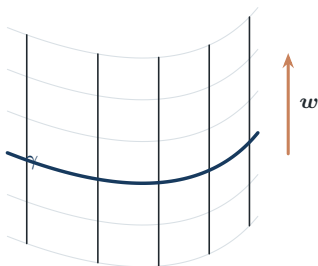


Figura 10.2.: Um cilindro generalizado: uma curva é transportada numa direção fixa.

Se a curva diretriz está no plano xy e é parametrizada por

$$\gamma(u) = (x(u), y(u), 0),$$

e tomamos $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$, então

$$X(u, v) = (x(u), y(u), v).$$

Nesse caso, a equação cartesiana da curva no plano xy passa a descrever a superfície inteira, pois a coordenada z fica livre.

Exemplos 10.3 – Três cilindros fundamentais.

Para $R, a, b > 0$, temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = R^2 &\iff X(\theta, v) = (R \cos \theta, R \sin \theta, v), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\iff X(\theta, v) = (a \cos \theta, b \sin \theta, v), \\ y = x^2 &\iff X(u, v) = (u, u^2, v). \end{aligned}$$

Nos dois primeiros casos podemos tomar $0 \leq \theta < 2\pi$ e $v \in \mathbb{R}$; no terceiro, $u, v \in \mathbb{R}$. São, respectivamente, um cilindro circular, um cilindro elíptico e um cilindro parabólico, todos com geratrizes paralelas ao eixo z .

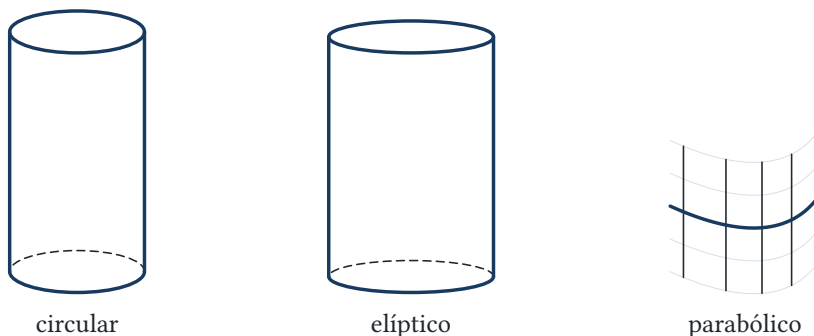


Figura 10.3.: Três superfícies cilíndricas. Quando uma variável está ausente da equação, vale a pena procurar uma direção de translação livre.

A ausência de uma variável é, portanto, um sinal importante, mas deve ser interpretada com cuidado. Se uma equação envolvendo apenas x e y descreve uma curva no plano xy , então a mesma relação, agora considerada no espaço, descreve o cilindro obtido transportando essa curva paralelamente ao eixo z . Se a equação plana degenera num ponto, numa reta ou no conjunto vazio, o objeto espacial também será degenerado.

Exemplo 10.4 – Um cilindro oblíquo.

Considere

$$\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (1, 0, 2).$$

A superfície

$$X(\theta, v) = (2 \cos \theta + v, 2 \sin \theta, 2v)$$

é um cilindro circular oblíquo: sua diretriz é um círculo, mas as geratrizes não são perpendiculares ao plano desse círculo.

Como $z = 2v$, temos $v = z/2$. Substituindo na primeira coordenada,

$$x - \frac{z}{2} = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta.$$

Portanto a equação cartesiana do cilindro é

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + y^2 = 4.$$

Em cada plano horizontal $z = k$, o corte é o círculo

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = 4.$$

Esses planos são paralelos ao plano da diretriz. Em contraste, os cortes por planos perpendiculares a $\mathbf{w}$ não são círculos; neste exemplo são elipses. Assim, “cilindro circular” refere-se à forma da diretriz, enquanto “reto” ou “oblíquo” descreve a direção das geratrizes em relação ao plano da diretriz.

**10.3. Cones: ligar uma curva a um vértice**

Para construir um cilindro, transportamos uma curva numa direção fixa. Para construir um cone, escolhemos um ponto fixo V e consideramos as retas que passam por V e pelos pontos de uma curva.

Definição 10.5 Cone generalizado

Se $\gamma(u)$ descreve uma curva e V é um ponto que não pertence a ela, a superfície parametrizada por

$$X(u, v) = V + v(\gamma(u) - V), \quad v \in \mathbb{R},$$

é chamada **cone generalizado** de vértice V e diretriz γ . Para u fixado, a variação de v percorre uma reta geratriz.

Se restringirmos $v \geq 0$, obtemos apenas as semirretas que partem de V em direção à curva. Permitindo $v \in \mathbb{R}$, obtemos também a continuação dessas geratrizes para o outro lado do vértice.

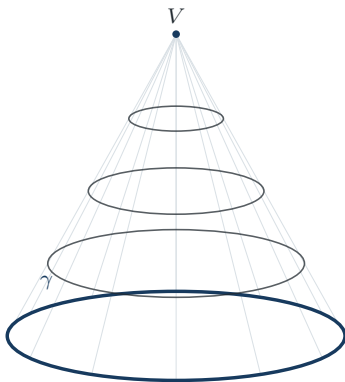


Figura 10.4.: Uma porção de um cone generalizado, obtida ligando o vértice aos pontos da diretriz.

Como primeiro exemplo, tome $a, b, c > 0$, $V = (0, 0, 0)$ e a elipse

$$\gamma(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta, c).$$

Então

$$X(\theta, v) = (av \cos \theta, bv \sin \theta, cv).$$

Eliminando os parâmetros,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = v^2 \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2} = v^2,$$

portanto

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}.$$

Essa é a forma canônica de um cone elíptico com vértice na origem. Como permitimos $v \in \mathbb{R}$, aparecem as duas partes do cone, uma para $z > 0$ e outra para $z < 0$.

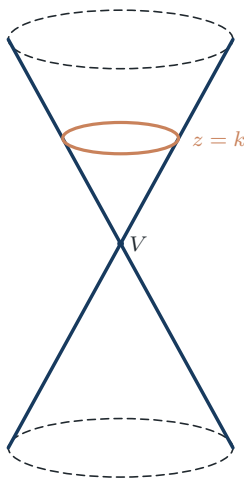


Figura 10.5.: Num cone elíptico, os cortes horizontais não nulos são elipses semelhantes.

Fixando $z = k \neq 0$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}.$$

Logo o corte é uma elipse de semieixos

$$\frac{a|k|}{c} \quad \text{e} \quad \frac{b|k|}{c}.$$

Para $k = 0$, o corte degenera no vértice. A variação linear dos semieixos com $|k|$ explica a forma cônica.

10.4. Superfícies de rotação

Outra maneira natural de gerar uma superfície é girar uma curva em torno de um eixo. Suponha que uma curva situada no plano xz seja parametrizada por

$$\gamma(t) = (\rho(t), 0, z(t)), \quad \rho(t) \geq 0.$$

Girando-a em torno do eixo z , obtemos

$$X(t, \theta) = (\rho(t) \cos \theta, \rho(t) \sin \theta, z(t)), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Para cada valor de t , variar θ produz um círculo em torno do eixo z ; variar t faz esses círculos percorrerem a superfície.

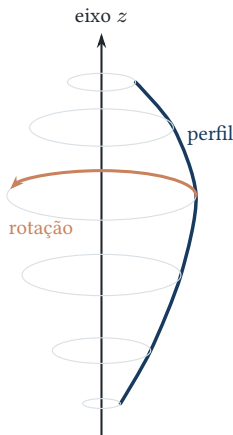


Figura 10.6.: Uma superfície de rotação é obtida girando um perfil em torno de um eixo.

Exemplo 10.6 — A esfera como superfície de rotação.

O semicírculo

$$\rho(t) = R \sin t, \quad z(t) = R \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

gera a esfera

$$X(t, \theta) = (R \sin t \cos \theta, R \sin t \sin \theta, R \cos t).$$



Nem toda superfície de rotação é uma quádrica. Um exemplo fundamental é o toro. Girando o círculo

$$(\rho - R)^2 + z^2 = r^2, \quad R > r > 0,$$

em torno do eixo z , obtemos

$$X(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

com $0 \leq u, v < 2\pi$.

Como $\rho^2 = x^2 + y^2$, a equação do perfil pode ser escrita como

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Isolando a raiz e elevando ao quadrado, obtemos

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2),$$

que é uma equação de grau quatro.

O toro mostra que as ideias de parametrização, geração e cortes são mais gerais que o estudo das quádricas.

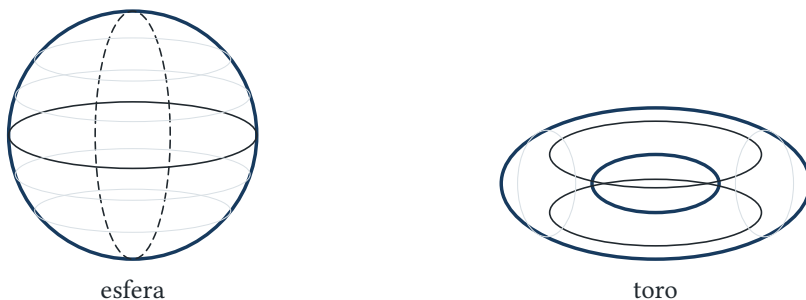


Figura 10.7.: Duas superfícies de rotação. A esfera é uma quádras; o toro não é.

10.5. Entender uma superfície por seus cortes

Uma das técnicas mais eficientes para visualizar uma superfície é intersectá-la com planos simples. Chamaremos de **traços** as interseções com os planos coordenados

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

e estudaremos também as seções por planos paralelos a eles,

$$x = k, \quad y = k, \quad z = k.$$

Em cada caso, uma das coordenadas passa a ter valor fixo e a equação restante descreve uma curva no plano de corte, um conjunto degenerado ou o conjunto vazio.

Exemplo 10.7 – Paraboloide elíptico.

Considere

$$z = x^2 + y^2.$$

No plano $z = k$ obtemos

$$x^2 + y^2 = k.$$

Para $k > 0$, o corte é um círculo de raio $\sqrt{k}$; para $k = 0$, reduz-se à origem; para $k < 0$, é vazio. Já os traços nos planos $x = 0$ e $y = 0$ são parábolas:

$$z = y^2 \quad \text{e} \quad z = x^2.$$

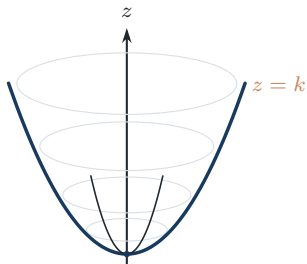


Figura 10.8.: Cortes horizontais do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Exemplo 10.8 – Parabolóide hiperbólico.

Agora considere

$$z = x^2 - y^2.$$

Os traços e cortes horizontais contam quase toda a história:

$$\begin{aligned} y = 0 &\implies z = x^2, \\ x = 0 &\implies z = -y^2, \\ z = k &\implies x^2 - y^2 = k. \end{aligned}$$

Assim, duas parábolas em planos perpendiculares têm concavidades opostas, enquanto os cortes horizontais são hipérboles quando $k \neq 0$. Para $k = 0$, a equação

$$x^2 - y^2 = 0$$

fatora-se como $(x - y)(x + y) = 0$, produzindo as duas retas $y = \pm x$. Essa combinação de cortes é a geometria típica de uma sela.

◁

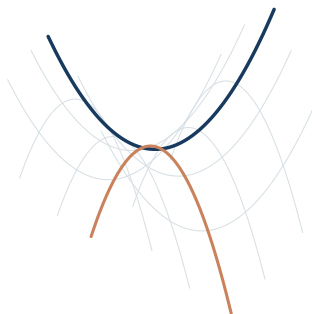


Figura 10.9.: O parabolóide hiperbólico visto por duas famílias de parábolas.

A estratégia dos cortes será nosso principal instrumento para reconhecer as quádras sem depender de memorização mecânica.

10.6. Superfícies quádras em posição canônica

Definição 10.9 Superfície quádras

Uma **superfície quádras** é o conjunto de pontos (x, y, z) que satisfazem uma equação de segundo grau

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

em que pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E, F é não nulo.

A definição inclui casos degenerados e até equações sem pontos reais; voltaremos a eles no final do capítulo.

Nesta seção estudaremos as quádras em **posição canônica**: não há termos mistos como xy , xz e yz , os eixos geométricos relevantes estão alinhados com os eixos coordenados e o centro, vértice ou ponto de sela está na origem, conforme o caso. Nas formas abaixo, a, b, c serão sempre números positivos.

10.6.1. Elipsoides

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

descreve um **elipsoide**. A superfície é limitada e intercepta os eixos em

$$(\pm a, 0, 0), \quad (0, \pm b, 0), \quad (0, 0, \pm c).$$

Fixando $z = k$, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Há elipses para $|k| < c$, um único ponto para $|k| = c$ e nenhum ponto para $|k| > c$. Os traços $x = 0$ e $y = 0$ também são elipses.

Quando $a = b = c = R$, recuperamos a esfera de raio R .

10.6.2. Hiperboloide de uma folha

A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

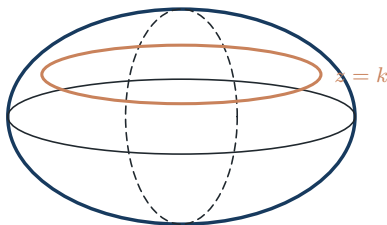


Figura 10.10.: Um elipsoide e um de seus cortes horizontais.

descreve um **hiperboloide de uma folha**. Os cortes horizontais satisfazem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2},$$

portanto são elipses para todo k . A menor ocorre em $z = 0$; à medida que $|z|$ cresce, seus semieixos aumentam.

Nos planos coordenados verticais obtemos hipérboles:

$$y = 0 \implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0 \implies \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

O eixo da superfície é o eixo z , correspondente ao termo cujo sinal difere dos outros dois.

10.6.3. Hiperboloide de duas folhas

A equação

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

descreve um **hiperboloide de duas folhas**. Agora

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

Para $|k| > c$ o corte é uma elipse; para $|k| = c$ é um ponto; para $|k| < c$ não há pontos. Assim, entre os planos $z = -c$ e $z = c$ existe uma região que não encontra a superfície. Os dois pontos $(0, 0, \pm c)$ são os vértices das duas folhas.

Nos planos $x = 0$ e $y = 0$ aparecem hipérboles que se abrem na direção do eixo z .

No hiperboloide de duas folhas, o eixo da superfície é determinado pelo termo positivo isolado na forma acima. Permutações das variáveis produzem as mesmas geometrias orientadas ao longo de outros eixos coordenados.



Figura 10.11.: Os dois tipos de hiperbolóide. Os cortes horizontais distinguem imediatamente as geometrias.

10.6.4. Cone elíptico

Já encontramos a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ela se parece com a do hiperbolóide de uma folha, mas o lado direito é zero. Se (x, y, z) satisfaz essa equação, então (tx, ty, tz) também a satisfaz para todo $t \in \mathbb{R}$. Geometricamente, isso significa que cada ponto da superfície pertence a uma reta geratriz que passa pela origem.

Os cortes $z = k \neq 0$ são elipses semelhantes e o corte $z = 0$ reduz-se ao vértice. Já os traços $x = 0$ e $y = 0$ são pares de retas concorrentes.

10.6.5. Paraboloide elíptico

A forma canônica

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

descreve um **paraboloide elíptico**. Os cortes $z = k > 0$ são elipses; para $k = 0$ resta apenas o vértice e para $k < 0$ não há pontos. Os traços nos planos $x = 0$ e $y = 0$ são parábolas que se abrem no sentido positivo do eixo z .

Mudando simultaneamente os sinais,

$$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

obtemos um paraboloide elíptico que se abre no sentido negativo do eixo z .

10.6.6. Paraboloide hiperbólico

A forma

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

descreve um **paraboloide hiperbólico**. O traço $y = 0$ é uma parábola que se abre para $z > 0$, enquanto o traço $x = 0$ é uma parábola que se abre para $z < 0$.

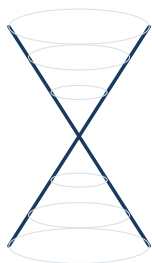
Os cortes horizontais são hipérbolas para $k \neq 0$. Para $z = 0$ obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

ou seja,

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

A origem é o **ponto de sela**, não um vértice no mesmo sentido usado para o paraboloide elíptico.



cone elíptico



paraboloide elíptico



paraboloide hiperbólico

Figura 10.12.: Cone e paraboloides em posição canônica. No paraboloide hiperbólico, a origem é um ponto de sela.

10.6.7. Cilindros quádricos

Também são quádricas as superfícies em que uma das variáveis está ausente. Entre elas aparecem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = ax^2 \quad (a \neq 0),$$

que são, respectivamente, cilindros elíptico, hiperbólico e parabólico, todos com geratrizes paralelas ao eixo z .

10.7. Um catálogo guiado pelos cortes

Em vez de memorizar figuras isoladas, é mais útil organizar as formas canônicas pelo comportamento de seus cortes. A tabela abaixo serve como mapa de leitura.

Superfície	Forma canônica típica	Cortes característicos
Elipsoide	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$	elipses; superfície limitada
Hiperboloide de uma folha	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$	elipses para todo z ; hipérboles verticais
Hiperboloide de duas folhas	$-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$	elipses para $ z > c$; pontos em $z = \pm c$
Cone elíptico	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$	elipses horizontais não nulas; retas pelo vértice
Paraboloide elíptico	$z = x^2/a^2 + y^2/b^2$	elipses horizontais; parábolas verticais
Paraboloide hiperbólico	$z = x^2/a^2 - y^2/b^2$	hipérboles horizontais; parábolas de concavidades opostas
Cilindro quádrico	uma variável ausente	uma curva plana transportada numa direção fixa

Algumas regras ajudam a orientar o reconhecimento quando a equação já não possui termos mistos:

- três termos quadráticos com o mesmo sinal levam ao tipo elipsoidal; dependendo da constante, podemos ter um elipsoide, um ponto ou o conjunto vazio;
- três termos quadráticos com sinais mistos e lado direito 1 levam a um hiperboloide: dois sinais positivos e um negativo dão uma folha; um positivo e dois negativos dão duas folhas;
- três termos quadráticos com sinais mistos e lado direito 0 dão um cone elíptico não degenerado;
- dois termos quadráticos e uma variável de primeiro grau levam a paraboloides: sinais iguais dão o tipo elíptico e sinais opostos dão o tipo hiperbólico;
- a ausência de uma variável sugere um cilindro, desde que a equação nas outras duas variáveis descreva uma curva não degenerada.

Essas regras são um começo, não um substituto para os cortes. Quando houver dúvida, cortar a superfície é quase sempre a maneira mais segura de entender sua geometria.

10.8. Translações: quádras fora da origem

As formas canônicas anteriores foram escritas com seus pontos especiais na origem apenas para tornar a geometria transparente. Uma translação desloca a superfície sem mudar sua forma.

Por exemplo,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

é um elipsoide de centro (x_0, y_0, z_0) , enquanto

$$z - z_0 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

é um parabolóide elíptico de vértice (x_0, y_0, z_0) .

Quando não há termos mistos, a ferramenta algébrica natural para revelar uma translação é completar quadrados.

Exemplo 10.10 – Reconhecendo uma quádras transladada.

Considere

$$4x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 2y + 4z - 4 = 0.$$

Agrupando os termos de cada variável,

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) - (z^2 - 4z) - 4 = 0.$$

Como

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1,$$

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1,$$

e

$$z^2 - 4z = (z - 2)^2 - 4,$$

obtemos

$$4(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - (z - 2)^2 = 5.$$

Dividindo por 5,

$$\frac{(x - 1)^2}{5/4} + \frac{(y + 1)^2}{5} - \frac{(z - 2)^2}{5} = 1.$$

Trata-se de um hiperbolóide de uma folha, com centro em $(1, -1, 2)$ e eixo paralelo ao eixo z .

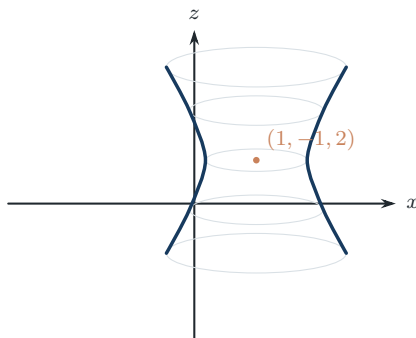


Figura 10.13.: Completar quadrados revela o centro de uma quádras transladada. A figura é esquemática.

10.9. Um procedimento para reconhecer superfícies

Diante de uma equação de segundo grau em três variáveis, o roteiro abaixo costuma ser eficiente.

1. **Procure variáveis ausentes.** Se uma delas não aparece, verifique se a equação nas outras duas descreve uma curva; nesse caso temos um cilindro.
2. **Procure termos mistos** xy , xz ou yz . Se eles aparecem, a superfície pode estar simplesmente girada em relação aos eixos coordenados. Não tente eliminá-los completando quadrados separadamente.
3. **Se não houver termos mistos, agrupe os termos por variável** e complete quadrados quando houver termos lineares associados a termos quadráticos.
4. **Translade mentalmente a origem** para o centro, vértice ou ponto de sela indicado pelos quadrados completos.
5. **Normalize a equação.** Quando possível, escreva-a com lado direito 1 ou 0.
6. **Observe os sinais** dos termos quadráticos e compare com as formas canônicas.
7. **Confirme por cortes**, em particular nos planos coordenados e em planos paralelos a eles que passem pelo ponto especial da superfície.

Exemplo 10.11.

A equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z = 0$$

pode ser escrita como

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Há dois termos quadráticos de mesmo sinal e a terceira variável aparece em primeiro grau. Isso sugere um parabolóide elíptico. De fato, $z = k > 0$ produz elipses e os planos $x = 0$ e $y = 0$ produzem parábolas.



Nem toda equação quadrática descreve uma superfície bidimensional não vazia. Por exemplo,

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = -1$$

não possui pontos reais, enquanto

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$$

possui apenas a origem. Isso nos leva naturalmente aos casos degenerados.

10.10. Quádras degeneradas

Uma equação de segundo grau pode representar um objeto de dimensão menor, uma união de objetos mais simples ou até o conjunto vazio. Alguns exemplos são particularmente instrutivos:

$$x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0,$$

que descreve um plano;

$$x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1,$$

que descreve dois planos paralelos;

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - y)(x + y) = 0,$$

que descreve a união dos planos $x = y$ e $x = -y$;

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0,$$

que descreve o eixo z ;

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

que descreve apenas a origem; e

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1,$$

que não possui pontos reais.

Esses casos não são exceções artificiais. Eles aparecem naturalmente quando uma forma canônica perde dimensão ou quando certos parâmetros atingem valores críticos.

10.11. Além da posição canônica

Na equação geral de uma quádrica podem aparecer termos mistos:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Eles sinalizam que os eixos coordenados escolhidos podem não estar alinhados com as direções geométricas mais simples da superfície.

Por exemplo,

$$x^2 + 3y^2 + 2xy + z^2 = 1$$

possui o termo misto xy . Isso não cria uma nova família de superfícies. Uma rotação apropriada dos eixos no plano xy elimina esse termo e revela uma forma canônica.

O capítulo seguinte estudará detalhadamente esse mecanismo para equações quadráticas no plano. Mais adiante, no capítulo final, voltaremos ao problema em três dimensões. Usaremos então a versão espacial do teorema dos eixos principais: uma escolha adequada de eixos cartesianos elimina simultaneamente os termos mistos xy , xz e yz .

O ponto geométrico essencial é simples: as formas canônicas estudadas acima são os modelos fundamentais; translações e rotações mudam sua posição em relação ao sistema de coordenadas, não sua natureza geométrica. O capítulo final mostrará que, a menos de uma mudança cartesiana de coordenadas, toda quádrica se reduz a uma dessas formas ou a um caso degenerado.

Exercícios

Ex. 11.1 Determine uma parametrização para cada superfície e indique intervalos naturais para os parâmetros.

- a) $x^2 + y^2 = 9$;
- b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;
- c) $y = x^2$;
- d) $x^2 + y^2 = z^2$.

Ex. 11.2 Considere a curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t/4), \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

e o vetor $w = (0, 1, 2)$. Escreva uma parametrização do cilindro generalizado obtido transportando γ na direção w .

Ex. 11.3 Para o cilindro oblíquo

$$X(\theta, v) = (2 \cos \theta + v, 2 \sin \theta, 2v),$$

elimine os parâmetros e determine os cortes pelos planos $z = k$.

Ex. 11.4 Seja

$$\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t, 3)$$

e tome a origem como vértice. Parametrize o cone gerado por γ e elimine os parâmetros para obter uma equação cartesiana.

Ex. 11.5 Gire a parábola $z = \rho^2$ do plano ρz em torno do eixo z . Determine uma parametrização da superfície e identifique a quádras obtida.

Ex. 11.6 Verifique diretamente que a parametrização do toro dada neste capítulo satisfaz

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Ex. 11.7 Descreva os cortes pelos planos $x = k$, $y = k$ e $z = k$, quando relevantes, para as superfícies abaixo.

- a) $z = x^2 + 4y^2$;
- b) $z = x^2 - y^2$;
- c) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
- d) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

Ex. 11.8 Classifique as superfícies e indique seu eixo principal quando a equação o distinguir.

- a) $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$;
- b) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$;
- c) $-x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$;
- d) $x^2 + 4y^2 - z = 0$;
- e) $x^2 - y^2 - z = 0$;
- f) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$.

Ex. 11.9 Complete quadrados e identifique o ponto especial da superfície, seu tipo e sua orientação principal.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$;
- b) $4x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 2y + 4z - 4 = 0$;
- c) $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7$;
- d) $x^2 - y^2 - z + 2x + 4y - 3 = 0$.

