Lista 7 - Probabilidade

Chegamos aos Limites

Lei Fraca e Lei Forte

1 — Prove o Método de Tuncamento de Markov: Considere X uma variável aleatória, com média finita. Considere $M > 1$ o nível de truncamento. Defina

$$\lfloor X \rceil^M := \begin{cases} X, & \text{se } |X| \leq M \\ 0, & \text{se } |X| > M \end{cases} = X \cdot \mathbf{1}_{\{|X| \leq M\}}.$$

Então

- $|\lfloor X \rceil^M| \leq M$ pontualmente, e $|\lfloor X \rceil^M| \leq |X|$
- $\lfloor X \rceil^M \to X$ pontualmente quando $M \to \infty$,
- A variável $\lfloor X \rceil^M$ possui todos os momentos finitos.
- Pelo Teorema da Convergência Dominada $\mathbf{E}[\lfloor X \rceil^M] \to \mathbf{E}[X]$ quando $M \to \infty$.

2 — Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $\mathrm{No}(0, 1)$. Prove que

$$\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{(X_1 - 1)^2 + \cdots + (X_n - 1)^2}$$

converge quase certamente e determine para qual valor.

3 — Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $X_1 \sim \mathrm{Uni}[0, 1]$. Prove que a média geométrica

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right)^{1/n}$$

converge quase certamente e determine para qual valor.
Dica: Aplique $\ln$.

4 — Demonstração da Lei Fraca usando Funções Geradoras
O objetivo aqui é provar a lei (fraca) de grandes números usando funções geradoras de momento.
Em particular, deixe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ser i.i.d. variáveis aleatórias com valor esperado

$$\mathbf{E}[X_i] = \mu < \infty$$

e funções geradoras de momento $M_X(s)$ que é finito em algum intervalo $[-c, c]$ onde $c > 0$ é uma constante. Seja

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}. \qquad (1)$$

Prove

$$\lim_{n \to \infty} M_{\overline{X}}(s) = e^{s\mu}, \qquad \text{para todo } s \in [-c, c]. \qquad (2)$$

Uma vez que esta é a função geradora de momento da variável aleatória constante μ, concluímos que a distribuição de $\overline{X}$ converge para μ.

Dica: use que para uma variável aleatória X com funções geradoras de momento bem definida, $M_X(s)$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left[M_X\left(\frac{s}{n}\right)\right]^n = e^{s\mathbf{E}[X]}.$$

5 — Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias independentes com $E[X_i] = 0$ e $\sigma_i = \mathbf{Var}(X_i) < \infty$ para todo i, e seja $S_n = \sum X_i$. Prove que se $\sum \sigma_k^2/k^2 < \infty$, então $S_n/n \xrightarrow{q.c} 0$.
[Esta é uma Lei Forte de Grandes Números para somas independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas.]

6 — Seja $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias i.i.d. com $\mathbf{P}[X_k = 0] = \mathbf{P}[X_k = 2] = 1/2$.

a) Prove que $Z = \sum_{k=1}^{\infty} X_k/3^k$ converge quase certamente.

b) Prove que Z tem distribuição de Cantor.

c) Use os itens anteriores para calcular a média e variância da distribuição Cantor.

7 — Integração de Monte Carlo

Sejam f uma função contínua com imagem no intervalo [0,1] e $X_1, c_1, X_2, c_2 \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes uniformes no [0,1]. Tomamos

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se } f(X_i) > c_i \\ 0, & \text{se } f(X_i) \le c_i. \end{cases}$$

Prove que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \to \int_0^1 f(x)dx, \quad \text{quase certamente}$$

Funções Características

8 — Prove a seguinte tabela:

Distribuição	Função Característica
Binomial	$[(1-p)+pe^{it}]^n$
Poisson	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Normal	$e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}$

9 — Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes então $\varphi_{X+Y} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

10 — Prove que se $X = aY + b$, então $\varphi_X(t) = \varphi_{aY+b}(t) = e^{itb}\varphi_Y(at)$

11 — Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, de Poisson de parâmetro λ Calcule a distribuição de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Teorema do Limite Central

12 — Você convidou 64 convidados para uma festa. Você precisa fazer sanduíches para os convidados. Você acredita que um convidado pode precisar de 0, 1 ou 2 sanduíches com probabilidades $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente. Você assume que o número de sanduíches que cada hóspede precisa é independente dos outros hóspedes. Quantos sanduíches você deve fazer para que você tenha 95% de certeza de que não haverá escassez?

13 — Use o Teorema do Limite Central para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = 1/2$$

14 — Seja $M_X(s)$ finita para todo $s \in [-c, c]$. Prove que

$$\lim_{n\to\infty}\left[M_X(\frac{s}{n})\right]^n = e^{s\mathbf{E}[X]}.$$

Dica: Calcule

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(M_X\left(\frac{s}{n}\right)\right)$$

usando L'Hopital.

15 — O objetivo neste problema é provar o teorema do limite central usando funções geradoras de momento.

Em particular, sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias i.i.d com valor esperado $\mathbf{E}[X_i] = \mu < \infty$, $\mathbf{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, e funções geradoras de momento $M_X(s)$ que é finito em algum intervalo $[-c, c]$, onde $c > 0$ é uma constante. Considere

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}. \quad (3)$$

Prove

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(s) = e^{\frac{s^2}{2}}, \qquad \text{para todo } s \in [-c, c]. \quad (4)$$

Uma vez que este é a funções geradoras de momento de uma variável aleatória normal padrão, concluímos que a distribuição de Z_n converge para a variável aleatória normal padrão.

Dica:

Calcule o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[M_X\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]}{1/n}$ usando L'Hopital.