LISTA 2

Bases, Dimensão e Soma de Espaços Vetoriais

1 — Mostre que $\mathbb{N}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. (Dica: use o fato que existe uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$.

2 — Para os espaços abaixo, determine se são finito dimensionais e se sim determine a dimensão e uma base para o espaço:

a. Os números naturais visto como espaço vetorial sobre os racionais.
b. O conjunto de todas as sequências reais.
c. O conjunto das sequências reais que satisfazem $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ para $k \geqslant 3$
d. Os números complexos $\mathbb{C}$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e visto como um corpo sobre $\mathbb{R}$.
e. $\mathbb{C}^n$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
f. O conjunto das matrizes $m \times n$ sobre K, $M_{n\times m}(K)$.
g. O conjunto das sequências que com apenas um número finito de termos não nulos.

3 — Dado um corpo F. Um subcorpo K é um subconjunto de F que é corpo quando restringimos as operações de F a K.

a. Mostre que F é espaço vetorial sobre K.
b. Suponha que L é um subespaço m—dimensional sobre F. Suponha que F é um espaço n dimensional sobre K. Qual a dimensão de L sobre K?

4 — Calcule a dimensão dos seguintes espaços e determine uma base:

a. O espaço dos polinômios de grau menor que p em n variáveis
b. O conjunto dos polinômios homogêneos de grau menor que p em n variáveis.
c. O conjunto das funções em $F(S)$, $|S| < \infty$ que se anulam em todos os pontos de um subconjunto $S_0 \subset S$.
d. O conjunto das sequências que com apenas um número finito de termos não nulos.

5 — Dado Um conjunto linearmente independente de vetores E de um espaço vetorial V, prove que existe uma base E' de V contendo E. (Axioma da escolha)

6 — Dado $W_1 \subset V$ e seja $\mathfrak{B}_1$ uma base para W_1 prove que existe uma base $\mathfrak{B}$ para V tal que $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$.

7 — Prove que se L é um subespaço de V e $\dim(L) = \dim(V) < \infty$, então $L = V$.

8 — Prove que o axioma de comutatividade da soma pode ser deduzido dos outros axiomas.

9 — Prove que em qualquer conjunto de vetores S existe um subconjunto S' linearmente independente tal que $\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(S')$. (Axioma da escolha)

10 — Dado V espaço vetorial sobre os complexos e seja $\alpha, \beta, \gamma \in V$ linearmente independentes. Prove que $\alpha+\beta, \beta+\gamma$ e $\alpha+\gamma$ são linearmente independentes.

$\star$ **11 —** Mostre que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.

Soma de Espaços Vetoriais

12 — Prove que

- a $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
- b $L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$
- c Existe um elemento neutro para a adição de subespaços?

13 — Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \bigsqcup \mathfrak{B}_2$ então $V = \mathrm{span}(\mathfrak{B}_1) \oplus \mathrm{span}(\mathfrak{B}_2)$

14 — Dado $W_1 \subset V$ prove que existe $W_2 \subset V$ tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

15 — Dado $L \subset V$, prove que se $\dim(L) = \dim(V) < \infty$. então $L = V$.

16 — Prove que a soma $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ é soma direta se e somente se a união das bases de L_i produz uma base para L.

17 — Dê duas demonstrações distintas para o teorema do Núcleo-Imagem. Compare as demonstrações.

18 — Dado um subespaço $L \subset V$ prove que existe M tal que $V = L \oplus M$. O subespaço M é chamado subespaço complementar a L.

19 — Se $\dim V = n$ e $\dim W = m$

- a Exiba uma base de $V \boxplus W$.
- b Calcule a de $V \boxplus W$.

20 — Seja P_k o conjunto dos polinômios de grau menor igual que n.

- a Prove que o conjunto de todos os polinômios pares L_1, i.e, $p(x) = p(-x)$, e o conjunto de todos os polinômios impares, i.e, $p(x) = -p(-x)$ L_2 são subespaços vetoriais.
- b Prove que $P_k(x) = L_1 \oplus L_2$
- c Ache o subespaço complementar a $L_3 = \{p(x) \in P_k : p(1) = 0\}$

21 — Prove que para qualquer n

$$\dim(L_1 + L_2 + \ldots + L_n) < \dim(L_1) + \dim(L_2) + \ldots + \dim(L_n)$$

22 — Prove que para quaisquer subespaços L_1 e L_2

$$\dim(L_1) + \dim(L_2) = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$$

23 — Dado L um espaço n-dimensional sobre um corpo finito com q-elementos.

- a Calcule o número de subespaços k-dimensionais em L. Para $1 \leqslant k \leqslant n$
- b Calcule o número de pares de subespaços L_1 e L_2 com $\dim(L_1)$, $\dim(L_2)$ e $\dim(L_1 \cap L_2)$ fixos. Verifique que quando $q \to \infty$ o número de pares relativos em posição geral sobre o número total de pares com $\dim(L_1)$, $\dim(L_2)$ dados se aproxima a 1.

24 — Lembrando que uma bandeira é uma sequência estritamente crescente de subespaços encaixantes $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n \ldots$, e que uma bandeira é dita maximal em V se $L_0 = \{0\}$, $\bigcup L_i = V$ e se nenhum subespaço M puder ser inserido entre L_i e L_{i+1}, ou seja se $L_i \subset M \subset L_{i+1}$ então $M = L_i$ ou $M = L_{i+1}$:

- a Prove que se $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = W_1$ uma bandeira maximal para W_1 e 0 e $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_m = W_2$ uma bandeira maximal para W_2 mostre que

$$0 \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \subsetneq V_n \oplus L_1 \subsetneq V_n \oplus L_2 \ldots \subsetneq V_n \oplus L_m = W_1 \oplus W_2 = V$$

é bandeira maximal para $V = W_1 \oplus W_2$. Conclua que dimensão da soma direta de espaços vetoriais de dimensão finita tem dimensão finita igual a soma das dimensões.

b Seja $0 \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n \subsetneq \dots \subset V$ uma bandeira (não necessariamente finita) maximal para V. Prove sem usar lema de Zorn que V possui base.

Coordenadas

25 — Sejam

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3), \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}x(x-2)(x-3), \\ f_3(x) &= -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3), \\ f_4(x) &= \frac{1}{6}x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

a Prove que $\underline{\mathrm{B}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ é uma base para $\mathbb{R}_{(3)}[x]$.

b Se $g(X) \in \mathbb{R}_{(3)}[x]$, prove que $[g]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{pmatrix}$

26 — Seja $\underline{\mathrm{B}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ seja a base de $\mathbb{R}_{(3)}[x]$ do Exercício anterior. Calcule os vetores de coordenadas da base canônica , $(1, x, x^2, x^3)$ em relação a $\underline{\mathrm{B}}$.

27 — Seja $\underline{\mathrm{B}}$ uma base para o espaço vetorial dimensional finito V sobre o corpo $\mathbb{K}$ e deixe $u_1, \dots, u_k)$ seja uma sequência de vetores em V. Prove que $\langle(u_1, \dots, u_k)\rangle = V$ se e somente se $(\langle[u_1]_{\underline{\mathrm{B}}}, \dots, u_k]_{\underline{\mathrm{B}}}\rangle = \mathbb{K}^n$.

28 — Seja B uma base para o espaço vetorial dimensional n V sobre o corpo $\mathbb{K}$ e deixe $(u_1, \dots, u_n)$ seja uma sequência de vetores em V. Prove que $(u_1, \dots, u_n)$ é uma base para V se e somente se $([u_1]_B, \dots$, for um base para $\mathbb{K}^n$.