Álgebra Linear Avançada

Coordenadas

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

UFABC

Coordenadas

Suponha que V seja um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$.

Definição (Base Ordenada)

Uma ***base ordenada*** *para V é uma n-tupla ordenada $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ de vetores para os quais o conjunto $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base para V.*

Se $\underline{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ for uma base ordenada para V, então para cada $\mathbf{y} \in V$ haverá uma única n-tupla $(y_1, \ldots, y_n)$ de escalares para os quais

$$\in \mathbb{K}$$

$$\mathbf{y} = y_1 \underline{\mathbf{x}_1} + \cdots + y_n \underline{\mathbf{x}_n}$$

Assim, se $\underline{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ é uma base ordenada de V, temos uma função natural $[\,\cdot\,]_{\underline{x}} : V \to \mathbb{K}_n$, denominada mapa de coordenadas, definida da seguinte forma.

$(\ )_x$

$$y \Rightarrow (y_1, \ldots, y_n)$$

$$y \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definição (Coordenadas de um vetor)

Se $\underline{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ é uma base de V, então definimos as ***coordenadas*** *do vetor $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{x}_i$ na base $\underline{x}$ como*

$$[\mathbf{y}]_{\underline{x}} \triangleq (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{K}_n$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Como $\underline{x}$ é uma base de V, a representação de um determinado vetor $\mathbf{y}$ como uma combinação linear de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ é única e assim temos que a função está bem definida.

A função $[\,\cdot\,]_{\underline{x}} : V \to \mathbb{K}_n$ é uma bijetiva e preserva a adição de vetores e a multiplicação escalar. Consequentemente, $[\lambda_1\mathbf{y} + \lambda_2\mathbf{z}]_{\underline{x}} = \lambda_1[\mathbf{y}]_{\underline{x}} + \lambda_2[\mathbf{z}]_{\underline{x}}$ para todos os $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$. Como veremos em breve $[\,\cdot\,]_{\underline{x}}$ é um exemplo de transformação linear.

Definição (Componentes)

O vetor coluna $[\mathbf{y}]_{\underline{x}}$ costuma ser denominado ***componentes*** *de $\mathbf{y}$ na base $\underline{x}$.*

Exemplo

Seja $V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ e considere os vetores

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

É fácil ver que $\underline{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ é uma base ordenada para $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Em particular qualquer matriz $A = (a_{ij})$ pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}\mathbf{a}_1 + \frac{a_{12} - a_{21}}{2}\mathbf{a}_3 + \frac{a_{11} + a_{22}}{2}\mathbf{a}_3 + \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\mathbf{a}_4$$

E logo

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]_{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \end{pmatrix}$$

Suponha que $\underline{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ e $\underline{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ são duas bases de V. Há um relação simples entre as componentes de um determinado vetor $\mathbf{z}$ nas $\underline{X}$ e $\underline{Y}$. Para entender essa relação definimos

Definição (Matriz Mudança de Base)

A ***matriz mudança de base*** *de $\underline{Y}$ para $\underline{X}$, denotada por $\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}$, é a matriz $n \times n$ cujas colunas são definidas pela seguinte equação:*

$$\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}} \triangleq \left([\mathbf{y}_1]_{\underline{X}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\mathbf{y}_n]_{\underline{X}} \right)$$

Na equação 4, a i-ésima coluna de $M_{\underline{Y} \to \underline{X}}$ é a matriz $n \times 1$ $[\mathbf{y}_i]_{\underline{X}}$.

A multiplicação por $M_{\underline{Y} \to \underline{X}}$ induz uma aplicação de $\mathbb{K}_n$ a $\mathbb{K}_n$ que conecta as componentes nas bases $\underline{X}$ e $\underline{Y}$.

Teorema (Mudança de Base)

$$\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}[\mathbf{z}]_{\underline{Y}} = [\mathbf{z}]_{\underline{X}} \text{ } \textit{para todos os } \mathbf{z} \in V.$$

Demonstração. Vamos denotar a i-ésima coluna de qualquer matriz M por $\mathrm{Col}_i(M)$. Então, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos

i-ésima

$$\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}[\mathbf{y}_i]_{\underline{Y}} = \mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^t = \mathrm{Col}_i(\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}) = [\mathbf{y}_i]_{\underline{X}}.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para $\mathbf{y} \in \underline{Y}$.

