Álgebra Linear Avançada

Representação Matricial dos Homomorfismos

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Representação Matricial dos Homomorfismos

Teorema

Suponha que V e W sejam espaços vetoriais tais que $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Se $\underline{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ for uma base de V e $\underline{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ for uma base de W então o par $(\underline{X}, \underline{Y})$ determina uma transformação linear

$$[\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

definida como $T \mapsto [T]_{\underline{X},\underline{Y}}$

onde $[T]_{\underline{X},\underline{Y}} = \left([T(\mathbf{x}_1)]_{\underline{Y}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [T(\mathbf{x}_n)]_{\underline{Y}}\right)$ é a matriz cuja i-ésima coluna é o vetor $[T(\mathbf{x}_i)]_{\underline{Y}}$ Além disso, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(\,\cdot\,)_{\underline{X}}"'] & W \arrow[d, "(\,\cdot\,)_{\underline{Y}}"] \\ \mathbb{K}_n \arrow[r, "{[T]_{\underline{X},\underline{Y}}}"] & \mathbb{K}_n \end{tikzcd}$$

Demonstração

Linear Se $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ então

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2]_{\underline{X},\underline{Y}} &= \left([(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\mathbf{x}_1)]_{\underline{Y}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(\mathbf{x}_n)]_{\underline{Y}} \right) \\
&= \left(\lambda_1 [T_1(\mathbf{x}_1)]_{\underline{Y}} + \lambda_2 [T_2(\mathbf{x}_1)]_{\underline{Y}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \lambda_1 [T_1(\mathbf{x}_n)]_{\underline{Y}} + \lambda_2 [T_2(\mathbf{x}_n)]_{\underline{Y}} \right) \\
&= \lambda_1 \Big([T_1(\mathbf{x}_1)]_{\underline{Y}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [T_1(\mathbf{x}_n)]_{\underline{Y}}) + \lambda_2 ([T_2(\mathbf{x}_1)]_{\underline{\mathbf{y}}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [T_2(\mathbf{x}_n)]_{\underline{Y}} \Big) \\
&= \lambda_1 \, [T_1]_{\underline{X},\underline{Y}} + \lambda_2 \, [T_2]_{\underline{X},\underline{Y}}
\end{aligned}$$

Portanto, $[\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}}$ é de fato uma transformação linear de $\mathrm{Hom}(V, W)$ para $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Isomorfismo

Suponha que $T \in \ker [\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}}$ Então $[T]_{\underline{X},\underline{Y}} = 0$. Em particular, $[T\mathbf{x}_i)]_{\underline{Y}} = 0$ para todos os $i = 1, \ldots, n$.Logo $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$. Assim, $T = 0$, e concluímos que $[\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}}$ é uma transformação linear injetiva.

A transformação linear $[\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}}$ também é sobrejetiva. Para ver isso, seja $A = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Seja $\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ji}\mathbf{y}_j$ para $i = 1, \ldots, n$. Então $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\} \subseteq W$ e $[\mathbf{z}_i]_{\mathbf{y}} = (x_{li}, \ldots, x_{mi})^t = \mathrm{Col}_i(A)$ para todos os $i = 1, \ldots, n$.

Temos que existe uma única $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tal que $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{z}_i$ por $i = 1, \ldots, n$. Assim, $[T]_{\underline{X},\underline{Y}} = A$ e $[\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}}$ é sobrejetiva.

Comuta

Precisamos apenas argumentar que o diagrama é comutativo. Para qualquer $\mathbf{x}_i \in \underline{X}$, temos

$$
\begin{aligned}
([\,\cdot\,]_{\underline{Y}} T)(\mathbf{x}_i) &= [T(\mathbf{x}_i)]_{\underline{Y}} \\
&= \mathrm{Col}_i([T]_{\underline{X},\underline{Y}}) \\
&= [T]_{\underline{X},\underline{Y}}\,(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t \\
&= [T]_{\underline{X},\underline{Y}}\,[\mathbf{x}_i]_{\underline{X}}.
\end{aligned}
$$

Definição (Matriz da Transformação Linear)

*A matriz $[T]_{\underline{X},\underline{Y}}$ é denominada a **matriz da transformação linear** T em relação às bases $\underline{X}$ e $\mathbf{y}$.*

Como as setas verticais no diagrama e $[\,\cdot\,]_{\underline{X},\underline{Y}}$ são isomorfismos, V, W, $\mathrm{Hom}(V, W)$ e T geralmente são identificados com $\mathbb{K}_n, \mathbb{K}_m, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $A = [T]_{\underline{X},\underline{Y}}$.