Ex. 11.10 Explique por que uma equação em três variáveis na qual z não aparece é invariável por translações paralelas ao eixo z . Em que condições isso produz um cilindro?

Ex. 11.11 No hiperboloide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

mostre que os semieixos do corte $z = k$ são

$$a\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}} \quad \text{e} \quad b\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}.$$

Ex. 11.12 No cone elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

mostre que dois cortes horizontais não nulos são elipses semelhantes. Determine o fator de escala que leva o corte $z = k_1$ ao corte $z = k_2$.

Ex. 11.13 Descreva geometricamente os conjuntos definidos por

- a) $x^2 = 0$;
- b) $x^2 = 1$;
- c) $x^2 + y^2 = 0$;
- d) $x^2 - y^2 = 0$;
- e) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
- f) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$.

Ex. 11.14 A equação

$$x^2 + 3y^2 + 2xy + z^2 = 1$$

não está em posição canônica por causa do termo xy . Sem calcular explicitamente o ângulo da rotação, explique por que uma rotação adequada no plano xy deve revelar um elipsoide.

Ex. 11.15 Parametrize o elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

a partir de uma parametrização da esfera unitária e verifique diretamente sua equação.

O estudo das superfícies completa uma passagem importante da geometria analítica: de objetos descritos por uma única direção ou por um único parâmetro para objetos que, em geral, exigem dois parâmetros. A partir daqui, rotações e mudanças de coordenadas deixarão de ser apenas técnicas algébricas e passarão a funcionar como instrumentos para revelar a geometria escondida numa equação.

10.12. Exemplos resolvidos adicionais

Os exemplos a seguir combinam as ideias centrais do capítulo. O objetivo não é apenas reconhecer uma forma canônica, mas passar de uma descrição a outra e usar a geometria para decidir o que calcular.

Exemplo 10.12 — Parametrizando um elipsoide a partir da esfera.

Encontre uma parametrização do elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

a partir da parametrização usual da esfera unitária.



Solução. A esfera unitária pode ser parametrizada por

$$(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

O elipsoide é obtido esticando a esfera por fatores 3, 2 e 4 nas direções dos eixos x , y e z , respectivamente. Portanto tomamos

$$X(\varphi, \theta) = (3 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 4 \cos \varphi).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} &= \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \\ &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

O cálculo também mostra a ideia geométrica da parametrização: não começamos tentando adivinhar três fórmulas; partimos de uma superfície conhecida e aplicamos uma deformação simples.



Exemplo 10.13 — Um cone determinado por vértice e diretriz.

Considere o ponto

$$V = (1, -2, 3)$$

e, no plano $z = 7$, a elipse

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Encontre uma parametrização e uma equação cartesiana do cone cujas geratrizes passam por V e pelos pontos dessa elipse.



Solução. Uma parametrização da elipse diretriz é

$$\gamma(\theta) = (1 + 3 \cos \theta, -2 + 2 \sin \theta, 7).$$

Cada geratriz passa por V e por $\gamma(\theta)$, logo

$$X(\theta, s) = V + s(\gamma(\theta) - V).$$

Como

$$\gamma(\theta) - V = (3 \cos \theta, 2 \sin \theta, 4),$$

obtemos

$$X(\theta, s) = (1 + 3s \cos \theta, -2 + 2s \sin \theta, 3 + 4s).$$

Para eliminar os parâmetros, observamos que

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = s^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = s^2,$$

enquanto

$$\frac{(z-3)^2}{16} = s^2.$$

Portanto

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(z-3)^2}{16} = 0.$$

A equação revela imediatamente o vértice $(1, -2, 3)$ e o eixo paralelo a z . Para $s = 1$ recuperamos exatamente a elipse dada; para $s = 0$ obtemos o vértice; valores negativos de s produzem a outra parte do cone.



Exemplo 10.14 – De hipérboles a hiperboloides de uma e duas folhas.

Considere, no plano ρz , as hipérboles

$$\frac{\rho^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{9} - \frac{\rho^2}{4} = 1.$$

Gire cada uma delas em torno do eixo z e identifique geometricamente as superfícies obtidas.



Solução. Ao girar em torno de z , a distância ρ ao eixo satisfaz

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

A primeira hipérbole produz, portanto,

$$\frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1,$$

que é um hiperboloide de uma folha. Para entender por que existe apenas uma componente, fazemos o corte $z = k$:

$$x^2 + y^2 = 4 \left(1 + \frac{k^2}{9} \right).$$

Há um círculo para todo valor de k , e o menor deles ocorre em $z = 0$, com raio 2.

Para a segunda hipérbole obtemos

$$\frac{z^2}{9} - \frac{x^2 + y^2}{4} = 1,$$

um hiperboloide de duas folhas. Agora

$$x^2 + y^2 = 4 \left(\frac{k^2}{9} - 1 \right).$$

Não há pontos quando $|k| < 3$; para $k = \pm 3$ resta um único ponto; e para $|k| > 3$ aparecem círculos. A região vazia entre $z = -3$ e $z = 3$ separa as duas folhas.

Assim, a diferença entre os dois hiperboloides já estava presente nas duas orientações possíveis da hipérbole geradora.

◀

Exemplo 10.15 — Uma seção oblíqua de um parabolóide.

Determine a curva de interseção entre o parabolóide

$$z = x^2 + y^2$$

e o plano

$$z = 2x.$$

Encontre também uma parametrização dessa curva e identifique sua forma geométrica dentro do plano de corte.

◀

Solução. Os pontos da interseção devem satisfazer simultaneamente as duas equações. Eliminando z ,

$$x^2 + y^2 = 2x,$$

ou

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

A projeção da curva sobre o plano xy é, portanto, o círculo de centro $(1, 0)$ e raio 1. Podemos parametrizá-lo por

$$x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t.$$

Como $z = 2x$,

$$z = 2 + 2 \cos t.$$

Logo uma parametrização da curva espacial é

$$X(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 + 2 \cos t), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Escrevendo

$$X(t) = (1, 0, 2) + \cos t (1, 0, 2) + \sin t (0, 1, 0),$$

notamos que os vetores $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 0)$ são ortogonais e têm comprimentos $\sqrt{5}$ e 1. Portanto a curva, vista dentro do próprio plano $z = 2x$, é uma elipse de semieixos $\sqrt{5}$ e 1.

Esse exemplo mostra por que a aparência de uma seção depende do plano em que a observamos: sua projeção no plano xy é circular, mas a curva espacial é uma elipse no plano oblíquo que a contém.



Exemplo 10.16 — Completar quadrados e localizar uma sela.

Identifique a superfície

$$x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - z + 5 = 0$$

e descreva os cortes pelos três planos que passam pelo seu ponto central e são paralelos aos planos coordenados.



Solução. Agrupando os termos em x e y ,

$$(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 2y) - z + 5 = 0.$$

Completando quadrados,

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$$

e

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1.$$

Logo

$$(x - 1)^2 - 1 - 4((y + 1)^2 - 1) - z + 5 = 0,$$

isto é,

$$z - 8 = (x - 1)^2 - 4(y + 1)^2.$$

Trata-se de um parabolóide hiperbólico com ponto de sela

$$S = (1, -1, 8).$$

Os três cortes principais por planos que passam por S são especialmente informativos.

No plano $y = -1$,

$$z - 8 = (x - 1)^2,$$

uma parábola que se abre para cima. No plano $x = 1$,

$$z - 8 = -4(y + 1)^2,$$

uma parábola que se abre para baixo. Finalmente, no plano horizontal $z = 8$,

$$(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 0,$$

que se fatora como

$$(x - 1 - 2(y + 1))(x - 1 + 2(y + 1)) = 0.$$

O corte horizontal crítico é, portanto, a união de duas retas concorrentes. As duas parábolas de concavidades opostas e esse par de retas tornam a geometria de sela visível sem depender de uma figura tridimensional.



10.13. Reconhecimento por cortes

Reconhecer uma superfície não deve ser apenas comparar uma equação com uma tabela. Em muitos casos, os cortes por planos simples revelam a geometria de maneira mais segura: mostram onde a superfície existe, como suas seções mudam e quais curvas aparecem nos planos coordenados. Nos exemplos a seguir, cada identificação será confirmada por cortes.

Exemplo 10.17 — Um parabolóide reconhecido pela evolução das elipses.

Identifique a superfície

$$4x^2 + 9y^2 = 36z$$

e descreva como seus cortes horizontais variam com a altura.



Solução. Isolando z ,

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

Os dois termos quadráticos aparecem com o mesmo sinal e $z \geq 0$. Isso já sugere um parabolóide elíptico que se abre no sentido positivo do eixo z .

A informação decisiva vem dos cortes horizontais. No plano $z = k$,

$$4x^2 + 9y^2 = 36k.$$

Se $k < 0$, não há pontos. Se $k = 0$, resta apenas a origem. Para $k > 0$,

$$\frac{x^2}{9k} + \frac{y^2}{4k} = 1,$$

portanto o corte é uma elipse de semieixos

$$3\sqrt{k} \quad \text{e} \quad 2\sqrt{k}.$$

As elipses crescem à medida que o plano sobe.

Os traços verticais confirmam essa leitura. Se $y = 0$,

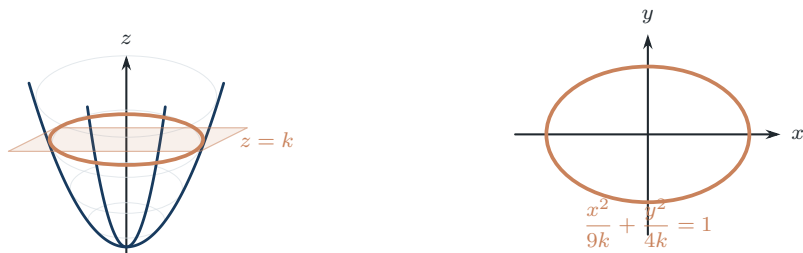
$$z = \frac{x^2}{9},$$

e, se $x = 0$,

$$z = \frac{y^2}{4};$$

ambos são parábolas que se abrem para cima. Logo a superfície é um **parabolóide elíptico** com vértice na origem.





a lâmina $z = k$ corta a superfície numa elipse

a mesma fatia vista de frente

Figura 10.14.: No paraboloide elíptico, os cortes horizontais são elipses que nascem no vértice e crescem com k .

Exemplo 10.18 — Uma folha ou duas?.

Considere as superfícies

$$S_1 : 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 16$$

e

$$S_2 : 4z^2 - x^2 - y^2 = 16.$$

Sem se apoiar apenas no padrão dos sinais, use os cortes horizontais para explicar por que S_1 possui uma folha e S_2 possui duas.



Solução. Para S_1 , fixando $z = k$,

$$4x^2 + 4y^2 = 16 + k^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 = 4 + \frac{k^2}{4}.$$

Para todo $k \in \mathbb{R}$ há um círculo. A superfície nunca desaparece quando percorremos o eixo z . O menor círculo ocorre em $z = 0$, com raio 2; depois os círculos voltam a crescer. Essa “cintura” liga a parte superior à inferior, portanto S_1 é um **hiperboloide de uma folha**.

Para S_2 , no plano $z = k$,

$$x^2 + y^2 = 4k^2 - 16 = 4(k^2 - 4).$$

Agora o comportamento muda:

- se $|k| < 2$, não há pontos;

- se $k = \pm 2$, o corte reduz-se a um ponto;
- se $|k| > 2$, o corte é um círculo.

Há, portanto, uma faixa inteira do espaço, $-2 < z < 2$, que não encontra a superfície. Isso separa duas componentes: S_2 é um **hiperboloide de duas folhas**.

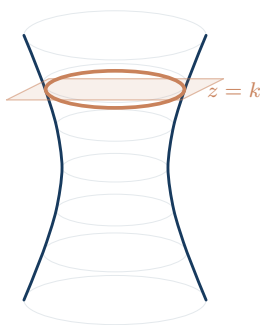
Os traços verticais também distinguem a orientação. Em S_1 , por exemplo, o plano $y = 0$ produz

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1,$$

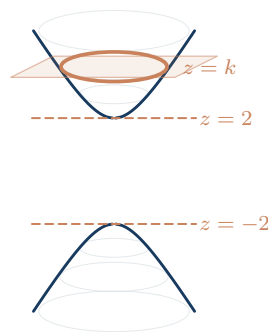
enquanto, em S_2 , o mesmo plano produz

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

São hipérboles com eixos transversos em direções diferentes.



uma folha: existe corte para todo k



duas folhas: contorno suave e faixa sem pontos

Figura 10.15.: Os cortes horizontais tornam visível a diferença essencial entre os dois hiperboloides.



Exemplo 10.19 – Uma sela reconhecida antes de desenhar a superfície.

Considere

$$9z = 9x^2 - 4y^2.$$

Identifique a superfície usando apenas três cortes bem escolhidos e descreva como os cortes horizontais mudam quando o sinal de z muda.



Solução. Escrevendo

$$z = x^2 - \frac{4}{9}y^2,$$

notamos dois termos quadráticos com sinais opostos. Os traços verticais mostram imediatamente o conflito entre as duas direções principais.

No plano $y = 0$,

$$z = x^2,$$

uma parábola que se abre para cima. No plano $x = 0$,

$$z = -\frac{4}{9}y^2,$$

uma parábola que se abre para baixo. Logo a superfície sobe numa direção e desce na direção perpendicular.

O corte crítico é $z = 0$:

$$x^2 - \frac{4}{9}y^2 = 0,$$

portanto

$$y = \pm \frac{3}{2}x.$$

A fatia horizontal que passa pela origem não é uma hipérbole, mas duas retas concorrentes.

Para $z = k \neq 0$,

$$x^2 - \frac{4}{9}y^2 = k.$$

Quando $k > 0$, a hipérbole abre na direção do eixo x ; quando $k < 0$, podemos reescrever

$$\frac{4}{9}y^2 - x^2 = -k,$$

e a hipérbole abre na direção do eixo y . A mudança de orientação ao atravessar $z = 0$ é uma assinatura muito clara do **parabolóide hiperbólico**. A origem é seu ponto de sela.

◀

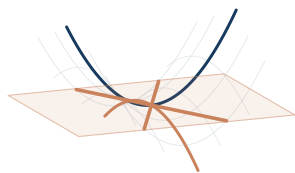
Exemplo 10.20 — Quando a ausência de uma variável engana.

Considere as equações

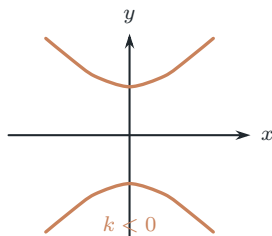
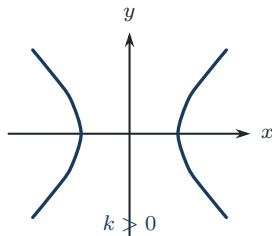
$$S_1 : x^2 + 4y^2 = 4$$

e

$$S_2 : x^2 + 4y^2 = 0.$$



no corte crítico $z = 0$, a fatia é um par de retas



a orientação das hipérboles troca ao atravessar $z = 0$

Figura 10.16.: Os cortes de um parabolóide hiperbólico mudam qualitativamente quando passamos de $z > 0$ para $z < 0$.

Em ambas a variável z está ausente. Explique por que apenas a primeira representa um cilindro elíptico não degenerado.



Solução. Em S_1 , a equação no plano xy é

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

uma elipse. Como z é livre, essa elipse é transportada paralelamente ao eixo z . Assim, S_1 é um cilindro elíptico.

Em S_2 ,

$$x^2 + 4y^2 = 0.$$

Como os dois termos são não negativos, a única possibilidade é

$$x = 0, \quad y = 0.$$

A coordenada z continua livre, mas o conjunto obtido não é uma superfície: é apenas o eixo z .

Portanto a regra “variável ausente implica cilindro” precisa ser usada com uma condição: a equação nas outras duas variáveis deve descrever uma curva plana não

degenerada. Este exemplo é útil justamente porque a mesma pista algébrica conduz a objetos de dimensões diferentes.



Classificação das Cônicas

Nos capítulos anteriores estudamos as cônicas em posições especialmente simples. O problema agora é o inverso: dada uma equação quadrática geral

$$Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

como reconhecer a curva que ela descreve?

A ideia deste capítulo é escolher coordenadas que revelem a geometria escondida na equação. Usaremos duas operações fundamentais:

- **translação da origem:** os eixos mantêm suas direções, mas a origem muda;
- **rotação dos eixos:** a origem permanece fixa e a base ortonormal é girada.

A translação permite controlar os termos lineares; a rotação permite eliminar o termo misto xy . Depois dessas duas operações, completar quadrados conduz às formas canônicas e torna possível classificar a cônica, inclusive nos casos degenerados.

Ao longo do capítulo adotaremos o ponto de vista *passivo*: a curva geométrica não se move; apenas mudamos o sistema cartesiano usado para descrevê-la.

11.1. Translação

Seja

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

uma base ortonormal e considere os sistemas cartesianos

$$\Sigma = (O, \mathcal{B}), \quad \Sigma' = (O', \mathcal{B}),$$

que possuem a mesma base e origens distintas. Se O' possui coordenadas (h, k) em Σ , e um ponto P possui coordenadas (x, y) em Σ e (x', y') em Σ' , então

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Logo

$$(x, y) = (h, k) + (x', y'),$$

ou seja,

$$x = x' + h, \quad y = y' + k. \quad (11.1)$$

A transformação inversa é

$$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

Geometricamente, nada aconteceu com o ponto P : apenas suas coordenadas mudaram porque a origem mudou.

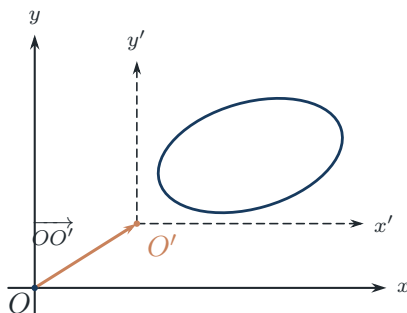


Figura 11.1.: Uma translação altera a origem do sistema, mas não move a cônica.

11.2. Translação de uma Equação Quadrática

Escreva

$$f(x, y) = Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F.$$

É útil separar a parte quadrática da parte linear. Com

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix},$$

temos

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T M \mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}^T \mathbf{x} + F.$$

Faça agora a translação

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Substituindo e agrupando os termos,

$$f(\mathbf{x}' + \mathbf{h}) = (\mathbf{x}')^T M \mathbf{x}' + (2M\mathbf{h} + \boldsymbol{\ell})^T \mathbf{x}' + f(\mathbf{h}).$$

Portanto os termos lineares desaparecem exatamente quando

$$2M\mathbf{h} + \boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}. \quad (11.2)$$

Em coordenadas, isso significa

$$\begin{cases} 2Ah + Ck + D = 0, \\ Ch + 2Bk + E = 0. \end{cases}$$

Se

$$\det M = AB - \frac{C^2}{4} \neq 0,$$

ou equivalentemente $4AB - C^2 \neq 0$, existe uma única translação que elimina ambos os termos lineares. Quando $\det M = 0$, o sistema pode não ter solução ou pode ter infinitas soluções.

Observe também que o termo constante na nova equação é simplesmente

$$F' = f(h, k),$$

e não precisa ser zero.

Exemplo 11.1.

Elimine os termos lineares de

$$x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0.$$



Solução. As equações para a nova origem são

$$\begin{cases} 2h - 5k - 1 = 0, \\ -5h - 22k + 37 = 0. \end{cases}$$

A solução é $(h, k) = (3, 1)$. Fazendo

$$x = x' + 3, \quad y = y' + 1,$$

obtemos

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + 69 = 0.$$

A translação eliminou os termos lineares, mas o termo misto permanece. Ele será removido por uma rotação.



Exemplo 11.2.

Elimine os termos lineares de

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0.$$



Solução. Devemos resolver

$$\begin{cases} 8h - 4k + 12 = 0, \\ -4h + 14k + 6 = 0. \end{cases}$$

Daí $(h, k) = (-2, -1)$. Como

$$f(-2, -1) = -24,$$

a equação nas novas coordenadas é

$$4(x')^2 - 4x'y' + 7(y')^2 - 24 = 0.$$



Exercícios

Ex. 2.1 Em cada item, use uma translação dos eixos para transformar a equação, tomando como nova origem o ponto indicado.

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$, nova origem $(-1, 3)$;

2. $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$, nova origem $(-2, 1)$;

3. $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$, nova origem $(-2, -1)$;

4. $xy - 3x + 4y - 13 = 0$, nova origem $(-4, 3)$.

Ex. 2.2 Em cada item, determine uma translação que elimine os termos do primeiro grau e escreva a equação nas novas coordenadas.

$$1. 2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0;$$

$$2. 3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0;$$

$$3. xy - x + 2y - 10 = 0.$$

Ex. 2.3 Dada uma equação quadrática em duas variáveis $Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, prove que, se $4AB - C^2 \neq 0$, é possível eliminar os termos lineares por uma translação. Verifique que a recíproca não é verdadeira mostrando que

$$4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + y = 0$$

satisfaz $4AB - C^2 = 0$ e, mesmo assim, admite infinitas translações que eliminam os termos lineares.

Ex. 2.4 Prove que, na equação $f(x, y) = Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, quando a origem é transladada para (h, k) , o termo constante da nova equação é $f(h, k)$.

11.3. Rotação

Sejam

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = (f_1, f_2),$$

onde $\mathcal{C}$ é obtida girando a base $\mathcal{B}$ de um ângulo α no sentido anti-horário. Considere os sistemas cartesianos

$$\Sigma = (O, \mathcal{B}), \quad \Sigma' = (O, \mathcal{C}).$$

Se (x, y) e (x', y') são as coordenadas do mesmo ponto nos dois sistemas, então

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \tag{11.3}$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \tag{11.4}$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Como R_α é ortogonal,

$$R_\alpha^{-1} = R_\alpha^T.$$

Na notação de matrizes de mudança de base, que será sistematizada no Capítulo 12, essa convenção significa

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = R_\alpha, \quad M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = R_\alpha^T.$$

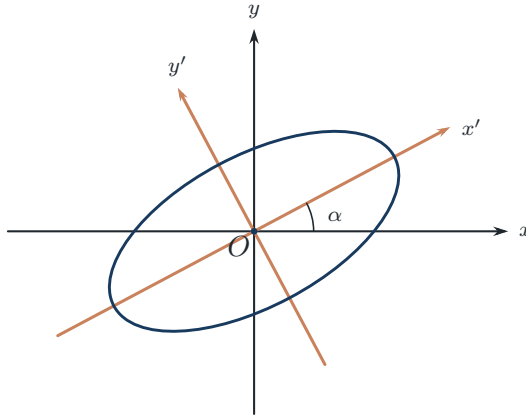


Figura 11.2.: A rotação dos eixos pode alinhar o sistema com os eixos principais da cônica.

11.3.1. Eliminando o termo misto

Considere novamente a parte quadrática

$$Q(x, y) = Ax^2 + Cxy + By^2 = \mathbf{x}^T M \mathbf{x}, \quad M = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}.$$

Sob a rotação $\mathbf{x} = R_\alpha \mathbf{x}'$, temos

$$Q = (\mathbf{x}')^T (R_\alpha^T M R_\alpha) \mathbf{x}'.$$

Assim, a matriz da forma quadrática no novo sistema é

$$M' = R_\alpha^T M R_\alpha.$$

O coeficiente C' do termo $x'y'$ é

$$C' = C \cos(2\alpha) + (B - A) \sin(2\alpha).$$

Portanto a rotação elimina o termo misto quando

$$C \cos(2\alpha) + (B - A) \sin(2\alpha) = 0. \quad (11.5)$$

Se $C \neq 0$, uma forma equivalente é

$$\cot(2\alpha) = \frac{A - B}{C}.$$

Duas quantidades permanecem invariantes sob rotação:

$$A' + B' = A + B$$

e

$$A'B' - \frac{(C')^2}{4} = AB - \frac{C^2}{4}.$$

Em particular, o sinal de

$$C^2 - 4AB$$

não depende da orientação escolhida para os eixos.

Exemplo 11.3.

Considere novamente

$$4(x')^2 - 4x'y' + 7(y')^2 - 24 = 0.$$

Aqui $A = 4$, $B = 7$ e $C = -4$. A condição (11.5) pode ser escrita como

$$\cot(2\alpha) = \frac{4 - 7}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Os dois coeficientes quadráticos após a rotação são 3 e 8. Escolhendo a ordem dos novos eixos de modo conveniente, obtemos

$$3u^2 + 8v^2 = 24,$$

ou

$$\frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{3} = 1.$$



11.3.2. Eixos principais no plano

A fórmula para C' mostra que o termo misto não é uma característica intrínseca da cônica: ele pode surgir apenas porque os eixos escolhidos não estão alinhados com as direções mais simples da curva.

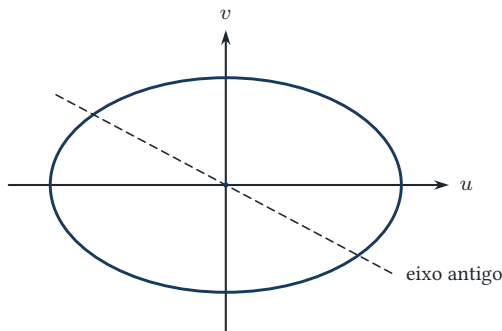


Figura 11.3.: No sistema de eixos principais, o exemplo revela diretamente a elipse $u^2/8 + v^2/3 = 1$.

Teorema 11.4 Eixos principais no plano

Para toda equação quadrática

$$Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

existe uma rotação dos eixos cartesianos que elimina o termo misto xy .

