Álgebra Linear Avançada

Bases e Dimensão

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Bases e Dimensão

Definição (Dependência e Independência Linear)

Suponha que V seja um espaço vetorial arbitrário sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja S um subconjunto de V.

- *S é dito **linearmente dependente** sobre $\mathbb{K}$ se existir um subconjunto finito $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq S$ e escalares diferentes de zero $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ de modo que $x_1\mathbf{x}_1 + +x_n\mathbf{x}_n = 0$.*
- *S é dito **linearmente independente** (sobre $\mathbb{K}$) se S não for linearmente dependente.*

Portanto, se S for linearmente independente, sempre que $\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{x}_i = 0$ com $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq S$ e $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{K}$ e, assim, $x_1 = \cdots x_n = 0$.

Nossa definição implica que o conjunto vazio $\emptyset$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$, por vacuidade.

Ao considerar questões de dependência, abandonaremos as palavras "sobre $\mathbb{K}$" sempre que $\mathbb{K}$ for claro a partir do contexto.

No entanto, deve ser óbvio que, se mais de um corpo estiver envolvido, um determinado conjunto S pode ser linearmente dependente sobre um corpo e independente sobre outro. O exemplo a seguir torna isso claro.

Exemplo

Suponha $V = \mathbb{R}$, o corpo dos números reais e sejam $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$. Então V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$. Seja $S = \{\mathbf{x}_1 = 1, \mathbf{x}_2 = \sqrt{2}\}$. É fácil ver que S é linearmente independente sobre $\mathbb{K}_1$. Mas, claramente, S é linearmente dependente sobre $\mathbb{K}_2$ pois $(\sqrt{2})\mathbf{x}_1 + (-1)\mathbf{x}_2 = 0$.

Definição (Base)

*Um subconjunto S de V é dito **base** de V se S for linearmente independente sobre $\mathbb{K}$ e $\langle S \rangle = V$.*

Se S for uma base de um espaço vetorial V', todo vetor diferente de zero $\mathbf{x} \in V$ poderá ser escrito unicamente no formato $\mathbf{x} = x_1\mathbf{x}_1 + \cdots + x_n\mathbf{x}_n$, em que $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq S$ e $x_1, \ldots, x_n$ são escalares diferentes de zero em $\mathbb{K}$.

Notação

As bases serão denotadas por $\underline{B}, \underline{X}, \ldots$.

Exemplo

O conjunto vazio $\emptyset$ é uma base para o subespaço nulo (0) de qualquer espaço vetorial V. Se considerarmos um corpo $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre si mesmo, qualquer elemento diferente de zero $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}$ é uma base de $\mathbb{K}$.

Exemplo

Suponha $V = \mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, seja $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Portanto, $\mathbf{e}_i$ é a n-tupla cujas entradas são todas zero, exceto um 1 na i-ésima posição. Defina $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Como $(x_1, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, vemos $\underline{\mathrm{B}}$ é uma base de $\mathbb{K}^n$. Vamos denominar $\underline{\mathrm{B}}$ de base canônica (padrão) de $\mathbb{K}^n$.

Exemplo

Suponha $V = (\mathbb{K}^\infty)_0 \triangleq (\mathbb{K}^\mathbb{N})_0$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $\underbrace{(0, \ldots, 1, \ldots,)}_{\text{1 na i-ésima posição}}$. Ou seja, $\mathbf{e}_i$ é o vetor cujas entradas são todas zero, exceto um 1 na i-ésima posição.

Defina $\underline{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\}$. Como todo vetor em $\mathbf{x} \in (\mathbb{K}^\infty)_0$ possui um número finito de coordenadas diferente de 0

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, temos que $\underline{B}$ é uma base de $(\mathbb{K}^\infty)_0$. Vamos denominar $\underline{B}$ de base canônica de $(\mathbb{K}^\infty)_0$.

Exemplo

Seja $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Para qualquer $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{e}_{ij}$ denota a matriz $m \times n$ cujas entradas são todas zero, exceto um 1 na posição (ij). Como $(a_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij}\mathbf{e}_{ij}$, temos que $\underline{B} = \{\mathbf{e}_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ é uma base para V.
Os elementos $\mathbf{e}_{ij}$ em $\underline{B}$ são denominadas de unidades matriciais de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}[x]$. Seja $\underline{B}$ o conjunto dos monômios mônicos em x, assim, $\underline{B} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ e é uma base de $\mathbb{K}[x]$.

Exemplo

O conjunto dos números reais é um espaço vetorial sobre o corpo dos números racionais.

