LISTA 4

Quociente e Dual

1 — Seja $V = (0,\infty)$, dados $x,y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ defina as operações:

$$x + y := x \cdot y$$
$$\alpha \cdot x := x^\alpha$$

Verifique que V com essas operações é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e que $T : V \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \ln(x)$ é uma transformação linear.

2 — Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e $U' \subseteq U, V' \subseteq V$ subespaços vetoriais. Mostre que $T(U')$ é um subespaço de V e que $T^{-1}(V')$ (pré-imagem de V' por T) é um subespaço de U. Conclua que $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço de V e $\ker(T)$ é um subespaço de U.

3 — Seja $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ o espaço dos polinômios de grau menor que n e seja A_h o operador diferença

$$A_h(p(x)) := \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

sendo h um número fixo não nulo. Ache o kernel e a imagem desse operador.

Espaços Quocientes

4 — (Teorema de Isomorfismo) Prove que dada $T : U \to V$ uma transformação linear, então temos:

$$\frac{U}{\ker(T)} \simeq \operatorname{Im}(T)$$

5 — Dados $M, N \subset L$. Prove que a seguinte aplicação é um isomorfismo linear

$$(M+N)/N \to M/(M\cap N) : m+n+N \mapsto m+M\cap N$$

6 — Prove que $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$.

7 — Dado L um subespaço de V. O conjunto $v + S = \{v + s : s \in S\}$ é chamado subespaço afim de V.

a) Quando um subespaço afim de V é subespaço de V?

b) Mostre que dois subespaços afim $x + S$ e $y + S$ ou são iguais ou disjuntos.

8 — Seja V o espaço das funções reais contínuas no intervalo fechado $[a,b]$, $V = C[a,b]$ e seja $W = \operatorname{Const}[a,b]$ o espaço das funções constantes em [a,b]

a) Prove que $\operatorname{Const}[a,b]$ é isomorfo a $\mathbb{R}$

b) Prove que V/W é isomorfo ao espaço vetorial das funções continuas em $[a,b]$ que se anulam em a.

9 — Dado $L = M \oplus N$. Então a aplicação canônica

$$M \to L/N : m \mapsto m + N$$

é um isomorfismo.

10 — Dados $S, T, U \subset V$. Mostre que se $U \subset S$, então

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U)$$

Daniel Miranda

11 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V, W)$. Mostre que τ é isomorfismo se e somente se τ leva base em base.

12 — Dados dois espaços vetoriais V, W sobre $\mathbb{F}$. Definimos $V \boxplus W$ como o conjunto $\{(v, w) : v \in V$ e $w \in W\}$ munido das operações

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Prove que $V \boxplus W$ é espaço vetorial. O espaço $V \boxplus W$ é chamado soma direta externa de V e W.

13 — Seja $V = A + B$ e seja a soma direta externa $E = A \boxplus B$. Defina a aplicação $\tau : A \boxplus B \to A + B$ como $\tau : (a, b) = a + b$. Prove que tal é linear. Qual o kernel de τ? Quando τ é um isomorfismo.

14 — Dado $\tau : V \to W$, a $\dim(\mathrm{im}(\tau))$ é chamado de posto de τ (o posto de τ é denotado $\mathrm{rk}(\tau)$). Prove que:

- a Se $\dim(V) < \infty$ e $\tau \in \mathfrak{L}(V, W)$ e $\mathrm{rk}(\tau^2) = \mathrm{rk}(\tau)$ então $\mathrm{im}(\tau) \cap \ker(\tau) = \{0\}$.
- b Dado $\tau \in \mathfrak{L}(U, V)$ e $\sigma \in \mathfrak{L}(V, W)$ então $\mathrm{rk}(\sigma\tau) \leqslant \min\{\mathrm{rk}(\sigma), \mathrm{rk}(\tau)\}$.
- c Se $\tau, \sigma \in \mathfrak{L}(V)$e τ é invertível então $\mathrm{rk}(\sigma\tau) = \mathrm{rk}(\tau\sigma) = \mathrm{rk}(\sigma)$.
- d Se $\tau, \sigma \in \mathfrak{L}(U, V)$ então $\mathrm{rk}(\tau + \sigma) \leqslant \mathrm{rk}(\tau) + \mathrm{rk}(\sigma)$.

15 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V_1, W_1)$ e $\mathrm{rk}(\tau^2) = \mathrm{rk}(\tau)$ mostre que $\mathrm{im}(\tau) \cap \ker(\tau) = \{0\}$.

16 — Dado L um espaço vetorial n-dimensional e $M \subset L$ um subespaço m-dimensional. Prove que existem um número finito de funcionais $f_1, \ldots, f_{n-m} \epsilon L^*$ tal que $M = \{l | f_1(l) = \ldots . f_{n-m}(l) = 0\}$.

17 — Dado S um subespaço de V. e seja $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ uma base para S, como você construiria a partir dessa base uma base para V/S.

18 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V)$ e S um subespaço de V. Defina a aplicação $\tau' : V/S \to V/S$ por

$$\tau'(v + S) = \tau v + S$$

Quando τ' está bem definida e é uma aplicação linear? Quais são $\mathrm{im}(\tau')$ e $\ker(\tau')$.

Espaços Duais

19 — Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e sejam $f, g \in V^*$ tais que a função h dada por $h(u) = f(u) \cdot g(u)$, também seja um funcional linear sobre V. Mostre que $f = 0$ ou $g = 0$.

