Álgebra Linear Avançada

Espaços Vetoriais

Daniel Miranda Machado

23 de Setembro

UFABC

UFABC

Espaços Vetoriais

Espaço Vetorial

Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é um conjunto não vazio, com duas funções, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$ de $V \times V$ para V e $(\lambda_1, \mathbf{x}) \to \lambda_1 \mathbf{x}$ de $\mathbb{K} \times V$ a V que satisfazendo

- **V1** $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- **V2** $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.
- **V3** Existe um elemento $\mathbf{o} \in V$ tal que $\mathbf{o} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.
- **V4** Para cada $\mathbf{x} \in V$, existe um $\mathbf{y} \in V$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{o}$.
- **V5** $(\lambda_1 \lambda_2)\mathbf{x} = \lambda_1(\lambda_2 \mathbf{x})$ para todos os $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{x} \in V$.
- **V6** $\lambda_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{y}$ para todos os $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- **V7** $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{x}$ para todos os $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{x} \in V$.
- **V8** $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todos os $\mathbf{x} \in V$.

Como nos corpos, devemos comentar que um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é na realidade uma tripla $(V,\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \to \mathbf{x}+\mathbf{y}, (\lambda,\mathbf{x}) \to \lambda\mathbf{x})$ consistindo em um conjunto não vazio V juntamente com duas funções de $V \times V \to V$ e $\mathbb{K} \times V \to V$ satisfazendo os axiomas V1-V8.

Ressaltamos que existem, em geral, muitas maneiras de munir um determinado conjunto V com uma estrutura de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. No entanto, abandonaremos qualquer referência à adição e multiplicação escalar quando nenhuma confusão puder surgir e usaremos a notação Vpara indicar um determinado espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se V for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, os elementos de V serão chamados **vetores** e os elementos de $\mathbb{K}$ **escalares**.

Proposição

a) *O elemento* $\mathbf{0} \in V$ *é único. Ou seja, existe um único* $\mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ *para todo* $\mathbf{x} \in V$.

b) *O elemento oposto é único. Ou seja, para cada* $\mathbf{x} \in V$*, existe um único* $\mathbf{y} \in V$ *tal que* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$*. Esse vetor será denotado por* $-\mathbf{x}$.

c) $0\mathbf{x} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *para todos os* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\mathbf{x} \in V$.

d) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

e) *Se* $\lambda\mathbf{x} = 0$*, então* $\lambda = 0$ *ou* $\mathbf{x} = 0$.

f) *Se* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$ *então* $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Demonstração.

$\boxed{c}$ Como $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0+0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$, segue que $0\mathbf{x} = 0$.

Analogamente, $\lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0}$, ou seja, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

$\boxed{d}$ De fato, $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1+(-1))\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = 0$, de modo que o vetor $(-1)\mathbf{x}$ é o inverso de $\mathbf{x}$.

$\boxed{e}$ De fato, se $\lambda \neq 0$, então como $(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ temos que
$\lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

$\boxed{a}$, $\boxed{b}$ e $\boxed{f}$ Exercício.

$\triangleleft$

Observação

A expressão $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \sum \lambda_i\mathbf{x}_i$ *é definida unicamente para qualquer* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *e* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$*: devido à associatividade da adição, não é necessário inserir parênteses indicando ordem para o cálculo de somas múltiplas. Analogamente, a expressão* $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n\mathbf{x}$ *está bem definida.*

Definição (Combinação Linear)

Uma expressão da forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i$ é denominada de ***combinação linear*** *dos vetores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Os escalares a_i são chamados de* ***coeficientes*** *dessa combinação linear.*

Uma combinação linear é necessariamente **finita**, isto é, é uma soma de um número finito de termos

Exemplo (Espaço zero-dimensional)

Nesse caso $V = \{\mathbf{0}\}$. Com a multiplicação por escalar definida como $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todos os $\lambda \in \mathbb{K}$ e com a adição $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ressaltamos que os espaços de dimensão zero sobre corpos distintos são espaços vetoriais distintos. O corpo deve especificado na definição do espaço vetorial.

Exemplo (Corpo)

$V = \mathbb{K}$ com a adição e a multiplicação do corpo é um espaço vetorial.