Agora, já observamos que $[\,\cdot\,]_{\underline{Y}}$ e $[\,\cdot\,]_{\underline{X}}$ preserva a adição de vetor e multiplicação por escalar. O mesmo acontece com a multiplicação por $\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}$ como uma aplicação em $\mathbb{K}_n$. Como qualquer $\mathbf{y} \in V$ é uma combinação linear dos vetores em $\underline{Y}$, concluímos que $\mathrm{M}_{\underline{Y}\to\underline{X}}[\mathbf{z}]_{\underline{Y}} = [\mathbf{z}]_{\underline{X}}$ para cada $\mathbf{y} \in V$. $\triangleleft$

Podemos representar as afirmações do Teorema 5 em termos do seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "{[\,\cdot\,]_{\underline{Y}}}"'] \arrow[dr, "{[\,\cdot\,]_{\underline{X}}}"] & \\
\mathbb{K}_n \arrow[rr, "M_{\underline{Y}\to\underline{X}}"'] & & \mathbb{K}_n
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

teorema da Mudança de Base

Por um diagrama, queremos dizer uma coleção de espaços vetoriais e aplicações entre esses espaços. As aplicações são representadas como setas. Dizemos que um diagrama é comutativo se duas sequências de aplicações (ou seja, composições de funções no diagrama) que se originam no mesmo espaço e terminam no mesmo espaço forem iguais. Portanto, o diagrama 1 é comutativo se, e somente se, os dois caminhos de V para $\mathbb{K}_n$, são o mesmo mapa. É exatamente isso que o Teorema 5 diz.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}_3[x]$ o espaço de todos os polinômios de grau menor igual a 3. Sejam $\underline{B} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, x, x^2, x^3)$ e $\underline{C} = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3)$ duas bases ordenadas de D. Então

$$\begin{cases} q_1 = p_1 \\ q_2 = -1p_1 + p_2 \\ q_3 = p_1 - 2p_2 + p_3 \\ q_4 = -1p_1 + 3p_2 - 3p_3 + p_4. \end{cases}$$

(1, 0, 0, 0)

(-1, 1, 0, 0)

(1, -2, 1, 0

(-1, 3, -3, 1)

Então a matriz mudança de base é dada por

$$M_{\underline{C}\to\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

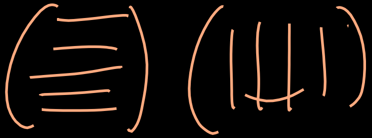
e sua inversa é

$$M_{\underline{B}\to\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Espaços Linha e Coluna

Seja $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. As linhas de A geram um subespaço de $\mathbb{K}^n$ conhecido como espaço de linhas de A e denotado $\mathrm{EspLin}(A)$ enquanto as colunas de A geram um subespaço de $\mathbb{K}^m$ conhecido como espaço de colunas de A e denotado por $\mathrm{EspCol}(A)$.

As dimensões desses espaços são denominadas posto por linha e posto por coluna, respectivamente. Denotamos o posto por linha por $\mathrm{rank}_l(A)$ e o posto por coluna por $\mathrm{rank}_c(A)$.



Demonstraremos que posto por linha de uma matriz é igual ao posto por coluna, apesar de se $m \neq n$, o espaço da linha e o espaço da coluna não estarem no mesmo espaço vetorial.

Nossa demonstração desse fato depende da seguinte proposição sobre matrizes.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. As operações elementares por coluna não afetam posto por linha de A. Da mesma forma, as operações elementares por linha não afetam posto por coluna de A.

Vamos demonstrar a primeira afirmação.

Observe que uma relação de dependência linear entre algumas linhas de uma matriz A é equivalente à existência de um vetor não nulo $\mathbf{v}$ com $\mathbf{v}A = 0$. Se E é uma matriz elementar e $B = AE$, então $\mathbf{v}B = \mathbf{v}AE = \mathbf{0}$; inversamente, se $\mathbf{v}B = 0$, então $\mathbf{v}A = \mathbf{v}BE^{-1} = \mathbf{0}$. Portanto, se um conjunto de linhas de A for linearmente dependente, o conjunto correspondente de linhas de B também será linearmente dependente e vice-versa. Isso significa que A e B têm a mesma posto por coluna.

De outra forma, sejam $\mathbf{e}_i$ são os vetores de base padrão em $\mathbb{K}^m$. Como a i-ésima linha de A é dada por $\mathbf{e}_iA$ temos que espaço de linha de A é

$$\mathrm{EspLin}(A) = \langle \mathbf{e}_1A, \ \ldots, \ \mathbf{e}_nA \rangle.$$

Executar uma operação de coluna elementar em A é equivalente a multiplicar A à direita por uma matriz elementar E. Portanto, o espaço da linha de AE é

$$\mathrm{EspLin}(AE) = \langle \mathbf{e}_1 AE, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n AE \rangle$$

e como E é invertível,

$$\mathrm{rank}_l(A) = \dim\left(\mathrm{EspLin}(A)\right) = \dim\left(\mathrm{EspLin}(AE)\right) = \mathrm{rank}_l(AE)$$

como desejado.

A demonstração da segunda afirmação é análoga a demonstração da primeira afirmação.

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $\operatorname{rank}_l(A) = \operatorname{rank}_c(A)$. *Esse número é denominado* **posto** *de A e é indicado por* $\operatorname{rank}(A)$.

