Álgebra Linear Avançada

Soma de Espaços Vetoriais

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Soma de Subespaços

O conjunto $\mathcal{S}(V)$ de todos os subespaços de um espaço vetorial V possui uma estrutura rica que apresentamos a seguir.

Se $S, T \in \mathcal{S}(V)$, então é fácil de demonstrar que $S \cap T$ é o maior subespaço de V contido simultaneamente em S e T. Em termos de inclusão de conjuntos, $S \cap T$ é o maior limite inferior de S e T. Da mesma forma, se $\{S_i \mid i \in I\}$ é uma coleção de subespaços de V, então sua interseção é o maior limite inferior dos subespaços

$$\inf\{S_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} S_i$$

Para determinar o menor subespaço de V contendo os subespaços S e T, fazemos a seguinte definição.

Definição (Soma)

Se S e T são subespaços de V. A ***soma*** *$S + T$ é definida por*

$$S + T \triangleq \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \,|\, \mathbf{x} \in S,\ \mathbf{y} \in T\}$$

Em geral, a soma de qualquer coleção $\{S_i \,|\, i \in I\}$ de subespaços é o conjunto de todas as somas **finitas** de vetores da união $\bigcup_{i \in I} S_i$

$$\sum_{i \in I} S_i \triangleq \{\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n \,|\, \mathbf{x}_j \in \bigcup_{i \in I} S_i\}$$

Proposição

Dado uma coleção $\{S_i \mid i \in I\}$ *de subespaços. Então são equivalentes:*

1. W *é o menos subespaço contendo* S_i *para* $i \in I$
2. $W = \langle \bigcup \{S_i \mid i \in I\} \rangle$
3. $W = \sum_{i \in I} S_i$

A demonstração será deixada como exercício.

Ou seja, acabamos de mostrar que a soma é a menor das cotas superiores.

$$\sup\{S_i \mid i \in I\} = \sum_{i \in I} S_i$$

Se um conjunto parcialmente ordenado P tiver a propriedade de que cada par de elementos tem um ínfimo e supremo então P será denominado **reticulado**. Se P tiver um menor elemento e um maior elemento e possuir a propriedade de que toda coleção de elementos possui um ínfimo e supremo, então P é denominado **reticulado completo**.

Teorema

O conjunto $\mathcal{S}(V)$ de todos os subespaços de um espaço vetorial V é um reticulado completo sob inclusão de conjuntos, com o menor elemento $\{\mathbf{0}\}$, maior elemento V,

$$\inf\{S_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} S_i \text{ e} \tag{1}$$

$$\sup\{S_i \mid i \in I\} = \sum_{i\in I} S_i \tag{2}$$

Soma Direta

Soma Direta Externa

Se V e W forem espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, o produto cartesiano

$$V \times W = \{(\mathbf{v},\ \mathbf{w}) : \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W\}$$

pode ser munido de uma estrutura de espaço vetorial definindo as operações

$$(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_2) \triangleq (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \tag{3}$$

$$\lambda(\mathbf{v},\ \mathbf{w}) \triangleq (\lambda\mathbf{v},\ \lambda\mathbf{w})\ . \tag{4}$$

O produto cartesiano $V \times W$, munido das operações de espaço vetorial acima, é denominado de soma direta externa de V e W.

A construção anterior pode ser generalizada facilmente.

Definição (Soma Direta Externa)

Sejam $V_1, \ldots, V_n$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. A soma direta externa de 1, denotado por $V = V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_n$ é o espaço vetorial $V = V_1 \times \cdots \times V_n$ cujos elementos são as ênuplas ordenadas, i.e.,

$$V_1 \boxplus \cdots \boxplus V_n = \{(\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n) \,|\, \mathbf{x}_i \in V_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n\}$$

com as operações componentes a componentes

$$(\mathbf{y}_1,\ \ldots,\ \mathbf{y}_n) + (\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n) \triangleq (\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{y}_n + \mathbf{x}_n) \tag{5}$$

$$\lambda(\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n) \triangleq (\lambda\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \lambda\mathbf{x}_n) \tag{6}$$

Exemplo

O espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ é a soma direta externa de n cópias de $\mathbb{K}$, isto é,

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \boxplus \cdots \boxplus \mathbb{K}$$

Essa construção pode ser generalizada novamente para qualquer coleção de espaços vetoriais, generalizando a idéia de que um ênupla ordenada $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ é apenas uma função $f : \{1, \ldots, n\} \to \cup V_i$ do conjunto de índices $\{1, \ldots, n\}$ para a união dos espaços com a propriedade que $f(i) \in V_i$.

