LISTA PARA ENTREGA 7

1 — Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Prove que:

a) Se $S \subseteq W$ e ambos são subconjuntos de V então $S^0 \supseteq W^0$.

b) Se $S \subseteq V$ é um subconjunto, então $S^0 = \langle S \rangle^0$.

c) Se $S, W \subseteq V$ são subespaços de V então $S = W$ se e somente se $S^0 = W^0$.

d) Se S é um subespaço de V então que $(V/S)^* \simeq S^0$.

2 — Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que todo subespaço próprio de V é uma interseção finita de hiperplanos de V.

3 — Prove que

a) Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de T então $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ são os autovalores de T^k.

b) Seja V um e.v. sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e seja $T : V \to V$ um operador linear. Prove que α é um autovalor de $p(T)$ se e somente se $\alpha = p(\lambda)$ para algum λ autovalor de T.

4 — Prove que o polinômio característico da transposta de um operador T^t coincide com o polinômio característico de T.

5 — Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\dim \operatorname{Im}(T) = m$, então T tem no máximo $m + 1$ autovalores.

6 — Sejam $T, S : V \to V$ operadores lineares. Suponha que v é autovetor de T e de S associado aos autovalores λ_1, λ_2 de T e S, respectivamente. Ache um autovetor e um autovalor de:

a) $\alpha S + \beta T$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $S \circ T$

7 — Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considere as funções $f_1(x) = e^{2x} \sin(x)$, $f_2(x) = e^{2x} \cos(x)$ e $f_3(x) = e^{2x}$, o subespaço $S = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Determine:

a) A matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de S.

b) Os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

8 — Seja $T : V \to V$ $(\dim V < \infty)$ um operador diagonalizável cujos autovalores têm multiplicidade algébrica 1.

a) Prove que qualquer operador $G : V \to V$ tal que $GT = TG$ pode ser representado como um polinômio em T.

b) Prove que a dimensão do espaço vetorial formado por tais operadores (operadores que comutam com T) é igual a dimensão de V.

Daniel Miranda