Qual seria a base para esse espaço vetorial? Os elementos $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots,$ são linearmente independentes, mas certamente não geram $\mathbb{R}$, pois também precisamos de elementos como $e, e^2, e^3, \ldots,$ que também formam um conjunto linearmente independente. De fato, como $\mathbb{Q}$ é enumerável, pode-se mostrar que o subespaço de $\mathbb{R}$ gerado por qualquer subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ deve ser enumerável. Como o próprio $\mathbb{R}$ é não-enumerável, nenhum conjunto enumerável pode ser uma base para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Isso significa que qualquer base para $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$, deve ser não enumerável e assim difícil de descrever.

Um dos fatos mais fundamentais é que todo espaço vetorial possui uma base:

Teorema (Base)

Todo espaço vetorial possui uma base.

De fato, temos um resultado ligeiramente mais forte: qualquer subconjunto linearmente independente S de V pode ser expandido para uma base. É esse fato que provaremos.

Teorema (Extensão)

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e suponha que S seja um subconjunto linearmente independente de V. Então, existe uma base $\underline{B}$ de V tal que $\underline{B} \supseteq S$.

(Lema de Zorn)

Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em X é limitada superiormente. Então X possui pelo menos um elemento maximal.

Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado $(A, \sim)$ é indutivo se todo subconjunto totalmente ordenado de A tiver um limite superior em A.

O ponto crucial sobre os conjuntos indutivos é que podemos reescrever o Lema de Zorn como:

Lema (de Zorn)

Se um conjunto parcialmente ordenado $(A, \sim)$ for indutivo, existe um elemento máximal de A.

Demonstração. [do Teorema 4] Suponha $V \neq \{\mathbf{0}\}$ e seja $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Então $\{\mathbf{v}\}$ é um conjunto linearmente independente e pelo Teorema 5 pode ser completado a uma base de V. $\triangleleft$

Há uma grande desvantagem nessa demonstração de que todo espaço vetorial admite uma base: a menos que a dimensão seja finita ou pelo menos enumerável, ela não nos fornece nenhuma idéia de como encontrar uma base. De fato, esse é um problema sério com o conceito de base para espaços dimensionais infinitos em geral. Embora o Lema de Zorn nos permita demonstrar que existe uma base, na prática, esse fato pode ser inútil se não tivermos um procedimento para encontrar uma. Mas que elas existem...

Exemplo

Uma base para o espaço vetorial $C^k(I)$ é não enumerável e não possui descrições simples. No entanto, como $\mathbb{R}[x] \subseteq C^k(I)$, o Teorema 5 garante que existe uma base de $C^k(I)$ que contém os monômios $1, x, x^2, \ldots$.

O Teorema 5 diz que qualquer subconjunto linearmente independente de V pode ser expandido para uma base de V. Há um resultado complementar, se algum subconjunto S de V gerar V, então S conterá uma base de V.

Teorema (Redução)

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e suponha que $V = \langle S \rangle$. Então S contém uma base de V.

Se $S = \emptyset$ ou $\{0\}$, então $V = (0)$. Nesse caso, $\emptyset$ é uma base de V contida em S. Portanto, podemos supor que S contém um vetor diferente de zero $\mathbf{x}$.

Seja $\mathcal{I} = \{A \subseteq S \,|\, A \text{ linearmente independente sobre } \mathbb{K}\}$. Claramente, $\{\mathbf{x}\} \in \mathcal{I}$. Ordenaremos parcialmente $\mathcal{I}$ por inclusão.

Se $\mathcal{T} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{I}$, então $\bigcup_{i \in I} A_i$ é um limite superior para $\mathcal{T}$ em $\mathcal{I}$.

Portanto, $(\mathcal{I}, \subseteq)$ é indutivo. Aplicando o Lema de Zorn temos que $\mathcal{I}$ possui um elemento maximal $\underline{B}$.

Afirmamos que $\underline{B}$ é uma base para V. Como $\underline{B} \in \mathcal{I}$, $\underline{B} \subseteq S$ e $\underline{B}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$. Se $\langle \underline{B} \rangle = V$, então $\underline{B}$ é uma base de V, e o resultado segue. Suponha que $\langle \underline{B} \rangle \neq V$. Então $S \not\subseteq \langle \underline{B} \rangle$ ou caso contrário $V = \langle S \rangle \subseteq \langle \langle \underline{B} \rangle \rangle = \langle \underline{B} \rangle$. Portanto, existe um vetor $\mathbf{y} \in S \setminus \langle \underline{B} \rangle$. Claramente, $\underline{B} \cup \{\mathbf{y}\}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$. Assim, $\underline{B} \cup \{\mathbf{y}\} \in \mathcal{I}$. Mas $\mathbf{y} \notin \langle \underline{B} \rangle$ implica $\mathbf{y} \notin \underline{B}$. Portanto, $\underline{B} \cup \{\mathbf{y}\}$ é estritamente maior que $\underline{B}$ em $\mathcal{I}$. Como $\underline{B}$ é maximal, isso é uma contradição. Portanto, $\langle \underline{B} \rangle = V$ e nossa prova está concluída.