Demonstração. Após uma rotação de ângulo α , o coeficiente do termo misto é

$$C' = C \cos(2\alpha) + (B - A) \sin(2\alpha).$$

Se $C = 0$, o termo misto já está ausente. Suponha $C \neq 0$.

Se $A \neq B$, podemos escolher α de modo que

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{C}{A - B};$$

para essa escolha, $C' = 0$. Se $A = B$, basta tomar

$$\alpha = \frac{\pi}{4},$$

pois então $\cos(2\alpha) = 0$. Em todos os casos existe uma rotação que elimina o termo misto. ■

Os novos eixos são chamados **eixos principais** da equação quadrática. O teorema é especialmente importante porque reduz o estudo de uma equação geral do segundo grau ao caso sem termo misto, no qual completar quadrados e transladar a origem revelam a geometria.

Observação 11.5

Em Álgebra Linear, o Teorema 11.4 aparece como um caso particular do teorema espectral para matrizes reais simétricas. Não precisaremos dessa teoria aqui: no plano, a fórmula trigonométrica acima fornece diretamente a rotação necessária.

Exercícios

Ex. 3.1 Determine as novas coordenadas dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ quando os eixos coordenados são girados de 30° .

Ex. 3.2 Em cada item, transforme a equação por uma rotação dos eixos com o ângulo indicado.

$$1. 2x + 5y - 3 = 0, \alpha = \arctg(2/5);$$

$$2. x^2 - 2xy + y^2 - x = 0, \alpha = 45^\circ;$$

$$3. \sqrt{3}y^2 + 3xy - 1 = 0, \alpha = 60^\circ.$$

Ex. 3.3 Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme cada equação em outra sem termo misto xy .

$$1. 4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1;$$

$$2. 9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5;$$

$$3. x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0;$$

$$4. 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0.$$

Ex. 3.4 Prove que $A + B$ e $C^2 - 4AB$ são invariantes por rotações dos eixos.

11.4. Equações Gerais do Segundo Grau no Plano

Considere uma equação genuinamente quadrática

$$Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

isto é, pelo menos um entre A, B, C é não nulo. A parte quadrática é controlada pela matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 11.4, uma rotação elimina o termo misto. Depois disso, uma translação completa quadrados e simplifica os termos lineares. Esse procedimento produz as formas canônicas estudadas no capítulo de cônicas, inclusive os casos degenerados.

O número

$$\Delta_q = C^2 - 4AB = -4 \det M$$

é invariante por rotações e separa os três tipos principais:

- $\Delta_q < 0$: **tipo elíptico**; após a redução podemos obter uma elipse, uma circunferência, um ponto ou o conjunto vazio;
- $\Delta_q = 0$: **tipo parabólico**; podemos obter uma parábola, uma reta dupla, duas retas paralelas ou o conjunto vazio;
- $\Delta_q > 0$: **tipo hiperbólico**; podemos obter uma hipérbole ou duas retas concorrentes.

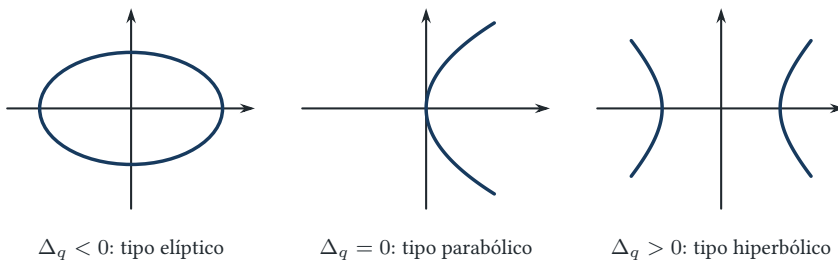


Figura 11.4.: Os três tipos determinados pelo sinal de $\Delta_q = C^2 - 4AB$. O sinal determina o tipo, não a degenerescência.

Exemplo 11.6.

Alguns casos simples ilustram a classificação:

- $x^2 + y^2 - 1 = 0$: circunferência, tipo elíptico;
- $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$: elipse, tipo elíptico;
- $x^2 + y^2 = 0$: ponto, tipo elíptico degenerado;
- $x^2 + y^2 + 1 = 0$: conjunto vazio;

- $(x + y)^2 = 0$: reta dupla, tipo parabólico degenerado;
- $(x + y)(x + y + 1) = 0$: duas retas paralelas, tipo parabólico degenerado;
- $x - y^2 = 0$: parábola;
- $x^2 - y^2 = 0$: duas retas concorrentes, tipo hiperbólico degenerado;
- $x^2 - y^2 - 1 = 0$: hipérbole.

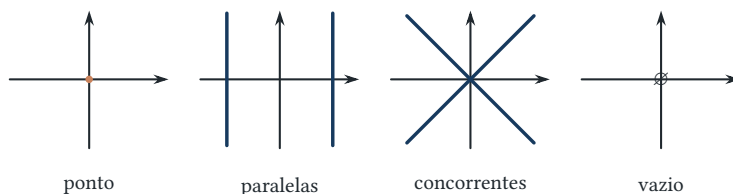


Figura 11.5.: Alguns casos degenerados que aparecem naturalmente na classificação.

Um procedimento uniforme é:

1. eliminar o termo misto por uma rotação dos eixos;
2. completar quadrados nas variáveis cujos coeficientes quadráticos são não nulos;
3. fazer uma translação para chegar à forma canônica;
4. identificar a cônica, incluindo a possibilidade de degenerescência.

Quando $\det M \neq 0$, também podemos inverter os passos: existe uma única translação que elimina de uma vez os dois termos lineares e depois uma rotação elimina o termo misto. Quando $\det M = 0$, rotacionar primeiro costuma ser mais transparente.

11.4.1. Exemplo com $\det M \neq 0$

Retomemos

$$x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0.$$

A translação $(x, y) = (x' + 3, y' + 1)$ produz

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + 69 = 0.$$

Após uma rotação que elimina o termo misto, escreva os novos coeficientes quadráticos como A' e B' . Pelos invariantes já obtidos,

$$A' + B' = A + B = -10$$

e, como $C' = 0$,

$$A'B' = AB - \frac{C^2}{4} = -11 - \frac{25}{4} = -\frac{69}{4}.$$

Logo A' e B' são as raízes de

$$t^2 + 10t - \frac{69}{4} = 0,$$

isto é,

$$A' = \frac{3}{2}, \quad B' = -\frac{23}{2},$$

possivelmente trocando a ordem dos novos eixos. Assim, nas coordenadas rotacionadas,

$$\frac{3}{2}u^2 - \frac{23}{2}v^2 + 69 = 0.$$

Equivalentemente,

$$\boxed{\frac{v^2}{6} - \frac{u^2}{46} = 1},$$

portanto a curva é uma hipérbole.

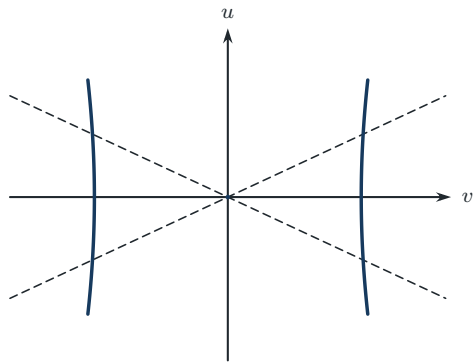


Figura 11.6.: Após translação e rotação, a hipérbole do exemplo aparece em seus eixos principais.

11.4.2. Exemplo com $\det M = 0$

Considere

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0.$$

A parte quadrática é $(x + y)^2$ e possui uma direção nula. Introduza as coordenadas rotacionadas

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}.$$

Então

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2u^2$$

e

$$-2x + 2y = 2\sqrt{2}v.$$

Logo a equação se reduz a

$$2u^2 + 2\sqrt{2}v = 0,$$

ou

$$v = -\frac{u^2}{\sqrt{2}},$$

que é uma parábola. Este exemplo mostra por que, quando $\det M = 0$, a rotação deve ser entendida antes de tentar eliminar todos os termos lineares.

Exercícios

Ex. 4.1 Identifique e esboce as curvas, indicando o centro ou o vértice, quando houver, e a direção dos eixos principais após rotação e translação.

$$1. 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 14y + 5 = 0;$$

$$2. x^2 - 5xy + 13y^2 + 7x - 31y - 37 = 0;$$

$$3. 3x^2 + 12xy + 8y^2 - 24x - 40y + 60 = 0;$$

$$4. 11x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x - 12y - 12 = 0;$$

$$5. 7x^2 - 8xy + y^2 + 14x - 8y + 16 = 0;$$

$$6. 6x^2 + 12xy + y^2 - 36x - 6y = 0;$$

$$7. 9x^2 - 15xy + y^2 + 63x = 0;$$

$$8. 25x^2 + 120xy + 144y^2 + 86x + 233y + 270 = 0;$$

$$9. 5x^2 + 120xy + 144y^2 - 312x + 130y + 156 = 0;$$

$$10. x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y - 28 = 0;$$

$$11. 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x - 3y \pm 2 = 0 \text{ (dois casos).}$$

Ex. 4.2 Classifique geometricamente os casos degenerados abaixo e compare o sinal de $\Delta_q = C^2 - 4AB$.

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0, \quad (x + y)^2 = 0,$$

$$(x + y)(x + y + 1) = 0, \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Ex. 4.3 Explique por que o sinal de Δ_q determina o tipo elíptico, parabólico ou hiperbólico, mas não decide sozinho se a cônica é não degenerada nem mesmo se possui pontos reais.

Mudanças de Coordenadas no Espaço

No Capítulo 3 vimos que uma base ordenada fornece coordenadas para vetores e que, escolhendo também uma origem, obtemos coordenadas para pontos. Na Seção 3.4 apareceu ainda um primeiro exemplo de mudança de base. Nosso objetivo agora é organizar esse procedimento de forma sistemática no espaço.

Há duas situações distintas:

- para mudar as coordenadas de um *vetor*, precisamos apenas relacionar duas bases;
- para mudar as coordenadas de um *ponto*, precisamos relacionar também as origens dos dois sistemas.

Essa distinção será mantida ao longo de todo o capítulo.

12.1. Mudança de Base

Sejam

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$$

duas bases de $\mathbb{V}^3$. Escreva os vetores de $\mathcal{B}$ em coordenadas da base $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{e}_1 : (a_{11}, a_{21}, a_{31})_{\mathcal{C}}, \quad \mathbf{e}_2 : (a_{12}, a_{22}, a_{32})_{\mathcal{C}}, \quad \mathbf{e}_3 : (a_{13}, a_{23}, a_{33})_{\mathcal{C}}.$$

Definição 12.1

A matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ é

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

As colunas de $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ são, portanto, as coordenadas dos vetores de $\mathcal{B}$ na base $\mathcal{C}$.

A seta na notação é proposital: coordenadas na base $\mathcal{B}$ entram à direita e coordenadas na base $\mathcal{C}$ saem à esquerda.

Continuaremos usando como notação principal a já adotada no livro,

$$\mathbf{v} : (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}.$$

Quando uma conta matricial exigir a coluna de coordenadas, usaremos apenas a abreviação

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Os colchetes não introduzem um novo objeto: representam somente a coluna das coordenadas do mesmo vetor $\mathbf{v}$ na base indicada.

Proposição 12.2

Se

$$\mathbf{v} : (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}} \quad e \quad \mathbf{v} : (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{C}},$$

então

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Em forma abreviada,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração. Como

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

basta substituir as expressões dos vetores $\mathbf{e}_i$ na base $\mathcal{C}$. O coeficiente de $\mathbf{f}_1$ será

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

e analogamente para $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$. Esses três coeficientes são exatamente o produto matricial acima. ■

Observação 12.3

No exemplo de mudança de base do Capítulo 3, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tinha como colunas as coordenadas de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ na base $\mathcal{B}$. Na notação deste capítulo, ela é precisamente

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}.$$

Assim, a convenção atual apenas torna explícita uma direção que já estava presente naquele exemplo.

Exemplo 12.4.

Suponha que

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 + 4\mathbf{f}_3,$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3,$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2.$$

Então

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se

$$\mathbf{v} : (1, -2, 3)_{\mathcal{B}},$$

então

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\mathbf{v} : (0, 4, 2)_{\mathcal{C}}.$$



12.2. Composição e Inversa

Mudanças de base podem ser compostas sem voltar aos vetores geométricos.

Proposição 12.5

Se $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são bases de $\mathbb{V}^3$, então

$$M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}.$$

Em particular,

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}.$$

Demonstração. Para qualquer vetor $\mathbf{v}$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

e

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}.$$

Substituindo a primeira igualdade na segunda,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

o que prova a fórmula de composição. Tomando $\mathcal{D} = \mathcal{B}$, obtemos a fórmula da inversa.



No Exemplo 12.4,

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

12.3. Mudança de Sistemas de Coordenadas

Passemos agora de vetores para pontos. Considere dois sistemas

$$\Sigma_1 = (O, \mathcal{B}) \quad \text{e} \quad \Sigma_2 = (O', \mathcal{C}).$$

Suponha que

$$O' : (s_1, s_2, s_3)_{\Sigma_1}.$$

Isso significa que

$$\overrightarrow{OO'} : (s_1, s_2, s_3)_{\mathcal{B}}.$$

Se um ponto P possui coordenadas

$$P : (x_1, x_2, x_3)_{\Sigma_1} \quad \text{e} \quad P : (y_1, y_2, y_3)_{\Sigma_2},$$

então

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}.$$

Na base $\mathcal{B}$, portanto,

$$\overrightarrow{O'P} : (x_1 - s_1, x_2 - s_2, x_3 - s_3)_{\mathcal{B}}.$$

Convertendo essas coordenadas para a base $\mathcal{C}$, obtemos a fórmula fundamental:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right]. \quad (12.1)$$

A transformação inversa é

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

A fórmula separa as duas operações: primeiro mudamos a origem por uma translação; depois mudamos a base.

Exemplo 12.6.

Considere

$$\Sigma_1 = (O, \mathcal{B}), \quad \Sigma_2 = (O', \mathcal{C}),$$

com

$$O' : (1, 2, 1)_{\Sigma_1}$$

e

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

Como as colunas abaixo são as coordenadas dos vetores da base $\mathcal{C}$ na base $\mathcal{B}$,

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se

$$P : (2, 1, -3)_{\Sigma_1},$$

então, pela Equação (12.1),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -9/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto

$$P : (3/2, -9/2, -1/2)_{\Sigma_2}.$$



12.4. Retas e Planos em Novas Coordenadas

As equações paramétricas transformam-se de maneira particularmente simples. Considere uma reta dada em Σ_1 por

$$X(t) = P_0 + t\mathbf{v}.$$

Suponha que

$$P_0 : (p_1, p_2, p_3)_{\Sigma_1}, \quad \mathbf{v} : (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}.$$

Se

$$P_0 : (q_1, q_2, q_3)_{\Sigma_2} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} : (w_1, w_2, w_3)_{\mathcal{C}},$$

então

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \left[\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right]$$

e

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Assim a mesma reta, em Σ_2 , é

$$X(t) = Q_0 + t\mathbf{w},$$

onde $Q_0 : (q_1, q_2, q_3)_{\Sigma_2}$ e $\mathbf{w} : (w_1, w_2, w_3)_{\mathcal{C}}$.

O procedimento para planos paramétricos é idêntico: transformamos um ponto do plano pela mudança completa de sistema e os vetores diretores apenas pela mudança de base.

Exemplo 12.7.

No contexto do Exemplo 12.6, considere a reta

$$r : X = (0, 2, 0)_{\Sigma_1} + t(1, 2, 3)_{\mathcal{B}}.$$

Para o ponto inicial,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para o vetor diretor,

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, em Σ_2 ,

$$r : X = (-1, -1, 0)_{\Sigma_2} + t(0, 4, 1)_{\mathcal{C}}.$$

12.4.1. Equações cartesianas de planos

Há uma diferença importante entre transformar vetores diretores e transformar os coeficientes de uma equação cartesiana. Suponha que, em Σ_1 , um plano tenha equação

$$ax + by + cz = d.$$

Escrevendo

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

a equação é

$$N^T X = d,$$

onde $X = (x, y, z)^T$ é a coluna de coordenadas em Σ_1 .

Pela Equação (12.2),

$$X = S + M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} Y,$$

onde $S = (s_1, s_2, s_3)^T$ e Y é a coluna de coordenadas em Σ_2 . Substituindo,

$$N^T M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} Y = d - N^T S.$$

Portanto a coluna de coeficientes da equação do plano no novo sistema é

$$\boxed{N' = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^T N.} \quad (12.3)$$

Esse aparecimento da transposta não é um detalhe de notação: os coeficientes de uma equação linear não se transformam da mesma maneira que as coordenadas de um vetor.

12.5. Sistemas Cartesianos e Mudanças Ortogonais

Suponha agora que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sejam bases ortonormais. Então a matriz de mudança de base é ortogonal:

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^T.$$

Isso explica por que comprimentos e ângulos têm as mesmas fórmulas em qualquer sistema cartesiano.

Se, além disso,

$$\det M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = 1,$$

a mudança linear entre as bases preserva orientação e corresponde a uma rotação do espaço. Se o determinante vale -1 , há também uma reflexão.

Exemplo 12.8.

Considere

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

e a base obtida girando os dois primeiros vetores de um ângulo α em torno da direção de $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_2 &= -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Então

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essa é exatamente a versão tridimensional da mudança passiva de eixos estudada no capítulo anterior.

**12.6. Resumo**

As fórmulas centrais podem ser lidas sem introduzir uma notação adicional para as coordenadas de pontos. Para vetores,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Para pontos, escrevendo

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - S \right),$$

e, inversamente,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S + M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

A diferença é geométrica: vetores não possuem origem, mas pontos possuem.

Exercícios

Ex. 6.1 Sejam

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3),$$

com

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_3.$$

Verifique primeiro que $\mathcal{C}$ é uma base. Determine $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. Converta o vetor $v : (2, -1, 3)_{\mathcal{C}}$ para a base $\mathcal{B}$ e depois recupere suas coordenadas em $\mathcal{C}$.

Ex. 6.2 Considere dois sistemas $\Sigma_1 = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma_2 = (O', \mathcal{C})$, com

$$O' : (1, 2, 3)_{\Sigma_1},$$

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_1 - e_3, \quad f_3 = e_2.$$

Determine as coordenadas em Σ_2 dos pontos $P : (0, 2, 0)_{\Sigma_1}$ e $Q : (2, -1, 4)_{\Sigma_1}$.

Ex. 6.3 No sistema Σ_1 do exercício anterior, considere a reta

$$r : X = (0, 2, 0)_{\Sigma_1} + t(1, 2, 3)_{\Sigma_1}.$$

Escreva sua equação paramétrica em Σ_2 .

Ex. 6.4 Ainda no mesmo par de sistemas, transforme para Σ_2 o plano

$$\pi : 2x - 4y + z = 4$$

dado em Σ_1 . Determine a nova equação de duas maneiras: usando a Equação (12.3) e transformando três pontos do plano.

Ex. 6.5 Seja

$$\pi : X = P_0 + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$$

um plano. Escolha um sistema de coordenadas $\Sigma = (P_0, \mathcal{B})$ de modo que, nesse sistema, o plano tenha equação

$$z = 0.$$

Que condições a base $\mathcal{B}$ deve satisfazer? É sempre possível escolher Σ cartesiano?

Ex. 6.6 São dados os pontos

$$A = (1, 2, 1), \quad B = (3, 4, 0), \quad C = (2, 3, 4)$$

num sistema cartesiano. Construa um novo sistema cartesiano no qual os três pontos pertençam ao plano $z = 0$. Descreva explicitamente uma possível origem e uma possível base ortonormal.

Ex. 6.7 Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases ortonormais e

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

mostre que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Interprete essa igualdade geometricamente como invariância da fórmula da norma. Estabeleça a igualdade análoga para o produto escalar de dois vetores e conclua que ângulos também são preservados.

Classificação das Quádricas

No Capítulo 10 estudamos as principais superfícies quádricas em posição canônica. Vimos como reconhecê-las por suas equações, por parametrizações e, sobretudo, por seus cortes. Nos Capítulos 11 e 12 aprendemos a mudar o sistema de coordenadas.

Agora reuniremos essas ideias. O objetivo deste capítulo é responder à pergunta:

que superfície pode ser descrita por uma equação qualquer de segundo grau em três variáveis?

Uma equação geral tem a forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (13.1)$$

onde pelo menos um dos coeficientes dos termos quadráticos é não nulo. À primeira vista há muitas possibilidades. A ideia central é que grande parte dessa complexidade pertence ao sistema de coordenadas, e não à superfície.

A estratégia será sempre a mesma:

escolher bons eixos $\longrightarrow$ completar quadrados $\longrightarrow$ transladar a origem $\longrightarrow$ ler sinais e cortes

13.1. Eixos principais no espaço

No plano, o Teorema 11.4 mostrou que uma rotação elimina o termo misto xy . Em três dimensões podem aparecer três termos mistos: xy , xz e yz . O fato correspondente é o seguinte.

Teorema 13.1 Eixos principais no espaço

Dada uma equação quadrática em três variáveis, é possível escolher um sistema cartesiano com a mesma origem e eixos ortogonais de modo que, nas novas coordenadas, desapareçam simultaneamente os termos mistos xy , xz e yz .

Assim, depois de uma rotação apropriada dos eixos, a Equação (13.1) assume a forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0. \quad (13.2)$$

Não demonstraremos o Teorema 13.1. Ele é a versão tridimensional do fenômeno que provamos diretamente no plano. Em um curso de Álgebra Linear, sua demonstração é obtida a partir do teorema espectral para matrizes simétricas. Para a classificação geométrica, usaremos apenas sua consequência: *existem eixos cartesianos nos quais não há termos mistos*.

Observação 13.2

O teorema é um resultado de existência. Quando a equação possui apenas um termo misto, muitas vezes podemos encontrar a rotação explicitamente usando a fórmula planar do Capítulo 11. Para uma equação com os três termos mistos, determinar numericamente os eixos principais é um problema de Álgebra Linear e não será exigido neste livro.

13.2. Depois da rotação: completar quadrados

Uma vez eliminados os termos mistos, resta a Equação (13.2). Se $a \neq 0$, então

$$ax^2 + dx = a \left(x + \frac{d}{2a} \right)^2 - \frac{d^2}{4a}.$$

Fazemos o mesmo para cada variável que aparece ao quadrado. Isso corresponde geometricamente a transladar a origem.

Por exemplo, se a, b, c são todos não nulos, uma translação produz uma equação da forma

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = k. \quad (13.3)$$

A classificação passa então a depender apenas dos sinais de a, b, c e de k .

Se um dos coeficientes quadráticos é zero, a variável correspondente pode aparecer apenas em primeiro grau ou pode estar ausente. Essa distinção produzirá os paraboloides e cilindros.

Portanto, depois de escolher eixos principais, não precisamos de uma nova teoria: basta completar quadrados e interpretar as equações resultantes.

13.3. Três termos quadráticos

Suponha inicialmente que, após escolher os eixos principais e transladar a origem, obtivemos

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = k, \quad abc \neq 0.$$

13.3.1. Os três sinais iguais

Multiplicando a equação por -1 , se necessário, podemos supor

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Há três possibilidades.

Se $k > 0$, dividimos por k e obtemos

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} + \frac{Z^2}{\gamma^2} = 1,$$

um **elipsoide**.

Se $k = 0$, a soma de três termos não negativos só pode ser zero quando

$$X = Y = Z = 0.$$

A quádrica degenera num único **ponto**.

Se $k < 0$, não existem soluções reais: obtemos o **conjunto vazio**.

13.3.2. Sinais mistos

Suponha agora que nem todos os coeficientes tenham o mesmo sinal. Trocando todos os sinais, se necessário, basta considerar dois positivos e um negativo:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c < 0.$$

Se $k > 0$, a normalização produz

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{Z^2}{\gamma^2} = 1,$$

um **hiperboloide de uma folha**.

Se $k < 0$, depois de multiplicar por -1 obtemos

$$-\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} + \frac{Z^2}{\gamma^2} = 1,$$

um **hiperboloide de duas folhas**.

Se $k = 0$, obtemos

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{Z^2}{\gamma^2} = 0,$$

um **cone elíptico**.

A diferença entre uma e duas folhas não precisa ser memorizada. Basta fazer cortes $Z = h$: no primeiro caso há elipses para todo h ; no segundo existe uma faixa de valores de h sem pontos.

13.4. Dois termos quadráticos

Suponha agora que, após a rotação, apenas duas variáveis aparecem ao quadrado. Completando quadrados nessas duas variáveis, chegamos a

$$aX^2 + bY^2 + \ell Z = k, \quad ab \neq 0. \quad (13.4)$$

Há duas situações geometricamente distintas.

13.4.1. A terceira variável aparece em primeiro grau

Se $\ell \neq 0$, isolamos Z :

$$Z = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma.$$

Uma translação na direção de Z elimina a constante γ .

Se α e β têm o mesmo sinal, obtemos um **paraboloide elíptico**:

$$Z = \frac{X^2}{p^2} + \frac{Y^2}{q^2},$$

possivelmente após inverter a orientação do eixo Z .

Se os sinais são opostos, obtemos um **parabolóide hiperbólico**:

$$Z = \frac{X^2}{p^2} - \frac{Y^2}{q^2}.$$

Os cortes $Z = h$ distinguem imediatamente os dois casos: elipses no primeiro e hipérbolos no segundo; pelos planos verticais aparecem parábolas.

13.4.2. A terceira variável está ausente

Se $\ell = 0$, a equação não envolve Z :

$$aX^2 + bY^2 = k.$$

Tudo o que acontece no plano XY é transportado paralelamente ao eixo Z . Temos, portanto, um **cilindro quádrico** ou um caso degenerado.

