Álgebra Linear Avançada

Autovalores e Autovetores

Daniel Miranda Machado

19 de novembro de 2020

UFABC

Autovalores e Autovetores

Um caso particular extremamente importante de espaço invariante ocorre quando um subespaço invariante possui dimensão 1, isto é, quando W é T-invariante e $\dim W = 1$. Nesse caso temos que W é gerado por um vetor $\mathbf{w} \in W$, com $\mathbf{w} \neq 0$, e claramente existe λ tal que

$$T(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w} \tag{1}$$

Um vetor **w** não nulo que satisfaz a Equação 1 é dito autovetor de T. Nesse caso como $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ então $(T - \lambda I)(\mathbf{v}) = 0$ e consequentemente $\mathbf{v} \in \ker(T - \lambda I)$ e claramente vale a reciproca.

Definição (Autovalor e Autovetor)

Sejam $T\colon V \to V$ uma transformação linear e $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **a** *Se $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$, λ é dito **autovalor** de T.*
- **b** *Nesse caso, qualquer $\mathbf{v}$ não nulo em $\ker(T - \lambda I)$ é dito **autovetor** de T.*
- **c** *O subespaço $\ker(T - \lambda I)$ de V é denominado **autoespaço** de T.*
- **d** *Nesse caso, dizemos que $\lambda, \mathbf{v}$ e $\ker(T - \lambda I)$ estão associados.*

O conjunto de todos os autovalores de T com as respectivas multiplicidades é denominado **espectro** de T e denotado por $\operatorname{spec} T$.

Exemplos

- Seja $T : V \to V$ que é a multiplicação por um escalar $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Neste caso todo vetor não nulo em V é um autovetor associado ao autovalor λ.
- Reflexão no plano xy. A reflexão no plano xy é a transformação R_{xy} que na base canônica é representada pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nesse caso $\operatorname{spec} R_{xy} = \{1, -1\}$. Os autovetores associados ao 1 são $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e associado ao -1 temos o autovetor $\mathbf{e}_3$.

- Se T numa base $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n\}$ possui representação matricial por uma matriz diagonal com os valores na diagonal principal distintos, isto é:

$$[T]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ com } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ se } i \neq j.$$

Então $\lambda_1, \dots \lambda_n$ são autovalores com autovetores associados $\{\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n\}$ respectivamente.

- □ Seja $C^\infty[a,b]$ o espaço vetorial das funções suaves em $[a,b]$. Seja $D : C^\infty[a,b] \to C^\infty[a,b]$ o operador derivação. Então a função $f(x)$ é um autovetor se satisfizer

  $$Df(x) = \lambda f(x) \to f(x) = Ce^{\lambda x}.$$

  No caso particular em que $\lambda = 0$ a função f é constante.
- □ Seja $C^\infty[a,b]$ o espaço vetorial das funções suaves em $[a,b]$. Seja $I : C^\infty[a,b] \to C^\infty[a,b]$ o operador integração $I(f)(x) = \int_a^x f(u)du$. Então a função $f(x)$ é um autovetor se satisfizer $\int_a^x f(u)du = f(x)$, Como f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que,

  $$f(x) = \lambda f'(x)$$

  cujas soluções são dadas por $f(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}$ com $C \in \mathbb{R}$. Logo todo $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovetor com autovalores associados $f(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}$ para $C \in \mathbb{R}$

Definição (Autoespaço Generalizado)

Seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear e $\lambda \in \mathbb{K}$ seja um autovalor de T.

a *O* ***autoespaço generalizado*** *de T associado a λ, denotado E_λ^∞, é o subespaço de V definido como*

$$E_\lambda^\infty = \{\mathbf{v} \mid (T - \lambda\,\mathrm{I})^k(\mathbf{v}) = 0 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

b *Se $\mathbf{v}$ for um vetor diferente de zero nesse autoespaço generalizado, então $\mathbf{v}$ é dito* ***autovetor generalizado*** *associado ao autovalor λ.*

c *Para cada um desses vetores $\mathbf{v}$, o menor número inteiro positivo k para o qual $(T - \lambda\,\mathrm{I})^k(\mathbf{v}) = 0$ é dito o* ***índice*** *de $\mathbf{v}$.*

Exemplos

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ elementos distintos de $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, λ_i é um autovalor de A com autoespaço unidimensional E_{λ_i} com base $\{\mathbf{e}_i\}$.

