Álgebra Linear Avançada

Sistema de Equações

Daniel Miranda Machado

24 de Setembro

UFABC

Sistemas de Equações

Sabemos que um sistema de m equações lineares em n variáveis é o mesmo que uma equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde A é a matriz coeficiente do sistema e $\mathbf{x}$ é o vetor de variáveis. Vamos tentar considerar sistemas de equações lineares usando funcionais lineares.

Seja $\underline{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a base padrão de $\mathbb{K}^n$, e $\underline{E}^* = (\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)$ a base dual. Então, se f é um funcional linear em $(\mathbb{K}^n)^*$, temos que f pode ser escrito como

$$f = a_1\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_n\mathbf{e}_n^*.$$

Podemos expressar $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ na base como $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + +x_n\mathbf{e}_n$, e assim

$$f(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Portanto, $\ker f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n | a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$.

Agora, suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{K}^{n*}$ sejam funcionais lineares. Então,

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n | f_i(\mathbf{x}) = 0, \text{ para todo } i\}.$$

Portanto, se $f_i = a_{i1}\mathbf{e}_1^* + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n^*$, então

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_x & = 0 \\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Provamos o seguinte teorema:

Teorema

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Defina os funcionais* $f_i = a_{i1}\mathbf{e}_1^* + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n^*$ *para* $i = 1, \ldots, m$*. Então*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i$$

Portanto, traduzimos o problema de resolver um sistema de equações lineares para um problema envolvendo funcionais lineares: queremos tentar determinar $\bigcap_j \ker f_j$.

Iremos interpretar as operações elementares sobre as linhas nesta nova linguagem. Considere a lista dos funcionais $(f_1, \ldots, f_m)$

- trocar duas linhas é o mesmo que reordenar os funcionais f_j. Ou seja,

$$(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_j, \ldots f_m) \mapsto (f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_i, \ldots, f_m)$$

- multiplicar uma linha por $\lambda \in \mathbb{K}^n$ é o mesmo que considerar o funcional linear $\lambda f \in \mathbb{K}^{n*}$. Ou seja

$$(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m) \mapsto (f_1, \ldots, \lambda f_i, \ldots, f_m)$$

- Da mesma forma, adicionar a linha i à linha j é o mesmo que adicionar f_i a f_j para obter o funcional linear $f_i + f_j$.

$$(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_j, \ldots, f_m) \mapsto (f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_j + f_i, \ldots, f_m)$$

Em resumo, executar operações elementares sobre as linhas é o mesmo que formar combinações lineares das funcionais lineares f_j.

O motivo pelo qual fazemos a redução em linha uma matriz A para uma escalonada reduzida U é porque os conjuntos de soluções de $A = 0$ e $U = 0$ são os mesmos e é mais fácil determinar soluções para a equação da matriz U.

Como obtemos U aplicando operações elementares sobre as linhas a A, isso é o mesmo que fazer cálculos em $\langle\{f_j\}\rangle \subset \mathbb{K}^{n*}$, conforme discutimos acima.

Além disso, como U está na forma escalonada reduzida, isso significa que as linhas de U são linearmente independentes (isso é fácil de ver, pela definição de forma escalonada reduzida) e porque as operações elementares sobre as linhas correspondem à formação de combinações lineares de funcionais lineares temos que os funcionais lineares que correspondem às linhas de U devem formar uma base do subespaço $\langle\{f_j\}\rangle \subset \mathbb{K}^{n*}$.

Teorema

Seja $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *. Suponha que* $A = [T]_{\underline{E},\underline{F}} = [a_{ij}]$ *é a matriz de* T *com relação às bases* $\underline{E} = (\mathbf{e}_i)$ *de* V *e* $\underline{F} = (f_j)$ *de* W*. Então,*

$$\mathrm{rank}_l\, T = \mathrm{rank}_c\, T$$

Demonstração

O $\operatorname{rank}_l T$ é igual a $\dim \langle \{f_j\} \rangle$, com $f_j = a_{i1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{in}\mathbf{e}_n^* \in V^*$

Agora, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{ann}_V \langle \{f_j\} \rangle &= \{\mathbf{v} \in V \mid \overline{\mathbf{v}}(f_j) = 0, \text{ para cada } i\} \\ &= \{\mathbf{v} \in V \mid f_j(\mathbf{v}) = 0, \text{ para cada } i\}, \end{aligned}$$

e esse último conjunto não é outro senão $\ker T$.

Assim, pelo Teorema do Núcleo-imagem, temos que $\dim V = \dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \operatorname{rank} T + \dim \operatorname{ann}_{V^*}\langle\{f_j\}\rangle = \operatorname{rank} T + (\dim V - \dim\langle\{f_j\}\rangle)$. Temos

$$\operatorname{rank} T = \dim\langle\{f_j\},\rangle$$

que é o que queríamos mostrar.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e seja U sua forma escalonada reduzida. Então, $\mathbf{v}$ satisfaz $U\mathbf{v} = 0$ se e somente se satisfaz $A\mathbf{v} = 0$.

Demonstração

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}^{n*}$ os funcionais lineares correspondentes às linhas de A e $g_1, \ldots, g_r$ os funcionais lineares correspondentes às linhas (diferentes de zero) de U (acabamos de ver que $r = \operatorname{rank} A$). Então, pelas discussões acima, sabemos que (g_j) é uma base de $W = \langle \{f_j\}_{i=1}^{m} \rangle \subset \mathbb{K}^{n*}$. Em particular, $\langle \{g_j\} \rangle = W$. Agora, temos

$$\operatorname{ann}_{\mathbb{K}^n} W = \{X \in \mathbb{K}^n | f_j(X) = 0, \text{ para cada } i\} = \{X \in \mathbb{K}^n | g_j(X) = 0, \text{ para cada } j\}.$$

O resultado segue essa igualdade de conjuntos, pois esse conjunto comum é o conjunto de soluções de $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $U\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Comentários Finais.