Álgebra Linear Avançada

Espaços Afins e Espaços Quocientes

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Espaços Afins

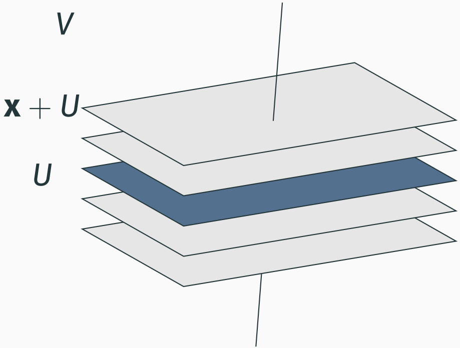
Começamos com uma generalização da noção de subespaço de um espaço vetorial: os subespaços afins. Um subespaço afim de um espaço vetorial é uma translação de um subespaço vetorial.

Definição (Subespaço Afim)

*Um subconjunto X de V é um **subespaço afim** de V paralelo ao subespaço $U \subset V$ se e somente se para algum elemento x de X,*

$$X = \mathbf{x} + U = \{\mathbf{x} + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in U\}.$$

Seja X um subespaço afim de V paralelo ao subespaço U. Então a dimensão de X é $\dim(X) \triangleq \dim(U)$.


V
$\mathbf{x} + U$
U

Proposição

Seja X um subespaço afim de V paralelo ao subespaço U de V. Sejam $\mathbf{x}_0$ um elemento de X e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$ é uma base de U. Então, qualquer elemento $\mathbf{x}$ de X pode ser escrito de maneira única como

$$\mathbf{x} = x_0 + \sum c_i \mathbf{u}_i$$

para $c_i \in \mathbb{K}$.

Definição

O conjunto de todos os subespaços afins de V será denotado $\mathrm{Afim}[V]$.

Assim, $A \in \mathrm{Afim}[V]$ se e somente se $A = \mathbf{x} + W$ para algum subespaço $W \subseteq V$ e algum $\mathbf{x} \in V$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathrm{Afim}[V]$ denote o conjunto de todos os subespaços afins de V.

a *Se $\{A_i \mid i \in \Delta\}$ for uma coleção indexada de subespaços, então $\bigcap_{i\in\Delta} A_i = \emptyset$ ou $\bigcap_{i\in\Delta} A_i \in \mathrm{Afim}[V]$.*

b *Se $A, B \in \mathrm{Afim}[V]$, $A + B \in \mathrm{Afim}[V]$.*

c *Se $A \in \mathrm{Afim}[V]$ e $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 \cdot A \in \mathrm{Afim}[V]$.*

d *Se $A \in \mathrm{Afim}[V]$ e $T \in \mathrm{Hom}(V)$ e $T(A) \in \mathrm{Afim}[V']$.*

Demonstração

Vamos demonstrar $\boxed{\text{a}}$ apenas. Suponha que $A_i = \mathbf{x}_i + W_i$ para cada $i \in \Delta$. Aqui W_i é um subespaço de V e $\mathbf{x}_i$ um vetor em V. Suponha que $\bigcap_{i\in\Delta} A_i \neq \emptyset$. Seja $\mathbf{y} \in \bigcap_{i\in\Delta} A_i$. Então, para cada $i \in \Delta, \mathbf{y} = \mathbf{x}_i + \mathbf{z}_i$ com $\mathbf{z}_i \in W_i$. Então $\mathbf{y} + W_i = \mathbf{x}_i + W_i$ e $\bigcap_{i\in\Delta} A_i = \bigcap_{i\in\Delta}(\mathbf{y} + W_i)$.

Afirmamos que $\bigcap_{i\in\Delta}(\mathbf{y} + W_i) = \mathbf{y} + (\bigcap_{i\in\Delta} W_i)$. Claramente,

$$\mathbf{y} + (\bigcap_{i\in\Delta} W_i) \subseteq \bigcap_{i\in\Delta}(\mathbf{y} + W_i),$$

Para a inclusão inversa, seja $\mathbf{x} \in \bigcap_{i\in\Delta}(\mathbf{y} + W_i)$. Então, para $i \neq j, \mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}_i = \mathbf{y} + \mathbf{z}_j$ com $\mathbf{z}_i \in W_i$ e $\mathbf{z}_j \in W_j$. Logo $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_j$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{y} + (W_i \cap W_j)$. Assim, $\bigcap_{i\in\Delta}(\mathbf{y} + W_i) \subseteq \mathbf{y} + (\bigcap_{i\in\Delta} W_i)$. Portanto, $\bigcap_{i\in\Delta}(\mathbf{y} + W_i) = \mathbf{y} + (\bigcap_{i\in\Delta} W_i)$. Como $\mathbf{y} + (\bigcap_{i\in\Delta} W_i) \in \mathrm{Afim}[V]$, terminamos a demonstração de $\boxed{\mathbf{a}}$.