Seja λ um elemento de $\mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

com entradas λ na diagonal e 1 imediatamente acima da diagonal e 0 em qualquer outra entrada. Para cada $k = 1, \ldots, n$, $\mathbf{e}_k$ é um autovetor generalizado do índice k, e o autoespaço generalizado E_λ^k é k-dimensional com base $\{\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ \mathbf{e}_k\}$.

Para uma transformação linear T e um autovalor λ de T,

- um autovetor generalizado de índice 1 é um autovetor
- E_λ denotará o autoespaço $E_\lambda = \ker(T - \lambda \mathrm{I})$.
- Para um número inteiro positivo k, E_λ^k denotará o subespaço $E_\lambda^k = \ker(T - \lambda \mathrm{I})^k$.
- Temos que $E_\lambda^1 \subseteq E_\lambda^2 \subseteq \cdots$ e que a união desses subespaços é E_λ^∞:

$$E_\lambda^\infty = \bigcup E_\lambda^k$$

Exemplos

Seja $\mathbb{K}$ um corpo de característica 0 e seja $V = \mathbb{K}[x]$, o espaço de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$. Seja $\mathrm{D}\colon V \to V$ o operador diferenciação, $\mathrm{D}(p(x)) = p'(x)$. Então D tem um único autovalor 0 e o autoespaço correspondente E_0 é 1-dimensional consistindo nos polinômios constantes. De maneira mais geral, E_0^k é k-dimensional, consistindo em todos os polinômios de grau no máximo $k-1$.

Seja $V = \mathbb{K}[x]$ o espaço de todos os polinômios com coeficientes em um corpo de característica 0 e seja $T\colon V \to V$ definida por $T(p(x)) = xp'(x)$. Então, os autovalores de T são os números inteiros não negativos e, para todo número inteiro não negativo m, o autoespaço E_m é unidimensional com base $\{x^m\}$.

Seja V o espaço das funções $C^\infty(\mathbb{R})$, e seja $\mathrm{D} : V \to V$ o operador de diferenciação, $\mathrm{D}(f(x)) = f'(x)$. Para qualquer número real λ, E_λ é unidimensional com base $f(x) = e^{\lambda x}$. Além disso, E_λ^k é k-dimensional com base $\{e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \dots\ ,\ x^{k-1}e^{\lambda x}\}$.

Seja $V = (\mathbb{K}^{\infty})_0$ e seja $\mathrm{L} : V \to V$ o shift para a esquerda. Então L tem um único autovalor $\lambda = 0$ e o autoespaço E_0 é unidimensional, $E_0 = \{(a_1,\ a_2,\ \ldots) \in V | a_i = 0 \text{ por } i > 1\}$. De maneira mais geral, $E_0^k = \{(a_1,\ a_2,\ \ldots) \in V \mid a_i = 0 \text{ para } i > k\}$, então $\dim E_0^k = k$ para cada k e, finalmente, $V = E_0^{\infty}$. Por outro lado, R: $V \to V$ não possui nenhum autovalor.

Seja $V = \mathbb{K}^\infty$ e seja L: $V \to V$ o shift para a esquerda. Então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}, E_\lambda$ é unidimensional com base $\{(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \}$. Então E_λ^k é k-dimensional para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo número inteiro positivo k. Por outro lado, $\mathrm{R} : V \to V$ não possui nenhum autovalor.

Definição (Polinômio Característico)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$*. O* ***polinômio característico*** $c_A(x)$ *de* A *é o polinômio*

$$c_A(x) = \det(xI - A).$$

Pelas propriedades do determinante, fica claro que $c_A(x)$ é um polinômio mônico de grau n.

Lema

Sejam A e B matrizes semelhantes. Então $c_A(x) = c_B(x)$.

