LISTA PARA ENTREGA 3

1 — Prove que o axioma de comutatividade da soma pode ser deduzido dos outros axiomas.

2 — Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \bigsqcup \mathfrak{B}_2$ então $V = \operatorname{span}(\mathfrak{B}_1) \oplus \operatorname{span}(\mathfrak{B}_2)$

3 — Dado um corpo F. Um subcorpo K é um subconjunto de F que é corpo quando restringimos as operações de F a K.

- a Mostre que F é espaço vetorial sobre K.
- b Suponha que L é um subespaço m—dimensional sobre F. Suponha que F é um espaço n dimensional sobre K. Qual a dimensão de L sobre K?

4 — Lembrando que uma bandeira é uma sequência estritamente crescente de subespaços encaixantes $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n \ldots$, e que uma bandeira é dita maximal em V se $L_0 = \{0\}$, $\bigcup L_i = V$ e se nenhum subespaço M puder ser inserido entre L_i e L_{i+1}, ou seja se $L_i \subset M \subset L_{i+1}$ então $M = L_i$ ou $M = L_{i+1}$:

- a Prove que se $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = W_1$ uma bandeira maximal para W_1 e 0 e $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_m = W_2$ uma bandeira maximal para W_2 mostre que

$$0 \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \subsetneq V_n \oplus L_1 \subsetneq V_n \oplus L_2 \ldots \subsetneq V_n \oplus L_m = W_1 \oplus W_2$$

  é bandeira maximal para $V = W_1 \oplus W_2$. Conclua que dimensão da soma direta de espaços vetoriais de dimensão finita tem dimensão finita igual a soma das dimensões.
- b Seja $0 \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_n \subsetneq \ldots \subset V$ uma bandeira (não necessariamente finita) maximal para V. Prove sem usar lema de Zorn que V possui base.

Daniel Miranda