Quando a e b têm o mesmo sinal:

- k com o sinal adequado: cilindro elíptico;
- $k = 0$: uma reta, o eixo do cilindro degenerado;
- sinal incompatível: conjunto vazio.

Quando a e b têm sinais opostos:

- $k \neq 0$: cilindro hiperbólico;
- $k = 0$: dois planos concorrentes.

13.5. Um único termo quadrático

Resta o caso em que, nos eixos principais, apenas uma variável aparece ao quadrado. Depois de completar o quadrado correspondente, a equação tem a forma

$$aX^2 + \ell Y + mZ = k, \quad a \neq 0. \quad (13.5)$$

Se pelo menos um entre ℓ e m é não nulo, podemos girar os eixos no plano YZ de modo que a combinação linear $\ell Y + mZ$ use apenas uma nova coordenada. A equação se reduz a

$$aX^2 + hY = k, \quad h \neq 0.$$

Depois de uma translação,

$$Y = \lambda X^2.$$

A terceira coordenada fica livre: temos um **cilindro parabólico**.

Se $\ell = m = 0$, obtemos simplesmente

$$aX^2 = k.$$

Nesse caso:

- se $k/a > 0$, temos dois planos paralelos;
- se $k = 0$, temos um plano contado duas vezes na equação quadrática;
- se $k/a < 0$, o conjunto é vazio.

13.6. A tabela de classificação

Toda a classificação pode ser resumida pela forma obtida depois de escolher eixos principais e completar quadrados.

Forma reduzida	Geometria
$+X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$	elipsoide
$+X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$	hiperboloide de uma folha
$-X^2 - Y^2 + Z^2 = 1$	hiperboloide de duas folhas
$+X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$	cone elíptico
$Z = +X^2 + Y^2$	paraboloide elíptico
$Z = +X^2 - Y^2$	paraboloide hiperbólico
$+X^2 + Y^2 = 1$ com Z livre	cilindro elíptico
$+X^2 - Y^2 = 1$ com Z livre	cilindro hiperbólico
$Y = X^2$ com Z livre	cilindro parabólico
formas-limite	ponto, reta, plano, dois planos ou conjunto vazio

Os coeficientes positivos que foram omitidos na primeira coluna apenas alteram escalas nos eixos. O que determina o tipo geométrico são o número de termos quadráticos, seus sinais e a presença ou ausência de termos lineares nas direções sem termo quadrático.

13.7. Exemplos completos

Exemplo 13.3 – Uma quádrlica apenas transladada.

Classifique

$$4x^2 + y^2 - z^2 - 8x + 2y + 4z - 4 = 0.$$



Solução. Não há termos mistos, portanto os eixos já são principais. Completando quadrados,

$$4(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - (z - 2)^2 = 5.$$

Dividindo por 5,

$$\frac{(x - 1)^2}{5/4} + \frac{(y + 1)^2}{5} - \frac{(z - 2)^2}{5} = 1.$$

Há dois termos positivos e um negativo com lado direito positivo. Logo a superfície é um **hiperboloide de uma folha**, de centro $(1, -1, 2)$.

**Exemplo 13.4 – Um termo misto que desaparece com 45° .**

Classifique

$$5x^2 + 5y^2 + 6xy + 2z^2 = 1.$$



Solução. No plano xy , tome

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}.$$

Essa é uma rotação de 45° dos eixos. Temos

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

e

$$xy = \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

Portanto

$$5(u^2 + v^2) + 3(u^2 - v^2) + 2z^2 = 1,$$

ou

$$8u^2 + 2v^2 + 2z^2 = 1.$$

Assim

$$\frac{u^2}{1/8} + \frac{v^2}{1/2} + \frac{z^2}{1/2} = 1,$$

e a quádrlica é um **elipsoide**.



Exemplo 13.5 – Um parabolóide escondido por uma rotação.

Classifique

$$(x + y)^2 + z^2 - 2(x - y) = 0.$$

**Solução.** Use novamente

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}.$$

Então

$$x + y = \sqrt{2}u, \quad x - y = -\sqrt{2}v.$$

A equação se torna

$$2u^2 + z^2 + 2\sqrt{2}v = 0,$$

ou

$$v = -\frac{u^2}{\sqrt{2}} - \frac{z^2}{2\sqrt{2}}.$$

Os dois termos quadráticos têm o mesmo sinal. Portanto temos um **parabolóide elíptico**, cujo eixo é paralelo à direção da coordenada v .

**Exemplo 13.6 – Uma degenerescência.**

Classifique

$$x^2 - y^2 = 0.$$

**Solução.** Fatorando,

$$(x - y)(x + y) = 0.$$

Logo a quádrlica é a união dos dois planos

$$x = y \quad \text{e} \quad x = -y.$$

A variável z é livre. Este é um caso degenerado do tipo hiperbólico.

13.8. O que significa classificar

A classificação não afirma que todas as equações de segundo grau são visualmente simples nas coordenadas originais. Ela afirma algo mais geométrico: depois de mudar a origem e orientar adequadamente os eixos, não aparecem novas famílias além das formas fundamentais já estudadas.

Em outras palavras, uma equação complicada como (13.1) pode esconder uma superfície familiar simplesmente porque estamos olhando para ela a partir de um sistema de coordenadas pouco conveniente.

Teorema 13.7 Classificação geométrica das quádricas

Toda quádrica real em $\mathbb{E}^3$ pode ser levada, por uma mudança cartesiana de coordenadas, a uma das formas canônicas deste capítulo ou a um dos casos degenerados correspondentes.

O teorema sintetiza o percurso de todo o livro. Começamos escolhendo vetores e coordenadas para descrever a geometria. Terminamos entendendo que uma boa escolha de coordenadas pode revelar a geometria que uma equação aparentemente complicada estava escondendo.

Exercícios

Ex. 8.1 Classifique, completando quadrados,

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 - 18x + 8y - 4z - 22 = 0.$$

Determine o centro e os semieixos quando a superfície for não degenerada.

Ex. 8.2 Classifique

$$4x^2 + 9y^2 - z^2 + 8x - 18y + 2z - 4 = 0.$$

Confirme a resposta estudando os cortes por planos paralelos aos planos coordenados que passam pelo centro.

Ex. 8.3 Use a rotação

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}$$

para classificar

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy - z^2 = 1.$$

Ex. 8.4 Classifique

$$(x - y)^2 + z^2 - 4(x + y) = 0.$$

Identifique o eixo da superfície nas coordenadas originais.

Ex. 8.5 Classifique os casos degenerados:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$;
- c) $x^2 - y^2 = 0$;
- d) $x^2 = 4$;
- e) $x^2 = 0$.

Ex. 8.6 Explique por que uma equação da forma

$$aX^2 + bY^2 = k$$

com Z ausente representa o transporte, paralelamente ao eixo Z , da cônica descrita no plano XY .

Ex. 8.7 Mostre, usando apenas cortes, que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

não podem representar o mesmo tipo de superfície.

Ex. 8.8 Uma equação geral com os três termos mistos xy , xz e yz pode exigir técnicas de Álgebra Linear para encontrar explicitamente os eixos principais. Explique por que o Teorema 13.1 ainda é suficiente para concluir que nenhuma nova família de quádricas aparece.

Funções Trigonométricas

Este apêndice reúne as relações trigonométricas usadas ao longo do livro. A ideia central é simples: seno e cosseno são coordenadas no círculo unitário. A partir delas obtemos as demais funções, suas identidades e as fórmulas necessárias para ângulos, rotações e coordenadas polares.

A.1. Do triângulo retângulo ao círculo trigonométrico

Para um ângulo agudo θ em um triângulo retângulo,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$

e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Essas fórmulas são úteis, mas não abrangem ângulos obtusos, negativos ou maiores que uma volta. Para isso usamos o círculo trigonométrico.

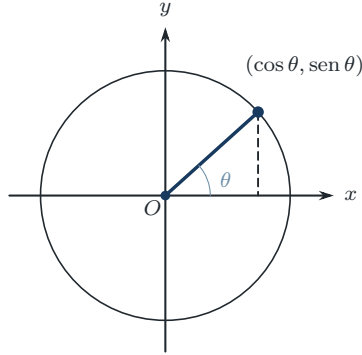


Figura A.1.: No círculo unitário, cosseno e seno são as coordenadas do ponto associado ao ângulo.

Definição A.1

Para $\theta \in \mathbb{R}$, considere o ponto do círculo unitário obtido girando o vetor $(1, 0)$ de um ângulo orientado θ . Se esse ponto é

$$P = (x, y),$$

definimos

$$\cos \theta = x, \quad \text{sen } \theta = y.$$

Como o círculo unitário tem equação $x^2 + y^2 = 1$, segue imediatamente a identidade fundamental

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (\text{A.1})$$

As demais funções são definidas, quando os denominadores são não nulos, por

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &= \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}, & \text{cotg } \theta &= \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}, \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta}, & \text{cosec } \theta &= \frac{1}{\text{sen } \theta}. \end{aligned}$$

Portanto:

- $\text{tg } \theta$ e $\sec \theta$ não estão definidas quando $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- $\text{cotg } \theta$ e $\text{cosec } \theta$ não estão definidas quando $\theta = k\pi$,

com $k \in \mathbb{Z}$.

A.1.1. Radianos

Ao longo do livro os ângulos são medidos em radianos, salvo indicação contrária. Uma volta completa corresponde a 2π radianos e

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

Assim,

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Os valores mais usados são:

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{sen } \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\text{cos } \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

A.2. Simetrias e periodicidade

A geometria do círculo unitário fornece

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta, \quad \text{cos}(-\theta) = \text{cos } \theta.$$

Logo o seno é ímpar e o cosseno é par.

Além disso,

$$\text{sen}(\theta + 2k\pi) = \text{sen } \theta, \quad \text{cos}(\theta + 2k\pi) = \text{cos } \theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim seno e cosseno têm período 2π . A tangente e a cotangente têm período π :

$$\text{tg}(\theta + k\pi) = \text{tg } \theta, \quad \text{cotg}(\theta + k\pi) = \text{cotg } \theta.$$

Também são úteis as relações

$$\text{cos } \theta = \text{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{sen } \theta = \text{cos} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right).$$

A.3. Identidades trigonométricas

Dividindo a identidade fundamental (A.1) por $\text{cos}^2 \theta$, quando $\text{cos } \theta \neq 0$, obtemos

$$1 + \text{tg}^2 \theta = \text{sec}^2 \theta.$$

Dividindo por $\text{sen}^2 \theta$, quando $\text{sen } \theta \neq 0$, obtemos

$$1 + \text{cotg}^2 \theta = \text{cossec}^2 \theta.$$

A.3.1. Soma e diferença de ângulos

As fórmulas fundamentais são

$$\boxed{\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\boxed{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo y por $-y$,

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Quando as expressões envolvidas estão definidas,

$$\boxed{\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}}$$

e

$$\boxed{\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

A.3.2. Ângulo duplo e redução de potências

Tomando $y = x$ nas fórmulas anteriores,

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Consequentemente,

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}}, \quad \boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}}.$$

Essas identidades são particularmente úteis ao simplificar equações de cônicas e quádras após rotações.

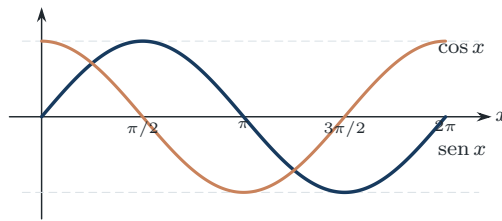


Figura A.2.: Seno e cosseno em uma volta.

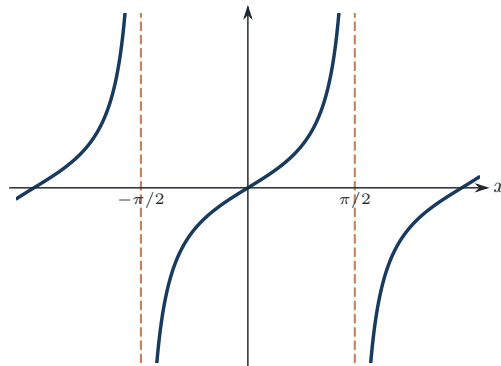


Figura A.3.: Gráfico da tangente próximo da origem.

A.4. Aspecto dos gráficos

As funções seno e cosseno oscilam entre -1 e 1 . Seus gráficos diferem apenas por uma translação horizontal de $\pi/2$.

A tangente é periódica de período π e possui assíntotas verticais em

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Em cada intervalo entre duas assíntotas consecutivas ela é estritamente crescente.

As funções secante, cossecante e cotangente podem ser entendidas diretamente pelas relações recíprocas. Em particular, suas descontinuidades ocorrem exatamente onde os denominadores das definições se anulam.

A.5. Funções trigonométricas inversas

Seno, cosseno e tangente não são injetoras em seus domínios naturais. Para definir inversas, escolhemos intervalos nos quais cada função é bijetora.

- O seno é bijetor de $[-\pi/2, \pi/2]$ em $[-1, 1]$. Sua inversa é

$$\arcsen : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

Assim,

$$\arcsen y = x \iff \sen x = y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

- O cosseno é bijetor de $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$. Sua inversa é

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi].$$

Assim,

$$\arccos y = x \iff \cos x = y, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- A tangente é bijetora de $(-\pi/2, \pi/2)$ em $\mathbb{R}$. Sua inversa é

$$\arctg : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Assim,

$$\arctg y = x \iff \tg x = y, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Observação A.2 Atenção aos quadrantes

A expressão

$$\theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

não determina, sozinha, o ângulo polar de um ponto (x, y) em todos os quadrantes. Ela também não está definida quando $x = 0$. Ao recuperar um ângulo a partir das coordenadas cartesianas, é necessário usar os sinais de x e y para escolher o quadrante correto. Computacionalmente, essa escolha é realizada pela função de dois argumentos usualmente chamada `atan2`.

A.6. Exercícios

Exercícios

Ex. 6.1 Calcule exatamente:

- a) $\sin(5\pi/6)$ e $\cos(5\pi/6)$.
- b) $\operatorname{tg}(7\pi/4)$.
- c) $\sin(-\pi/3)$ e $\cos(-\pi/3)$.

Ex. 6.2 Use as fórmulas de adição para obter $\sin(\pi/12)$ e $\cos(\pi/12)$.

Ex. 6.3 Prove que

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Explique por que essa identidade aparece naturalmente na fórmula do produto escalar entre dois vetores unitários.

Ex. 6.4 Mostre que, sempre que as expressões estão definidas,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Ex. 6.5 Determine todos os $x \in [0, 2\pi)$ que satisfazem:

- a) $\sin x = 1/2$;
- b) $\cos x = -\sqrt{2}/2$;
- c) $\operatorname{tg} x = 1$.

Ex. 6.6 Explique por que $\operatorname{arctg}(1) = \pi/4$, mas o ponto $(-1, -1)$ não tem ângulo polar principal igual a $\pi/4$.

B

Matrizes e Sistemas Lineares

Este apêndice reúne os fatos de Álgebra Linear elementar usados ao longo do livro: operações com matrizes, transposta, determinantes, inversas e resolução de sistemas lineares. O objetivo é servir de referência rápida, com ênfase nas ferramentas necessárias para coordenadas e mudanças de base.

B.1. Matrizes

Definição B.1

Uma **matriz real** $m \times n$ é uma disposição retangular de números reais com m linhas e n colunas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A entrada a_{ij} ocupa a linha i e a coluna j .

Uma matriz é **quadrada** quando possui o mesmo número de linhas e colunas. Uma matriz $1 \times n$ é uma matriz linha; uma matriz $m \times 1$ é uma matriz coluna. A matriz identidade de ordem n é

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

B.1.1. Soma e multiplicação por escalar

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ têm o mesmo tamanho e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Exemplo B.2.

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

então

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$



B.1.2. Produto de matrizes

Definição B.3

Se $A = (a_{ij})$ é $m \times p$ e $B = (b_{ij})$ é $p \times n$, o produto AB é a matriz $m \times n$ dada por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

O número de colunas de A deve coincidir com o número de linhas de B . Em geral,

$$AB \neq BA,$$

e um dos produtos pode até estar definido sem que o outro esteja.

Exemplo B.4.

Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

temos

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0(-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1)(-1) & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-1)5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

**B.1.3. Transposta****Definição B.5**

A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})$, denotada A^T , é obtida trocando linhas por colunas:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Valem as identidades

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Uma matriz quadrada é **simétrica** quando $A^T = A$.

B.2. Determinantes

O determinante associa um número real a cada matriz quadrada. Para ordens pequenas,

$$\det(a) = a$$

e

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Para uma matriz quadrada A , seja A_{ij} a matriz obtida removendo a linha i e a coluna j . O número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

é chamado **cofator** da entrada a_{ij} .

Teorema B.6 Expansão por cofatores

Fixada uma linha i ,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Fixada uma coluna j ,

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Por exemplo,

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}.$$

As propriedades mais usadas são:

- $\det(A^T) = \det A$;
- trocar duas linhas ou duas colunas muda o sinal do determinante;
- multiplicar uma linha ou coluna por λ multiplica o determinante por λ ;
- adicionar a uma linha um múltiplo de outra não altera o determinante;
- se duas linhas ou colunas são iguais, o determinante é zero;
- $\det(AB) = \det A \det B$.

Essas propriedades permitem calcular determinantes por escalonamento e explicam o critério de independência linear usado no Capítulo 3.

B.3. Matrizes Invertíveis

Definição B.7

Uma matriz quadrada A é **invertível** se existe uma matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Teorema B.8

Uma matriz quadrada A é invertível se e somente se

$$\det A \neq 0.$$

Para uma matriz 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0,$$

temos a fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Em dimensão geral, se $\text{cof}(A) = (C_{ij})$ é a matriz dos cofatores e

$$\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T,$$

então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A).$$

Exemplo B.9.

Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 2$, a matriz é invertível. Uma conta por cofatores ou por eliminação de Gauss fornece

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A identidade $AA^{-1} = I$ fornece uma verificação imediata do resultado.

B.3.1. Matrizes ortogonais

Definição B.10

Uma matriz quadrada real Q é **ortogonal** quando

$$Q^T Q = I.$$

Nesse caso,

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Equivalentemente, as colunas de Q formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. É essa propriedade que aparece nas mudanças entre sistemas cartesianos estudadas nos Capítulos 11 e 12.

B.4. Sistemas Lineares

Um sistema de m equações lineares em n incógnitas pode ser escrito na forma matricial

$$AX = b,$$

onde A é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

é a coluna das incógnitas e b é a coluna dos termos independentes.

Quando A é quadrada e invertível, a solução é única e vale

$$X = A^{-1}b.$$

B.5. Regra de Cramer

A regra de Cramer fornece uma expressão explícita para a solução de um sistema quadrado com determinante não nulo.

Teorema B.11 Regra de Cramer*Considere*

$$AX = b,$$

com $A = (A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n)$ e $\det A \neq 0$. Seja $A_i(b)$ a matriz obtida substituindo a coluna A_i por b . Então

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Como

$$b = AX = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n,$$

pela linearidade do determinante na coluna i ,

$$\det A_i(b) = \sum_{j=1}^n x_j \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n).$$

Todos os termos com $j \neq i$ possuem duas colunas iguais e, portanto, determinante zero. Resta

$$\det A_i(b) = x_i \det A,$$

e a fórmula segue porque $\det A \neq 0$. ■

Exemplo B.12.

Resolva

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1, \\ -x + 2y - 2z = 2, \\ -3x + y - 7z = -1. \end{cases}$$

**Solução.** A matriz de coeficientes é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2.$$

Substituindo sucessivamente as colunas por $b = (1, 2, -1)^T$, obtemos

$$\det A_1(b) = -8, \quad \det A_2(b) = 2, \quad \det A_3(b) = 4.$$

Logo

$$\boxed{x = -4, \quad y = 1, \quad z = 2.}$$



A regra de Cramer é elegante e útil teoricamente, mas para sistemas grandes o método de eliminação de Gauss é muito mais eficiente.

B.6. Eliminação de Gauss

As seguintes operações sobre as equações de um sistema não alteram seu conjunto de soluções:

1. trocar duas equações;
2. multiplicar uma equação por um escalar não nulo;
3. adicionar a uma equação um múltiplo de outra.

Na matriz aumentada, essas operações correspondem às operações elementares sobre linhas.

O objetivo do método de Gauss é transformar o sistema em outro equivalente, de forma escalonada, no qual as incógnitas possam ser determinadas por substituição retroativa.

Exemplo B.13 — Solução única.

Considere

$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 30, \\ 2x - y = 3, \\ 4x + y + z = 12. \end{cases}$$



Solução. A matriz aumentada é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 30 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right).$$

Uma sequência de operações elementares produz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2/3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

Da última linha, $z = 3$. A segunda fornece $y = 1$ e a primeira fornece $x = 2$. Portanto

$$(x, y, z) = (2, 1, 3).$$

◀

Exemplo B.14 — Infinitas soluções.

Considere

$$\begin{cases} 2x + 6y + 2z + 4w = 34, \\ 3x - 2y = -2, \\ 2x + 2y + z + 2w = 15. \end{cases}$$

◀

Solução. O escalonamento leva a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

A variável w é livre. Escrevendo $w = t$, temos

$$x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3 - 2t.$$

Logo o conjunto de soluções é

$$(x, y, z, w) = (2, 4, 3 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

◀

Exemplo B.15 — Sistema impossível.

O sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

não possui solução.

◀

Solução. Subtraindo duas vezes a primeira equação da segunda, obtemos

$$0 = 1,$$

uma contradição. Na matriz aumentada aparece uma linha do tipo

$$(0 \ 0 \mid 1).$$



B.6.1. Um parâmetro pode mudar o tipo de solução

Exemplo B.16.

Discuta, em função de m , o sistema

$$\begin{cases} mx + y = 1, \\ x + my = 1. \end{cases}$$



Solução. A matriz dos coeficientes é

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix},$$

com

$$\det A_m = m^2 - 1.$$

Se $m \neq \pm 1$, o determinante é não nulo e o sistema possui solução única.

Se $m = 1$, as duas equações coincidem:

$$x + y = 1,$$

e há infinitas soluções.

Se $m = -1$, as equações são

$$-x + y = 1, \quad x - y = 1.$$

Somando-as obtemos $0 = 2$, portanto não há solução.



B.7. Exercícios

Exercícios

Ex. 7.1 Calcule, quando os produtos estiverem definidos,

$$AB \text{ e } BA,$$

para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Explique por que os resultados não precisam coincidir.

Ex. 7.2 Calcule os determinantes:

a) $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ex. 7.3 Determine quais matrizes são invertíveis e calcule as inversas quando existirem:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Ex. 7.4 Verifique diretamente que

$$Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

é ortogonal. Qual transformação geométrica essa matriz representa?

Ex. 7.5 Resolva por eliminação de Gauss:

a) $\begin{cases} x + 5y = 13, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 5x - 3y + z = -10, \\ -2x - y + z = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 3y - z = 3. \end{cases}$$

Ex. 7.6 Classifique, em função de m , o sistema

$$\begin{cases} mx + 3y = 12, \\ 2x + \frac{1}{2}y = 5. \end{cases}$$

Determine para quais valores de m ele possui solução única, nenhuma solução ou infinitas soluções.

Ex. 7.7 Classifique, em função de k , o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1, \\ 2x + ky + 8z = 3. \end{cases}$$

Mostre que ele nunca possui solução única e determine quando não possui solução e quando possui infinitas soluções. Relacione o resultado ao fato de haver mais incógnitas do que equações.

Ex. 7.8 Mostre que o sistema homogêneo quadrado

$$AX = 0$$

possui uma solução não nula se e somente se $\det A = 0$.

Ex. 7.9 Use a regra de Cramer para resolver

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + 3y = 8. \end{cases}$$

Depois resolva o mesmo sistema por eliminação de Gauss e compare os dois métodos.

Respostas dos Exercícios

Cap. 1, Ex. 2.1 – Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$,

(a) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$;

(b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$;

(c) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$;

(d) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AB}$;

(e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$;

(f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AC}$;

(g) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$.

Cap. 1, Ex. 2.2 – (a) $u + 2v$;

(b) $2u + 2v$;

(c) $2u + v$;

(d) $u + v$;

(e) $u - v$;

(f) $2u$;

(g) u .

Cap. 1, Ex. 2.3 – (a) 0 , pois os vetores correspondentes a vértices opostos se cancelam dois a dois;

(b) 0 , pois os representantes formam um polígono fechado;

(c) $\overrightarrow{AF}$;

(d) 0 ;

(e) 0 .

Cap. 1, Ex. 2.4 – Pelas desigualdades triangular e triangular reversa,

$$1 = |3 - 2| \leq \|a + b\| \leq 3 + 2 = 5.$$

O valor 5 ocorre quando os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido; o valor 1, quando têm a mesma direção e sentidos opostos.

Cap. 1, Ex. 2.5 — Pela simetria do hexágono em relação à reta AD ,

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_5 = \mathbf{f}_3, \quad \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_3.$$

Portanto a soma é $3\mathbf{f}_3$.

Cap. 1, Ex. 2.6 —

$$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Cap. 1, Ex. 2.7 — A existência faz parte das propriedades da soma vetorial. Para a unicidade, se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$, então

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Cap. 1, Ex. 2.8 — Da relação dada,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}.$$

Logo

$$\boxed{\overrightarrow{CM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{CA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{CB}.}$$

Cap. 1, Ex. 2.9 — Como $\overrightarrow{AC} = \mathbf{v} + 3\mathbf{u}$,

(a)

$$\overrightarrow{CD} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{BD} = 5\mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{CA} = -3\mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

(b) $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$ são múltiplos de $\mathbf{u}$, portanto os lados AD e BC são paralelos.