Demonstração. Pelo lema anterior, podemos reduzir A para a forma escalonada reduzida por coluna sem alterar o posto por linha e o por coluna. Em seguida, podemos reduzir ainda mais A para forma escalonada reduzida por linha sem afetar nenhum dos postos. Logo a matriz resultante M tem os mesmos postos por linha e coluna que A. Mas M é uma matriz com 1's seguidos por 0's na diagonal principal e 0's em outros lugares. Consequentemente,

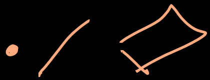
$$\mathrm{rank}_l(A) = \mathrm{rank}_l(M) = \mathrm{rank}_c(M) = \mathrm{rank}_c(A)$$

como desejado. $\triangleleft$

Bandeiras

Definição (Bandeira)

Uma sequência de subespaços encaixantes ascendente $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$ *do espaço* V *é denominada de* ***bandeira*** *ou* ***cadeia ascendente***.



O número n é denominado **comprimento da bandeira** $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$.

Definição (Bandeira Maximal)

*Uma bandeira $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots$ é dita **maximal** se $V_0 = \{0\}$, $\cup V_i = V$ e se nenhum subespaço puder ser inserido entre V_i, V_{i+1} (para qualquer i) isto é se $V_i \subset W \subset V_{i+1}$, então $W = V_i$ ou $W = V_{i+1}$.*

Exemplo

Em $P_n(x)$ temos a bandeira maximal:

$$\{\mathbf{0}\} \subset P_0(x) \subset P_1(x) \subset \cdots \subset P_n(x)$$

Um bandeira de comprimento n pode ser construído a partir de uma base ordenada $\underline{E} = (\mathbf{e}_1, \ \ldots \ \ \mathbf{e}_n)$ do espaço V definindo $V_0 = \{0\}$ e $V_i = \langle\{\mathbf{e}_1, \ \ldots \ \ \mathbf{e}_i\}\rangle$ para $i = 1, \ldots, n$). Essa bandeira é denominada **bandeira canônica associada a base** $\underline{E}$.

Essa bandeira é máximal e num espaço vetorial de dimensão finita todas as bandeiras maximais podem ser construídas assim.

$\mathbb{R}^3 \quad ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$\{0\} \subset \langle(1,0,0)\rangle \subset \langle(1,0,0), (0,1,0)\rangle \subset V$

Teorema

A dimensão do espaço vetorial V é igual ao comprimento de qualquer bandeira máximal de V.

Demonstração

Vamos provar apenas o caso em que $\dim V$ é finita.

Seja $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ uma bandeira máximal em V. Para $i \in I$, selecionamos um vetor $\mathbf{e}_i \in V_i \backslash V_{i-1}$. Mostraremos que o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i\}$ é uma base do espaço V_i.

Primeiro, o subespaço gerado por $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_{i-1}\}$ está contido em V_{i-1} e $\mathbf{e}_i$ não está em V_{i-1}, e segue por indução em i que o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i\}$ é linearmente independente, para todos os i.

Agora mostraremos por indução que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i\}$ gera V_i. Suponha por hipótese indutiva que isso seja verdade para $i-1$ e seja $V' = \langle \mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_i \rangle$. Então $V_{i-1} \subset V'$ de acordo com a hipótese de indução e $V_{i-1} \neq V'$ pois $\mathbf{e}_i \notin V_{i-1}$. A condição de maximalidade da bandeira implica então que $V' = V_i$.

Assim, se $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ for uma bandeira maximal finita em V, então, os vetores $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}, \mathbf{e}_i \in V_i \backslash V_{i-1}$, formam uma base de V e logo $n = \dim V$.

Uma bandeira em um espaço de uma dimensão finita, V, pode ser estendida a bandeira máximal e, portanto, seu comprimento é sempre menor ou igual a $\dim V$. De fato, se continuamos a inserir subespaços intermediários no bandeira inicial este processo não pode continuar indefinidamente, porque o conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i)$, $\mathbf{e}_i \in V_i \backslash V_{i-1}$ é um conjunto linearmente independente. Portanto, o comprimento do bandeira não pode exceder $\dim V$.

Dizemos que um espaço vetorial satisfaz a condição da cadeia ascendente (acc) se para qualquer sequência ascendente de subespaços

$$W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \cdots ,$$

eventualmente se estabiliza, isto é, existe um número inteiro positivo n tal que

$$W_n = W_{n+1} = W_{n+2} = \cdots .$$

Da mesma forma, diz-se que P satisfaz a condição da cadeia descendente (dcc) se todas as sequências descendentes de subespaços

$$W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \cdots$$

eventualmente se estabiliza.

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então, são equivalentes:

a. *V é de dimensão finita;*
b. *V tem uma bandeira maximal;*
c. *V satisfaz a condição da cadeia ascendente (acc);*
d. *V satisfaz a condição da cadeia descendente (dcc).*

Comentários Finais.