A maneira mais importante pela qual surgem subespaços afins é a seguinte.

Teorema (Imagem Inversa)

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear e $w_0 \in W$ seja um elemento arbitrário de W. Se $T^{-1}(\mathbf{w}_0)$ não for vazio, então $T^{-1}(\mathbf{w}_0)$ é um subespaço afim de V paralelo a $\ker T$.

Demonstração

Escolha $\mathbf{v}_0 \in V$ com $T(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w}_0$. Se $\mathbf{v} \in T^{-1}(\mathbf{w}_0)$ for arbitrário, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ e $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0 = 0$, então $\mathbf{u} \in \ker(T)$. Por outro lado, se $\mathbf{u} \in \ker(T)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, então $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) = T(\mathbf{v}_0) + T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}_0 + 0 = \mathbf{w}_0$. Assim, vemos que

$$T^{-1}(\mathbf{w}_0) = \mathbf{v}_0 + \ker T.$$

Espaço Quociente

Seja S um subespaço de um espaço vetorial V. É fácil ver que a relação binária em V definida por

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{u} - \mathbf{v} \in S$$

é uma relação de equivalência. Quando $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$, dizemos que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são congruentes módulo S e $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$ é frequentemente escrito

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \mod S$$

Quando o subespaço em questão estiver claro, escreveremos simplesmente $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v}$.

Para ver como são as classes de equivalência, observe que

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{v}] &= \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} \equiv \mathbf{v}\} && (1)\\
&= \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in S\} && (2)\\
&= \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{s} \text{ para algum } \mathbf{s} \in S\} && (3)\\
&= \{\mathbf{v} + \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \in S\} && (4)\\
&= \mathbf{v} + S && (5)
\end{aligned}
$$

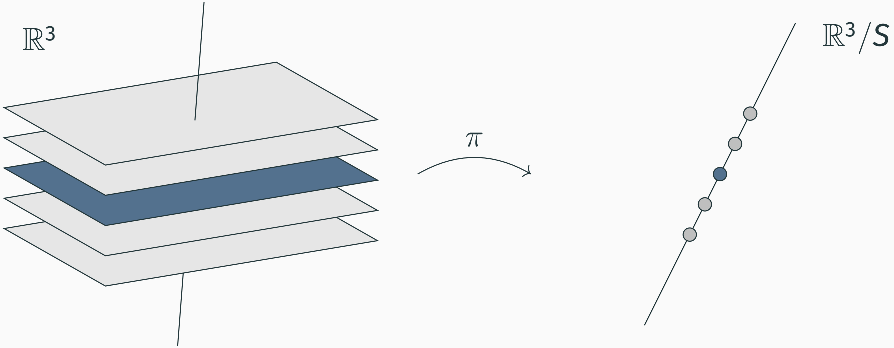
O conjunto

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{v} + S = \{\mathbf{v} + \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \in S\}$$

é denominado **classe** de S em V e $\mathbf{v}$ é denominado **representante** da classe $\mathbf{v} + S$.

Definição (Espaço Quociente)

O conjunto de todas as classes de S em V é denotado por $V/S = \{\mathbf{v} + S \mid \mathbf{v} \in V\}$ é denominado ***espaço quociente*** *de V modulo S.*



$\mathbb{R}^3$
π
$\mathbb{R}^3/S$

Podemos definir uma estrutura de espaço vetorial em V/S.