Cap. 1, Ex. 2.10 — Se os vértices são $P_1, \dots, P_n$, a aplicação repetida da regra do triângulo dá

$$\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} + \dots + \overrightarrow{P_n P_1} = \overrightarrow{P_1 P_1} = \mathbf{0}.$$

Cap. 1, Ex. 2.11 — O escalar $1/\|\mathbf{v}\|$ é positivo, portanto preserva direção e sentido. Além disso,

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Cap. 1, Ex. 2.12 — (a)

$$\mathbf{x} = \frac{4}{7}\mathbf{u} + \frac{3}{14}\mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = \frac{1}{7}\mathbf{u} - \frac{1}{14}\mathbf{v}.$$

(b)

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \frac{1}{4}(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Cap. 1, Ex. 2.13 — Se $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, ambos os lados são verdadeiros pela convenção adotada. Suponha $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Como $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{z}$, existe a tal que $\mathbf{u} = a\mathbf{z}$. Se $\mathbf{v} = b\mathbf{z}$, então $\mathbf{w} = (a + b)\mathbf{z}$. Reciprocamente, se $\mathbf{w} = c\mathbf{z}$, então

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = (c - a)\mathbf{z}.$$

Cap. 1, Ex. 2.14 — (a) $(-\alpha)\mathbf{v} + \alpha\mathbf{v} = (-\alpha + \alpha)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(b) $\alpha(-\mathbf{v}) + \alpha\mathbf{v} = \alpha(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

(c) Aplicando os dois itens anteriores duas vezes, $(-\alpha)(-\mathbf{v}) = -(\alpha(-\mathbf{v})) = \alpha\mathbf{v}$.

Cap. 1, Ex. 2.15 — Se $\alpha \neq 0$, multiplicando a igualdade por $1/\alpha$, obtemos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Cap. 1, Ex. 2.16 — Temos $(\alpha - \beta)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pelo exercício anterior e pela hipótese $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, segue $\alpha - \beta = 0$.

Cap. 1, Ex. 2.17 — A rotação de 72° em torno de O apenas permuta os cinco vetores da soma. Logo a soma é um vetor fixo por essa rotação; o único vetor com essa propriedade é $\mathbf{0}$.

Cap. 1, Ex. 2.18 — Se $\lambda_1 \neq 0$, então

$$\mathbf{u} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{v},$$

contradizendo a hipótese. Logo $\lambda_1 = 0$; como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, também $\lambda_2 = 0$.

Cap. 1, Ex. 2.19 — Como

$$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

e

$$\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF},$$

temos $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{RQ}$. Analogamente,

$$\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{PQ}.$$

Logo os lados opostos são iguais e paralelos.

Cap. 1, Ex. 2.20 — (a) $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P + (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = P$.

(b) É a própria definição de soma de ponto com vetor.

(c) Se $R = P + \mathbf{u} = Q + \mathbf{v}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ} + \mathbf{v}$.

Cap. 1, Ex. 2.21 —

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = -\mathbf{u} + \overrightarrow{PQ} + \mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}.$$

Portanto os três lados preservam seus vetores e, em particular, seus comprimentos.

Cap. 2, Ex. 2.1 —

$$\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OE} = \mathbf{b} + \frac{5}{6}\mathbf{a}.$$

Logo

$$\overrightarrow{DE} = \mathbf{b} - \frac{1}{6}\mathbf{a} - \frac{1}{4}\mathbf{c}.$$

Cap. 2, Ex. 2.2 — Da relação dada, $BM : MC = 7 : 3$, portanto

$$\overrightarrow{BM} = \frac{7}{10}\overrightarrow{BC}.$$

Assim

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{AC}.$$

Cap. 2, Ex. 2.3 — Pela regra do triângulo, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, logo $A = C$. Portanto

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$$

é uma relação linear não trivial.

Cap. 2, Ex. 2.4 — São linearmente dependentes, pois

$$2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}) - (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

é uma relação não trivial.

Cap. 2, Ex. 2.5 — Considere

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{t}) + \beta(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \gamma(\mathbf{w} + \mathbf{t}) = \mathbf{0}.$$

Comparando os coeficientes de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e subtraindo as duas primeiras equações, obtemos

$$(1 + a - b)\alpha + (a - b)\gamma = 0, \quad c\alpha + (1 + c)\gamma = 0.$$

Eliminando γ , resulta

$$(1 + a - b + c)\alpha = 0.$$

Se $1 + a - b + c \neq 0$, então $\alpha = 0$, depois $\gamma = 0$ e $\beta = 0$. Se $1 + a - b + c = 0$, a escolha

$$\alpha = 1 + c, \quad \gamma = -c, \quad \beta = -b$$

fornece uma relação não trivial. O critério segue.

Cap. 2, Ex. 2.6 – (a) Uma relação não trivial $au + bv = \mathbf{0}$ continua sendo uma relação não trivial entre os três vetores, com coeficiente zero para w .

(b) É a contrapositiva do item anterior.

Cap. 2, Ex. 2.7 –

$$\overrightarrow{AC} = 4\mathbf{a} + (x - 2)\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{BC} = 2\mathbf{a} + (x - 2)\mathbf{b}.$$

Se são dependentes, uma deve ser múltipla da outra. Comparando os coeficientes de $\mathbf{a}$, o múltiplo é 2; então $x - 2 = 2(x - 2)$, logo

$$\boxed{x = 2.}$$

Cap. 2, Ex. 2.8 –

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}.$$

Logo

$$(a)\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c};$$

$$(b)\text{subtraindo } 3\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{c}, \text{ obtemos } \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

Cap. 2, Ex. 2.9 – Se um deles é combinação linear dos outros dois, representantes com a mesma origem ficam no plano gerado por esses dois. Reciprocamente, se os três são coplanares e dois não são paralelos, esses dois geram o plano e o terceiro é combinação linear deles. Se dois são paralelos ou algum é nulo, a conclusão é imediata.

Cap. 2, Ex. 2.10 –

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}((\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}((\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v})).$$

Logo os novos vetores geram o plano. Se $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, então $(a + b)\mathbf{u} + (a - b)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, e a independência da base original dá $a = b = 0$.

Cap. 2, Ex. 2.11 — Se

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + c(\mathbf{w} - 2\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

então

$$(a + b - 2c)\mathbf{u} + (a - b)\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

A independência da base original dá $c = 0$, $a + b = 0$, $a - b = 0$, portanto $a = b = c = 0$.

Cap. 2, Ex. 2.12 — Se fossem coplanares, haveria um plano por A contendo B, C, D , o que tornaria o tetraedro degenerado. Logo os três vetores são não coplanares e, pelo Teorema da Base para o Espaço, formam uma base.

Cap. 2, Ex. 2.13 — Escolha um vértice A e denote por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ os vetores das três arestas que partem de A . O vértice oposto é

$$A + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

e o ponto médio dessa diagonal é

$$M = A + \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Cada outra diagonal liga dois vértices complementares e tem o mesmo ponto médio M .

Cap. 2, Ex. 2.14 — Ponha $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Temos

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}.$$

A reta por B paralela a OA tem pontos $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$. Comparando coeficientes,

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}.}$$

Além disso, $X = 3C$ na reta OC e $Y = \frac{3}{2}D$ na reta OD , logo

$$OC : CX = 1 : 2, \quad OD : DY = 2 : 1.$$

Na reta por B , os parâmetros de Y e X são $1/2$ e 2 , portanto $BX : XY = 2 : (3/2) = 4 : 3$.

Cap. 2, Ex. 2.15 — Tome Q como origem. Das razões dadas,

$$\overrightarrow{QC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{QA}, \quad \overrightarrow{QD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{QB}.$$

Escreva $P = A + s(B - A) = C + t(D - C)$. Comparando os coeficientes independentes de $\overrightarrow{QA}$ e $\overrightarrow{QB}$, obtemos

$$s = \frac{7}{2}, \quad t = -\frac{7}{3}.$$

Logo P está fora dos dois segmentos e

$$\boxed{AP : PB = 7 : 5, \quad CP : PD = 7 : 10.}$$

Cap. 2, Ex. 2.16 — Escolha A como origem e ponha $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$. Então

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Um ponto de BD é

$$\mathbf{b} + t \left(\frac{1}{4}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \right) = \left(1 - \frac{3t}{4} \right) \mathbf{b} + \frac{t}{4} \mathbf{c}.$$

Para pertencer a AC , o coeficiente de $\mathbf{b}$ deve ser zero, logo $t = 4/3$ e

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\mathbf{c}.$$

Portanto

$$\boxed{AF : FC = 1 : 2.}$$

Cap. 2, Ex. 2.17 — Ponha $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$. Como B_1, C_1, D_1 são colineares, existe t tal que

$$\lambda_3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (1 - t)\lambda_1\mathbf{a} + t\lambda_2\mathbf{b}.$$

A independência de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dá $\lambda_3 = (1 - t)\lambda_1$ e $\lambda_3 = t\lambda_2$. Somando as duas igualdades após dividir por $\lambda_1\lambda_2$, obtemos a identidade pedida.

Cap. 2, Ex. 2.18 — Como $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ formam uma base do plano, escreva

$$\overrightarrow{AI} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC},$$

com $\beta, \gamma > 0$ e $\beta + \gamma < 1$. Ponha $\alpha = 1 - \beta - \gamma$. Pelas semelhanças produzidas pelas paralelas, as três razões entre cada segmento interno e o lado paralelo são, em alguma ordem,

$$1 - \alpha, \quad 1 - \beta, \quad 1 - \gamma.$$

A soma é $3 - (\alpha + \beta + \gamma) = 2$.

Cap. 2, Ex. 2.19 — Se M é o ponto médio de BC , então

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Como G divide a mediana na razão $2 : 1$ a partir do vértice,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Substituindo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, obtemos a fórmula para $\overrightarrow{OG}$. A primeira identidade segue subtraindo $\overrightarrow{OG}$ de cada vetor posição.

Cap. 2, Ex. 2.20 — Aplicando a fórmula do baricentro com origem em D ,

$$\boxed{\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}).}$$

Cap. 2, Ex. 2.21 — Para uma origem O ,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \quad \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Logo

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Cap. 2, Ex. 2.22 — Se $ABCD$ é um trapézio com $AB \parallel DC$ e M, N são os pontos médios de AD, BC , então

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ têm a mesma direção, MN é paralelo às bases e

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{DC}\|).$$

Cap. 2, Ex. 2.23 — As bissetrizes internas de dois vértices não são paralelas, portanto se encontram num único ponto I , interior aos dois ângulos. Um ponto de uma bissetriz é equidistante dos lados do ângulo. Assim, por estar nas bissetrizes de A e B , o ponto I é equidistante de AB, AC e também de BA, BC ; logo é equidistante de AC e BC e pertence a uma bissetriz do ângulo C . Como I está no interior do triângulo, trata-se da bissetriz interna. A unicidade segue da unicidade da interseção das duas primeiras bissetrizes.

Cap. 2, Ex. 2.24 —

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}).$$

Como P é o ponto médio de MN ,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Cap. 2, Ex. 2.25 — Para qualquer origem O ,

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Dividindo por 3, os vetores posição dos dois baricentros coincidem.

Cap. 2, Ex. 2.26 — O ponto

$$P = O + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

pertence a AB e à reta OR . Logo a identidade é imediata e

$$\overrightarrow{AP} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{PB} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{AB},$$

portanto

$$\boxed{AP : PB = n : m.}$$

Cap. 2, Ex. 2.27 – Defina X por

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Então

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Como $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\|$, a soma $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ tem a direção da bissetriz do ângulo BOC ; no triângulo isósceles BOC , essa bissetriz é perpendicular a BC . Logo AX é uma altura. Do mesmo modo, BX e CX são alturas, portanto $X = H$, provando (a). Para (b),

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - 3\overrightarrow{OH} = -2\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{HO}.$$

Cap. 3, Ex. 11.1 – Como

$$A = M + P - N, \quad B = M + N - P, \quad C = N + P - M,$$

obtemos

$$\boxed{A = (-1, 4), \quad B = (5, 6), \quad C = (3, -2).}$$

Cap. 3, Ex. 11.2 – Escreva $R = P + t(Q - P)$, com $0 \leq t \leq 1$. Então

$$(1 - t)d(P, Q) = \lambda t d(P, Q),$$

logo $t = 1/(1 + \lambda)$ e

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{1 + \lambda} P + \frac{1}{1 + \lambda} Q.}$$

Cap. 3, Ex. 11.3 — Escolha coordenadas $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $D = (d, h)$ e $C = (d + c, h)$, de modo que AB e DC sejam as bases. Os pontos médios dos lados AD e BC são

$$M = (d/2, h/2), \quad N = ((b + d + c)/2, h/2).$$

Logo MN é horizontal e

$$|MN| = \frac{b + c}{2}.$$

Cap. 3, Ex. 11.4 — Se O é a origem, então

$$\overrightarrow{O(P + u)} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{u}.$$

Somando as componentes na base de Σ obtemos a fórmula.

Cap. 3, Ex. 11.5 — Os determinantes das matrizes com esses vetores como colunas são, respectivamente,

$$-2, \quad 1, \quad 0.$$

Portanto os dois primeiros conjuntos são LI e o terceiro é LD.

Cap. 3, Ex. 11.6 — Resolvendo $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{w}$ obtemos

$$\boxed{\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}.}$$

Cap. 3, Ex. 11.7 — O determinante é $2 \cdot 3 - 1 = 5 \neq 0$. Se $(c_1, c_2) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, então

$$\boxed{a = \frac{3c_1 - c_2}{5}, \quad b = \frac{2c_2 - c_1}{5}.}$$

Cap. 3, Ex. 11.8 — Se $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, então

$$\boxed{\alpha = a - b + c, \quad \beta = -a + b, \quad \gamma = b - c.}$$

Para $\mathbf{z} = 0$ todos são nulos. Para $(1, 2, 3)$,

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, -1).}$$

Cap. 3, Ex. 11.9 — A caracterização é a definição geométrica/algebraica de dependência para dois vetores não nulos. Nos três casos: **LI**, **LD** (o segundo é -2 vezes o primeiro), **LI**.

Cap. 3, Ex. 11.10 — Os três menores se anulam exatamente quando todas as razões entre componentes não nulas são compatíveis com um mesmo escalar λ , isto é, quando $u = \lambda v$. Pelo exercício anterior, isso equivale a dependência linear.

Cap. 3, Ex. 11.11 — (a) $m = 1, n = 1$.

(b) $(m, n) = (2, 2)$ ou $(-2, 6)$.

Cap. 3, Ex. 11.12 — O determinante da matriz com essas colunas é

$$3m^2 + 2 > 0.$$

Logo os vetores são LI para todo m e, sendo três vetores em $\mathbb{R}^3$, formam uma base.

Cap. 3, Ex. 11.13 — Os determinantes das matrizes de coordenadas são

$$2 - a - b \quad \text{e} \quad 2b(b - 1).$$

Logo:

(a) $a + b \neq 2$;

(b) $b \neq 0, 1$.

Cap. 3, Ex. 11.14 — Nesse sistema $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (0, 0, 1)$. Os pontos pedidos são

$$(1/2, 0, 0), (0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2, 0).$$

Cap. 3, Ex. 11.15 — (a) $3\sqrt{5}, \sqrt{13}$.

(b) $\overrightarrow{BA} = (-6, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 1)$ e a soma é $(-3, -2) = \overrightarrow{BC}$.

(c) $\boxed{(-3/2, 5/2)}.$

(d) Parametrizando $A + t(B - A)$, a condição dá $t = 3/4$ ou $3/2$. Logo

$$\boxed{(3/2, 17/4) \text{ e } (6, 13/2)}.$$

Cap. 3, Ex. 11.16 –

$$|AB| = 7\sqrt{3}, \quad |BC| = \sqrt{78}, \quad |CA| = 15.$$

Os vetores são $\overrightarrow{AB} = (-7, -7, -7)$, $\overrightarrow{BC} = (5, 2, -7)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 5, 14)$ e somam zero. Os ângulos são aproximadamente

$$36.07^\circ, \quad 90^\circ, \quad 53.93^\circ.$$

A área é

$$\boxed{\frac{21\sqrt{26}}{2}}.$$

Os três possíveis quartos vértices são

$$\boxed{(9, 10, 4), (-1, 6, 18), (-5, -4, -10)}.$$

Os pontos médios são obtidos pelas médias coordenada a coordenada.

Cap. 3, Ex. 11.17 – Pondo $P = (x, 0)$ e igualando os quadrados das distâncias, obtemos $x = 0$. Logo

$$\boxed{P = (0, 0)}.$$

Cap. 3, Ex. 11.18 – De $AC^2 = AB^2$,

$$a^2 + y^2 = 4a^2,$$

logo

$$\boxed{y = \pm\sqrt{3}a}$$

(os dois sinais já descrevem as duas posições, independentemente do sinal escolhido para a).

Cap. 3, Ex. 11.19 —

$$(2, 3), \quad A = 20.$$

Cap. 3, Ex. 11.20 — O primeiro é retângulo, com ângulos aproximadamente

$$38.66^\circ, \quad 90^\circ, \quad 51.34^\circ.$$

No segundo, os ângulos são aproximadamente

$$36.93^\circ, \quad 91.12^\circ, \quad 51.95^\circ.$$

Cap. 3, Ex. 11.21 — Uma escolha é o produto vetorial:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, -5, -3).$$

Cap. 3, Ex. 11.22 — Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 9$, precisamos $-4a + 9b = 0$. Por exemplo,

$$a = 9, \quad b = 4, \quad \mathbf{w} = (22, -1, 10).$$

Cap. 3, Ex. 11.23 — Os três produtos escalares são zero.

Cap. 3, Ex. 11.24 — Os ângulos são

$$90^\circ, 45^\circ, 45^\circ,$$

e a área é

$$13/2.$$

Cap. 3, Ex. 11.25 — Como $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{c}\|^2$,

$$9 + 25 + 30 \cos \theta = 49.$$

Logo $\cos \theta = 1/2$ e

$$\theta = \pi/3.$$

Cap. 3, Ex. 11.26 — Expanda os dois quadrados usando o produto escalar e subtraia. Os termos $\|v\|^2$ e $\|w\|^2$ se cancelam e resta $4v \cdot w$.

Cap. 3, Ex. 11.27 — Se os lados adjacentes são u, v , as diagonais são $u + v$ e $u - v$. A ortogonalidade implica

$$0 = (u + v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

Logo os lados adjacentes têm o mesmo comprimento.

Cap. 3, Ex. 11.28 —

$$v_1 = \text{Proj}_{(0,1,3)} u = \frac{3}{10}(0, 1, 3) = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right),$$

$$v_2 = \left(-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right).$$

Cap. 3, Ex. 11.29 — Com origem no centro, escreva $\overrightarrow{OA} = u$, $\overrightarrow{OB} = -u$ e $\overrightarrow{OC} = v$, com $\|u\| = \|v\|$. Então

$$\overrightarrow{CA} = u - v, \quad \overrightarrow{CB} = -u - v,$$

e seu produto escalar é $-\|u\|^2 + \|v\|^2 = 0$.

Cap. 3, Ex. 11.30 — Use diretamente

$$\text{Proj}_u v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u.$$

Linearidade do produto escalar prova os dois primeiros itens; o terceiro segue porque a projeção já é paralela a u ; no quarto, ambos os lados são

$$\frac{(v \cdot u)(w \cdot u)}{u \cdot u}.$$

Cap. 3, Ex. 11.31 — Podemos usar os vetores $(1, 1, 1)$ e $(1, 1, -1)$. Portanto

$$\cos \theta = \frac{|1 + 1 - 1|}{3} = \frac{1}{3}.$$

Cap. 3, Ex. 11.32 — Pela definição do ângulo,

$$|u \cdot v| = \|u\| \|v\| |\cos \theta| \leq \|u\| \|v\|.$$

Há igualdade exatamente quando $|\cos \theta| = 1$, isto é, quando os vetores são paralelos (incluindo o caso nulo).

Cap. 3, Ex. 11.33 — Eleve ao quadrado e use Cauchy-Schwarz:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Cap. 3, Ex. 11.34 — Compare os quadrados: a diferença entre eles é $4u \cdot v$.

Cap. 3, Ex. 11.35 — Tome $v = u$. Então $\|u\|^2 = u \cdot u = 0$.

Cap. 3, Ex. 11.36 — Coloque a hipotenusa no eixo x , com seus extremos em $(-p, 0)$ e $(q, 0)$, e o vértice reto em $(0, h)$. A ortogonalidade dos catetos dá

$$(-p, -h) \cdot (q, -h) = 0,$$

logo

$$h^2 = pq.$$

Cap. 3, Ex. 11.37 — A afirmação é falsa. Ambas as projeções são múltiplos de w , portanto são paralelas. O ângulo entre elas é 0 quando os coeficientes têm o mesmo sinal e π quando têm sinais opostos.

Cap. 3, Ex. 11.38 –

$$(129, 121, -90), \quad (77, -33, 66), \quad (0, 0, -3).$$

Cap. 3, Ex. 11.39 –

$$2u + 3v - 7w = (-16, 3, -13),$$

$$u \cdot w = 23, \quad v \cdot w = 20, \quad u \cdot v = 20,$$

$$u \times v = (5, -4, 1), \quad v \times u = (-5, 4, -1),$$

$$w \cdot (v \times u) = -15.$$

Cap. 3, Ex. 11.40 –

$$a = -\frac{9}{14}u + \frac{12}{7}v - \frac{11}{14}(u \times v).$$

Cap. 3, Ex. 11.41 –

$$a = (1, 1, 0).$$

Cap. 3, Ex. 11.42 –

$$v = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right).$$

Cap. 3, Ex. 11.43 – O triângulo PQR tem área

$$\frac{1}{2} \|(Q - P) \times (R - P)\| = \sqrt{5}.$$

O triângulo medial tem $1/4$ da área do original. Portanto

$$[ABC] = 4\sqrt{5}.$$

Cap. 3, Ex. 11.44 — Expanda as componentes pela definição do produto vetorial. A troca de duas linhas no determinante muda o sinal; a distributividade segue da linearidade de cada componente.

Cap. 3, Ex. 11.45 — Pelo determinante, repetir uma linha produz determinante zero. Geometricamente, $u \times v$ foi construído perpendicular a u e a v .

Cap. 3, Ex. 11.46 — Use

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| |\sin \theta|.$$

Para vetores não nulos, isso se anula exatamente quando $\theta = 0$ ou π . Os casos com vetor nulo são imediatos.

Cap. 3, Ex. 11.47 — Expanda o determinante pela primeira linha e compare termo a termo com $u \cdot (v \times w)$. Uma permutação cíclica é par, portanto não altera o determinante.

Cap. 3, Ex. 11.48 — A área K pode ser escrita como

$$2K = bc \sin \alpha = ca \sin \beta = ab \sin \gamma.$$

Dividindo por abc , obtemos a lei dos senos.

Cap. 3, Ex. 11.49 — Como

$$\overrightarrow{AB} = b - a, \quad \overrightarrow{AC} = c - a,$$

expandindo

$$(b - a) \times (c - a) = a \times b + b \times c + c \times a.$$

A área é metade da norma desse produto vetorial.

Cap. 3, Ex. 11.50 — As duas distâncias do ponto $(-5, 0)$ aos demais são $\sqrt{29}$. A base vertical mede 4 e sua distância horizontal ao vértice é 5, logo

$$\boxed{A = 10}.$$

Cap. 3, Ex. 11.51 — Igualando $AC^2 = AB^2$:

$$(x - a)^2 + x^2 = 2a^2.$$

Logo

$$x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{3}).$$

Cap. 3, Ex. 11.52 — Se os lados adjacentes são u, v , o lado esquerdo é $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, enquanto as diagonais são $u + v$ e $u - v$. Expanda seus quadrados e some.

Cap. 3, Ex. 11.53 — Pela fórmula da mediana,

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}.$$

A igualdade implica $a^2 = b^2$, logo $a = b$.

Cap. 3, Ex. 11.54 — Se os lados satisfazem $c^2 = a^2 + b^2$, tome vetores u, v dos dois lados adjacentes ao ângulo oposto a c . Como

$$c^2 = \|u - v\|^2 = a^2 + b^2 - 2u \cdot v,$$

segue $u \cdot v = 0$; portanto o ângulo é reto.

Cap. 3, Ex. 11.55 — Com lados adjacentes u, v , a igualdade $\|u + v\| = \|u - v\|$ implica $u \cdot v = 0$. Logo os lados adjacentes são perpendiculares.

Cap. 3, Ex. 11.56 — Some as três fórmulas

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

e suas permutações cíclicas.

Cap. 3, Ex. 11.57 — Respectivamente,

$$\boxed{x = -2}, \quad \boxed{y = \pm 2}, \quad \boxed{xy = 1}, \quad \boxed{y = \pm x}.$$

Cap. 3, Ex. 11.58 — Após duas elevações ao quadrado e simplificação,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

É uma elipse.

Cap. 3, Ex. 11.59 —

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

É um elipsoide de revolução.

Cap. 3, Ex. 11.60 —

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

É um hiperboloide de duas folhas de revolução.

Cap. 3, Ex. 11.61 —

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = |x|.$$

Elevando ao quadrado,

$$y^2 + z^2 = 2x - 1,$$

um paraboloides de revolução.

Cap. 4, Ex. 2.1 — Se $P = A + t_0 \mathbf{v}$, então

$$P = A + (\lambda t_0) \mathbf{v}',$$

logo $P \in s$. A inclusão recíproca segue de $\mathbf{v}' = (1/\lambda) \mathbf{v}$.

