Álgebra Linear Avançada

Diagonalizabilidade

Daniel Miranda Machado

24 de novembro de 2020

UFABC

Diagonalizabilidade

Antes de continuarmos com nossa análise de transformações lineares gerais, consideramos um caso particular, mas muito útil.

Definição (Diagonalizável)

a *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ seja uma transformação linear. Então T é* ***diagonalizável*** *se existir uma base $\underline{B}$ de V onde $[T]_{\underline{B}}$ é uma matriz diagonal.*

b *Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ é* ***diagonalizável*** *se $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é diagonalizável.*

Ou seja, a matriz A é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

Proposição

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to V$ seja uma transformação linear. Então T é diagonalizável se e somente se V possuir uma base, $\underline{B}$ consistindo de autovetores de T.

Demonstração

Seja $\underline{B} = \{\mathbf{v}_1, \ \ldots \ , \ \mathbf{v}_n\}$ uma base e seja $D = [T]_{\underline{B}}$ uma matriz diagonal com entradas diagonais $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Para cada i,

$$[T(\mathbf{v}_i)]_{\underline{B}} = [T]_{\underline{B}}[\mathbf{v}_i]_{\underline{B}} = D\mathbf{u}_i = \mu_i\mathbf{u}_i = \mu_i[\mathbf{v}_i]_{\underline{B}},$$

então $T(\mathbf{v}_i) = \mu_i\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_i$ é um autovetor.

Por outro lado, se $B = \{\mathbf{v}_1, \ \ldots \ , \ \mathbf{v}_n\}$ é uma base de autovetores, então $T(\mathbf{v}_i) = \mu_i \mathbf{v}_i$ para cada i, e assim

$$\begin{aligned}
[T]_{\underline{B}} &= \Big[[T(\mathbf{v}_1)]_{\underline{B}} \ \Big| \ [T(\mathbf{v}_2)]_{\underline{B}} \ \Big| \ \cdots \ \Big| \ [T(\mathbf{v}_n)]_{\underline{B}} \Big] \\
&= \Big[[\mu_1 \mathbf{v}_1]_{\underline{B}} \ \Big| \ [\mu_2 \mathbf{v}_2]_{\underline{B}} \ \Big| \ \cdots \ \Big| \ []\mu_n \mathbf{v}_n]_{\underline{B}} \Big] \\
&= \Big[\mu_1 \mathbf{e}_1 \ \Big| \ \mu_2 \mathbf{e}_2 \ \Big| \ \cdots \ \Big| \ \mu_n \mathbf{e}_n \Big] \quad = D
\end{aligned}$$

é uma matriz diagonal.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Se $c_T(x)$ não se dividir em um produto de fatores lineares sobre $\mathbb{K}$, então T não será diagonalizável. Se $c_T(x)$ se dividir em um produto de fatores lineares (o que é sempre o caso se $\mathbb{K}$ for algebricamente fechado), o seguinte será equivalente:

a *T é diagonalizável.*

b *$m_T(x)$ se fatora em um produto de termos lineares distintos.*

c *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são os autovalores distintos de T, então*

$$V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}.$$

d A soma das multiplicidades geométricas dos autovalores é igual à dimensão de V.

e Para cada autovalor λ de T, $\operatorname{geomult}(\lambda) = \operatorname{algmult}(\lambda)$.

f Para cada autovalor λ de T, $E_\lambda = E_\lambda^\infty$ (ou seja, todo autovetor generalizado de T é um autovetor de T).

Demonstração

$\boxed{a}$ implica $\boxed{b}$

Suponha que T é diagonalizável. Isso significa que tem uma base de autovetores, cujos autovalores são $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, e é fácil calcular que

$$(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$$

é um polinômio aniquilador para T. E portanto, este é o polinômio mínimal.

$\boxed{b}$ implica $\boxed{a}$

Se $m_T(x)$ se fatora em um produto de termos lineares distintos então a composta

$$V \xrightarrow{T-\lambda_k I} V \xrightarrow{T-\lambda_{k-1} I} \dots \xrightarrow{T-\lambda_1 I} V$$

é 0. Logo

$$\begin{aligned}
\dim(V) &= \dim\ker\left((T-\lambda_1 I)\circ\cdots\circ(T-\lambda_k I)\right) &(1)\\
&\leq \dim\ker(T-\lambda_1 I)+\cdots+\dim\ker(T-\lambda_k I) &(2)\\
&= \dim\left(\ker(T-\lambda_1 I)\oplus\cdots\oplus\ker(T-\lambda_k I)\right) &(3)
\end{aligned}$$

Portanto, a soma dos auto-espaços tem a mesma dimensão que V, ou seja, essa soma é V e T é diagonalizável.

$\boxed{\mathbf{b}}$ implica $\boxed{\mathbf{c}}$

A Equação 3 implica que $V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$.

$\boxed{\mathbf{c}}$ implica $\boxed{\mathbf{a}}$

Se $V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}$, seja B_i uma base para E_{λ_i} e faça $\underline{B} = \underline{B}_1 \cup \cdots \cup \underline{B}_m$. Seja T_i a restrição de T a E_{λ_i}. Então $\underline{B}$ é uma base para V e

$$[T]_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{bmatrix} = A,$$

uma matriz diagonal de bloco com $A_i = [T_i]_{\underline{B}_i}$. Mas, neste caso, A_i é a matriz $\lambda_i \mathrm{I}$ (um múltiplo escalar da matriz identidade).

$\boxed{\mathbf{c}}$ se e somente se $\boxed{\mathbf{d}}$

Por definição.

$\boxed{\mathbf{d}}$ se e somente se $\boxed{\mathbf{e}}$

Suponha que $c_T(x) = (x - \mu_1) \cdots (x - \mu_n)$. Os escalares $\mu_1, \ldots, \mu_n$ podem não ser todos distintos, por isso os agrupamos. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os autovalores distintos logo $c_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \ldots (x - \lambda_m)^{r_m}$ para números inteiros positivos $r_1, \ldots, r_m$.

Seja $n = \dim(V)$. Claramente, r_i é a multiplicidade algébrica de λ_i e $r_1 + \cdots + r_m = n$. Seja f_i a multiplicidade geométrica de λ_i. Sabemos que $1 \leq f_i \leq r_i$, portanto, $f_1 + \cdots + f_m = n$ se e somente se $f_i = r_i$ para cada i, então $\boxed{\mathbf{d}}$ e $\boxed{\mathbf{e}}$ são equivalentes.

$\boxed{\mathbf{c}}$ se e somente se $\boxed{\mathbf{f}}$

Como $V = E_{\lambda_1}^{\infty} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}^{\infty}$, então $V = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$ se e somente se $E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}^{\infty}$ para cada i, então $\boxed{\mathbf{c}}$ e $\boxed{\mathbf{f}}$ são equivalentes.

Corolário

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Suponha que $c_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ seja um produto de fatores lineares distintos. Então T é diagonalizável.

Demonstração. $\operatorname{algmult}(\lambda_i) = 1$ implica $\operatorname{geomult}(\lambda_i) = 1$. $\triangleleft$

Comentários Finais.