

Bases Matemáticas

Daniel Miranda¹

September 18, 2022

¹**email:** daniel.miranda@ufabc.edu.br

sala 814 - Bloco B

página: <https://danielmiranda.prof.ufabc.edu.br>

Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

Definição

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é *verdadeira* ou *falsa*, mas não simultaneamente ambas.

Valor Verdade: *verdadeiro* , *falso*

Exemplos 2 As seguintes frases são exemplos de proposições.

- “ $2 + 5 = 7$ ”;
- “A função $f(x) = -x$ é uma função crescente”.
- “ $2^{25^{9876}} + 3^{4576}$ é primo”;
- “ $\sqrt{17}$ é irracional”

Exemplos 3 Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor *verdadeiro* ou *falso*.

- “Vamos dançar!”
- “Como você está?” .
- “Esta sentença é falsa” .
- “Está quente hoje” .
- “O Cruzeiro é o melhor time do mundo;”
- “Deus existe;”

Em diversas situações precisamos que o “sujeito” das proposições seja uma variável que possa ser substituída por um elemento qualquer dentre uma coleção de objetos \mathbb{U} em consideração. O conjunto \mathbb{U} neste caso será denominado **universo do discurso**, ou ainda, **domínio de discurso** .

Proposições que dependam de uma ou mais variáveis são denominadas **proposições abertas**.

$p(x), q(x), p(x, y), \dots$

Exemplo $p(x) = "x^2 < 9"$.

O valor verdade de uma proposição aberta depende do valor atribuído à variável x .

Se $x = 2$ então $p(2) = "4 < 9"$ tem valor verdade *verdadeiro*, por outro lado se considerarmos $x = 4$ temos que $p(4) = "16 < 9 "$ tem valor verdade *falso*.

Definição

O conjunto dos valores de x para os quais a proposição aberta $p(x)$ *verdadeira* é denominado **conjunto verdade** de $p(x)$.

Exemplos 5

- O conjunto verdade de $p(x) = "x \text{ é primo e } 3 < x < 14"$ é $\{5, 7, 11, 13\}$
- O conjunto verdade de $p(x) = "x \text{ é real e } x^2 + 1 = 5"$ é $\{-2, 2\}$

Quantificadores

Através de proposições abertas podemos fazer afirmações sobre todos os elementos de um conjunto usando o **quantificador universal** \forall que é lido como “para todo” ou “qualquer que seja”. Também é possível fazer afirmações sobre a

existência de um elemento de um conjunto usando o **quantificador existencial** \exists , que é lido como “existe”.

Nesse contexto, uma proposição é dita *universal* se faz referência a *todos* os objetos do universo \mathbb{U} . Caso contrário, é dita *particular* .

Assuma que o universo é o conjunto dos números naturais, denotado por \mathbb{N} .

1. “Todos os números naturais são ímpares” é uma proposição universal.
2. “O número 2 é par” é uma proposição particular.
3. “Nenhum número natural é primo” é uma proposição universal, pois equivale a dizer que “todo número natural tem a propriedade de não ser primo.
4. “Há números naturais pares” é uma proposição particular.
5. “Ao menos dois números naturais são pares” é uma proposição particular.
6. “O número natural 0 é menor ou igual do que qualquer número natural” é uma proposição particular.
7. “Todo número natural é maior ou igual do que o número natural 0” é uma proposição universal.
8. “ $n < n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ” é uma proposição universal.
9. “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$ ” é uma proposição particular.

Exemplos e Contra-exemplos

Considere uma proposição universal do tipo *todo elemento de \mathbb{U} satisfaz a propriedade p* .

Um **exemplo** para essa proposição é um elemento do universo \mathbb{U} que satisfaz a propriedade p .

Um *contra-exemplo* para essa proposição é um elemento do universo \mathbb{U} que *não* satisfaz a propriedade p .

Exemplos 6

1. Considere a proposição “para todo $n \in \mathbb{N}$ par, $(n + 1)^2$ é ímpar”.
 - Neste caso o número 2 é um exemplo dessa proposição, pois está no domínio do discurso e $(2 + 1)^2 = 9$ é ímpar.
 - Já o número 3 não é nem exemplo nem contra-exemplo, pois não pertence ao domínio de discurso.
2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m^2 - m + 41$ é primo.
 - Neste caso 1 é um exemplo, pois $1 \in \mathbb{N}$ e $1^2 - 1 + 41 = 41$ é primo. Bem como 2, ..., 40 são exemplos
 - Por outro lado, 41 é contra-exemplo, pois $41 \in \mathbb{N}$ e $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo.

Exemplos 7

1. O número 5 é um exemplo para a proposição "Todo número natural é ímpar", enquanto que o número 2 é um contra-exemplo.
2. O número 4 é um exemplo para a proposição "Nenhum número natural é primo", enquanto que o número 3 é um contra-exemplo (lembre, nesse caso, que a propriedade universal alegada pela proposição é *não* ser primo).
3. O número 8 é um exemplo para a proposição "O quadrado de todo natural é maior do que 4", enquanto que o número 1 é um contra-exemplo.