A escolha natural para essas operações de espaço vetorial é

$$(\mathbf{u} + S) + (\mathbf{v} + S) \triangleq (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + S \quad \text{e} \quad \lambda(\mathbf{u} + S) \triangleq (\lambda\mathbf{u}) + S$$

mas devemos verificar se essas operações estão bem definidas, ou seja,

- □ $\mathbf{u}_1 + S = \mathbf{u}_2 + S, \mathbf{v}_1 + S = \mathbf{v}_2 + S \Rightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + S = (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) + S$
- □ $\mathbf{u}_1 + S = \mathbf{u}_2 + S \Rightarrow r\mathbf{u}_1 + S = r\mathbf{u}_2 + S$

De maneira equivalente, a relação de equivalência $\equiv$ deve ser consistente com as operações de espaço vetorial em V, ou seja,

- □ $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_2 \Rightarrow (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) \equiv (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)$
- □ $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2 \Rightarrow \lambda\mathbf{u}_1 \equiv \lambda\mathbf{u}_2$

Esse cenário é recorrente na álgebra. Uma relação de equivalência em uma estrutura algébrica, como um grupo, anel, módulo ou espaço vetorial é denominada relação de congruência se preservar as operações algébricas.

Essas condições decorrem facilmente do fato de que S é um subespaço, pois se $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_2$, então $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in S,\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in S \Rightarrow \lambda_1(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \lambda_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in S$ $\Rightarrow (\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_1) - (\lambda_1\mathbf{u}_2 + \lambda_2\mathbf{v}_2) \in S \Rightarrow \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_1 \equiv \lambda_1\mathbf{u}_2 + \lambda_2\mathbf{v}_2$ que verifica as duas condições ao mesmo tempo. Deixamos ao leitor verificar se V/S é realmente um espaço vetorial acima de $\mathbb{K}$ nessas operações bem definidas.

Teorema

Seja S um subespaço de V. A relação binária $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \iff \mathbf{u} - \mathbf{v} \in S$ é uma relação de equivalência em V, cujas classes de equivalência são os espaços afins paralelos a S $\mathbf{v} + S = \{\mathbf{v} + \mathbf{s} \,|\, \mathbf{s} \in S\}$ de S em V.

O conjunto V/S de todos as classes de S em V, chamado ***espaço quociente*** *de V modulo S, é um espaço vetorial com operações*

$$\lambda(\mathbf{u} + S) = \lambda\mathbf{u} + S \tag{6}$$

$$(\mathbf{u} + S) + (\mathbf{v} + S) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + S \tag{7}$$

O vetor zero em V/S é a classe $\mathbf{0} + S = S$.

Definição (Projeção Canônica)

Se S é um subespaço de V, podemos definir a aplicação $\pi_S : V \to V/S$ enviando cada vetor a classe lateral associada a ele: $\pi_S(v) = v + S$ Esse mapa é denominado ***projeção canônica*** *ou* ***projeção natural*** *de V para V/S.*

Quando não houver risco de confusão escreveremos simplesmente π

Proposição

A projeção canônica $\pi_S : V \to V/S$ *definida por*

$$\pi_S(v) = v + S$$

é uma transformação linear sobrejetiva com $\ker(\pi_S) = S$.

Demonstração

A projeção canônica é linear, pois

$$\pi(\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}) = (\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}) + S = \lambda_1(\mathbf{x} + S) + \lambda_2(\mathbf{y} + S) = \lambda_1\pi\mathbf{x} + \lambda_1\pi\mathbf{y}$$

Teorema (Teorema da correspondência)

Seja S um subespaço de V. Então a função que atribui a cada subespaço $S \subseteq T \subseteq V$ o subespaço T/S de V/S é uma correspondência biunívoca que preserva a ordem entre entre o conjunto de todos os subespaços de V contendo S e o conjunto de todos os subespaços de V/S.

Provaremos apenas que a correspondência é sobrejetiva . Seja $X = \{u + S | u \in U\}$ seja um espaço no espaço de V/S e seja T a união de todos as classes em X:

$$T = \bigcup_{u \in U} (u + S)$$

Mostraremos que $S \leq T \leq V$ e que $T/S = X$. Se $x, y \in T$, $x + S$ e $y + S$ estão em X e, como $X \leq V/S$, temos

$$rx + S,\ (x + y) + S \in X$$

o que implica que $rx, x + y \in T$. Portanto, T é um subespaço de V contendo S. Além disso, se $t + S \in T/S$, então $t \in T$ e, portanto, $t + S \in X$. Por outro lado, se $u + S \in X$, $u \in T$ e, portanto, $u + S \in T/S$. Assim, $X = T/S$.$\square$

Comentários Finais.