

Álgebra Linear Avançada

Teoremas de Schur e Cayley-Hamilton

Daniel Miranda Machado

24 de novembro de 2020

UFABC

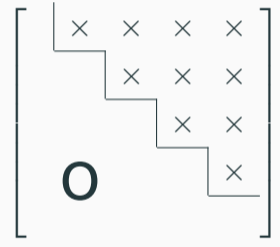
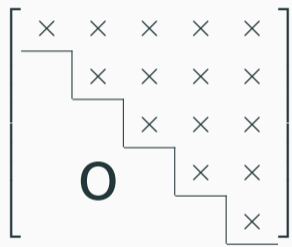


Teoremas de Schur

Definição (Triangularizável)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \rightarrow V$ seja uma transformação linear.

- 1 T é **triangularizável superior** se houver uma base, \underline{B} de V na qual a matriz $A = [T]_{\underline{B}}$ é triangular superior, i.e., $A(i, j) = 0$ para todos os $i > j$.
- 2 T é **triangularizável estritamente superior** se houver uma base, \underline{B} de V na qual a matriz $A = [T]_{\underline{B}}$ é triangular estritamente superior, i.e., $A(i, j) = 0$ para todos os $i \geq j$.



(1)

Proposição

Suponha $T \in \text{Hom}(V, V)$ e $\underline{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ base de V . Então são equivalentes:

- 1 A matriz de T na base \underline{B} é triangular superior;
- 2 $T\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Teorema (de Schur)

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo \mathbb{K} e $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear. Então T é triangularizável se, e somente se, o seu polinômio característico $c_T(x)$ for um produto de fatores lineares.

Em particular, se \mathbb{K} for fechado algebricamente, então todo operador linear $T: V \rightarrow V$ é triangularizável.

Demonstração 1

Faremos a demonstração por indução sobre $\dim(V)$. A afirmação é clara se $\dim(V) = 1$.

Para o caso geral, seja um autovetor $\mathbf{v} \in V$ e um autovalor λ associado, e defina $U := \text{im}(T - \lambda I)$.

Então U é um subespaço invariante de V com $\dim(U) < \dim(V)$. Pela hipótese de indução, existe uma base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ de U tal que $T|_U$ é representado por uma matriz triangular superior. Estenda esse conjunto a uma base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de V .

Então

$$T\mathbf{v}_k = (T - \lambda I)\mathbf{v}_k + \lambda\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \text{ para todo } k,$$

Proposição

Suponha que W seja um subespaço de V invariante sob uma transformação linear $T : V \rightarrow V$. Então T induz uma aplicação linear $\bar{T} : V/W \rightarrow V/W$ dada por $\bar{T}(v + W) = T(v) + W$. Nesse caso o polinômio mínimo de \bar{T} divide o polinômio mínimo de T .

Demonstração 2

Se $[T]_{\underline{B}} = A$ é uma matriz triangular superior com entradas diagonais d_1, \dots, d_n e $c_T(x) = c_A(x) = \det(xI - A) = (x - d_1) \cdots (x - d_n)$ é um produto de fatores lineares.

Provamos a recíproca por indução em $n = \dim(V)$. Seja $c_T(x) = (x - d_1) \cdots (x - d_n)$. Então d_1 é um autovalor de T ; escolha um autovetor \mathbf{v}_1 e seja V_1 o subespaço de V gerado por \mathbf{v}_1 . Definimos $\bar{V} = V/V_1$. Então T induz: $\bar{T} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ com $c_{\bar{T}}(x) = (x - d_2) \cdots (x - d_n)$. Por indução, \bar{V} tem uma base $\bar{B} = \{\bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n\}$ com $\bar{T}_{\bar{B}} = D$ triangular superior.

Escolhemos $\mathbf{v}_i \in V$ com $\pi(\mathbf{v}_i) = \bar{\mathbf{v}}_i$ por $i = 2, \dots, n$ e deixe $\underline{\mathbf{B}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Observe que $\bar{T}(\bar{\mathbf{v}}_1) = T\mathbf{v}_1 + V_1$.

Então

$$[T]_{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{bmatrix} d_1 & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

para uma matriz $C \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{K})$. Independentemente do que C seja, essa matriz é triangular superior.

Proposição

Seja v um autovetor de T com o autovalor associado λ e seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio. Então $p(T)(\mathbf{v}) = p(\lambda)v$. Assim, se $p(\lambda) \neq 0$, então $p(T)(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$.