Assim, a distinção entre uma transformação linear e uma matriz é frequentemente obscurecida na literatura.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}_3[x]$ o espaço de todos os polinômios de grau menor igual a 3. O operador de diferenciação formal D mapeia V em V, pois a derivação diminui os graus dos polinômios. Seja $\underline{\mathrm{B}} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, x, x^2, x^3)$ a base ordenada canônica de V. Então

$$
\begin{aligned}
Dp_1 &= 0, & Dp_1 &= 0p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 0p_4 \\
Dp_2 &= 1, & Dp_2 &= 1p_1 + 0p_2 + 0p_l + 0p_4 \\
Dp_3 &= 2x, & Dp_3 &= 0p_1 + 2p_2 + 0p_3 + 0p_4 \\
Dp_4 &= 3x^2, & Dp_4 &= 0p_1 + 0p_2 + 3p_3 + 0p_4
\end{aligned}
$$

e logo a matriz de D na base ordenada $\underline{\mathrm{B}}$ é

$$[D]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Corolário

Seja $\underline{v}$, $\underline{w}$ sejam bases para V e W, respectivamente. Seja T, S in $Hom(V, W)$. Então

1. $[cT]_{\underline{v},\,\underline{w}} = c[T]_{\underline{v},\,\underline{w}}$
2. $[T + S]_{\underline{v},\,\underline{w}} = [T]_{\underline{v},\,\underline{w}} + [S]_{\underline{v},\,\underline{w}}$.

Sejam A uma matriz $m \times n$ com colunas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ e e $c = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ um vetor em $\mathbb{K}_n$. Então, o produto de A por $\mathbf{x}$ é

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Uma consequência imediata dessa representação é

Teorema

Seja V um espaço vetorial dimensional n com base $\underline{v}$, W um espaço vetorial dimensional com base $\underline{w}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então, para um vetor arbitrário $v \in V$

$$[T(v)]_{\underline{v}\underline{w}} = [T]_{\underline{v},\ \underline{w}}\ [v]_{\underline{v}}.$$

Teorema

Seja V um espaço vetorial dimensional n com base $\underline{v}$, W um espaço vetorial dimensional com base $\underline{w}$ e X um espaço vetorial dimensional p com base $\underline{x}$. Seja $T : V \to W$ e $S : W \to X$ sejam transformações lineares. Então

$$[S \circ T]_{\underline{v},\, \underline{x}} = [S]_{\underline{w},\, \underline{x}}[T]_{\underline{v}\ \underline{w}}$$

Para esse fim, calculamos o vetor de coordenadas de $(S \circ T)(\mathbf{v}_j)$ em relação à base $\underline{x}$. Vamos definir $[T]_{\underline{v},\ \underline{w}} = A$ e $[S]_{\underline{w},\ \underline{x}} = B$. Pela definição de composição

$$(S \circ T)(v_j) = S(T(v_j))\ .$$

Tomando vetores de coordenadas, obtemos

$$[(S \circ T)(\mathbf{v}_j)]_{\underline{x}} = [S(T(\mathbf{v}_j))]_{\underline{x}}.$$

Segue que

$$[S(T(\mathbf{v}_j)]_{B\underline{x}} = B[T(v_j)]_{B\underline{w}}.$$

Pela definição de $[T]_{\underline{v},\ \underline{w}}$, segue-se que

$$[T(v_j)]_{B\underline{w}} = a_j,$$

e, portanto, a j-ésima coluna de $[S \circ T](\underline{v},\ \underline{x})$ é Ba_j.

