LISTA PARA ENTREGA 2

1 — Em $\mathbb{R}^2$ mantenhamos a definição de produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras diferentes, a definição de soma $u+v$ de vetores $u=(x,y)$ e $v=(x',y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a) $u+v=(x+y',x'+y)$,

b) $u+v=(xx',yy')$,

c) $u+v=(3x+3x',5x+5x')$.

2 — Seja $P_n(x)$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes num corpo F de grau menor igual a n. Mostre que:

a) $1,x,\ldots x^n$ é uma base para L. As coordenadas do polinômio $f(x)$ nessa base são os seus coeficientes.

b) $1,x-a,(x-a)^2,\ldots.(x-a)^n$ uma base de L. Se $\operatorname{char}(K)=p>n$ então as coordenadas do polinômio $f(x)$ nessa base são $\{f(a),f'(a),\frac{f''(a)}{2},\ldots\frac{f^n(a)}{n!}\}$

3 — Dados W_1 e W_2 dois subespaços de um espaço vetorial V tal que a união deles seja subespaço. Prove que $W_1\subset W_2$ ou que $W_2\subset W_1$.

4 — Dado S um subconjunto de um espaço vetorial V defina o subespaço gerado por S: $\operatorname{span}(S)=\langle S\rangle$.

a) Prove que dois vetores v_1,v_2 não nulos são L.I. se e somente se $\langle v_1\rangle\bigcap\langle v_2\rangle=0$.

b) Prove que $\langle v_1\rangle\bigcap\langle v_2\rangle\bigcap\langle v_3\rangle=0$ não implica que os vetores v_1,v_2,v_3 sejam L.I..

c) Dado $S=\{s_1,\ldots,s_n\}\subset V$. Prove que S é L.I. se e somente se $\operatorname{span}(S\backslash s_i)\neq\operatorname{span}(S)$ para todo $s_i\epsilon S$.

d) Prove que se $A,B\subset V$. Então $\operatorname{span}(A)+\operatorname{span}(B)=\operatorname{span}(A\bigcup B)$.

e) Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\bigsqcup\mathfrak{B}_2$ então $V=\operatorname{span}(\mathfrak{B}_1)\oplus\operatorname{span}(\mathfrak{B}_2)$. Observação $\bigsqcup$ denota a união disjunta.

5 — Considere o subconjunto S das funções de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que são soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=0$$

onde $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

6 — Seja $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ o espaço das funções, onde $\mathbb{K}$ é um corpo. No caso particular em que $X=\mathbb{N}$ o espaço é denominado **espaço de sequências** e vamos denotá-lo por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Um elemento $f\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é uma função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ dada por $n\mapsto x_n\in\mathbb{K}$ e será denotado por $f=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$?

a) O conjunto das sequências com apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero.

b) Nenhuma coordenada igual a 1.

Nos próximos itens $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

c) O conjunto das séries de Cauchy, ou seja, as sequencias tais que dado $\epsilon>0$ existe $N>0$ tal que $|x_n-x_m|<\epsilon$ para $n,m>N$.

d) As sequências tais que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty$.

e) As sequências limitadas, i.e. as sequencias $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para as quais existe $M>0$ tal que $|x_n|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

7 — Dado S um subespaço de V e $v\in V$. O conjunto $v+S=\{v+s:s\in S\}$ é chamado subespaço afim de V.

a) Quando um subespaço afim de V é subespaço de V?

b) Mostre que dois subespaços afim $x+S$ e $y+S$ ou são iguais ou são disjuntos.

c Conclua que a família $\{x + S, x \in V\}$ é uma partição em V. Descreva a relação de equivalência associada.