De maneira mais geral, dados um corpo $\mathbb{K}$ e um subcorpo $\mathbb{F}$ deste, o corpo $\mathbb{K}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Por exemplo, o corpo de números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$, e este é um espaço vetorial sobre o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$.

Espaço de Coordenadas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos o espaço vetorial $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K}\}$ consistindo em todas as ênuplas de elementos de $\mathbb{K}$. A adição de vetores e a multiplicação escalar são definidos componente a componente como

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \triangleq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \text{ e}$$
$$\lambda_1(x_1, \ldots, x_n) \triangleq (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_1 x_n).$$

Em particular, quando $n = 1$, temos que $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

De modo análogo podemos definir o espaço vetorial:

$$\mathbb{K}^\infty = \{(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots) \,|a_i \in \mathbb{K}, i \in \mathbb{N}\}.$$

com a soma e a multiplicação coordenada a coordenada.

Espaço de Funções

Se A e B são dois conjuntos, vamos denotar o conjunto de funções de A para B por B^A. Assim, $B^A = \{f : A \to B \,|\, f \text{ é uma função } \}$.

Espaços de Funções

Sejam S um conjunto arbitrário e $\mathbb{K}(S) = S^{\mathbb{K}}$ o conjunto de funções em S com valores no corpo $\mathbb{K}$. Se $f : S \to \mathbb{K}$ é uma função, então $f(s)$ indica o valor de f no elemento $s \in S$.

A adição e multiplicação de funções por um escalar são definidas pontualmente:

- $(f + g)(s) \triangleq f(s) + g(s)$ para todos os $s \in S$,
- $(af)(s) \triangleq a(f(s))$ para todos os $a \in K, s \in S$.

Como já observamos se $S = \{1, \ldots, n\}$, então $\mathbb{K}(S)$ pode ser identificado com $\mathbb{K}^n$: a função f está associada ao vetor formado por todos os valores de f: $(f(1), \ \ldots \ , \ f(n))$. As regras de adição e multiplicação são consistentes com relação a essa identificação.

A todo elemento $s \in S$ podemos associar uma função delta δ_s centrada em $\{s\}$ definida como

$$\delta_s(s) = 1 \quad \text{e} \quad \delta_s(t) = 0 \text{ se } t \neq s.$$

Quando $S = (1, \ \ldots \ \ n)$, usaremos a notação de delta Kronecker $\delta_i(k) = \delta_{ik}$.

Se o conjunto S for finito, uma função $f \in \mathbb{K}(S)$ poderá ser representada unicamente por uma combinação linear de funções delta:

$$f = \sum_{s \in S} f(s)\delta_s.$$

De fato, essa igualdade decorre do fato de que o lado esquerdo é igual ao lado direito em todos os pontos $s \in S$. Inversamente, se $f = \sum_{s \in S} a_s \delta_s$, então, tomando o valor no ponto s obtemos a $f(s) = a_s$

Se o conjunto S for infinito, esse resultado não será verdadeiro pois na definição de combinação linear consideramos apenas somas finitas. Somas de um número infinito de vetores em um espaço vetorial não são definidas, em geral! Algumas somas infinitas podem ser definidas em espaços vetoriais equipados com o conceito de topologia ou norma.

Matrizes

Exemplo

Vamos denotar o conjunto das matrizes $m \times n$ (a_{ij}) com coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{K}$ por $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. A adição usual de matrizes $(a_{ij}) + (b_{ij}) \triangleq (a_{ij} + b_{ij})$ e a multiplicação por escalar como $\lambda_1(a_{ij}) \triangleq (\lambda_1 a_{ij})$ fazem $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Observe que nossa escolha de notação implica que $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ são o mesmo espaço vetorial. Vetores dessa forma são também denominados **vetores linhas**. Embora agora tenhamos duas notações diferentes para o mesmo espaço vetorial, essa redundância é útil e não causará confusão na sequência.

Exemplo (Vetores Colunas)

Seja $\mathbb{K}_n \triangleq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ com as operações usuais de matrizes, então $\mathbb{K}_n$ é um espaço vetorial denominado espaço dos vetores colunas. Nesse caso um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}_n =$ é dito **vetor coluna**, e é uma matriz consistindo de uma única coluna de n elementos.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matriz transposta do vetor coluna é um vetor linha e vice-versa.