	“para todo” \forall	”existe” \exists
existem exemplos	inconclusivo	verdadeira
não existem exemplos	inconclusivo	falsa
existem contraexemplos	falsa	inconclusivo
não existem contraexemplo	verdadeira	inconclusivo

Table 1: Comportamento Geral do Valor verdade de uma proposição quantificada em função da existência/inexistência de exemplos ou contraexemplos

Definição

Dadas duas proposições p, q :

- a proposição composta p ou q é chamada **disjunção** de p e q . A disjunção p ou q é *verdadeira* quando pelo menos uma das proposições p ou q forem *verdadeiras*. Caso contrário o valor verdade de p ou q é *falso*.
- a proposição composta p e q é chamada **conjunção** das proposições p e q . A conjunção p e q é *verdadeira* somente quando as proposições p e q forem ambas *verdadeiras*. Caso contrário o valor verdade de p e q é *falso*.

Definição

Dado uma proposição p , a negação de p é uma proposição com valor verdade invertido, chamada de **negação** de p , denotada $\text{não } p$ e que pode ser lida como “não p ” ou “não é verdade p ”.

Negação da Disjunção e da Conjunção

Sejam p, q proposições. Então são válidas as seguintes regras de negação

1. A negação da proposição p e q é $(\text{não } p) \text{ ou } (\text{não } q)$
2. A negação da proposição p ou q é $\text{não } p$ e $\text{não } q$

Exemplos 10

- A negação da proposição “ x é divisível por 2 e 3” é “ x não é divisível por 2 ou x não é divisível por 3”.
- A negação da proposição “ x é divisível por 2 ou 3” é “ x não é divisível por 2 e x não é divisível por 3”.
- A negação da proposição “ b é soma de quadrados ou b é primo” é a afirmação que “ b não é soma de quadrados e b não é primo”.
- A negação da proposição “ x é maior que 2 ou x é menor igual que -1 ” é a proposição “ x é menor igual a 2 e x é maior que -1 .”

Negação do Quantificador

Seja $p(x)$ um proposição aberta. Então são válidas as seguintes regras de negação:

- A negação da proposição “para todo x em D é verdade $p(x)$ ” é a proposição “existe pelo menos um x em D tal que não é verdade $p(x)$ ”.
- A negação da proposição “existe x em D tal que é verdade $p(x)$ ” é a proposição “para todo x em D não é verdade $p(x)$ ”.

Converta as seguintes afirmações para a forma simbólica e diga quais são as suas negações:

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.
- Existe inteiro n tal que $n + 3 = 4$.

Solução na lousa

Definição

Dadas duas proposições p e q então podemos construir a proposição “se p então q ” que também pode ser lida como “ p implica q ”, que denotaremos por

$$p \Rightarrow q.$$

A implicação $p \Rightarrow q$ é *falsa* somente no caso que a proposição p é *verdadeira* e a proposição q é *falsa*.

Numa implicação, $p \Rightarrow q$, a proposição p é denominada **hipótese** ou e a proposição q é denominada **tese, conclusão ou conseqüente** da implicação.

A tabela a seguir apresenta o valor verdade de $p \Rightarrow q$ em função dos valores verdades de p e q .

p	q	$p \Rightarrow q$
<i>verdadeiro</i>	<i>verdadeiro</i>	<i>verdadeiro</i>
<i>verdadeiro</i>	<i>falso</i>	<i>falso</i>
<i>falso</i>	<i>verdadeiro</i>	<i>verdadeiro</i>
<i>falso</i>	<i>falso</i>	<i>verdadeiro</i>

Table 2: Tabela Verdade da Implicação.

Qual o valor verdade das seguintes implicações?

- Se 2 é um número par, então 3 é um número ímpar.
- Se 2 é um número par, então 4 é um número ímpar.
- Se 2 é um número ímpar, então 3 é um número par.
- Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

Dada uma proposição $p \Rightarrow q$ então:

- a proposição $q \Rightarrow p$ é chamada de **recíproca** da proposição;
- a proposição $\text{não } q \Rightarrow \text{não } p$ é chamado de **contrapositiva**;
- a proposição $\text{não } p \Rightarrow \text{não } q$ é chamado de **inversa** da proposição.

Uma afirmação e sua contrapositiva são equivalentes!

Métodos de Demonstração

Métodos de Demonstração

Vamos ilustrar algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

- Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k , tal que: $b = ak$. Se a divide b , b é dito múltiplo de a ou de modo equivalente a é dito divisor de b .
- Um número inteiro a é dito par se 2 divide a , ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$.
- Um número inteiro b é dito **ímpar** se 2 não divide b , nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro k tal que $b = 2k + 1$.
- Um número real r é dito **racional** se existirem números inteiros p, q tal que $r = \frac{p}{q}$.
- Um número real r é dito **irracional** se não for racional, i.e, se não existirem inteiros p, q tal que $r = \frac{p}{q}$.