Cap. 4, Ex. 2.2 — Se $\mathbf{n}$ é ortogonal a todo vetor $\mathbf{u}$ paralelo a π , então

$$(\lambda \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} = \lambda (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

logo $\lambda \mathbf{n}$ também é normal a π . Como $\lambda \neq 0$ é arbitrário e vetores distintos correspondem a λ distintos, π possui infinitos vetores normais (todos paralelos entre si).

Cap. 4, Ex. 2.3 — Uma escolha para cada caso é:

$$(a)(x, y, z) = (1, 4, -2) + t(-1, -3, 3); \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+2}{3}.$$

$$(b)(x, y, z) = (1, 0, -2) + t(2, 1, 3); \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}.$$

(c)Eixos: $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$; não há forma simétrica com três quocientes porque duas componentes do diretor se anulam.

$$(d)(1, 2, 1) + t(0, 0, 1).$$

$$(e)(1, 2, 1) + t(1, 0, 0).$$

(f)Um diretor da reta dada é $(-3, 8, 4)$; portanto $(2, 1, 0) + t(-3, 8, 4)$.

$$(g)(2, 1, 0) + t(-3, 5, -1).$$

Cap. 4, Ex. 2.4 —

$$\boxed{3x + 4y - 9 = 0}.$$

As interseções são $(3, 0)$ e $(0, 9/4)$.

Cap. 4, Ex. 2.5 — (a) $(x, y) = (3, 5) + t(-5, -2)$ e $\boxed{2x - 5y + 19 = 0}$.

$$(b)(x, y) = (0, 1) + t(1, -1) \text{ e } \boxed{x + y - 1 = 0}.$$

Cap. 4, Ex. 2.6 — (a) $(3, 5, 1) + t(-5, -2, 1)$; $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{-2} = z-1$.

$$(b)(0, 1, 0) + t(1, -1, 0); \text{equivalentemente } x + y = 1, z = 0.$$

$$(c)(0, 1, 1) + t(0, -1, -1); \text{equivalentemente } x = 0, y = z.$$

$$(d)(3, 2, 1) + t(3, -1, 3); \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}.$$

Cap. 4, Ex. 2.7 — O vetor dado tem norma 7, logo a velocidade vetorial é

$$14 \frac{(-2, 6, 3)}{7} = (-4, 12, 6).$$

Portanto

$$\boxed{P(t) = (3, -1, -5) + t(-4, 12, 6)}.$$

Cap. 4, Ex. 2.8 —

$$\mathbf{v} = \frac{B - A}{4 - 1} = \left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{8}{3} \right).$$

Assim

$$P(t) = (-7, 12, 5) + (t - 1) \left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{8}{3} \right).$$

Cap. 4, Ex. 2.9 — A primeira velocidade vetorial é

$$\mathbf{v}_1 = \frac{14}{\sqrt{54}}(3, -6, 3) = \frac{14}{\sqrt{6}}(1, -2, 1),$$

e a segunda é $\mathbf{v}_2 = (4, -12, 3)$, pois esse vetor tem norma 13. Logo

$$P_1(t) = A + t\mathbf{v}_1, \quad P_2(t) = B + t\mathbf{v}_2.$$

As trajetórias são reversas: usando os vetores diretores $(3, -6, 3)$ e $(4, -12, 3)$,

$$((3, -6, 3) \times (4, -12, 3)) \cdot (B - A) = 48 \neq 0.$$

Portanto não existe ponto comum às trajetórias, e as partículas não se encontram.

Cap. 4, Ex. 2.10 — Uma parametrização é

$$(1, 2, 3) + t(1, 1, 1).$$

Os cortes são, respectivamente,

$$(-2, -1, 0), \quad (-1, 0, 1), \quad (0, 1, 2).$$

Cap. 4, Ex. 2.11 — As interseções dois a dois são

$$(3, 7), \quad (0, 1), \quad (3/4, 1/4).$$

Cap. 4, Ex. 2.12 — Rotacionando $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$ de $\pm 60^\circ$,

$$B_{\pm} = \left(\frac{1}{2} \mp \sqrt{3}, 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Cap. 4, Ex. 2.13 — Os pontos médios dos lados opostos são

$$M_A = (b/2, c/2), \quad M_B = (a/2, c/2), \quad M_C = ((a+b)/2, 0).$$

Logo, por exemplo,

$$A + t(b - 2a, c), \quad B + t(a - 2b, c), \quad C + t(a + b, -2c)$$

são parametrizações das três medianas (a reparametrização por fatores não nulos é irrelevante).

Cap. 4, Ex. 2.14 — A reta é a mediatriz de AB . Seu ponto médio é $(8, 3)$ e um vetor diretor perpendicular a $(12, -4)$ é $(1, 3)$. Assim

$$3x - y - 21 = 0, \quad (x, y) = (8, 3) + t(1, 3).$$

Cap. 4, Ex. 2.15 — (a) $(2, 11/3)$.

$$(b) \quad G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

Cap. 4, Ex. 2.16 — Se $M_A = (B + C)/2$, então

$$A + \frac{2}{3}(M_A - A) = \frac{A + B + C}{3}.$$

As expressões obtidas a partir de B e de C são iguais. Portanto as três medianas são concorrentes no baricentro.

Cap. 4, Ex. 2.17 –

$$\left(\frac{31}{17}, \frac{19}{17} \right).$$

Cap. 4, Ex. 2.18 – (a) $m = 3/4$, intercepto $-3/2$.

(b) $m = -2/3$, intercepto 2.

(c) horizontal: $m = 0$, intercepto $-9/7$.

(d) $m = -b/a$, intercepto b .

(e) os próprios m, b .

(f) se $a \neq 0$, $m = -b/a$ e intercepto 0; se $a = 0$, é a vertical $x = 0$.

(g) união das verticais $x = \pm 3/2$.

(h) união de $x = 0$, $y = 0$ e $2x - 3y + 4 = 0$.

(i) forma normal: o vetor $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ é normal à reta; se $\sin \alpha \neq 0$, $m = -\cot \alpha$ e o intercepto é $h / \sin \alpha$.

(j) $m = -3/2$ e intercepto $7/2$.

Cap. 4, Ex. 2.19 –

$$5x + 4y - 3 = 0.$$

Cap. 4, Ex. 2.20 – Paralela:

$$3x + 2y = 0.$$

Perpendicular:

$$2x - 3y + 13 = 0.$$

Cap. 4, Ex. 2.21 – A reta dada tem inclinação $-b/a$, logo a perpendicular tem inclinação a/b . Assim

$$ax - by - a^2 = 0.$$

Cap. 4, Ex. 2.22 — (a) A altura por C é $x = 0$; as outras podem ser escritas

$$y = \frac{b}{c}(x - a), \quad y = \frac{a}{c}(x - b).$$

Elas se encontram em

$$H = (0, -ab/c).$$

(b) As medianas são as do exercício anterior e encontram-se em

$$G = ((a + b)/3, c/3).$$

Cap. 4, Ex. 2.23 — Escreva $y = (2/3)x + c$. Os interceptos são $-3c/2$ e c , então a área é $3c^2/4$. Igualando a $4/3$, obtemos $c = \pm 4/3$. Logo

$$y = \frac{2}{3}x \pm \frac{4}{3}.$$

Cap. 4, Ex. 2.24 — A equação é

$$s(2x + 3y - 5) + t(3x - 2y - 4) = 0.$$

O ponto fixo resolve as duas equações entre parênteses:

$$P = (22/13, 7/13).$$

Como duas retas distintas por P geram o feixe de todas as retas por P , toda reta do feixe é uma combinação linear não trivial dessas duas equações.

Cap. 4, Ex. 2.25 — Substituindo,

$$bt + 5 = 2(at + 1) + 3 = 2at + 5.$$

Logo $b = 2a$, com $a \neq 0$ para que a parametrização descreva uma reta e não um único ponto.

Cap. 4, Ex. 2.26 — Tomando o valor comum igual a $12t$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -2, \frac{5}{3}\right) + t(6, 3, 4).$$

Um diretor é $(6, 3, 4)$; por exemplo, tome $t = 0, 1, -1$ para obter três pontos.

Cap. 4, Ex. 2.27 —

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right) + t(0, 0, 1).$$

Cap. 4, Ex. 2.28 — Tomando $z = t$,

$$x = \frac{6}{7} + \frac{t}{7}, \quad y = -\frac{12}{7} + \frac{19t}{7}.$$

Logo uma parametrização é

$$(x, y, z) = \left(\frac{6}{7}, -\frac{12}{7}, 0\right) + t\left(\frac{1}{7}, \frac{19}{7}, 1\right).$$

Cap. 4, Ex. 2.29 — Dois vetores do plano são $(-4, 1, 1)$ e $(-1, -3, 2)$; seu produto vetorial é $(5, 7, 13)$. Portanto

$$(x, y, z) = t(5, 7, 13).$$

Cap. 4, Ex. 2.30 — Escreva $C = (1 - t, t, 1)$ e imponha $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 1$.

(a) Não há solução real.

(b) Não há solução: a área é constante e diferente de $1/2$.

(c) Não há solução: a área é constante e diferente de $1/2$.

(d) $t = -1$ ou $t = -3$, portanto

$$C = (2, -1, 1) \quad \text{ou} \quad C = (4, -3, 1).$$

Cap. 4, Ex. 2.31 — O vetor diretor entre os interceptos é $(-a, b)$. Pela forma de dois pontos, ou substituindo ambos os interceptos em $\alpha x + \beta y = 1$, obtemos diretamente

$$\boxed{x/a + y/b = 1}.$$

Cap. 4, Ex. 2.32 — (a) Se (v_1, v_2) é diretor, dois pontos da reta separados por esse vetor satisfazem a mesma equação; subtraindo, $av_1 + bv_2 = 0$.

(b) O vetor $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ é normal unitário. Portanto h é a coordenada assinada dos pontos da reta na direção desse normal; em particular, a distância da origem à reta é $|h|$.

Cap. 5, Ex. 3.1 — Substituindo a parametrização de r em s ,

$$(\alpha a + \beta k)t + \alpha b + \beta d = \gamma.$$

Se $\alpha a + \beta k \neq 0$, há um único ponto, com

$$t = \frac{\gamma - \alpha b - \beta d}{\alpha a + \beta k}.$$

Se $\alpha a + \beta k = 0$, então $r \subset s$ quando $\alpha b + \beta d = \gamma$; caso contrário, são paralelas distintas.

Cap. 5, Ex. 3.2 — (a) Concorrentes em $(2, 3, 3)$.

(b) Coincidentes: o segundo vetor diretor é duas vezes o primeiro e $(-1, -1, -2)$ pertence a r .

(c) Concorrentes em $(22, -21, 11)$.

(d) Reversas: os vetores diretores não são paralelos e o sistema para a interseção é incompatível.

Cap. 5, Ex. 3.3 — A interseção de r e s fornece

$$\boxed{B = (-3, 2, 3)}.$$

Se $M = (A + C)/2$ é o ponto médio de AC , então $M \in s$; além disso, como r é altura, $\overrightarrow{AC} \cdot (3, 2, 0) = 0$. Essas condições dão

$$\boxed{A = (8, -7, 3)}.$$

Cap. 5, Ex. 3.4 — Num ponto comum existe z tal que

$$(m - m')z = a' - a, \quad (n - n')z = b' - b.$$

Como $(m, n) \neq (m', n')$, pelo menos um dos denominadores é não nulo. A compatibilidade dessas duas equações é exatamente

$$(a - a')(n - n') = (b - b')(m - m').$$

Cap. 5, Ex. 3.5 — Respectivamente:

- (a) paralelas distintas;
- (b) reversas;
- (c) reversas;
- (d) concorrentes em $(-2, 6, -6)$;
- (e) concorrentes em $(-2, 2, -7)$;
- (f) reversas.

Nos casos não paralelos, o produto misto $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \overrightarrow{AB}$ decide entre coplanares e reversas.

Cap. 5, Ex. 3.6 — Os vetores diretores nunca são paralelos. O produto misto é

$$-3(3m - 2).$$

Logo, para $m = 2/3$, as retas são concorrentes; o ponto comum é

$$\boxed{(-9, -5, -13)}.$$

Para $m \neq 2/3$, são reversas.

Cap. 5, Ex. 3.7 — Se $P \in r$, $Q \in s$ e $Q - P$ é múltiplo de $(1, -5, -1)$, a solução é

$$P = \left(-\frac{23}{4}, 1, 0\right), \quad Q = P + \frac{1}{4}(1, -5, -1).$$

Assim uma resposta é

$$\boxed{t : X = \left(-\frac{23}{4}, 1, 0\right) + \tau(1, -5, -1).}$$

Cap. 5, Ex. 3.8 — As direções podem ser tomadas como $(2, 0, -2)$ e $(-1, 1, 0)$. O sistema de interseção é incompatível; equivalentemente, o produto misto com o vetor entre pontos das retas é não nulo. Portanto as retas são **reversas**.

Cap. 5, Ex. 3.9 — A reta s , quando não degenerada, é vertical: seu vetor diretor é paralelo a $(0, 0, 1)$. Para que r tivesse essa direção, o produto vetorial dos seus vetores normais deveria ter as duas primeiras componentes nulas. Isso força

$$b = 14, \quad ab = 35,$$

logo $a = 5/2$. Mas então também a terceira componente do produto vetorial se anula: os dois planos que definem r tornam-se paralelos/coincidentes e r deixa de ser uma reta. Portanto **não existem** tais valores.

Cap. 5, Ex. 3.10 — O vetor diretor é $(3, -4, 4)$ e um normal do plano é $(4, -3, -6)$. Como

$$(3, -4, 4) \cdot (4, -3, -6) = 12 + 12 - 24 = 0,$$

a direção da reta é paralela ao plano. A reta não está contida nele, pois, por exemplo, $(-2, 1, -5)$ não satisfaz a equação do plano.

Cap. 5, Ex. 3.11 — Um vetor diretor da primeira reta é

$$(2, 3, -1) \times (2, -5, 2) = (1, -6, -16),$$

e a segunda direção é $(1, -6, 7)$. Um normal do plano procurado é, portanto, proporcional a $(6, 1, 0)$. Usando um ponto da primeira reta, obtemos

$$\boxed{6x + y - 16 = 0.}$$

Cap. 5, Ex. 3.12 — Pondo todas as razões iguais a t ,

$$(x, y, z) = (7 + 3t, -3 - t, 4 + 2t).$$

Em ambos os planos resulta $t = -3/2$. O ponto comum é

$$\boxed{(5/2, -3/2, 1)}.$$

Como as duas retas têm esse ponto em comum, são coplanares.

Cap. 5, Ex. 3.13 — (a) $(2, -3, 6)$.

(b) Não há interseção: a reta é paralela ao plano e não está contida nele.

(c) $(1, -7/2, 0)$.

Cap. 5, Ex. 3.14 — Os vetores diretores são $(2, -3, 3)$ e $(3, -2, -1)$. Seu produto vetorial é $(9, 11, 5)$, logo

$$9x + 11y + 5z - 16 = 0.$$

Cap. 5, Ex. 3.15 — O determinante é o produto misto de $\overrightarrow{P_0P}$ com os dois vetores diretores. Ele se anula exatamente quando esses três vetores são coplanares, isto é, quando P pertence ao plano gerado pelas duas direções a partir de P_0 .

Cap. 5, Ex. 3.16 — É novamente o critério de coplanaridade: o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ deve pertencer ao plano gerado por $\overrightarrow{P_0P_1}$ e pelo vetor diretor dado.

Cap. 5, Ex. 3.17 — Os vetores diretores são $(2, -3, 4)$ e $(3, 2, -2)$, e podemos tomar pontos $A = (1, -2, 5)$ e $B = (-7, 2, 1)$. Então

$$((2, -3, 4) \times (3, 2, -2)) \cdot \overrightarrow{AB} = 28 \neq 0.$$

Logo as retas são **reversas**.

Cap. 5, Ex. 3.18 — Os vetores normais são $(b, -a, 0)$, $(0, c, -b)$ e $(-c, 0, a)$ e satisfazem uma dependência linear. Eliminando x, y, z das três equações, a condição de compatibilidade é precisamente

$$a + bm + cn = 0.$$

Quando ela vale, há apenas duas equações independentes, logo a interseção é uma reta (salvo degenerescências triviais, que devem ser tratadas separadamente se a, b, c anularem simultaneamente as equações).

Cap. 5, Ex. 3.19 — A equação do plano é a soma das duas equações que definem a reta:

$$(5x - 3y + 2z - 5) + (2x - y - z - 1) = 7x - 4y + z - 6.$$

Logo todo ponto da reta satisfaz a equação do plano.

Cap. 5, Ex. 3.20 — O determinante da matriz dos coeficientes é

$$-11(a - 2).$$

Logo:

(a) $a \neq 2$, com b arbitrário.

(b) Para $a = 2$, as linhas dos coeficientes satisfazem $-31L_1 + 3L_2 + 11L_3 = 0$.
A compatibilidade exige

$$-31b + 3 + 88 = 0,$$

portanto $a = 2, b = 91/31$.

(c) Se $a = 2$ e $b \neq 91/31$, não há ponto comum aos três planos; como os normais têm posto 2, as interseções dois a dois são três retas paralelas. Assim

$$a = 2, b \neq 91/31.$$

Cap. 6, Ex. 4.1 — Podemos usar vetores diretores $(4, 3)$ e $(3, -2)$. Assim

$$\cos \theta = \frac{|(4, 3) \cdot (3, -2)|}{5\sqrt{13}} = \frac{6}{5\sqrt{13}}.$$

Logo

$$\theta = \arccos\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right).$$

Cap. 6, Ex. 4.2 — A reta dada tem coeficiente angular $3/4$. Se m é a inclinação procurada,

$$\left| \frac{m - 3/4}{1 + 3m/4} \right| = 1,$$

o que fornece

$$m = 7 \quad \text{ou} \quad m = -\frac{1}{7}.$$

Portanto

$$\boxed{y + 1 = 7(x - 1)} \quad \text{ou} \quad \boxed{y + 1 = -\frac{1}{7}(x - 1)}.$$

Cap. 6, Ex. 4.3 — Usando produtos escalares entre os vetores dos lados,

$$\angle A = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right),$$

e

$$\angle B = \angle C = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Numericamente,

$$126,87^\circ + 26,565^\circ + 26,565^\circ = 180^\circ.$$

Cap. 6, Ex. 4.4 — Os vetores diretores satisfazem

$$(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 3) = 0,$$

portanto as retas são ortogonais. Para serem perpendiculares precisariam também se interceptar. O sistema

$$(1, 2, 1) + t(1, 1, 0) = (1, 3, 4) + u(1, -1, 3)$$

não possui solução. Logo são **ortogonais, mas não perpendiculares**.

Cap. 6, Ex. 4.5 — Um vetor ortogonal aos dois vetores diretores é

$$(1, 2, 1) \times (1, -1, 1) = (3, 0, -3),$$

paralelo a $(1, 0, -1)$. Assim uma resposta é

$$\boxed{X = (1, -2, 1) + \lambda(1, 0, -1)}.$$

Cap. 6, Ex. 4.6 — Com $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$ e $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{4}{9}.$$

Portanto

$$\boxed{\theta = \arcsin(4/9)}.$$

Cap. 6, Ex. 4.7 — Como

$$(1, 1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 0,$$

o ângulo é 0. O ponto $(0, 0, 1)$ não pertence ao plano, pois $2 \neq 0$. Logo a reta é **paralela ao plano e não está contida nele**.

Cap. 6, Ex. 4.8 — Usando os vetores normais:

$$(a) \theta = \arccos \frac{4}{\sqrt{22}};$$

$$(b) \theta = 0;$$

$$(c) \theta = \pi/2;$$

$$(d) \theta = \pi/4.$$

Cap. 6, Ex. 4.9 — As normais dos planos dados são $(2, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1)$. Uma normal do plano procurado deve ser ortogonal a ambas, logo podemos tomar

$$(2, 1, 1) \times (-1, 0, 1) = (1, -3, 1).$$

Portanto

$$\boxed{x - 3y + z = 2}.$$

Cap. 6, Ex. 4.10 — Como o plano procurado é perpendicular a xz , sua normal tem a forma $(a, 0, c)$. A condição de ângulo fornece

$$(3a + c)^2 = 7(a^2 + c^2).$$

Uma escolha é $a = 6$ e

$$c = 3 \pm \sqrt{21}.$$

Assim os dois planos são

$$6(x-1) + (3 + \sqrt{21})(z-3) = 0$$

e

$$6(x-1) + (3 - \sqrt{21})(z-3) = 0.$$

Cap. 6, Ex. 4.11 — A normal é $(1, 2)$ e

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 3 = 2.$$

O pé da perpendicular é

$$B = A - \frac{2}{1^2 + 2^2}(1, 2) = \left(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Logo

$$d(A, r) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Cap. 6, Ex. 4.12 — Escolha qualquer ponto P da primeira reta. Então

$$AP + BQ + C = 0$$

para suas coordenadas (P, Q) . Aplicando a fórmula de distância ponto-reta à segunda reta,

$$d = \frac{|AP + BQ + C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Cap. 6, Ex. 4.13 — A distância é

$$d = \frac{|4 + 1 + 6 - 7|}{3} = \frac{4}{3}.$$

Como $\mathbf{n} = (2, -1, 2)$ e $\|\mathbf{n}\|^2 = 9$, o pé é

$$Q = P - \frac{4}{9}(2, -1, 2) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{19}{9}\right).$$

Cap. 6, Ex. 4.14 — A equação do plano é

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Logo

$$d = \frac{1}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}},$$

e a identidade segue ao elevar ao quadrado e inverter.

Cap. 6, Ex. 4.15 — No primeiro caso,

$$d = \frac{|9 - (-18)|}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 1}} = 3.$$

No segundo, dividindo a segunda equação por 2,

$$d = \frac{|8 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{2}{7}.$$

Cap. 6, Ex. 4.16 — Com $A = (1, 2, 1)$,

$$\overrightarrow{AP} = (1, 0, 1)$$

e

$$\overrightarrow{AP} \times (2, 3, 5) = (-3, -3, 3).$$

Portanto

$$\boxed{d(P, r) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{38}}}.$$

Cap. 6, Ex. 4.17 — Os vetores diretores não são paralelos e

$$(2, 3, 5) \times (4, 2, 1) = (-7, 18, -8).$$

Tomando $A = (1, 2, 1)$ e $B = (1, 2, 5)$,

$$(B - A) \cdot ((-7, 18, -8)) = -32 \neq 0,$$

logo as retas não são coplanares. Assim

$$d(r, s) = \frac{32}{\sqrt{437}}.$$

Cap. 6, Ex. 4.18 – Se

$$A = (-7, 4, 4) + t(3, -2, 3), \quad B = (1, -9, -12) + u(1, 2, -1),$$

impomos

$$(B - A) \cdot (3, -2, 3) = 0, \quad (B - A) \cdot (1, 2, -1) = 0.$$

Dáí

$$t = \frac{1}{29}, \quad u = \frac{9}{29}.$$

Um ponto da perpendicular comum é

$$A = \left(-\frac{200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29} \right),$$

e $B - A$ é paralelo a $(2, -3, -4)$. Portanto

$$X = A + \lambda(2, -3, -4).$$

Cap. 6, Ex. 4.19 – Como

$$\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2 \cos(\theta - \pi/3),$$

temos

$$2r \cos(\theta - \pi/3) = 6,$$

ou

$$r \cos(\theta - \pi/3) = 3.$$

Logo a distância à origem é 3.

Cap. 6, Ex. 4.20 — Usando $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, obtemos, respectivamente,

$$\boxed{x = 3}, \quad \boxed{y = 3},$$

$$\boxed{5x + y = 3\sqrt{2}}, \quad \boxed{5x - 12y = 39}.$$

Cap. 6, Ex. 4.21 — Expandindo,

$$r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = h,$$

portanto

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = h.$$

O vetor $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ é normal unitário. Logo h é a coordenada assinada dos pontos da reta nessa direção e, como $h > 0$, a distância à origem é exatamente h .

Cap. 7, Ex. 1.1 — Na ordem dos itens:

(a) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9.$

(b) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$

(c) $x^2 + y^2 = a^2.$

(d) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 10.$

(e) Para $a > 0$, há duas soluções: $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ e $(x + a)^2 + y^2 = a^2.$

(f) O centro é $(3/2, 6)$ e $r = \sqrt{113}/2:$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 6)^2 = \frac{113}{4}.$$

(g) A distância do centro $(3, -2)$ à reta é $8/\sqrt{5}$, logo

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{64}{5}.$$

(h) Os centros são

$$C_{\pm} = (2, 1) \pm \frac{3}{\sqrt{29}}(2, -5),$$

e as duas circunferências são

$$(x - C_{\pm, x})^2 + (y - C_{\pm, y})^2 = 9.$$

Cap. 7, Ex. 1.2 — Na ordem dos itens:

(a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$: centro $(2, -3)$, raio 5.

(b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$: caso degenerado, centro $(1, 2)$ e raio 0.

(c) $(x - a)^2 + y^2 = a^2$: centro $(a, 0)$ e raio $|a|$.

(d)

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{41}{64};$$

centro $(1/2, 5/8)$ e raio $\sqrt{41}/8$.

(e) $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$: centro $(0, 0, a)$ e raio $|a|$.

Cap. 7, Ex. 1.3 — O círculo pelos pontos $(4, 0)$, $(0, 3)$ e $(0, 0)$ é

$$x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0,$$

ou

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Cap. 7, Ex. 1.4 — (a) No segundo quadrante, o centro é $(-4, 4)$:

$$(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16.$$

(b) A terceira reta é $2x + 3y = 6$. Os quatro círculos têm raios

$$r_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \quad r_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \quad r_3 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \quad r_4 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2},$$

com centros, respectivamente, (r_1, r_1) , (r_2, r_2) , $(r_3, -r_3)$ e $(-r_4, r_4)$.