Exemplo

Seja $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios em uma variável x sobre $\mathbb{K}$. Assim, um elemento típico de $\mathbb{K}[x]$ é uma soma finita do formato $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$. Aqui $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. As noções usuais de adicionar dois polinômios e multiplicar um polinômio por uma constante, com a qual o leitor está familiarizado, estão bem definidas sobre qualquer corpo $\mathbb{K}$. Essas operações fornecem a $\mathbb{K}[x]$ a estrutura de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Muitos exemplos interessantes de espaços vetoriais vêm da análise. Aqui estão alguns exemplos típicos.

Exemplo

Uma sequência com valores num corpo $\mathbb{K}$ é uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. É usual para sequências escrevermos $a_n \triangleq a(n)$. O conjunto $\mathrm{Seq}(\mathbb{K})$ de todas as sequências infinitas com valores num corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial com as operações definidas termo a termo:

$$(s_n) + (t_n) \triangleq (s_n + t_n) \quad \text{e} \tag{1}$$

$$a(s_n) \triangleq (as_n) \tag{2}$$

Exemplo

Seja I um intervalo fechado. Vamos denotar por $C(I)$ as funções reais contínuas em I. Denotaremos por $C^k(I)$ as funções de $C(I)$ que são k-vezes diferenciáveis no interior de I. Então $C(I) \supseteq C^1(I) \supseteq C^2(I) \supseteq \cdots$. Esses conjuntos são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ quando dotados da adição usual pontual $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in I$ e multiplicação escalar $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

Exemplo

Seja $B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ seja um retângulo fechado. Seja $\mathcal{R}(B)$ o conjunto de todas as funções a valores reais em B que são Riemann integráveis. Claramente $\mathcal{R}(B)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a adição e multiplicação por escalar definidas como no Exemplo 7.

Sistema Linear

O espaço de solução de um sistema de equações lineares homogêneo. Seja A uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$. O conjunto de todas as matrizes $n \times 1$ X sobre $\mathbb{K}$, satisfazendo $AX = 0$ é um subespaço do espaço de todas as matrizes $n \times 1$ sobre $\mathbb{K}$.

Para provar isso, devemos mostrar que $A(\lambda X + Y) = 0$ quando $AX = 0$, $AY = 0$ e λ é um escalar arbitrário em $\mathbb{K}$. Isso segue imediatamente do seguinte fato geral.

Se A é matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ e B, C matrizes $n \times p$ sobre $\mathbb{K}$ então

$$A(\lambda B + C) = \lambda(AB) + AC$$

para todo escalar λ em $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
[A(\lambda B + C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(\lambda B + C)_{kj} \\
&= \sum_k (\lambda A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) \\
&= \lambda \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\
&= \lambda(AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\
&= [\lambda(AB) + AC]_{ij}.
\end{aligned}$$

Soluções de EDO's

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais lineares:

$$x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \tag{5}$$

Aqui $x_1, \ldots, x_n \in C^1(I)$, onde I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, x_i' indica a derivada de x_i e a_{ij} são escalares em $\mathbb{R}$. Defina $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

A matriz A é denominada de **matriz do sistema**. Defina $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. Podemos pensar em f Como uma função de $\{1, \ldots, n\}$ a $C^1(I)$, ou seja, $\mathbf{x} \in C^1(I)^n$. Com essa notação, nosso sistema de equações diferenciais se torna $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

O conjunto de soluções para o nosso sistema é $V = \{\mathbf{x} \in C^1(I)^n \mid \mathbf{x}' = A\mathbf{x}\}$. Claramente, V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Observação

Geralmente, é muito conveniente, mas não totalmente consistente, denotar o elemento zero e a adição em $\mathbb{K}$ e V pelos mesmos símbolos.

Exemplo

Seja $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$. Consideramos L como um grupo abeliano com relação à multiplicação e introduzimos em L multiplicação por um escalar de $\mathbb{R}$ de acordo com a fórmula $(a,\ x) \to x^a$.

- o vetor zero em L é o elemento 1, ou seja, $\mathbf{0} = 1$.
- a identidade $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ adquire a forma $x^1 = x$
- a identidade $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$ adquire a forma $(x^b)^a = x^{ba}$
- a identidade $(a+b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ neste contexto pode ser escrita como $x^{a+b} = x^a x^b$; etc.

Comentários Finais.