Álgebra Linear Avançada

Conjuntos

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Operações com famílias de conjuntos

Dado uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos, i.e. $\mathcal{F} = \{A_\imath\}_{\imath \in J}$ onde J é um qualquer conjunto de índices e cada $A_\imath$ é um conjunto.

Exemplo

$$A_i = (0, i] \subset \mathbb{R}$$

com $i \in \mathbb{N}$

Exemplo

$$B_x = (x, x^2] \subset \mathbb{R}$$

com $x \in \mathbb{R}, x > 2$

A **união** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *ao menos um* dos conjuntos de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\bigcup_{\imath \in J} A_\imath = \{x \mid x \in A_\jmath \text{ para algum } \jmath \in J\}$$

A **intersecção** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *todos* os conjuntos de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\bigcap_{\imath \in J} A_\imath = \{x \mid x \in A_\jmath \text{ para todo } \jmath \in J\}$$

Dentre as propriedades mais importantes, destacamos as seguintes: dada uma família $\mathcal{F} = \{A_\imath\}_{\imath \in J}$ de conjuntos e dado um conjunto qualquer B, tem-se:

$$B \cap \left(\bigcup_{\imath \in J} A_\imath \right) = \bigcup_{\imath \in J} (B \cap A_\imath)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{\imath \in J} A_\imath \right) = \bigcap_{\imath \in J} (B \cup A_\imath)$$

Além disso, se $\mathbb{U}$ é um conjunto que contém todos os conjuntos $A_\imath$, então, tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, tem-se:

$$(\bigcup_{\imath \in J} A_\imath)^{\complement} = \bigcap_{\imath \in J} A_\imath^{\complement}$$

$$(\bigcap_{\imath \in J} A_\imath)^{\complement} = \bigcup_{\imath \in J} A_\imath^{\complement}$$

Utilizaremos a seguinte convenção:

$$\bigcup_{A\in\emptyset} A = \emptyset$$

$$\bigcap_{A\in\emptyset} A = X.$$

Produto Cartesiano

Nosso propósito, agora, é contemplar famílias quaisquer de conjuntos, eventualmente infinitas. Para tanto, não é difícil perceber que a descrição acima não é adequada. Para chegar a um outro modo de tratar o produto cartesiano, pode ser útil revermos, sob outro olhar, o produto cartesiano que nos é já conhecido (vamos considerar o caso mais simples, com somente dois conjuntos). Dados dois conjuntos não vazios A_1 e A_2 (o uso de índices aqui é proposital), podemos identificar um par ordenado (x_1, x_2) do produto cartesiano $A_1 \times A_2$ com a função $f : \{1, 2\} \to (A_1 \cup A_2)$ dada por

$$f(1) = x_1 \quad \text{e} \quad f(2) = x_2$$

Pode parecer um modo exageradamente complicado para descrever um par ordenado e, se fosse esse o único objetivo dessa descrição, seria realmente algo despropositado. Mas essa linguagem apenas traduz a ideia de que um par ordenado nada mais é do que uma particular escolha, simultânea, de um elemento de um conjunto e um de outro. E cada função f como aquela acima descreve exatamente uma particular escolha desse tipo.

A vantagem dessa linguagem, porém, está no fato de permitir que se defina o produto cartesiano para uma família qualquer de conjuntos. De fato, seja dada uma família de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{A_\imath\}_{\imath \in J}$$

onde J é um qualquer conjunto de índices. O **produto cartesiano** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções

$$x : J \to \bigcup_{\imath \in J} A_\imath$$

tais que $x(\jmath) \in A_\jmath$ para todo $\jmath \in J$. Em símbolos:

$$\prod_{\imath \in J} A_\imath = \{x : J \to \bigcup_{\imath \in J} A_\imath \,|\, x(\jmath) \in A_\jmath,\ \forall\ \jmath \in J\}.$$

Escreveremos x_i em lugar de $x(i)$ para todo $x \in \prod_{i \in I}$ e $i \in I$. Para cada $j \in I$ a projeção π_j é definida por

$$\pi_j : x \in \prod_{i \in I} X_i \to x_j \in X_j.$$

Cada $x \in \prod_{i \in I} X_i$ é usualmente denotado por $(x_i)_{i \in I}$.

Mesmo que todo X_i seja não vazio, não é óbvio que o produto $\prod_{i \in I} X_i$ seja não vazio. Isto é consequência do axioma seguinte.

Axioma da Escolha

Axioma da Escolha

Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios. Então o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ é não vazio.