Produto Direto

Definição (Produto Direto)

Seja $\mathcal{F} = \{V_i \mid i \in I\}$ *família de espaços vetoriais acima de* $\mathbb{K}$. *O* ***produto direto*** *de* $\mathcal{F}$ *é o espaço vetorial*

$$\prod_{i \in I} V_i \triangleq \{f : K \to \bigcup_{i \in I} V_i \mid f(i) \in V_i\}$$

pensado como um subespaço do espaço vetorial de todas as funções de $I \to \cup V_i$.

Será mais útil restringir o conjunto de funções àquelas com suporte finito.

Definição (Suporte)

Seja $\mathcal{F} = \{V_i \mid i \in I\}$ uma família de espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. O suporte de uma função $f : K \to \cup V_i$ é o conjunto

$$\mathrm{suporte}(f) \triangleq \{i \in I \mid f(i) \neq 0\}$$

Assim, uma função f tem suporte finito se $f(i) = 0$ para todos, exceto um número finito de $i \in I$.

Soma Direta Externa

Definição (Soma Direta Externa)

*A **soma direta externa** da família $\mathcal{F}$ é o espaço vetorial*

$$\boxed{+}_{i\in I} V_i \triangleq \{f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i \,|\, f(i) \in V_i f \text{ possui suporte finito } \}$$

$$= \{f : I \to \bigcup_{i\in I} V_i \,|\, f(i) \in V_i, f(i) \text{ é o exceto por um número finito de termos.}\}$$

visto como um subespaço do espaço vetorial de todas as funções de $I \to \cup V_i$.

Um caso especial importante ocorre quando $V_i = V$ para todos os $i \in I$. Se permitirmos que V^I denote o conjunto de todas as funções de I a V e $(V^I)_0$ denote o conjunto de todas as funções em V^I que possuem suporte finito então

$$\prod_{i \in I} V = V^I \qquad \text{e} \qquad \boxplus_{i \in I} V = (V^I)_0$$

Observe que o produto direto e a soma direta externa são os mesmos para uma família de espaços vetoriais finita.

Exemplos

O espaço vetorial $\mathbb{K}^\infty$ é produto direto de $\mathbb{K}$ e $(\mathbb{K}^\infty)_0$ é soma direta externa:

$$\mathbb{K}^\infty = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K} \quad \text{e} \quad (\mathbb{K}^\infty)_0 = \boxed{+}_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K}$$

Somas Diretas Internas

Definição (Soma Direta)

Seja V é um espaço vetorial. Dizemos que V é a soma direta (interna) de uma família $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ de subespaços de V se todo vetor $v \in V$ puder ser escrito, de uma maneira única (exceto pela ordem), como uma soma finita de vetores dos subespaços em $\mathcal{S}$, isto é, se para todo $\mathbf{v} \in V$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n \text{ com } \mathbf{v}_i \in S_i \text{ e}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 + \cdots + \mathbf{v}'_m, \text{ com } \mathbf{v}'_i \in S_i$$

Então $m = n$ e (após trocar os índices se necessário) $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Se V é a soma direta de $\mathcal{S}$, escrevemos

$$V = \bigoplus_{i \in I} S_i.$$

Se $\mathcal{S} = \{S_1, \ \ldots, \ S_n\}$ é uma família finita, escrevemos

$$V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$$

Os conceitos de soma direta interna e externa são essencialmente equivalentes (como veremos esses espaços são isomorfos). Por esse motivo, costumamos usar o termo soma direta sem qualificação.