Um espaço vetorial V possui muitas bases diferentes. Por exemplo, $\underline{x} = \{(0, \ldots, \lambda, \ldots, 0) + \mathbf{e}_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ é claramente uma base para $\mathbb{K}^n$ para qualquer $\lambda \neq -1$ em $\mathbb{K}$. O que todas as bases de V têm em comum é sua cardinalidade. Provamos esse fato em nosso próximo teorema.

Troca de Steinitz

Lema (Troca de Steinitz)

Seja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ uma coleção de vetores linearmente independentes em um espaço vetorial V. Seja $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ seja uma coleção de vetores que geram V. Então, $m \leq n$ e, além disso, possivelmente após reordenar os vetores $\mathbf{w}_i$, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ gera V.

Sejam $A = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes e $B = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ um conjunto de vetores que gera nosso espaço vetorial V. Entre todos os conjuntos C, de modo que $A \subseteq C \subseteq A \cup B$ e $V = \langle C \rangle$, escolha um que seja mínimal. Já temos que C é da forma

$$C = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{i_1}, \ldots, \mathbf{w}_{i_r}\}$$

e que $V = \langle C \rangle$. vamos provar que C é linearmente independente.

Suponha que

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_m\mathbf{v}_m + b_1\mathbf{w}_{i_1} + \ldots + b_r\mathbf{w}_{i_r} = 0$$

Se qualquer um dos coeficientes b_k for diferente de zero, $\mathbf{w}_{i_k}$ estará no espaço gerado dos elementos restantes de C; portanto, $C \setminus \{\mathbf{w}_{i_k}\}$ será um conjunto menor que gera e que está entre A e $A \cup B$, contradizendo o fato que C é minimal. Portanto, $b_1 = \ldots = b_r = 0$. Mas, a partir da independência linear dos vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, segue $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Concluímos que C é linearmente independente. E portanto, é uma base.

Existem duas afirmações aqui:

- A primeira é que $m \leq n$. Em palavras, isso diz que qualquer conjunto linearmente independente é no máximo tão grande quanto qualquer conjunto que gera.
- A segunda parte é que, se pegarmos um monte de vetores linearmente independentes e qualquer conjunto de vetores que geram, podemos emprestar parte do conjunto que gera para estender o conjunto linearmente independente para um conjunto que gere todo o espaço vetorial.
-

A conclusão realmente profunda do Lema da Troca de Steinitz é que faz sentido falar sobre a dimensão de um espaço vetorial.

Teorema (da Invariância da Dimensão)

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e suponha que $\underline{B}_1$ e $\underline{B}_2$ sejam duas bases de V. Então $|\underline{B}_1| = |\underline{B}_2|$.

Dividimos essa prova em dois casos.

Caso 1: suponha que V tenha uma base $\underline{B}$ finita.

Nesse caso, provaremos que $|\underline{B}_1| = |\underline{B}_2|$. Suponha que $\underline{B}_2 = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. É claramente suficiente mostrar que $|\underline{B}_1| = n$. Supomos que $|\underline{B}_1| \neq n$ e derivamos uma contradição. Existem duas possibilidades a serem consideradas aqui: $|\underline{B}_1| = m < n$ ou $|\underline{B}_1| > n$. Vamos primeiro supor que $\underline{B}_1 = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ com $m < n$.

Então pelo Lema 9 $m \geq n$ e a contradição segue.

Agora suponha que $|\underline{B}_1| > n$ ($|\underline{B}_1|$ pode ser infinito aqui).

Como $\underline{B}_1$ é linearmente independente todo conjunto finito de $\underline{B}_1$ é linearmente independente. Como $\underline{B}_2$ gera, todo conjunto finito de $\underline{B}_1$ tem no máximo $|\underline{B}_2|$ elementos e logo $|\underline{B}_1| < |B_2|$. Consequentemente $|\underline{B}_1| < n$ e a contradição segue.

Caso 2: suponha que nenhuma base de V seja finita.