Demonstração. Se $B = PAP^{-1}$, então

$$c_B(x) = \det(xI - B) = \det(xI - PAP^{-1}) = \det(P(xI - A)P^{-1}) = \det(xI - A) = c_A(x) \quad \triangleleft$$

Definição (Polinômio Característico)

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja $\underline{B}$ uma base de V e seja $A = [T]_{\underline{B}}$. O ***polinômio característico*** *$c_T(x)$ é o polinômio*

$$c_T(x) = c_A(x) = \det(xI - A) \ .$$

Pelo Lema 4, $c_T(x)$ está bem definido, i.e., independe da escolha da base, $\underline{B}$ de V.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ seja uma transformação linear. Então λ é um autovalor de T se e somente se λ for uma raiz do polinômio característico $c_T(x)$, ou seja, se e somente se $c_T(\lambda) = 0$.

Demonstração. Seja $\underline{\mathrm{B}}$ uma base de V e deixe $A = [T]_{\underline{\mathrm{B}}}$. Então, por definição, λ é um autovalor de T se e somente se houver um vetor diferente de zero $\mathbf{v}$ em $\ker(T - \lambda\,\mathrm{I})$, ou seja, se e somente se $(A - \lambda I)\mathbf{u} = 0$ para algum vetor diferente de zero $\mathbf{u}$ em $\mathbb{K}^n$ (onde $\mathbf{u} = [\mathbf{v}]_{\underline{\mathrm{B}}}$). Este é o caso se e somente se $A - \lambda I$ for singular, que é o caso se e somente se $\det(A - \lambda I) = 0$. Mas $\det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda - IA)$, onde $n = \dim(V)$, então esse é o caso se e somente se $c_T(\lambda) = c_A(\lambda) = \det(\lambda - IA) = 0$. $\triangleleft$

Definimos $c_A(x) = \det(xI - A)$ e esta é a definição correta, pois queremos que $c_A(x)$ seja um polinômio mônico . Na verdade, na tarefa de encontrar auto-espaços, geralmente é mais conveniente trabalhar com $A - \lambda I$ em vez de $\lambda I - A$.

Teorema

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *duas matrizes semelhantes, ou seja,*

$$A = P^{-1}BP.$$

Então

1. A *e* B *possuem os mesmos autovalores* λ_i*;*
2. *Os espaços* $\ker(A - \lambda_i \mathrm{I})^j$ *e* $\ker(B - \lambda_i \mathrm{I})^j$ *possuem a mesma dimensão para todo* $j \in \mathbb{N}$ *e todo autovalor* λ_i.

Para o restante desta seção, assumimos que V é dimensional finito.

Definição (Multiplicidade)

Sejam $T\colon V \to V$ e λ um autovalor de T.

- *A* ***multiplicidade algébrica*** *de λ, $\mathrm{algmult}(\lambda)$, é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico $c_T(x)$.*
- *A* ***multiplicidade geométrica*** *de λ, $\mathrm{geomult}(\lambda)$, é a dimensão do autoespaço associado $E_\lambda = \ker(T - \lambda I)$.*

Quando não qualificado, usaremos multiplicidade para significar multiplicidade algébrica, como é o padrão na literatura.

Proposição

Sejam $T\colon V \to V$ e λ seja um autovalor de T. Então $1 \leq \operatorname{geomult}(\lambda) \leq \operatorname{algmult}(\lambda)$.

Demonstração. Por definição, se λ é um autovalor de T, existe um autovetor $\mathbf{v}$ (diferente de zero), portanto, $1 \leq \dim(E_\lambda)$.

Suponha que $\dim(E_\lambda) = d$ e seja $\underline{\mathrm{B}}_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ uma base para E_λ. Estenderemos $\underline{\mathrm{B}}_1$ para uma base, $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V. Então

$$[T]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{bmatrix} \lambda I & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = A,$$

uma matriz de bloco com o bloco superior esquerdo de tamanho $d \times d$. Então

$$[xI - T]_{\underline{\mathrm{B}}} = xI - A = \begin{bmatrix} xI - \lambda I & -B \\ 0 & xI - D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-\lambda)I & -B \\ 0 & xI - D \end{bmatrix} \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} c_T(x) &= \det(xI - A) = \det((x-\lambda)I)\det(xI - D) \\ &= (x-\lambda)^d \det(xI - D) \end{aligned}$$

e, portanto, $d \leq \mathrm{algmult}(\lambda)$. $\triangleleft$

Corolário

Sejam $T\colon V \to V$ e λ um autovalor de T com $\operatorname{algmult}(\lambda) = 1$*. Então* $\operatorname{geomult}(\lambda) = 1$.

