Álgebra Linear Avançada

Teoremas de Schur e Cayley-Hamilton

Daniel Miranda Machado

24 de novembro de 2020

UFABC

UFABC

Teoremas de Schur

Definição (Triangularizável)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to V$ seja uma transformação linear.

1. *T é* **triangularizável superior** *se houver uma base, $\underline{B}$ de V na qual a matriz $A = [T]_{\underline{B}}$ é triangular superior, i.e, $A(i,j) = 0$ para todos os $i > j$.*
2. *T é* **triangularizável estritamente superior** *se houver uma base, $\underline{B}$ de V na qual a matriz $A = [T]_{\underline{B}}$ é triangular estritamente superior, i.e., $A(i,j) = 0$ para todos os $i \geq j$.*

$$
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times \\
 & & \times & \times & \times \\
 & O & & \times & \times \\
 & & & & \times
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times \\
 & & \times & \times \\
O & & & \times \\
 & & &
\end{bmatrix}
\tag{1}
$$

Proposição

Suponha $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ *e* $\underline{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ *base de* V*. Então são equivalentes:*

1. *A matriz de* T *na base* $\underline{B}$ *é triangular superior;*
2. $T\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ *para todo* $k = 1, \ldots n$*.*

Teorema (de Schur)

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Então T é triangularizável se, e somente se, o seu polinômio característico $c_T(x)$ for um produto de fatores lineares.

Em particular, se $\mathbb{K}$ for fechado algebricamente, então todo operador linear $T\colon V \to V$ é triangularizável.

Demonstração 1

Faremos a demonstração por indução sobre $\dim(V)$. A afirmação é clara se $\dim(V) = 1$.

Para o caso geral, seja um autovetor $\mathbf{v} \in V$ e um autovalor λ associado, e defina $U := \mathrm{im}(T - \lambda I)$.

Então U é um subespaço invariante de V com $\dim(U) < \dim(V)$. Pela hipótese de indução, existe uma base $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ de U tal que $T\restriction_U$ é representado por uma matriz triangular superior. Estenda esse conjunto a uma base $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V.

Então

$$T\mathbf{v}_k = (T - \lambda I)\mathbf{v}_k + \lambda\mathbf{v}_k \in \langle(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)\rangle \text{ para todo } k,$$

Proposição

Suponha que W seja um subespaço de V invariante sob uma transformação linear $T : V \to V$. Então T induz uma aplicação linear $\overline{T} : V/W \to V/W$ dada por $\overline{T}(v + W) = T(v) + W$. Nesse caso o polinômio mínimo de $\overline{T}$ divide o polinômio mínimo de T.

Demonstração 2

Se $[T]_{\underline{\mathrm{B}}} = A$ é uma matriz triangular superior com entradas diagonais $d_1, \ldots,$ d_n e $c_T(x) = c_A(x) = \det(xI - A) = (x - d_1)\cdots(x - d_n)$ é um produto de fatores lineares.

Provamos a recíproca por indução em $n = \dim(V)$. Seja $c_T(x) = (x - d_1)\cdots(x - d_n)$. Então d_1 é um autovalor de T; escolha um autovetor $\mathbf{v}_1$ e seja V_1 o subespaço de V gerado por $\mathbf{v}_1$. Definimos $\overline{V} = V/V_1$.

Então T induz: $\overline{T} : \overline{V} \to \overline{V}$ com $c_{\overline{T}}(x) = (x - d_2)\cdots(x - d_n)$. Por indução, $\overline{V}$ tem uma base $\overline{B} = \{\overline{v}_2, \ \ldots \ , \ \overline{v}_n\}$ com $\overline{T}_{\overline{B}} = D$ triangular superior.

Escolhemos $\mathbf{v}_i \in V$ com $\pi(\mathbf{v}_i) = \overline{v}_i$ por $i = 2, \ldots, n$ e deixe $\underline{B} = \{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots\ ,\ \mathbf{v}_n\}$.

Observe que $\overline{T}(\overline{\mathbf{v}}_1) = T\mathbf{v}_1 + V_1$.

Então

$$[T]_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} d_1 & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

para uma matriz $C \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$. Independentemente do que C seja, essa matriz é triangular superior.

Proposição

Seja v *um autovetor de* T *com o autovalor associado* λ *e seja* $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ *um polinômio. Então* $p(T)(\mathbf{v}) = p(\lambda)v$*. Assim, se* $p(\lambda) \neq 0$*, então* $p(T)(\mathbf{v}) \neq 0$.

