LISTA PARA ENTREGA 4

1 — Sejam

$$f_1(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3),$$
$$f_3(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3),$$
$$f_4(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2).$$

a) Prove que $\underline{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ é uma base para $\mathbb{R}_{(3)}[x]$.

b) Se $g(X) \in \mathbb{R}_{(3)}[x]$, prove que $[g]_{\underline{B}} = \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{pmatrix}$

c) Calcule os vetores de coordenadas da base canônica , $(1, x, x^2, x^3)$ em relação a $\underline{B}$.

2 — Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : U \to U$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Seja $W = \{x \in U : T(x) = x\}$ e $V = \{x \in U : T(x) = 0\}$. Prove que:

a) $U = W \oplus V$

b) $T(U) = W$

c) $T(V) = \{0\}$.

3 — O Teorema do Kernel-Imagem afirma que se $T : U \to V$ é uma transformação linear e $\dim_{\mathbb{K}} U < \infty$ então $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) < \infty$ (claramente) e $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(T) < \infty$. Mostraremos a seguir a recíproca do teorema: Se $T : V \to W$ é um transformação linear e $\{u_1, ..., u_k\}$ e $\{T(v_1), ..., T(v_l)\}$ são bases de $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$, respectivamente, mostre que $\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_l\}$ é uma base de V.

4 — Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.

a) Mostre que se $\underline{B} = \{u_i\}_{i \in I}$ for uma base de U então $\{T(u_i)\}_{i \in I}$ gera $\operatorname{Im}(T)$.

b) Prove que T é injetora se e somente se T leva cada subconjunto LI de U em um subconjunto LI de V. Conclua que neste caso $\dim_{\mathbb{K}} U \leq \dim_{\mathbb{K}} V$.

c) Mostre que T é um isomorfismo se e somente se T leva base em base. Conclua que se $U \simeq V$ então $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$.

d) Prove que se o conjunto $\{T(u_i)\}_{i \in I}$ for LI em V, então $\{u_i\}_{i \in I}$ é LI em U.

5 — Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ número complexos não nulos. Considere o conjunto das sequências definidas indutivamente como segue:

$$V := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n\}$$

Mostre que V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão 2. (Dica: encontre um isomorfismo $T : V \to \mathbb{C}^2$)

6 — Uma *sequência exata* de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V_i de dimensão finita

$$V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} \cdots \xrightarrow{T_n} V_n$$

é uma sequência de transformações lineares T_i tais que $\ker T_{i+1} = \operatorname{Im} T_i$ para $i = 0, \ldots n$.

a) Mostre que a sequência $0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2$ é exata se e somente se T_1 é injetora.

b) Mostre que a sequência $V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} 0$ é exata se e somente se T_0 é sobrejetora.

c) Considere a sequência exata

$$0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} V_4 \xrightarrow{T_4} 0$$

na qual $\dim_{\mathbb{K}} V_i = d_i$, mostre que $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$.

Daniel Miranda