É importante observar que a existência de autovalores e autovetores depende do corpo $\mathbb{K}$, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo

Para qualquer número racional diferente de zero t, seja A_t a matriz

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{bmatrix}$$

dessa forma temos:

$$A_t^2 = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = t\,\mathrm{I}\,.$$

Seja λ um autovalor de A_t com o autovetor associado v. Então, por um lado,

$$A_t^2(\mathbf{v}) = A_t(A_t(\mathbf{v})) = A_t(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A_t(\mathbf{v}) = \lambda^2 v,$$

mas por outro lado,

$$A_t^2(\mathbf{v}) = tI(\mathbf{v}) = t\mathbf{v},$$

então $\lambda^2 = t$.

Suponha $t = 1$. Então $\lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$, e temos o autovalor $\lambda = 1$ com o autovetor associado $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o autovalor $\lambda = -1$ com o autovetor associado $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Suponha $t = 2$. Se considerarmos A definido como $\mathbb{Q}$, não haverá $\lambda \in \mathbb{Q}$ com $\lambda^2 = 2$, portanto A tem sem autovalores. Se considerarmos A definido como $\mathbb{R}$, $\lambda = \pm\sqrt{2}$ e $\lambda = \sqrt{2}$ serão um autovalor com o autovetor associado $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $\lambda = -\sqrt{2}$ são um autovalor com o autovetor associado $\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Podemos interpretar cada polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ como uma função de $\mathrm{Hom}(V, V)$ em $\mathrm{Hom}(V, V)$ definida como:

$$p(T) : \mathrm{Hom}(V, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, V)$$
$$T \longrightarrow \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$$

sendo $T^0 = \mathrm{I}$ o operador identidade e T^n a composta iterada n vezes de T.

Definição

Dizemos que um polinômio $p(x)$ ***anula*** *uma transformação T se $p(T) = 0$.*

Lema

Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ então existe um polinômio $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $g(T) = 0$.

Demonstração. Seja $C = \{I, T, T^2, \dots T^{n^2}\}$. Como $\dim \mathrm{Hom}(V, V) = n^2$, temos que C é um conjunto linearmente dependente, logo existem $a_i \in \mathbb{K}$ tais que

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^{n^2} = 0$$

Logo $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ é um polinômio que anula T. $\triangleleft$

Corolário

Qualquer operador linear $T : V \to V$ *sobre um corpo algebricamente fechado possui um autovetor.*

Demonstração. Como $g(T)v = 0$. Fatorando esse polinômio temos que $(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n)v = 0$. Segue que $\ker(T - \lambda_i)$ é não trivial para algum i. $\triangleleft$

O **aniquilador** de T é o conjunto de todos os polinômios que anulam T:

$$\mathrm{Ann}(T) = \{p(x) \mid p(T) = 0\}$$

$\mathrm{Ann}(T)$ é um ideal de $\mathbb{K}[x]$. O lema anterior prova que esse ideal é não trivial. Como $\mathbb{K}[x]$ é um domínio de ideais principais, temos que existe um único polinômio mônico $m(x)$ tal que:

$$\mathrm{Ann}(T) = \langle m(x) \rangle = \{a(x)m(x) \text{ com } a(x) \in \mathbb{K}[x]\}$$

Definição (Polinômio Minimal)

O gerador $m(x)$ do ideal $\operatorname{Ann}(T)$ é dito ***polinômio minimal*** *de T.*

Lema

Sejam A e B matrizes semelhantes. Então $m_A(x) = m_{\underline{B}}(x)$.

Demonstração. Se $B = PAP^{-1}$ e $p(x)$ for qualquer polinômio com $p(A) = 0$, então $p(B) = Pp(A)P^{-1} = P0P^{-1} = 0$ e vice-versa. $\triangleleft$

Definição (Polinômio Minimal)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ seja uma transformação linear. Seja B qualquer base de V e seja $A = [T]_{\underline{B}}$. O ***polinômio minimal*** *de T é o polinômio $m_T(x)$ definido por $m_T(x) = m_A(x)$.*

Comentários Finais.