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema (de Cayley-Hamilton)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Então

$$c_T(T) = 0.$$

Para demonstrarmos o teorema de Cayley-Hamilton usaremos a seguinte identidade envolvendo a matriz A e sua matriz de cofatores. Seja $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ com $n \geq 2$ então:

$$A(\text{cof } A)^t = (\det A) I$$

Demonstração

Sejam A a matriz de T e $p(x)$ o polinômio característico de A :

$$p_A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

seja $B(x) = (b_{ij}(x))$ a matriz adjunta de $A - xI$, ou seja a transposta da matriz de cofatores. Como $b_{ij}(x)$ são os cofatores da matriz $A - xI$ eles são polinômio em x de grau menor igual que $n - 1$. Assim

$$b_{ij}(x) = b_{ij_0} + b_{1j_1}x + \cdots + b_{nj_{n-1}}x^{n-1}$$

Seja $B_k = (b_{i,jk})$ Para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Então temos que

$$B(x) = B_0 + B_1x + \dots + B_{n-1}x^{n-1}$$

Pela igualdade

$$(A - xI)[\text{adj}(A - xI)] = [\text{adj}(A - xI)](A - xI) = \det(A - xI)1$$

temos que $(A - xI)B(x) = [\det(A - xI)]1$. Assim

$$(A - xI)[B_0 + B_1x + \dots + B_{n-1}x^{n-1}] = (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)1$$

Expandindo o lado esquerdo desta equação e igualando as potências de mesmo grau, temos que

$$-B_{n-1} = a_n \mathbf{1}, \quad AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} \mathbf{1}, \dots, \quad AB_1 - B_0 = a_1 \mathbf{1}, \quad AB_0 = a_0 \mathbf{1}.$$

Multiplicando as equações matriciais acima por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$, respectivamente, temos

$$-A^n B_{n-1} = a_n A^n, \quad A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} = a_{n-1} A^{n-1}$$

$$, \dots, A^2 B_1 - AB_0 = a_1 A, \quad AB_0 = a_0 1$$

Somando as equações matriciais acima temos que $p_A(A) = 0$.

Corolário

Sejam V um espaço de dimensão finita e $T \in \text{Hom}(V, V)$. Então o polinômio minimal $m_T(x)$ divide o polinômio característico $c_T(x)$.

Teorema

Sejam V um espaço de dimensão n e $T \in \text{Hom}(V, V)$. Então o polinômio característico $p_T(x)$ divide a n potência do polinômio minimal: $(m_T(x))^n$.

Demonstração

Para ver isso, fixe uma base de V e seja M a matriz de T nessa base. Nesse contexto, $p_T = \det(xI - M)$.

Escreva $m_T = \sum_{k=0}^d a_k x^k$.

Então

$$m_T(xI) = m_T(xI) - m_T(M) \quad (2)$$

$$= \sum_{k=0}^d a_k (x^k I - M^k) \quad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^d a_k (x^k I - M^k) \quad (4)$$

$$= (xI - M) \sum_{k=1}^d a_k \sum_{p=0}^{k-1} x^p M^{k-1-p} \quad (5)$$

$$= (xI - M)B \quad (6)$$

Onde $B := \sum_{k=1}^d a_k \sum_{p=0}^{k-1} x^p M^{k-1-p}$.

Em seguida, calculamos o determinante dessas matrizes: $m_T^n = m_T^n \det(I) = \det(m_T(xI)) = \det((xI - M)B) = \det(xI - M) \det(B) = p_T \det(B)$, e o resultado segue.

Corolário

Seja $T: V \rightarrow V$ uma transformação linear cujo polinômio característico $c_T(x)$ seja um produto de fatores lineares. Então $m_T(x)$ e $c_T(x)$ têm os mesmos fatores lineares.

Definição (Autoespaço Generalizado Associado ao Polinômio)

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Seja $p_T \in \mathbb{K}[t]$ o polinômio característico de T . Se

$$p_T(t) = [p_1(t)]^{s_1} \dots [p_j(t)]^{s_j}$$

é a decomposição de p_T em fatores irredutíveis, com $p_i \neq p_k$ para $i \neq k$.

Definimos, o **autoespaço generalizado associado ao polinômio** p_i como o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ para os quais existe um inteiro positivo k tal que

$$(p_i(T))^k \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Se V for de dimensão finita a cadeia

$$\mathbf{0} \subset \ker(p_i(T))^1 \subset \ker(p_i(T))^2 \subset \cdots \subset \ker(p_i(T))^k \subset \cdots$$

estabiliza. Seja d_i o menor inteiro positivo com a propriedade que $\ker(p_i(T))^{d_i} = \ker(p_i(T))^{d_i+1}$. O inteiro positivo d_i é dito o **índice** de $p_i(T)$.

Comentários Finais.