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração que nós tratamos nesta seção, e é a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ suponha que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q .

Exemplo 1 Se n, m são números pares então $n + m$ também é um número par.

Na lousa

Exemplo 2 Se a divide b e b divide c , então a divide c .

Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se algum enunciado fosse verdadeiro, ocorreria uma contradição lógica, e portanto o enunciado deve ser falso.

Exemplo 3 Existem infinitos números primos.

Exemplo 4 $\sqrt{2}$ é irracional.

demonstração por contraposição

O método de demonstração por contraposição baseia-se no fato que uma implicação p implica q é equivalente a sua contrapositiva $\text{não } q$ implica $\text{não } p$. Assim, no método de demonstração por contraposição ao invés de se demonstrar a implicação p implica q , demonstra-se que $\text{não } q$ implica $\text{não } p$.

Exemplo 5 Se n e m são números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Demonstrações de “se e somente se”

Muitos teoremas na matemática são apresentados sob a forma “ p se, e somente se, q ”. Essa afirmação é equivalente a “se p , então q e se q , então p ”. Logo, para demonstrar uma afirmação da forma “ p se, e somente se, q ”, devemos demonstrar duas implicações separadamente.

Exemplo 6 Dois inteiros a e b , possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é um número ímpar

Temos que provar duas implicações:

- Se a e b possuem paridades diferentes então $a + b$ é um ímpar;
- Se $a + b$ é ímpar então a e b possuem paridades diferentes.

Teoria dos Conjuntos

Teoria dos Conjuntos

Definição ingênua de conjunto.

Um **conjunto** é uma qualquer coleção de objetos, concretos ou abstratos. Dado um conjunto, isto é, uma coleção de objetos, diz-se que cada um destes objetos **pertence** ao conjunto dado ou, equivalentemente, que é um **elemento** desse conjunto.

Exemplos 1

- o conjunto das disciplinas do primeiro trimestre do BC&T;
- o conjunto das letras desta frase;
- o conjunto dos times de futebol de um estado ¹;
- o conjunto dos conjuntos dos times de futebol de um estado;
- o conjunto das idéias que Leonardo da Vinci nunca teve;
- o conjunto dos números naturais.

¹Note que os elementos deste conjunto são, por sua vez, conjuntos também.

Notações

Para denotar um conjunto genérico, usam-se normalmente letras maiúsculas A, B, C, \dots, Z , enquanto para seus elementos usam-se letras minúsculas a, b, c, \dots, z

A relação de pertinência é denotada pelo símbolo \in . Já o símbolo \notin é usado para denotar a não-pertinência (quando isso fizer sentido).

Subconjuntos

Seja dado um conjunto A . Dizemos que um conjunto B é um **subconjunto** do conjunto A (ou, equivalentemente, que B **está contido** em A) se todo elemento de B é também elemento de A , denotando-se tal situação por $B \subset A$.

Em símbolos, $B \subset A$ (ou $A \supset B$) se, e somente se,

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Definição

Se dois conjuntos A e B satisfazem as relações $A \subset B$ e $B \subset A$ simultaneamente, então dizemos que tais conjuntos são **iguais**, isto é, $A = B$. Em símbolos, $A = B$ se, e somente se,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Conjunto vazio

Assumimos a existência de um conjunto que não possui nenhum elemento. Tal conjunto é chamado de **conjunto vazio** e denotado por \emptyset . Dado qualquer conjunto A , vale sempre a relação de inclusão

$$\emptyset \subset A.$$

Conjunto potência

Seja dado um conjunto A . O conjunto de todos os subconjuntos de A é chamado de **conjunto potência** de A (ou também **conjunto das partes** de A) e é denotado por $\wp(A)$. Note que, qualquer que seja o conjunto A , o conjunto potência $\wp(A)$ sempre contém, pelo menos, os elementos \emptyset e A .

Exemplos 3. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Então:

- $\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\wp(B) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

É importante destacar um erro comum quando se fala em conjunto das partes. Tomemos o conjunto A do exemplo acima. É *false* afirmar que $1 \in \wp(A)$ (ou pior, que $1 \subset A$). O correto é $\{1\} \in \wp(A)$ (o que equivale a dizer que $\{1\} \subset A$). Em suma, vale a relação

$$X \in \wp(A) \Leftrightarrow X \subset A.$$

Dados dois conjuntos A e B , o **conjunto união** $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B , isto é

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

O **conjunto intersecção** $A \cap B$ é formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e B , isto é

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B.$$

Exemplos 4. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{4, 5, 6\}$, tem-se:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
- $B \cap C = \{5\}$