Observe que uma soma é direta se, e somente se, sempre que $\mathbf{u}_{i_1} + \cdots + \mathbf{u}_{i_n} = 0$ em que $\mathbf{u}_{i_j} \in S_{i_j}$ e $i_j \neq i_k$ então $\mathbf{u}_{i_j} = 0$ para todos os j, isto é, se e somente se 0 tiver uma representação única como uma soma de vetores de subespaços distintos. Essa afirmação motiva a seguinte definição e a próxima proposição.

Espaços Independentes

Definição (Espaços Independentes)

*Seja V um espaço vetorial e $\{W_1, \ldots, W_k\}$ seja um conjunto de subespaços de V. Esse conjunto de espaços é **independente** se $0 = w_1 + \cdots + w_k$ com $w_i \in W_i$ implica $w_i = 0$ para todo i.*

Proposição

Seja V um espaço vetorial e $\{W_1, \ldots, W_k\}$ seja um conjunto de subespaços de V. Então V é a soma direta $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ se

a. $V = W_1 + \cdots + W_k$ *e*
b. $\{W_1, \ldots, W_k\}$ *são independentes.*

A seguinte caracterização de somas diretas é bastante útil.

Teorema

Um espaço vetorial V é a soma direta de uma família $\mathcal{S} = \{S_i \mid i \in I\}$ de subespaços se e somente se

a. *V é a soma dos S_i, $V = \sum_{i \in I} S_i$*
b. *Para cada $i \in I$, $S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right) = \{\mathbf{0}\}$*

Demonstração:

Suponha primeiro que V seja a soma direta de $\mathcal{S}$. Então $\boxed{a}$ é verdadeiro e se

$$\mathbf{v} \in S_i \cap \left(\sum_{j \neq i} S_j\right)$$

então $\mathbf{v} = \mathbf{s}_i$ para algum $\mathbf{s}_i \in S_i$ e

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_{j_1} + \cdots + \mathbf{s}_{j_n}$$

onde $\mathbf{s}_{j_k} \in S_{j_k}$ e $j_k \neq i$ para todos os $k = 1, \ldots, n$.

Portanto, pela unicidade das representações de soma direta, $\mathbf{s}_i = 0$ e, portanto, $\mathbf{v} = 0$. Logo demonstramos $\boxed{b}$.

Para a reciproca, suponha que $\boxed{a}$ e $\boxed{b}$ sejam válidos. Precisamos apenas verificar a condição de unicidade

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_{j_1} + \cdots + \mathbf{s}_{j_n} \quad \text{e} \tag{7}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{t}_{k_1} + \cdots + \mathbf{t}_{k_m} \tag{8}$$

onde $\mathbf{s}_{j_i} \in S_{j_i}$ e $\mathbf{t}_{k_i} \in S_{k_i}$ e incluindo termos adicionais iguais a 0, podemos assumir que o índice define $\{j_1, \ldots, j_n\}$ e $\{k_1, \ldots, k_m\}$ são o mesmo conjunto $\{i_1, \ldots, i_p\}$, isto é

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_{i_1} + \cdots + \mathbf{s}_{i_p} \quad \text{e} \tag{9}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{t}_{i_1} + \cdots + \mathbf{t}_{i_p} \tag{10}$$

Mas $(\mathbf{s}_{i_1} - \mathbf{t}_{i_1}) + \cdots + (\mathbf{s}_{i_p} - \mathbf{t}_{i_p}) = 0$. Portanto, cada termo $\mathbf{s}_{i_u} - \mathbf{t}_{i_u} \in S_{i_u}$ é uma soma de vetores de subespaços diferentes de S_{i_u}, que só pode acontecer se $\mathbf{s}_{i_u} - \mathbf{t}_{i_u} = 0$. Portanto, $\mathbf{s}_{i_u} = \mathbf{t}_{i_u}$ para todos os i_u e assim demonstramos que V é a soma direta de $\mathcal{S}$. $\triangleleft$

Se tivermos apenas dois subespaços $\{W_1,\ W_2\}$, essa condição simplesmente indicará $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Se tivermos mais de dois subespaços, essa condição é mais forte que a condição $W_i \cap W_j = \{0\}$ para $i \neq j$.