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema (de Cayley-Hamilton)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Então

$$c_T(T) = 0.$$

Para demonstrarmos o teorema de Cayley-Hamilton usaremos a seguinte identidade envolvendo a matriz A e sua matriz de cofatores. Seja $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ com $n \geq 2$ então:

$$A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)\, \mathrm{I}$$

Demonstração

Sejam A a matriz de T e $p(x)$ o polinômio característico de A:

$$p_A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

seja $B(x) = (b_{ij}(x))$ a matriz adjunta de $A - x\,\mathrm{I}$, ou seja a transposta da matriz de cofatores. Como $b_{ij}(x)$ são os cofatores da matriz $A - x\,\mathrm{I}$ eles são polinômio em x de grau menor igual que $n-1$. Assim

$$b_{ij}(x) = b_{ij_0} + b_{1j_1}x + \cdots + b_{nj_{n-1}}x^{n-1}$$

Seja $B_k = \left(b_{i,j_k}\right)$Para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Então temos que

$$B(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_{n-1} x^{n-1}$$

Pela igualdade

$$(A - x\,\mathrm{I})[\mathrm{adj}(A - x\,\mathrm{I})] = [\mathrm{adj}(A - x\,\mathrm{I})](A - x\,\mathrm{I}) = \det(A - x\,\mathrm{I})\mathbb{1}$$

temos que $(A - x\,\mathrm{I})B(x) = [\det(A - x\,\mathrm{I})]\mathbb{1}$. Assim

$$(A - x\,\mathrm{I})[B_0 + B_1 x + \cdots + B_{n-1} x^{n-1}] = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n)\mathbb{1}$$

Expandindo o lado esquerdo desta equação e igualando as potências de mesmo grau, temos que

$$-B_{n-1} = a_n 1,\ AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} 1, \dots, AB_1 - B_0 = a_1 1,\ AB_0 = a_0 1.$$

Multiplicando as equações matriciais acima por $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$, respectivamente, temos

$$-A^n B_{n-1} = a_n A^n, \quad A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} = a_{n-1} A^{n-1}$$

$$, \ldots, A^2B_1 - AB_0 = a_1A, \quad AB_0 = a_0\mathbf{1}$$

Somando as equações matriciais acima temos que $p_A(A) = 0$.

Corolário

Sejam V um espaço de dimensão finita e $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Então o polinômio minimal $m_T(x)$ divide o polinômio característico $c_T(x)$.

Teorema

Sejam V *um espaço de dimensão* n *e* $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$. *Então o polinômio característico* $p_T(x)$ *divide a* n *potência do polinômio minimal:* $(m_T(x))^n$.

Demonstração

Para ver isso, fixe uma base de V e seja M a matriz de T nessa base. Nesse contexto, $p_T = \det(x\,\mathrm{I} - M)$.

Escreva $m_T = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.

Então

$$\begin{aligned} m_T(xI) &= m_T(xI) - m_T(M) && (2)\\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k(x^k I - M^k) && (3)\\ &= \sum_{k=1}^{d} a_k(x^k I - M^k) && (4)\\ &= (xI - M)\sum_{k=1}^{d} a_k \sum_{p=0}^{k-1} x^p M^{k-1-p} && (5)\\ &= (xI - M)B && (6) \end{aligned}$$

Onde $B := \sum_{k=1}^{d} a_k \sum_{p=0}^{k-1} x^p M^{k-1-p}$.

Em seguida, calculamos o determinante dessas matrizes: $m_T^n = m_T^n \det(\mathrm{I}) = \det(m_T(x\,\mathrm{I})) = \det((x\,\mathrm{I} - M)B) = \det(x\,\mathrm{I} - M)\det(B) = p_T \det(B)$, e o resultado segue.

Corolário

Seja $T: V \to V$ uma transformação linear cujo polinômio característico $c_T(x)$ seja um produto de fatores lineares. Então $m_T(x)$ e $c_T(x)$ têm os mesmos fatores lineares.

Definição (Autoespaço Generalizado Associado ao Polinômio)

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja $p_T \in \mathbb{K}[t]$ o polinômio característico de T. Se

$$p_T(t) = [p_1(t)]^{s_1} \dots [p_j(t)]^{s^j}$$

*é a decomposição de p_T em fatores irredutíveis, com $p_i \neq p_k$ para $i \neq k$. Definimos, o **autoespaço generalizado associado ao polinômio** p_i como o conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ para os quais existe um inteiro positivo k tal que*

$$(p_i(T))^k \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Se V for de dimensão finita a cadeia

$$0 \subset \ker(p_i(T))^1 \subset \ker(p_i(T))^2 \subset \cdots \ker(p_i(T))^k \cdots$$

estabiliza. Seja d_i o menor inteiro positivo com a propriedade que $\ker(p_i(T))^{d_i} = \ker(p_i(T))^{d_i+1}$. O inteiro positivo d_i é dito o **índice** de $p_i(T)$.

Comentários Finais.