Cap. 7, Ex. 1.5 — (a) Não há esfera real: a equação equivale a

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = -5.$$

(b)

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 7)^2 = 4;$$

centro $(3, 2, -7)$ e raio 2.

(c) Não há esfera real:

$$x^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = -3.$$

(d) Não é esfera, pois os coeficientes dos termos quadráticos não são iguais: o termo z^2 aparece com sinal oposto.

Cap. 7, Ex. 1.6 — Expanda

$$(X - P_1) \cdot (X - P_2) = 0.$$

A condição significa que os vetores $\overrightarrow{P_1X}$ e $\overrightarrow{P_2X}$ são ortogonais; pelo teorema de Tales, o lugar geométrico é a esfera de diâmetro P_1P_2 . Em coordenadas, a expansão fornece exatamente a equação proposta.

Cap. 7, Ex. 2.1 — Na ordem dos itens:

(a) $3x - 4y + 25 = 0.$

(b) $x - 2y = 0.$

(c) As duas tangentes por $(3, 2)$ são

$$y = 2 \quad \text{e} \quad 4x + 3y - 18 = 0.$$

(d) A distância do centro à reta é $5/\sqrt{2}$. Assim a meia corda mede $5/\sqrt{2}$ e o comprimento da corda é

$$5\sqrt{2}.$$

Cap. 7, Ex. 2.2 — Para um triângulo ABC :

(a) o circuncentro é a interseção de duas mediatrizes; o raio é a distância desse ponto a qualquer vértice;

(b) o incentro é a interseção de duas bissetrizes internas; o raio é a distância do incentro a qualquer lado;

(c) os três pontos médios pertencem à circunferência dos nove pontos; seu centro é o ponto médio entre circuncentro e ortocentro e seu raio é metade do circunraio. Para obter apenas a equação, basta determinar o círculo pelos três pontos médios.

A escolha $A = (0, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (b, c)$ simplifica as contas.

Cap. 7, Ex. 2.3 — Os vértices do triângulo são

$$(-3, 7), \quad (5, 4), \quad (-1, -2).$$

A circunferência circunscrita é

$$11x^2 + 11y^2 - x - 65y - 186 = 0.$$

Cap. 7, Ex. 2.4 — Para $y = mx + b$, a distância da origem à reta é $|b|/\sqrt{1+m^2}$. A tangência a $x^2 + y^2 = r^2$ exige essa distância igual a r , portanto

$$b = \pm r \sqrt{1+m^2}.$$

Cap. 7, Ex. 2.5 — O centro está em $(0, k)$. Igualando as distâncias a $(1, 2)$ e $(3, 4)$, obtemos $k = 5$. Logo

$$x^2 + (y - 5)^2 = 10.$$

Cap. 7, Ex. 2.6 —

$$b = \pm r \sqrt{1+a^2}.$$

Cap. 7, Ex. 2.7 — Os centros estão sobre a normal $(3, -4)$ à reta, a distância 5 do ponto de tangência $(3, 2)$. Assim são

$$(6, -2) \quad \text{e} \quad (0, 6),$$

e as circunferências são

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

e

$$x^2 + (y - 6)^2 = 25.$$

Cap. 7, Ex. 2.8 — A circunferência é

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 7.$$

O ponto $(-1, 5)$ está a distância $\sqrt{5}$ do centro, menor que o raio $\sqrt{7}$. Portanto está no interior do círculo e nenhuma reta por ele pode ser tangente.

Cap. 7, Ex. 2.9 — Na ordem dos itens:

(a)

$$x^2 + y^2 - x - 8y + 10 = 0,$$

centro $(1/2, 4)$, raio $5/2$.

(b)

$$19x^2 + 19y^2 - 45x - 137y + 74 = 0,$$

centro $(45/38, 137/38)$ e $r^2 = 7585/722$.

(c) Supondo $c \neq 0$ e $a \neq b$, a equação é

$$x^2 + y^2 - (a + b)x - \frac{c^2 + ab}{c}y + ab = 0.$$

Cap. 7, Ex. 2.10 — No ponto (a, b, c) da esfera, o vetor radial (a, b, c) é normal ao plano tangente. Portanto

$$a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0.$$

Como $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$, segue

$$ax + by + cz = r^2.$$

Cap. 7, Ex. 2.11 — O centro é a origem e o raio é 1. Portanto

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Cap. 7, Ex. 2.12 — Parametrize o centro por

$$C = (2t - 3, t - 1, t).$$

Igualando suas distâncias aos dois pontos dados, obtém-se $t = -2$. Assim

$$C = (-7, -3, -2), \quad r^2 = 198,$$

e

$$(x + 7)^2 + (y + 3)^2 + (z + 2)^2 = 198.$$

Cap. 7, Ex. 2.13 — Completando quadrados,

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1,$$

logo a esfera tem centro $(-2, 1, 0)$ e raio 1. O ponto $(2, 3, 4)$ está a distância

$$\sqrt{(2 + 2)^2 + (3 - 1)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

do centro; portanto sua distância à superfície esférica é

$$6 - 1 = 5.$$

Cap. 7, Ex. 2.14 — O plano dado tem normal $(1, 3, -2)$ e equação

$$x + 3y - 2z + 1 = 0.$$

A distância do centro $(3, 2, -2)$ ao plano é $\sqrt{14}$, portanto

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 14.$$

Cap. 7, Ex. 2.15 — Se o centro é $(h, 0, 0)$, a igualdade das distâncias aos pontos dados fornece $h = 2$. O raio satisfaz $r^2 = 21$, logo

$$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 21.$$

Cap. 7, Ex. 2.16 — A esfera dada tem centro $(0, -3, 2)$. O plano parametrizado tem equação

$$2x - 3y + 2z + 4 = 0.$$

A distância do centro ao plano é $\sqrt{17}$; a esfera concêntrica procurada é

$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 17.$$

Cap. 7, Ex. 2.17 — Os planos paralelos a $4x - y + 3z = 2$ são $4x - y + 3z = d$. A distância do centro $(0, 0, 1)$ ao plano deve ser 1, portanto

$$d = 3 \pm \sqrt{26}.$$

Cap. 7, Ex. 2.18 — A esfera tem centro $(2, -1, 2)$ e raio $\sqrt{5}$. A distância desse centro à reta

$$\frac{x+6}{2} = y+3 = z+1$$

é $\sqrt{14}/2 < \sqrt{5}$. Logo a reta atravessa o interior da esfera. Consequentemente, **não existe plano real que contenha a reta e seja tangente à esfera.**

Cap. 7, Ex. 3.1 — De

$$r = A \cos \theta + B \sin \theta$$

segue

$$x^2 + y^2 = Ax + By,$$

portanto o centro cartesiano é

$$\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2} \right)$$

e o raio é $\sqrt{A^2 + B^2}/2$. Como $A > 0$, o centro está no semiplano $x > 0$ e sua direção polar é exatamente

$$\alpha = \arctg \frac{B}{A} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Assim o centro polar é

$$\left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2}, \arctg \frac{B}{A} \right).$$

(Sem a hipótese $A > 0$, a direção correta em todos os quadrantes é dada por $\alpha = \text{atan2}(B, A)$, que coincide com $\arctg(B/A)$ apenas quando $A > 0$.)

Cap. 7, Ex. 3.2 — $r = 8 \cos \theta$ equivale a

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16.$$

A reta $r \sin \theta = 4$ é $y = 4$, cuja distância ao centro $(4, 0)$ é 4, igual ao raio. Logo é tangente.

Cap. 7, Ex. 3.3 — O círculo $r = 2a \cos \theta$ equivale a

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

No ponto (r_1, θ_1) , usando $r_1 = 2a \cos \theta_1$, a equação do raio normal à tangente leva a

$$r \cos(\theta - 2\theta_1) = 2a \cos^2 \theta_1.$$

Cap. 7, Ex. 3.4 — A equação

$$r^2 - 2rr_1 \cos \theta + r_1^2 - a^2 = 0$$

é o círculo

$$(x - r_1)^2 + y^2 = a^2,$$

de centro $(r_1, 0)$ e raio $|a|$. A reta

$$r \cos(\theta - \alpha) = a + r_1 \cos \alpha$$

é

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = a + r_1 \cos \alpha.$$

Sua distância ao centro é $|a|$, portanto ela é tangente ao círculo.

Cap. 7, Ex. 4.1 — O centro é $C = (2, -1)$ e o raio é 5. A distância do centro à reta é

$$d = \frac{|6 + 4 - 20|}{5} = 2 < 5,$$

portanto a reta é secante. Se ℓ é o comprimento da corda,

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21},$$

logo

$$\ell = 2\sqrt{21}.$$

Cap. 7, Ex. 4.2 — O centro é $C = (1, -2, 3)$ e

$$\overrightarrow{CP} = (3, 4, 0)$$

é normal ao plano tangente. Assim

$$3(x - 4) + 4(y - 2) = 0,$$

ou

$$3x + 4y - 20 = 0.$$

Cap. 7, Ex. 4.3 — Multiplicando por r ,

$$r^2 = 6r \cos \theta - 2r \sin \theta,$$

logo

$$x^2 + y^2 = 6x - 2y.$$

Completando quadrados,

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10.$$

O centro é $(3, -1)$ e o raio é $\sqrt{10}$.

Cap. 7, Ex. 4.4 — A equação cartesiana é

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5,$$

ou

$$x^2 + y^2 = 4x - 2y.$$

Portanto

$$\boxed{r = 4 \cos \theta - 2 \sin \theta}.$$

Cap. 8, Ex. 6.1 — Seguindo a mesma construção usada para a parábola:

- (a) O foco F é o ponto de tangência da esfera de Dandelin com o plano π , e a diretriz r é a interseção de π com o plano γ que contém o círculo de tangência da esfera com o cone.
- (b) Para X na elipse, seja C a interseção da geratriz $\overrightarrow{OX}$ com γ , seja B a projeção ortogonal de X em γ , e seja D o ponto de r tal que $\triangle XBD$ esteja num plano ortogonal a π . Definem-se B', C', D' do mesmo modo a partir de X' .
- (c) Em $\triangle XBD$ e $\triangle X'B'D'$ o ângulo reto está em B (resp. B') e o ângulo em D (resp. D') é o ângulo θ que π faz com o eixo do cone — o mesmo para todo ponto da elipse, pois π é fixo. Logo $\triangle XBD \sim \triangle X'B'D'$ (caso AA). Do mesmo modo, em $\triangle XBC$ e $\triangle X'B'C'$ o ângulo reto está em B (resp. B') e o ângulo em C (resp. C') é o ângulo α de abertura do cone, também fixo; logo $\triangle XBC \sim \triangle X'B'C'$.
- (d) Das semelhanças do item anterior,

$$\frac{\|\overrightarrow{XC}\|}{\|\overrightarrow{XB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{X'C'}\|}{\|\overrightarrow{X'B'}\|} \quad \text{e} \quad \frac{\|\overrightarrow{XD}\|}{\|\overrightarrow{XB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{X'D'}\|}{\|\overrightarrow{X'B'}\|}.$$

Dividindo uma razão pela outra,

$$\frac{\|\overrightarrow{XC}\|}{\|\overrightarrow{XD}\|} = \frac{\|\overrightarrow{X'C'}\|}{\|\overrightarrow{X'D'}\|} = \eta,$$

onde η depende apenas dos ângulos fixos α e θ , não de X .

- (e) Como $\overrightarrow{XC}$ e $\overrightarrow{XF}$ são segmentos tangentes à mesma esfera traçados a partir de X , tem-se $\|\overrightarrow{XC}\| = \|\overrightarrow{XF}\|$; e, exatamente como no caso da parábola, $\|\overrightarrow{XD}\| = d(X, r)$. Substituindo na razão do item anterior,

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r).$$

Como aqui $\theta > \alpha$ (o plano π é mais inclinado em relação ao eixo do que a geratriz), tem-se $\eta < 1$.

Cap. 8, Ex. 6.2 — A construção é a mesma do exercício anterior (elipse): a esfera de Dandelin tangencia o cone e o plano π ; o ponto de tangência com π é o foco F , e a interseção de π com o plano γ dos pontos de tangência da esfera com o cone é a diretriz r . Para X na hipérbole, com B, C, D definidos como no exercício

anterior, os triângulos $\triangle XBC$ e $\triangle XBD$ continuam retângulos em B , com ângulos α (abertura do cone) e θ (inclinação de π em relação ao eixo) fixos — os mesmos para qualquer ponto da hipérbole. Como antes,

$$\frac{\|\overrightarrow{XC}\|}{\|\overrightarrow{XD}\|} = \eta$$

para uma constante η que não depende de X , e, como $\|\overrightarrow{XC}\| = \|\overrightarrow{XF}\|$ (tangentes à mesma esfera a partir de X) e $\|\overrightarrow{XD}\| = d(X, r)$, segue

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r).$$

Neste caso $\theta < \alpha$ (o plano é mais próximo do eixo do cone do que a geratriz), o que dá $\eta > 1$.

Cap. 8, Ex. 6.3 — Sejam S_1 e S_2 as esferas de Dandelin da hipérbole, tangentes ao cone nos círculos C_1, C_2 e ao plano π nos focos F_1, F_2 respectivamente. Para X num dos ramos, a geratriz que passa por X intersecta C_1 e C_2 em pontos H_1, H_2 . Como antes, $\|\overrightarrow{XH_1}\| = \|\overrightarrow{XF_1}\|$ e $\|\overrightarrow{XH_2}\| = \|\overrightarrow{XF_2}\|$, pois cada par é formado por segmentos tangentes à mesma esfera traçados a partir de X . Diferentemente do caso da elipse, aqui X está no mesmo ramo do cone que apenas uma das duas circunferências de tangência, de modo que H_1 e H_2 ficam em lados opostos de X ao longo da geratriz; assim

$$\left| \|\overrightarrow{XH_1}\| - \|\overrightarrow{XH_2}\| \right| = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|,$$

que é a distância entre C_1 e C_2 medida ao longo de qualquer geratriz — a mesma para todas as geratrizes, por simetria do cone. Chamando essa distância de k , concluímos

$$\left| \|\overrightarrow{F_1X}\| - \|\overrightarrow{F_2X}\| \right| = k.$$

Cap. 8, Ex. 9.1 — A forma canônica é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Logo o eixo maior é vertical, $a = 3$, $b = 2$ e

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}.$$

Centro: $(0, 0)$. Vértices principais: $(0, \pm 3)$. Vértices secundários: $(\pm 2, 0)$. Focos: $(0, \pm\sqrt{5})$. Os eixos medem 6 e 4, e

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Cap. 8, Ex. 9.2 — Temos $c = 4$ e $2a = 10$, portanto $a = 5$. Como $a^2 = b^2 + c^2$,

$$b^2 = 25 - 16 = 9.$$

Logo

$$\boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}.$$

Cap. 8, Ex. 9.3 — Completando quadrados,

$$9(x - 2)^2 + 16(y + 1)^2 = 144,$$

isto é,

$$\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1.$$

É uma elipse de centro $(2, -1)$, com $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$. O eixo maior é horizontal; os focos são

$$(2 \pm \sqrt{7}, -1),$$

e os vértices principais são $(6, -1)$ e $(-2, -1)$.

Cap. 8, Ex. 9.4 — A forma canônica é

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Logo $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$. Os vértices são $(\pm 4, 0)$, os focos $(\pm 5, 0)$ e as assíntotas

$$y = \pm \frac{3}{4}x.$$

A excentricidade é

$$e = \frac{5}{4}.$$

Cap. 8, Ex. 9.5 — Temos $c = 5$, $a = 3$ e

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16.$$

Portanto

$$\boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1}.$$

Cap. 8, Ex. 9.6 — Completando quadrados,

$$4(x - 1)^2 - 9(y + 2)^2 = 36,$$

logo

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1.$$

É uma hipérbole de centro $(1, -2)$, com $a = 3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{13}$. Vértices:

$$(1 \pm 3, -2).$$

Focos:

$$(1 \pm \sqrt{13}, -2).$$

Assíntotas:

$$y + 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1).$$

Cap. 8, Ex. 9.7 — Comparando com $y^2 = 4px$, temos $p = 3$. Logo

$$V = (0, 0), \quad F = (3, 0), \quad d : x = -3.$$

O eixo é $y = 0$. A corda focal perpendicular ao eixo passa por $x = 3$; seus extremos são $(3, \pm 6)$, portanto seu comprimento é $12 = 4p$.

Cap. 8, Ex. 9.8 — O vértice é a origem e $p = -2$. Assim

$$x^2 = 4py = -8y,$$

ou

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{8}}.$$

Cap. 8, Ex. 9.9 — Completando quadrados,

$$(x - 3)^2 = 8(y + 1).$$

Logo $4p = 8$, isto é, $p = 2$. Portanto

$$V = (3, -1), \quad F = (3, 1), \quad d : y = -3.$$

Cap. 8, Ex. 9.10 — (a) $a = 5, b = 3, c = 4, e = 4/5$. Focos $(\pm 4, 0)$ e diretrizes

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{25}{4}.$$

(b) $a = 3, b = 4, c = 5, e = 5/3$. Focos $(\pm 5, 0)$ e diretrizes

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{9}{5}.$$

(c) Excentricidade $e = 1$, foco $(3, 0)$ e diretriz $x = -3$.

Cap. 8, Ex. 9.11 — Elevando ao quadrado,

$$(x - 4)^2 + y^2 = \frac{16}{25} \left(x - \frac{25}{4} \right)^2.$$

Simplificando,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Trata-se da elipse de focos $(\pm 4, 0)$ e excentricidade $4/5$.

Cap. 8, Ex. 9.12 — Na primeira, $(a, b) = (5, 3)$; na segunda, $(a', b') = (10, 6)$.

Assim

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = 2.$$

A homotetia de centro na origem e razão 2 leva (x, y) em $(2x, 2y)$ e transforma a primeira elipse na segunda. Ambas têm a mesma excentricidade $4/5$.

Cap. 9, Ex. 6.1 — As duas têm como traço o círculo unitário. X_1 percorre o círculo uma vez no sentido anti-horário; X_2 o percorre duas vezes no mesmo sentido. Portanto parametrizações diferentes podem ter a mesma imagem geométrica.

Cap. 9, Ex. 6.2 — Como $B - A = (2, 3, -2)$,

$$X(t) = A + t(B - A) = (1 + 2t, -1 + 3t, 2 - 2t).$$

Logo

$$X'(t) = (2, 3, -2)$$

e

$$L = \int_0^1 \|X'(t)\| dt = \sqrt{17}.$$

Cap. 9, Ex. 6.3 — (a) Como $x = t$, temos $y = x^2$. Além disso,

$$X'(t) = (1, 2t) \neq \mathbf{0},$$

logo a parametrização é regular para todo t .

(b) Temos $x = t^2 \geq 0$ e $y = t^3$, portanto

$$y^2 = x^3.$$

O traço é a cúspide $y^2 = x^3$, $x \geq 0$. Como

$$Y'(t) = (2t, 3t^2),$$

a parametrização não é regular apenas em $t = 0$.

Cap. 9, Ex. 6.4 — Temos

$$Y(s) = (\cos s, -\sin s),$$

portanto o traço continua sendo o círculo unitário. Além disso,

$$Y'(s) = -X'(2\pi - s),$$

logo o sentido do percurso é invertido.

Cap. 9, Ex. 6.5 —

$$X'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t, 4)$$

e

$$\|X'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16} = 5.$$

A rapidez é constante e

$$\boxed{L = 10\pi}.$$

Cap. 9, Ex. 6.6 — O centro do círculo desloca-se horizontalmente de uma distância rt . Em relação ao centro, o ponto marcado tem deslocamento

$$(-r \operatorname{sen} t, -r \cos t)$$

medido a partir da posição adequada. Assim

$$X(t) = (r(t - \operatorname{sen} t), r(1 - \cos t)).$$

Cap. 9, Ex. 6.7 — Tomando $\theta = t$,

$$X(t) = (2t \cos t, 2t \operatorname{sen} t), \quad t \geq 0.$$

Após uma volta, t aumenta em 2π , e o raio aumenta em

$$2(2\pi) = 4\pi.$$

Cap. 9, Ex. 6.8 — Uma parametrização é

$$X(\theta) = (a(1 + \cos \theta) \cos \theta, a(1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta).$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r \cos \theta = x$,

$$r^2 = ar + ax,$$

portanto

$$r^2 - ax = ar.$$

Elevando ao quadrado,

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Cap. 9, Ex. 6.9 — (a) Em coordenadas cilíndricas,

$$(r, \theta, z) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right).$$

Como a distância à origem é 2 e $\cos \phi = \sqrt{2}/2$,

$$(r, \phi, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right).$$

(b)

$$x = 3, \quad y = \sqrt{3}, \quad z = 2.$$

Logo as coordenadas cilíndricas são

$$\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 2\right).$$

Cap. 9, Ex. 6.10 —

$$X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3t).$$

A curva está contida no cilindro

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Quando t aumenta de 2π , a coordenada z aumenta de

$$6\pi.$$

Cap. 9, Ex. 6.11 — Escrevendo $u = m(t - t_0)$,

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Como

$$1 - \tanh^2 u = \frac{1}{\cosh^2 u},$$

segue que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Cap. 9, Ex. 6.12 — (a)

$$-3 \leq x \leq 3, \quad -2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \leq y \leq 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}.$$

(b)

$$-2 \leq y \leq 2, \quad -3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \leq x \leq 3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}.$$

Cap. 9, Ex. 6.13 — (a)

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

(b)

$$\boxed{1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}.$$

Cap. 9, Ex. 6.14 — As retas dos lados são

$$OA : y = 2x, \quad OB : y = \frac{x}{2}, \quad AB : y = -x + 6.$$

Assim,

$$0 \leq x \leq 2 \implies \frac{x}{2} \leq y \leq 2x,$$

e

$$2 \leq x \leq 4 \implies \frac{x}{2} \leq y \leq -x + 6.$$

A separação é necessária porque a fronteira superior muda em $x = 2$.

Cap. 10, Ex. 11.1 — Uma possibilidade é:

$$(a)(x, y, z) = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, v), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, v \in \mathbb{R};$$

$$(b)(x, y, z) = (2 \cos \theta, \sin \theta, v), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, v \in \mathbb{R};$$

$$(c)(x, y, z) = (u, u^2, v), \quad u, v \in \mathbb{R};$$

$$(d)(x, y, z) = (s \cos \theta, s \sin \theta, s), \quad s \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta < 2\pi. \text{ Se } s \geq 0, \text{ obtém-se apenas uma das folhas.}$$

Cap. 10, Ex. 11.2 — Com $s \in \mathbb{R}$,

$$X(t, s) = \gamma(t) + s\mathbf{w} = (\cos t, \sin t + s, t/4 + 2s).$$

Cap. 10, Ex. 11.3 — Como $v = z/2$,

$$\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + y^2 = 4.$$

No plano $z = k$,

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = 4,$$

um círculo de raio 2 e centro $(k/2, 0, k)$ no próprio plano de corte.

Cap. 10, Ex. 11.4 — Uma parametrização é

$$X(t, s) = (2s \cos t, s \sin t, 3s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = s^2 = \frac{z^2}{9},$$

segue

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 0.}$$

Cap. 10, Ex. 11.5 — Com $\rho \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$X(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2).$$

Como $x^2 + y^2 = \rho^2$,

$$z = x^2 + y^2,$$

um parabolóide elíptico de revolução.

Cap. 10, Ex. 11.6 — Da parametrização,

$$x^2 + y^2 = (R + r \cos v)^2, \quad z^2 = r^2 \sin^2 v.$$

Logo

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R(R + r \cos v).$$

Elevando ao quadrado,

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(R + r \cos v)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Cap. 10, Ex. 11.7 — (a) $x = k$: $z = k^2 + 4y^2$; $y = k$: $z = x^2 + 4k^2$; $z = k$: $x^2 + 4y^2 = k$, elipse para $k > 0$, ponto para $k = 0$ e vazio para $k < 0$.

- (b) $x = k$: $z = k^2 - y^2$; $y = k$: $z = x^2 - k^2$; $z = k$: $x^2 - y^2 = k$, hipérbole para $k \neq 0$ e duas retas para $k = 0$.
- (c) $z = k$: $x^2 + y^2 = 1 + k^2$, sempre um círculo. Se $x = k$, então $y^2 - z^2 = 1 - k^2$: há uma hipérbole para $|k| \neq 1$ e duas retas para $|k| = 1$. O mesmo vale, por simetria, para $y = k$.
- (d) $x = k$: $z^2 - y^2 = 1 + k^2$; $y = k$: $z^2 - x^2 = 1 + k^2$, sempre hipérbolés. Em $z = k$, $x^2 + y^2 = k^2 - 1$: círculo para $|k| > 1$, ponto para $|k| = 1$ e vazio para $|k| < 1$.

Cap. 10, Ex. 11.8 — Respectivamente: elipsoide; hiperboloide de uma folha com eixo z ; hiperboloide de duas folhas com eixo z ; paraboloides elípticos com eixo z ; paraboloides hiperbólicos com eixo z ; cone elíptico com eixo z .

- Cap. 10, Ex. 11.9** — (a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$: esfera de centro $(1, -2, 3)$ e raio 4.
- (b) $4(x - 1)^2 + (y + 1)^2 - (z - 2)^2 = 5$: hiperboloide de uma folha, centro $(1, -1, 2)$, eixo paralelo a z .
- (c) $z + 6 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$: paraboloides elípticos de vértice $(2, -3, -6)$, abrindo no sentido positivo de z .
- (d) $z = (x + 1)^2 - (y - 2)^2$: paraboloides hiperbólicos com ponto de sela $(-1, 2, 0)$.