Exemplo

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ pode ser decomposta como

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) = B + C \tag{11}$$

onde A^t é a transposta de A. É fácil verificar que B é uma matriz simétrica e C é assimétrica e assim temos uma decomposição de A como a soma de uma matriz simétrica e uma matriz simétrica.

Como os conjuntos $\mathrm{Sim}_{n,n}$ e $\mathrm{ASim}_{n,n}$ de todas as matrizes simétricas e assimétricas em $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ são subespaços de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, temos que

$$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathrm{Sim}_{n,n} + \mathrm{ASim}_{n,n}$$

Além disso, se $S + T = S' + T'$, onde S e S' são simétricas e T e T' são antissimétricas, então a matriz

$$U = S - S' = T' - T$$

é simétrica e antissimétrica. Portanto, se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, devemos ter $U = 0$ e, portanto, $S = S'$ e $T = T'$. Assim se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ a soma é direta:

$$\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathrm{Sim}_{n,n} \oplus \mathrm{ASim}_{n,n}$$

Decomposição em Somas Diretas

Proposição

Seja V um espaço vetorial e seja $\{W_1, \ldots, W_k\}$ um conjunto de subespaços de V. Seja, $\underline{B}_i$ seja uma base de W_i, para cada i, e deixe, $\underline{B} = \cup \underline{B}_i$. Então

a. $\underline{B}$ *gera* V *se e somente se* $V = W_1 + \cdots + W_k$.

b. $\underline{B}$ *é linearmente independente se e somente se* $\{W_1, \ldots, W_k\}$ *for independente.*

c. $\underline{B}$ *é uma base para* V *se e somente se* $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.

A demonstração da proposição será deixada como exercício

Corolário

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{W_1, \ldots, W_k\}$ um conjunto de subespaços com $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Então $\dim(V) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_k)$.

A demonstração da proposição será deixada como exercício

Corolário

Seja V um espaço vetorial da dimensão n e seja $\{W_1, \ldots, W_k\}$ um conjunto de subespaços. Sejam $n_i = \dim(W_i)$.

1. *Se $n_1 + \cdots + n_k > n$, então $\{W_1, \ldots, W_k\}$ não é independente.*
2. *Se $n_1 + \cdots + n_k < n$, então $V \neq W_1 + \cdots + W_k$.*
3. *Se $n_1 + \cdots + n_k = n$, o seguinte é equivalente:*
   - a. $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.
   - b. $V = W_1 + \cdots + W_k$
   - c. *$\{W_1, \ldots, W_k\}$ é independente.*

Complemento

Definição (Complemento)

Seja V um espaço vetorial e W_1 seja um subespaço de V. Então W_2 é um ***complemento*** *de W_1 se $V = W_1 \oplus W_2$.*

Teorema

Seja V um espaço vetorial e W seja um subespaço de V. Então W_1 possui um complemento W'. Além disso temos $\dim V = \dim W + \dim W'$

Demonstração. Suponha que W seja um subespaço de V. Seja $\underline{\mathrm{B}}$ uma base de W. Pelo Teorema ??, existe uma base $\underline{\mathrm{B}}'$ de V tal que $\underline{\mathrm{B}} \subseteq \underline{\mathrm{B}}'$. Seja $W' = \langle \underline{\mathrm{B}}' - \underline{\mathrm{B}} \rangle$. Como $\underline{\mathrm{B}}' = \underline{\mathrm{B}} \cup (\underline{\mathrm{B}}' - \underline{\mathrm{B}})$, $V = \langle \underline{\mathrm{B}}' \rangle = \langle \underline{\mathrm{B}} \rangle + \langle \underline{\mathrm{B}}' - \underline{\mathrm{B}} \rangle = W + W'$. Como $\underline{\mathrm{B}}'$ é linearmente independente e $\underline{\mathrm{B}} \cap (\underline{\mathrm{B}}' - \underline{\mathrm{B}}) = 0$, $\langle \underline{\mathrm{B}} \rangle \cap \langle \underline{\mathrm{B}}' - \underline{\mathrm{B}} \rangle = (0)$. Assim, $W \cap W' = (0)$, e a prova está completa. $\triangleleft$

Comentários Finais.