Álgebra Linear Avançada

Teorema da Decomposição Primária

Daniel Miranda Machado

24 de novembro de 2020

UFABC

Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios coprimos tais que $p(T)q(T) = 0$, então $V = \ker p(T) \oplus \ker q(T)$.

Proposição

Sejam $p, q \in \mathbb{K}[x]$ coprimos e $0 \neq T \in \mathrm{Hom}(V)$. Sejam N_p, N_q e N_{pq} os núcleos das operadores $p(T), q(T)$ e $p(T)q(T)$, respectivamente. Então

$$N_{pq} = N_p \oplus N_q \tag{1}$$

Demonstração

Pela Identidade de Bézout existem polinômios $a, b \in \mathbb{K}[x]$ tais que $bq + ap = 1$, temos que

$$b(T)q(T) + a(T)p(T) = I.$$

Se $\mathbf{v} \in N_{pq}$, então $b(T)q(T)\mathbf{v} \in N_p$. De fato, aplicando $p(T)$ a esse vetor, temos $p(T)b(T)q(T)\mathbf{v} = b(T)p(T)q(T)\mathbf{v} = 0$. Da mesma forma temos $a(T)p(T)\mathbf{v} \in N_q$, se $\mathbf{v} \in N_{pq}$. Como $b(T)q(T)\mathbf{v} + a(T)p(T)\mathbf{v} = \mathbf{v}$, mostramos que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q$, com $\mathbf{v}_p \in N_p$ e $\mathbf{v}_q \in N_q$.

Para mostrar que essa decomposição é única, suponhamos que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_q = \mathbf{v}'_p + \mathbf{v}'_q$. Mas então $\mathbf{w} := \mathbf{v}_p - \mathbf{v}'_p = \mathbf{v}'_q - \mathbf{v}_q$ pertence, simultaneamente, a N_p e N_q. Aplicando $b(T)q(T) + a(T)p(T) = I$ em $\mathbf{w}$, temos

$$b(T)q(T)\mathbf{w} + a(T)p(T)\mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Mas $b(T)q(T)\mathbf{w} = 0 = a(T)p(T)\mathbf{w}$, de modo que $\mathbf{w} = 0$, o que implica $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_p$ e $\mathbf{v}_q = \mathbf{v}'_q$, mostrando a unicidade da decomposição.

Corolário

Seja $0 \neq T \in \mathrm{Hom}(V)$. *Se* $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{K}[x]$, *são coprimos, se* N_{p_i} *denota o núcleo de* $p_i(T)$ *e* $N_{p_1 \ldots p_k}$ *o núcleo de* $p_1(T) \ldots p_k(T)$, *então*

$$N_{p_1 \ldots p_k} = N_{p_1} \oplus \cdots \oplus N_{p_k}.$$

Teorema (Decomposição Primária)

Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear e $m_T(x) \in \mathbb{K}[x]$ seu polinômio minimal

$$m_T(x) = [p_1(x)]^{d_1} \cdots [p_j(x)]^{d_j}.$$

Então

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j,$$

onde $W_i = \ker (p_i(T))^{d_i}$, são subespaços T-invariantes e o polinômio mínimal de $T\restriction_{W_i}$ é $p_i(x))^{d_i}$.

Como $m_T(T) = 0$ e como os polinômios $m_1(x) = [p_1(x)]^{d_1}, \ldots, m_j(x) = [p_j(x)]^{d_j}$ são coprimos, podemos aplicar o corolário 2 e concluir que

$$V = N_{m_1 \cdots m_j} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_j. \tag{2}$$

Como $W_i = \ker (p_i(T))^{d_i}$, temos que o polinômio mínimal de $T\restriction_{W_i}$ é da forma $p_i(x))^{r_i}$ com $r_i \leq d_i$. Se $r_i < d_i$ então $[p_1(x)]^{d_1} \cdots [p_i(x)]^{r_i} \cdots [p_j(x)]^{d_j}$ seria um polinômio de menor grau que anula T, contradizendo a minimalidade de $m_T(x)$.

Como corolário temos

Teorema (Decomposição em Auto-espaços Generalizados)

Suponha que o polinômio característico de T se fatore como produto de termos lineares sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os autovalores distintos de T. Então

$$V = \bigoplus_{j=1}^{m} E_{\lambda_j}^{\infty}(T).$$

Exemplo

O operador T associado a matriz na base canônica B

$$[T]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 7 & -4 \\ -3 & 4 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tem polinômio característico $p_T(x) = (x-2)^2(x-1)^2$ e logo os autovalores são $2, 1$.

O auto espaço generalizado $\ker(T - 2\,\mathrm{I})^2 = \{[x, y, z, w] \mid w = -x + 2y, z = y\}$. E logo $\{[1, 0, 0, -1], [1, 1, 1, 1]$ é uma base de $\ker(T - 2\,\mathrm{I})^2$. Por outro lado temos dois autovetores $\{[2, 0, 2, 1], [1, 1, 0, 0]\}$ associados ao autovalor 1. E assim $\{[2, 0, 2, 1], [1, 1, 0, 0]\}$ é uma base de $\ker(T - \mathrm{I})$. Podemos assim concluir também que o polinômio mínimal é $m_T(x) = (x - 2)^2(x - 1)$. Seja a base

$$\underline{\mathrm{E}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = ([1, 0, 0, -1], [1, 1, 1, 1], [2, 0, 2, 1], [1, 1, 0, 0])$$

É fácil ver que

$$
\begin{aligned}
T\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\
T\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\
T\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_3 \\
T\mathbf{e}_4 &= \mathbf{e}_4
\end{aligned}
$$

E assim o operador T nessa base é

$$
[T]_{\underline{E}} = \left(\begin{array}{cc|cc}
1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Essa é uma decomposição em blocos associada a Decomposição Primária. Essa decomposição não é única e dependendo da escolha dos vetores nas bases dos auto-espaços generalizados podemos simplificar os blocos. É o que faremos no próximo capítulo com a Forma de Jordan.

Exemplo

Seja V o espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis e considere o operador linear

$$E[f] \triangleq (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)f$$

onde D é a diferenciação. Associado temos a equação diferencial

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)f = 0$$

com coeficientes constantes (complexos). Resolver a equação é determinar o núcleo de $E(f)$, que denotaremos por V.

A partir da teoria das equações diferenciais, temos que V é de dimensão finita com $\dim V = n$. Considere o polinômio

$$m = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Em $\mathbb{C}$, esse polinômio fatora como

$$m = (x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k}$$

Então o polinômio mínimal de E é m. Pelo Corolário 4, V se decompõe como soma direta dos espaços de solução V_i das equações diferenciais

$$V_i = \{\mathbf{v} \,|\, (D - \lambda_i \mathrm{I})^{r_j} f\mathbf{v} = 0\}.$$

Agora, as soluções de $(D - \lambda \mathrm{I})^r f = 0$ podem ser determinadas usando o fato de que, por um simples argumento indutivo,

$$(D - \lambda \mathrm{I})^r f = e^{\lambda t} D^r (e^{-\lambda t} f) \,.$$

Portanto, f é uma solução se e somente se $D^r(e^{-\lambda t}f) = 0$, que é o caso se e somente se $e^{-\lambda t}f$ é um polinômio de grau no máximo $r-1$. Uma base para o espaço de solução de $(D-\lambda\,\mathrm{I})^r f = 0$ é então $\{e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{r-1}e^{\lambda t}\}$.

Comentários Finais.