Álgebra Linear Avançada

Mudança de Corpo

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Mudança de Corpos

Lembrando que um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é um conjunto não vazio, com duas funções:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} + \mathbf{y} : V \times V \to V$
- $(\lambda_1, \mathbf{x}) \to \lambda_1 \mathbf{x} : \mathbb{K} \times V \to V$.

Então se V for um espaço complexo o produto por escalar é uma função $\mathbb{C} \times V \to V$ e podemos considerar suas restrição $\mathbb{R} \times V \to V$. Essa observação ingênua nos permite construir um espaço vetorial real associado a cada espaço vetorial complexo.

Definição (Descomplexificação)

Dado V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Então V é um corpo vetorial sobre $\mathbb{R}$ se restringirmos a possibilidade de multiplicar os vetores em V apenas por escalares em $\mathbb{R}$. Denominaremos esse espaço de ***descomplexificação*** *de V e denotaremos por $V_{\mathbb{R}}$.*

Exemplo

Seja $\mathbb{C}$ o espaço complexo unidimensional. Se considerarmos a sua descomplexificação $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ obtemos um espaço vetorial real bidimensional de base $\{1, i\}$.

Podemos fazer algo similar com as transformações lineares:

Definição (Descomplexificação de uma Transformação)

Sejam V e W espaços lineares sobre $\mathbb{C}$, e $T : V \to W$ uma transformação linear. Podemos considerar T como uma transformação linear de $V_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$. Essa transformação é denominada ***descomplexificação*** *de T e é denotada por $T^{\mathbb{R}}$.*

Teorema

a Se $\underline{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots \ \mathbf{e}_n\}$ é a base de um espaço V sobre $\mathbb{C}$. Então

$$\underline{E}_{\mathbb{R}} \triangleq \{\mathbf{e}_1, \ \ldots, \mathbf{e}_n, \ i\mathbf{e}_1, \ \ldots, \ i\mathbf{e}_n\}$$

é uma base de $V_{\mathbb{R}}$ sobre $\mathbb{R}$. Em particular, $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V$.

b Se $A = B + iC$ é a matriz da transformação linear $T : V \to W$ nas bases $\underline{E} = \{\mathbf{e}_1, \ \ldots \ \mathbf{e}_m\}$ e $\underline{F} = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, sobre $\mathbb{C}$, onde B e C são matrizes reais. Então a matriz da transformação linear $T^{\mathbb{R}}$: $V_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ nas bases $\underline{E}_{\mathbb{R}}$ e $\underline{F}_{\mathbb{R}}$ é dada por

$$[T^{\mathbb{R}}]_{\underline{E}_{\mathbb{R}}, \underline{F}_{\mathbb{R}}} = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

Demonstração

a Para qualquer elemento $\mathbf{x} \in V$, temos

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k + ic_k)\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^{n} c_k i\mathbf{e}_k$$

onde b_k, c_k são as partes reais e imaginárias de a_k. Portanto, $\{\mathbf{e}_k,\ i\mathbf{e}_k\}$ gera $V_{\mathbb{R}}$.

Se $\sum_{k=1}^{m} b_k \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^{m} c_k (i\mathbf{e}_k) = 0$, em que $b_k, c_k \in \mathbb{R}$ então $b_k + ic_k = 0$ em virtude da independência linear de $\{\mathbf{e}_1, \ \ldots \ \mathbf{e}_k\}$ sobre $\mathbb{C}$, e consequentemente $b_k = c_k = 0$ para todos os k.

b A definição de A implica que

$$T(\mathbf{e}_1,\ \dots\ \mathbf{e}_m) = (B + iC)(\mathbf{f}_1,\ \dots\ \mathbf{f}_n)$$

de onde, por causa da linearidade de T sobre $\mathbb{C}$ temos

$$T(i\mathbf{e}_1,\ \dots\ i\mathbf{e}_m) = (-C + iB)(\mathbf{f}_1,\ \dots,\ \mathbf{f}_n)\ .$$

Dessa forma a matriz de T é

$$\begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix},$$

o que completa a prova.

Corolário

Seja $f : V \to V$ *um operador linear sobre um espaço complexo finito dimensional* V*. Então* $\det T^{\mathbb{R}} = |\det T|^2$.

Deve ser bastante óbvio agora como estender as definições anteriores. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $\mathbb{F}$ um subcorpo e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Restringindo a multiplicação a elementos de $\mathbb{F}$, obtemos o espaço vetorial $V_{\mathbb{F}}$ sobre $\mathbb{F}$. Analogamente, a transformação linear $T : V \to W$ sobre $\mathbb{K}$ se transforma na transformação linear $T^{\mathbb{F}} : V_{\mathbb{F}} \to W_{\mathbb{F}}$. O nome para essas operações é restrição do corpo de escalares $\mathbb{K}$ para $\mathbb{F}$.

O próprio corpo $\mathbb{K}$ também pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. E se for de dimensão finita, as dimensões $\dim_{\mathbb{K}} V$ e $\dim_{\mathbb{F}} V_{\mathbb{F}}$ serão relacionadas pela fórmula

$$\dim_{\mathbb{F}} V_{\mathbb{F}} = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \cdot \dim_{\mathbb{K}} V.$$

Para a prova, basta verificar que $\{\mathbf{e}_1,\ \ldots\ \mathbf{e}_n\}$ é uma base em V sobre $\mathbb{K}$ e $\{\mathbf{k}_1,\ \ldots,\ \mathbf{k}_m\}$ é base de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{F}$, então os vetores $\{\mathbf{k}_1\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{k}_1\mathbf{e}_n, \ldots, \mathbf{k}_m\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{k}_m\mathbf{e}_n\}$ formam uma base de $V_{\mathbb{F}}$ sobre $\mathbb{F}$.