Cap. 10, Ex. 11.10 — Se (x, y, z) satisfaz a equação, então $(x, y, z + t)$ também satisfaz para todo t , pois a equação não usa a coordenada z . Quando a equação restante em x e y descreve uma curva plana não degenerada, seu transporte paralelo ao eixo z produz um cilindro.

Cap. 10, Ex. 11.11 — No plano $z = k$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Dividindo pelo lado direito,

$$\frac{x^2}{a^2(1 + k^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 + k^2/c^2)} = 1,$$

e os semieixos são exatamente os indicados.

Cap. 10, Ex. 11.12 — No corte $z = k$, os semieixos são

$$\frac{a|k|}{c} \quad \text{e} \quad \frac{b|k|}{c}.$$

Portanto todos os cortes não nulos são semelhantes, e o fator de escala que leva o corte em k_1 ao corte em k_2 é

$$\frac{|k_2|}{|k_1|}.$$

Cap. 10, Ex. 11.13 — Respectivamente: o plano $x = 0$; os dois planos paralelos $x = \pm 1$; o eixo z ; os dois planos $x = y$ e $x = -y$; apenas a origem; o conjunto vazio.

Cap. 10, Ex. 11.14 — A parte em x, y pode ser escrita como

$$x^2 + 3y^2 + 2xy = (x + y)^2 + 2y^2,$$

que é positiva para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Somando z^2 , a parte quadrática é positiva em toda direção não nula. Pelo resultado de eixos principais que será desenvolvido adiante, uma rotação elimina o termo misto sem mudar essa positividade; restam três termos quadráticos positivos. Assim a forma canônica é a de um elipsoide.

Cap. 10, Ex. 11.15 — Partindo de

$$(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi),$$

tomamos

$$X(\phi, \theta) = (2 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \sin \theta, 5 \cos \phi),$$

com $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Então

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \phi = 1.$$

Cap. 11, Ex. 2.1 — Usando $x = x' + h$ e $y = y' + k$, obtemos, respectivamente,

$$(a)(x')^2 + (y')^2 = 4;$$

$$(b)3(x')^2 + 2(y')^2 = 6;$$

$$(c)(y')^3 - (x')^2 = 0;$$

$$(d)x'y' = 1.$$

No item (c), a equação não é quadrática; ele serve apenas para praticar a regra de translação.

Cap. 11, Ex. 2.2 — Uma escolha possível é:

$$(a)\text{origem } (-4, 2): 2(x')^2 + (y')^2 = 4;$$

$$(b)\text{origem } (7, -1): 3(x')^2 - 2(y')^2 = 12;$$

$$(c)\text{origem } (-2, 1): x'y' = 8.$$

Cap. 11, Ex. 2.3 — Os termos lineares desaparecem quando

$$\begin{cases} 2Ah + Ck + D = 0, \\ Ch + 2Bk + E = 0. \end{cases}$$

O determinante desse sistema é $4AB - C^2$, portanto a condição dada garante solução única. No exemplo,

$$8h + 4k + 2 = 0, \quad 4h + 2k + 1 = 0,$$

que são a mesma equação; assim todo (h, k) com $4h + 2k + 1 = 0$ elimina os termos lineares.

Cap. 11, Ex. 2.4 — Substituindo $x = x' + h$ e $y = y' + k$, o termo independente de x', y' é exatamente o valor obtido ao tomar $x' = y' = 0$, isto é, $f(h, k)$.

Cap. 11, Ex. 3.1 — Pelas fórmulas

$$x' = x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ, \quad y' = -x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ,$$

os pontos passam a ter coordenadas

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Cap. 11, Ex. 3.2 — Denotando as novas coordenadas por (u, v) :

$$(a) 20u + 21v - 3\sqrt{29} = 0;$$

$$(b) 2v^2 - \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} = 0;$$

$$(c) \frac{3\sqrt{3}}{2}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v^2 - 1 = 0.$$

Cap. 11, Ex. 3.3 — Uma escolha conveniente de eixos fornece:

$$(a) \text{com } u = (2x + y)/\sqrt{5}, v = (-x + 2y)/\sqrt{5}:$$

$$5u^2 + 2u - v = 1;$$

$$(b) \text{com } u = (x + y)/\sqrt{2}, v = (-x + y)/\sqrt{2}:$$

$$21u^2 + 15v^2 = 10;$$

$$(c) \text{com a mesma rotação de } 45^\circ:$$

$$2v^2 = 4;$$

$$(d) \text{com } u = (4x + 3y)/5, v = (-3x + 4y)/5:$$

$$25u^2 + 20u - 15v = 0.$$

Cap. 11, Ex. 3.4 — Sob uma rotação, $M' = R^T M R$. Logo

$$\text{tr } M' = \text{tr } M, \quad \det M' = \det M.$$

Como $\text{tr } M = A + B$ e $-4 \det M = C^2 - 4AB$, as duas quantidades são invariantes.

Cap. 11, Ex. 4.1 — Uma classificação concisa é:

(a) elipse, centro $(1, 1)$; os eixos principais são paralelos a $(-2, 1)$ e $(1, 2)$, e a forma reduzida pode ser escrita como $u^2/6 + v^2 = 1$;

(b) elipse, centro $(-1, 1)$; eixos paralelos a $(5, 1)$ e $(-1, 5)$;

(c) hipérbole, centro $(2, 1)$; eixos paralelos a $(-3, 2)$ e $(2, 3)$;

(d) elipse, centro $(0, 2)$; eixos paralelos a $(-1, 3)$ e $(3, 1)$;

- (e)hipérbole, centro $(-1, 0)$; eixos paralelos a $(1, 2)$ e $(-2, 1)$;
 (f)hipérbole, centro $(0, 3)$; eixos paralelos a $(-2, 3)$ e $(3, 2)$;
 (g)hipérbole, centro $(2/3, 5)$; eixos paralelos a $(3, 5)$ e $(-5, 3)$;
 (h)parábola; a parte quadrática é $(5x + 12y)^2$, e o eixo da parábola é paralelo a $(-12, 5)$;
 (i)hipérbole, centro $(-2197/240, 1937/576)$; uma rotação com $\cot(2\alpha) = -139/120$ fornece os eixos principais;
 (j)duas retas paralelas:

$$x - 2y = 4 \quad \text{e} \quad x - 2y = -7;$$

- (k)escrevendo $w = 2x + 3y$: para o sinal $+$, $w^2 - w + 2 = 0$ não tem raízes reais, portanto o conjunto é vazio; para o sinal $-$, $w^2 - w - 2 = 0$, logo

$$2x + 3y = 2 \quad \text{ou} \quad 2x + 3y = -1.$$

Cap. 11, Ex. 4.2 — Os conjuntos são, respectivamente: um ponto; o conjunto vazio; uma reta dupla; duas retas paralelas; duas retas concorrentes. Os dois primeiros são de tipo elíptico, os dois seguintes de tipo parabólico e o último de tipo hiperbólico.

Cap. 11, Ex. 4.3 — O sinal de Δ_q depende apenas da parte quadrática. Por exemplo,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 = -1$$

têm o mesmo valor $\Delta_q = -4$, mas representam, respectivamente, uma circunferência, um ponto e o conjunto vazio. É preciso examinar também os termos lineares e o termo constante após a redução.

Cap. 12, Ex. 6.1 — As colunas de $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ são as coordenadas de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ na base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = 2 \neq 0$, os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ são linearmente independentes e $\mathcal{C}$ é de fato uma base. Invertendo,

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $v : (2, -1, 3)_{\mathcal{C}}$, então

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}[v]_{\mathcal{C}} = (5, 1, 2)_{\mathcal{B}}.$$

Aplicando $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ a esse resultado recuperamos $[v]_{\mathcal{C}} = (2, -1, 3)_{\mathcal{C}}$, como esperado.

Cap. 12, Ex. 6.2 — As colunas de $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ são as coordenadas de f_1, f_2, f_3 na base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $O' : (1, 2, 3)_{\Sigma_1}$, a Equação (12.1) dá $[P]_{\Sigma_2} = M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}([P]_{\Sigma_1} - (1, 2, 3))$. Para $P : (0, 2, 0)_{\Sigma_1}$,

$$[P]_{\Sigma_1} - (1, 2, 3) = (-1, 0, -3), \quad [P]_{\Sigma_2} = (-4, 3, 0).$$

Para $Q : (2, -1, 4)_{\Sigma_1}$,

$$[Q]_{\Sigma_1} - (1, 2, 3) = (1, -3, 1), \quad [Q]_{\Sigma_2} = (2, -1, -3).$$

Portanto $P : (-4, 3, 0)_{\Sigma_2}$ e $Q : (2, -1, -3)_{\Sigma_2}$.

Cap. 12, Ex. 6.3 — O ponto inicial da reta é exatamente o ponto P do exercício anterior, já convertido: $Q_0 : (-4, 3, 0)_{\Sigma_2}$. Para o vetor diretor, usamos apenas $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ (sem subtrair a origem):

$$M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(1, 2, 3)^T = (4, -3, 2)^T.$$

Logo, em Σ_2 ,

$$r : X = (-4, 3, 0)_{\Sigma_2} + t(4, -3, 2)_{\mathcal{C}}.$$

Cap. 12, Ex. 6.4 — Pela Equação (12.3), com $N = (2, -4, 1)^T$,

$$N' = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^T N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

e o novo termo independente é

$$d' = d - N'^T S = 4 - (2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 4 - (-3) = 7.$$

Portanto, em Σ_2 ,

$$\pi : 2y_1 + y_2 - 4y_3 = 7.$$

Para confirmar, tomamos três pontos do plano em Σ_1 , por exemplo $(0, 0, 4)$, $(2, 0, 0)$ e $(0, -1, 0)$. Convertendo cada um para Σ_2 pela Equação (12.1) obtemos, respectivamente, $(0, -1, -2)$, $(-2, 3, -2)$ e $(-4, 3, -3)$; os três satisfazem de fato $2y_1 + y_2 - 4y_3 = 7$.

Cap. 12, Ex. 6.5 — Basta escolher $e_1 = v$, $e_2 = w$ e e_3 qualquer vetor fora do plano gerado por v, w (isto é, $\{v, w, e_3\}$ linearmente independente), com origem em P_0 . Um ponto genérico do plano é $P_0 + tv + sw$, cujas coordenadas em $\Sigma = (P_0, \mathcal{B})$ são exatamente $(t, s, 0)_{\mathcal{B}}$ — logo o plano tem equação $z = 0$ nesse sistema.

É sempre possível escolher Σ cartesiano: aplicando o processo de Gram-Schmidt a v, w obtemos vetores ortonormais e_1, e_2 que geram o mesmo plano, e tomamos $e_3 = e_1 \times e_2$ (unitário e ortogonal a ambos). O sistema $\Sigma = (P_0, \mathcal{B})$ com $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ é cartesiano e o plano continua tendo equação $z = 0$.

Cap. 12, Ex. 6.6 — Tomamos a origem em A . Como

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 1, 3),$$

definimos

$$e_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

Aplicando Gram-Schmidt a $\overrightarrow{AC}$,

$$\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} \cdot e_1) e_1 = \left(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{28}{9} \right) \parallel (1, 1, 4),$$

logo

$$e_2 = \frac{(1, 1, 4)}{\|(1, 1, 4)\|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}} \right).$$

Finalmente, como $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (7, -7, 0) \parallel (1, -1, 0)$, tomamos

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Com origem $A = (1, 2, 1)$ e base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, os três pontos têm coordenadas

$$A : (0, 0, 0), \quad B : (3, 0, 0), \quad C : \left(\frac{1}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3}, 0 \right),$$

todas com terceira coordenada nula, como pedido.

Cap. 12, Ex. 6.7 — Como $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são ortonormais, a matriz $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ é ortogonal: escrevendo $\mathbf{f}_i = \sum_k (M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})_{ki} \mathbf{e}_k$ e usando que ambas as bases são ortonormais obtém-se $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^T M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = I$; como $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} = M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^T$ (Proposição 12.5 junto com esse fato), segue que $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ também satisfaz $M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^T M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = I$. Logo,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}})^T (M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}^T M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^T M_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Como $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ é a fórmula usual da norma ao quadrado nas coordenadas $\mathcal{B}$ (e analogamente em $\mathcal{C}$), a igualdade mostra que essa fórmula dá o mesmo valor em qualquer das duas bases ortonormais — a norma de $\mathbf{v}$ não depende do sistema ortonormal escolhido, confirmando algebricamente o que já sabíamos geometricamente.

Aplicando o mesmo argumento a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ no lugar de $\mathbf{v}$, obtemos $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{C}}^T [\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{B}}^T [\mathbf{u} + \mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$; expandindo ambos os lados e cancelando os termos de norma de $\mathbf{u}$ e de $\mathbf{v}$ (já provados invariantes), resta

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{C}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}^T [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

isto é, o produto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ também não depende da base ortonormal usada para calculá-lo. Como

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

depende apenas de produtos escalares e normas — ambos invariantes —, o ângulo θ entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ também é o mesmo em qualquer base ortonormal.

Cap. 13, Ex. 8.1 — Completando quadrados,

$$9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 + (z-2)^2 = 39.$$

Logo

$$\frac{(x-1)^2}{13/3} + \frac{(y+1)^2}{39/4} + \frac{(z-2)^2}{39} = 1.$$

É um elipsoide de centro $(1, -1, 2)$, com semieixos

$$\sqrt{\frac{13}{3}}, \quad \frac{\sqrt{39}}{2}, \quad \sqrt{39}$$

nas direções dos eixos x, y, z , respectivamente.

Cap. 13, Ex. 8.2 — Completando quadrados,

$$4(x+1)^2 + 9(y-1)^2 - (z-1)^2 = 16,$$

ou

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16/9} - \frac{(z-1)^2}{16} = 1.$$

É um hiperboloide de uma folha, de centro $(-1, 1, 1)$ e eixo paralelo a z . No plano $z = 1$ o corte é a elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16/9} = 1.$$

Nos planos $x = -1$ e $y = 1$ os cortes são hipérboles, confirmando a classificação.

Cap. 13, Ex. 8.3 — Como

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \quad xy = \frac{u^2 - v^2}{2},$$

a equação se torna

$$4u^2 + 2v^2 - z^2 = 1.$$

Portanto é um hiperboloide de uma folha, com eixo paralelo ao eixo z .

Cap. 13, Ex. 8.4 — Tome

$$u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Então

$$2u^2 + z^2 - 4\sqrt{2}v = 0,$$

isto é,

$$v = \frac{u^2}{2\sqrt{2}} + \frac{z^2}{4\sqrt{2}}.$$

Logo é um parabolóide elíptico de vértice na origem. Seu eixo é a direção positiva da coordenada v , isto é, a direção do vetor

$$(1, 1, 0).$$

Cap. 13, Ex. 8.5 — Respectivamente:

- (a) apenas a origem;
- (b) conjunto vazio;
- (c) os dois planos concorrentes $x = y$ e $x = -y$;
- (d) os dois planos paralelos $x = 2$ e $x = -2$;
- (e) o plano $x = 0$, contado duas vezes pela equação quadrática.

Cap. 13, Ex. 8.6 — A equação não impõe nenhuma condição sobre Z . Assim, se (X, Y, Z_0) é solução, então (X, Y, Z) é solução para todo $Z \in \mathbb{R}$. Cada ponto da cônica

$$aX^2 + bY^2 = k$$

no plano XY gera uma reta paralela ao eixo Z . A união dessas retas é o cilindro correspondente, ou um caso degenerado quando a cônica plana degenera.

Cap. 13, Ex. 8.7 — No primeiro caso, o corte $z = k$ satisfaz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2},$$

e portanto é uma elipse para todo $k \in \mathbb{R}$. A superfície tem uma única folha. No segundo caso,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

O corte é vazio para $|k| < c$, reduz-se a um ponto para $|k| = c$ e é uma elipse para $|k| > c$. Há, portanto, duas folhas separadas por uma faixa sem pontos.

Cap. 13, Ex. 8.8 — O teorema garante a existência de uma rotação cartesiana que elimina simultaneamente os termos mistos. Depois dessa rotação, completar quadrados e transladar a origem levam a uma das formas reduzidas classificadas no capítulo. Como mudanças cartesianas não alteram o tipo geométrico da superfície, nenhuma

nova família pode surgir apenas da presença dos termos mistos nas coordenadas originais.

Cap. A, Ex. 6.1 — (a) Como $5\pi/6 = \pi - \pi/6$,

$$\sin(5\pi/6) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad \cos(5\pi/6) = -\cos(\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Como $7\pi/4 = 2\pi - \pi/4$,

$$\operatorname{tg}(7\pi/4) = \operatorname{tg}(-\pi/4) = -1.$$

(c)

$$\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

Cap. A, Ex. 6.2 — Como $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$, as Equações (A.2) e (A.3) (com $y \rightarrow -y$) dão

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Cap. A, Ex. 6.3 — Sejam $\mathbf{u} = (\cos x, \sin x)$ e $\mathbf{v} = (\cos y, \sin y)$, ambos unitários. Por um lado, o produto escalar em coordenadas é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Por outro lado, como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são unitários e fazem ângulos x e y com o eixo Ox , o ângulo entre eles é $x - y$, e

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(x - y) = \cos(x - y).$$

Comparando as duas expressões, $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. A identidade é, portanto, exatamente a fórmula geométrica do produto escalar entre dois vetores unitários escrita em coordenadas.

Cap. A, Ex. 6.4 — Partindo da identidade fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: dividindo por $\cos^2 x$ (quando $\cos x \neq 0$),

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{isto é,} \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x.$$

Dividindo em vez disso por $\sin^2 x$ (quando $\sin x \neq 0$),

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{isto é,} \quad 1 + \cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Cap. A, Ex. 6.5 — (a) $\sin x = 1/2$: $x = \pi/6$ ou $x = 5\pi/6$.

(b) $\cos x = -\sqrt{2}/2$: $x = 3\pi/4$ ou $x = 5\pi/4$.

(c) $\tan x = 1$: $x = \pi/4$ ou $x = 5\pi/4$.

Cap. A, Ex. 6.6 — A função $\arctg$ tem imagem $(-\pi/2, \pi/2)$, de modo que $\arctg(y/x)$ só devolve o ângulo polar correto quando o ponto (x, y) está no semiplano $x > 0$ (primeiro ou quarto quadrante). Para o ponto $(-1, -1)$ temos $y/x = (-1)/(-1) = 1$, e $\arctg(1) = \pi/4$ é apenas a razão entre as coordenadas, não o ângulo do ponto: como $x = -1 < 0$, o ponto está no terceiro quadrante, e seu ângulo polar principal é

$$\pi/4 + \pi = 5\pi/4$$

(o ponto $(1, 1)$, sim, tem ângulo polar $\pi/4$, mas $(-1, -1) = -(1, 1)$ aponta na direção oposta). Em geral, a fórmula correta exige somar π ao valor de $\arctg(y/x)$ sempre que $x < 0$.

Cap. B, Ex. 7.1 —

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os resultados são diferentes: o produto de matrizes não é comutativo em geral, pois $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ combina as linhas de A com as colunas de B , enquanto BA combina as linhas de B com as colunas de A — não há razão para essas combinações coincidirem.

Cap. B, Ex. 7.2 — Na ordem dos itens:

(a) $2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 8 + 3 = 11.$

(b) Expandindo pela primeira linha:

$$1 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 = 1(1) - 2(-6) = 1 + 12 = 13.$$

Cap. B, Ex. 7.3 — Na ordem dos itens:

(a) $\det = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$: a matriz é invertível e

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $\det = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$: a matriz não é invertível (a segunda linha é a primeira dividida por 2, isto é, as linhas são proporcionais).

Cap. B, Ex. 7.4 — Calculando,

$$Q^T Q = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 + 16 & -12 + 12 \\ -12 + 12 & 16 + 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = I,$$

logo Q é ortogonal. Como Q tem a forma $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ com $\cos \theta = 3/5$ e $\sin \theta = 4/5$ (isto é, $\theta = \arcsen(4/5) \approx 53,13^\circ$), Q representa a rotação de ângulo θ em torno da origem.

Cap. B, Ex. 7.5 — Na ordem dos itens:

(a) $\boxed{(x, y) = (-2, 3)}.$

(b) $\boxed{(x, y, z) = (-1, 2, 1)}.$

(c) $\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)}.$

Cap. B, Ex. 7.6 — A matriz dos coeficientes é

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \det A_m = \frac{m}{2} - 6.$$

Se $m \neq 12$, $\det A_m \neq 0$ e o sistema tem solução única

$$x = \frac{18}{12 - m}, \quad y = \frac{2(24 - 5m)}{12 - m}.$$

Se $m = 12$, as equações tornam-se $4x + y = 4$ e $4x + y = 10$: os dois primeiros membros são idênticos mas os termos independentes diferem, logo o sistema é impossível (nenhuma solução). Não há valor de m para o qual as duas equações se tornem múltiplas uma da outra também nos termos independentes, de modo que este sistema nunca tem infinitas soluções.

Cap. B, Ex. 7.7 — Com 2 equações e 3 incógnitas, o posto da matriz dos coeficientes é no máximo $2 < 3$; uma solução única exigiria posto 3, o que é impossível para qualquer k — daí o sistema nunca ter solução única.

Subtraindo 2 vezes a primeira equação da segunda obtemos

$$(k-4)y + (8-2k)z = 1, \quad \text{isto é} \quad (k-4)y - 2(k-4)z = 1, \quad \text{ou} \quad (k-4)(y-2z) = 1$$

Se $k = 4$, o primeiro membro se anula e a igualdade fica $0 = 1$: o sistema é impossível.

Se $k \neq 4$, podemos tomar $z = t$ livre e obter $y = 2t + \frac{1}{k-4}$; substituindo na primeira equação, $x = 1 - 2y - kz = -(k+4)t + \frac{k-6}{k-4}$. Logo, para $k \neq 4$, há infinitas soluções

$$(x, y, z) = \left(-(k+4)t + \frac{k-6}{k-4}, 2t + \frac{1}{k-4}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isso ilustra o fato geral: um sistema linear com mais incógnitas do que equações nunca tem solução única — ou é impossível, ou tem infinitas soluções, dependendo de sua consistência.

Cap. B, Ex. 7.8 — ($\Leftarrow$, contrapositiva) Se $\det A \neq 0$, então A é invertível. De $AX = 0$ segue $X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$: a única solução é a trivial, ou seja, não há solução não nula.

($\Rightarrow$) Suponha $\det A = 0$. Aplicando eliminação de Gauss a A , chegamos a uma forma escalonada U usando apenas as operações elementares descritas no texto; nenhuma delas transforma um determinante nulo em não nulo (trocar linhas apenas muda o sinal, multiplicar uma linha por escalar não nulo multiplica o determinante por esse escalar, e somar a uma linha um múltiplo de outra não o altera). Logo $\det U = 0$ também. Como U é triangular, $\det U$ é o produto dos elementos da diagonal (expansão sucessiva por cofatores na primeira coluna), e esse produto só se anula se algum elemento da diagonal for 0 — ou seja, alguma das n linhas de U ficou inteiramente nula após o escalonamento. Essa linha nula corresponde a uma equação $0 = 0$, de modo que restam no máximo $n - 1$ equações independentes para as n incógnitas, sobrando ao menos uma variável livre. Atribuindo um valor não nulo a essa variável livre obtemos uma solução $X \neq 0$ de $AX = 0$ (o sistema é homogêneo, logo qualquer escolha da variável livre fornece uma solução). Portanto $AX = 0$ tem solução não nula se, e somente se, $\det A = 0$.

Cap. B, Ex. 7.9 — Pela regra de Cramer, com $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 6 + 1 = 7$,

$$\det A_1(b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11, \quad \det A_2(b) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 16 - 1 = 15,$$

logo

$$\boxed{x = \frac{11}{7}, \quad y = \frac{15}{7}.}$$

Por eliminação de Gauss: da primeira equação, $y = 2x - 1$; substituindo na segunda, $x + 3(2x - 1) = 8 \Rightarrow 7x = 11 \Rightarrow x = 11/7$, e então $y = 2(11/7) - 1 = 15/7$ — o mesmo resultado.

Os dois métodos coincidem, como esperado. Para um sistema 2×2 o esforço é comparável, mas a regra de Cramer exige calcular $n + 1$ determinantes de ordem n , o que a torna computacionalmente cara para n grande; a eliminação de Gauss, por outro lado, permanece eficiente e é o método preferido na prática para sistemas maiores.

Referências

- [1] APOSTOL,T.; *Calculus Vol. I*, Wiley 1967.
- [2] BOULOS, P.; CAMARGO, I.; *Geometria Analitica - Um tratamento Vetorial*, Prentice Hall, 2006.
- [3] CAROLI,A.; CALLIOLI, C.; FEITOSA, M.; *Matrizes vetores geometria analítica*, Nobel 1984.
- [4] CHATTERJEE, D.; *Analytic Solid Geometry*, PHI Learning, 2004
- [5] CROWE, M.; *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*, Dover 1994.
- [6] HILBERT, D.; *The Foundations Of Geometry*, Gradiva 2003.
- [7] LEHMANN, C.; *Geometria Analítica*, Editora Globo 1985;
- [8] MELLO, D, A.; WATANABE,R. G.; *Vetores e uma iniciação à Geometria Analítica*; Editora Livraria da Física.
- [9] LEITE, O.; *Geometria analítica espacial*, Edicoes Loyola, 1996
- [10] SANTOS, R.; *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica* , Imprensa Universitária da UFMG, 2004.
- [11] WEXLER C.; *Analytic Geometry: A vector approach*, Addison-Wesley Publ., 1961.