20 — Seja $W \subseteq (\mathbb{R}^4)^*$ um subespaço formado pelos funcionais $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tais que $\ker f$ contém os vetores $(1, 0, 3, -2)$ e $(0, 1, 3, 0)$. Ache uma base de W.

21 — Sejam $u, v \in V$ com a seguinte propriedade: "sempre que $T(u) = 0$ então $T(v) = 0$, para $T \in V^*$". Mostre que $v = \alpha u$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$.

22 — Seja V um espaço vetorial arbitrário sobre $\mathbb{K}$ e $\underline{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ uma base de V. Para cada $i \in I$, defina um funcional linear $v_i^* : V \to \mathbb{K}$ tal que $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

- a Mostre que $\{v_i^*\}_{i \in I}$ é LI.

b) Mostre que $\{v_i^*\}_{i\in I}$ é uma base de V^* se e somente se I for finito.

23 — Pode um funcional linear sobre os complexos assumir apenas valores reais?

24 — Defina um funcional α em $\mathbb{C}^3$tal que $a((1,1,1)=0$ e $\alpha(1,i,3)$=0.

25 — Dado α um funcional linear não-nulo num espaço vetorial V de dimensão n. Prove que $C=\{x:\alpha(x)=0\}$ é um espaço vetorial. Qual a dimensão de C?

26 — Calcule todos os funcionais lineares de $\mathbb{Z}^3$. Qual a dimensão do espaço dos funcionais lineares sobre $\mathbb{Z}^3$?

27 — Seja $T\in\mathfrak{L}(V)$, e seja $L\subset V$ o subespaço de V tal que $L=\{v: f(T(v)=0, \forall f\in V^*\}$. Prove que $L=\ker(T)$.

28 — Seja T a função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+2x_3,2x_1+x_2,-x_1-2x_2+2x_3)$$

a) Verifique que T é uma transformação linear
b) Determine a imagem de T
c) Determine o posto de T

29 — Dado $M_{n\times n}$(K) o espaço vetorial das matrizes $n\times n$ sobre K e seja B uma matriz fixa em $M_{n\times n}(K)$. Se $T(A)=\mathrm{AB}-\mathrm{BA}$, prove que T(A) é uma transformação linear de $M_{n\times n}$(K) em $M_{n\times n}$(K). Determine a imagem e o posto de T.

30 — Mostre que $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ não é isomorfo ao seu dual. (Observe que neste caso não da para usar o mesmo argumento do exercício anterior)

31 — Sejam $\alpha_0,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ números reais diferentes dois a dois. Mostre que existe uma única $(n+1)$-upla $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$p'(0)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k p(\alpha_k)\quad\text{para todo } p\in\mathcal{P}_n(\mathbb{R}).$$

32 — Encontre as bases duais e biduais de cada uma das seguintes bases de $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
b) $\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$

33 — Seja W um subespaço próprio de um espaço vetorial V de dimensão finita e considere $f\in W^*$. Mostre que existe $g\in V^*$ tal que $g(w)=f(w)$ para todo $w\in W$.

34 — Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, H um hiperplano de V e $v_0\in V$. Chamamos o conjunto

$$v_0+H=\{v_0+v\mid v\in H\}$$

de **hiperplano afim** de V. Mostre que se $f\in V^*$, $f\neq 0$ e $\alpha\in\mathbb{K}$ então $\{v\in V\mid f(v)=\alpha\}$ é um hiperplano afim.

35 — Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que todo subespaço próprio de V é uma interseção finita de hiperplanos de V.

36 — Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que

a. $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$
b. $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

37 — Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Prove que:

a. Se $S \subseteq W$ e ambos são subconjuntos de V então $S^0 \supseteq W^0$.
b. Se $S \subseteq V$ é um subconjunto, então $S^0 = \langle S \rangle^0$.
c. Se $S, W \subseteq V$ são subespaços de V então $S = W$ se e somente se $S^0 = W^0$.
d. Se S é um subespaço de V então que $(V/S)^* \simeq S^0$.

38 — Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $S \subseteq V$ e $\Phi : V \to V^{**}$ o isomorfismo (definido em sala de aula) que leva $v \mapsto \phi_v$ onde $\phi_v : V^* \to \mathbb{K}$ é dado por $T \mapsto \phi_v(T) = T(v)$. Mostre que S é um conjunto gerador de $\Phi^{-1}\left(\left(S^0\right)^0\right)$.

39 — Seja V um espaço vetorial arbitrário sobre $\mathbb{K}$. Mostre que a injeção $\Phi : V \hookrightarrow V^{**}$ (veja Exercício anterior) é um isomorfismo se e somente se V tem dimensão finita.

40 — Seja W o conjunto de todos os vetores $(x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{K}^n$ tais que $x_1 + \ldots + x_n = 0$

a. Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$.
b. Prove que W^0 consiste dos funcionais lineais da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c \sum_{j=1}^{n} x_j$$

c. Mostre que o espaço dual W^* de W pode ser identificado com os funcionais lineares

$$f(x_1, \ldots x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

em $\mathbb{K}^n$ que satisfazem $c_1 + \ldots + c_n = 0$.

41 — Sejam X um conjunto, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ o espaço vetorial de todas as funções de X em $\mathbb{K}$. Seja W um subespaço de dimensão n de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Mostre que existem elementos $x_1, \ldots, x_n \in X$ e funções $f_1, \ldots, f_n \in W$ tais que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \ldots n$.