Complexificação.

Dado um espaço vetorial real V introduzimos uma **estrutura complexa** J, definida pela fórmula

$$\mathrm{J}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = (-\mathbf{y}, \mathbf{x})\ .$$

na soma direta externa $V \oplus V$. Observamos que $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$.

Definição

Seja $(V \oplus V, \ \ J)$ *um espaço vetorial com estrutura complexa. Então* V *pode ser munido de uma operação de multiplicação por números complexos de acordo com o formula*

$$(a+bi)\mathbf{x} \triangleq a(\mathbf{x}) + b \ \ J(\mathbf{x}) \ .$$

Teorema

O espaço $V \oplus V$ munido da adição usual de vetores e munido da operação de multiplicação por números complexos apresentada na Definição 5 é em um espaço vetorial complexo $V^{\mathbb{C}}$, para o qual $V^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} = V \oplus V$.

Demonstração. Ambos os axiomas da distributividade são facilmente verificados a partir da linearidade de J e das fórmulas a adição de números complexos. Verificamos o axioma da associatividade para multiplicação:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)[(c+di)\mathbf{x}] &= (a+bi)[c\mathbf{x}+d\ \mathrm{J}(\mathbf{x})] && (1)\\
&= a[c\mathbf{x}+d\ \mathrm{J}(\mathbf{x})] + +b\ \mathrm{J}[c\mathbf{x}+d\ \mathrm{J}(\mathbf{x})] && (2)\\
&= ac\mathbf{x}+ad\ \mathrm{J}(\mathbf{x})+bc\ \mathrm{J}(\mathbf{x})-bd\mathbf{x} && (3)\\
&= (ac-bd)\mathbf{x}+(ad+bc)\ \mathrm{J}(\mathbf{x}) && (4)\\
&= [ac-bd+(ad+bc)i]\mathbf{x} && (5)\\
&= ((a+bi)(c+di)]\mathbf{x}. && (6)
\end{aligned}
$$

◁

Definição (Complexificação)

*O espaço $V^{\mathbb{C}}$ é dito **complexificação** do espaço V.*

Ressaltamos que $V^{\mathbb{C}} = V \oplus V$ e que essa decomposição como soma direta ocorre sobre $\mathbb{R}$, mas não sobre $\mathbb{C}$.

Identificando V com o subconjunto de vetores do formato $(\mathbf{v}, \mathbf{0})$ em $V^{\mathbb{C}}$ e usando o fato de que $i(\mathbf{v},\ 0) = J(\mathbf{v}, 0) = (0,\ \mathbf{v})$, podemos escrever qualquer vetor de $V^{\mathbb{C}}$ no formato

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, 0) + (0, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, 0) + i(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{x} + i\mathbf{y}.$$

Dessa forma qualquer base de V sobre $\mathbb{R}$ será uma base de $V^{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$, de modo que $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$.

Definição

Seja $T : V \to M$ um transformação linear de espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Definimos a transformação $T^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ denominada ***complexificação da transformação*** *T como*

$$T(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = (T(\mathbf{x}),\ T(\mathbf{y}))$$

A transformação $T^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to W^{\mathbb{C}}$ é linear sobre $\mathbb{R}$ e comuta com J, pois

$$T\,\mathrm{J}(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = T(-\mathbf{y},\ \mathbf{x}) = (-T(\mathbf{y}),\ T(\mathbf{x})) = \mathrm{J}\,T(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ .$$

Portanto, é linear sobre $\mathbb{C}$.

Proposição

Sejam $\underline{v}$ *e* $\underline{w}$ *bases de* V *e* W *respectivamente. Usando a identificação* $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}, \mathbf{0})$ *podemos ver* $\underline{v}$ *e* $\underline{w}$ *como bases de* $V^{\mathbb{C}}$ *e* $W^{\mathbb{C}}$*, respectivamente. Temos que que a matriz de* T *em relação as bases* $\underline{v}$ *e* $\underline{w}$ *é igual à matriz de* $T^{\mathbb{C}}$ *nessas mesmas bases:*

$$[T]_{\underline{v},\underline{w}} = [T^{\mathbb{C}}]_{\underline{v},\underline{w}}$$

Definição

Uma conjugação em um espaço vetorial complexo V *é uma função* $c : V \to V$ *tal que*

- **a** $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}) + c(\mathbf{v})$ *para todos os* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,
- **b** $c(z\mathbf{v}) = zc(\mathbf{v})$ *para todos os* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$ *e* $v \in V$,
- **c** $c(c(v)) = v$ *para todos os* $v \in V$.

Uma conjugação é linear sobre $\mathbb{R}$, *mas não é linear sobre* $\mathbb{C}$:

$$c(i\mathbf{v}) = -ic(\mathbf{v}).$$

Exemplo

Em $\mathbb{C}^n$, a função $c(z_1, \ldots, z_n) = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, onde cada coordenada é substituída por seu complexo conjugado, é uma conjugação

Exemplo

Em $V^{\mathbb{C}} = V \oplus V$ a função que mapeia $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é uma conjugação.

Comentários Finais.