Precisaremos do seguinte fato sobre cardinalidade:

Lema

Sejam A e B conjuntos, e suponha $|A| = \infty$. Se, para cada $x \in A$, tivermos um conjunto finito de $I_x \subseteq B$ então $|A| \geq |\bigcup_{x \in A} I_x|$.

Caso 2: suponha que nenhuma base de V seja finita.

Nesse caso, $\underline{B}_1$ e $\underline{B}_2$ são conjuntos infinitos. Seja $\mathbf{x} \in \underline{B}_1$. Como $\underline{B}_2$ é uma base de V, existe um único subconjunto finito $I_x \subseteq \underline{B}_2$, tal que $\mathbf{x} \in \langle I_x \rangle$ e $\mathbf{x} \notin \langle I' \rangle$ para qualquer subconjunto próprio I' de I_x. Portanto, temos uma função bem definida $\varphi : \underline{B}_1 \to \mathscr{P}(\underline{B}_2)$ fornecida por $\varphi(\mathbf{x}) = I_x$.

Como $\underline{B}_1$ é infinito, podemos aplicar o Lema e concluir que $|\,\underline{B}_1\,| \geq |\bigcup_{\mathbf{x}\in\underline{B}_1} I_{\mathbf{x}}\,|$.

Como $\mathbf{x} \in \langle I_{\mathbf{x}} \rangle$ para todos os $\mathbf{x} \in \underline{B}_1, V = \langle \bigcup_{\mathbf{x}\in\underline{B}_1} I_{\mathbf{x}} \rangle$. Portanto, $\bigcup_{\mathbf{x}\in\underline{B}_1} I_x$ é um subconjunto de $\underline{B}_2$ que gera o espaço V. Logo concluímos que $\bigcup_{\mathbf{x}\in\underline{B}_1} I_x = \underline{B}_2$. Em particular, $|\,\underline{B}_1\,| \geq |\,\underline{B}_2\,|$. Invertendo os papeis de $\underline{B}_1$ e $\underline{B}_2$ temos que $|\,\underline{B}_2\,| \geq |\,\underline{B}_1\,|$. Isso completa a prova do teorema.

Definição (Dimensão)

A cardinalidade comum de qualquer base de V é denominada ***dimensão*** *de V. Escreveremos $\dim V$ para a dimensão de V. Se queremos enfatizar em que corpo estamos, então usaremos a notação $\dim_{\mathbb{K}} V$ para a dimensão do espaço vetorial sobre K. Assim, $\dim V = |\underline{B}|$, onde $\underline{B}$ é uma base qualquer de V quando o corpo base $\mathbb{K}$ é subentendido.*

Vamos verificar as dimensões de alguns dos nossos exemplos anteriores.

No Exemplo 1, $\dim_{\mathbb{K}_2} V = 1$ e $\dim_{\mathbb{K}_1}(V) = |\,\mathbb{R}\,|$ a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

No Exemplo 2, $\dim_{\mathbb{K}}(0) = 0$.

No Exemplo 3, $\dim \mathbb{K}^n = n$.

No exemplo 5, $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$.

No Exemplo 6, $\dim V = |\,\mathbb{N}\,|$, a cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Se a dimensão de um espaço vetorial V for infinita, como nos Exemplos 1 e 6, em geral não faremos nenhuma tentativa de distinguir qual a cardinalidade de $\dim V$. Em vez disso, escreveremos simplesmente $\dim V = \infty$. Se V tiver uma base finita $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, diremos que V é um espaço vetorial de dimensão finita e escreveremos $\dim V < \infty$, ou, mais precisamente, $\dim V = n < \infty$. Por exemplo, $\dim_{\mathbb{R}} C^k(I) = \infty$, enquanto $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n < \infty$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

a *Se W for um subespaço de V, então $\dim W \leq \dim V$.*

b *Se V for de dimensão finita e W é um subespaço de V tal que $\dim W = \dim V$, $W = V$.*

Demonstração. O Teorema 5 diz que qualquer base de um subespaço W de V pode ser completada para uma base de V. Isso prova imediatamente os itens $\boxed{\text{a}}$ e $\boxed{\text{b}}$. ◁

Se V não é de dimensão finita, então $\boxed{\text{b}}$ é falso em geral. Um exemplo simples ilustra esse ponto.

Exemplo

Seja $V = \mathbb{K}[x]$ e seja W o subespaço de V que consiste em todos os polinômios pares. Assim, $W = \left\{ \sum a_i x^{2i} \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}$. Uma base de W é claramente os monômios de potências pares de x. Assim, $\dim V = \dim W$, mas $W \neq V$.

Comentários Finais.