Essa é a motivação para o produto de matrizes!!!

A representação matricial $[T]_{\underline{X},\underline{Y}}$ de T depende, é claro, das bases específicas $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ escolhidas. É fácil acompanhar como $[T]_{\underline{X},\underline{Y}}$ muda com $\underline{X}$ e $\underline{Y}$

Teorema (Mudança de Base)

Seja V e W os espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ das dimensões n e m, respectivamente. Suponha que $\underline{X}$ e $\underline{X}'$ sejam duas bases de V e $\underline{Y}$ e $\underline{Y}'$ duas bases de W. Então, para cada $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, temos

$$[T]_{\underline{X}',\underline{Y}'} = \mathrm{M}_{\underline{YY}'} [T]_{\underline{X},\underline{Y}} \mathrm{M}_{\underline{XX}'}^{-1} \tag{1}$$

Já observamos que as matrizes de mudança de bases são invertíveis e, consequentemente, todos os termos da equação 1 fazem sentido.

Para ver que 1 é de fato verdadeira, considere o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}_n \arrow[rrr, "{[T]_{\underline{X},\underline{Y}}}"] \arrow[dd, bend right, "M_{\underline{XX'}}"'] \arrow[dd, phantom, "\boxed{1}"] & \arrow[dr, phantom, "\boxed{3}"] & & \mathbb{K}_m \arrow[dd, bend left, "M_{\underline{YY'}}"] \arrow[dd, phantom, "\boxed{2}"] \\
& V \arrow[ul, "{[\,\cdot\,]_{\underline{X}}}"'] \arrow[dl, "{[\,\cdot\,]_{\underline{X'}}}"] \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{4}"] & W \arrow[ur, "{[\,\cdot\,]_{\underline{Y}}}"'] \arrow[dr, "{[\,\cdot\,]_{\underline{Y'}}}"'] & \\
\mathbb{K}_n \arrow[rrr, "{[T]_{\underline{X'},\underline{Y'}}}"'] & & & \mathbb{K}_m
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

O diagrama 2 é composto de nossas partes, que rotulamos como $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$.

Logo os diagramas $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ são comutativos.

Por resultados anteriores, os diagramas $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ são comutativos. Segue-se que todo o diagrama 2 é comutativo. Em particular, $\mathrm{M}_{\underline{YY'}}\,[T]_{\underline{X},\underline{Y}} - = [T]_{\underline{X'},\underline{Y'}}\,\mathrm{M}_{\underline{XX}}$ Resolvendo esta equação para $[T]_{\underline{X'},\underline{Y'}}$ temos 1.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}_3[x]$ o espaço de todos os polinômios de grau menor igual a 3 e D o operador de diferenciação.

Sejam $\underline{\text{B}} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, x, x^2, x^3)$ e
$\underline{\text{C}} = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3)$ duas bases ordenadas de D.
Então

$$
\begin{aligned}
q_1 &= p_1 \\
q_2 &= -1p_1 + p_2 \\
q_3 &= p_1 - 2p_2 + p_3 \\
q_4 &= -1p_1 + 3p_2 - 3p_3 + p_4.
\end{aligned}
$$

Por um vídeo anterior temos que as matrizes de mudança de base são

$$M_{\underline{CB}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\underline{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$[D]_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de D na base ordenada $\underline{\mathrm{C}}$ será

$$
\begin{aligned}
[D]_{\underline{\mathrm{C}}} &= \mathrm{M}_{\underline{\mathrm{BC}}}[D]_{\underline{\mathrm{B}}}\,\mathrm{M}_{\underline{\mathrm{CB}}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo D é representado pela mesma matriz nas bases ordenadas $\underline{\mathrm{B}}$ e $\underline{\mathrm{C}}$.

É claro que poderíamos ter visto isso diretamente, pois

$$
\begin{aligned}
Dg_1 &= 0 \\
Dg_2 &= g_1 \\
Dg_3 &= 2g_2 \\
Dg_4 &= 3g_3.
\end{aligned}
$$

Comentários Finais.